

(urm 9- 55)

6.5. Cuadratura gaussiana

- metodele Newton–Cotes de gradul n au gradul de precizie n (pentru n impar) și $n + 1$ (pentru n par)
- regula trapezului (Newton–Cotes pentru $n = 1$) are gradul de precizie unu
- regula lui Simpson ($n = 2$) este corectă până la inclusiv gradul trei
- pentru a obține acest grad de precizie, formulele Newton–Cotes folosesc $n + 1$ evaluări de funcție, făcute în puncte egal depărtate
- cuadratura gaussiană are gradul de precizie $2n + 1$ când sunt folosite $n + 1$ puncte, dublu față de Newton–Cotes
- punctele în care se face evaluarea nu sunt egal depărtate
- explicația de ce cuadratura gaussiană funcționează implică o scurtă digresiune în subiectul funcțiilor ortogonale, care nu este interesant doar ca subiect în sine, ci reprezintă vârful de lance al unor metode numerice inspirate din beneficiile ortogonalității

Definiția 1

Mulțimea de funcții nenule $\{p_0, \dots, p_n\}$ pe intervalul $[a, b]$ este **ortogonală** pe $[a, b]$ dacă

$$\int_a^b p_j(x)p_k(x)dx = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \neq 0 & j = k \end{cases}.$$

Teorema 1

Dacă $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ este o mulțime ortogonală de polinoame pe intervalul $[a, b]$, unde $\text{grad } p_i = i$, atunci $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ este o bază pentru spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult n pe $[a, b]$.

- trebuie să arătăm că polinoamele generează spațiul vectorial și că sunt liniar independente
- un argument ușor de inducție arată că orice mulțime de polinoame $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, unde $\text{grad } p_i = i$, generează spațiul polinoamelor de grad cel mult n
- pentru a arăta liniar independentă, vom presupune că există o dependență liniară $\sum_{i=0}^n c_i p_i(x) = 0$, și vom arăta că toți c_i trebuie să fie zero, folosind presupunerea de ortogonalitate
- pentru orice $0 \leq k \leq n$, deoarece p_k este ortogonal pe orice polinom cu excepția lui însuși, obținem

$$0 = \int_a^b p_k \sum_{i=0}^n c_i p_i(x) dx = \sum_{i=0}^n c_i \int_a^b p_k p_i dx = c_k \int_a^b p_k^2 dx. \quad (1)$$

- prin urmare, $c_k = 0$

Teorema 2

Dacă $\{p_0, \dots, p_n\}$ este o mulțime ortogonală de polinoame pe $[a, b]$ și dacă $\text{grad } p_i = i$, atunci p_i are i rădăcini distințe în intervalul (a, b) .

Exemplul 1

găsiți o mulțime de trei polinoame ortogonale pe intervalul $[-1, 1]$

luăm $p_0(x) = 1$ și $p_1(x) = x$ pentru început, pentru că

$$\int_{-1}^1 1 \cdot x dx = 0.$$

încercând cu $p_2(x) = x^2$ nu funcționează, pentru că nu este ortogonal cu $p_0(x)$:

$$\int_{-1}^1 p_0(x)x^2 dx = 2/3 \neq 0.$$

modificând în $p_2(x) = x^2 + c$, găsim că

$$\int_{-1}^1 p_0(x)(x^2 + c) dx = 2/3 + 2c = 0,$$

câtă vreme $c = -1/3$

verificăm că p_1 și p_2 sunt ortogonale

prin urmare, mulțimea $\{1, x, x^2 - 1/3\}$ este o mulțime ortogonală pe $[-1, 1]$

Exemplul 2

- arătați că mulțimea de **polinoame Legendre**

$$p_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i} [(x^2 - 1)^i]$$

pentru $0 \leq i \leq n$ este ortogonală pe $[-1, 1]$

- observăm în primul rând că $p_i(x)$ este un polinom de gradul i (fiind derivata de ordinul i a unui polinom de gradul $2i$)
- în al doilea rând, observăm că derivata de ordinul i a lui $(x^2 - 1)^j$ este divizibilă prin $(x^2 - 1)$ dacă $i < j$
- vrem să arătăm că dacă $i < j$, atunci integrala

$$\int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^i]^{(i)} [(x^2 - 1)^j]^{(j)} dx$$

este zero

- integrând prin părți cu $u = [(x^2 - 1)^i]^{(i)}$ și $dv = [(x^2 - 1)^j]^{(j)} dx$, obținem

$$\begin{aligned} uv - \int_{-1}^1 v du &= [(x^2 - 1)^i]^{(i)} [(x^2 - 1)^j]^{(j-1)}|_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^i]^{(i+1)} [(x^2 - 1)^j]^{(j-1)} dx \\ &= - \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^i]^{(i+1)} [(x^2 - 1)^j]^{(j-1)} dx, \end{aligned}$$

deoarece $[(x^2 - 1)^j]^{(j-1)}$ este divizibil prin $(x^2 - 1)$

- după $i + 1$ repetări ale integrării prin părți, rezultă că

$$(-1)^{i+1} \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^i]^{(2i+1)} [(x^2 - 1)^j]^{(j-i-1)} dx = 0,$$

deoarece derivata de ordinul $(2i + 1)$ a lui $(x^2 - 1)^i$ este zero

- din Teorema 2, al n -lea polinom Legendre are n rădăcini x_1, \dots, x_n în $[-1, 1]$

- folosind formularea Lagrange, putem scrie

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x)f(x_i), \text{ unde } L_i(x) = \frac{(x - x_1) \cdots (\overline{x - x_i}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdots (\overline{x_i - x_i}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

- integrând ambele părți, obținem următoarea aproximare a integralei:

Algoritmul 1 (Cuadratura gaussiană)

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i), \quad (2)$$

unde

$$c_i = \int_{-1}^1 L_i(x)dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

- valorile c_i sunt trecute în Tabelul 1 până la $n = 4$

n	rădăcinile x_i	coeficienții c_i
2	$-\sqrt{1/3}$	1
	$\sqrt{1/3}$	1
3	$-\sqrt{3/5}$	$5/9$
	0	$8/9$
	$\sqrt{3/5}$	$5/9$
4	$-\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}$	$\frac{90-5\sqrt{30}}{180}$
	$-\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}$	$\frac{90+5\sqrt{30}}{180}$
	$\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}$	$\frac{90+5\sqrt{30}}{180}$
	$\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}$	$\frac{90-5\sqrt{30}}{180}$

Tabela 1: Coeficienții cuadraturii gaussiene. Rădăcinile x_i ale celui de-al n -lea polinom Legendre, și coeficienții c_i din (2).

- și aproximarea $n = 4$ este

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) + c_4 f(x_4) \approx 1.71122450459949.$$

- această aproximare, folosind patru evaluări de funcție, este mult mai bună decât aproximarea Romberg R_{33} , care folosește cinci evaluări de funcție în puncte egal depărtate pe $[-1, 1]$:

1.21306131942527	0	0
1.60653065971263	1.73768710647509	0
1.68576223244091	1.71217275668367	1.71047180003091

- secretul preciziei cuadraturii gaussiene este dezvăluit de următoarea teoremă

Teorema 3

Metoda cuadraturii gaussiene, folosind polinomul Legendre de gradul n pe $[-1, 1]$, are gradul de precizie $2n - 1$.

- fie $P(x)$ un polinom de grad cel mult $2n - 1$
- trebuie să arătăm că este integrat exact de către cuadratura gaussiană
- folosind împărțirea polinoamelor, putem exprima

$$P(x) = S(x)p_n(x) + R(x), \quad (3)$$

unde $S(x)$ și $R(x)$ sunt polinoame de grad mai mic decât n

- observăm că metoda cuadraturii gaussiene va fi exactă pentru polinomul $R(x)$, deoarece este doar o integrare a polinomului de interpolare de gradul $n - 1$, care este identic cu $R(x)$
- în rădăcinile x_i ale celui de-al n -lea polinom Legendre, $P(x_i) = R(x_i)$, deoarece $p_n(x_i) = 0$ pentru orice i
- aceasta implică faptul că aproximările lor date de cuadratura gaussiană vor fi aceleasi
- dar integralele lor sunt de asemenea identice: integrând (3), obținem

$$\int_{-1}^1 P(x)dx = \int_{-1}^1 S(x)p_n(x)dx + \int_{-1}^1 R(x)dx = 0 + \int_{-1}^1 R(x)dx,$$

deoarece, din Teorema 1, $S(x)$ poate fi scris ca o combinație liniară de polinoame de grad mai mic decât n , care sunt ortogonale cu $p_n(x)$

Exemplul 3

aproximații

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

folosind cuadratura gaussiană

răspunsul corect cu 14 zecimale exacte este 1.71124878378430

pentru integrandul $f(x) = e^{-x^2/2}$, aproximarea $n = 2$ a cuadraturii gaussiene este

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= 1 \cdot f(-\sqrt{1/3}) + 1 \cdot f(\sqrt{1/3}) \approx 1.69296344978123.$$

aproximarea $n = 3$ este

$$\frac{5}{9}f(-\sqrt{3/5}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{3/5}) \approx 1.71202024520191,$$

- deoarece cuadratura gaussiană este exactă pentru $R(x)$, trebuie să fie la fel și pentru $P(x)$
- pentru a aproxima integrale pe un interval general $[a, b]$, problema trebuie să fie translatată înapoi pe intervalul $[-1, 1]$
- folosind substituția $t = (2x - a - b)/(b - a)$, este ușor să verificăm că

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + b+a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt. \quad (4)$$

- demonstrăm printr-un exemplu

Exemplu 4

- aproximați integrala

$$\int_1^2 \ln x dx,$$

folosind cuadratura gaussiană

- din (4),

$$\int_1^2 \ln x dx = \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{t+3}{2}\right) \frac{1}{2} dt.$$

- acum putem să definim $f(t) = \ln((t+3)/2)/2$ și să folosim rădăcinile și coeficienții standard
- rezultatul pentru $n = 4$ este 0.38629449693871, comparat cu valoarea corectă $2 \ln 2 - 1 \approx 0.38629436111989$
- din nou, această aproximare este mai precisă decât integrarea Romberg folosind patru puncte

7. Ecuatii diferențiale ordinare

- o ecuație diferențială este o ecuație care implică derive
- în forma

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

o ecuație diferențială de ordinul întâi exprimă rata de schimbare a cantității y în funcție de timpul prezent și de valoarea curentă a cantității

7.1. Probleme cu valoare inițială

- un model simplu cunoscut ca **ecuația logistică** modelează rata de schimbare a unei populații sub forma

$$y' = cy(1 - y), \quad (5)$$

unde y' reprezintă derivata în funcție de timpul t

- dacă ne gândim la y ca reprezentând populația ca o proporție a capacitatei habitatului unui animal, atunci ne așteptăm ca y să crească până aproape de acea capacitate, iar apoi să se niveleze
- ecuația diferențială (5) prezintă rata de schimbare y' ca fiind proporțională cu produsul dintre populația curentă y și „capacitatea rămasă” $1 - y$
- o problemă cu valoare inițială** pentru o ecuație diferențială ordină de ordinul întâi este ecuația împreună cu o condiție inițială pe un anumit interval $a \leq t \leq b$:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_a \\ t \in [a, b]. \end{cases} \quad (6)$$

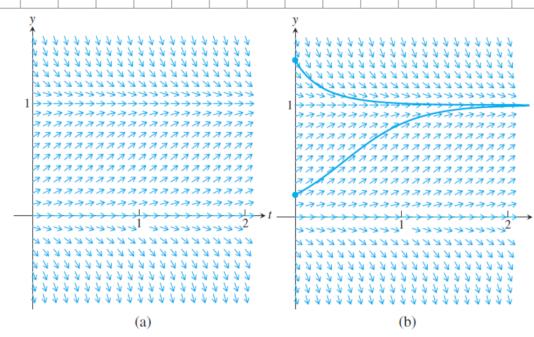


Figura 1: Ecuatia diferențială logistică. (a) Câmpul pantelor variază în direcția y dar este constant pentru orice t , intrând în definiția unei ecuații autonome. (b) Două soluții ale ecuației diferențiale.

- ecuația (5) poate fi privită ca specificând o pantă pentru orice valoare curentă a lui (t, y)
- dacă folosim o săgeată pentru a reprezenta grafic panta în fiecare punct din plan, obținem **câmpul pantelor**, sau **câmpul direcțiilor**, pentru ecuația diferențială
- ecuația este **autonomă** dacă partea dreaptă $f(t, y)$ este independentă de t
- aceasta se vede în Figura 1
- când o condiție initială este specificată pe un câmp de pante, poate fi identificată o soluție din familia infinită de soluții
- în Figura 1(b), două soluții diferite sunt reprezentate grafic pornind cu două valori initiale diferite, $y(0) = 0.2$ și, respectiv, $y(0) = 1.4$
- ecuația (5) are o soluție care poate fi scrisă în termeni de funcții elementare
- putem verifica, prin derivare și substituție, că, atâtă vreme cât condiția initială satisfacă $y_0 \neq 1$,

$$y(t) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{y_0}{1-y_0} e^{ct}} \quad (7)$$

este soluția problemei cu valoare initială

$$\begin{cases} y' = cy(1-y) \\ y(0) = y_0 \\ t \in [0, T]. \end{cases} \quad (8)$$

- soluția urmărește săgețile din Figura 1(b)
- dacă $y_0 = 1$, soluția este $y(t) = 1$, care se verifică în același fel

7.1.1. Metoda lui Euler

• considerăm problema cu valoare initială

$$\begin{cases} y' = g(t)y + h(t) \\ y(a) = y_a \\ t \in [a, b]. \end{cases} \quad (19)$$

$$y(t) = e^{\int g(t)dt} \int e^{-\int g(t)dt} h(t)dt. \quad (20)$$

Exemplu 5

- desenați câmpul pantelor pentru problema cu valoare initială

$$\begin{cases} y' = ty + t^3 \\ y(0) = y_0 \\ t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (9)$$

- Figura 2(a) prezintă câmpul pantelor
- pentru fiecare punct (t, y) din plan, este desenată o săgeată cu panta egală cu $ty + t^3$
- această problemă cu valoare initială este neautonomă deoarece t apare explicit în partea dreaptă a ecuației
- este de asemenea clar din câmpul pantelor, care variază atât în funcție de t cât și în funcție de y
- soluția exactă $y(t) = 3e^{t^2/2} - t^2 - 2$ este prezentată pentru condiția initială $y(0) = 1$
- a se vedea Exemplul 10 pentru deducerea soluției explicite
- Figura 2(b) prezintă o implementare a metodei urmăririi computaționale a câmpului pantelor, care este cunoscută sub denumirea de metoda lui Euler
- începem cu o grilă de $n+1$ puncte $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ de-a lungul axei t cu pași egali cu h
- în Figura 2(b), valorile lui t sunt

$$t_0 = 0.0 \quad t_1 = 0.2 \quad t_2 = 0.4 \quad t_3 = 0.6 \quad t_4 = 0.8 \quad t_5 = 1.0, \quad (10)$$

cu pasul $h = 0.2$

- începem cu $w_0 = y_0$
- urmărind câmpul pantelor la fiecare t_i , obținem aproximarea

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

în t_{i+1} , deoarece $f(t_i, w_i)$ reprezintă panta soluției

- observăm că schimbarea lui y este distanța orizontală h înmulțită cu panta
- după cum se arată în Figura 2(b), fiecare w_i este o aproximare a soluției în t_i
- formula pentru această metodă poate fi exprimată după cum urmează:

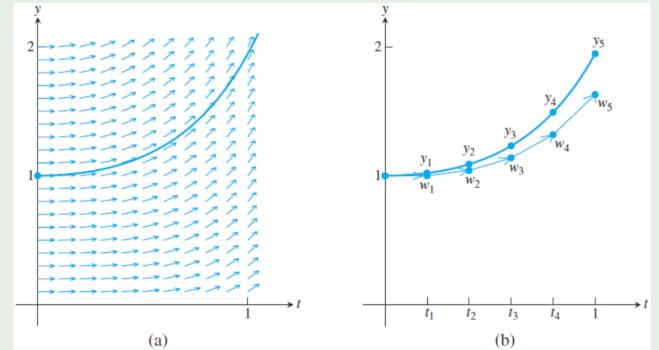


Figura 2: Soluția problemei cu valoare initială (9). (a) Câmpul pantelor pentru ecuația neautonomă variază cu t . Soluția care satisfacă $y(0) = 1$ este prezentată. (b) Aplicarea metodei lui Euler pentru această ecuație, cu pasul $h = 0.2$.

Algoritmul 2 (Metoda lui Euler)

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 \\ w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i). \end{aligned} \quad (11)$$

Exemplul 6

aplicați metoda lui Euler problemei cu valoare inițială (9), cu condiția inițială $y_0 = 1$

partea dreaptă a ecuației diferențiale este $f(t, y) = ty + t^3$

prin urmare, metoda lui Euler va fi iterată

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \\ w_{i+1} &= w_i + h(t_i w_i + t_i^3). \end{aligned} \quad (12)$$

folosind grila (10) cu pasul $h = 0.2$, calculăm soluția aproximativă iterativ din (12)

pasul	t_i	w_i	y_i	e_i
0	0.0	1.0000	1.0000	0.0000
1	0.2	1.0000	1.0206	0.0206
2	0.4	1.0416	1.0899	0.0483
3	0.6	1.1377	1.2317	0.0939
4	0.8	1.3175	1.4914	0.1739
5	1.0	1.6306	1.9462	0.3155

tabelul prezintă de asemenea eroarea $e_i = |y_i - w_i|$ la fiecare pas eroarea tinde să crească, de la zero în condiția inițială până la cea mai mare valoare la capătul intervalului, deși eroarea maximă nu va fi întotdeauna la capăt

aplicând metoda lui Euler cu pasul $h = 0.1$ determină o descreștere a erorii, după cum se vede din Figura 3(a)

folosind din nou (12), calculăm următoarele valori:

pasul	t_i	w_i	y_i	e_i
0	0.0	1.0000	1.0000	0.0000
1	0.1	1.0000	1.0050	0.0050
2	0.2	1.0101	1.0206	0.0105
3	0.3	1.0311	1.0481	0.0170
4	0.4	1.0647	1.0899	0.0251
5	0.5	1.1137	1.1494	0.0357
6	0.6	1.1819	1.2317	0.0497
7	0.7	1.2744	1.3429	0.0684
8	0.8	1.3979	1.4914	0.0934
9	0.9	1.5610	1.6879	0.1269
10	1.0	1.7744	1.9462	0.1718

comparăm eroarea e_{10} pentru calculul cu $h = 0.1$ cu eroarea e_5 pentru calculul cu $h = 0.2$

observăm că înjumătățirea pasului h rezultă în înjumătățirea erorii în $t = 1.0$

Exemplul 7

- găsiți formula metodei lui Euler pentru următoarea problemă cu valoare inițială:

$$\begin{cases} y' = cy \\ y(0) = y_0 \\ t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (13)$$

- pentru $f(t, y) = cy$, unde c este o constantă, metoda lui Euler ne dă

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 \\ w_{i+1} &= w_i + hcw_i = (1 + hc)w_i \text{ pentru } i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y' = ty + t^3 \\ y(0) = y_0 \\ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

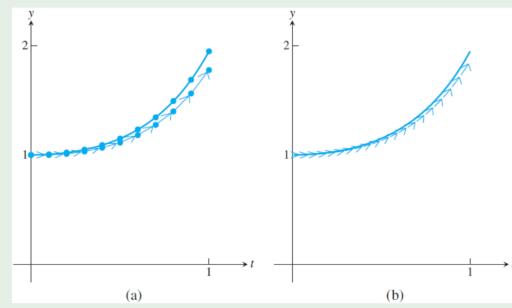


Figura 3: Metoda lui Euler aplicată PVI (9). Săgețile arată pașii Euler, exactă în Figura 2, cu excepția mărimii pasului. (a) Zece pași cu $h = 0.1$. (b) Douăzeci de pași cu $h = 0.05$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= cdt \\ \ln|y| &= ct + k \\ |y| &= e^{ct+k} = e^k e^{ct}. \end{aligned}$$

- condiția inițială $y(0) = y_0$ implică $y = y_0 e^{ct}$
- în acest caz simplu, putem arăta că metoda lui Euler converge la soluția corectă pe măsură ce numărul de pași $n \rightarrow \infty$
- observăm că

$$w_i = (1 + hc)w_{i-1} = (1 + hc)^2 w_{i-2} = \dots = (1 + hc)^i w_0.$$

- pentru un t fixat, luăm pasul $h = t/n$ pentru un întreg n
- valoarea aproximativă în t este

$$w_n = (1 + hc)^n y_0 = \left(1 + \frac{ct}{n}\right)^n y_0.$$

- formula clasică ne spune că $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{ct}{n})^n = e^{ct}$, ceea ce arată că, dacă $n \rightarrow \infty$, metoda lui Euler va converge la valoarea corectă

7.1.2. Existenta, unicitatea si continuitatea solutiilor

Definitia 2

O functie $f(t, y)$ este **continua Lipschitz** in variabila y pe dreptunghiul $S = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ dacă există o constantă L (numită **constanta Lipschitz**) care satisface

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

pentru orice $(t, y_1), (t, y_2)$ din S .

Exemplul 8

- găsiți constanta Lipschitz pentru partea dreaptă $f(t, y) = ty + t^3$ a lui (9)
- funcția $f(t, y) = ty + t^3$ este continuă Lipschitz în variabila y pe mulțimea $0 \leq t \leq 1, -\infty < y < \infty$
- avem că

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |ty_1 - ty_2| \leq |t||y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_2|, \quad (14)$$

pe această mulțime

- constanta Lipschitz este $L = 1$

- dacă funcția f este derivabilă cu derivata continuă în variabila y , valoarea absolută maximă a derivatei parțiale $\partial f / \partial y$ este o constantă Lipschitz
- potrivit Teoremei de medie, pentru orice t fixat, există un c între y_1 și y_2 astfel încât

$$\frac{f(t, y_1) - f(t, y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{\partial f}{\partial y}(t, c).$$

- prin urmare, L poate fi luat ca valoarea maximă a lui

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, c) \right|$$

pe mulțimea respectivă

- ipoteza de continuitate Lipschitz garantează existența și unicitatea soluțiilor pentru probleme cu valoare inițială
- vom omite demonstrația următoarei teoreme:

Teorema 3

Presupunem că $f(t, y)$ este continuă Lipschitz în variabila y pe mulțimea $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ și că $\alpha < y_a < \beta$. Atunci există c între a și b astfel încât problema cu valoare inițială

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_a \\ t \in [a, c], \end{cases} \quad (15)$$

are exact o soluție $y(t)$. Mai mult, dacă f este continuă Lipschitz pe $[a, b] \times (-\infty, \infty)$, atunci există exact o soluție pe $[a, b]$.

Exemplul 9

- pe ce intervale $[0, c]$ are problema cu valoare inițială de mai jos o soluție unică?

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \\ t \in [0, 2], \end{cases} \quad (16)$$

- derivata parțială a lui f în funcție de y este $2y$
- constanta Lipschitz max $|2y| = 20$ este validă pe mulțimea $0 \leq t \leq 2, -10 \leq y \leq 10$
- Teorema 3 garantează o soluție pornind de la $t = 0$ și care există pe un anumit interval $[a, c]$ pentru $c > 0$, dar existența unei soluții nu este garantată pe întreg intervalul $[0, 2]$
- de fapt, soluția unică a ecuației diferențiale (16) este $y(t) = 1/(1-t)$, care poate fi găsită prin separarea variabilelor

- această soluție tinde la infinit pe măsură ce t se apropi de 1
- cu alte cuvinte, soluția există pe intervalul $0 \leq t \leq c$ pentru orice $0 < c < 1$, dar nu pentru un c mai mare
- acest exemplu explică rolul lui c în Teorema 3: constanta Lipschitz 20 este validă pentru $|y| \leq 10$, dar soluția y depășește valoarea 10 înainte ca t să ajungă la 2

- Teorema 4 este faptul de bază despre stabilitatea (amplificarea erorii) pentru ecuațiile diferențiale ordinare
- dacă o constantă Lipschitz există pentru partea dreaptă a ecuației diferențiale, atunci soluția la un moment viitor este o funcție Lipschitz de valoarea initială, cu o constantă Lipschitz nouă care este exponentială în cea de dinainte
- aceasta este o versiune a inegalității lui Gronwall

Teorema 4

Presupunem că $f(t, y)$ este continuă Lipschitz în variabila y pe mulțimea $S = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ cu constantă Lipschitz L . Dacă $Y(t)$ și $Z(t)$ sunt soluții în S ale ecuației diferențiale

$$y' = f(t, y)$$

cu condițiile inițiale $Y(a)$ și, respectiv, $Z(a)$, atunci

$$|Y(t) - Z(t)| \leq e^{L(t-a)} |Y(a) - Z(a)|. \quad (17)$$

- dacă $Y(a) = Z(a)$, atunci $Y(t) = Z(t)$ din unicitatea soluțiilor, și (17) este evident satisfăcută
- putem să presupunem că $Y(a) \neq Z(a)$, caz în care $Y(t) \neq Z(t)$ pentru orice t din interval, pentru a evita contrazicerea unicitatii
- definim $u(t) = Y(t) - Z(t)$
- deoarece $u(t)$ este ori strict pozitivă ori strict negativă, și pentru că (17) depinde doar de $|u|$, putem să presupunem că $u > 0$
- atunci $u(a) = Y(a) - Z(a)$, și derivata este
 $u'(t) = Y'(t) - Z'(t) = f(t, Y(t)) - f(t, Z(t))$
- condiția Lipschitz implică

$$u' = |f(t, Y) - f(t, Z)| \leq L|Y(t) - Z(t)| = L|u(t)| = Lu(t),$$

și, prin urmare, $(\ln u)' = u'/u \leq L$

- din Teorema de medie,

$$\frac{\ln u(t) - \ln u(a)}{t - a} \leq L,$$

care se simplifică astfel:

$$\begin{aligned} \ln \frac{u(t)}{u(a)} &\leq L(t - a) \\ u(t) &\leq u(a)e^{L(t-a)}. \end{aligned}$$

- acesta este rezultatul dorit
- întorcându-ne la Exemplul 8, Teorema 4 implică faptul că soluțiile $Y(t)$ și $Z(t)$, pornind de la valori inițiale diferite, nu pot să se îndepărteze mai repede una de celalăță decât un factor multiplicativ al lui e^t , pentru $0 \leq t \leq 1$
- de fapt, soluția cu valoarea inițială Y_0 este
 $Y(t) = (2 + Y_0)e^{t^2/2} - t^2 - 2$, și astfel diferența între cele două soluții este

$$\begin{aligned} |Y(t) - Z(t)| &\leq |(2 + Y_0)e^{t^2/2} - t^2 - 2 - ((2 + Z_0)e^{t^2/2} - t^2 - 2)| \\ &\leq |Y_0 - Z_0|e^{t^2/2}, \end{aligned} \quad (18)$$

care este mai mică decât $|Y_0 - Z_0|e^t$ pentru $0 \leq t \leq 1$, după cum a prezis Teorema 4

7.1.3. Ecuatii liniare de ordinul intai

- considerăm problema cu valoare inițială

$$\begin{cases} y' = g(t)y + h(t) \\ y(a) = y_a \\ t \in [a, b]. \end{cases} \quad (19)$$

- observăm, în primul rând, că dacă $g(t)$ este continuă pe $[a, b]$, există o unică soluție din Teorema 3, folosind $L = \max_{[a,b]} g(t)$ pe post de constantă Lipschitz
- soluția este găsită printr-un truc, și anume înmulțirea ecuației cu un „factor integrator”
- factorul integrator este $e^{-\int g(t)dt}$

$$y(t) = e^{\int g(t)dt} \int e^{-\int g(t)dt} h(t) dt. \quad (20)$$

- dacă factorul integrator poate fi exprimat simplu, această metodă oferă o soluție explicită a ecuației liniare de ordinul întâi (19)

Exemplul 10

- rezolvați ecuația liniară diferențială de ordinul întâi

$$\begin{cases} y' = ty + t^3 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (21)$$

$$g(t) = t$$

$$h(t) = t^3$$

→ factorul integrator este

$$e^{-\int g(t)dt} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \int e^{-\frac{t^2}{2}} t^3 dt$$

$$\text{notăm } \frac{t^2}{2} = u \Rightarrow t^2 = 2u$$

$$t dt = du$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \int e^{-u} 2u du = 2e^{\frac{t^2}{2}} \left[-e^{-u} u - e^{-u} + C \right] =$$

$$= -2 \frac{t^2}{2} - 2 + 2C \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$y(0) = y_0 = -2 + 2C \Rightarrow C = \frac{y_0 + 2}{2}$$

$$\Rightarrow y(t) = (2 + y_0) e^{\frac{t^2}{2}} - t^2 - 2$$

7.2. Analiza de metodelor de rezolvare a PVI

- Figura 4 arată o eroare care descrește consistent în aproximarea metodei lui Euler ca funcție de descreșterea pasului pentru Exemplul 5
- este acest lucru general valabil? putem face o eroare cât de mică dorim, doar prin descreșterea pasului?
- o investigație atentă a erorii din metoda lui Euler va ilustra problemele pentru metodele de rezolvare a PVI în general

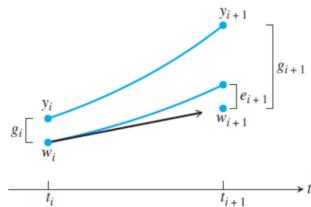


Figura 5: Un pas al unei metode de rezolvare a unei EDO. Metoda lui Euler urmărește un segment de dreaptă care are panta câmpului de vectori de la punctul curent la următorul punct (t_{i+1}, w_{i+1}) . Curba de sus reprezintă soluția adevărată. Eroarea globală de trunchiere g_{i+1} este suma dintre eroarea locală de trunchiere e_{i+1} și eroarea acumulată și amplificată din pași

7.2.1. Eroarea locală și globală de trunchiere

- Figura 5 prezintă o schemă a unui pas pentru o metodă de rezolvare cum ar fi metoda lui Euler când aceasta este aplicată unei probleme cu valoare inițială de forma

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_a \\ t \in [a, b]. \end{cases} \quad (22)$$

- la pasul i , eroarea acumulată din pașii anteriori este transmisă și probabil amplificată, în vreme ce noua eroare din aproximarea Euler este adunată la aceasta
- pentru a fi mai precisi, definim **eroarea globală de trunchiere**

$$g_i = |w_i - y_i|$$

- ca fiind diferența dintre aproximarea metodei de rezolvare a EDO (metoda lui Euler, de exemplu) și soluția corectă pentru problema cu valoare inițială
- de asemenea, vom defini **eroarea locală de trunchiere**, sau eroarea pentru un pas, ca fiind

$$e_{i+1} = |w_{i+1} - z(t_{i+1})|, \quad (23)$$

diferența dintre valoarea metodei de rezolvare pe acel interval și soluția corectă a „problemei cu valoare inițială cu un pas”

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_i) = w_i \\ t \in [t_i, t_{i+1}]. \end{cases} \quad (24)$$

- (dăm soluției numele z deoarece y este este deja folosit pentru soluția aceleiași probleme cu valoare inițială pornind de la aceeași condiție inițială $y(t_i) = y_i$)
- eroarea locală de trunchiere este eroarea care are loc doar dintr-un singur pas, luând aproximarea anterioară a soluției w_i ca punct de pornire
- eroarea globală de trunchiere este eroarea acumulată din primii i pași
- erorile locală și globală de trunchiere sunt ilustrate în Figura 5

- la fiecare pas, noua eroare globală este combinarea dintre eroarea globală amplificată din pasul anterior și noua eroare locală
- datorită amplificării, eroarea globală nu este pur și simplu suma erorilor locale de trunchiere

Exemplul 11

- găsiți eroarea locală de trunchiere pentru metoda lui Euler
- potrivit definiției, aceasta este noua eroare făcută într-un singur pas al metodei lui Euler
- presupunem că pasul anterior w_i este corect, rezolvăm problema cu valoare inițială (24) exact, și comparăm soluția exactă $y(t_{i+1})$ cu aproximarea dată de metoda lui Euler
- presupunând că y'' este continuă, soluția exactă în $t_{i+1} = t_i + h$ este

$$y(t_i + h) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(c),$$

potrivit Teoremei lui Taylor, pentru un anumit c (necunoscut) care satisface $t_i < c < t_{i+1}$

- deoarece $y(t_i) = w_i$ și $y'(t_i) = f(t_i, w_i)$, această relație poate fi scrisă sub forma

$$y(t_{i+1}) = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2}y''(c).$$

- pe de altă parte, metoda lui Euler se scrie

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i).$$

- scăzând cele două expresii, obținem eroarea locală de trunchiere

$$e_{i+1} = |w_{i+1} - y(t_{i+1})| = \frac{h^2}{2}|y''(c)|,$$

pentru un anumit c din interval

- dacă M este limita superioară pentru y'' pe $[a, b]$, atunci eroarea locală de trunchiere satisface $e_i \leq Mh^2/2$

- în condiția inițială $y(a) = y_a$, eroarea globală este
 $g_0 = |w_0 - y_0| = |y_a - y_a| = 0$
- după un pas, nu există eroare acumulată din pașii anteriori, și eroarea globală este egală cu prima eroare locală, $g_1 = e_1 = |w_1 - y_1|$
- după doi pași, despărțim pe g_2 în eroarea locală de trunchiere plus eroarea acumulată dintr-un pas anterior, ca în Figura 5
- definim $z(t)$ ca fiind soluția problemei cu valoare inițială

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_1) = w_1 \\ t \in [t_1, t_2]. \end{cases} \quad (25)$$

- prin urmare, $z(t_2)$ este valoarea exactă a soluției pornind de la condiția inițială (t_1, w_1)
- observăm că dacă am fi folosit condiția (t_1, y_1) , am fi obținut y_2 , care se află pe curba adevărată a soluției, spre deosebire de $z(t_2)$
- atunci $e_2 = |w_2 - z(t_2)|$ este eroarea locală de trunchiere a pasului $i = 2$

- cealaltă diferență $|z(t_2) - y_2|$ este acoperită de Teorema 4, deoarece este diferența dintre două soluții ale aceleiași ecuații cu condiții inițiale diferite w_1 și y_1
- prin urmare,

$$\begin{aligned} g_2 = |w_2 - y_2| &= |w_2 - z(t_2) + z(t_2) - y_2| \\ &\leq |w_2 - z(t_2)| + |z(t_2) - y_2| \\ &\leq e_2 + e^{Lh}g_1 \\ &= e_2 + e^{Lh}e_1. \end{aligned}$$

- argumentul este același pentru pasul $i = 3$, ceea ce ne dă

$$g_3 = |w_3 - y_3| \leq e_3 + e^{Lh}g_2 \leq e_3 + e^{Lh}e_2 + e^{2Lh}e_1. \quad (26)$$

- Iată fel, eroarea globală de trunchiere la pasul i satisfacă

$$g_i = |w_i - y_i| \leq e_i + e^{Lh}e_{i-1} + e^{2Lh}e_{i-2} + \dots + e^{(i-1)Lh}e_1. \quad (27)$$

- În Exemplul 11, am găsit că metoda lui Euler are eroarea locală de trunchiere proporțională cu h^2

Teorema 5

Presupunem că $f(t, y)$ are constanta Lipschitz L pentru variabila y și că valoarea y_i a soluției problemei cu valoare initială (6) în t_i este aproximată de w_i pentru o metodă de rezolvare cu un pas a unei EDO cu eroarea locală de trunchiere $e_i \leq Ch^{k+1}$, pentru o anumită constantă C și $k \geq 0$. Atunci, pentru orice $a < t_i < b$, metoda de rezolvare are eroarea globală de trunchiere

$$g_i = |w_i - y_i| \leq \frac{Ch^k}{L}(e^{L(t_i-a)} - 1). \quad (29)$$

- dacă o metodă de rezolvare a unei EDO satisfacă (29) când $h \rightarrow 0$, spunem că metoda de rezolvare are **ordinul** k
- Exemplul 11 arată că eroarea locală de trunchiere a metodei lui Euler are limită de sus $Mh^2/2$, astfel că ordinul metodei lui Euler este 1
- reenunțând teorema în cazul metodei lui Euler, obținem următorul corolar:

Corolarul 1 (Convergența metodei lui Euler)

Presupunem că $f(t, y)$ are constanta Lipschitz L pentru variabila y și că soluția y_i a problemei cu valoare initială (6) în t_i este aproximată de către w_i , folosind metoda lui Euler. Fie M limita superioară pentru $|y''(t)|$ pe $[a, b]$. Atunci

$$|w_i - y_i| \leq \frac{Mh}{2L}(e^{L(t_i-a)} - 1). \quad (30)$$

Exemplul 12

găsiți o limită a erorii pentru metoda lui Euler aplicată Exemplului 5 constanta Lipschitz pe $[0, 1]$ este $L = 1$

acum că soluția $y(t) = 3e^{t^2/2} - t^2 - 2$ este cunoscută, derivata secundă este $y''(t) = (t^2 + 2)e^{t^2/2} - 2$, a cărei valoare absolută este limitată superior pe $[0, 1]$ de către $M = y''(1) = 3\sqrt{e} - 2$

Corolarul 1 implică faptul că eroarea globală de trunchiere în $t = 1$ trebuie să fie mai mică decât

$$\frac{Mh}{2L}e^L(1 - 0) = \frac{(3\sqrt{e} - 2)}{2}eh \approx 4.004h. \quad (31)$$

această limită superioară este confirmată de către erorile globale de trunchiere adevărate, prezентate în Figura 4, care sunt aproximativ $2h$ pentru un h mic

- mai general, presupunem că eroarea locală de trunchiere satisfacă

$$e_i \leq Ch^{k+1},$$

pentru un anumit întreg k și o constantă $C > 0$

- atunci

$$\begin{aligned} g_i &\leq Ch^{k+1} (1 + e^{Lh} + \dots + e^{(i-1)Lh}) \\ &= Ch^{k+1} \frac{e^{iLh} - 1}{e^{Lh} - 1} \\ &\leq Ch^{k+1} \frac{e^{L(t_i-a)} - 1}{Lh} \\ &= \frac{Ch^k}{L} (e^{L(t_i-a)} - 1). \end{aligned} \quad (28)$$

- observăm cum eroarea locală de trunchiere este legată de eroarea globală de trunchiere

- eroarea locală de trunchiere este proporțională cu h^{k+1} pentru un anumit k

Exemplul 12

- aplicați metoda lui Euler pentru problema cu valoare inițială

$$\begin{cases} y' = -4t^3y^2 \\ y(-10) = 1/10001 \\ t \in [-10, 0]. \end{cases} \quad (32)$$

este simplu să verificăm prin substituție că soluția exactă este $y(t) = 1/(t^4 + 1)$

soluția se comportă foarte bine pe intervalul de interes
vom evalua capacitatea metodei lui Euler de a aproxima soluția în $t = 0$

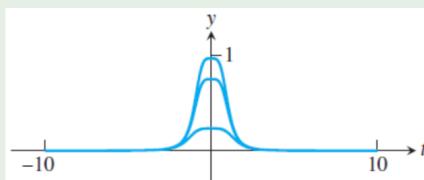


Figura 6: Aproximarea Exemplului 12 prin metoda lui Euler. De jos în sus, soluțiile aproximante cu pași $h = 10^{-3}, 10^{-4},$ și 10^{-5} . Soluția corectă are $y(0) = 1$. Pași extrem de mici sunt necesari pentru a obține o aproximare rezonabilă.

Figura 6 prezintă aproximările date de metoda lui Euler pentru soluție, cu pași $h = 10^{-3}, 10^{-4},$ și 10^{-5} , de jos în sus

valoarea corectă a soluției în $t = 0$ este $y(0) = 1$

chiar și cea mai bună aproximare, care folosește un milion de pași pentru a ajunge la $t = 0$ de la condiția inițială, este vizibil incorectă

7.2.2. Metoda trapezului explicită

- considerăm următoarea metodă motivată geometric:

Algoritm 3 (Metoda trapezului explicită)

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2}(f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))). \end{aligned} \quad (33)$$

- pentru metoda lui Euler, panta $y'(t_i)$ care guvernează pasul discret este luată din câmpul de pante în capătul din stânga al intervalului $[t_i, t_{i+1}]$
- pentru metoda trapezului, după cum este ilustrat în Figura 7, această pantă este înlocuită cu media dintre contribuția $y'(t_i)$ din capătul din stânga și pantă $f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))$ din punctul din dreapta, pe care ar fi dat-o metoda lui Euler

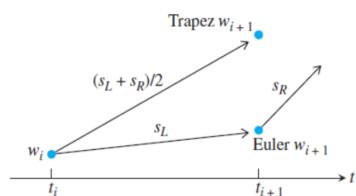


Figura 7: Prezentare schematică a unui singur pas din metoda trapezului explicită. Pantele $s_L = f(t_i, w_i)$ și $s_R = f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))$ sunt mediate pentru a defini pantă folosită pentru a aproxima soluția în t_{i+1} .

- „predicția” metodei lui Euler este folosită ca valoare w pentru a evalua funcția de pantă f în $t_{i+1} = t_i + h$
- într-un anumit sens, predicția metodei lui Euler este corectată de către metoda trapezului, care este mai exactă, după cum vom arăta
- metoda trapezului este numită explicită deoarece noua aproximare w_{i+1} poate fi determinată printr-o formulă explicită în funcție de valorile anterioare $w_i, t_i,$ și h

- metoda lui Euler este de asemenea o metodă explicită
- motivul pentru numele de „metoda trapezului” este acela că în cazul special în care $f(t, y)$ este independent de y , metoda

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i) + f(t_i + h)]$$

poate fi văzută ca adunarea unei aproximări date de regula trapezului pentru integrala $\int_{t_i}^{t_i+h} f(t)dt$ la valoarea curentă w_i

- deoarece

$$\int_{t_i}^{t_i+h} f(t)dt = \int_{t_i}^{t_i+h} y'(t)dt = y(t_i + h) - y(t_i),$$

aceasta corespunde rezolvării ecuației diferențiale $y' = f(t)$ prin integrarea ambelor părți cu folosirea regulii trapezului

- metoda trapezului explicită este de asemenea numită metoda lui Euler îmbunătățită sau metoda lui Heun în literatură, dar noi vom folosi denumirea mai descriptivă și mai ușor de reținut

Exemplu 13

aplicați metoda trapezului explicită problemei cu valoare inițială (9) cu condiția inițială $y(0) = 1$

formula (33) pentru $f(t, y) = ty + t^3$ este

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 = 1 \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2}(f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))) \\ &= w_i + \frac{h}{2}(t_i y_i + t_i^3 + (t_i + h)(w_i + h(t_i y_i + t_i^3)) + (t_i + h)^3). \end{aligned}$$

folosind pasul $h = 0.1$, iterația ne dă următorul tabel:

pasul	t_i	w_i	y_i	e_i
0	0.0	1.0000	1.0000	0.0000
1	0.1	1.0051	1.0050	0.0001
2	0.2	1.0207	1.0206	0.0001
3	0.3	1.0483	1.0481	0.0002
4	0.4	1.0902	1.0899	0.0003
5	0.5	1.1499	1.1494	0.0005
6	0.6	1.2323	1.2317	0.0006
7	0.7	1.3437	1.3429	0.0008
8	0.8	1.4924	1.4914	0.0010
9	0.9	1.6890	1.6879	0.0011
10	1.0	1.9471	1.9462	0.0010

- eroarea locală de trunchiere este eroarea făcută într-un singur pas
- pornind de la un punct al soluției (t_i, y_i) care este presupus a fi corect, extensia corectă a soluției la t_{i+1} poate fi dată de dezvoltarea în serie Taylor

$$y_{i+1} = y(t_i + h) = y_i + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(t_i) + \frac{h^3}{6}y'''(c), \quad (34)$$

pentru un anumit număr c între t_i și t_{i+1} , presupunând că y''' este continuă

- pentru a compara acești termeni cu metoda trapezului, îi vom scrie puțin diferit
- din ecuația diferențială $y'(t) = f(t, y)$, derivăm ambele părți în funcție de t , folosind regula de derivare a funcțiilor compuse:

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)y'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)f(t, y). \end{aligned}$$

- noua versiune a lui (34) este

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i)f(t_i, y_i) \right) + \frac{h^3}{6}y'''(c). \quad (35)$$

- vrem să comparăm această expresie cu metoda trapezului explicită, folosind teorema lui Taylor în două dimensiuni pentru a dezvolta termenul

$$f(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i)) = f(t_i, y_i) + h \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + hf(t_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i) + O(h^2).$$

- metoda trapezului poate fi scrisă ca

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i))) \\ &= y_i + \frac{h}{2}f(t_i, y_i) + \frac{h}{2} \left(f(t_i, y_i) + h \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f(t_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i) \right) + O(h^2) \right) \\ &= y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + f(t_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i) \right) + O(h^3). \quad (36) \end{aligned}$$

- scăzând (36) din (35) obținem eroarea locală de trunchiere ca fiind $y_{i+1} - w_{i+1} = O(h^3)$.
- Teorema 5 arată că eroarea globală a metodei trapezului este proporțională cu h^2 , ceea ce înseamnă că metoda este de ordinul doi, spre deosebire de ordinul unu al metodei lui Euler
- pentru un h mic, aceasta este o diferență semnificativă, după cum se vede dacă ne întoarcem la Exemplul 12

Exemplul 14

- aplicați metoda trapezului pentru Exemplul 12:

$$\begin{cases} y' = -4t^3 y^2 \\ y(-10) = 1/10001 \\ t \in [-10, 0]. \end{cases}$$

- rezolvând Exemplul 12 folosind o metodă mai puternică, obținem o îmbunătățire semnificativă în aproximarea soluției, de exemplu, în $t = 0$ valoarea corectă $y(0) = 1$ este obținută cu o eroare de 0.0015 folosind un pas $h = 10^{-3}$ cu metoda trapezului, după cum se arată în Figura 8

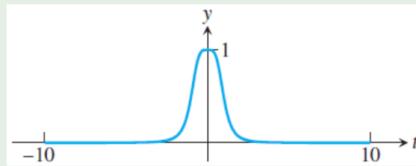


Figura 8: Aproximarea Exemplului 12 folosind metoda trapezului. Pasul este $h = 10^{-3}$. Observăm îmbunătățirea semnificativă a preciziei comparativ cu metoda lui Euler din Figura 6.

acesta este deja un rezultat mai bun decât cel al metodei lui Euler cu $h = 10^{-5}$

folosind metoda trapezului cu $h = 10^{-5}$ obținem o eroare de ordinul lui 10^{-7} pentru această problemă cu valoare inițială relativ dificilă

7.2.3. Metode Taylor

- dezvoltarea în serie Taylor a lui $y(t)$ în jurul lui t este

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{1}{2}h^2y''(t) + \cdots + \frac{1}{k!}h^ky^{(k)}(t) + \frac{1}{(k+1)!}h^{k+1}y^{(k+1)}(c), \quad (37)$$

unde c se află între t și $t+h$

- ultimul termen este restul Taylor

Algoritmul 4 (Metoda lui Taylor de ordinul k)

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 \\ w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2}f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^k}{k!}f^{(k-1)}(t_i, w_i). \end{aligned} \quad (38)$$

- notația cu prim se referă la derivata totală a lui $f(t, y(t))$ în funcție de t
- de exemplu,

$$\begin{aligned} f'(t, y) &= f_t(t, y) + f_y(t, y)y'(t) \\ &= f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y). \end{aligned}$$

- folosim notația f_t pentru derivata parțială a lui f în funcție de t , și la fel pentru f_y

- pentru a găsi eroarea locală de trunchiere a metodei lui Taylor, luăm $w_i = y_i$ în (38) și comparăm cu dezvoltarea în serie Taylor (37), obținând

$$y_{i+1} - w_{i+1} = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(c).$$

- conchidem că metoda lui Taylor de ordinul k are eroarea locală de trunchiere h^{k+1} și are ordinul k , potrivit Teoremei 5
- metoda lui Taylor de ordinul întâi este

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i),$$

care este tocmai metoda lui Euler

- metoda lui Taylor de ordinul doi este

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{1}{2}h^2(f_t(t_i, w_i) + f_y(t_i, w_i)f(t_i, w_i)).$$

Exemplul 15

determinați metoda lui Taylor de ordinul doi pentru ecuația liniară de ordinul întâi

$$\begin{cases} y' = ty + t^3 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (39)$$

deoarece $f(t, y) = ty + t^3$, rezultă că

$$\begin{aligned} f'(t, y) &= f_t + f_y f \\ &= y + 3t^2 + t(ty + t^3), \end{aligned}$$

și metoda ne dă

$$w_{i+1} = w_i + h(t_i w_i + t_i^3) + \frac{1}{2}h^2(w_i + 3t_i^2 + t_i(t_i w_i + t_i^3)).$$