Вывод стохастического дифференциального уравнения Васичека

Гармаева Дари-Ханда Баировна

19 мая 2020 г.

1 Общая формула

Модель Васичека - это однофакторная равновесная математическая модель, в рамках которой предполагается, что процентная ставка колеблется вокруг некоего среднего уровня μ и возвращается к нему со скоростью α.

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{1}$$

Решением данного СДУ будет являться r_t, при этом $r(t_0) = r_0$.

2 Прямое решение

Для того, чтобы проинтегрировать (1), сперва перенесем все с r_t в левую часть, остальное оставим в правой части:

$$dr_t + \alpha r_t dt = \alpha\mu dt + \sigma dW_t \tag{2}$$

Далее воспользуемся техническим трюком и домножим все части на $e^{\alpha t}$:

$$e^{\alpha t}(dr_t + \alpha r_t dt) = e^{\alpha t}(\alpha\mu dt + \sigma dW_t) \tag{3}$$

Заметим, что левая часть - это производная произведения двух функций (XY)'= X'Y + XY'. Таким образом ее можно записать как:

$$e^{\alpha t}dr_t + e^{\alpha t}\alpha r_t dt = (r_t e^{\alpha t})' \tag{4}$$

Далее проинтегрируем уравнение (3) :

$$\int dr_t e^{\alpha t} d_t = \int e^{\alpha t}(\alpha\mu dt + \sigma dW_t) \tag{5}$$

Переходим к определенному интергралу по t для получения решения:

$$\int_{t_0}^{T} r_t e^{\alpha t} d_t = \int_{t_0}^{T} e^{\alpha t}\alpha\mu dt + \int_{t_0}^{T} e^{\alpha t}\sigma dW_t \tag{6}$$

$$e^{\alpha T} r_T - e^{\alpha t_0} r_0 = \int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha t} \alpha \mu dt + \int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha t} \sigma dW_t \tag{7}$$

$$e^{\alpha T} r_T = e^{\alpha t_0} r_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha t} \alpha \mu dt + \int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha t} \sigma dW_t \tag{8}$$

$$r_T = e^{-\alpha(T-t_0)} r_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\alpha(T-t)} \alpha \mu dt + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\alpha(T-t)} \sigma dW_t \tag{9}$$

Выражение $\int\limits_{t_0}^{T} e^{-\alpha(T-t)} \alpha \mu dt$ можно преобразовать следующим образом:

$$\int\limits_{t_0}^{T} e^{-\alpha(T-t)} \alpha \mu dt = e^{-\alpha T} \alpha \mu \int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha t} dt = e^{-\alpha T} \alpha \mu \frac{1}{\alpha} [e^{\alpha t}] \Big|_{t_0}^{T} = e^{-\alpha T} \mu [e^{\alpha T} - e^{\alpha t_0}] = \mu [1 - e^{-\alpha(T-t_0)})] \tag{10}$$

Уравнение (9) теперь состоит из детерминированной и стохастической частей:

$$r_T = e^{-\alpha(T-t_0)} r_0 + \mu[1 - e^{-\alpha(T-t_0)})] + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\alpha(T-t)} \sigma dW_t \tag{11}$$

Для того, чтобы получить математическое ожидание (r_T), вспомним, что математическое ожидание от W_t равно нулю по определнию Винеровского процесса, таким образом:

$$E(r_T) = e^{-\alpha(T-t_0)} r_0 + \mu[1 - e^{-\alpha(T-t_0)})] \tag{12}$$

Для того, чтобы получить дисперсию от (r_T), воспользуемся следующей формулой:

$$Var(r_t) = E(r_t^2) - [E(r_t)]^2 \tag{13}$$

Дисперсия детерминированной части равна 0, а математическое ожидание в квадрате $[E(r_t)]^2$ стохастической части равно 0, поэтому:

$$Var(r_t) = E(r_t^2) \tag{14}$$

Для того, чтобы получить дисперсию от $E(r_T^2)$, воспользуемся изометрией Ито $(dW_t dW_t = dt)$:

$$E[\sigma^2 \int\limits_{t_0}^{T} e^{-2\alpha(T-t)} dt] = \sigma^2 e^{-2\alpha T} E[\int\limits_{t_0}^{T} e^{2\alpha t} dt] = \sigma^2 e^{-2\alpha T} \frac{1}{2\alpha} [e^{2\alpha t}] \,|_{t_0}^{T} = \sigma^2 e^{-2\alpha T} \frac{1}{2\alpha} [e^{2\alpha T} - e^{2\alpha t_0}] = \\ = \sigma^2 \tfrac{1}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha(T-t_0)}] \tag{15}$$

Таким образом:

$$r_T \sim N\Bigg[e^{-\alpha(T-t_0)}r_0 + \mu[1-e^{-\alpha(T-t_0)}]; \sigma^2\frac{1}{2\alpha}[1-e^{-2\alpha(T-t_0)}]\Bigg] \tag{16}$$

При $t \to \infty$, выражение становится равным:

$$r_T \sim N\Bigg[\mu; \sigma^2\frac{1}{2\alpha}\Bigg] \tag{17}$$

3 Решение через формулу Ито

Вспомним лемму Ито, которая говорит, что если СДУ выглядит таким образом:

$$dX = a(X,t)dt + b(X,t)dW_t \tag{18}$$

То верно следующее выражение:

$$df(X,t) = \Bigg(af_x + 1/2b^2 f_{xx} + f_t\Bigg)dt + bf_x dW_t \tag{19}$$

Взяв за основу модель Васичека $dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t$, мы получим функцию $f(r_t,t) = e^{\alpha t}(r_t - \mu)$. Тогда по лемме Ито:

$$df_r = e^{\alpha t} \tag{20}$$

$$df_{rr} = 0 \tag{21}$$

$$df_t = \alpha e^{\alpha t}(r_t - \mu) \tag{22}$$

$$df = \Bigg(af_r + 1/2b^2 f_{rr} + f_t\Bigg)dt + bf_r dW_t = \Bigg(\alpha(\mu - r_t)e^{\alpha t} + 1/2\sigma^2 \cdot 0 + \alpha e^{\alpha t}(r_t - \mu)\Bigg)dt + \sigma e^{\alpha t}dW_t = \\ = \sigma e^{\alpha t}dW_t \tag{23}$$

Теперь проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha t}(r_t - \mu) = \sigma\int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha t}dW_t \tag{24}$$

$$[\,e^{\alpha t}(r_t - \mu)]\Big|_{t_0}^{T} = \sigma\int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha t}dW_t \tag{25}$$

$$[e^{\alpha T}(r_T - \mu) - e^{\alpha t_0}(r_{t_0} - \mu)] = \sigma\int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha t}dW_t \tag{26}$$

$$[e^{\alpha T}(r_T - \mu) - e^{\alpha t_0}(r_{t_0} - \mu)] = \sigma \int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha t} dW_t \tag{27}$$

$$e^{\alpha T} r_T = e^{\alpha t_0} r_{t_0} + \mu[e^{\alpha T} - e^{\alpha t_0}] + \sigma \int\limits_{t_0}^{T} e^{\alpha t} dW_t \tag{28}$$

Поделим обе части уравнения на $e^{\alpha T}$:

$$r_T = e^{-\alpha(T-t_0)} r_{t_0} + \mu[1 - e^{-\alpha(T-t_0)}] + \sigma \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\alpha(T-t_0)} dW_t \tag{29}$$

Уравнения (11) и (29) равны, что и требовалось доказать.