Curs 2/Partea 2: Formula lui Bayes. Aplicaţii

1.1 Formula lui Bayes

În teoria clasică a probabilităţilor (TP), probabilitatea unui eveniment este, intuitiv, aproximată de frecvenţa de producere a evenimentului respectiv, frecvenţă dedusă din repetarea experimentului de multe ori.

Pornind de la o formulă dedusă de Thomas Bayes s-a constituit un nou curent in TP, care consideră că probabilitatea unui eveniment indică nivelul de convingere că evenimentul respectiv se produce într-un experiment. Astfel probabilitatea asociată unui eveniment depinde, în această accepţiune, de nivelul de cunoaştere al celui care o atribuie. Dacă cunoaşterea fenomenului, procesului analizat, se amplifică pe baza a noi informaţii, atunci probabilitatea atribuită unui eveniment se rectifică/actualizează. Aceasta este ideea de bază

Să prezentăm acum contextul general al formulei lui Bayes.

Prezentăm problematica legată de formula lui Bayes în limbaj specific inteligenţei artificiale. Şi anume, fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un spaţiu de probabilitate, şi $H_1, H_2, \ldots H_n \in \mathcal{K}$, o partiţie a evenimentului sigur Ω, adică $\cup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$ şi $H_i \cap H_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$. Evenimentele H_i, $i = \overline{1,n}$ se numesc ipoteze. Ipotezele sunt acceptate cu o anumită probabilitate, $P(H_i)$.

Fiind mutual exclusive două câte două rezultă că suma probabilităţilor este 1:

$$1 = P(\Omega) = P(H_1) + P(H_2) + \cdots + P(H_n)$$

Dacă apare o nouă informaţie A, (adică se produce un eveniment în conexiune cu problematica studiată), atunci nivelul de veridicitate (verosimilitate este termenul uzual folosit în P&S)al acestei informaţii, se reprezintă prin probabilităţile condiţionate $P(A|H_k)$, $k = \overline{1,n}$. $P(A|H_k)$ este nivelul de verosimilitate al informaţiei A în condiţiile acceptării ipotezei H_k.

Formula lui Bayes este regula după care probabilităţile condiţionate $P(H_k|A)$ sunt actualizate. Adică pe baza informaţiei A, nivelul de acceptare al ipotezelor se schimbă. Să deducem în continuare, cum pe baza informaţiei se actualizează probabilităţile ipotezei.

Pentru această în prima etapă calculăm probabilitatea $P(A)$, adică nivelul de veridicitate al informaţiei A, pe baza probabilităţilor ipotezelor, $P(H_k)$, numite **probabilităţi**

apriorice şi probabilităţilor condiţionate $P(A|H_k)$. Avem următoarea formulă:

Propoziţia 1.1.1 (**Formula probabilităţii totale**) *Dacă $A \in \mathcal{K}$ este un eveniment informaţie, atunci gradul/nivelul de veridicitate al acestei informaţii este:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i) \tag{1}$$

Demonstraţie: $H_1, H_2, \ldots, H_n$ fiind mutual exclusive două câte două, atunci şi $(A \cap H_i), (A \cap H_j)$, $\forall i \neq j$, sunt mutual exclusive, două câte două. Astfel evenimentul A este reuniunea unor evenimente mutual exclusive, $A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \cdots \cup (A \cap H_n)$ şi probabilitatea sa este $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i)$. Din formula probabilităţii condiţionate avem că $P(A \cap H_i) = P(H_i)P(A|H_i)$, de unde rezultă (1).

□

Formula lui Bayes rectifică, actualizează probabilităţile ipotezelor, pe baza informaţiei A, şi anume:

Propoziţia 1.1.2 (**Formula lui Bayes**) *Probabilitatea ipotezelor condiţionată de evenimentul informaţie este:*

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} \quad k = \overline{1,n} \tag{2}$$

Demonstraţie: Formula lui Bayes rezultă exprimând $P(H_k \cap A)$ în două moduri:

$$P(H_k \cap A) = P(H_k)P(A|H_k) = P(A)P(H_k|A). \tag{3}$$

Din ultima egalitate avem:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)} \overset{(1)}{=} \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}, \quad k = \overline{1,n}$$

□

Definiţia 1.1.1 *În formula lui Bayes probabilităţile actualizate ale ipotezelor, $P(H_k|A)$, se numesc* **probabilităţi posteriorice**, *$k = \overline{1,n}$.*

Formula lui Bayes modifică probabilităţile apriorice prin încorporarea informaţiei furnizate de evenimentul A. În cazul binar când avem doar două ipoteze, H şi non-H, $\overline{H}$, formula lui Bayes devine:

$$P(H|A) = \frac{P(H)P(A|H)}{P(H)P(A|H) + P(\overline{H})P(A|\overline{H})} \tag{4}$$

Un exemplu sugestiv, care a influenţat introducerea teoriei Bayesiene în inteligenţa artificială este cel este furnizat de modul de diagnosticare folosită în practica medicală.

Exemplul 1. Un pacient este suspectat de o boală rară. Diagnosticul se poate pune în urma unui test clinic. Există două ipoteze mutual exclusive: pacientul are boala respectivă (H_1) sau nu (H_2). Evident $H_2 = \overline{H_1}$.

Probabilităţile apriorice ale ipotezelor sunt furnizate de Organizaţia Mondială a Sănătăţii, care afirmă (pe baza nivelului ei de cunoaştere, rezultat din datele statistice) că 2 adulţi din 1000 au această boală, adică $P(H_1) = 2/1000 = 0.002$. Prin urmare $P(H_2) = 0.998$

Notăm cu A_+ evenimentul informaţie, ce semnifică test clinic pozitiv şi cu A_- informaţia, test clinic negativ.

Experienţa de laborator arată că în 97% din cazuri în care afecţiunea respectivă există, testul iese pozitiv, deci $P(A_+|H_1) = 0.97$, iar la 95% din cazuri, în care boala nu este prezentă, testul iese negativ, adică $P(A_-|H_2) = 0.95$) şi deci $P(A_+|H_2) = 0.05$ (deoarece P_{H_2} este o funcţie de probabilitate şi deci, $P_{H_2}\complement(A) = 1 - P_{H_2}(A)$);

Dacă testul pentru pacientul în discuţie iese pozitiv care este probabilitatea $P(H_1|A_+)$, ca pacientul să aibă boala X?

Rezolvare

Conform formulei Bayes avem:

$$P(H_1|A_+) = \frac{P(H_1)P(A_+|H_1)}{P(H_1)P(A_+|H_1) + P(H_2)P(A+|H_2)} = \frac{0.002 \times 0.97}{0.002 \times 0.97 + 0.998 \times (0.05)} =$$

$= 0.0388$ Prin urmare informaţia furnizată de test schimbă probabilităţile apriorice $P(H_1) = 0.002$, $P(H_2) = 0.998$ în probabilităţile posteriorice: $P(H_1|A_+) = 0.0388$, $P(H_2|A_+) = P(\overline{H_1}|A+) = 1 - P(H_1|A_+) = 1 - 0.0388 = 0.9612$ sau în cuvinte, probabilitatea ca pacientul să fie bolnav, dat fiind că testul a ieşit pozitiv este 0.0388, ceea ce în limbaj medical se traduce spunând că din 1000 de cazuri cu test pozitiv 38 au boala respectivă. Comparativ cu informaţia dată de Organizaţia Mondială a Sănătăţii, folosirea informaţiei de test pozitiv, modifică substanţial probabilitatea prezenţei bolii (de la 2 bolnavi dintr-o 1000, la 38 dintr-o mie).

Curentul Bayesian de abordare a teoriei probabilităţilor a fost abordat cu succes în inteligenţa artificială.

1.2 Aplicaţii

Exemplul 2. La un examen de tip grilă fiecare întrebare are 5 răspunsuri asociate dintre care unul singur este corect. Un student ştie răspunsul corect la 65% dintre întrebări. La cele la care nu ştie răspunsul încercuieşte unul la întâmplare.

a) Care este probabilitatea ca studentul să dea un răspuns greşit la o anumită întrebare?

b) Ştiind că acesta a răspuns corect la acea întrebare, care este probabilitatea ca răspunsul să fie obţinut prin ghicire?

Rezolvare: a) Evenimentul sigur al experimentului aleator, ”studentul răspunde la o anumită întrebare”, se descompune în evenimentele mutual exclusive:

H_1 - studentul ştie răspunsul corect la întrebare;

H_2 - studentul nu ştie răspunsul corect la întrebare, adică dă răspuns la întâmplare la acea întrebare.

Fie A evenimentul ”studentul dă răspuns greşit la întrebare”. Formula probabilităţii totale este

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Din datele problemei, $P(H_1) = 0.65$, iar $P(H_2) = P(\overline{H}_1) = 1 - 0.65 = 0.35$. Pe de altă parte, $P(A|H_1) = 0$, iar $P(A|H_2) = 4/5 = 0.8$. Astfel, $P(A) = 0.35 \times 0.8 = 0.28$.

b) Avem de calculat

$$P(H_2|\overline{A}) = \frac{P(H_2)P(\overline{A}|H_2)}{P(\overline{A})} = \frac{0.35 \times (1 - 0.8)}{1 - 0.28} = \frac{7}{72}.$$

□

Exemplul 3. Fie H_1, H_2 o partiţie a spaţiului de selecţie Ω şi A un eveniment astfel încât $P(H_1) = 0.4$, $P(A|\overline{H_1}) = 0.2$ şi $P(A|\overline{H_2}) = 0.7$. Să se calculeze $P(\overline{H_1})$, $P(H_2)$, $P(A|H_1)$ şi $P(A)$. Explicaţi!

Exemplul 4. Un robot se mişcă într-un spaţiu de lucru (de exemplu, o cameră). El are un senzor care poate măsura distanţa până la orice obiect din preajmă. Pe baza informaţiei primite de la senzor, sistemul de calcul încorporat calculează probabilitatea ca uşa camerei să fie deschisă. Notăm cu H evenimentul ”uşa este deschisă”, care are probabilitatea 0.6. Robotul primeşte informaţia de la senzor că o anumită distanţă până în zona uşii este d, privită ca o observaţie asupra unei variabile aleatoare D. Din experienţa robotului în spaţiul de lucru, sistemul de calcul are stocată informaţia că $P(D = d|H) = 0.7$, respectiv $P(D = d|\overline{H}) = 0.1$. Să se calculeze probabilitatea ca uşa să fie deschisă ştiind că distanţa măsurată este d.

Exemplul 5. Un program are două module. Primul modul conţine erori cu probabilitatea de 0.2, iar al doilea, fiind mai complex, conţine erori cu probabilitatea de 0.4, independent de erorile din primul modul. Existenţa unei erori doar în primul modul face ca programul să eşueze cu o probabilitate de 0.5, în timp ce o eroare doar în al doilea modul conduce la blocajul programului cu o probabilitate de 0.8. Existenţa unei erori în ambele module produce blocarea programului cu o probabilitate de 0.9. Dacă programul a eşuat, care este probabilitatea ca eşecul să fi fost produs de erori din ambele module (o eroare în primul modul şi o eroare în al doilea modul)?

Rezolvare: Considerăm A evenimentul informaţie ”programul a eşuat”. Notând cu

E_1: ”existenţa unei erori în primul modul”,

E_2: "existenţa unei erori în al doilea modul",
o partiţie a spaţiului de selecţie va fi dată de evenimentele (ipoteze):

$$H_1 = E_1 \cap E_2,\ H_2 = \overline{E_1} \cap E_2,\ H_3 = E_1 \cap \overline{E_2},\ H_4 = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}.$$

Evenimentul H_1 înseamnă "existenţa unei erori în primul modul şi existenţa unei erori în al doilea modul", H_2: "existenţa unei erori doar în al doilea modul", H_3: "existenţa unei erori doar în primul modul", iar H_4: "în ambele module nu există nici o eroare".

Evenimentele E_1, E_2 fiind independente, deci şi evenimentele $\overline{E_1}, E_2$, respectiv $E_1, \overline{E_2}$, respectiv $\overline{E_1}, \overline{E_2}$ sunt independente, se obţine

$$P(H_1) = P(E_1)\,P(E_2) = 0.2 \times 0.4 = 0.08,\ P(H_2) = P(\overline{E_1})\,P(E_2) = 0.8 \times 0.4 = 0.32,$$

$$P(H_3) = P(E_1)\,P(\overline{E_2}) = 0.2 \times 0.6 = 0.12,\ P(H_4) = P(\overline{E_1})\,P(\overline{E_2}) = 0.8 \times 0.6 = 0.48.$$

Aplicând formula probabilităţii totale, avem

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4) \\ &= 0.08 \times 0.9 + 0.32 \times 0.8 + 0.12 \times 0.5 + 0.48 \times 0 = 0.388. \end{aligned}$$

Se cere

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0.08 \times 0.9}{0.388} = \frac{72}{388}.$$

□