27.03.2024

1. (Run-uri de biți) Având un șir de n biți rezultați din simularea de n ori a variabilei aleatoare X de mai sus, numim run de biți o succesiune de biți identici în șir. De exemplu în șirul de biți 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, avem următoarele run-uri de biți 1:

11, 1, 111

În analiza şirurilor de biţi aleatori folosiţi în probleme de securitate (criptografie) este foarte util numărul mediu de run-uri de biţi conţinuţi în şir.

Notăm cu N variabila aleatoare ce dă numărul de run-uri de biți 1, în șirul de n biți

 $b_1, b_2, \ldots, b_n,$

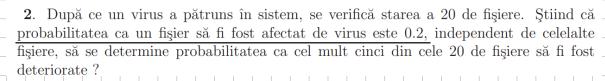
obținuți din simularea (observarea) variabilelor aleatoare independente X_1, X_2, \dots, X_n , Bernoulli distribuite, adică: $X_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

Practic simulăm aceeași variabilă aleatoare X, doar că îi asociem indicele $1,2,3,\ldots,n$ care indică al câtelea bit generăm.

Prin urmare fiecare bit b_i din şir este o "observație" asupra variabilei $X_i,\ i=\overline{1,n}$

$$p(x) = \left\{ egin{array}{ll} p, & \mathsf{daca} \ x = 1 \ 1 - p, & \mathsf{daca} \ x = 0 \ 0, & \mathsf{in} \ \mathsf{rest} \end{array}
ight.$$

M(H)= \(\frac{1}{2} \) M(\(\frac{1}{2}\)) = \(\frac{1}{2} \) \(\frac{1}{2} \) \(\frac{1}{2} \)



$$\times$$
 - mr. fixiere infectate
$$P(\times \leq 5) = \sum_{h=0}^{5} C_{20} \cdot (0,2) \cdot (0,8)$$

$$Q = 1-\rho$$

3. Presupunem că există 10 sateliți GPS (Global Positioning System) pe orbită. O unitate GPS de la sol este activă, dacă cel puțin 4 sateliți GPS funcționează (pot fi contactați). Știind că încercările de contactare ale celor 10 sateliți sunt independente și că probabilitatea ca GPS-ul de la sol să eșueze în contactarea oricărui satelit din cei 10, este aceeași și egală cu p=0.75, să se calculeze probabilitatea ca unitatea GPS de la sol să fie activă.

$$M = 10$$
, $M = 0,75$ (plab de equate)
 $P(X \le 6) = \sum_{h=0}^{5} C_{10}^{h} (0,75)^{h} (0,25)^{h}$
 $P(Y > 4) = \sum_{h=0}^{5} C_{10}^{h} (0,75)^{h} (0,75)^{h}$

4. Un student participă la un examen grilă cu 20 de probleme. Fiecare problemă are 4 răspunsuri posibile. Studentul cunoaște răspunsul la 10 întrebări, iar la restul răspunde aleatoriu. Daca X este variabila aleatoare ce înregistrează numărul de răspunsuri corecte la acest test grilă, să se determine distribuția de probabilitate acestei variabile. Care este probabilitatea ca studentul să răspunda corect la mai mult de 15 întrebări, din cele 20?

P(
$$\times \geq 15$$
)

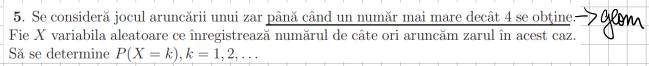
10 stie

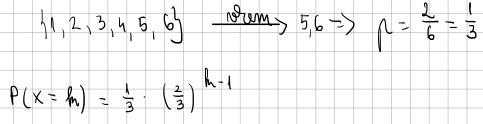
10 mu \longrightarrow poate să mai trăsp la minim 5?

V ~ leim (10 , $\frac{1}{4}$)

 $\rho = \frac{1}{4}$ (prolo. de a trăsp corect la o întrebore)

 $\rho = \frac{1}{4}$ ($\rho = 0$, $\rho = 0$,





6. Aplicație Shazam identifică o melodie cu acuratețe de 95%.

Să se determine probabilitatea ca această aplicație să recunoască o melodie la a treia $\frac{1}{2}$ execuție și numărul mediu de încercări până la recunoașterea melodiei (exclusiv)? h(x)

$$\rho = 0,95$$
 $\rho = 3$
 ρ

7. (Coupon collector problem) O firmă lansează următorul concurs: în cutiile de cereale produse de această firmă se găsesc n cupoane diferite, ce pot fi colectate si trimise pentru un premiu. Se presupune că fiecare cupon din cutie este ales independent si uniform din cele n posibile şi că nu se fac schimburi de cupoane între participanții la acest joc. Să se determine numărul mediu de cutii de cereale ce trebuie cumpărate pentru a avea cel puțin unul din fiecare cupon?

Rezolvare: Fie X variabila aleatoare ce înregistrează numărul de cutii ce sunt cumpărate pentru a avea cel puţin unul din fiecare cupon. Ne interesează M(X). Notăm cu X_i variabila aleatoare ce indică numărul de cutii cumpărate în timp ce ai deja i-1 cupoane diferite. Evident, $X=\sum\limits_{i=1}^n X_i$. Variabilele X_i sunt distribuite geometric: dacă ai i-1 cupoane diferite, atunci probabilitatea de succes (sa obţii unul nou) este $p=\frac{n-(i-1)}{n}$. Deci, $M(X_i)=\frac{1}{p_i}=\frac{n}{n-i+1}$.

Din liniaritatea mediei, avem că $M(X) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Notăm $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ și se numește *număr armonic*. Se știe că $H(n) = \ln(n) + O(n)$.

De exemplu, pentru n = 50, trebuie să cumpărăm în medie 225 cutii.

Această problema are diverse aplicații în CS, pentru informatii suplimentare, see Probabilty - Computing, M. Mitzenmacher, Eli Upfal.

8. Numărul de mesaje email ce este primit într-o săptămână poate fi modelat de o variabilă Poisson cu media $\lambda = 0.2$ mesaje/min. a) Să se determine probabilitatea de a nu primi nicun mesaj într-un interval de 5 minute. b) Care este probabilitatea de a primi mai mult de 3 mesaje într-un interval de 10 a) $\times \sim \text{Pois}(x')$ $P(x=0) = \frac{e^{-\lambda'} \lambda'^0}{0!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ $V \sim 30is (\lambda^{\prime})$ $P(y > 3) = 1 - P(x \le 3) = 1 - \frac{e^{-\lambda^{1}}}{0!} - \frac{e^{-\lambda^{1}}}{1!} - \frac{e^{-\lambda^{2}}}{2!} - \frac{e^{-\lambda^{3}}}{3!}$