PS

(seminar 10 - S10)

Să se calculeze

a) $\mathcal{I}_1 = \iint_D \frac{y \ln x}{y^2+2}\, dx\, dy$

$f(x) = \ln x \to f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \to g(x) = x$

$D = [1,3] \times [0,1]$

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \int_1^3 \frac{y \ln x}{y^2+2}\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y}{y^2+2}\, dy \int_1^3 \ln x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(y^2+2)\Big|_0^1 \cdot \left[x \ln x \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x}\, x\, dx\right] = \frac{1}{2} \ln\frac{3}{2} \left(3 \ln 3 - x\Big|_1^3\right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\frac{3}{2} \cdot \ln\frac{27}{e^2}$$

b) $\mathcal{I}_2 = \iint_D (x-y+1)\, dx\, dy$

$$\begin{cases} y^2 = 10x & \Rightarrow x = \frac{y^2}{10} \\ y = 5x & \Rightarrow x = \frac{y}{5} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{y^2}{10}, \frac{y}{5}\right]$$

$$\begin{cases} y^2 = 10x \\ 2y = 10x \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y(y-2) = 0 \qquad y \in [0,2]$$

$$\mathcal{I}_2 \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{10}}^{\frac{y}{5}} (x-y+1)\, dx\, dy = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - xy + x\right)\Big|_{\frac{y^2}{10}}^{\frac{y}{5}} dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{y^2}{50} - \frac{y^4}{200} - \frac{y^2}{5} + \frac{y^3}{10} + \frac{y}{5} - \frac{y^2}{10}\right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{7}{25} y^2 - \frac{y^4}{200} + \frac{y^3}{10} + \frac{y}{5}\right) dy =$$

$$= \left(\frac{y^2}{10} - \frac{7}{25}\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{1000} + \frac{y^4}{40}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{4}{10} - \frac{56}{75} - \frac{32}{1000} + \frac{\cancel{16}\ 4}{\cancel{40}\ 10} = {}^{75)}\frac{4}{5} - {}^{5)}\frac{56}{75} - {}^{3)}\frac{4}{125} = \frac{300 - 280 - 12}{375} = \frac{8}{375}$$

Problemă de tip coordonate polare

c) $I_3 = \iint_D \sqrt{10-x^2-y^2}\;dx\,dy$

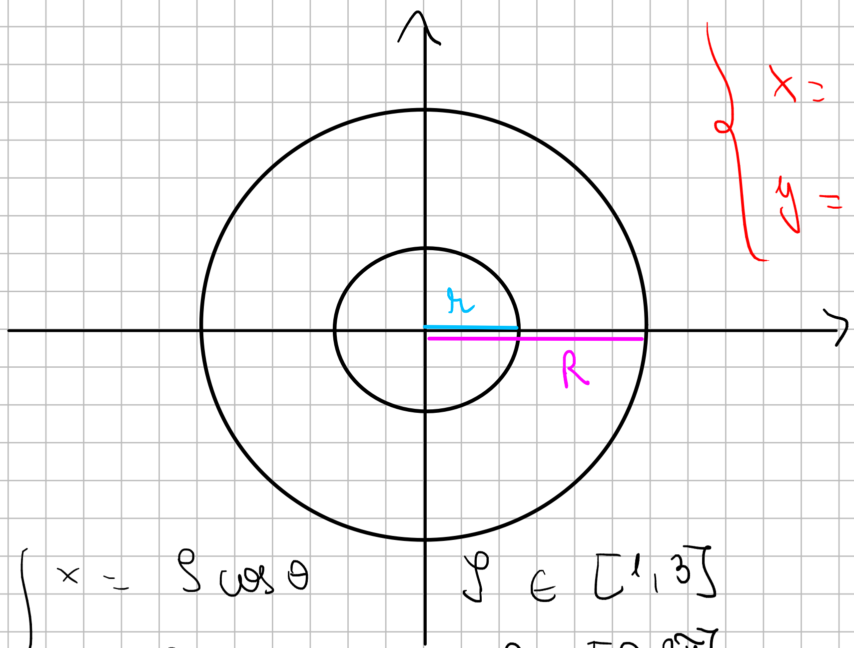
$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underset{r}{1} \le x^2+y^2 \le \underset{R}{9}\}$

Ec. cercului centrat în (x_0, y_0) de rază R

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le r^2$$

$$\begin{cases} x = x_0+\rho\cos\theta & \rho\in[0,R] \\ y = y_0+\rho\sin\theta & \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$$

$$J = \rho\, d\rho\, d\theta$$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & \rho\in[1,3] \\ y = \rho\sin\theta & \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \rho^2\cos^2\theta \\ y^2 = \rho^2\sin^2\theta \end{cases}$$

$$x^2+y^2 = \rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = \rho^2$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{1}{-2}\int_0^{2\pi}(-2)\int_1^3 \sqrt{10-\rho^2}\cdot\rho\, d\rho\, d\theta$$

$t = 10-\rho^2$

$dt = -2\rho\, d\rho$

$\rho = 1 \Rightarrow t = 9$

$\rho = 3 \Rightarrow t = 1$

$$\Rightarrow I_3 = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_9^1 \sqrt{t}\, dt = -\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi \left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_9^1 = -\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1-(3^2)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\cdot(1-27) = \frac{52\pi}{3}$$

Fie (X, Y) un vector aleator ce are densitatea

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2-y, & \text{dacă } x \in [0,2],\ y \in [1,2], \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

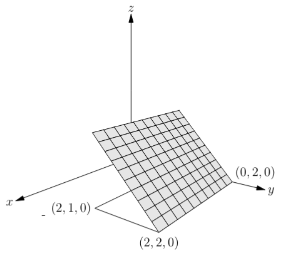


Figure: Graficul unei densități de probabilitate cu suport mărginit.

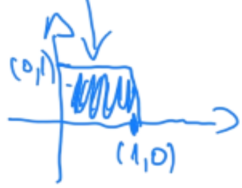
$$\int_1^2 \int_0^2 2-y \, dx\, dy = \int_1^2 (2x - yx)\Big|_0^2 dy = \int_1^2 (4-2y)\, dy =$$

$$= (4y - y^2)\Big|_1^2 = 8-4-4+1 = 1$$

1. Se consideră vectorul aleator (X,Y) cu densitatea de probabilitate

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{dacă } x \in [0,1],\ y \in [0,1], \\ \cancel{0,} & \text{în rest.} \end{cases}$$

$supp(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \neq 0\}$



a) Să se arate ca f este o densitate de probabilitate.

b) Sa se vizualizeze evenimentul A: $(X < 0.5$ şi $Y > 0.5)$ şi să se calculeze probabilitatea $P(A)$.

c) Să se determine funcţia de repartiţie a vectorului (X, Y).

d) Să se determine densităţile marginale $f_X(x)$ şi $f_Y(y)$.

e) Să se determine funcţiile de repartiţie marginale $F_X(x)$şi $F_Y(y)$.

f) Să se studieze dacă cele două variabile X şi Y sunt independente.

g) Să se calculeze $P(X + Y < 1)$.

1

a) f - densitate de probabilitate

$f_{x,y}(x,y) \geq 0, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ✓

$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{x,y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 4xy\, dx\, dy = \int_0^1 4x \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 dx =$

$= \int_0^1 2x\, dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1$ ✓

b) $A: (x < 0,5 \text{ şi } y > 0,5)$

$S = [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$

$P(A) = \iint_S f_{x,y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 4xy\, dy\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x\, y^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 dx =$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \frac{3}{4} \, dx = \frac{3}{16}$$

Observaţie: Daca vectorul (X,Y) ar fi uniform distribuit pe pătratul $R = [0,1] \times [0,1]$, atunci $f(x,y) = 1, \forall (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$. In aceste condiţii

$$P(A) = \iint_S f_{X,Y}(x,y) dx\, dy = \iint_S 1 dx\, dy = Aria(S) = \frac{1}{4}.$$

c) funcția de repartiție

$(x, y) \in [0,1]^2$

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(t,s) dt\, ds =$$

$$= 4 \int_0^x t\, dt \int_0^y s\, ds = x^2 y^2$$

d) densități marginale

$f_X(x)$ și $f_Y(y)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = 4x \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = 2x$$

$\forall x \in [0,1]$

$$f_Y(y) = \int_0^1 4xy\, dx = 2y, \forall y \in [0,1]$$

$$f_X = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

e) funcția de repartiție marginală

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t) dt = \int_0^x 2t\, dt = x^2$$

f) X, Y – independente

$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \Rightarrow X, Y$ – independente

g) $$P(X+Y<1) = \iint_D f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} 4xy\, dx dy =$$

$$= \int_0^1 2x(1-x)^2 dx = \frac{1}{6}$$

2. Vectorul aleator (X, Y) are densitatea de probabilitate

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6x, & \text{dacă } 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

a) Să se determine densitatea marginală f_X;

b) Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $(Y|X = 0.25)$;

c) Să se calculeze $P(X > 0.5)$ şi $P(Y > 0.5|X = 0.25)$.

d) Să se determine media şi dispersia variabilei $(Y|X = 0.25)$.

a) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_x^1 6x\,dy = 6x(1-x)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & x \in (0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

b) $(Y|X=0,25)$ densitatea de probabilitate

$$h(y|0,25) = \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(0,25,y)}{f_X(0,25)} = \dfrac{6\cdot 0,25}{6\cdot 0,25(1-0,25)} = \dfrac{4}{3}, & y \in (0,25, 1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

c) $P(X > 0,5) = \int_{0,5}^{\infty} f_X(x) = \int_{0,5}^{1} 6x(1-x)\,dx = 0,5$

$P(Y > 0,5 | X = 0,25) = \int_{0,5}^{\infty} h(y|0,25)\,dy = \int_{0,5}^{1} \frac{4}{3}\,dy = \frac{2}{3}$

d) $M(Y | X = 0,25) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, h(y|X=0,25)\,dy =$

$= \int_{0,25}^{1} y\frac{4}{3}\,dy = \frac{5}{8}$

$\sigma^2(Z) = M(Z^2) - M(Z)^2 \qquad Z = (Y|X=0,25)$

$M(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, h(y|X=0,25)\,dy = \int_{0,25}^{1} y^2 \frac{4}{3}\,dy = \frac{7}{16}$

$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{7}{16} - \frac{25}{64} = \frac{3}{64}$

3. Se consideră discul $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Se presupune că alegem un punct (x,y) aleator din discul circular G. Acest lucru se poate obţine simulând un vector (X,Y) uniform distribuit pe acest disc.

a) Să se determine densitate de probabilitate a vectorului (X,Y)

b) Să se determine densităţile marginale $f_X(x)$ şi $f_Y(y)$.

c) Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei $(X|Y=y_0)$, pentru $-1 \leq y_0 \leq 1$.

d) Variabilele X şi Y sunt independente?

e) Să se scrie un pseudocod de simulare a unei valori de observaţie a vectorului (X,Y).

f) Dacă variabila ce înregistrează numărul de parcurgeri ale buclei do-while din algoritmul de la d) este distribuită geometric de parametru p, să se calculeze probabilitatea p. Care este probabilitatea ca primul număr generat in G să apară la a 3 parcurgere a buclei do-while?

a) Vectorul (X,Y) - uniform distribuit pe discul G

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{Aria(G)} = \frac{1}{\pi}, & \text{dacă } (x,y) \in G \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$Aria(G) = \pi R^2 = \pi \quad (R=1)$$

b) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \pm\sqrt{1-x^2} \qquad x \in [-1,1]$$

Analog $f_Y(y)$

c)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\cdot}{\pi} \ldots \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

c) Densitatea de probabilitate a variabilei $(X|Y = y_0)$, $-1 \leq y_0 \leq 1$ este

$$g(x|y_0) = \frac{f_{X,Y}(x, y_0)}{f_Y(y_0)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y_0^2}}, & \text{dacă } -\sqrt{1-y_0^2} \leq x \leq \sqrt{1-y_0^2}, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

$\to [a,b]$

$x = a + (b-a) * urd$

$y = c + (d-c) * urd$

$\to [c,d]$

De exemplu, pentru $y_0 = 1/2$, avem

$$g(x|1/2) = \frac{f_{X,Y}(x, 1/2)}{f_Y(1/2)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}, & \text{dacă } -\sqrt{3}/2 \leq x \leq \sqrt{3}/2, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Deci, variabila $(X|Y = y_0)$ este uniform distribuită pe intervalul $[-\sqrt{1-y_0^2}, \sqrt{1-y_0^2}]$.

d) Variabilele X şi Y nu sunt independente, pentru că $\boxed{f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)}$

e) Pentru a determina algoritmul optim ce generează puncte uniform pe G vom determina cel mai mic dreptunghi, cu laturile paralele cu axele de coordonate şi care conţine mulţimea G. Evident, $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ Rulăm algoritmul:

! metoda respingerii

$[-1,1]^2$

```
do{
  x = -1 + 2 * urand();
  y = -1 + 2 * urand();
}while(x * x + y * y > 1);
return (x, y);
```

→ generam pct in D

unif. distr. pe D

f) Probabilitatea de succes, definită aici ca fiind probabilitatea ca un punct să aparţină lui G, se determină din relaţia

$$p = \frac{Aria(G)}{Aria(D)} = \frac{\pi}{4} = \frac{\text{aria discului} = \pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Variabila N ce înregistrează numărul de parcurgeri ale buclei do-while din algoritmul de mai sus este distribuită geometric, $N \sim Geom(p)$. Deci, $P(N = 3) = (1 - p)^2 p$.

$$P((X,Y) \in G) = \iint_G f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \iint_G \frac{1}{\text{aria}(D)}\,dx\,dy = \frac{1}{\text{aria}(D)} \iint_G 1\,dx\,dy =$$

aplic. intg duble

$$= \frac{1}{\text{aria}(D)} \cdot \text{aria}(G)$$

$f_{(X,Y)}(x,y)$ = den. com. a vect (X,Y) pe drep. D