Analiză Matematică - SETUL 6 - Limite de funcţii. Continuitate

1. Utilizând limitele iterate, să se arate că funcţia $f(x,y)=\dfrac{y^2-2x}{y^2+2x}$ nu are limită în punctul $(0,0)$. Similar, arătaţi că funcţia $g(x,y)=\dfrac{y^2-2x}{x^2-2y}$ nu are limită în punctul $(2,2)$.

2. Folosind teorema lui Heine, să se arate că următoarele funcţii nu au limită în origine

$$(i) f(x,y)=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}, y^2\neq 2x; \qquad (ii) f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^6}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

$$(iii) f(x,y)=\frac{e^{x^2y}-1}{x^2y^2}.$$

3. Să se calculeze limitele:

$i)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$; $\qquad iii)\ \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

$ii)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$; $\qquad iv)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{-x^2-y^2}{2-\sqrt{x^2+y^2+4}}$.

4. Notând cu L_{12}, L_{21} limitele iterate, respectiv cu l limita funcţiei f în punctul (0,0), să se arate că:

a) pentru $f(x,y)=\dfrac{x-y}{xy}$, nu există L_{12}, L_{21}, respectiv l;

b) pentru $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, nu există L_{12}, L_{21}, dar $l=0$;

c) pentru $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^3}{x^4+y^4}$, $L_{12}=1$, iar L_{21} şi l nu există;

d) pentru $f(x,y)=y^2\cos\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{y}$, $L_{12}=0, L_{21}$ nu există, dar $l=0$;

e) pentru $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^4}$, $L_{12}=L_{21}=0$, dar l nu există;

f) pentru $f(x,y)=\dfrac{x\sin^3 y}{x^2+y^2}$, $L_{12}=L_{21}=l=0$.

5. Fiind dată funcţia $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

(i) Să se determine domeniul maxim de definiţie D.

(ii) Să se studieze existenţa limitelor iterate în origine.

(iii) Să se studieze existenţa limitei în origine relativă la drepte ce trec prin origine.

(iv) Să se studieze existenţa limitei în origine relativă la cercuri ce trec prin origine de ecuaţii $(C_m) x^2 + y^2 = mx$.

6. Se consideră funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Să se arate că:

(i) f este continuă parţial în punctul $(0,0)$;

(ii) f este discontinuă în punctul (0,0);

(iii) f este mărginită pe $\mathbb{R}^2$.

7. Să se studieze continuitatea parţială şi continuitatea funcţiei f,

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y \cdot \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

8. Să se studieze continuitatea funcţiilor:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos x^3 y^3}{x^2+2y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2} - \cos(xy)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

9. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p, p \in \mathbb{N}^*$ nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

10. Să se studieze continuitatea uniformă a următoarelor funcţii pe domeniile lor maxime de definiţie

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^4+y^4)}{x^2+y^2}, & 0 < x^2+y^2 \leq 1 \\ p, & x^2+y^2 = 0, \ p \in \mathbb{R}. \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-y^2})\sqrt{1-x^2}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{1}{2}, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 2, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$