

Laborator LSD - Săptămâna 11

Subgrupa Suplimentară, 1.1C, 3.2C

1. Dicționar de termeni

- **interpretarea unei formule** = o evaluare a formulei pentru propozițiile ei. Spunem despre o interpretare că satisface formula dacă o evaluează la T .
- **tabel de adevăr** = valoarea de adevăr a formulei pentru toate interpretările ei. Pentru o formulă cu n propoziții, vom avea 2^n interpretări.
- **tautologie** = o formulă adevărată pentru toate interpretările
- **formulă realizabilă** = o formulă adevărată în cel puțin o interpretare
- **contradicție** = o formulă care nu e adevărată în nicio interpretare
- **contingență** = o formulă care nu e nici tautologie, nici contradicție
- **formule echivalente** = două formule care au același tabel de adevăr

2. Operatori logici

Definim o propoziție ca fiind o afirmație care poate fi fie adevărată (T), fie falsă (F), dar nu ambele simultan. În logica propozițională, putem construi propoziții mai complexe pe baza propozițiilor simple folosind operatorii logici, așa cum și în limbajul uzual putem construi structuri mai complexe folosind cuvinte cheie precum *și*, *sau*, *dacă ... atunci ...*, etc.

Definiție: Negația logică

Considerăm propoziția a . Negația acesteia, non a , notată cu $\neg a$, este definită prin tabelul de adevăr de mai jos:

a	$\neg a$
T	F
F	T

Observație

$$\neg(\neg a) = a$$

Definiție: Disjuncția logică (SAU)

Considerăm propozițiile a și b . Disjuncția acestora, a sau b , notată cu $a \vee b$, este definită prin tabelul de adevăr de mai jos:

a	b	$a \vee b$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Definiție: Conjuncția logică (ȘI)

Considerăm propozițiile a și b . Conjuncția acestora, a și b , notată cu $a \wedge b$, este definită prin tabelul de adevăr de mai jos:

a	b	$a \wedge b$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Observație: Proprietatea de distributivitate

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Observație: Identitatea și absorția

$$a \vee F = a \text{ (identitate)}$$

$$a \vee (a \wedge b) = a \text{ (absorția)}$$

$$a \wedge T = a$$

$$a \wedge (a \vee b) = a$$

Definiție: Propoziția condițională (Implicația)

Considerăm propozițiile a și b . Implicația, care redă o relație de tipul „dacă a atunci b ”, notată cu $a \rightarrow b$, este definită prin tabelul de adevăr de mai jos:

a	b	$a \rightarrow b$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Observație

$$a \rightarrow b = \neg a \vee b$$

3. Regulile lui de Morgan

Regulile lui de Morgan

Considerăm propozițiile a și b :

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$

Demonstrație (Opțional)

Pentru a demonstra regulile lui de Morgan și a arăta că cele două formule sunt echivalente vom construi tabelele de adevăr:

a	b	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge \neg b$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

respectiv:

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

4. Forma Normală Conjunctivă (CNF)

Forma Normală Conjunctivă (CNF) = Conjuncție \wedge de clauze

Clauza = Disjuncție \vee de literali (propoziții sau negații ale unor propoziții)

Exemple:

$(a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge a$ **este CNF.**

$(a \vee b \vee c)$ **este CNF.**

$(a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ **NU este CNF.**

$(a \vee b \wedge c)$ **NU este CNF.**

Pentru a aduce o formulă la CNF trebuie să ducem negația înăuntru până la propoziții (folosind regulile lui de Morgan) și să ducem disjuncția \vee înăuntru conjuncției \wedge folosind proprietatea de distributivitate.

!Atenție: Înainte de a face acest lucru nu uitați să rescrieți implicațiile folosind formula $a \rightarrow b = \neg a \vee b$.

!Observație: Puteți în anumite cazuri să folosiți proprietățile de absorbție și identitate pentru a simplifica formula.

Exercițiu de „încălzire”

Să se aducă la CNF următoarea formulă, să se realizeze tabelul de adevăr și să se precizeze tipul formulei:

$$f = a \vee (b \wedge c)$$

Soluție

$$f = a \vee (b \wedge c)$$

$$f = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \text{ -am aplicat proprietatea de distributivitate}$$

a	b	c	$a \vee b$	$a \vee c$	$f = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T

\Rightarrow formula este realizabilă

Puteți să vă verificați pe site-ul acesta.

Exercițiu rezolvat

Să se aducă la CNF următoarea formulă:

$$f = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

Soluție

$$f = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

$$f = ((p \wedge q) \vee p) \wedge ((p \wedge q) \vee \neg q)$$

$$f = ((p \vee p) \wedge (p \vee q)) \wedge ((p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee q)) \text{ -eliminăm parantezele redundante}$$

$$f = (p \vee p) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee q) \text{ - folosim } p \vee p = p \text{ și } \neg q \vee q = T$$

$$f = p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge T \text{ -știm că } a \wedge T = a \text{ (din tabelul de adevăr)}$$

$$f = p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$

$$f = p \text{ - am folosit proprietatea de absorbție}$$

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$f = p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
F	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F
T	F	T	T	T	T
T	T	T	F	T	T

\Rightarrow formula este realizabilă.

(Observăm și că prima coloană și ultima coloană sunt identice)

Puteți să vă verificați pe site-ul acesta.

Exercițiu rezolvat

Să se aducă la CNF următoarea formulă, să se realizeze tabelul de adevăr și să se precizeze tipul formulei:

$$f = (a \vee b) \rightarrow \neg(a \vee c)$$

Soluție

$$f = (a \vee b) \rightarrow \neg(a \vee c)$$

$$f = \neg(a \vee b) \vee \neg(a \vee c)$$

$$f = (\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg c)$$

$$f = (\neg a \vee (\neg a \wedge \neg c)) \wedge (\neg b \vee (\neg a \wedge \neg c))$$

$$f = \neg a \wedge (\neg b \vee (\neg a \wedge \neg c))$$

$$f = \neg a \wedge (\neg b \vee \neg a) \wedge (\neg b \vee \neg c)$$

$$f = \neg a \wedge (\neg b \vee \neg c)$$

a	b	c	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	$\neg b \vee \neg c$	$f = \neg a \wedge (\neg b \vee \neg c)$
F	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T	F
T	F	T	F	T	F	T	F
T	T	F	F	F	T	T	F
T	T	T	F	F	F	F	F

\Rightarrow formula este realizabilă

Puteți să vă verificați pe site-ul acesta.

Exercițiu rezolvat

Să se aducă la CNF următoarea formulă:

$$f = \neg(p \rightarrow q) \vee ((r \vee s) \rightarrow (q \vee t)) \vee (\neg p \rightarrow \neg v)$$

Este realizabilă?

Soluție

$$f = \neg(p \rightarrow q) \vee ((r \vee s) \rightarrow (q \vee t)) \vee (\neg p \rightarrow \neg v)$$

$$f = \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg(r \vee s) \vee (q \vee t)) \vee (p \vee \neg v)$$

$$f = (p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg s) \vee q \vee t \vee p \vee \neg v$$

$$f = (p \wedge \neg q) \vee ((\neg r \vee q \vee t \vee p \vee \neg v) \wedge (\neg s \vee q \vee t \vee p \vee \neg v))$$

$$f = (p \vee \neg r \vee q \vee t \vee \neg v) \wedge (\neg s \vee q \vee t \vee p \vee \neg v) \wedge (p \vee \neg r \vee q \vee t \vee \neg v \vee \neg q) \wedge (\neg s \vee q \vee t \vee p \vee \neg v \vee \neg q)$$

$$f = (p \vee \neg r \vee q \vee t \vee \neg v) \wedge (\neg s \vee q \vee t \vee p \vee \neg v) \wedge T \wedge T$$

$$f = (p \vee \neg r \vee q \vee t \vee \neg v) \wedge (\neg s \vee q \vee t \vee p \vee \neg v)$$

Am folosit faptul că $q \vee \neg q = T$

Formula este realizabilă pentru $p = T, r = F, q = T, t = T, v = F, s = F$

Puteți să vă verificați pe site-ul acesta.

Exercițiu rezolvat

Să se aducă la CNF următoarea formulă, să se realizeze tabelul de adevăr și să se precizeze tipul formulei:

$$f = \neg((a \wedge b) \vee ((a \rightarrow (b \wedge c)) \rightarrow c))$$

Soluție

$$f = \neg((a \wedge b) \vee ((a \rightarrow (b \wedge c)) \rightarrow c))$$

$$f = \neg((a \wedge b) \vee ((\neg a \vee (b \wedge c)) \rightarrow c))$$

$$f = \neg((a \wedge b) \vee (\neg(\neg a \vee (b \wedge c)) \vee c))$$

$$f = (\neg(a \wedge b) \wedge \neg(\neg(\neg a \vee (b \wedge c)) \vee c))$$

$$f = ((\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg\neg(\neg a \vee (b \wedge c)) \wedge \neg c))$$

$$f = (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee (b \wedge c)) \wedge \neg c \text{ -am eliminat parantezele redundante}$$

$$f = (\neg a \vee \neg b) \wedge ((\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c)) \wedge \neg c$$

$$f = (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge \neg c \text{ (CNF, dar se mai poate simplifica)}$$

$$f = (((\neg a \vee \neg b) \wedge \neg a) \vee ((\neg a \vee \neg b) \wedge b)) \wedge (\neg a \vee c) \wedge \neg c$$

$$f = (\neg a \vee ((\neg a \vee \neg b) \wedge b)) \wedge (\neg a \vee c) \wedge \neg c \text{ -absorție}$$

$$f = (\neg a \vee ((\neg a \vee \neg b) \wedge b)) \wedge \neg c \text{ -absorție}$$

$$f = (\neg a \vee ((\neg a \wedge b) \vee (\neg b \wedge b))) \wedge \neg c$$

$$f = (\neg a \vee ((\neg a \wedge b) \vee F)) \wedge \neg c$$

$$f = (\neg a \vee ((\neg a \wedge b))) \wedge \neg c$$

$$f = \neg a \wedge \neg c \text{ -absorție}$$

a	c	$\neg a$	$\neg c$	f
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
T	F	F	T	F
T	T	F	F	F

\Rightarrow formula este realizabilă

Puteți să vă verificați pe site-ul acesta.

5. BDD (Binary Decision Diagram)

Pentru a construi BDD, alegeți o propoziție p dintr-o formulă f și calculați $f_{p=T}$ și $f_{p=F}$ (înlocuiți în formula dată pe p întâi cu T apoi cu F). Dacă în urma evaluării ați obținut T , F sau o propoziție elementară (de exemplu q sau $\neg q$) atunci ați terminat de evaluat formula, dacă în schimb obțineți o formulă compusă, veți aplica recursiv algoritmul (alegeți o nouă propoziție, etc). Când ați terminat de evaluat toate formulele veți trece toate propozițiile pe care le-ați înlocuit ca noduri într-o diagramă. În diagramă vor exista și două noduri 0 și 1, 0 corespunde lui False, 1 corespunde lui True. Pentru fiecare propoziție evaluată veți adăuga în diagramă decizia rezultatul evaluării.

Exercițiu rezolvat

Realizați BDD pentru:

$$f = (a \wedge b) \vee (c \wedge d)$$

Soluție

Alegem propoziția a .

$f_{a=T} = (T \wedge b) \vee (c \wedge d) = b \vee (c \wedge d) = f^1$ (am notat formula obținută cu f^1 , 1 nu reprezintă putere)

$f_{a=F} = (F \wedge b) \vee (c \wedge d) = c \wedge d = f^2$

Deoarece în urma înlocuirii nu am obținut cazuri de bază, vom evalua f^1 și f^2 .

Pentru f^1 alegem propoziția b .

$f_{b=T}^1 = T \vee (c \wedge d) = T$ (caz de bază)

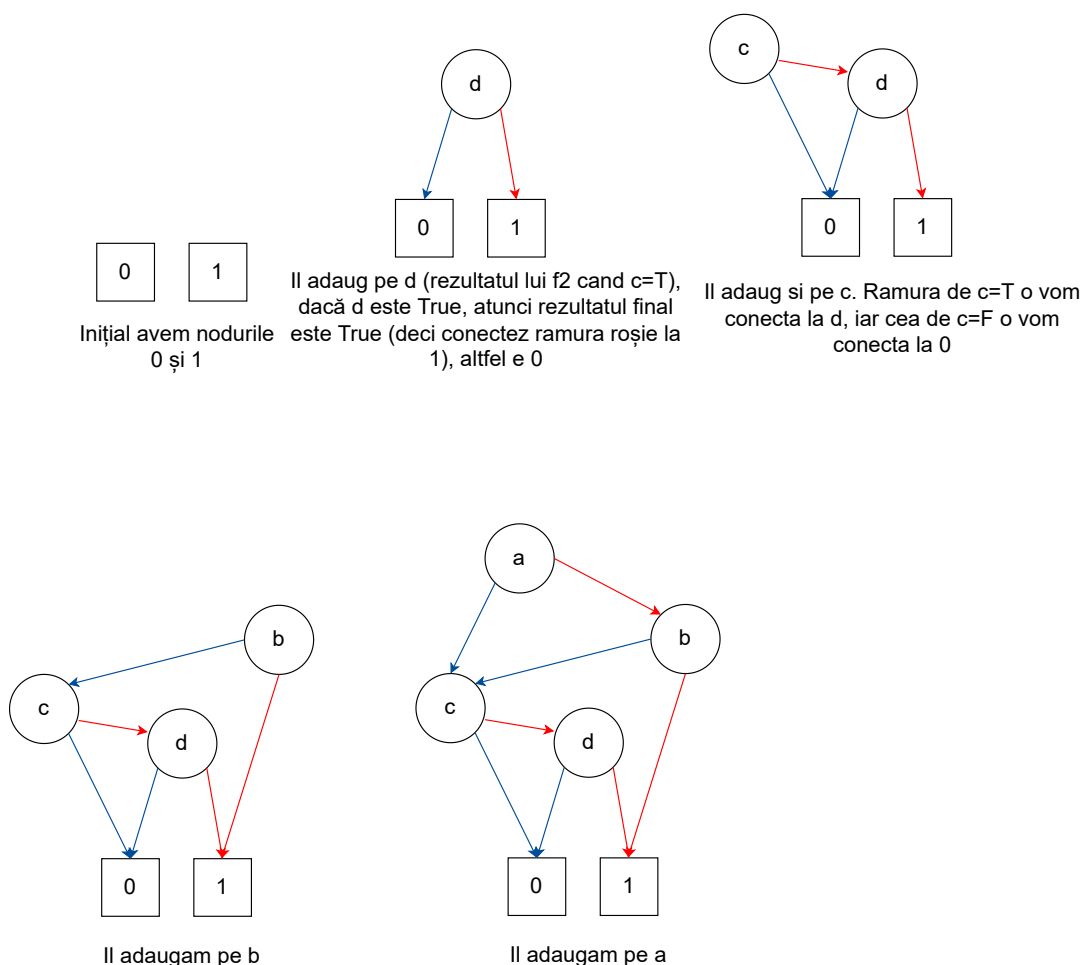
$f_{b=F}^1 = F \vee (c \wedge d) = c \wedge d = f^2$

Acum mai trebuie doar să evaluăm f^2 . Vom alege propoziția c .

$f_{c=T}^2 = T \wedge d = d$ (caz de bază)

$f_{c=F}^2 = F \wedge d = F$ (caz de bază)

Nu mai avem de calculat nimic, vom construi BDD. Doar pentru exemplul acesta vi se vor prezenta în imaginile de mai jos pe pași cum a fost construit



Exercițiu rezolvat

Realizați BDD pentru:

$$f = (a \vee b) \rightarrow \neg(a \vee c)$$

Soluție

$$f = (a \vee b) \rightarrow \neg(a \vee c)$$

$$f = \neg(a \vee b) \vee \neg(a \vee c)$$

Alegem propoziția a .

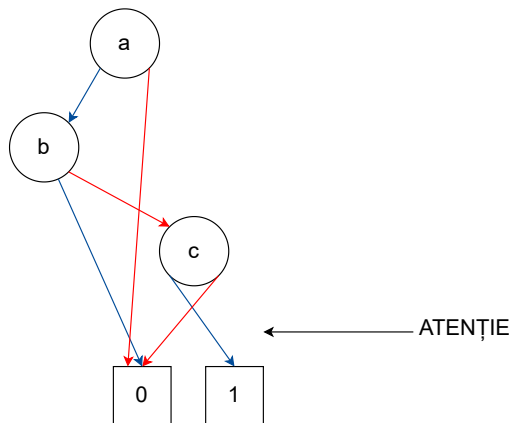
$$f_{a=T} = \neg(T \vee b) \vee \neg(T \vee c) = F \text{ (caz de bază)}$$

$$f_{a=F} = \neg(F \vee b) \vee \neg(F \vee c) = \neg b \vee \neg c = f^1$$

Vom evalua f^1 . Pentru f^1 alegem propoziția b .

$$f_{b=T}^1 = \neg T \vee \neg c = \neg c \text{ (caz de bază, **ATENȚIE pe diagramă la săgeți, aveți negație!**)}$$

$$f_{b=F}^1 = \neg F \vee \neg c = T$$

**6. Logica propozițională în Python (Opțional)**

Se găsește pe Campus Virtual.

7. Temă

Observație privind încărcarea temei: Pentru tema aceasta încărcați **un singur fișier** (.doc, .docx, .pdf, etc). În cazul în care faceți rezolvarea pe foaie, scanați foile și încărcați pdf-ul (Nu încărcați poze). Încărcați rezolvarea pentru minim 2 din cele 4 exerciții.

Temă

Aduceți în forma normal-conjunctivă (CNF), trasați tabelul de adevăr, specificați tipul formulei și realizați diagrama de decizie binară (BDD) pentru următoarele expresii:

1. $\neg((c \rightarrow \neg b) \wedge (a \rightarrow \neg c))$
2. $\neg((b \vee c) \rightarrow \neg(\neg a \vee \neg b) \vee \neg b)$
3. $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c))$
4. $\neg((a \wedge b) \wedge (c \vee (\neg(a \rightarrow (b \wedge c))))$