Matematici speciale
(curs 5 - S 5)

21.03.2024

Distribuții clasice de probabilitate

$$X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

O varb. aleatoare este descrisă prin tabelul de distribuție

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

unde: x_i-valorile lui X, iar , $p_i = P(X = x_i), 0 \le p_i \le 1, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

sau p.m.f.(probability mass function)

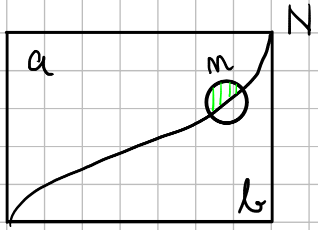
$$p(x) = \begin{cases} p_1, & \text{daca } x = x_1 \\ p_2, & \text{daca } x = x_2 \\ \dots \\ p_n, & \text{daca } x = x_n \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

sau c.d.f.(cumulative distrb. function=funcția de repartitie)

$$F_X(x) := P(X \le x)$$

1. Distribuția Bernoulli
2. Distribuția binomială
3. Distribuția geometrică + hipergeometrică
4. Distribuția Poisson

Distrib. clasică	Exp. aleator	Tabel de repartiție	Media, Dispersia
$X \sim$ Bernoulli (p) p-prob. succesului	Aruncarea unei monede Succesul $\overset{not}{=}$ 1 Eșecul $\overset{not}{=}$ 0	X - înregistrează rezultatul $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$	$M(X) = p$ $\sigma^2(X) = p \cdot q$ $q = 1 - p$
$X \sim bin(n, p)$ n - nr. repetări p - prob. succesului	Aruncarea de n ori a unei monede	X - înregistrează de câte ori obținem succesul în cele n aruncări $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ & & & C_n^k p^k q^{n-k} & & \end{pmatrix}$	$M(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k\, p^k q^{n-k} = n \cdot p$ $\sigma^2(X) = n \cdot p \cdot q$
$X \sim geom(p)$ p - prob. succesului	Aruncarea monedei până la întâlnirea primului succes (inclusiv)	Y-înregistrează nr. de aruncări până la I succes $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ & & & p\, q^{k-1} & \end{pmatrix}$	$M(X) = \frac{1}{p}$ $\sigma^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$

X - hipergeom (N, n, p) $p = \frac{a}{N}$		Y - înregistrează câte produse din categoria a, din cele n selectate $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ & & & \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_N^n} & & \end{pmatrix}$	$M(X) = n \cdot p$ $\sigma^2(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot p \cdot q$
$X \sim Pois(\lambda)$ λ = nr. mediu de produceri ale ev. într-un interval fixat		$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k \\ & & & \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \end{pmatrix}$	$M(X) = \lambda$ $\sigma^2(X) = \lambda$

1. Aplicație

Determinarea nr. moduri de run-uri de biți dintr-un șir

Run de biți de 1 = succesiune de biți de 1 într-un șir de biți

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} \qquad p = P(X_1 = 1)$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ pq & 1-pq \end{pmatrix} \qquad P(Y_2 = 1) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = q \cdot p$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ pq & 1-pq \end{pmatrix} \qquad P(Y_3 = 1) = P(X_2 = 0 , X_3 = 1) = pq$$

La fel după pt $i \geq 4$

$$N = \sum_{i=1}^{m} Y_i$$

$$M(N) = \sum_{i=1}^{m} M(Y_i) = 1 \cdot p + (m-1)\, p \cdot q$$

$$p(x) = \begin{cases} p, & \text{daca } x = 1 \\ 1 - p, & \text{daca } x = 0 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

2. Distributia binomiala

$$X \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ & & & C_n^k p^k q^{n-k} & & \end{pmatrix}$$

Cazul $n = 3$, $\Omega = \{(\text{Aruncarea } 1, \text{Aruncarea } 2, \text{Aruncarea } 3)\}$, avem:

- nu se obține banul la nicio aruncare $\leftrightarrow$ se obține (S,S,S);
  $P(X = 0) = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = C_3^0 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^3$
- se obține banul la o aruncare din cele trei $\leftrightarrow$ (B,S,S) sau (S,B,S) sau (S, S, B);
  $P(X = 1) = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = C_3^1 (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^2$
- se obține banul la două aruncări din cele trei $\leftrightarrow$ (B,B,S) sau (S,B,B) sau (B, S, B);
  $P(X = 2) = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = C_3^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^1$
- se obține banul la toate cele 3 aruncări $\leftrightarrow$ (B,B,B)
  $P(X = 3) = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = C_3^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^0$

Deci,

$$X = \begin{pmatrix} k \\ C_3^k p^k (1-p)^{n-k} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3, p = 1/2$$

3. Distributia geometrică

$$Y \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ & & & p\, q^{k-1} & \end{pmatrix}$$

$P(Y = k)$

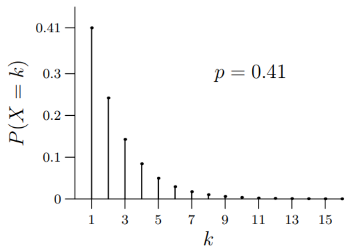
la aruncarea k - succes, iar la cele anterioare - eșec

$$M(Y) = \sum_{k \geq 1} k \cdot p \cdot q^{k-1}$$

$$M(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Distribuția de probabilitate geometrică, Geom($p = 0.41$),



Observație importantă

Distribuția geometrică[a] se poate defini și ca variabila W ce înregistrează numărul de eșecuri, înaintea primului succes, adică W=Y-1.
In acest caz, $D_W = \{0, 1, 2, \dots\}$, iar
$P(W = k) = P(Y - 1 = k) = P(Y = K + 1) = (1 - p)^k p$

[a] https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_distribution

4. Hiperg.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ & & & \frac{C_a^k \, C_b^{n-k}}{C_N^n} & & \end{pmatrix}$$

$M(X) = np$

$\sigma^2(X) = \frac{N-n}{N-1} npq$

NU TRB învățată pe de rost

5. Distribuția Poisson

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k \\ & & & \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$M(X) = \lambda$

$\sigma^2(X) = \lambda$

Distribuția Poisson este o aproximare a distribuției binomiale
($n-$ foarte mare, p-foarte mic, $\lambda = np$ constantă pozitivă)

Teoremă

Fie $X \sim B(n, p = \frac{\lambda}{n})$, cu $\lambda > 0$ fixat. Atunci, $\forall k \in \{0, 1, 2 \dots\}$, avem

$$\lim_{n\to\infty} P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Important: In cazuri speciale (n-mare și p-mic) putem folosi distribuția Poisson, care este mult mai simplă decât distribuția binomială.