

Logică digitală

-Curs 5-
Minimizarea și sinteza
funcțiilor logice

Algebra booleană și logica digitală

- Hărți Karnaugh
 - Quine McCluskey
 - Maparea în tehnologie a funcțiilor logice folosind:
 - ȘI-NU
 - SAU_NU
 - XOR
 - PLA
-

Diagramele Karnaugh

- ❑ constituie o matrice de pătrate cu proprietatea ca două celule vecine corespund unor mintermi **adiacenți**.
 - ❑ doi vectori sunt adiacenți dacă diferă valoric prin bit-ul de pe o singură poziție
 - ❑ în diagramă se marchează acei mintermi care au valoarea logică 1 în tabelul de adevăr
-

Minimizarea folosind diagrame Karnaugh

- Dacă la o astfel de grupare nu mai pot fi adăugați mintermi înseamnă că s-a obținut un **implicant prim**.
 - Dacă un anumit implicant prim conține cel puțin un minterm care nu poate apare în alt implicant prim atunci acesta este un **implicant prim esențial**
 - Ecuația minimizată va conține toți implicantii primi esențiali, și uneori și implicantii primi neesențiali, astfel încât toate celule marcate cu 1 logic să fie acoperite
-

Diagramme Karnaugh

x_1	x_0	y_1	y_0	Greater Than	Equal	Less Than
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0

Truth Table

$x_1x_0 \backslash y_1y_0$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Greater-than Function

$$G = x_1y_1' + x_0y_1y_0' + x_1x_0y_0'$$

$x_1x_0 \backslash y_1y_0$	00	01	11	10
00	0	4	5	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Less-than Function

$$L = x_1'y_1 + x_1'x_0y_0 + x_0y_1y_0$$

Diagrame Karnaugh – don't care

- ❑ Nu toate funcțiile logice sunt definite complet.
 - ❑ Pentru unele valori ale variabile de intrare funcția este nu specificată (funcția are „valoarea” don't care - d)
 - ❑ Pt. "d" în diagrama Karnaugh se va lua în considerare valoarea care ne convine pentru d (0 sau 1) a.î. să permită o acoperire mai largă a minternilor.
-

Metoda Karnaugh

□ Avantaje:

- metodă relativ simplă ce se pretează în cazul în care avem puține variabile logice
- metodă vizuală greu de automatizat → greu de dificil de inclus în software specializate de sinteză

□ Dezavantaje:

- când numărul variabilelor de intrare este mai mare de cinci, metoda este foarte greoaie
-

Minimizare: metoda Quine McCluskey

- este o metodă tabelară;
 - mai laborioasă pentru un număr mic de variabile de intrare;
 - elimină în bună măsură dezavantajele metodei Karnaugh:
 - Poate fi implementată în programe specializate de sinteză;
 - Permite o abordare sistematică pentru funcții cu mai multe variabile de intrare;
-

Metoda Quine McCluskey

Studiu de caz

- Să se minimizeze următoarea funcție logică prin metoda Quine-McCluskey:

$$f1(a,b,c,d) = \sum (1,3,4,5,6,9,11,12,13)$$

Quine McCluskey

Pasul 1:

- ❑ mintermi sunt grupați într-un tabel funcție de numărul de variabile nenegate conținute.
 - ❑ aranjarea se va face în ordine crescătoare.
 - ❑ o funcție cu patru variabile de intrare poate avea cinci grupe de minterm:
 - ❑ grupa 0: numai minterm-ul 0,
 - ❑ grupa 1 : mintermi 1, 2, 4 și 8,
 - ❑ grupa 2 : mintermi 3, 5, 6, 9, 10, 12,
 - ❑ grupa 3 va conține mintermi 7, 11, 13 și 14,
 - ❑ grupa 4 va conține minterm-ul 15.
-

Quine McCluskey

$$f1(a,b,c,d) = \sum (1,3,4,5,6,9,11,12,13)$$

Pasul 1:

- ❑ În tabel se trec doar minterm-ii a căror valoare în tabelul de adevăr este **1**
 - ❑ Ex. considerat: 1, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13
 - ❑ grupa 0: numai minterm-ul 0,
 - ❑ grupa 1 : mintermi **1**, 2, **4** și 8,
 - ❑ grupa 2 : mintermi **3**, **5**, **6**, **9**, 10, **12**,
 - ❑ grupa 3 va conține mintermi 7, **11**, **13** și 14,
 - ❑ grupa 4 va conține minterm-ul 15.
-

Quine McCluskey

$$f1(a,b,c,d) = \sum (1,3,4,5,6,9,11,12,13)$$

Pasul 1:

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	

Quine McCluskey

Pasul 2

- ❑ fiecare minterm din grupă i se se compară cu fiecare minterm din grupa $i+1$
 - ❑ Se verifică condiția de adiacență (să difere doar printr-o singură variabilă logică)
 - ❑ Dacă doi mintermi verifică condiția de adiacență atunci:
 - se înlocuiește variabila care diferă cu o liniuță
 - grupul de doi mintermi va fi trecut în grupa i .
 - în tabelul precedent se bifează toți mintermii care au fost grupați. ***Această observație este importantă în vederea ultimului pas.***
-



Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	




Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	




Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	





Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	





Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	






Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	☺
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	☺
	5	0	1	0	1	☺
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	☺
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	







Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	







Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	








Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	









Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	










Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	

Quine McCluskey

Pasul 2

- Pasul 2 se repetă **recursiv** până **NU** se mai pot forma grupări pe baza adicenței!
-

Quine McCluskey

Important:

Toți termenii nebifați din tabelele
construite până acum sunt **implicanți
primi!**

Quine McCluskey

Pasul 3

□ nou tabel:

- prima coloană: grupările obținute care sunt implicanții primi
- Celelalte coloane toți mintermii conținuți de implicanții primi
- în dreptul fiecărui implicant prim se bifează minterm-ii care îi conține

Implicanți primi	Mintermi acoperiți	Mintermi								
		1	3	4	5	6	9	11	12	13
$\bar{a}b\bar{d}$	4,6			X		X				

Quine McCluskey

Pasul 3

- Dacă un minterm este conținut de un singur implicant prim → implicant prim esențial;
 - Expresia minimizată a funcției conține:
 - implicantii primi esențiali,
 - implicantii primi selectați astfel încât acoperirea de mintermi cu fiecare implicant adăugat să fie maximă.
-

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	X
	1,5	0	-	0	1	X
	1,9	-	0	0	1	X
	4,5	0	1	0	-	X
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	X
2	3,11	-	0	1	1	X
	5,13	-	1	0	1	X
	9,11	1	0	-	1	X
	9,13	1	-	0	1	X
	12,13	1	1	0	-	X

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3,9,11	-	0	-	1	
	1,5,9,13	-	-	0	1	
	4,5,12,13	-	1	0	-	

Quine McCluskey

Pasul 3

$$f1(a, b, c, d) = \bar{a}\bar{b}\bar{d} + \bar{b}d + \bar{b}\bar{c}$$

Implicanți primi	Mintermi acoperiți	Mintermi								
		1	3	4	5	6	9	11	12	13
$\bar{a}\bar{b}\bar{d}$	4,6			X		X				
$\bar{b}d$	1,3,9,11	X	X				X	X		
$\bar{c}d$	1,5,9,13	X			X		X			X
$\bar{b}\bar{c}$	4,5,12,13			X	X				X	X

Implicant prim
esențial (singur pe
coloană)

Quine McCluskey

Funcții incomplet specificate

- se vor parcurge primii doi pași ca și în cazul funcțiilor complet specificate cu următoarea precizare:
 - mintermii care au valori nespecificate (valoarea d) în tabelul de adevăr vor fi trecuți în tabele ca și cei cu valoarea 1, putând fi grupați pe baza adiacenței.
 - Pentru evidențierea mintermilor cu valoarea d, aceștia vor fi marcați cu o "*" în tabel.
-

Quine McCluskey

Funcții incomplet specificate

□ Pasul 3:

- tabelul conține în coloanele minterm-ilor **doar** acei mintermi care au valoarea 1, **nu** și minterm-ii care au valoare nespecificată (d).
-

Quine McCluskey

Funcții incomplet specificate

□ Ex.:

$$f_2(a, b, c, d) = \sum (1, 5, 7, 9, 13, 15) + \sum d(8, 10, 11, 14)$$

Pasul 2:

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	X
	8*	1	0	0	0	X
2	5	0	1	0	1	X
	9	1	0	0	1	X
	10*	1	0	1	0	X
3	7	0	1	1	1	X
	11*	1	0	1	1	X
	13	1	1	0	1	X
	14*	1	1	1	0	X
4	15	1	1	1	1	X

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,5	0	-	0	1	X
	1,9	-	0	0	1	X
	8*,9	1	0	0	-	X
	8*,10*	1	0	-	0	X
2	5,7	0	1	-	1	X
	5,13	-	1	0	1	X
	9,11*	1	0	-	1	X
	9,13	1	-	0	1	X
	10*,11*	1	0	1	-	X
	10*,14*	1	-	1	0	X
3	7,15	-	1	1	1	X
	11*,15	1	-	1	1	X
	13,15	1	1	-	1	X
	14*,15	1	1	1	-	X

Pasul 2:

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,5	0	-	0	1	X
	1,9	-	0	0	1	X
	8*,9	1	0	0	-	X
	8*,10*	1	0	-	0	X
2	5,7	0	1	-	1	X
	5,13	-	1	0	1	X
	9, 11*	1	0	-	1	X
	9,13	1	-	0	1	X
	10*,11	1	0	1	-	X
	10*,14*	1	-	1	0	X
3	7,15	-	1	1	1	X
	11*,15	1	-	1	1	X
	13,15	1	1	-	1	X
	14*,15	1	1	1	-	X

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bif
1	1,5,9,13	-	-	0	1	
	8*,9,10*,11*	1	0	-	-	
2	5,7,13,15	-	1	-	1	
	9,11*,13,15	1	-	-	1	
	10*,11*,14*,15	1	-	1	-	

Pasul 3:

Implicanți primi	Mintermi acoperiți	Mintermi					
		1	5	7	9	13	15
$\bar{c}d$	1,5,9,13	X	X		X	X	
$a\bar{b}$	8*,9,10*,11*				X		
bd	5,7,13,15		X	X		X	X
ad	9,11*,13,15				X	X	X
ac	10*,11*,14*,15						X

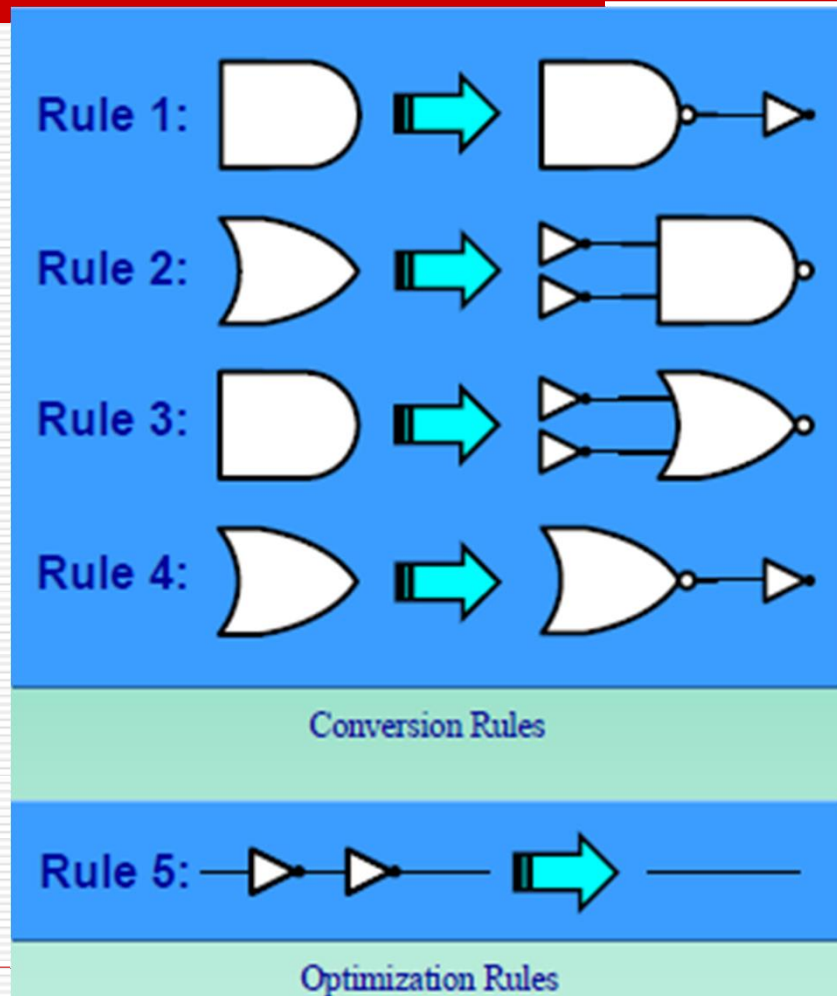
$$f_2(a, b, c, d) = \bar{c}d + bd$$

Maparea funcțiilor logice în tehnologie folosind diferite porți

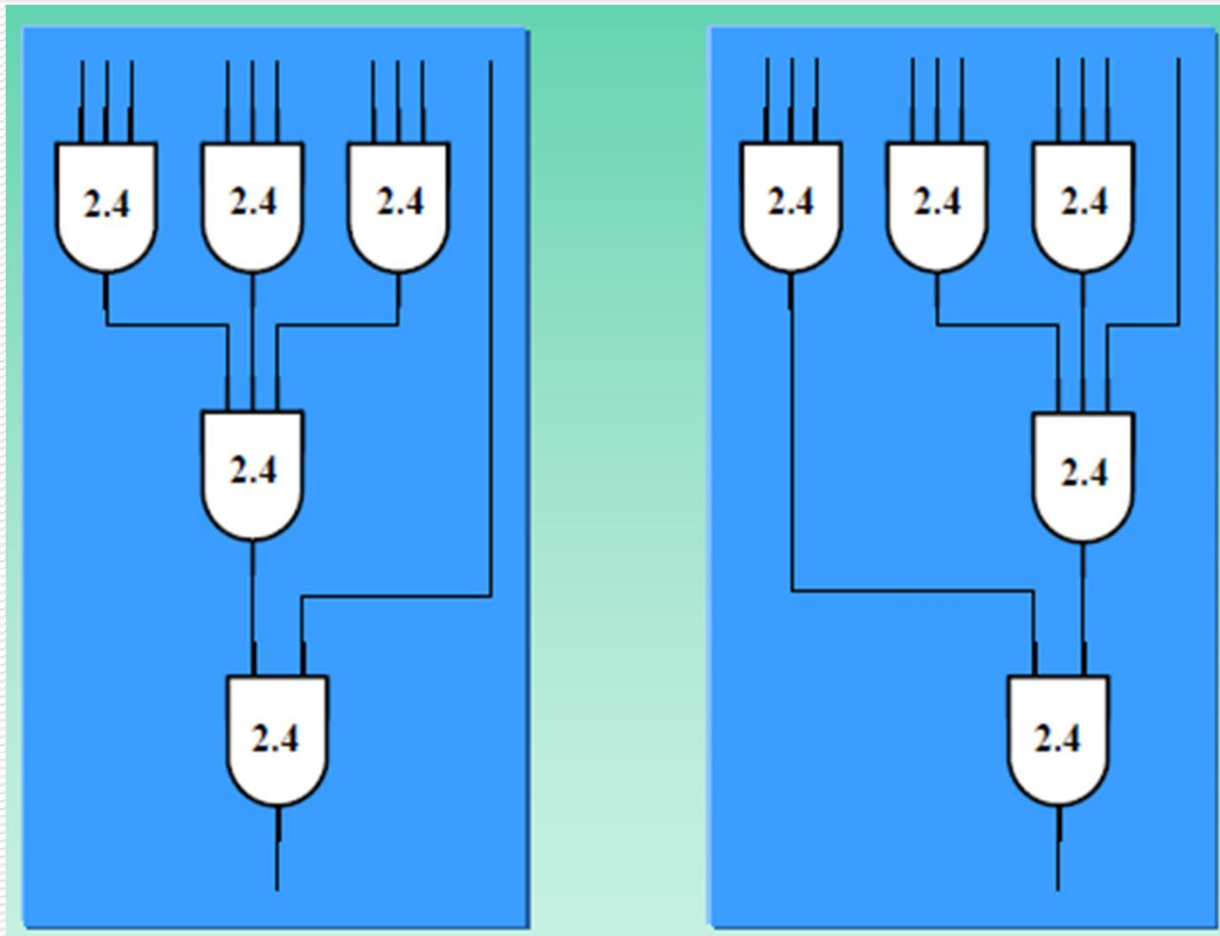
- Maparea funcțiilor logice într-o anumită tehnologie → transformarea expresiilor booleene într-o schemă logică care conține numai porțile logice parte din biblioteca de porți a tehnologiei respective

 - Pentru tehnologia bazată pe array-uri de porți:
 - Pas 1- **conversie** – înlocuirea porților din ecuația logică a funcției implemente cu porți din gate array
 - Pas 2 – **optimizare** – eliminarea porțiilor invertoare
 - Pas 3 - **decompoziție** – înlocuirea porților cu n -intrări cu porți cu m -intrări disponibile în gate array
-

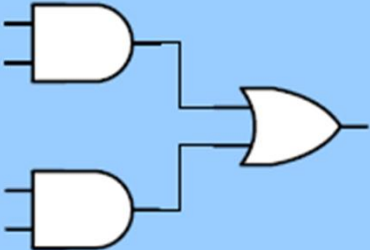
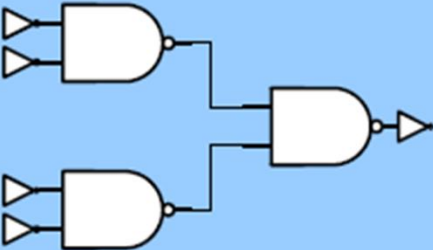
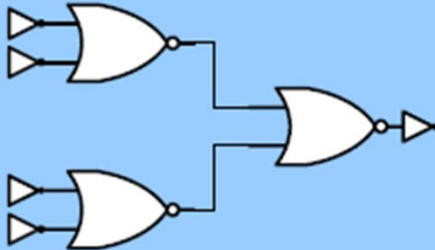
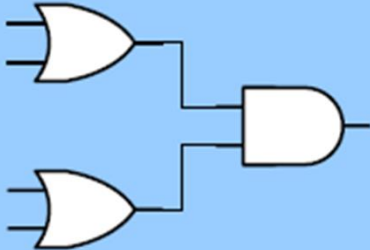
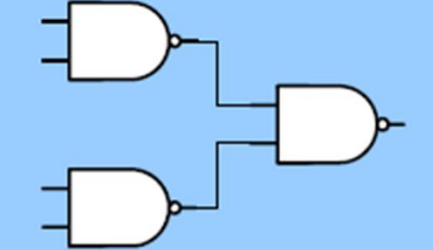
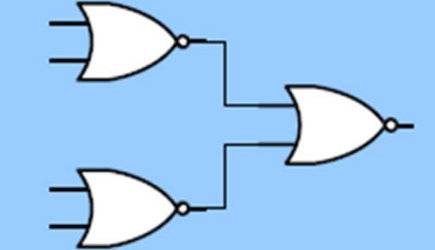
Conversie și optimizare



Decompoziție: descompunerea unei porți ȘI cu 10 intrări folosind porți ȘI cu 3 intrări



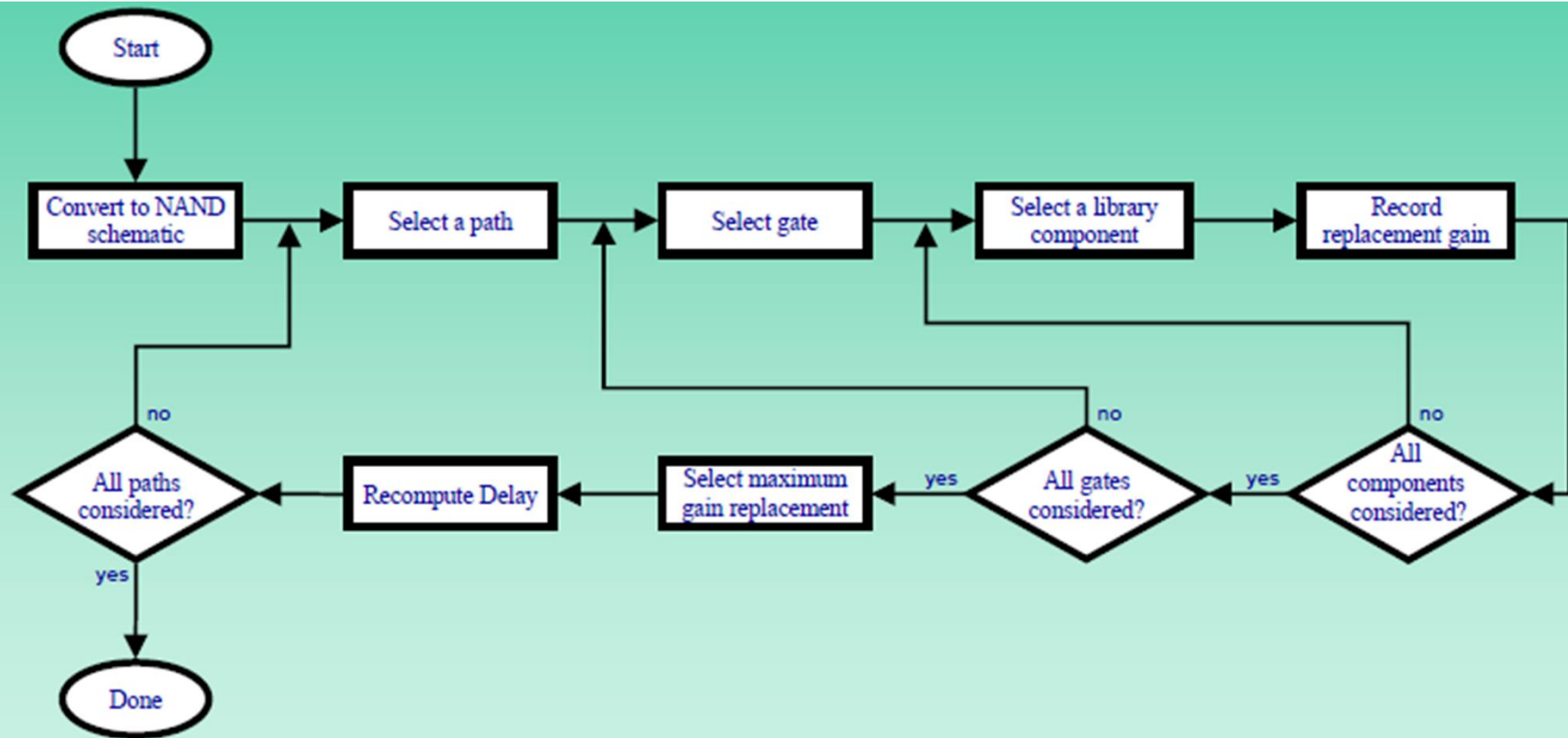
Translatarea SOP și POS în ȘI-NU (NAND) și SAU-NU (NOR)

Form Type	Standard Form Implementation	NAND Implementation	NOR Implementation
Sum of products			
Product of sums			

Implementarea funcției folosind o bibliotecă de porți custom

- Biblioteca: conține porți cu întârzieri și cost (nr.de tranzistori) diferit
 - Maparea folosind o bibliotecă custom pp. "rescrierea" schemei folosind biblioteca respectivă de porți
 - Se urmărește:
 - Minimizarea delay-ului pe căile critice
 - Minimizarea costului pentru celelalte
-

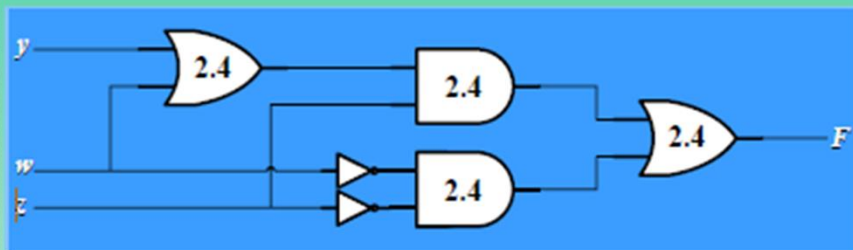
Procedura de conversie pentru o bibliotecă custom de porți



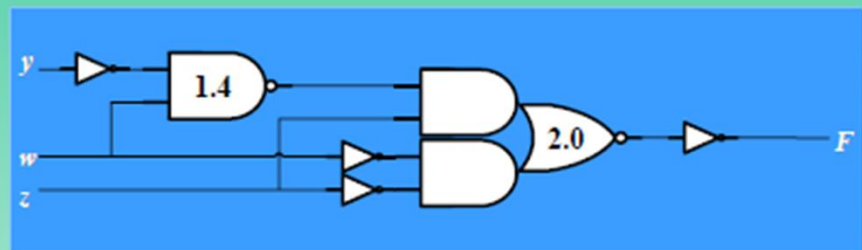
Exemplu:

Example: Technology mapping for custom libraries

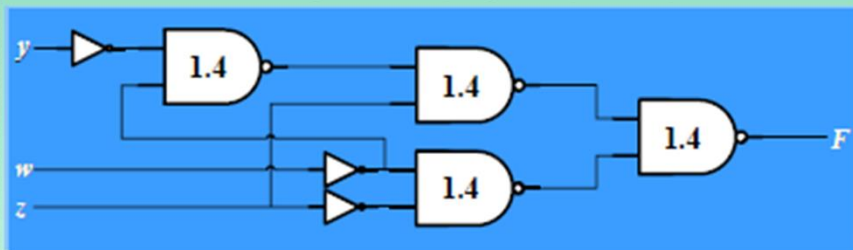
Problem: Convert the expression $w'z' + z(w + y)$ into a logic schematic using any of the gates defined in the digital logic gates, multiple-input gates, and complex gates libraries



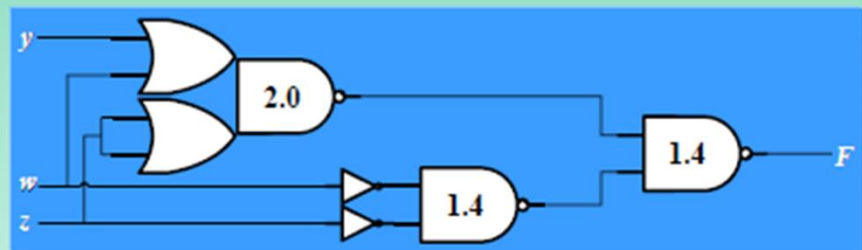
AND-OR Implementation (Delay = 7.2ns, Cost = 28)



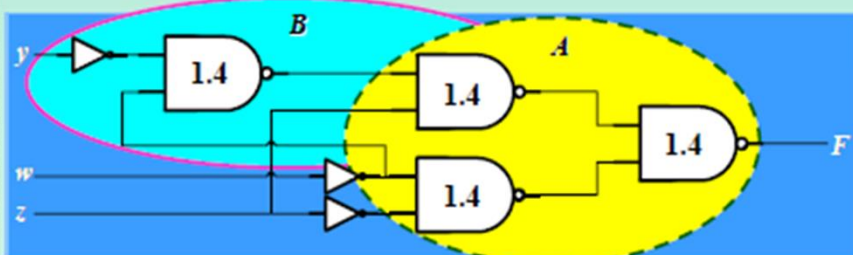
Alternative A (Delay = 5.4ns, Cost = 20)



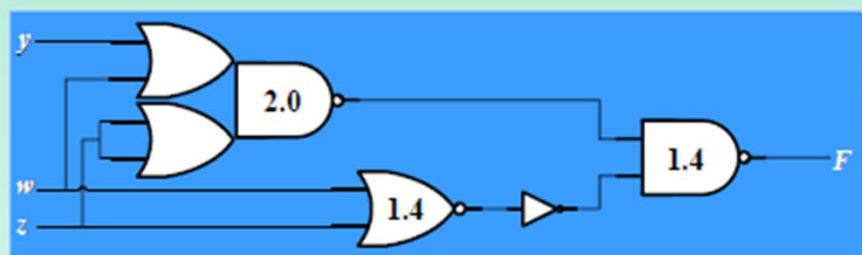
NAND Implementation (Delay = 5.2ns, Cost = 22)



Alternative B (Delay = 3.8ns, Cost = 20)



Two Possible Conversions



Cost Optimized Alternative B (Delay = 3.8ns, Cost = 18)

Sinteza funcțiilor combinaționale

porți SAU – EXCLUSIV

SAU–EXCLUSIV este comutativă, asociativă și distributivă față de operația **ȘI**.

$$A \oplus B = B \oplus A$$

comutativitate

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

asociativitatea

$$A \cdot (B \oplus C) = A \cdot B \oplus A \cdot C$$

distributivitate fata de **ȘI**

$$A \oplus A = 0$$

$$A \oplus 0 = A$$

$$A \oplus 1 = \bar{A}$$

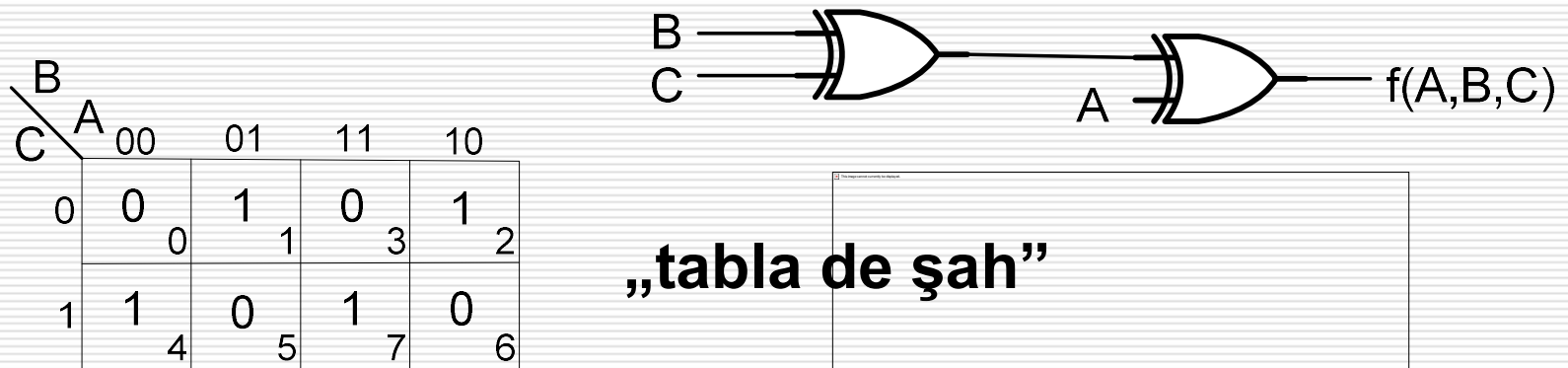
$$A \oplus \bar{A} = 1$$

Există anumite funcții combinaționale care nu se pot minimiza, în a căror reprezentare pe diagrama V-K **unu-rile și zero-urile sunt plasate „în tablă de șah” și care pot fi realizate cu porți logice SAU – EXCLUSIV .**

Sinteza funcțiilor combinaționale porți SAU – EXCLUSIV

Exemplu: să se realizeze cu porți logice **SAU-EXCLUSIV** sinteza funcției:

$$f(A, B, C) = ABC + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$



C \ B	A			
	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

„tabla de șah”

$$ABC + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} = A(BC + \overline{B}\overline{C}) + \overline{A}(\overline{B}\overline{C} + B\overline{C}) = A(\overline{B \oplus C}) + \overline{A}(B \oplus C) = A \oplus (B \oplus C)$$

Întrebări?

**Enough Talking Let's Get To It
!!Brace Yourselves!!**

