

Вывод стохастического дифференциального уравнения Васичека

Гармаева Дари-Ханда Баировна

20 мая 2021 г.

1 Общая формула

Модель Васичека - это однофакторная равновесная математическая модель, в рамках которой предполагается, что процентная ставка колеблется вокруг некоего среднего уровня μ и возвращается к нему со скоростью α .

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

Решением данного СДУ будет являться r_t , при этом $r(t_0) = r_0$.

2 Прямое решение

Для того, чтобы проинтегрировать (1), сперва перенесем все с r_t в левую часть, остальное оставим в правой части:

$$dr_t + \alpha r_t dt = \alpha \mu dt + \sigma dW_t \quad (2)$$

Далее воспользуемся техническим трюком и домножим все части на $e^{\alpha t}$:

$$e^{\alpha t}(dr_t + \alpha r_t dt) = e^{\alpha t}(\alpha \mu dt + \sigma dW_t) \quad (3)$$

Заметим, что левая часть - это производная произведения двух функций $(XY)' = X'Y + XY'$. Таким образом ее можно записать как:

$$e^{\alpha t}dr_t + e^{\alpha t}\alpha r_t dt = (r_t e^{\alpha t})' \quad (4)$$

Далее проинтегрируем уравнение (3):

$$\int dr_t e^{\alpha t} dt = \int e^{\alpha t}(\alpha \mu dt + \sigma dW_t) \quad (5)$$

Переходим к определенному интегралу по t для получения решения:

$$\int_{t_0}^T r_t e^{\alpha t} dt = \int_{t_0}^T e^{\alpha t} \alpha \mu dt + \int_{t_0}^T e^{\alpha t} \sigma dW_t \quad (6)$$

$$e^{\alpha T} r_T - e^{\alpha t_0} r_0 = \int_{t_0}^T e^{\alpha t} \alpha \mu dt + \int_{t_0}^T e^{\alpha t} \sigma dW_t \quad (7)$$

$$e^{\alpha T} r_T = e^{\alpha t_0} r_0 + \int_{t_0}^T e^{\alpha t} \alpha \mu dt + \int_{t_0}^T e^{\alpha t} \sigma dW_t \quad (8)$$

$$r_T = e^{-\alpha(T-t_0)} r_0 + \int_{t_0}^T e^{-\alpha(T-t)} \alpha \mu dt + \int_{t_0}^T e^{-\alpha(T-t)} \sigma dW_t \quad (9)$$

Выражение $\int_{t_0}^T e^{-\alpha(T-t)} \alpha \mu dt$ можно преобразовать следующим образом:

$$\int_{t_0}^T e^{-\alpha(T-t)} \alpha \mu dt = e^{-\alpha T} \alpha \mu \int_{t_0}^T e^{\alpha t} dt = e^{-\alpha T} \alpha \mu \frac{1}{\alpha} [e^{\alpha t}]_{t_0}^T = e^{-\alpha T} \mu [e^{\alpha T} - e^{\alpha t_0}] = \mu [1 - e^{-\alpha(T-t_0)}] \quad (10)$$

Уравнение (9) теперь состоит из детерминированной и стохастической частей:

$$r_T = e^{-\alpha(T-t_0)} r_0 + \mu [1 - e^{-\alpha(T-t_0)}] + \int_{t_0}^T e^{-\alpha(T-t)} \sigma dW_t \quad (11)$$

Для того, чтобы получить математическое ожидание (r_T) , вспомним, что математическое ожидание от W_t равно нулю по определению Винеровского процесса, таким образом:

$$E(r_T) = e^{-\alpha(T-t_0)} r_0 + \mu [1 - e^{-\alpha(T-t_0)}] \quad (12)$$

Для того, чтобы получить дисперсию от (r_T) , воспользуемся следующей формулой:

$$Var(r_t) = E(r_t^2) - [E(r_t)]^2 \quad (13)$$

Дисперсия детерминированной части равна 0, а математическое ожидание в квадрате $[E(r_t)]^2$ стохастической части равно 0, поэтому:

$$Var(r_t) = E(r_t^2) \quad (14)$$

Для того, чтобы получить дисперсию от $E(r_T^2)$, воспользуемся изометрией Ито ($dW_t dW_t = dt$):

$$\begin{aligned} E[\sigma^2 \int_{t_0}^T e^{-2\alpha(T-t)} dt] &= \sigma^2 e^{-2\alpha T} E[\int_{t_0}^T e^{2\alpha t} dt] = \sigma^2 e^{-2\alpha T} \frac{1}{2\alpha} [e^{2\alpha t}]_{t_0}^T = \sigma^2 e^{-2\alpha T} \frac{1}{2\alpha} [e^{2\alpha T} - e^{2\alpha t_0}] = \\ &= \sigma^2 \frac{1}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha(T-t_0)}] \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом:

$$r_T \sim N \left[e^{-\alpha(T-t_0)} r_0 + \mu [1 - e^{-\alpha(T-t_0)}]; \sigma^2 \frac{1}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha(T-t_0)}] \right] \quad (16)$$

При $t \rightarrow \infty$, выражение становится равным:

$$r_T \sim N \left[\mu; \sigma^2 \frac{1}{2\alpha} \right] \quad (17)$$

3 Решение через формулу Ито

Вспомним лемму Ито, которая говорит, что если СДУ выглядит таким образом:

$$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW_t \quad (18)$$

То верно следующее выражение:

$$df(X, t) = \left(af_x + 1/2b^2 f_{xx} + f_t \right) dt + bf_x dW_t \quad (19)$$

Взяв за основу модель Васичека $dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t$, мы получим функцию $f(r_t, t) = e^{\alpha t}(r_t - \mu)$. Тогда по лемме Ито:

$$df_r = e^{\alpha t} \quad (20)$$

$$df_{rr} = 0 \quad (21)$$

$$df_t = \alpha e^{\alpha t}(r_t - \mu) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} df &= \left(af_r + 1/2b^2 f_{rr} + f_t \right) dt + bf_r dW_t = \left(\alpha(\mu - r_t)e^{\alpha t} + 1/2\sigma^2 \cdot 0 + \alpha e^{\alpha t}(r_t - \mu) \right) dt + \sigma e^{\alpha t} dW_t = \\ &= \sigma e^{\alpha t} dW_t \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int_{t_0}^T e^{\alpha t}(r_t - \mu) = \sigma \int_{t_0}^T e^{\alpha t} dW_t \quad (24)$$

$$[e^{\alpha t}(r_t - \mu)]_{t_0}^T = \sigma \int_{t_0}^T e^{\alpha t} dW_t \quad (25)$$

$$[e^{\alpha T}(r_T - \mu) - e^{\alpha t_0}(r_{t_0} - \mu)] = \sigma \int_{t_0}^T e^{\alpha t} dW_t \quad (26)$$

$$[e^{\alpha T}(r_T - \mu) - e^{\alpha t_0}(r_{t_0} - \mu)] = \sigma \int_{t_0}^T e^{\alpha t} dW_t \quad (27)$$

$$e^{\alpha T} r_T = e^{\alpha t_0} r_{t_0} + \mu[e^{\alpha T} - e^{\alpha t_0}] + \sigma \int_{t_0}^T e^{\alpha t} dW_t \quad (28)$$

Поделим обе части уравнения на $e^{\alpha T}$:

$$r_T = e^{-\alpha(T-t_0)} r_{t_0} + \mu[1 - e^{-\alpha(T-t_0)}] + \sigma \int_{t_0}^T e^{-\alpha(T-t)} dW_t \quad (29)$$

Уравнения (11) и (29) равны, что и требовалось доказать.