Interpolare

Definiţia 1

Funcţia $y = P(x)$ interpolează punctele $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ dacă $P(x_i) = y_i$ pentru orice $1 \le i \le n$.

! Indiferent cât de multe puncte sunt date, ∃ un polinom $y = P(x)$ care trece prin toate acele puncte dacă toate coordonatele x ale acelor puncte sunt distincte.

→ Interpolarea Lagrange

Pp. că sunt date punctele $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$

Vrem să găsim un polinom de interpolare pentru aceste puncte

gradul $d = m - 1$ m - nr. de puncte

Formula de interpolare a lui Lagrange

- de exemplu, să presupunem că ne sunt date trei puncte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)
- atunci polinomul

$$P_2(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \quad (1)$$

este **polinomul de interpolare al lui Lagrange** pentru aceste puncte
- în primul rând, să observăm de ce toate punctele se află pe graficul polinomului

- în general, să presupunem că avem n puncte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$
- pentru fiecare k între 1 şi n, definim polinomul de gradul $n - 1$

$$L_k(x) = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}.$$

! $L_k(x_k) = 1$, dar $L_k(x_j) = 0, \forall j \neq k$

- apoi, definim polinomul de gradul $n - 1$

$$P_{n-1}(x) = y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x).$$

- aceasta este o generalizare imediată a polinomului din (1) şi funcţionează în acelaşi fel → Lagrange
- înlocuind pe x cu x_k, obţinem

$$P_{n-1}(x_k) = y_1 L_1(x_k) + \cdots + y_n L_n(x_k) = 0 + \cdots + 0 + y_k L_k(x_k) + 0 + \cdots + 0 = y_k,$$

exact cum am dorit
- am construit un polinom de grad cel mult $n - 1$ care trece prin orice mulţime de n puncte care au valorile x_i distincte
- este interesant de observat că acest polinom este unic

Teorema 1 (Teorema fundamentală a interpolării polinomiale)

Fie $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ n puncte din plan cu valorile x_i distincte. Atunci există un unic polinom P de grad cel mult $n - 1$ care satisface $P(x_i) = y_i$ pentru $i = 1, \ldots, n$.

1. Interpolare Lagrange

polinom grad 4 $\Rightarrow$ 5 puncte

$[0, \frac{\pi}{2}]$

$f(x) = \cos x$

$$\left[0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$P_4(x) = y_1 L_1(x_1) + y_2 L_2(x_2) + y_3 L_3(x_3) + y_4 L_4(x_4) + y_5 L_5(x_5)$$

$$L_1(x_1) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)}$$

$$L_2(x_2) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)}$$

+ restu

$y_1 = \cos 0 \qquad y_2 = \cos\frac{\pi}{8} \quad \ldots$

Se înlocuiesc în $P_4(x)$

$P(x_1) = y_1 \qquad P(x_2) = y_2 \quad \ldots \quad \Leftrightarrow$ Verificare

Folosiți interpolarea Lagrange pentru a găsi polinomul de interpolare de gradul 3 pe intervalul $[0, 1/2]$ pentru funcția $f(x) = e^{x^2}$.

$$\left[0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \qquad P_3(x) = y_1 L_1(x_1) + y_2 L_2(x_2) + y_3 L_3(x_3) + y_4 L_4(x_4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2})}{-\frac{1}{6}(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{2})} = -36(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2}) =$$

$$= -(6x-1)(3x-1)(2x-1)$$

DE CORECTAT

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{x(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2})}{\frac{1}{6}\cdot(-\frac{1}{6})(-\frac{1}{3})} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\, x(x-2)(x-3)}{\cancel{2}} =$$

$$= 3x(x-2)(x-3)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}(-\frac{1}{6})} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\, x(x-1)(x-3)}{-\cancel{2}} = -3x(x-1)(x-3)$$

$$L_4(x) = \frac{x(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{3})}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}} = \frac{6x(x-1)(x-2)}{6} = x(x-1)(x-2)$$

$y_1 = f(x_1) = e^0 = 1 \qquad y_2 = f(x_2) = e^{\frac{1}{36}} \qquad y_3 = f(x_3) = e^{\frac{1}{9}} \qquad y_4 = f(x_4) = e^{\frac{1}{4}}$

$$P_3(x) = -(x-1)(x-2)(x-3) + e^{\frac{1}{36}}\, 3x(x-2)(x-3) + e^{\frac{1}{9}}(-3)x(x-1)(x-3) + e^{\frac{1}{4}} \cdot x(x-1)(x-2)$$

$$P_3(0) = -1$$

2. Fol. interpolarea Lagrange pt. a găsi pol. care trece prin $(-1,0)$, $(2,1)$, $(3,1)$

$$P_2(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L(x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(-3)(-4)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-3)}{3 \cdot (-1)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{4 \cdot 1}$$

$$P_2(x) = 1 \cdot \frac{(x+1)(x-3)}{3 \cdot (-1)} + 1 \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{4 \cdot 1}$$

$$P_2(-1) = 0 \qquad P_2(2) = \frac{3(-1)}{3 \cdot (-1)} = 1 \qquad P_2(3) = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 1} = 1 \ \checkmark$$

Diferențe divizate

Definiția 2

Notăm prin $f[x_1 \cdots x_n]$ coeficientul termenului x^{n-1} în (unicul) polinom care interpolează $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

$$\begin{aligned} P(x) = f[x_1] \quad & + \quad f[x_1\ x_2](x-x_1) \\ & + \quad f[x_1\ x_2\ x_3](x-x_1)(x-x_2) \\ & + \quad f[x_1\ x_2\ x_3\ x_4](x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ & + \quad \cdots \\ & + \quad f[x_1 \cdots x_n](x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

- listăm punctele într-un tabel:

$$\begin{array}{c|c} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ x_n & f(x_n) \end{array}$$

- acum definim diferenţele divizate, care sunt numerele reale

$$\begin{aligned} f[x_k] &= f(x_k) \\ f[x_k\ x_{k+1}] &= \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k} \\ f[x_k\ x_{k+1}\ x_{k+2}] &= \frac{f[x_{k+1}\ x_{k+2}] - f[x_k\ x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} \\ f[x_k\ x_{k+1}\ x_{k+2}\ x_{k+3}] &= \frac{f[x_{k+1}\ x_{k+2}\ x_{k+3}] - f[x_k\ x_{k+1}\ x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k}, \end{aligned} \tag{3}$$

Algoritmul 1 (Metoda diferenţelor divizate a lui Newton)

Fiind daţi $x = [x_1, \ldots, x_n]$,$y = [y_1, \ldots, y_n]$
for $j = 1, \ldots, n$
    $f[x_j] = y_j$
end
for $i = 2, \ldots, n$
    for $j = 1, \ldots, n + 1 - i$
        $f[x_j \cdots x_{j+i-1}] = (f[x_{j+1} \cdots x_{j+i-1}] - f[x_j \cdots x_{j+i-2}])/(x_{j+i-1} - x_j)$
    end
end
Polinomul de interpolare este

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} f[x_1 \cdots x_i](x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}).$$

- folosiţi metoda diferenţelor divizate pentru a găsi polinomul de interpolare care trece prin punctele $(0, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \qquad \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2} \qquad \frac{4-2}{3-2} = 2 \qquad \frac{2-\frac{1}{2}}{3-0} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-2)$$

- folosiţi metoda diferenţelor divizate a lui Newton pentru a găsi polinomul de interpolare care trece prin punctele $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(3, -1)$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{array} \qquad \frac{1-2}{1-0} = -1 \qquad \frac{0-1}{2-1} = -1 \qquad \frac{-1-0}{3-2} = -1$$

$$\frac{-1+1}{2-0} = 0 \qquad \frac{-1+1}{3-1} = 0 \qquad \frac{0-0}{3-0} = 0$$

$$P(x) = 2 + (-1)(x-0) + 0\cdot(x-0)(x-1) + 0\cdot(x-0)(x-1)(x-2)$$

Folosiţi metoda diferenţelor divizate a lui Newton pentru a găsi polinomul care trece prin punctele: $(0,-2), (2,1), (4,4), (6,2)$.

0	-2	$\frac{1+2}{2-0} = \frac{3}{2}$	$\frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{4-0} = 0$	$\frac{-\frac{5}{8}-0}{6-0} = -\frac{5}{48}$
2	1	$\frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}$	$\frac{-1-\frac{3}{2}}{6-2} = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{5}{8}$	
4	4	$\frac{2-4}{6-4} = -1$		
6	2			

$$P(x) = -2 + \frac{3}{2}(x-0) + 0\cdot(x-0)(x-2) - \frac{5}{48}(x-0)(x-2)(x-4)$$

! Eroarea de interpolare este: $f(x) - P(x)$

$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

unde c se află între cel mai mic şi cel mai mare dintre numerele $x, x_1, \ldots, x_n$.

Interpolare Cebîşev

Teorema 5

Alegerea numerelor reale $-1 \le x_1, \ldots, x_n \le 1$ care face ca valoarea lui

$$\max_{-1\le x\le 1} |(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

să fie cât mai mică posibil este

$$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}, \qquad \text{pentru } i = 1, \ldots, n,$$

şi valoarea minimă este $1/2^{n-1}$. De fapt, minimul este atins de către

$$(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x),$$

unde prin $T_n(x)$ am notat polinomul Cebîşev de gradul n.

Funcţiile T_n sunt polinoame. Am arătat acest lucru explicit pentru T_0, T_1, şi T_2. Deoarece T_3 este o combinaţie polinomială a lui T_1 şi T_2, T_3 este de asemenea un polinom. Acelaşi argument este valabil pentru toate funcţiile T_n. Primele câteva polinoame Cebîşev (a se vedea Figura 8) sunt

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Faptul 4

$\mathrm{grad}(T_n) = n$, şi coeficientul dominant este 2^{n-1}. Acest lucru este clar pentru $n = 1$ şi 2, iar relaţia de recurenţă extinde această proprietate pentru orice n.

Faptul 5

$T_n(1) = 1$ şi $T_n(-1) = (-1)^n$. Ambele sunt clare pentru $n = 1$ şi 2. În general,

$$T_{n+1}(1) = 2(1)T_n(1) - T_{n-1}(1) = 2(1) - 1 = 1$$

şi

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-1) &= 2(-1)T_n(-1) - T_{n-1}(-1) \\ &= -2(-1)^n - (-1)^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1}(2-1) = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Faptul 6

Valoarea absolută maximă a lui $T_n(x)$ pentru $-1 \le x \le 1$ este 1. Aceasta rezultă imediat din faptul că $T_n(x) = \cos y$ pentru un anumit y.

Faptul 7

Toate rădăcinile lui $T_n(x)$ se află între -1 şi 1. A se vedea Figura 9. De fapt, rădăcinile sunt soluţia ecuaţiei $0 = \cos(n \arccos x)$. Deoarece $\cos y = 0$ dacă şi numai dacă $y =$ întreg impar $\cdot (\pi/2)$, avem că

$$\begin{aligned} n \arccos x &= \text{impar} \cdot \pi/2 \\ x &= \cos \frac{\text{impar} \cdot \pi}{2n}. \end{aligned}$$

Faptul 8

$T_n(x)$ alternează între -1 şi 1 de $n+1$ ori în total. De fapt, acest lucru se întâmplă în punctele $\cos 0, \cos \pi/n, \ldots, \cos(n-1)\pi/n, \cos \pi$.

Algoritmul 2 (Nodurile de interpolare Cebîşev)

Pe intervalul $[a, b]$,

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}$$

pentru $i = 1, \ldots, n$. Inegalitatea

$$|(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \le \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}} \tag{13}$$

eroare?

are loc pe $[a, b]$.

- găsiţi limita inferioară a erorii în cazul cel mai defavorabil pentru diferenţa pe $[-1, 1]$ dintre $f(x) = e^x$ şi polinomul de interpolare Cebîşev de gradul 4

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{5!} f^{(5)}(c)$$

$$x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n} \rightarrow \text{doar pe } [-1, 1]$$

$$T_n(x) = 2^{n-1} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \cdot \ldots \cdot (x-x_n)$$

de grad n

$$-1 < c < 1$$

$$\max_{-1 \le x \le 1} |(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_5)| \le \frac{\left(\frac{1+1}{2}\right)^5}{2^{5-1}}$$

$$|f^{(5)}(c)| = e^c \le e^1 = e$$

$$|f(x) - P_4(x)| = \left| \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_5)}{5!} f^{(5)}(c) \right| \le \frac{e}{2^4 \cdot 5!}$$

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos ny \cos y = 2 \cdot x T_n(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

- găsiţi cele patru puncte de bază Cebîşev pentru interpolarea pe intervalul $[0, \pi/2]$, şi găsiţi limita superioară pentru eroarea de interpolare Cebîşev pentru funcţia $f(x) = \sin x$ pe intervalul respectiv

$$x_i = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cos\frac{(2 \cdot i - 1)\pi}{8}$$

$$\max_{[0, \frac{\pi}{2}]} \sin x = 1$$

$\to$ se calculează

$$A = |f(x) - P_3(x)| = \frac{|(x-x_1)(x-x_2)\cdot(x-x_3)(x-x_4)|}{4!} f^{(4)}(c)$$

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

$$A \le \frac{1}{4!} \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}} \cdot 1 = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{2^3\, 4!} \cdot 1 = \ldots$$

Calculaţi nodurile de interpolare Cebîşev $x_1, \ldots, x_n$ pe intervalul $[-3, 7]$, unde $n = 3$ (4p). Găsiţi limita superioară pentru $|(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$ (3p). Calculaţi polinomul Cebîşev $T_n(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)$ (4p).

3 noduri $\Rightarrow P_2(x)$

$$|f(x) - P(x)| = \frac{\overbrace{|(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)|}^{A}}{3!} |f^{(3)}(c)|$$

$$A \le \left(\frac{7+3}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1000}{8} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1000}{32}$$

$$x_i = \frac{7-3}{2} + \frac{7+3}{2} \cos\frac{(2 \cdot i - 1)\pi}{6}$$

Calculaţi nodurile de interpolare Cebîşev $x_1, \dots, x_n$ pe intervalul $[4, 12]$, unde $n = 3$ (4p). Găsiţi limita superioară pentru $|(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$ (2p). Calculaţi polinomul Cebîşev $T_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ (4p).

Tipuri de fişiere acceptate

Document PDF .pdf

Fişiere de tip arhivă

Fişiere de tip imagine

Calculaţi nodurile de interpolare Cebîşev $x_1, \dots, x_n$ pe intervalul $[-2, 2]$, unde $n = 4$ (4p). Găsiţi limita superioară pentru $|(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$ (2p). Calculaţi polinomul Cebîşev $T_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ (4p).

Dimensiunea maximă pentru fişierele noi: 5MB, număr maxim de a

Folosiţi interpolarea Cebîşev pentru a găsi polinomul de interpolare de gradul 3 pe intervalul $[0, 1/2]$ pentru funcţia $f(x) = e^{x^2}$.