MAC 23.02.2024

(curs 2 - S1)

2.2. Iterația de punct fix $\rightarrow g(r) = r$

Def 1: Numărul real r este un punct fix al funcției g dacă $g(r) = r$.

2.2.1. Punctele fixe ale unei funcții

Algoritmul 1 (Iterația de punct fix)

x_0= valoarea inițială
$x_{i+1} = g(x_i)$ **for** $i = 0, 1, 2, \ldots$.

de fapt, Teorema 1 implică

$$g(r) = g\left(\lim_{i\to\infty} x_i\right) = \lim_{i\to\infty} g(x_i) = \lim_{i\to\infty} x_{i+1} = r. \tag{1}$$

Teorema 1 (Limite continue)

Fie f o funcție continuă într-o vecinătate a lui x_0, și presupunem că $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0).$$

Cu alte cuvinte, limitele pot fi introduse în interiorul funcțiilor continue.

```
function xc=fpi(g,x0,k)
    x(1)=x0;
for i=1:k
    x(i+1)=g(x(i));
end
xc=x(k+1);
```

2.2.2. Geometria iterației de punct fix

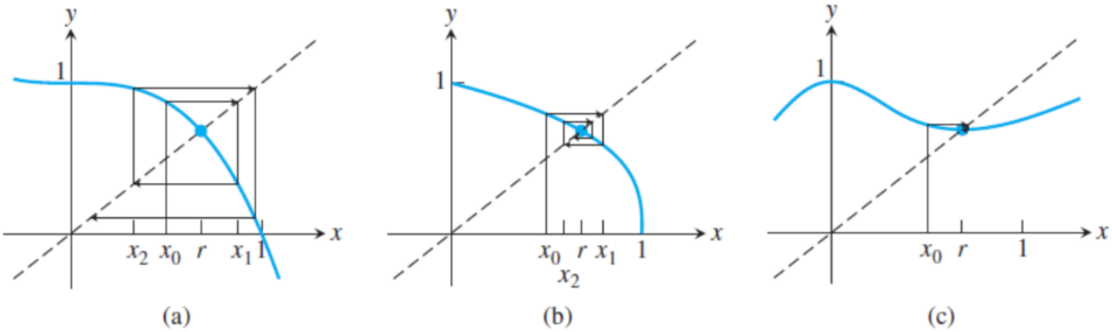

Figura 1: **Geometria IPF.** Punctul fix este intersecţia lui $g(x)$ cu prima bisectoare. Trei exemple pentru $g(x)$ sunt prezentate împreună cu primii paşi ai metodei IPF. (a) $g(x) = 1 - x^3$ (b) $g(x) = (1 - x)^{1/3}$ (c) $g(x) = (1 + 2x^3)/(1 + 3x^2)$

$r = g(x) \cap x$

- Figura 1(c) arată un exemplu de convergenţă foarte rapidă
- ajută această imagine în cadrul speculaţiei?
- dacă aţi ghicit că este ceva care are de a face cu panta lui $g(x)$ în apropierea punctului fix, aveţi dreptate

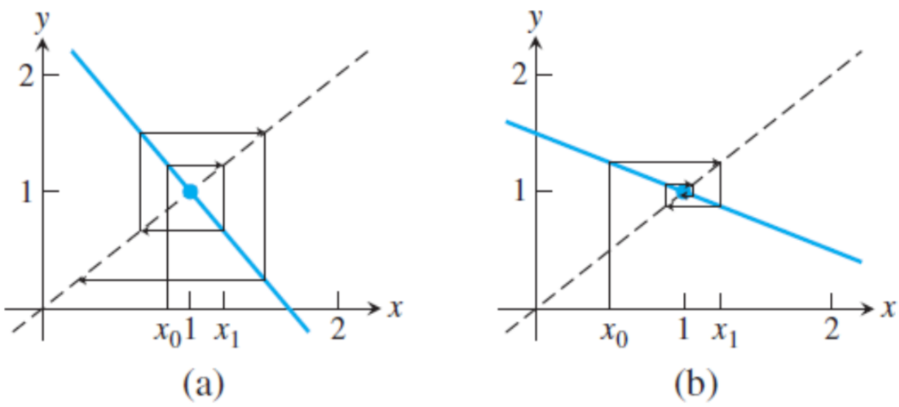

Figura 2: **Diagrama cobweb pentru funcţii liniare.** (a) Dacă funcţia liniară are panta mai mare decât 1 în valoare absolută, valori iniţiale din apropierea punctului se depărtează de punctul fix pe măsură ce IPF progresează, ceea ce duce la eşecul metodei. (b) Pentru o pantă mai mică decât 1 în valoare absolută, are loc fenomenul invers, şi punctul fix este găsit.

2.2.3. Convergența liniară a iterației de punct fix

a) $g_1(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ $\qquad |g_1'(x)| = \left|-\frac{3}{2}\right| > 1$

$g_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ $\qquad |g_2'(x)| = \left|-\frac{1}{2}\right| < 1$

$r = 1$

$\Rightarrow$ valoarea lui $|g'(r)|$ face diferența crucială între conv. și div. (perspectivă geometrică)

D.p.d.v. al ecuațiilor, este util să scriem $g_1(x)$ și $g_2(x)$ în funcție de $x - r$:

$$g_1(x) = -\frac{3}{2}(x-1)+1$$
$$g_1(x) - 1 = -\frac{3}{2}(x-1)$$
$$x_{i+1} - 1 = -\frac{3}{2}(x_i - 1)$$
$e_i = |r - x_i|$ - eroare

$\Rightarrow e_{i+1} = \frac{3e_i}{2}$

$\Rightarrow$ creștere a erorii

$\Rightarrow$ divergență

Analog pt $g_2(x)$ $e_{i+1} = \frac{e_i}{2}$

$\Rightarrow$ descreștere a erorii

$\Rightarrow$ convergență

Definiția 2

Fie e_i eroarea la pasul i al unei metode iterative. Dacă

$$\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = S < 1,$$

se spune că metoda este **liniar convergentă** cu rata S.

Teorema 2

Să presupunem că g este o funcţie derivabilă cu derivata continuă, că $g(r) = r$, şi că $S = |g'(r)| < 1$. Atunci iteraţia de punct fix converge liniar cu rata S la punctul fix r pentru o valoare iniţială suficient de apropiată de r.

Teorema 3 (Teorema de medie)

Fie f o funcţie derivabilă cu derivata continuă pe intervalul $[a, b]$. Atunci există un număr c între a şi b astfel încât $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$.

$$x_{i+1} - r = g'(c_i)(x_i - r) \qquad c_i \in (x_i, r)$$

$x_{i+1} = g(x_i)$ $\quad r = g(r)$

$e_i = |x_i - r|$

$\Rightarrow e_{i+1} = |g'(c_i)|\, e_i$

dacă $S = |g'(r)|$ este mai mic decât 1, atunci din continuitatea lui g', există o vecinătate mică în jurul lui r pentru care $|g'(x)| < (S+1)/2$, limită puţin mai mare decât S, dar totuşi mai mică decât 1

dacă se întâmplă ca x_i să se afle în această vecinătate, atunci şi c_i se află în această vecinătate (fiind situat între x_i şi r), şi astfel

$$e_{i+1} \leq \frac{S+1}{2} e_i.$$

prin urmare, eroarea descreşte cu un factor de $(S+1)/2$ sau mai bun în pasul curent şi în fiecare pas viitor

$\lim_{i \to \infty} x_i = r$

$\Rightarrow \lim_{i \to \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = \lim_{i \to \infty} |g'(c_i)| = |g'(r)| = S$

$\overset{T2}{\Rightarrow} e_{i+1} \approx S \cdot e_i, \quad S = |g'(r)|$

Definiţia 3

O metodă iterativă se numeşte **local convergentă** la r dacă metoda converge la r pentru valori iniţiale suficient de apropiate de r.

cu alte cuvinte, metoda este local convergentă la rădăcina r, dacă există o vecinătate $(r-\epsilon, r+\epsilon)$, unde $\epsilon > 0$, astfel încât convergenţa la r rezultă din toate valorile iniţiale din vecinătate

concluzia Teoremei 2 este că iteraţia de punct fix este local convergentă dacă $|g'(r)| < 1$

Exemplul 3

- găsiţi punctele fixe ale funcţiei $g(x) = 2.8x - x^2$
- funcţia $g(x) = 2.8x - x^2$ are două puncte fixe 0 şi 1.8, care pot fi determinate rezolvând analitic ecuaţia $g(x) = x$, sau observând unde se intersectează graficele funcţiilor $y = g(x)$ şi $y = x$
- Figura 3 prezintă o diagramă cobweb a IPF cu valoarea iniţială $x_0 = 0.1$

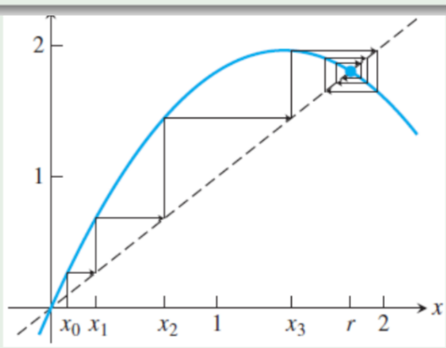

Figura 3: **Diagrama cobweb pentru iteraţia de punct fix.** Exemplul 3 are două puncte fixe, 0 şi 1.8. O iteraţie cu valoarea iniţială 0.1 este prezentată. Iteraţia de punct fix va converge doar la 1.8.

pentru acest exemplu, iteraţiile

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0.1000 \\
x_1 &= 0.2700 \\
x_2 &= 0.6831 \\
x_3 &= 1.4461 \\
x_4 &= 1.9579,
\end{aligned}
$$

pot fi citite ca intersecţii de-a lungul primei bisectoare

deşi punctul iniţial $x_0 = 0.1$ este în apropierea punctului fix 0, IPF se mişcă spre celălalt punct fix $x = 1.8$ şi converge acolo

diferenţa dintre cele două puncte fixe este că panta lui g în $x = 1.8$, dată prin $g'(1.8) = -0.8$, este mai mică decât 1 în valoare absolută

pe de altă parte, panta lui g în celălalt punct fix $x = 0$, cel care respinge punctele, este $g'(0) = 2.8$, care este mai mare decât 1 în valoare absolută

2.2.4. Criterii de oprire

- spre deosebire de metoda bisecţiei, nr. de paşi nu poate fi precis de dinainte

→ e nevoie de un criteriu de oprire

$$|x_{i+1} - x_i| < TOL$$

sau

$$\frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|} < TOL$$

Criteriu hibrid

$$\frac{|x_{i+1} - x_i|}{\max(|x_{i+1}|, \theta)} < TOL \quad , \theta > 0$$

- în plus, un cod bun pentru IPF setează o limită a numărului maxim de paşi în cazul în care convergenţa eşuează
- problema criteriului de oprire este una importantă
- metoda bisecţiei are o convergenţă liniară garantată
- iteraţia de punct fix este doar local convergentă, iar atunci când converge, este liniar convergentă
- ambele metode necesită o evaluare de funcţie la fiecare pas
- metoda bisecţiei reduce incertitudinea cu un factor de $1/2$ la fiecare pas, prin comparaţie cu aproximativ $S = |g'(r)|$ pentru IPF
- prin urmare, iteraţia de punct fix poate fi mai rapidă sau mai lentă decât metoda bisecţiei, depinzând dacă S este mai mic sau mai mare decât $1/2$
- vom studia metoda lui Newton, o versiune rafinată a IPF, unde S este proiectat să fie egal cu zero

2.3. Metoda lui Newton

→ denumită adesea Newton-Raphson

→ converge, de obicei, mult mai repede decât metodele liniar convergente

- perspectiva geometrică a metodei lui Newton este prezentată în Figura 4

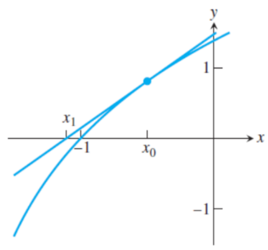

Figura 4: **Un pas pentru metoda lui Newton.** Pornind de la x_0, dreapta tangentă la curba $y = f(x)$ este trasată. Punctul de intersecţie cu axa x este x_1, următoarea aproximare a rădăcinii.

→ pentru a găsi o rădăcină $f(x) = 0$, avem dată o valoare inițială x_0 și este trasată dreapta tangentă la f

→ dreapta va urmări funcția până jos la axa x spre rădăcină

→ $y \cap O_x$ → doar o aproximare; dacă f - curbată ⇒ nu e exactă

→ y are panta dată de $f'(x_0)$ ⇒ $A(x_0, f(x_0)) \in y$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Înlocuim $y = 0$ ⇒ $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

unde x = aproximare a rădăcinii

Algoritmul 2 (Metoda lui Newton)

x_0= valoarea iniţială

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ **for** $i = 0, 1, 2, \ldots$

newton.m

```
function xc=newton(f,df,x0,k)

x(1)=x0;

for i=1:k

    x(i+1)=x(i)-f(x(i))/df(x(i));

end

xc=x(k+1);
```

Exemplul 4

Găsiți formula pentru metoda lui Newton în cazul ecuației

$$x^3 + x - 1 = 0$$

Rezolvare

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 + x_i - 1}{3x_i^2 + 1} = \frac{2x_i^3 + 1}{3x_i^2 + 1}$$

$x_0 = -0{,}7$ și începem să iterăm $\Rightarrow x_1 \approx 0{,}1271$

$x_2 \approx 0{,}9577$

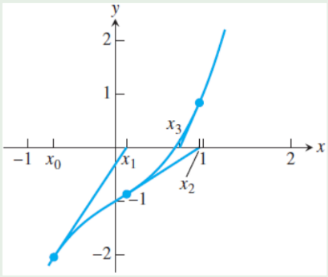

Figura 5: **Trei paşi din metoda lui Newton.** Ilustrarea Exemplului 4. Pornind cu $x_0 = -0.7$, iteraţiile din metoda lui Newton sunt reprezentate grafic împreună cu dreptele tangente. Se observă că metoda converge către rădăcină.

aceşti paşi sunt prezentaţi geometric în Figura 5

paşii următori sunt daţi în tabelul de mai jos:

i	x_i	$e_i = \lvert x_i - r\rvert$	e_i/e_{i-1}^2
0	−0.70000000	1.38232780	
1	0.12712551	0.55520230	0.2906
2	0.95767812	0.27535032	0.8933
3	0.73482779	0.05249999	0.6924
4	0.68459177	0.00226397	0.8214
5	0.68233217	0.00000437	0.8527
6	0.68232780	0.00000000	0.8541
7	0.68232780	0.00000000	

după doar şase paşi, rădăcina este cunoscută cu opt zecimale exacte

observăm în tabel că în momentul în care convergenţa începe să apară, numărul de zecimale exacte din x_i se dublează aproximativ la fiecare iteraţie

aceasta este o caracteristică a metodelor „pătratic convergente”, după cum vom vedea în cele ce urmează

2.3.1. Convergența pătratică a metodei lui Newton

- convergenţa din Exemplul 4 este mai rapidă calitativ decât convergenţa liniară pe care am văzut-o la metoda bisecţiei şi la iteraţia de punct fix
- o nouă definiţie este necesară

Definiţia 4

Fie e_i eroarea după pasul i al unei metode iterative. Iteraţia este **pătratic convergentă** dacă

$$M = \lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} < \infty.$$

Teorema 4 (Teorema lui Taylor cu rest)

Fie x şi x_0 numere reale, şi fie f o funcţie de $k+1$ ori derivabilă cu derivate continue pe intervalul dintre x şi x_0. Atunci există un număr c între x şi x_0 astfel încât

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}. \end{aligned}$$

Teorema 5

Fie f de două ori derivabilă cu derivata continuă şi $f(r)=0$. Dacă $f'(r)\neq 0$, atunci metoda lui Newton este local şi pătratic convergentă la r. Eroarea e_i la pasul i satisface

$$\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = M, \text{ unde } M = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|.$$

- pentru a demonstra local convergenţa, observăm că metoda lui Newton este o formă particulară a iteraţiei de punct fix, unde
$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$
cu derivata
$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$
- deoarece $g'(r)=0$, metoda lui Newton este local convergentă conform Teoremei 2
- pentru a demonstra convergenţa pătratică, deducem metoda lui Newton într-un alt mod, fiind atenţi de data aceasta la eroarea de la fiecare pas
- prin eroare, înţelegem diferenţa dintre valoarea corectă a rădăcinii şi cea mai bună aproximare curentă
- formula lui Taylor din Teorema 4 ne dă diferenţa dintre valorile unei funcţii într-un anumit punct şi un alt punct aflat în apropierea acestuia

- pentru cele două puncte, vom folosi rădăcina r şi aproximarea curentă x_i după i paşi, şi ne vom opri şi vom lua restul după doi termeni:
$$f(r) = f(x_i) + (r-x_i)f'(x_i) + \frac{(r-x_i)^2}{2}f''(c_i).$$
- aici, c_i este între x_i şi r
- deoarece r este rădăcina, avem că
$$\begin{aligned} 0 &= f(x_i) + (r-x_i)f'(x_i) + \frac{(r-x_i)^2}{2}f''(c_i) \\ -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} &= r - x_i + \frac{(r-x_i)^2}{2}\frac{f''(c_i)}{f'(x_i)}, \end{aligned}$$
presupunând că $f'(x_i)\neq 0$

- rearanjând, putem compara următoarea iteraţie Newton cu rădăcina:

$$\begin{aligned} x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - r &= \frac{(r-x_i)^2}{2}\frac{f''(c_i)}{f'(x_i)} \\ x_{i+1} - r &= e_i^2 \frac{f''(c_i)}{2f'(x_i)} \\ e_{i+1} &= e_i^2 \left| \frac{f''(c_i)}{2f'(x_i)} \right| . \end{aligned} \tag{15}$$

- în această ecuaţie, am definit eroarea la pasul i ca fiind $e_i = |x_i - r|$
- deoarece c_i se află între r şi x_i, acesta converge la r la fel ca x_i, şi

$$\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right| ,$$

adică exact definiţia convergenţei pătratice

- formula de eroare (15) pe care am dedus-o, poate fi văzută ca

$$e_{i+1} \approx M e_i^2, \tag{16}$$

unde $M = |f''(r)/2f'(r)|$, presupunând că $f'(r) \neq 0$

- aproximarea devine mai bună pe măsură ce metoda lui Newton converge, deoarece aproximările x_i se deplasează spre r, şi deoarece c_i este prins între x_i şi r
- această formulă de eroare trebuie comparată cu $e_{i+1} \approx S e_i$ de la metodele liniar convergente, unde $S = |g'(r)|$ pentru IPF şi $S = 1/2$ pentru metoda bisecţiei
- deşi valoarea lui S este critică pentru metodele liniar convergente, valoarea lui M este mai puţin critică, deoarece formula implică pătratul erorii anterioare
- odată ce eroarea devine semnificativ mai mică decât 1, ridicarea ei la pătrat va determina o scădere suplimentară; câtă vreme M nu este foarte mare, eroarea potrivit lui (16) va descreşte de asemenea
- întorcându-ne la Exemplul 4, putem analiza tabelul de ieşire pentru a demonstra această rată de eroare
- coloana din dreapta prezintă raportul e_i/e_{i-1}^2, care, conform formulei de eroare pentru metoda lui Newton (16), ar trebui să tindă la M pe măsură ce are loc convergenţa către rădăcină
- pentru $f(x) = x^3 + x - 1$, derivatele sunt $f'(x) = 3x^2 + 1$ şi $f''(x) = 6x$; evaluând în $x_c \approx 0.6823$ obţinem $M \approx 0.85$, ceea este în acord cu raportul de eroare din coloana din dreapta a tabelului

2.3.2. Convergența liniară a metodei lui Newton

Teorema 5 nu ne spune dacă metoda lui Newton converge întotdeauna pătratic

(trb să împărțim cu $f'(r)$)

Exemplul 5:

Folosiți Metoda lui Newton pt. a găsi o rădăcină a lui $f(x) = x^2$

Rezolvare

$\rightarrow \exists \ r = 0$

$f'(x) = 2x$

$\rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^2}{2x_i} = \frac{x_i}{2}$

$r = 0, \ x_0 = 1$

27

i	x_i	$e_i = \lvert x_i - r \rvert$	e_i/e_{i-1}
0	1.000	1.000	
1	0.500	0.500	0.500
2	0.250	0.250	0.500
3	0.125	0.125	0.500
⋮	⋮	⋮	⋮

metoda lui Newton converge către rădăcina $r = 0$

formula de eroare este $e_{i+1} = e_i/2$, deci convergenţa este liniară cu constanta de proporţionalitate a convergenţei $S = 1/2$

metoda lui Newton, la fel ca IPF, s-ar putea să nu conveargă la o rădăcină

următorul exemplu prezintă doar unul dintre posibilele comportamente neconvergente ale metodei

Exemplul 6

Aplicați Metoda lui Newton: $f(x) = 4x^4 - 6x^2 - \frac{11}{4}$ $\quad x_0 = \frac{1}{2}$

Rezolvare

f - cont

$x = 0 \Rightarrow f(0) < 0$

- această funcţie are rădăcini, deoarece este continuă, negativă în $x = 0$, şi tinde la plus infinit pentru valori mari pozitive sau valori mari negative ale lui x
- totuşi, nicio rădăcină nu va fi găsită pentru valoarea iniţială $x_0 = 1/2$, după cum se prezintă în Figura 6

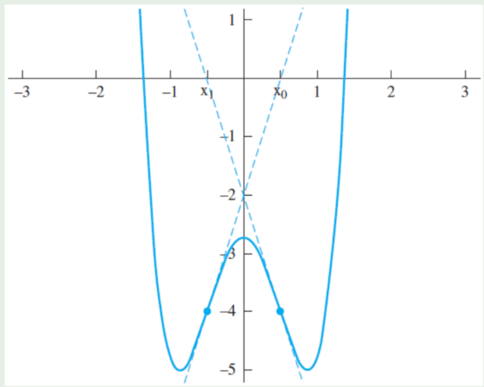

Figura 6: **Eşecul metodei lui Newton în Exemplul 6.** Iteraţia alternează între $1/2$ şi $-1/2$, şi nu converge către o rădăcină.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{4x_i^4 - 6x_i^2 - \frac{11}{4}}{16x_i^3 - 12x_i}$$

$x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ va alterna între aceste 2 rădăcini

- metoda lui Newton poate eşua şi în alte moduri
- evident, dacă $f'(x_i) = 0$ la orice pas al iteraţiei, metoda nu poate să continue
- sunt şi alte exemple în care iteraţia diverge la infinit sau imită un generator de numere aleatoare
- deşi nu orice valoare iniţială conduce la convergenţa către o rădăcină, Teorema 5 garantează existenţa unei vecinătăţi de valori iniţiale a fiecărei rădăcini, pentru care convergenţa la acea rădăcină este asigurată

2.4. Găsirea rădăcinilor fără derivate

- metoda lui Newton converge mai repede decât metoda bisecţiei şi decât iteraţia de punct fix
- atinge această rată de convergenţă mai rapidă deoarece utilizează mai multe informaţii—în particular, informaţii despre dreapta tangentă la funcţie, care vine din derivata funcţiei
- în anumite circumstanţe însă, derivata s-ar putea să nu fie disponibilă
- metoda secantei este un bun înlocuitor pentru metoda lui Newton, în acest caz
- înlocuieşte dreapta tangentă cu o aproximare a acesteia, numită dreapta secantă, şi converge aproape la fel de repede

→ asemănătoare cu Newton

→ derivata ⟷ raport de diferențe

- din punct de vedere geometric, dreapta tangentă este înlocuită cu o dreaptă care trece prin ultimele două aproximări
- punctul de intersecţie al dreptei secante cu axa x este noua aproximare
- o aproximare a derivatei în punctul curent x_i este dată de raportul de diferenţe
$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$
- înlocuind această aproximare pentru $f'(x_i)$ în metoda lui Newton, obţinem metoda secantei

Algoritmul 3 (Metoda secantei)

x_0, x_1 = valorile iniţiale

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$ **for** $i = 1, 2, 3, \ldots$

- spre deosebire de iteraţia de punct fix şi de metoda lui Newton, este nevoie de două valori iniţiale pentru a porni metoda secantei

- se poate demonstra că, în ipoteza că metoda secantei converge la r şi $f'(r) \neq 0$, relaţia de eroare aproximativă
$$e_{i+1} \approx \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right| e_i e_{i-1}$$
are loc, şi aceasta implică
$$e_{i+1} \approx \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|^{\alpha - 1} e_i^{\alpha},$$
unde $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.62$
- convergenţa metodei secantei către rădăcină este numită **superliniară**, ceea ce înseamnă că este între metodele liniar şi pătratic convergente

secant.m

```
function xc = secant(f, x0, x1, k)
    % f - function handle pentru funcția dată
    % x0, x1 - valorile inițiale
    % k - numărul de pași

    % Inițializăm valorile inițiale
    x(1) = x0;
    x(2) = x1;

    % Iterăm pentru k pași
    for i = 2:k
        x(i+1) = x(i) - (f(x(i)) * (x(i) - x(i-1))) / (f(x(i)) - f(x(i-1)));
    end

    xc = x(k+1);
```

```
>> f = @(x) x ^ 5 + x - 1;
>> x = secant(f,1.6, 2.5, 10)

x =

    0.7549
```

Exemplul 7

$x_0 = 0,\ x_1 = 1$, $f(x) = x^3 + x - 1$

formula devine

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 + x_i - 1)(x_i - x_{i-1})}{x_i^3 + x_i - (x_{i-1}^3 + x_{i-1})}.$$

pornind de la $x_0 = 0$ şi $x_1 = 1$, putem calcula

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 - \frac{(1)(1-0)}{1+1-0} = \frac{1}{2} \\ x_3 &= \frac{1}{2} - \frac{-\frac{3}{8}(1/2-1)}{-\frac{3}{8}-1} = \frac{7}{11}, \end{aligned}$$

după cum se arată în Figura 7

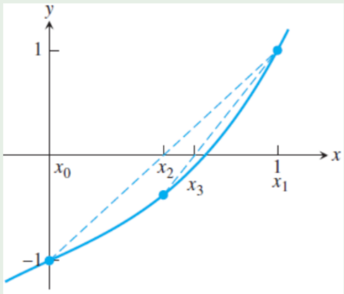

Figura 7: **Doi paşi din metoda secantei.** Ilustrarea Exemplului 7. Pornind de la $x_0 = 0$ şi $x_1 = 1$, iteraţiile metodei secantei sunt reprezentate grafic împreună cu dreptele secante.

- următoarele iteraţii sunt date în tabelul de mai jos:

i	x_i
0	0.00000000000000
1	1.00000000000000
2	0.50000000000000
3	0.63636363636364
4	0.69005235602094
5	0.68202041964819
6	0.68232578140989
7	0.68232780435903
8	0.68232780382802
9	0.68232780382802

Metoda falsei poziţii $f(x)=0$

- există o generalizare a metodei secantei care este de asemenea importantă
- **metoda falsei poziţii**, sau **regula falsi**, este asemănătoare cu metoda bisecţiei, în care mijlocul este înlocuit cu o aproximare similară celei din metoda secantei
- dându-se un interval $[a, b]$ în care se află o rădăcină (presupunem că $f(a)f(b) < 0$), definim următorul punct

$$c = a - \frac{f(a)(a-b)}{f(a)-f(b)} = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a)-f(b)}$$

  ca în metoda secantei, dar, spre deosebire de metoda secantei, este garantat că noul punct se află în $[a, b]$, deoarece punctele $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$ se află de părţi diferite ale axei x
- noul interval, ori $[a, c]$, ori $[c, b]$, este ales depinzând dacă avem $f(a)f(c) < 0$ sau, respectiv, $f(c)f(b) < 0$, şi va conţine în mod sigur rădăcina

Algoritmul 4 (Metoda falsei poziţii)

Dându-se intervalul $[a, b]$ astfel încât $f(a)f(b) < 0$
for $i = 1, 2, 3, \ldots$
  $c = \frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)}$
  if $f(c) = 0$, **stop**, **end**
  if $f(a)f(c) < 0$
    $b = c$
  else
    $a = c$
  end
end

- metoda falsei poziţii pare la prima vedere să fie o îmbunătăţire atât a metodei bisecţiei cât şi a metodei secantei, preluând cele mai bune proprietăţi ale fiecăreia
- totuşi, câtă vreme metoda bisecţiei garantează reducerea incertitudinii cu un factor de $1/2$ la fiecare pas, în cazul metodei falsei poziţii nu există o astfel de garanţie, şi pentru anumite exemple poate converge foarte încet

mfp.m

```
function xc = mfp(f, a, b, k)

if f(a) * f(b) >= 0
    error('Nu este satisfacuta conditia f(a) * f(b) < 0')
end

for i = 1 : k

    c = (b * f(a) - a * f(b)) / (f(a) - f(b))

    if f(c) == 0
        break;
    end

    if f(a) * f(c) < 0
        b = c;
    else
        a = c
    end
end

xc = (b * f(a) - a * f(b)) / (f(a) - f(b))
```

Exemplul 8

$[-1,1]$, $r=0$, $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x$

Exemplul 8

- aplicaţi metoda falsei poziţii pe intervalul iniţial $[-1, 1]$ pentru a găsi rădăcina $r = 0$ a lui $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x$

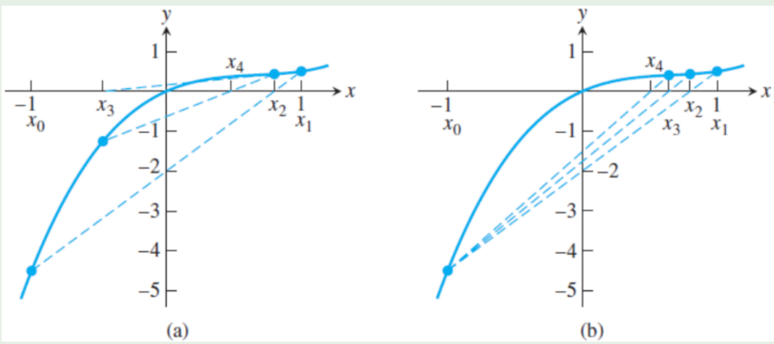

Figura 8: **Convergenţa lentă în Exemplul 8.** Atât (a) metoda secantei cât şi (b) metoda falsei poziţii converg lent către rădăcina $r = 0$.

- dându-se $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ ca interval iniţial, calculăm noul punct

$$x_2 = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} = \frac{1(-9/2) - (-1)1/2}{-9/2 - 1/2} = \frac{4}{5}.$$

- deoarece $f(-1)f(4/5) < 0$, noul interval este $[x_0, x_2] = [-1, 0.8]$
- aceasta încheie primul pas
- observăm că incertitudinea soluţiei a scăzut cu mult mai puţin decât un factor de $1/2$
- după cum arată Figura 8(b), următorii paşi continuă să facă progrese lente spre rădăcina $x = 0$