SEMINAR săptămâna 4: Exemple de spaţii vectoriale. Vectori liniar dependenţi şi liniar dependenţi. Sisteme de generatori

0.1 SARCINI

• De citit din cartea scrisă cu dl. Dăianu:
- $\S 1, 2, 5, 6$ din capitolul 2 şi mai ales exerciţiile 1,3,4,5 strecurate în text (pag. 50-54, 57-62)
- exerciţiile rezolvate 1,2,3,4 (pag. 69-70)
- de lucrat exerciţiile: 4,5,9,16 (pag. 76-78)

• De rezolvat exerciţiile propuse mai jos.

• În fine, rezolvaţi şi încărcaţi pe CV exerciţiul pe care îl aveţi lăsat temă pe CV.

0.2 EXERCIŢII PROPUSE

1. Studiaţi dacă vectorii $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (4, 5, 6)$ sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}^3$. Formează ei sistem de generatori în $\mathbb{R}^3$?

2. Studiaţi dacă vectorii $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (3, 4)$ şi $v_3 = (5, 6)$ sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}^2$. Formează ei sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^2$?

3. Studiaţi dacă vectorii $v_1 = 2X - 4$, $v_2 = X^2 - 4$ şi $v_3 = X^2 - X - 2$ sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}_2[X]$. Formează ei sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_2[X]$? Dar în $\mathbb{R}_3[X]$?

4. Arătaţi că mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ a+b & 7a-9b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari reali a matricelor din $\mathbb{R}^{2\times 2}$, formează un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

5. Daţi exemplu de 3 vectori liniar independenţi în $\mathbb{R}^{2\times 2}/_{\mathbb{R}}$.

6. Studiaţi dacă vectorii $v_1 = (1, i)$ şi $v_2 = (i, -1)$ sunt liniar independeţi în spaţiul vectorial $\mathbb{C}^2/_{\mathbb{C}}$. Dar în spaţiul vectorial $\mathbb{C}^2/_{\mathbb{R}}$?

7. Fie $V/_K$ un spaţiu vectorial şi $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Demonstraţi că mulţimea $S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K\}$ împreună cu operaţiile induse de pe V este spaţiu vectorial.

8. Pe mulţimea $V = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ definim operaţia internă de adunare pe componente, $(x_1, k_1) + (x_2, k_2) = (x_1 + x_2,\ k_1 + k_2)$ şi înmulţirea cu scalari din $\mathbb{R}$ definită prin:

$\alpha \cdot (x, k) = (\alpha \cdot x, 0)$. Arătaţi că axiomele $SV1 - SV7$ din definiţia spaţiului vectorial sunt verificate, dar axioma $SV8$ nu.

9. Demonstraţi că vectorii v_1 şi v_2 şi $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ formează sistem de generatori pentru un spaţiu vectorial V dacă şi numai dacă v_1 şi v_2 este sistem de generatori pentru V.

10. Demonstraţi că vectorii $v_1 + 2v_2$ şi $v_2 + 2v_1$ sunt liniar independenţi într-un spaţiu vectorial V dacă şi numai dacă vectorii v_1 şi v_2 sunt liniar independeţi în V.

11. Demonstraţi că dacă $\theta_V \in \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, atunci vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sunt liniar dependenţi în V.