Matematici speciale
(seminar 5 - S5)

20.03.2024

1. Se dă variabila aleatoare ce descrie numărul de puncte acordate într-un joc de noroc: $X = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & p \end{pmatrix}$. Să se determine:

a) probabilitatea de a primi 5 puncte;

b) funcţia de repartiţie a variabilei X;

c) probabilitatea de a primi mai mult de 1 punct;

d) distribuţia variabilei X^2.

e) numărul mediu de puncte care se acordă şi dispersia variabilei X;

a) $p = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = 1 - \frac{1}{4} - {}^{2)}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ \frac{1}{12}, & x \in [-3, -1) \\ \frac{1}{12} + \frac{1}{6}, & x \in [-1, 0) \\ \frac{4}{12}, & x \in [0, 1) \\ \frac{8}{12}, & x \in [1, 3) \\ \frac{9}{12}, & x \in [3, 5) \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$

c) $P(X > 1) = P(X=3) + P(X=5) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

d) $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & 25 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\Sigma} \frac{1}{12} + \frac{6}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{12}{12} = 1$ ✓

$P(X^2 = 0) = \frac{1}{12}$

$P(X^2 = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{6} + {}^{2)}\frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(X^2 = 9) = P(X = -3) + P(X = 3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$P(X^2 = 25) = P(X = 5) = \frac{1}{4}$

e) $M(X) = \sum x_i \cdot p_i = \frac{17}{12}$

$\sigma^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = {}^{12)}\frac{99}{12} - \frac{289}{144} = 6{,}25$

$M(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{4} = \frac{99}{12}$

2. Fie o variabila aleatoare X ce înregistrează numarul de apeluri la o centrală telefonică pe oră. Se ştie că această centrală deserveşte până la 20 de apeluri/h. Dacă X este o variabilă aleatoare discretă şi are funcţia de repartiţie: $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 1 \\ 1/10 & \text{pentru } 1 \le x < 3 \\ 3/10 & \text{pentru } 3 \le x < 10 \\ 5/10 & \text{pentru } 10 \le x < 15 \\ 9/10 & \text{pentru } 15 \le x < 20 \\ 1 & x \ge 20 \end{cases}, \text{ să se determine:}$$

a) distribuţia de probabilitate a variabilei X;

b) $P(2 \le X < 8)$.

a) $D_X = \{1, 3, 10, 15, 20\}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 & 15 & 20 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} & \frac{4}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

b) $P(2 \le X < 8) = P(X=3) = \frac{2}{10}$

Exemplul 3. Un blogger realizează 0, 1 sau 2 postări, sâmbăta şi 0 sau 1 duminica. Notăm cu S, respectiv D variabilele aleatoare ce dau numărul de postări făcute sâmbăta, respectiv, duminica. Vectorul aleator (S, D) are distribuţia de probabilitate:

		D		
		0	1	
	0	0.1	0.1	0,2 $= P(S=0)$
S	1	0.3	0.2	0,5
	2	0.1	0.2	0,3
		0,5	0,5	

a) Distribuţii marginale:

$P(S=0) = 0,1+0,1 = 0,2$ $\qquad P(D=0) = 0,1+0,3+0,1 = 0,5$

$P(S=1) = 0,3+0,2 = 0,5$ $\qquad P(D=1) = 0,1+0,2+0,2 = 0,5$

$P(S=2) = 0,1+0,2 = 0,3$

$P(S=0) = P[(S=0, D=0) \cup (S=0, D=1)]$ etc ....

Distribuţii de probabilitate

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix} = 1 \checkmark \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = 1 \checkmark$$

if $\neq 1 \Rightarrow$ AI GREŞIT !!

b) $P(S=i, D=j) = P(S=i) \cdot P(D=j)$

$\underbrace{P(S=0, D=0)}_{\text{dist. com. de prob.}} = \underbrace{P(S=0)\, P(D=0)}_{\text{distr. marginale}} \iff 0,1 = 0,2 \cdot 0,5 \checkmark$

$P(S=0, D=1) = P(S=0)\, P(D=1) \iff 0,1 = 0,2 \cdot 0,5 \checkmark$

$P(S=1, D=1) = P(S=1)\, P(D=0) \iff 0,3 \neq 0,5 \cdot 0,5 \times$

$\Rightarrow$ nr. de postări de sâmbătă influentează nr. de postări de duminică

c) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ $\quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

$P(T=0) = P(S=0,\ D=0) = \cancel{P(S=0)\cdot P(D=0)} = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$

$P(T=1) = P[(S=1, D=0) \cup (S=0,\ D=1)] = P(S=1, D=0) + P(S=0, D=1) =$

$= \cancel{P(S=1)\cdot P(D=0) + P(S=0)\cdot P(D=1)} = 0,3 + 0,1 = 0,4$

Analog pt. restu $\qquad$ Se ia direct din tabel

$P(S+D=2) = P[(S=1, D=1) \cup (S=2,\ D=0)] = 0,3$

d) nr. maxim de postări $\quad Z = \max(S, D) \quad / 2$ zile

		D		
		0	1	$p_{i.}$
	0	0.1	0.1	0.2
S	1	0.3	0.2	0.5
	2	0.1	0.2	0.3
	$p_{.j}$	0.5	0.5	

$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$ $\qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

$D_Z = \{0, 1, 2\}$

$P(Z=0) = P(\max(S,D)=0) = P(S=0,\ D=0) = 0,1$

$P(Z=1) = P(\max(S,D)=1) = P[(S=1,\ D=0) \cup (S=0,\ D=1) \cup (S=1, D=1)] =$

$= 0,3 + 0,1 + 0,2 = 0,6$

$P(Z=2) = P(\max(S,D)=2) = P[(S=2,\ D=0) \cup (S=2,\ D=1)] =$

$= 0,1 + 0,2 = 0,3$

$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\Sigma} 0,1 + 0,6 + 0,3 = 1$

4. Firma ta acordă asistenţă telefonică clienţilor. Evenimentele pe care le raportează clienţii sunt:
`A: "PC-ul este virusat"` şi `B: "un fişier sistem este corupt"`.

Probabilităţile producerii **simultane** a combinaţiilor dintre aceste două evenimente şi opusele lor sunt date în tabloul:

	A	$\overline{A}$
B	0.01	0.19
$\overline{B}$	0.02	0.78

De exemplu, numărul 0.19 din tabelul de mai sus reprezintă probabilitatea evenimentului $\overline{A} \cap B$, adică $P(\overline{A} \cap B) = 0.19$.

Fie (X, Y) vectorul aleator ale cărui coordonate sunt variabile aleatoare Bernoulli. X ia valoarea 1 dacă se produce evenimentul A şi valoarea 0 dacă se produce evenimentul $\overline{A}$, iar Y ia valoare 1 dacă se produce B şi 0 în caz contrar.

a) Să se deducă distribuţiile marginale ale lui X şi Y

b) Să se calculeze $P(X = 1|Y = 0)$

		X		
		1	0	
Y	1	0,01	0,19	0,2
	0	0,02	0,78	0,8
		0,03	0,97	

$$P(Y=1) = P((X=1, Y=1) \cup (X=0, Y=1)) = 0,01 + 0,19 = 0,2$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

b) $$P(X=1 | Y=0) = \frac{P(\overset{1}{X} \cap \overset{0}{Y})}{P(Y=0)} = \frac{0,02}{0,8} = \frac{2}{80} = \frac{1}{40}$$

5. Fie X, Y două variabile aleatoare discrete ce pot lua valorile $\{1, 2, 3, 4\}$. Distribuţia de probabilitate comună a celor două variabile este dată în tabloul:

		Y			
		1	2	3	4
	1	0.03	0.05	0.1	0.12
X	2	0.05	0.06	0.08	0.07
	3	0.07	0.06	0.06	0.02
	4	0.07	0.09	0.05	0.02

a) Să se determine distribuţiile marginale;

b) Să se determine distribuţia de probabilitate a variabilei condiţionate $(X|Y = 2)$.

a)

		Y				
		1	2	3	4	p_X
	1	0.03	0.05	0.1	0.12	0.3
X	2	0.05	0.06	0.08	0.07	0.26
	3	0.07	0.06	0.06	0.02	0.21
	4	0.07	0.09	0.05	0.02	023
	p_Y	0.22	0.26	0.29	0.23	

b) $Z = (X \mid Y = 2)$ $\qquad D_Z = \{1, 2, 3, 4\}$

$$P(X=1 \mid Y=2) = \frac{P(X=1 \cap Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{0,05}{0,26}$$

$$(X|Y=2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{p_{12}}{p_Y(2)} & \frac{p_{22}}{p_Y(2)} & \frac{p_{32}}{p_Y(2)} & \frac{p_{42}}{p_Y(2)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{0.05}{0.26} & \frac{0.06}{0.26} & \frac{0.06}{0.26} & \frac{0.09}{0.26} \end{pmatrix}$$