1. Găsiți un interval de lungime 1 pe care funcția $f(x) = x^2 - 6x + 5$ este unimodală în jurul minimului relativ. Aplicați apoi un pas din căutarea secțiunii de aur pt. găsirea minimului funcției pe intervalul respectiv.

$f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$ rădăcini

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x - 6 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f \text{ s} \nearrow \text{ pe } (3,5] \\ f \text{ s} \searrow \text{ pe } [1,3] \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3 - \text{min funcției} \Rightarrow$

$\Rightarrow [2.5, 3.5]$

$g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$x_1 = 2.5 + (1-g) = 2,882 \Rightarrow f(x_1) = -3,986$, f s$\searrow$

$x_2 = 2.5 + g = 3,118 \Rightarrow f(x_2) = -3,986$, f s$\nearrow$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2a = a + 1 - g \Leftrightarrow a = 3.5 - g \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow a = 2,882 \\ b = 3.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{3}{\overset{\shortparallel}{\min}} \in [a, b]$

2. Folosiți separarea variabilelor pentru a găsi soluția PVI dată prin $y(0)=1$ și ecuația diferențială de mai jos. Aplicați metoda trapezului cu pasul $h=1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0,1]$. Găsiți eroarea în $t=1$ comparând cu soluția corectă. $y' = t/y^2$

$f(t,y) = \frac{t}{y^2}$

$y' = \frac{t}{y^2} \Big| \cdot y^2 \Rightarrow y^2\,dy = t\,dt \;\Big|\int$

$\frac{y^3}{3} = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3t^2}{2} + 3C}$

$y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = 0 + 3C \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{y = \sqrt[3]{\frac{3t^2}{2} + 1}}$

$t_0 = 0,\ y_0 = 1$

$w_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(t_0, y_0)\right) + f(t_0+h, w_0 + h\cdot f(t_0, w_0))$

$= 1 + \frac{1}{4}\cdot 0 + f\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\cdot 0\right)$

$= 1 + f\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$t_1 = 0{,}5,\ y_1 = w_1 = \frac{3}{2}$

$w_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}} + f\left(1, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}}\right) =$

$= \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9} + f\left(1, \frac{3}{2} + \frac{1}{9}\right)$

$= \frac{3}{2} + \frac{1}{18} + f\left(1, \frac{29}{18}\right)$

$= \frac{28}{18} + f\left(1, \frac{29}{18}\right)$

$= \frac{28}{18} + \frac{1}{\left(\frac{29}{18}\right)^2} = 1{,}940$

$t_2 = 1, \; y_2 = w_2 = 1{,}940$

$$w_3 = 1{,}940 + \frac{1}{4} \cdot f(1, 1.940) +$$

$$+ f(1{,}5, 1.940 + 0{,}5 \cdot f(1, 1.940))$$

$$= 1{,}940 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1.940^2} + \frac{1.5}{\left(1.940 + 0.5 \cdot \frac{1}{1.940^2}\right)^2} =$$

$$= 1.940 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1.940^2} + \frac{1.5}{2.073^2} =$$

$$= 2{,}355$$

$$\left.\begin{array}{l} = 2{,}355 \\ t = 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{2{,}5} = 1{,}357 \end{array}\right\} \rightarrow \text{errore} \approx 1$$

3. Găsiți un interval de lungime 1 pentru care funcția $f(x) = 2x^2 + x$ este unimodală în jurul minimului relativ. Aplicați apoi un pas din interpolarea parabolică succesivă pentru găsirea minimului funcției pe intervalul respectiv.

$f(x) = 2x^2 + x$

$min = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{4} \Rightarrow [-1, 0]$

Fie $\begin{cases} r = -1 & \text{stânga} \rightarrow f(r) = 1 \\ s = -\frac{1}{2} & \text{oricât} \rightarrow f(s) = 0 \\ t = 0 & \text{dreapta} \rightarrow f(t) = 0 \end{cases}$

PAS 1:

$$x = \frac{r+s}{2} - \frac{[f(s) - f(r)](t-r)(t-s)}{2[(s-r)[f(t)-f(s)] - [f(s)-f(r)](t-s)]}$$

$$= -\frac{3}{4} - \cancel{\frac{0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{2[\frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2}]}} = -\frac{3}{4} + \frac{\frac{5}{8}}{2\left(\frac{1}{8} + \frac{5}{8}\right)} =$$

$$= -\frac{3}{4} + \cancel{\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{6}{8}}} = -\frac{3}{4} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{6} \cancel{= \frac{-9+5}{12} = -\frac{1}{3}}$$

$= -\frac{1}{4}$ → trebuie să dea = min

$t = -\frac{1}{2}$

$s = -1$

$r = -\frac{1}{4}$

4. Folosiți separarea variabilelor pentru a găsi soluția PVI dată prin $y(0)=1$ și ecuația diferențială de mai jos. Aplicați metoda lui Euler cu pasul $h=1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0,1]$. Găsiți eroarea în $t=1$, comparând cu soluția corectă $y'=t/y^2$

$$f(t,y)=\frac{t}{y^2}$$

$$y'=\frac{t}{y^2} \quad |\cdot y^2 \Rightarrow y^2\,dy=t\,dt \quad |\int \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y^3}{3}=\frac{t^2}{2}+C \Rightarrow y=\sqrt[3]{\frac{3t^2}{2}+3C}$$

$$y(0)=1 \Rightarrow y(0)=0+3C \Rightarrow C=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\sqrt[3]{\frac{3t^2}{2}+1}$$

$$w_0=y_0=1;\ t_0=0$$

$$w_1=w_0+h\cdot f(t_0,w_0)=1+\frac{1}{2}\cdot f(0,1)=$$
$$=1+0=1$$

$$w_2=w_1+h\cdot f(t_1,w_1)=1+\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{1}{2},1\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1+\frac{1}{4}=1,25$$

$$w_3=w_2+h\cdot f(t_2,w_2)=1,25+\frac{1}{2}\cdot f(1;1,25)=$$
$$=1,25+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1,5625}=1,57$$

$$t=1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\frac{2}{2}}=\sqrt[3]{\frac{5}{2}}=1,357 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ eroarea: $1,57-1,357=0,213$

6. Găsiți TFD a vectorului $[1, 0, -1/2, 0]^T$

$\omega = e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -i$, unde

$\omega$ - răd. de ordin 4.

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

1. Aplicați regula lui Simpson compusă cu $2m=4$ panelури pentru a aproxima integrala. Aflați eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei $\int_0^2 \underbrace{(x^2-x)}_{f(x)}dx$

$2m=4 \Rightarrow m=2$

$$\int_0^2 (x^2-x)dx = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2} = \frac{8}{3}-\frac{4}{2} = 0,(6)$$

$h_2 = \frac{2}{4} = 1/2$

$f(0) = 0 = y_0$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} = -0,25 = y_1$

$f(1) = 1-1 = 0 = y_2$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}-\frac{3}{2} = \frac{3}{4} = 0,75 = y_3$

$f(2) = 4-2 = 2 = y_4$

$$\int_0^2 (x^2-x)dx \approx \frac{1}{6}\cdot\left[0+2+4(-0,25+0,75)+2\cdot 0\right] = \frac{1}{6}\left[2+4\cdot 0.5+0\right] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,(6)$$

eroarea: $0,(6)-0,(6)=0$

8. Aplicați regula mijlocului compusă cu $m=4$ parametri pentru a aproxima integrala. Aflați eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei $\int_{-2}^{0} x^2 dx$.

$$\int_{-2}^{0} \underbrace{x^2}_{f(x)} dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{0} = +\frac{8}{3} = +2,(6)$$

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{+2}{4} = \frac{1}{2}$$

$w_1 = -1,75 \Rightarrow f(w_1) = 3,0625$

$w_2 = -1,25 \Rightarrow f(w_2) = 1,5625$

$w_3 = -0,75 \Rightarrow f(w_3) = 0,5625$

$w_4 = -0,25 \Rightarrow f(w_4) = 0,0625$

$$\int_{-2}^{0} x^2 dx \approx \frac{1}{2} \cdot (3,0625 + 1,5625 + 0,5625 + 0,0625) =$$

$$= \frac{5,25}{2} = 2,625$$

eroare: $2,667 - 2,625 = 0,042$

9. Fie $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Găsiți valoarile proprii și vectorii proprii ai lui A. Aplicați un pas din iterația Rayleigh cu vectorul inițial $t_0 = [1,1]^T$.

$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\lambda - 3 = \lambda^2 + 2\lambda - 3 =$
$= (\lambda+3)(\lambda-1)$

$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ valorile proprii: $\begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

$(A - \lambda_1 I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A + 3I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow S_{\lambda_1} = \{(\alpha, -\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$
$= [1, -1]^T$

$(A - \lambda_2 I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y}{3} \rightarrow$

$\Rightarrow S_{\lambda_2} = [1, \frac{1}{3}]^T$

$\Rightarrow$ vectorii proprii: $[1,1]^T, [1, \frac{1}{3}]^T$

$u_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|} = \frac{[1,1]^T}{\sqrt{1+1}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$

$\lambda_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 1$

$(A - I_2) \cdot x_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 + x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3x_1 + x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3x_1 - x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$x_1 \overset{\text{met}}{=} \alpha \Rightarrow -3\alpha + x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\alpha \Rightarrow x = \left[\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\alpha\right]^T$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow x_0 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$$