

# Matematici speciale

## Tema 8

5. Să se scrie algoritmul de simulare a unui număr pseudo-aleator uniform distribuit pe mulțimea  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .

$$m = -2$$

$$n = 2$$

$$N = n - m + 1 = 2 - (-2) + 1 = 5$$

```
Function radint(-2, 2)
```

```
u = urand();
```

```
k = int(5 * u); // k apartine {0, 1, 2, 3, 4}
```

```
return k - 2;
```

```
end
```

6. Variabila aleatoare  $X$  este uniform distribuită pe mulțimea  $\{3, 6, 9, 12, 15\}$ . Să se determine distribuția de probabilitate a variabilei  $Y = X/3 + 2$  și să se descrie o modalitate de simulare a variabilelor  $X$  și  $Y$ .

$$p_i = \frac{1}{5}$$

$$Y = \frac{X}{3} + 2$$

```
Function simX(5)
```

```
u = urand();
```

```
k = int( 5 * u); // {0, 1, 2, 3, 4}
```

```
return 3 * (k + 1);
```

```
end
```

$$Y = g(X), \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y = g(x) = \frac{x}{3} + 2$$

$$g^{-1}(y) = 3(y - 2), \quad \mathcal{B}_Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$P(Y = 3) = P(g(X) = 3) = P(X = g^{-1}(3)) = P(X \in \{3\}) = \frac{1}{5}$$

```
Function simY
```

```
u = urand();
```

```
k = int( 5 * u); // 5 nr, {0, 1, 2, 3, 4}
```

```
return k + 3;
```

```
end
```

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

7. O variabilă aleatoare  $X$  se spune că este distribuită logistic dacă are funcția de densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Să se determine funcția de repartiție.

b) Să se arate că, dacă  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ , atunci  $Y = \ln \frac{U}{1-U}$  este distribuită logistic.

c) Folosind rezultatul de la punctul b) și metoda de inversare, să se scrie algoritmul de simulare a unei variabile de observație pentru o variabilă ce este distribuită logistic.

$$a) F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \frac{1}{1+e^{-t}} \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$F_X(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$b) U \sim \text{Unif}(0, 1)$$

$$0 \leq U < 1$$

$$0 < 1-U \leq 1$$

$$1 \leq \frac{1}{1-U} < \infty$$

$$0 \leq \frac{U}{1-U} < \infty$$

$$-\infty \leq Y < \infty$$

$$\begin{aligned} P\left(\ln \frac{U}{1-U} \leq x\right) &= P\left(\frac{U}{1-U} \leq e^x\right) = P\left(U \leq -e^x \cdot U + e^x\right) = \\ &= P\left(U(1+e^x) \leq e^x\right) = P\left(U \leq \frac{e^x}{1+e^x}\right) = F_U\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) = \\ &= \left(\frac{e^x}{1+e^x} - 0\right) \cdot \frac{1}{1-0} = \frac{e^x}{1+e^x} \in [0, 1] \rightarrow \text{nu cred că treb. dem.} \end{aligned}$$

$F_U(Y)$  are aceeași formă ca și  $F_X(X) \Rightarrow$  sunt distribuite logistic.

$$c) F_X - \text{b.c. pe } \mathbb{R}$$

$$x = F^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right) \Leftrightarrow \frac{e^x}{1+e^x} = u$$

$$, \forall u \in [0, 1), \quad F^{-1}(u) \in \mathbb{R}$$

```
Function SimU
u = urand();

x = log(u / (1 - u));

return x;
end
```

8. O variabilă aleatoare  $X$  se spune că este distribuită Cauchy dacă are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- a) Să se arate că  $X$  are funcția de repartiție  $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$
- c) Folosind metoda de inversare, să se scrie algoritmul de simulare a unei variabile de observație pentru o variabilă ce este distribuită Cauchy.

$$a) F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$b) \arctan - \text{s.c. pe } \mathbb{R} \Rightarrow F_x(x) - \text{s.c. pe } \mathbb{R}$$

$$\cdot x = F^{-1}(u)$$

$$\arctan x = \left(u - \frac{1}{2}\right) \pi$$

$$x = \tan\left(\pi \frac{2u-1}{2}\right) = F^{-1}(u) \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in [0,1)$$

Function simArctg

u = urand();

k = tan(pi \* ((2 \* u - 1) / 2));

return x;

end