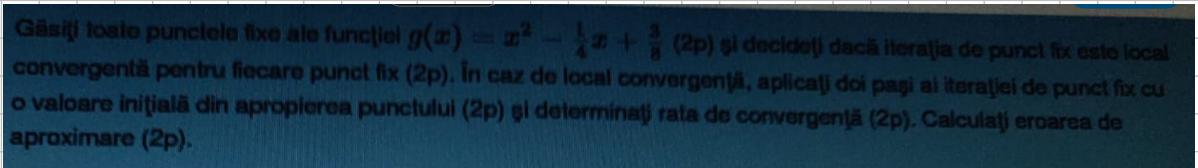
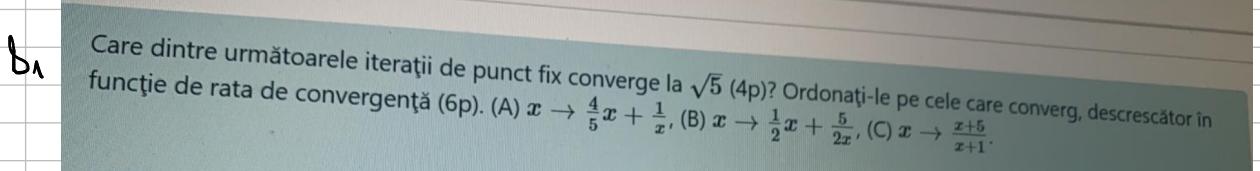
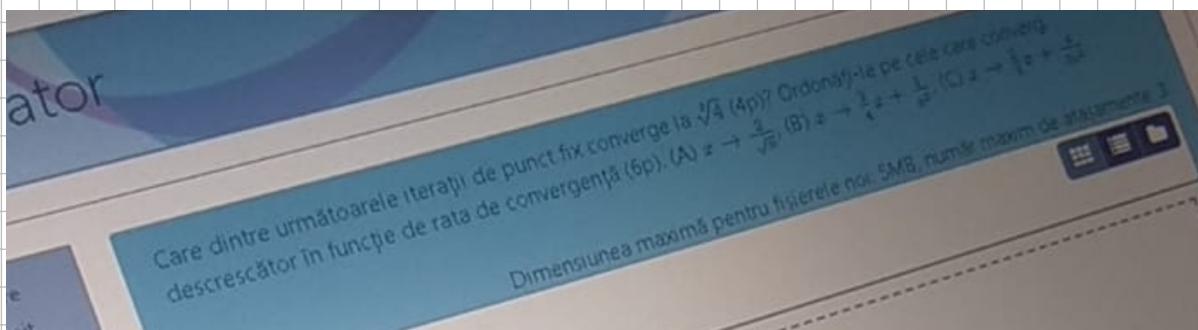


T<sub>1</sub>

Aplicați iterarea de punct fix pentru rezolvarea ecuației  $e^x + \sin x = 4$ , cu patru zecimale exacte. Verificați rezultatul folosind funcția fzero.



4. Care dintre următoarele îPF converg la  $\sqrt{2}$ ? Ord. discure, în funcț. de rata de cădere.

- b<sub>1</sub>
- A  $x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$
- B  $x \rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{3}{3x}$
- C  $x \rightarrow \frac{3}{4}x + \frac{1}{2x}$

$$T1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = f(x_0)$$

$$D2 \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = s < 1$$

$$T2 \quad g(r) = r$$

$$s = |g'(r)| < 1 \quad \Rightarrow \quad e_{i+1} \approx e_i \cdot s$$

$$T3 \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad e_i = |x_i - r| \quad \Rightarrow \quad e_{i+1} = |g(c_i)| e_i$$

$$\textcircled{1} \quad g(x) = x \quad g(x) = 2,8x - x^2 \quad \text{val. initial} \underset{!}{=} 0,1$$

$$2,8x - x^2 = x$$

$$-x^2 + 1,8x = 0$$

$$x(1,8-x) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1,8$$

$$x_0 = 0,1.$$

$$x_1 = g(x_0) = 2,8 \cdot 0,1 - 0,1^2 = 0,28 - 0,01 = 0,27$$

$$x_2 = g(x_1) = 2,8 \cdot 0,27 - 0,27^2 = 0,6831$$

$$x_3 = g(x_2) = 1,4461$$

$$x_4 = g(x_3) = 1,9579$$

$$g'(1,8) = -0,8 \quad |g'(1,8)| < 1 \quad \text{converge}$$

$$|g'(0)| = 2,8 > 1 \quad \text{diverge}$$

$$|x_{i+1} - x_i| < TOL$$

$$\frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|} < TOL$$

Aplicați iteratia de punct fix pentru rezolvarea ecuației  $e^x + \sin x = 4$ , cu patru zecimale exacte. Verificați rezultatul folosind funcția fzero.

```
fpi.m
1 function xc = fpi(g, x0, k)
2
3 x = x0;
4
5 for i = 1 : k
6     x = g(x);
7 end
8
9 xc = x;
```

### Command Window

```
>> g = @(x) (log(4 - sin(x)));
>> fpi(g, 1.4, 20)

ans =
1.1300
```

4. Care dintre următoarele IPF converg la  $\sqrt{2}$ ? Ord. discure, în ord. de viteza de convergență.

$$A: x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

$$B: x \rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{2}{3x} \Rightarrow B'(x) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$C: x \rightarrow \frac{3}{4}x + \frac{1}{2x} \Rightarrow C'(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\text{I. } A(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$B(\sqrt{2}) = \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \sqrt{2} \quad \checkmark$$

$$C(\sqrt{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{II. } |A'(\sqrt{2})| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = 0 < 1 \quad S_1$$

$$|B'(\sqrt{2})| = \left| \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{1}{3} \right| < 1 \quad S_2$$

$$|C'(\sqrt{2})| = \left| \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{1}{4} \right| < 1 \quad S_3 \text{ converge cel mai lent}$$

$\Rightarrow$  toate converg

C, B, A

Care dintre următoarele iterații de punct fix converge la  $\sqrt{5}$  (4p)? Ordonați-le pe cele care converg, descrescător în funcție de rata de convergență (6p). (A)  $x \rightarrow \frac{4}{5}x + \frac{1}{x}$ , (B)  $x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{5}{2x}$ , (C)  $x \rightarrow \frac{x+5}{x+1}$ .

- $f_1(\sqrt{5}) = \frac{4}{5}\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

$$f_1'(x) = \frac{4}{5} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow |f_1'(\sqrt{5})| = \left| \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \right| = \left| \frac{3}{5} \right| < 1 \quad \checkmark$$

- $f_2(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{2} \cancel{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{5} \quad \checkmark$

$$f_2'(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \left( -\frac{1}{x^2} \right) \Rightarrow |f_2'(\sqrt{5})| = \left| \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \frac{1}{5} \right| = 0 < 1$$

- $f_3(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{5}+5)(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1} = \frac{\cancel{5} - \cancel{\sqrt{5}} + 5\sqrt{5} - \cancel{5}}{4} = \sqrt{5}$

$$f_3'(x) = \frac{(x+1) - x - 5}{(x+1)^2} = -\frac{4}{(x+1)^2} \Rightarrow |f_3'(\sqrt{5})| = \frac{4}{5+1+2\sqrt{5}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} < 1 \quad \checkmark$$

$f_1, f_3, f_2$

$$\text{0,6 sam } \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = 0,38$$

Găsiți toate punctele fixe ale funcției  $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$  (2p) și decideți dacă iterația de punct fix este local convergentă pentru fiecare punct fix (2p). În caz de local convergență, aplicați doi pași ai iterației de punct fix cu o valoare inițială din apropierea punctului (2p) și determinați rata de convergență (2p). Calculați eroarea de aproximare (2p).

$$g(x) = x$$

$$x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8} = x$$

$$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} = 0 \quad | \cdot 8$$

$$8x^2 - 10x + 3 = 0, \Delta = 100 - 96 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 2}{16} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$g'(x) = 2x - \frac{1}{4} \Rightarrow g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} < 1 - \frac{3}{4}$$

$$g'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{6}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1 \text{ nu converge}$$

trata de convergencia:  $S = |g'(x)|$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{3}{4}$$

$$x_0 = \frac{3}{8}$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{9}{64} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{9 - 6 + 24}{64} = \frac{27}{64} = 0,42$$

$$x_2 = g(x_1) = 0,44\overline{7}$$

$$\epsilon = |x_1 - x_2| = |0,5 - 0,44\overline{7}| = 0,0\overline{5}3$$