# Cursul 8

# Spaţiul punctual. Orientarea bazelor şi a reperelor ortonormate.
# Schimbări de repere

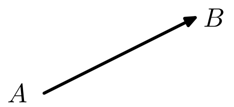
In acest curs şi în următorul prezentăm metode şi tehnici de algebră–geometrie, cu aplicaţii în *computer graphics*, *gaming*, robotică, analiza şi procesarea imaginii şi în WEB design. În toate aceste domenii se operează preponderent cu puncte. Punctele sunt caracterizate numeric prin coordonatele lor relativ la un sistem ortogonal de axe drept (cel uzual) sau strâmb. Modalitatea în care două puncte definesc un vector este prezentată în secţiunea ce urmează:

## 8.1 Spaţiul punctual afin de dimensiune $n$

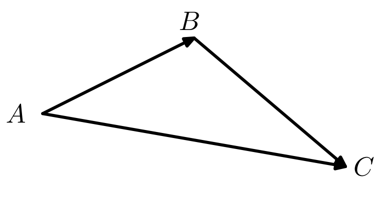
Pentru a defini contextul în care se definesc ”vectorii clasici” $\overrightarrow{AB}$, determinaţi de două puncte, considerăm o mulţime de puncte $\mathcal{P}$, notate $A, B, C, \ldots$ şi spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$.

**Definiţia 8.1.1** *Spaţiul punctual afin de dimensiune $n$, este un triplet notat $\mathcal{A}^n = (\mathcal{P}, \mathbb{R}^n, \varphi)$, unde $\varphi$ este o aplicaţie $\varphi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}^n$, care asociază la orice pereche de puncte $(A, B)$ un vector $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^n$:*

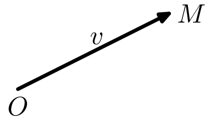
$$(A, B) \xrightarrow{\varphi} \overrightarrow{AB}$$




*şi care în plus verifică următoarele condiţii:*
**1.** *$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\forall\ A, B, C \in \mathcal{P}$ (relaţia lui Chasles);*




**2.** *Pentru orice punct $O \in \mathcal{P}$ fixat şi vector $v \in \mathbb{R}^n$ există un unic punct $M \in \mathcal{P}$ astfel încât $\overrightarrow{OM} = v$, cu alte cuvinte aplicaţia $\varphi_O$, $\varphi_O : \{O\} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}^n$, care asociază la orice punct $M \in \mathcal{P}$ vectorul $\overrightarrow{OM}$, având punctul de aplicaţie $O$:*

$\varphi_O(M) = \overrightarrow{OM} \in \mathbb{R}^n$ 

*este bijecţie.*

Aplicând proprietatea 1. pentru punctele $A$, $B$, $C$ identice, obţinem $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$, adică $\overrightarrow{AA} = \theta \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.

Relaţia lui Chasles aplicată punctelor $A, B, A$ conduce la $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \theta$, adică $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Relaţia Chasles se extinde la un număr finit de puncte:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{m-1}A_m} = \overrightarrow{A_1A_m}$$

Deoarece conform proprietăţii 2 mulţimea punctelor $\mathcal{P}$ este în corespondenţa bijectivă cu $\mathbb{R}^n$, luăm drept mulţime de puncte pe $\mathbb{R}^n$. Prin urmare ”privim” mulţimea $\mathbb{R}^n$ în două moduri: ca mulţime de puncte şi ca spaţiu vectorial. Un punct $A$ din $\mathbb{R}^n$ este reprezentat de un $n$–uplu de numere $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (scrise pe linie), iar un vector $v$ tot de un $n$-uplu de numere reale, dar pentru a face distincţie, aceste numere se scriu într-o matrice coloană:

$$v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

La orice două puncte $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ le asociem vectorul $\overrightarrow{AB}$ ale cărui coordonate se obţin scăzând din coordonatele punctului $B$ coordonatele punctului $A$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{bmatrix}$$

Formal aplicaţia ce defineşte structura afină pe spaţiul de puncte $\mathbb{R}^n$ este:

$$\varphi(A, B) = \overrightarrow{AB} := B - A$$

Să verificăm că într-adevăr $\varphi$ astfel definit satisface condiţiile 1. şi 2. din definiţia spaţiului punctual afin:

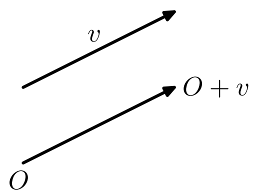
**1.** Fie $A, B, C$ trei puncte arbitrare din $\mathbb{R}^n$. Atunci:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underbrace{B - A + C - B}_{\text{operaţii în } \mathbb{R}^n} = C - A = \overrightarrow{AC}$$

**2**. Pentru orice punct fixat $O$ şi un vector $v \in \mathbb{R}^n$, punctul $M$ ce satisface condiţia $\overrightarrow{OM} = v$, echivalentă cu operaţia din $\mathbb{R}^n$, $M - O = v$, este unic, şi este $M = O + v$ ($+$ este adunarea din $\mathbb{R}^n$).

Deci mulţimea $\mathbb{R}^n$ are structură de spaţiu punctual afin. În matematică acest spaţiu se notează cu $\mathbb{A}^n$, dar în inginerie şi computer science se păstrează notaţia $\mathbb{R}^n$ şi din context se deduce când ne referim la puncte din $\mathbb{R}^n$ şi când la vectori.

Remarcăm că are sens operaţia punct plus vector $O + v$, rezultatul fiind punctul $M$ cu proprietatea că $\overrightarrow{OM} = v$.




**Exemplul 1**. În spaţiul $\mathbb{A}^3$ se dă punctul $O = (-2, 3, 1)$ şi vectorul $v = (3, 0, 2)^T$. Să se determine punctul $M(x_1, x_2, x_3)$ astfel încât $\overrightarrow{OM} = v$.

$M = O + v = (-2 + 3, 3 + 0, 1 + 2) = (1, 3, 3)$.

**Observaţia 8.1.1** *Spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ se identifică cu mulţimea vectorilor care au originea în punctul $O = (0, 0, \dots, 0)$. Într-adevăr, orice vector $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ din $\mathbb{R}^n$ se identifică cu vectorul $\overrightarrow{OM}$, unde $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, deoarece $\overrightarrow{OM} = M - O = (x_1 - 0, x_2 - 0, \dots, x_n - 0)^T = v$.*

Ilustrarea vectorilor din $\mathbb{R}^n$ prin segmente orientate, din cursurile precedente, este astfel justificată de această observaţie.

Dacă în plus pe spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ considerăm un produs scalar $<,>$, atunci spaţiul punctual corespunzător se notează cu $\mathbb{E}^n$ şi se numeşte **spaţiul punctual euclidian**. Pe acest spaţiu definim distanţa dintre două puncte:

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Dacă $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ şi $B = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, atunci vectorul $\overrightarrow{AB}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)^T$ şi deci distanţa dintre două puncte $A, B$ este:

$$\begin{aligned} d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \end{aligned}$$

Două puncte $A, B$ determină în $\mathbb{E}^n$ un segment, notat $[A, B]$ şi definit ca fiind mulţimea punctelor ce se obţin adunând punctului $A$ un vector $t\overrightarrow{AB}$, $t \in [0, 1]$, coliniar şi de acelaşi sens cu vectorul $\overrightarrow{AB}$:

$$[A, B] = \{P \mid P = A + t\overrightarrow{AB}, t \in [0, 1]\}$$

**Mijlocul segmentului** $[A, B]$ este punctul $M$ cu proprietatea că $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Dacă $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, atunci din relaţia $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ rezultă aceeaşi relaţie între coordonatele din poziţia $i$ a vectorilor implicaţi, adică:

$$x_i - a_i = b_i - x_i, \quad \Leftrightarrow \quad 2x_i = a_i + b_i \quad \Leftrightarrow x_i = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad \forall\, i = \overline{1, n}$$

Prin urmare *coordonatele mijlocului unui segment sunt egale cu media aritmetică a coordonatelor corespunzătoare ale extremităţilor segmentului.*

**Exemplul 2**. În $\mathbb{E}^3$ se dau punctele $A(-1, 2, 4)$, $B(3, 0, -5)$, $C(1, -7, 2)$.

a) Să se calculeze distanţa de la $A$ la mijlocul segmentului $[B, C]$.

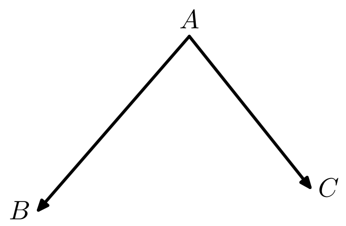
b) Să se calculeze cosinusul unghiului $\widehat{BAC}$

a) Fie $M(x, y, z)$ mijlocul segmentului $[B, C]$. Coordonatele sale sunt:

$$x = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y = \frac{0-7}{2} = -3.5, \quad z = \frac{-5+2}{2} = -1.5$$

Distanţa $d(A, M) = \sqrt{((-1-2)^2 + (2+3.5)^2 + (4+1.5)^2} = \sqrt{9 + 5.5^2 + 5.5^2}$ $= \sqrt{9 + 60.5} = 8.34$.

b) Unghiul $\widehat{BAC}$ este unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.




$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -2, -9)$, $\overrightarrow{AC} = (2, -9, -2)$. Astfel:

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{8 + 18 + 18}{\sqrt{16+4+81}\sqrt{4+81+4}} = \frac{44}{\cancel{\sqrt{101+89}}} = \frac{44}{\sqrt{190}}$$

$\sqrt{101 \cdot 89}$

## 8.2 Reper ortonormat în spaţiul afin euclidian $\mathbb{E}^n$

**Definiţia 8.2.1** *Un reper ortonormat în $\mathbb{E}^n$ este o pereche*

$$\mathcal{R} = (O; \mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n))$$

*constituită dintr-un punct fixat $O$, numit originea reperului şi o bază ortonormată $\mathcal{B}$ din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$.*

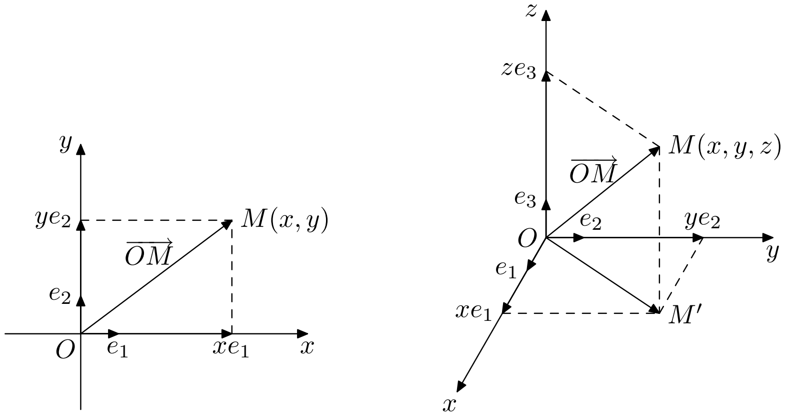
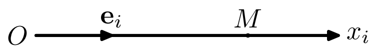



**Fig.8.1**: Semnificaţia coordonatelor unui punct $M$ din plan raportat la un reper ortonormat (stânga), respectiv din spaţiul 3D (dreapta).

Unui reper ortonormat $\mathcal{R}$ i se asociază un sistem de axe ortogonale $Ox_1$, $Ox_2$,..., $Ox_n$, unde axa $Ox_i$ este mulţimea punctelor $M$ cu proprietatea că vectorul $\overrightarrow{OM}$ este coliniar şi de acelaşi sens cu vectorul bazei, $e_i$, $i = \overline{1,n}$,

$$Ox_i = \{M \,|\, \overrightarrow{OM} = te_i, t \geq 0\}, \;\; i = \overline{1,n}$$




Versorul $e_i$, având norma unu, constituie ”unitatea de măsură” pe axa $Ox_i$.

Având fixat un reper ortonormat $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ în $\mathbb{E}^n$, **poziţia unui punct** arbitrar, $M$, **faţă de** acest **reper** se determină astfel (vezi şi Fig.8.1):

• se ”uneşte” punctul $M$ cu originea $O$ a reperului, obţinând vectorul $\overrightarrow{OM}$, numit **vectorul de poziţie al punctului** M;

• se descompune vectorul $\overrightarrow{OM}$ după vectorii bazei reperului:

$$\overrightarrow{OM} = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n, \quad x_ie_i =< \overrightarrow{OM}, e_i > e_i = pr_{e_i}(\overrightarrow{OM}), i = \overline{1,n}$$

Prin definiţie, coordonatele vectorului de poziţie $\overrightarrow{OM}$ în baza $\mathcal{B}$ se numesc **coordonatele punctului** M **relativ la reperul** $\mathcal{R}$ sau relativ la sistemul de axe ortogonale, asociat.

**Coordonatele originii reperului**, sunt coordonatele vectorului $\overrightarrow{OO} = \theta$ în baza reperului, adică $(0, 0, \dots, 0)$.

În plan ($\mathbb{E}^2$) axele asociate unui reper ortonormat se notează de obicei prin $Ox, Oy$, şi coordonatele unui punct arbitrar prin $(x, y)$, iar în spaţiul $3D$, $\mathbb{E}^3$, prin $Ox, Oy, Oz$, iar coordonatele unui punct $(x, y, z)$. În Fig.8.1 sunt ilustrate două repere ortonormate şi sistemele de axe ortogonale asociate, unul în plan (stânga) şi cel de-al doilea în spaţiul $\mathbb{E}^3$ (dreapta).

## 8.3 Orientarea bazelor şi a reperelor ortonormate

**Definiţia 8.3.1** *Două baze (ortonormate sau neortonormate), $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, din $\mathbb{R}^n$ au aceeaşi orientare dacă determinantul matricii de trecere este pozitiv, det$(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) > 0$, şi respectiv orientare opusă, dacă determinantul matricii de trecere este negativ.*

Dacă bazele $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ au aceeaşi orientare, notăm:

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$$

Deoarece $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ rezultă că dacă $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$, atunci şi $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}$ deoarece $\det(T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) = 1/\det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} > 0$, şi deci $\det(T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}) > 0$.

Apoi dacă avem 3 baze $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ şi $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}', \mathcal{B}' \sim \mathcal{B}''$ atunci $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}''$.

În $\mathbb{R}^n$ **orice bază la fel orientată ca baza canonică se numeşte bază dreaptă**, iar o bază opus orientată bazei canonice (adică cu determinantul matricii de trecere între cele două baze, negativ) se numeşte bază ”strâmbă” sau stângă. Prin analogie, un reper ortonormat în $\mathbb{E}^n$ se numeşte **reper drept** dacă baza reperului este dreaptă şi **reper stâng**, dacă baza reperului este stângă.

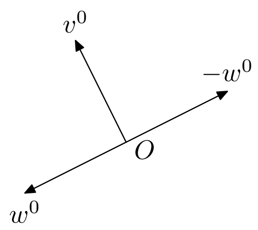
Pentru a identifica dacă un reper este stâng sau drept din analiza poziţiei relative a axelor de coordonate asociate, discutăm pe rând cazul reperelor din plan şi respectiv din spaţiul 3D.

**Repere drepte în plan**

Pentru a înţelege orientarea bazelor în spaţiul $\mathbb{R}^2$, considerăm un vector nenul, $v = (a, b)^T \in \mathbb{R}^2$. Complementul să ortogonal, $v^\perp$, este de ecuaţie $ax + by = 0$, adică mulţimea vectorilor din $\mathbb{R}^2$ ale căror coordonate satisfac ecuaţia dreptei $ax + by = 0$. Cum $v^\perp$ are dimensiunea $2 - 1 = 1$ (vezi Cursul 6), şi deci o bază în $v^\perp$ conţine un singur vector, rezultă că există o singură direcţie perpendiculară pe $v$ şi anume direcţia reprezentată de vectorul $w = (-b, a)^T$ sau $w' = (b, -a)^T = -w$. Notând cu $v^0, w^0, -w^0$ versorii celor trei direcţii şi sensuri precizate, putem constitui două baze ortonormate, ce au pe $v^0$ ca prim vector în bază:

$$\mathcal{B}_1 = (v^0, w^0),\ \mathcal{B}_2 = (v^0, -w^0)$$

În Figura următoare ilustrăm versorii asociaţi lui $v = (-1, 2)^T$, $w = (-2, -1)^T, -w = (2, 1)^T$:




În mod natural ne întrebăm prin ce se deosebesc cele două baze, respectiv repere ortonormate ce le-ar avea ca baze. Cum am numit bază dreaptă orice bază la fel orientată ca baza canonică, să caracterizăm bazele drepte şi respectiv strâmbe.

Deoarece $v^0 = v/\|v\| = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,b)^T$ şi $w^0 = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-b,a)^T$, matricea de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}$ din $\mathbb{R}^2$, la baza $\mathcal{B}_1 = (v^0, w^0)$, este:

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1} = [v^0|w^0] = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}$$

şi $\det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1}) = 1 > 0$. Deci $\mathcal{B}_1$ este bază dreaptă. Calculând determinantul matricii de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}_2 = (v^0, -w^0)$ obţinem $-1 < 0$, deci baza $\mathcal{B}_2$ este o bază stângă.

În concluzie:

> Dacă $v = (a,b)^T$ este un vector nenul, atunci versorul său şi versorul vectorului $w = (-b,a)^T$ definesc o bază ortonormată dreaptă.

Pentru a vedea care este poziţia vectorilor unei baze ortonormate drepte (strâmbe) $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ faţă de baza canonică $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, exprimăm vectorii $u_i$ în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} u_1 &= <u_1, e_1> e_1 + <u_1, e_2> e_2 \\ u_2 &= <u_2, e_1> e_1 + <u_2, e_2> e_2 \end{aligned}$$

Dar

$$<u_i, e_j> = \frac{<u_i, e_j>}{\underbrace{\|u_i\|}_{=1}\underbrace{\|e_j\|}_{=1}} = \cos(\widehat{u_i, e_j})$$

Deci:

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos(\widehat{u_1, e_1})\ e_1 + \cos(\widehat{u_1, e_2})\ e_2 \\ u_2 &= \cos(\widehat{u_2, e_1})\ e_1 + \cos(\widehat{u_2, e_2})\ e_2, \end{aligned}$$

Notând $\theta = \text{măs}(\widehat{u_1, e_1})$ (vezi Fig.8.2 baza colorată în roşu), rezultă că $u_1 = \cos\theta\ e_1 + \cos(\pi/2 - \theta)\ e_2 = \cos\theta\ e_1 + \sin\theta\ e_2$. $u_2$ fiind ortogonal pe $u_1$ poate avea coordonatele (vezi discuţia de mai sus relativ la vectorii ortogonali $v, w \in \mathbb{R}^2$):

$$\mathbf{1}.\ u_2 = -\sin\theta\ e_1 + \cos\theta\ e_2,$$

adică măsura unghiului dintre $u_2$ şi $e_2$ este tot $\theta$. În acest caz matricea de trecere

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \text{are determinatul } \det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 > 0$$

Prin urmare baza ortonormată, $\mathcal{B}' = (u_1 = (\cos\theta, \sin\theta)^T, u_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)^T)$ este o bază dreaptă.

Luând $u_2$ vectorul opus celui din primul caz:

$$\mathbf{2}.\ u_2 = \sin\theta\ e_1 - \cos\theta\ e_2$$

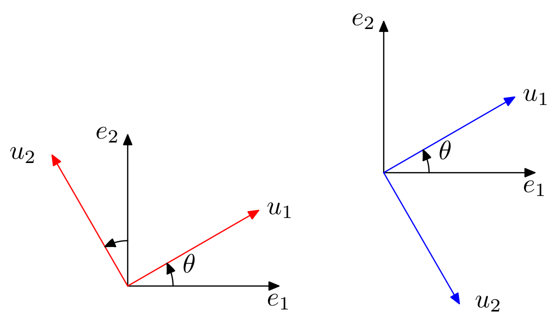



**Fig.8.2**: Bază dreaptă (roşu), respectiv bază stângă (albastru) în $\mathbb{R}^2$.

avem $\cos(\widehat{u_2, e_2}) = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$, adică măsura unghiului dintre $u_2$ şi $e_2$ nu este $\theta$, ci $\pi - \theta$ (vezi Fig.8.2 baza colorată în albastru). În acest caz matricea de trecere dintre cele două baze:

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \quad \text{are determinantul } \det(T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1 < 0$$

şi deci baza ortonormată: $\mathcal{B}' = (u_1 = (\cos\theta, \sin\theta)^T, u_2 = (\sin\theta, -\cos\theta)^T)$ este o bază stângă.

Discuţia de mai sus este valabilă, nu doar pentru perechea de baze $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, unde $\mathcal{B}$ este baza canonică, ci pentru orice două baze de aceeaşi orientare.

În concluzie **O bază ortonormată $\mathcal{B}' = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ din $\mathbb{R}^2$ are aceeaşi orientare ca baza ortonormată $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ (care în particular poate fi baza canonică), dacă masura unghiului dintre $\mathbf{u}_1$ şi $\mathbf{e}_1$ coincide cu măsura unghiului dintre $\mathbf{u}_2$ şi $\mathbf{e}_2$ (Fig. 8.2, rosu). Baza $\mathcal{B}'$ are orientare opusă bazei canonice, dacă cele două unghiuri au măsuri diferite (Fig. 8.2, albastru)**

Având această informaţie despre baze, să deducem o modalitate de a identifica când un reper (sistem de axe ortogonale) este drept, respectiv stâng.

Observăm că sistemul de axe $xOy$ asociat reperului canonic

$$\mathcal{R} = (O; e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$$

are particularitatea că axa $Oy$ se obţine rotind pe $Ox$ în jurul lui $O$, în sens trigonometric cu 90 de grade (Fig. 8.3).

Un sistem de axe $x'Oy'$ ale cărui axe sunt asociate unui reper ortonormat drept, cu aceeaşi origine, $\mathcal{R}' = (O; (u_1, u_2))$, are particularitatea că unghiul $\theta$ dintre $Ox'$ şi $Ox$ este egal cu unghiul dintre $Oy'$ şi $Oy$ (Fig. 8.3). Astfel "structura sudată" $x'Oy'$ se obţine rotind cu unghiul $\theta$ pe $xOy$. Deci şi $x'Oy'$ are aceeaşi particularitate ca $xOy$ şi anume axa a doua se obţine rotind prima axă în sens trigonometric cu 90 de grade.

În conluzie, un reper ortonormat din plan având axele ortogonale asociate, $Ox, Oy$, astfel încât $Oy$ se obţine din $Ox$ printr-o rotaţie de $90$ de grade în sens trigonometric (*anti-clockwise*

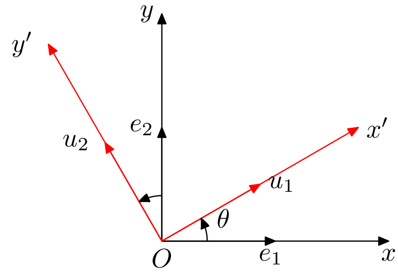



**Fig.8.3**: Poziţia unui sistem de axe drept, $x'Oy'$ faţă de sistemul de axe canonic, $xOy$

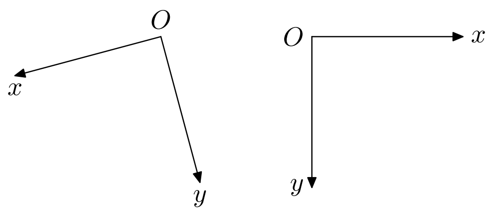



**Fig.8.4**: Sisteme de axe în $\mathbb{E}^2$ asociate unui reper drept, respectiv stâng.

sau *counter-clockwise* în computer graphics!), în jurul lui $O$, este un reper drept. Dacă $Oy$ se obţine rotind $Ox$ în sensul acelor ceasornicului, cu 90 de grade, atunci reperul este stâng.

În spaţiul afin $\mathbb{E}^n$ ($n = 2$, şi $n = 3$ fiind cazurile de interes pentru CS) nu există un singur reper ortonormat, ci o infinitate de repere. Orice alegere a unui punct, şi a unei baze ortonormate ne conduce la alt reper ortonormat. Problema care se ridică este să determinăm relaţia dintre coordonatele unui punct relativ la un reper dat şi apoi relativ la un reper nou. Cea mai simplă schimbare de repere este:

## 8.4 Schimbarea de reper prin translaţie

Dacă $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2|, e_3)$ este un reper ortonormat drept în plan sau spaţiul 3D[1]şi $O'$ un punct care are relativ la acest reper coordonatele $(x_0, y_0|, z_0)$, atunci reperul drept ce are aceeaşi bază, dar altă origine, $O'$, $\mathcal{R}' = (O'; e_1, e_2|, e_3)$, se zice că s-a obţinut din reperul $\mathcal{R}$ printr-o translaţie pe direcţia $\overrightarrow{OO'}$. Notând cu $xOy|z$ sistemul de axe ortogonale asociat primului reper şi cu $x'O'y'|z'$ sistemul asociat celui de-al doilea reper, remarcăm că axele corespunzătoare din cele două repere sunt paralele, având aceeaşi direcţie (de exemplu $Ox$ şi $O'x'$ au direcţia şi

[1]Bara $|$ între $e_2$ şi $e_3$ este inclusă pentru a preciza că în cazul 2D baza conţine doar vectorii $e_1, e_2$, iar în cazul 3D, pe $e_1, e_2, e_3$.

sensul lui $e_1$, etc).

Problema care se pune atunci când avem două repere este de a determina relaţia dintre coordonatele $(x, y|, z)$ ale unui punct $M$ în primul reper şi coordonatele $(x', y'|z')$ ale aceluiaşi punct în reperul al doilea.

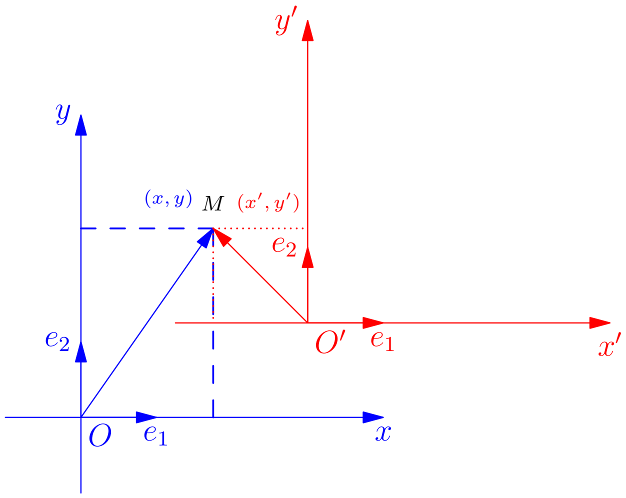



**Fig.8.5**: Două sisteme de axe ortogonale drepte obţinute unul din celălalt prin translaţie.

**Propoziţia 8.4.1** *Dacă originea $O'$ a reperului $\mathcal{R}'$, obţinut prin translaţie din reperul $\mathcal{R}$, are coordonatele $(x_0, y_0|, z_0)$ relativ la reperul iniţial, $\mathcal{R}$, şi un punct arbitrar $M$ are coordonatele $(x, y|, z)$ relativ la reperul $\mathcal{R}$ şi respectiv coordonatele $(x', y'|z')$ relativ la reperul $\mathcal{R}'$, atunci relaţiile dintre cele două tipuri de coordonate sunt:*

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x - x_0 \\ y' & = & y - y_0| \\ z' & = & z - z_0 \end{array} \tag{8.1}$$

**Demonstraţie**: Din regula lui Chasles (Fig.8.5 pentru cazul 2D) avem că

$$\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM}$$

Din definiţia coordonatelor relativ la un reper rezultă că:

$$\overrightarrow{OO'} = x_0e_1 + y_0e_2| + z_0e_3, \quad \overrightarrow{O'M} = x'e_1 + y'e_2| + z'e_3, \quad \overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2| + ze_3$$

Înlocuind în relaţia Chasles de mai sus avem:

$$\begin{array}{rcl} x & = & x' + x_0 \\ y & = & y' + y_0| \\ z & = & z' + z_0 \end{array} \quad \text{sau} \quad \begin{array}{rcl} x' & = & x - x_0 \\ y' & = & y - y_0| \\ z' & = & z - z_0 \end{array}$$

□

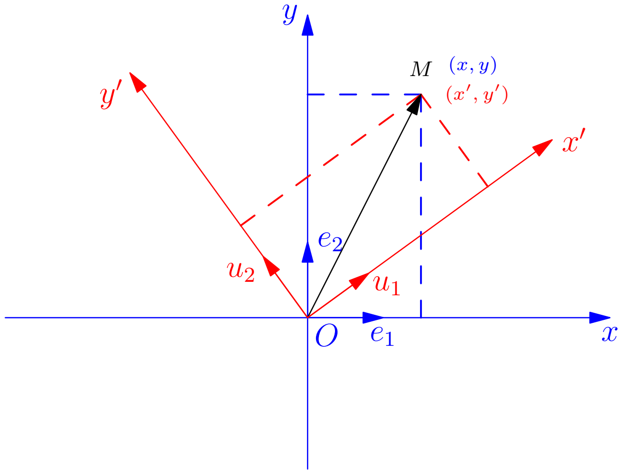



**Fig.8.6**: Două sisteme de axe ortogonale drepte obţinute unul din celălalt prin rotaţie în jurul originii comune.

## 8.5 Schimbarea de reper ortonormat în $\mathbb{E}^2$ prin rotaţie în jurul originii

În $\mathbb{E}^2$ se consideră un reper ortonormat drept, $\mathcal{R} = (O; (e_1, e_2))$ şi sistemul de axe asociat $xOy$ (cel mai adesea în aplicaţii $\mathcal{R}$ este reperul asociat bazei canonice). Reperul ortonormat drept $\mathcal{R}' = (O, (u_1, u_2))$, ce are aceaşi origine $O$, dar o altă bază ortonomată dreaptă, se zice că s-a obţinut din reperul iniţial printr-o rotaţie în jurul lui $O$, de unghi $\theta = \text{măs}(\widehat{e_1, u_1}) = \text{măs}(\widehat{e_2, u_2})$.

Un punct arbitrar $M$ are coordonatele $(x, y)$ relativ la reperul $\mathcal{R}$ şi respectiv coordonatele $(x', y')$, relativ la reperul $\mathcal{R}'$ (Fig.8.6). Să deducem relaţia dintre cele două seturi de coordonate.

Conform definiţiei coordonatelor unui punct relativ la un reper, dat avem:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= xe_1 + ye_2 \\ \overrightarrow{OM} &= x'u_1 + y'u_2 \end{aligned}$$

Dar aceste relaţii reprezintă de fapt exprimarea aceluiaşi vector $\overrightarrow{OM}$ în două baze ortonormate drepte, diferite, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$. Din cursurile relativ la schimbări de baze ştim că:

$$\overrightarrow{OM}_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\overrightarrow{OM}_{\mathcal{B}'} \tag{8.2}$$

Dar am dedus mai sus că matricea de trecere dintre două baze ortonormate drepte, din $\mathbb{R}^2$ este matricea:

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta = \text{măs}(\widehat{e_1, u_1}) = \text{măs}(\widehat{e_2, u_2})$$

şi deci relaţia (8.2) devine:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} \tag{8.3}$$

iar relaţia inversă se obţine ţinând seama că $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{T}$.

## 8.6 Schimbări arbitrare de repere

În afară de schimbarea de repere prin translaţie sau prin rotaţie, avem schimbări mai generale, atât în $\mathbb{E}^2$ cât şi în $\mathbb{E}^3$. Şi anume, schimbarea de la un reper ortonormat $\mathcal{R} = (O; \underbrace{(e_1|e_2|e_3)}_{\mathcal{B}})$ la un nou reper ortonormat, $\mathcal{R}' = (O'; (u_1, u_2, |u_3))$, care are o altă origine şi o altă bază.

Presupunem că $\mathcal{R} = (O; \underbrace{(e_1|e_2|e_3)}_{\mathcal{B}})$ este un reper ortonormat de axe $Oxy|z$, asociat bazei canonice, $O'$ are coordonatele $(x_0, y_0|z_0)$ relativ la $\mathcal{R}$. Baza noului reper, $\mathcal{B}' = (u_1, u_2|u_3)$, este o bază ortonormată, dreaptă sau strâmbă.

Pentru a determina relaţia dintre coordonatele $(x, y, z)$ ale unui punct arbitrar $M$ din $\mathbb{E}^n$ (n=2,3) relativ la reperul $\mathcal{R}$, respectiv coordonatele $M(x', y', |z')$, relativ la noul reper $\mathcal{R}' = (O'; (u_1, u_2, |u_3))$, se procedează astfel:

• se efectuează mai întâi o translaţie a reperului iniţial, $\mathcal{R}$, în reperul intermediar, $\mathcal{R}_t = (O'; (e_1, e_2, |e_3))$, ce are ca origine pe $O'$, dar aceeaşi bază ca reperul iniţial. Notăm cu $O'XY|Z$ sistemul de axe asociat. Punctul arbitrar $M$ va avea relativ la acest reper, coordonatele:

$$\begin{array}{rcl} X &=& x - x_0 \\ Y &=& y - y_0| \\ Z &=& z - z_0 \end{array} \tag{8.4}$$

• Se determină coordonatele $(x', y', |z')$ ale punctului $M$ relativ la reperul $\mathcal{R}' = (O'; (u_1, u_2, |u_3))$, în funcţie de coordonatele $M(X, Y, Z)$ în reperul intermediar $\mathcal{R}_t = (O'; (e_1, e_2, |e_3))$, astfel:

★ Se exprimă $\overrightarrow{O'M}$ în baza reperului $\mathcal{R}_t$, respectiv în baza reperului $\mathcal{R}'$:

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{O'M}_{\mathcal{B}} &=& Xe_1 + Ye_2| + Ze_3 \\ \overrightarrow{O'M}_{\mathcal{B}'} &=& x'u_1 + y'u_2| + z'u_3 \end{array} \tag{8.5}$$

★ se scriu relaţiile dintre cele două seturi de coordonate ale vectorului $\overrightarrow{O'M}$:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y| \\ Z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} x' \\ y'| \\ z' \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} \tag{8.6}$$

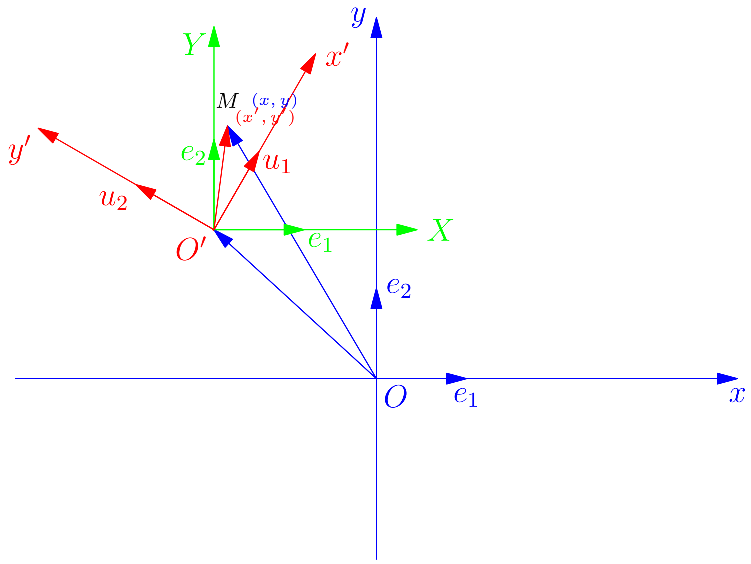
Înlocuind pe $X, Y, Z$ cu expresia lor din (8.4) obţinem:

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0| \\ z - z_0 \end{bmatrix} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} x' \\ y'| \\ z' \end{bmatrix}, \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y| \\ z \end{bmatrix}}_{M=punct} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0| \\ z_0 \end{bmatrix}}_{O'=punct} + \underbrace{T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} x' \\ y'| \\ z' \end{bmatrix}}_{vector} \tag{8.7}$$

Din aceste ultime relaţii se poate deduce exprimarea inversă, a coordonatelor $(x', y'|z')$ în funcţie de coordonatele $(x, y, z)$.

Pentru a ilustra problematica schimbărilor arbitrare de repere dăm un exemplu:

**1.** Fie $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2)$ reperul canonic (al lumii reale 2D), de axe asociate $xOy$ şi $O'(-2, 1)$ un punct raportat la acest reper. Construiţi un reper ortonormat drept cu originea în $O'$ şi axele având versorii $(u_1, u_2)$, ştiind că măsura unghiului dintre $u_1$ şi $e_1$ este $\theta = \pi/3$. Să se determine relaţia dintre coordonatele $(x, y)$ ale unui punct $M$ şi coordonatele $(x', y')$ relativ la reperul $\mathcal{R}' = (O'; u_1, u_2)$. Desenaţi cele două sisteme de axe.




Reperul fiind drept, înseamnă că baza ortonormată $(u_1, u_2)$ este astfel încât măs$(\widehat{e_1, u_1}) =$ măs$(\widehat{e_2, u_2}) = \pi/3$. Prin urmare, vectorii unitari $u_1$, $u_2$ îi dăm prin cosinuşii directori:

$$\begin{aligned} u_1 &= (\cos\alpha, \cos\beta)^T,\ \beta = \pi/2 - \alpha \ \Leftrightarrow u_1 = (\cos(\pi/3), \cos(\pi/2 - \pi/3))^T = \\ &= (\cos(\pi/3), \sin(\pi/3))^T = (1/2, \sqrt{3}/2)^T \\ u_2 &= (-\sqrt{3}/2, 1/2)^T \end{aligned}$$

Noul reper are originea în $O'$ şi axele $O'x'$, $O'y'$, de direcţie şi sens $u_1, u_2$.

Din datele problemei, cunoaştem coordonatele noii origii, $O'$, relativ la reperul $\mathcal{R}$, ceea ce înseamnă că vectorul său de poziţie este:

$$\overrightarrow{OO'} = -2e_1 + e_2$$

Coordonatele punctului $M$ relativ la reperul $\mathcal{R}$ sunt $(x, y)$, adică:

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$$

Se cer coordonatele punctului $M'$ relativ la noul reper, $\mathcal{R}'$.

**1.** Se efectuează o translaţie cu originea în $O'_{\mathcal{R}}(x_0, y_0)$ şi se obţine reperul intermediar, de axe $O'XY$ (axele colorate în verde). Coordonatele $(X, Y)$ ale unui punct arbitrar $M$ relativ la acest reper sunt:

$$\begin{aligned} X &= x - x_0 &= x + 2 \\ Y &= y - y_0 &= y - 1 \end{aligned} \tag{8.8}$$

**2.** Se consideră o nouă schimbare de reper, cu originea tot în $O'$, dar direcţiile axelor sunt date de $u_1, u_2$ (axele colorate în roşu). Relaţia dintre coordonatele $(X, Y)$ ale punctului $M$ şi coordonatele $(x'y')$ relativ la noul reper sunt date de relaţiile de schimbare de bază:

$$\overrightarrow{O'M}_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\, \overrightarrow{O'M}_{\mathcal{B}}$$

adică:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T^T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Ţinând seama de relaţiile (8.8), obţinem:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T^T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

Dar matricea $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ este:

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [u_1|u_2] = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

şi deci avem ca, coordonatele unui punct în reperul $\mathcal{R}'$, în funcţie de coordonatele aceluiaşi punct în reperul $\mathcal{R}$ sunt:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + 2 \\ y - 1 \end{bmatrix}$$