Seminar Nr. 9

Serii Fourier

Probleme rezolvate

1. *Fie* $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ *o funcţie periodică. Se cere:*

i) *Determinaţi coeficienţii Fourier ai lui* f *pe* $[0,\pi]$ *şi construiţi seria Fourier ataşată.*

ii) *Să se dezvolte* f, *periodică de perioadă* $T = 2\pi$ *în serie Fourier de sinusuri.*

iii) *Să se dezvolte* f, *periodică de perioadă* $T = 2\pi$ *în serie Fourier de cosinusuri.*

iv) *Calculaţi suma următoarelor serii numerice:* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$.

Soluţie. **i)** Funcţia f este reprezentată în figura 3.1.a)

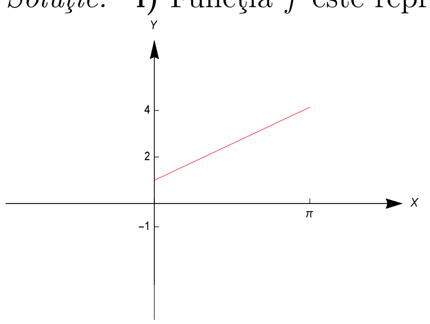

Figura 3.1.a)

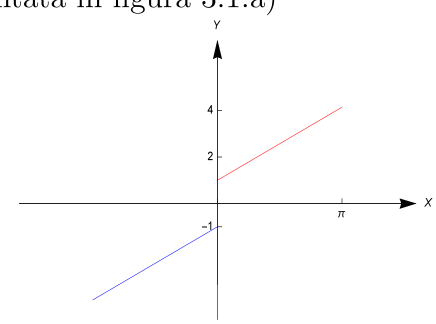

Figura 3.1.b)

Coeficienţii Fourier pe intervalul $[0,\pi]$ sunt

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx = \frac{2}{\pi}(\frac{x^2}{2}+x)\Bigg|_0^{\pi} = \pi+2.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos(2nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\left(\frac{\sin 2nx}{2n}\right)'dx =$$
$$\frac{2}{\pi}\left[(x+1)\frac{\sin 2nx}{2n}\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx}{2n}dx\right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin(2nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\left(\frac{-\cos 2nx}{2n}\right)'dx =$$
$$\frac{2}{\pi}\left[-(x+1)\frac{\cos 2nx}{2n}\Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos 2nx}{2n}dx\right] =$$
$$-\frac{2}{\pi}(\pi+1)\frac{\cos 2n\pi}{2n} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2}\sin 2nx\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} - \frac{\pi+1}{n\pi} = -\frac{1}{n}.$$

Se obţine dezvoltarea funcţiei f în serie trigonometrică Fourier

$$f(x) \to \frac{\pi+2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2nx,$$

care conform teoremei lui Dirichlet e convergentă în fiecare punct din intervalul $(0,\pi)$ cu suma $f(x)$. Deci $s(x) = f(x) = x+1$, pentru $x \in (0,\pi)$, iar la extremităţi conform teoremei lui Dirichlet avem

$$s(0) = s(\pi) = \frac{f(\pi-0)+f(0+0)}{2} = \frac{\pi+1+1}{2} = \frac{\pi}{2}+1.$$

În concluzie se obţine

$$\frac{\pi+2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2nx = \begin{cases} x+1, x\in(0,\pi) \\ \frac{\pi}{2}+1, x\in\{0,\pi\} \end{cases}. \qquad (1)$$

Pentru $x = \frac{\pi}{4}$ rezultă $\frac{\pi}{4} + 1 = \frac{\pi}{2} + 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$ şi cum $\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, n = 2m \\ (-1)^{n-1}, n = 2m-1 \end{cases}$, în seria (1) rămân doar termenii de rang impar, adică $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ sau, echivalent, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

ii) Dezvoltarea în serie de sinusuri cere ca funcţia să fie impară pe domeniu. Cum acest lucru în cazul nostru nu se întâmplă, prelungim funcţia prin imparitate pe intervalul $[-\pi, \pi]$, ca în figura 3.1.b), astfel $\widetilde{f}_i : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{f}_i(x) = \begin{cases} f(x), x \in [0, \pi] \\ -f(-x), x \in [-\pi, 0] \end{cases} = \begin{cases} x+1, x \in [0, \pi] \\ x-1, x \in [-\pi, 0) \end{cases}$. Coeficienţii Fourier ai funcţiei $\widetilde{f}_i$ pe intervalul $[-\pi, \pi]$ sunt $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ şi

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}_i(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

pentru că $\widetilde{f}_i(\bullet) \sin(n\bullet)$ este pară pe $(-\pi, \pi)$. Rezultă

$$\begin{aligned} b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) \cdot \left(-\frac{\cos nx}{n}\right)' dx = \\ \frac{2}{\pi} \left[-(x+1) \frac{\cos nx}{n} \Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right] = \\ \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi+1}{n} \cos n\pi + \frac{\cos 0}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \Bigg|_0^{\pi} \right] = \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{\pi+1}{n} (-1)^n \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} + \frac{\pi+1}{n} (-1)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

Funcţia $\widetilde{f}_i$ îndeplineşte condiţiile teoremei lui Dirichlet, deci seria Fourier obţinută

$$\widetilde{f}_i(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 + (-1)^{n+1}(\pi+1)) \sin nx$$

este convergentă cu suma $\widetilde{s}:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, $\widetilde{s}(x)=\begin{cases}\widetilde{f}_i(x), x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)\\ 0, x\in\{-\pi,0,\pi\}\end{cases}$.

iii) Dezvoltarea în serie de cosinusuri cere ca funcţia să fie pară pe domeniu. Cum acest lucru în cazul nostru nu se întâmplă, prelungim funcţia prin paritate pe intervalul $(-\pi,\pi)$ astfel $\widetilde{f}_p:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$,

$$\widetilde{f}_p(x)=\begin{cases}f(x), x\in[0,\pi]\\ f(-x), x\in[-\pi,0)\end{cases}=\begin{cases}x+1, x\in[0,\pi]\\ -x+1, x\in[-\pi,0)\end{cases}$$

ca în figura 3.1.c).

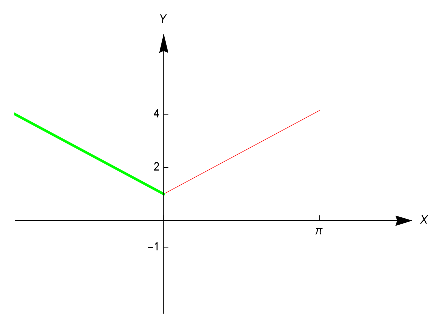

Figura 3.1.c)

Coeficienţii Fourier sunt $b_n=0$, $\forall n\geq 1$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\pi+2.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'dx=$$
$$\frac{2}{\pi}\left[(x+1)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}=$$
$$\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos n\pi}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2}.$$

Rezultă $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = -\dfrac{4}{\pi(2n-1)^2}$, $\forall n \geq 1$. Funcţia $\widetilde{f_p}$ îndeplineşte condiţiile teoremei lui Dirichlet, deci seria Fourier obţinută

$$f(x) = \frac{\pi+2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x,$$

este convergentă cu suma $s : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $s(x) = f(x)$ Prin urmare, se obţine

$$x + 1 = \frac{\pi+2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x, \quad \forall x \in [0, \pi]. \quad (2)$$

iv) Pentru $x = \pi$ în (2) rezultă

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Folosim identitatea Parseval-Liapunov:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s^2(x) dx,$$

unde $s(x)$ este funcţia sumă, care e integrabilă pe $[0, \pi]$. Se obţine

$$\frac{(\pi+2)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1)^2 dx,$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pe de altă parte, putem scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}.$$

2. *Fie* $f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases}$ *, periodică, cu perioada* $T = 2l = 10$. *Să se scrie seria Fourier corespunzătoare şi apoi să se definească* f *în punctele de discontinuitate* $x = -5$, $x = 0$ *şi* $x = 5$ *în aşa fel ca seria Fourier corespunzătoare să conveargă la* f *pentru* $x \in [-5, 5]$.

Soluţie. Graficul lui f este ilustrat în figura 3.2.

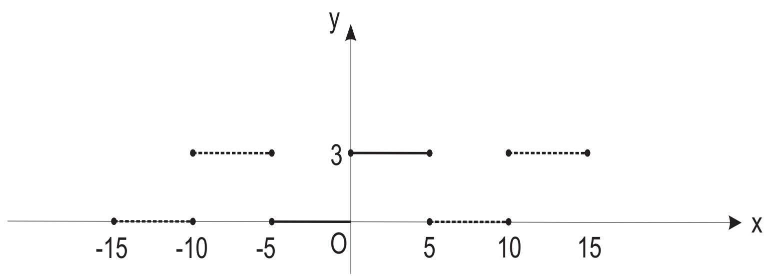

Figura 3.2

Deoarece $2l = 10$, adică $l = 5$, coeficienţii a_n şi b_n au următoarele expresii:
$a_n = \frac{1}{5}\int\limits_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{3}{5}\int\limits_{0}^{5}\cos\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5 = 0, \ (n \neq 0)$, iar

dacă $n = 0$, $a_0 = \frac{1}{5}\int\limits_0^5 f(x)\,dx = 3$,

$b_n = \frac{1}{5}\int\limits_{-5}^{5} f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{3}{5}\int\limits_{0}^{5}\sin\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5 = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi} = \frac{3(1-(-1)^n)}{\pi n}$. Rezultă $b_{2n} = 0$, iar $b_{2n-1} = \frac{6}{\pi(2n-1)}$.

Seria Fourier corespunzătoare este dată de expresia

$$f(x) \to \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi(2n-1)}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{5}.$$

Conform criteriului lui Dirichlet, seria converge la f în toate punctele de continuitate şi la $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ în toate punctele sale de discontinuitate. În punctele $x = -5$, $x = 0$ şi $x = 5$, care sunt puncte de discontinuitate, seria converge la $\frac{1}{2}(3+0)=\frac{3}{2}$. Definind f prin

$$f(x)=\begin{cases} 3/2, & x=-5 \\ 0, & -5<x<0 \\ 3/2, & x=0 \\ 3, & 0<x<5 \\ 3/2, & x=5 \end{cases},$$

atunci seria Fourier corespunzătoare converge la f pentru $x\in[-5,5]$.

3. *Să se dezvolte funcţia $f(x)=x^2$, $0<x<2\pi$ în serie Fourier pe un interval de lungime $T=2\pi$. Folosind seria obţinută, să se arate că $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$.*

Soluţie. Graficul lui f cu perioada $T=2\pi$ este ilustrat în figura 3.3.

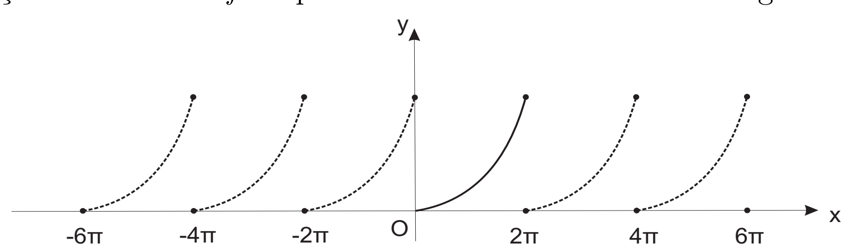

Figura 3.3

Perioada $T=2l=2\pi$, adică $l=\pi$, conduce la expresia coeficienţilor Fourier:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(x^2\frac{\sin nx}{n}+2x\frac{\cos nx}{n^2}-2\frac{\sin nx}{n^3}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2}\ (n\neq 0).$$

Dacă $n=0$, $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2dx=\frac{8\pi^2}{3}$, $b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\left(-x^2\frac{\cos nx}{n}+2x\frac{\sin nx}{n^2}+2\frac{\cos nx}{n^3}\right)\Big|_0^{2\pi}=-\frac{4\pi}{n}.$$

În acest fel $f\left(x\right)=\dfrac{4\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{n^2}\cos nx-\dfrac{4\pi}{n}\sin nx\right),\ x\in\left(0,2\pi\right).$ În punctele $x=0$ şi $x=2\pi$, seria converge la $2\pi^2$.

Pentru $x=0$, seria Fourier se reduce la $\dfrac{4\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2}$. Conform criteriului lui Dirichlet, deoarece $x=0$ este punct de discontinuitate, seria converge la $\dfrac{1}{2}\left(0+4\pi^2\right)=2\pi^2$. Atunci $2\pi^2=\dfrac{4\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2}$, de unde rezultă $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

4. *Să se dezvolte funcţia periodică de perioadă* $T=2\pi,\ f\left(x\right)=\sin x$, $0\le x\le\pi$ *în serie de cosinusuri.*

Soluţie. Se prelungeşte prin paritate funcţia f astfel

$$\widetilde{f}_p(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[0,\pi]\\ -\sin x, & x\in[-\pi,0)\end{cases}$$

şi apoi prin periodicitate pe axa reală ca în figura 3.4.

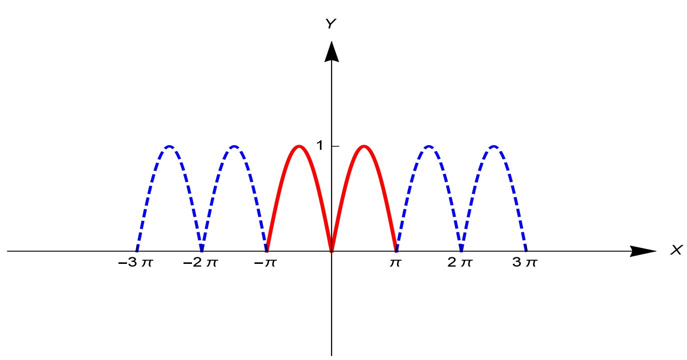

Figura 3.4

Coeficienţii Fourier sunt $b_n = 0$, $n \geq 1$, iar

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n+1}-\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right) = \frac{-2\left(1+\cos n\pi\right)}{\pi\left(n^2-1\right)} = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)},$$

deoarece $\cos(n\pi) = (-1)^n = \begin{cases} 1, & n = 2m \\ -1, & n = 2m-1 \end{cases}$.

Seria Fourier cerută este $\sin x = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}\cos 2nx,\ \ x \in [0,\pi]$.