CAPITOLUL 1

ȘIRURI DE NUMERE REALE

Def: Un șir de numere reale (x_n) se numește ȘIR MĂRGINIT dacă există un număr real pozitiv $M>0$ astfel încât $\boxed{|x_n| \leq M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

!! Pentru ca un șir (x_n) să fie mărginit este suficient ca relația $|x_n| \leq M$ să fie verificată de la un anumit rang $n_0 \Rightarrow |x_n| \leq M, \forall n \geq n_0$.

!! Șirul (x_n) este mărginit d.d. există $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a<b$ astfel încât $\boxed{a \leq x_n \leq b}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Def: Spunem că un șir (x_n) este:

- monoton crescător, dacă $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton descrescător, dacă $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton, dacă este monoton ↑ sau monoton ↓
- strict crescător, dacă $x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
- strict descrescător, dacă $x_n > x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
- strict monoton, dacă este strict ↑ sau strict ↓

Def: Un șir de numere reale (x_n) are LIMITĂ FINITĂ sau este CONVERGENT, dacă există un număr real $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\forall \varepsilon > 0$, există un rang $n_0 = n_0(\varepsilon) \in$ astfel încât $\boxed{|x_n - x| < \varepsilon}$, $\forall n \geq n_0$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x, \ x \in \mathbb{R}}$$

!! Un șir de numere reale (x_n) este DIVERGENT dacă fie are limită infinită, fie nu are limită.

!! Orice șir monoton și mărginit este CONVERGENT.

Exemplu

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

(a_n) - şir fundamental $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$ avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \dots - \frac{1}{n^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow (a_n)$ - şir fundamental $\Rightarrow (a_n)$ - convergent

CRITERIUL CLEŞTELUI

Fie (x_n) un şir de numere reale. Dacă există două şiruri $(a_n)_{n \geq n_0}$ şi $(b_n)_{n \geq n_0}$ care au aceaşi limită: $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = x}$, astfel încât $\boxed{a_n \leq x_n \leq b_n}$, $\forall n \geq n_0$, atunci şirul (x_n) are limita $\boxed{\lim_{n \to \infty} x_n = x}$.

CRITERIUL MAJORĂRII

Fie (x_n) un şir de numere reale.

1) Dacă $\exists x \in \mathbb{R}$ şi $\exists (y_n)_{n \geq n_0}$ şir de nr. nenegative, cu $\boxed{y_n \to 0}$ a.î. $\boxed{|x_n - x| \leq y_n}$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \boxed{x_n \to x}$

2) Dacă $\exists (y_n)_{n \geq n_0}$, $\boxed{y_n \to -\infty}$ a.î. $\boxed{x_n \leq y_n}$, $\forall n \geq n_0$, $\Rightarrow \boxed{x_n \to -\infty}$

3) Dacă $\exists (y_n)_{n \geq n_0}$, $\boxed{y_n \to \infty}$ a.î. $\boxed{x_n \geq y_n}$, $\forall n \geq n_0$, $\Rightarrow \boxed{x_n \to \infty}$

[CR]ITERIUL RAPORTULUI

Fie (x_n) un şir de numere reale pozitive a.î. $\exists \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell} \in [0,\infty]$

a) Dacă $\boxed{\ell < 1}$, atunci $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$

b) Dacă $\boxed{\ell > 1}$, atunci $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \infty}$

c) Dacă $\boxed{\ell = 1}$, atunci criteriul raportului nu ajută.

CRITERIUL RAPORTULUI GENERALIZAT

Fie (x_n) un şir de nr. reali poz. a.î. $\exists \boxed{\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n\right] = \ell} \in [0,\infty]$

a) Dacă $\boxed{\ell < 1}$, atunci $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$

b) Dacă $\boxed{\ell > 1}$, atunci $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \infty}$

LEMA STOLZ-CESARO

Fie $x_n = \frac{a_n}{b_n}$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă:

a) (b_n) şir STRICT MONOTON

b) $(b_n \to \infty)$ sau $(a_n \to 0$ şi $b_n \to 0)$

c) $\exists \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = x} \in \overline{\mathbb{R}}$

atunci $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = x}$

CRITERIUL RĂDĂCINII

Fie (x_n) un şir de numere reale pozitive. Dacă $\exists \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = x} \in [0,\infty]$, atunci $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = x}$.

Def: Un șir (x_n) se numește ȘIR CAUCHY sau ȘIR FUNDAMENTAL dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un rang $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î.

$\boxed{|x_n - x_m| < \varepsilon}$, $\forall n, m \geq n_0$. $\Leftrightarrow \boxed{|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon}$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

T: Dacă $\exists$ un șir $(a_n)_{n \geq n_0}$ de numere reale nenegative cu $a_n \to 0$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| \leq a_n$, $\forall n \geq n_0$ și $p \in \mathbb{N}^*$, atunci (x_n) este un ȘIR CAUCHY.

T: Orice șir Cauchy este mărginit.

Criteriul general de convergență a lui Cauchy

Un șir de numere reale (x_n) este convergent d.d. (x_n) este șir Cauchy.

SERII DE NUMERE REALE

Def: O serie $\sum_n x_n$ se numește CONVERGENTĂ dacă șirul sumelor parțiale (S_n) este convergent, adică dacă $\exists$ un număr real $S \in \mathbb{R}$ astfel încât $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = S}$.

! Dacă o serie nu e convergentă, atunci ea e DIVERGENTĂ și $S_n \to \infty$.

! $S =$ suma seriei $\sum_{n\geq n_0} x_n$

$S \overset{not}{=} \sum_{n\geq n_0} x_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{CONVERGENTĂ}, \forall \boxed{p>1} \\ \text{DIVERGENTĂ}, \forall \boxed{p\leq 1} \end{cases}$$ SERIA ARMONICĂ GENERALIZATĂ

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \underbrace{\frac{1}{1-r}}_{\text{suma}} = \text{CONVERGENTĂ d.d. } r\in(-1,1)$$ SERIA GEOMETRICĂ

! Dacă seria $\sum_n x_n$ este $\boxed{\text{convergentă}}$, atunci $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$.

CRITERIUL DE DIVERGENȚĂ

Dacă șirul (x_n) are limita nenulă sau nu are limită, ceea ce vom nota prin $x_n \not\to 0$, atunci seria $\sum_n x_n$ este DIV.

CRITERIUL DE CONVERGENȚĂ AL LUI CAUCHY

O serie $\sum_{n\geq n_0} x_n$ este CONVERGENTĂ d.d. $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ un nr. natural $N = N(\varepsilon) \geq n_0$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$, $\forall$ pent

Def: O serie $\sum_n x_n$ se numește ABSOLUT CONVERGENTĂ dacă seria $\boxed{\sum_n |x_n|}$ este CONVERGENTĂ.

! Orice serie absolut convergentă este convergentă.

CRITERIUL COMPARAȚIEI

Fie (x_n) și (y_n) două șiruri de numere reale nenegative cu proprietatea că $\exists\ c>0$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \le c\, y_n, \forall\ n \ge n_0$.

a) Dacă $\sum_n y_n$ este CONVERGENTĂ, atunci $\sum_n x_n$ este CONVERGENTĂ.

b) Dacă $\sum_n x_n$ este DIVERGENTĂ, atunci $\sum_n y_n$ este DIVERGENTĂ.

CRITERIUL COMPARAȚIEI LA LIMITĂ

Fie (x_n) și (y_n) două șiruri de numere reale pozitive cu proprietatea că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell \in [0,\infty]$.

a) Dacă $\boxed{\ell \in (0,\infty)}$, atunci $\sum_n x_n$ este CONVERGENTĂ d.d. $\sum_n y_n$ este CONVERGENTĂ, adică $\boxed{\sum_n x_n \sim \sum_n y_n}$.

b) Dacă $\boxed{\ell=0}$ și $\sum_n y_n$ este CONVERGENTĂ $\Rightarrow \boxed{\sum_n x_n = \text{CONV}}$

c) Dacă $\boxed{\ell=\infty}$ și $\sum_n y_n$ este DIVERGENTĂ $\Rightarrow \boxed{\sum_n x_n = \text{DIV}}$.

CRITERIUL RAPORTULUI (D'ALEMBERT)

Fie (x_n) un șir de nr. reale pozitive a.î. $\exists \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell}$ $\ell \in [0,\infty]$.

a) Dacă $\boxed{\ell<1}$, atunci $\boxed{\sum_n x_n = \text{CONVERGENT}}$

b) Dacă $\boxed{\ell>1}$ atunci $\boxed{\sum_n x_n = \text{DIVERGENT}}$

c) Dacă $\boxed{\ell=1}$ atunci criteriul raportului nu decide natura seriei.

CRITERIUL RAABE-DUHAMEL

Fie (x_n) un șir de numere reale pozitive a.î. $\exists$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \ell} \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) Dacă $\boxed{\ell<1}$, atunci $\boxed{\sum x_n = \text{DIVERGENTĂ}}$

b) Dacă $\boxed{\ell>1}$, atunci $\boxed{\sum x_n = \text{CONVERGENTĂ}}$

c) Dacă $\boxed{\ell=1}$ ~~att~~ atunci nu putem decide nat. Σ.

CRITERIUL RĂDĂCINII

Fie (x_n) un șir de numere reale nenegative a.î. $\exists$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l} \in [0,\infty]$.

a) Dacă $\boxed{l<1}$, atunci $\boxed{\sum x_n = \text{CONVERGENTĂ}}$

b) Dacă $\boxed{l>1}$, atunci $\boxed{\sum x_n = \text{DIVERGENTĂ}}$

CRITERIUL DE CONDENSARE A LUI CAUCHY

Fie (x_n) un șir descrescător de numere reale nenegative. Atunci, seriile $\sum x_n$ și $\sum 2^n \cdot x_{2^n}$ au aceeași natură.

$\boxed{\sum x_n \sim \sum 2^n \cdot x_{2^n}}$ $\underset{=}{not}$ y_n

CRITERIUL RAPORTULUI (șir cu termeni oarecare)

Fie (x_n) un șir de numere nenule reale a.î. $\exists$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = l} \in [0,\infty]$.

a) Dacă $\boxed{l<1}$ atunci $\boxed{\sum x_n = \text{ABSOLUT CONVERGENTĂ}}$

b) Dacă $\boxed{l>1}$ atunci $\boxed{\sum x_n = \text{DIVERGENTĂ}}$.

CRITERIUL RĂDĂCINII (șir cu termeni oarecare)

Fie (x_n) un șir de numere reale cu prop. că $\exists$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = l} \in [0,\infty]$.

a) Dacă $\boxed{l<1}$, atunci $\boxed{\sum x_n = \text{ABSOLUT CONVERGENTĂ}}$

b) Dacă $\boxed{l>1}$ atunci $\boxed{\sum x_n = \text{DIVERGENTĂ}}$.

CRITERIUL LUI LEIBNIZ

Dacă $\boxed{(a_n)}$ este un şir de numere reale pozitive $\boxed{\searrow^{n\to\infty} 0}$, atunci

$\boxed{\sum_n (-1)^n \cdot a_n = \text{CONVERGENTĂ}}$.

CRITERIUL LUI DIRICHLET

Fie $\sum_n a_n \cdot u_n$. Dacă:

a) $\boxed{a_n \searrow^{n\to\infty} 0}$

b) (u_n) este un şir de numere reale cu prop. că şirul sumelor parţiale asociat lui $\sum u_n$ este mărginit

$\Leftrightarrow \boxed{|u_0 + u_1 + \dots + u_n| \leq M}$

$\overset{a,b}{\Longrightarrow} \boxed{\sum_n a_n \cdot u_n = \text{CONVERGENTĂ}}$

CRITERIUL LUI ABEL

Fie $\sum_n a_n \cdot u_n$. Dacă:

a) $\boxed{(a_n) \text{ este MĂRGINIT şi MONOTON}} \Leftrightarrow \boxed{(a_n) - \text{CONVERGENT}}$

b) (u_n) este un şir cu prop. că $\boxed{\sum_n u_n = \text{CONVERGENTĂ}}$

$\overset{a,b}{\Longrightarrow} \boxed{\sum_n a_n \cdot u_n = \text{CONVERGENTĂ}}$

APROXIMARE 1 În celelalte cazuri

Fie (x_n) un şir de numere reale pozitive. Dacă $\exists\ c \in (0,1)$ a.î. $\frac{x_{n+1}}{x_n} \le c$, $n \in \mathbb{N}$, atunci $\sum x_n =$ CONVERGENTĂ, iar suma sa parţială se poate aproxima: $S \simeq S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$, eroarea $r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$ satisfăcând $r_n \le \frac{x_{n+1}}{1-c}$, $n \in \mathbb{N}$

APROXIMARE 2 Dacă este cu $\sqrt[n]{}$

Fie (x_n) un şir de numere reale. Dacă $\exists\ c \in (0,1)$ a.î. $\sqrt[n]{|x_n|} \le c$, $n \in \mathbb{N}$, atunci $\sum x_n =$ CONVERGENTĂ, $S \simeq S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$ şi $|R_n| \le \frac{c^{n+1}}{1-c}$, $n \in \mathbb{N}$.

APROXIMARE 3 Dacă am $(-1)^n$

Fie $\sum (-1)^n \cdot a_n$, unde $a_n \searrow_{n\to\infty} 0$. $S \simeq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k = a_0 - a_1 + \dots + (-1)^n a_n$, iar ~~sa~~ $|R_n| \le a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

CAPITOLUL 2

ȘIRURI DE FUNCȚII

$f: D \to \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)} \Rightarrow \boxed{f_n \xrightarrow[D]{s} f}$

Def: $f_n \xrightarrow[D]{s} f$ d.d. $\forall \varepsilon>0, \forall x\in D, \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ a.î.
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n > n_0$.

Def: $f_n \xrightarrow[D]{u} f$ d.d. $\forall \varepsilon>0, \forall x\in D, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î.
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n > n_0$.

! Dacă $\boxed{f_n \xrightarrow[D]{u} f \to f_n \xrightarrow[D]{s} f}$.

! Diferența dintre $f_n \xrightarrow{s} f$ și $f_n \xrightarrow{u} f$ este aceea că numărul n_0 dat de def. conv. uniformă depinde DOAR de ε, nu și de x, ceea ce e permis la conv. simplă.

Prop.: Dacă $\boxed{f_n \xrightarrow[D]{s} f}$, atunci $\boxed{f_n \xrightarrow[D]{u} f \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset D}$, $\boxed{\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0}$

CRITERIUL DE CONVERGENȚĂ NEUNIFORMĂ

Dacă $\boxed{f_n \xrightarrow[D]{s} f}$, atunci $\boxed{f_n \xrightarrow[D]{u} f}$ d.d. $\nexists$ un șir $\boxed{(x_n) \subset D}$ a.î. $\boxed{\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0}$.

CRITERIUL MAJORĂRII

Fie (f_n) un șir de funcții pe D. Dacă $\boxed{\exists\ f: D \to \mathbb{R}}$ și un șir de numere reale nenegative (a_n), cu $\boxed{a_n \to 0}$ a.î. are loc $\boxed{|f_n(x) - f(x)| \le a_n}$, $\forall\ n \ge n_0$, $\forall\ x \in D$, atunci $\boxed{f_n \xrightarrow[D]{u} f}$

$\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in D$

TRANSFER DE CONTINUITATE

Dacă $\boxed{f_n \xrightarrow{u} f}$ pe D și f_n = continuă pe D $\forall n$, atunci $\boxed{f = \text{continuă}}$ pe D.

TRANSFER DE DERIVABILITATE

Dacă $\boxed{f_n \xrightarrow{u} f}$ pe intervalul J și $\boxed{\exists\ g: J \to \mathbb{R}}$ a.î.

a) f_n - derivabilă pe J $\forall n$

b) $(f_n)' \xrightarrow{u} g$ pe J

$\Rightarrow$ atunci f - derivabilă pe J, $f' = g \Leftrightarrow$ $\boxed{\left(\lim\limits_{n \to \infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n \to \infty} (f_n)'}$

TRANSFER DE INTEGRABILITATE

Dacă $\boxed{f_n \xrightarrow{u} f}$ pe $[a,b]$ și f_n - integrabilă pe $[a,b]$, atunci f - integrabilă pe $[a,b]$

$$\boxed{\int_a^b \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b f_n(x)\, dx\right)}$$

SERII DE FUNCȚII

Def: $\sum f_n(x)$ este SIMPLU CONVERGENTĂ dacă $S_n(x)$ este un șir de funcții simplu convergent pe D.

Def: $\sum f_n(x)$ este UNIFORM CONVERGENTĂ d.d. $S_n(x)$ este un șir de funcții uniform convergent pe D.

$\boxed{S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)}$ → suma seriei de funcții

!! Dacă $\sum f_n(x)$ este uniform convergentă pe D, atunci $\boxed{f_n \xrightarrow[D]{u} 0}$

!! Dacă $\underbrace{f_n \not\xrightarrow[D]{u} 0}$, atunci $\sum f_n(x)$ NU e uniform convergentă

$\Leftrightarrow \sup_{x\in D} |f_n(x)| \not\to 0$

CRITERIUL LUI CAUCHY

Fie (f_n) pe D. Seria $\boxed{\sum f_n = U.C.}$ d.d. $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $\boxed{\underbrace{|f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon}}$, $\forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D$

$\boxed{|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon}$

CRITERIUL LUI WEIERSTRASS

Fie (f_n) un șir de funcții pe D și (a_n) un șir numeric.

Dacă:

a) $\boxed{|f_n(x)| \leq a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D$

b) $\boxed{\sum a_n = \text{CONVERGENTĂ}}$

$\Rightarrow$ atunci $\boxed{\sum f_n(x) = U.C}$.

TRANSFER DE TRECERE LA LIMITĂ

Fie (f_n) un şir de funcţii pe D şi $x_0 \in D'$ = mulţimea punctelor de acumulare

Dacă:

a) $\boxed{\exists \lim\limits_{x \to x_0} \overset{\text{şir numeric}}{f_n(x)}} \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0$

b) $\boxed{\sum f_n(x) = U.C}$ pe D şi are suma f

$\Rightarrow$ atunci: $\sum \left(\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) \right) = CONV.$ şi are suma $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

adică $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \left(\sum f_n(x) \right) = \sum \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right)}$.

TRANSFER DE DERIVABILITATE

Fie (f_n) un şir de funcţii derivabile pe intervalul J. Dacă:

a) $\boxed{\sum f_n(x) = U.C}$ pe J şi are suma $f(x)$

b) $\boxed{\sum (f_n(x))' = U.C}$ pe J şi are suma $g(x)$

$\Rightarrow$ atunci funcţia f este derivabilă pe J

şi are loc $f' = g$, adică $\boxed{\left(\sum f_n(x) \right)' = \sum (f_n(x))'}$.

TRANSFER DE INTEGRABILITATE

Fie $(f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii integrabile pe $[a,b]$.

Dacă:

a) $\boxed{\sum f_n(x) = U.C}$ pe $[a,b]$ şi are suma $f(x)$ $\Rightarrow$ atunci

f - integrabilă pe $[a,b]$ şi $\boxed{\int_a^b \left(\sum f_n(x) \right) dx = \sum \left(\int_a^b f_n(x)\, dx \right)}$

SERII DE PUTERI

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ - nr. real fixat. O serie de funcții de forma

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots}$$

$x \in \mathbb{R}$, unde $(a_n)_{n\geq 0}$ este un șir de numere reale, se numește SERIE DE PUTERI (centrată în x_0), iar $\boxed{a_n}$ se numește COEFICIENTUL DE RANG N AL SERIEI, $n \in \mathbb{N}$.

! Coeficientul de rang n al unei serii de puteri se poate defini pentru $\forall n \in \mathbb{N}$, chiar dacă nu toți coeficienții seriei apar în mod explicit.

! a_0 = COEFICIENTUL TERMENULUI LIBER, fără x, când $n=1$.

Def: C = mulțimea de CONVERGENȚĂ a seriei.

! Orice serie de puteri (centrată în x_0) este convergentă în x_0, adică $x_0 \in C$.

Dacă $\boxed{S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n}$ este suma seriei, atunci $\boxed{S(x_0) = a_0}$.

SERII DE TIP GEOMETRIC

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1)}$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot x^n = \frac{1}{1+x}, \quad x \in (-1,1)}$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-1,1)}$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1,1)}$$

Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, atunci $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, și

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}}$$ nu depinde de x_0, $R \in [0,\infty]$.

Propoziție:

Raza de convergență a seriei de puteri

$\boxed{\sum_{n\geq n_0} c_n (x-x_0)^{\alpha n+\beta}}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 2$, $\beta \in \{0,1,\dots,\alpha-1\}$ este

$R \in [0,\infty]$, $\boxed{R^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|}$, dacă limita există!

TEOREMA I A LUI ABEL

Fie $\sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n$ - serie de puteri și $R \in [0,\infty]$ raza.

i) Dacă $\boxed{R=0}$, atunci $\boxed{C=\{x_0\}}$ d.d. seria e CONV în x_0.

ii) Dacă $\boxed{R=\infty}$, atunci $\boxed{C=\mathbb{R}}$ d.d. seria e CONV. în orice $x \in \mathbb{R}$.

iii) Dacă $\boxed{R \in (0,\infty)}$ atunci:

- seria este $\begin{cases} \text{ABS CONV}, \forall x \in (x_0-R, x_0+R) \\ \text{DIV}, \forall x \in (-\infty, x_0-R) \cup (x_0+R, \infty) \end{cases}$

- seria este UNIFORM CONV. pe orice interval compact $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta] \subset (x_0-R, x_0+R)$.

! Dacă $x = x_0-R$ sau $x = x_0+R$, atunci teorema I a lui Abel nu oferă informații despre CONV seriei.

! CONV în $x = x_0 \pm R$ se face folosind seriile numerice.

TEOREMA A II-A A LUI ABEL

Fie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ – serie de puteri, cu $R\in(0,\infty)$ raza.
Dacă $\boxed{\sum \text{ este CONV în } x_0-R, x_0+R}$, atunci suma $\sum$
$\boxed{S(x)=\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n}$, $x\in C$, este $\boxed{\text{CONTINUĂ în } x_0\pm R}$,
adică $\boxed{S(x_0-R)=S(x_0-R+0)=\lim_{\substack{x\to x_0-R\\ x>x_0-R}} S(x)}$,

$$\boxed{S(x_0+R)=S(x_0+R-0)=\lim_{\substack{x\to x_0+R\\ x<x_0+R}} S(x)}.$$

! Teorema a II-a a lui Abel permite determinarea sumei unei serii de puteri în $x_0\pm R$, dacă $\sum$ este CONV în aceste puncte.

! O serie de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$, având raza de convergență $R\in(0,\infty)$, poate fi derivată / integrată termen cu termen, în general, doar pe intervalul deschis (x_0-R, x_0+R).

SERIA BINOMIALĂ

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n,\ x\in(-1,1)}$$

SERII TAYLOR

- Fie $f: J \to \mathbb{R}$, f - derivabilă de n ori în x_0

$$\boxed{T_n f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ se numește POLINOMUL TAYLOR DE ORDINUL N asociat funcției f în punctul x_0, iar funcția

$\boxed{R_n f(x) = f(x) - T_n f(x),\ x \in J}$ definită pe J, ca și f,

se numește RESTUL TAYLOR DE ORDINUL N asociat funcției f în punctul x_0.

- $\boxed{f(x) = T_n f(x) + R_n f(x),\ x \in J}$ FORMULA LUI TAYLOR

unde pt. $R_n f(x)$ este dată o formulă de calcul.

- $\lim\limits_{x \to x_0} R_n f(x) = 0$

- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n f(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

$\boxed{R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$ se numește

RESTUL LUI LAGRANGE, unde $c = \cancel{x_0}\ c(x_0, x, n)$ poate fi luat de forma $\boxed{c = (1-t_n)x_0 + t_n x}$, $t_n \in (0,1)$

$t_n \cdot x = 0$

CAZ PARTICULAR

$$x_0 = 0 \to f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{x}{1!}\cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!}\cdot f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}\cdot f^{(n)}(0)} +$$

$$+ \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(0)}_{\to 0}$$

FORMULA LUI MAC-LAURIN

Fie $f: I \to \mathbb{R}$, f - indefinit derivabilă pe I, $x_0 \in I$.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n + \dots$$

se numește SERIA TAYLOR centrată în x_0 asociată funcției f, fiind o serie de puteri.

CAZ PARTICULAR

$$\boxed{x_0 = 0} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

se numește SERIA MAC-LAURIN asociată funcției f.

$$\boxed{S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n}, \ x \in C$$ SUMA SERIEI TAYLOR

TEOREMĂ

Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este DEZVOLTABILĂ în serie Taylor în punctul $x_0 \in I$ pe $C \subset I$ d.d. $R_n f(x)$ CONV. SIMPLU la 0 pe C, adică

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} R_n f(x) = 0, \forall x \in D. \\ f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n \end{cases}$$

$$f(x) = e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$g(x) = \cos x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$h(x) = \sin x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$k(x) = \ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \; ; \; (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n$$

SERII FOURIER TRIGONOMETRICE

Fie $\omega>0$. O serie de funcții de forma

$$\boxed{\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left[a_n\cdot\cos(\omega n x)+b_n\cdot\sin(\omega n x)\right]},\ x\in\mathbb{R},$$

unde $a_n\in\mathbb{R}$, pentru $n\in\mathbb{N}$ și $b_n\in\mathbb{R}$, pt. $n\in\mathbb{N}^*$, se numește SERIE TRIGONOMETRICĂ, iar termenul general de rang $n\in\mathbb{N}^*$ al șirului sumelor parțiale asociat acestei serii,

$$\boxed{S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(\omega k x)+b_k\sin(\omega k x)\right]},$$

$x\in\mathbb{R}$ se numește POLINOM TRIGONOMETRIC de ordin n.

TEOREMA LUI DIRICHLET

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f - periodică cu perioada T. Dacă:

i) f - mărginită pe $[a, a+T]$

ii) f - continuă pe $[a, a+T]$

SAU

f - admite un nr. finit de puncte de discont. de speța I pe $[a, a+T]$

iii) f - monotonă pe porțiuni pe $[a, a+T]$,

atunci se poate construi SERIA FOURIER TRIGO.

$$\boxed{S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left(a_n\cdot\cos(\omega n x)+b_n\cdot\sin(\omega n x)\right)},$$

$x\in[a, a+T]$, unde $\boxed{\omega=\frac{2\pi}{T}}$ și

$$\boxed{a_n=\frac{2}{T}\cdot\int_a^{a+T}f(x)\cdot\cos(\omega n x)\,dx},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\boxed{b_n=\frac{2}{T}\cdot\int_a^{a+T}f(x)\cdot\sin(\omega n x)\,dx},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

În plus, are loc $S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, a+T), \ x\text{- pct. de cont.} \\ \frac{1}{2}[f(a)+f(a+T)], & x \in \{a, a+T\} \end{cases}$

a_n, b_n - COEFICIENȚII FOURIER ai funcției f

ω - pulsație

CAZURI PARTICULARE

1. Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\boxed{f\text{- PARĂ pe } \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]}$, atunci:

- $\boxed{b_n = 0}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
- $\boxed{a_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos(\omega n x)\, dx}$, $n \in \mathbb{N}$
- $\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \cos(\omega n x)}$, $x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

SERIE FOURIER TRIGONOMETRICĂ DE COSINUSURI

2. Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\boxed{f\text{- IMPARĂ pe } \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)}$, atunci:

- $\boxed{a_n = 0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\boxed{b_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin(\omega n x)\, dx}$, $n \in \mathbb{N}^*$
- $\boxed{S(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \cdot \sin(\omega n x)}$, $x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

SERIE FOURIER TRIGONOMETRICĂ DE SINUSURI

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(x)\, dx}$$

PRELUNGITA prin PARITATE a funcției $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ pe intervalul $[-a,a]$ este:

$$\boxed{\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,a] \\ f(-x), & x\in[-a,0) \end{cases}}$$

$\to$ Dacă $\begin{cases} \boxed{x\in[0,a]} \Rightarrow \boxed{\tilde{f}(x)=f(x)},\ \forall x\in[0,a] \\ \boxed{-x\in(0,a]} \Rightarrow \boxed{\tilde{f}(x)=f(-x)},\ \forall x\in[-a,0). \end{cases}$

PRELUNGITA prin IMPARITATE a funcției $f:[0,a)\to\mathbb{R}$ pe intervalul $(-a,a)$ este:

$$\boxed{\hat{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,a) \\ -f(-x), & x\in(-a,0) \end{cases}}$$

$\to$ Dacă $\begin{cases} \boxed{x\in[0,a)} \to \boxed{\hat{f}(x)=f(x)},\ \forall x\in[0,a) \\ \boxed{x\in(-a,0)} \to \boxed{\hat{f}(x)=-f(-x)},\ \forall x\in(-a,0). \end{cases}$

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2},\ x\in(0,2\pi)}$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{-\pi^2}{12}}$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$$