

Logică: recapitulare

Folosim logica pentru a exprima *riguros* (*formaliza*) raționamente.

Logica ne permite să facem *demonstrații* (*deducții*)
din *axiome* (totdeauna adevărate)
și *ipoteze* (considerate adevărate în problema dată)
folosind *reguli de inferență* (de deducție)

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q} \quad \text{modus ponens}$$

Modus ponens e suficient, dar sunt și alte reguli de deducție valide.

Logica propozițională e

consistentă: orice formulă demonstrată (teoremă) e validă

completă: orice formulă validă (tautologie) poate fi demonstrată

Logica propozițională nu poate exprima tot

Un exemplu clasic: (1) Toți oamenii sunt muritori.
(2) Socrate e om.
Deci, (3) Socrate e muritor.

(2) Socrate e om.
Deci, (3) Socrate e muritor.

Acesta e un *silogism* (tipar de regulă de inferență)
logica clasică: Aristotel, stoici

Seamănă cu *modus ponens*
dar premisa din (1) ("toți oamenii")
nu e la fel cu (2) (Socrate, un anumit om)

Am putea reformula (1): *Dacă X e om, atunci X e muritor.*
mai precis: *Pentru orice X, dacă X e om, atunci X e muritor.*

Logica modernă: *logica predicatelor* (logica de ordinul I)
Gottlob Frege, Charles Peirce (sec. 19)

Avem nevoie de formule mai expresive

Formulele sunt formate din *predicate* legate prin *conectori logici*

$\forall x ((\text{folder}(x) \wedge x \neq \text{root}) \rightarrow \text{contains}(\text{parent}(x), x))$

În loc de *propoziții* (a, p, q) avem *predicate*: $\text{file}(x), \text{contains}(x, y)$

Un *predicat* = o afirmație relativ la una sau mai multe variabile,
care, dând valori variabilelor, poate lua valoarea adevărat sau fals.

Predicatele au argumente *termeni*: *variabile* x / *funcții*: $\text{parent}(x)$
intuitiv: reprezintă obiecte/noțiuni și funcții din univers

Nou: apar *cuantificatori* \forall (orice), \exists (există)

Nou: apar *cuantificatori* \forall (orice), \exists (există)

Definim *logica predicatelor* (*first-order logic*)
numită și *logica de ordinul I* (întâi)

Sintaxa logicii predicatelor: Termeni

Definim, structural recursiv, noțiunile de *termen* și *formulă*:

Termeni

variabilă v

$f(t_1, \dots, t_n)$ cu f *funcție* n -ară și t_1, \dots, t_n *termeni*

Exemple: $\text{parent}(x)$, $\text{cmmdc}(x, y)$, $\text{max}(\text{min}(x, y), z)$

constantă c : caz particular, funcție de zero argumente

Sintaxa logicii predicatelor: Formule

Sintaxa logicii predicatelor: Formule

Formule (well-formed formulas, formule bine formate):

$P(t_1, \dots, t_n)$ cu P **predicat** de n argum. și t_1, \dots, t_n **termeni**

Exemple: $\text{contains}(\text{empty}, x)$, $\text{divide}(\text{cmmdc}(x, y), x)$

propoziție p : caz particular, predicat de zero argumente

$\neg \alpha$ unde α e o formulă

$\alpha \rightarrow \beta$ cu α, β formule

$\forall v \alpha$ cu v **variabilă**, α formulă: **cuantificare universală**

Exemple: $\forall x \neg \text{contains}(\text{empty}, x)$, $\forall x \forall y \text{divide}(\text{cmmdc}(x, y), x)$

$t_1 = t_2$ cu t_1, t_2 termeni (în logica de ordinul I cu egalitate)

Exemplu: $\min(x, \min(y, z)) = \min(\min(x, y), z)$

Despre cuantificatori. Cuantificatorul existențial \exists

Notăm: $\boxed{\exists x \phi \stackrel{\text{def}}{=} \neg \forall x (\neg \phi)}$ ϕ formulă arbitrară

Există x pentru care ϕ e adevărată \leftrightarrow nu pentru orice x ϕ e falsă.

Cei doi cuantificatori sunt **duali**. Putem scrie și $\forall x \phi = \neg \exists x (\neg \phi)$

Cuantificatorii au **precedență mai mare** decât conectorii $\neg, \wedge, \rightarrow \dots$

\Rightarrow dacă formula cuantificată are $\wedge, \vee, \rightarrow$ folosim paranteze:

Cuantificatorii au *precedență mai mare* decât conectorii $\neg, \wedge, \rightarrow \dots$
 \Rightarrow dacă formula cuantificată are $\wedge, \vee, \rightarrow$ folosim paranteze:

$$\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad \forall y (Q(y) \wedge R(x, y))$$

Altă notatie: *punct* . cuantificatorul se aplică la tot restul formulei, până la sfârșit sau paranteză închisă

$$P(x) \vee \forall y. Q(y) \wedge R(x, y) \quad (R(y) \vee \exists x. P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x)$$

Distributivitatea cuantificatorilor față de \wedge și \vee

Cuantificatorul *universal* e *distributiv față de conjuncție*:

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

dar cuantificatorul *existențial* NU e distributiv față de conjuncție:

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$$

avem implicație \rightarrow , dar nu și invers, poate să nu fie același x !

Dual, \exists e distributiv față de disjuncție:

$$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x. P(x) \vee Q(x)$$

\forall nu e distributiv față de disjuncție. Avem doar:

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \rightarrow \forall x. P(x) \vee Q(x)$$

Variabile legate și libere

În formula $\forall v\phi$ (sau $\exists v\phi$) variabila v se numește *legată*
Variabilele care nu sunt legate se numesc *libere*

O variabilă poate fi liberă și legată în aceeași formulă.

În $(\exists x.P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge R(x)$, x e *legată* în $\exists x.P(x) \rightarrow Q(x)$
și e *liberă* în $R(x)$ (e în afara cuantificatorului)

Înțelesul unei formule *nu depinde* de variabilele legate
înțelesul lor e "*legat*" de cuantificator ("pentru orice", "există")
pot fi redenumite, fără a schimba înțelesul formulei
 $(\exists x.P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge R(x)$ la fel ca $(\exists y.P(y) \rightarrow Q(y)) \wedge R(x)$

O formulă *fără variabile libere* are înțeles de sine stătător.
(*closed formula*)

Formalizarea limbajului natural

Formulele conțin: *variabile, funcții, predicate*.

Verbele devin *predicate* (ca în limbajul natural):

cumpără(X, Y), *scade*(X),

Subiectul și *complementele* (in)directe: *argumentele* predicatului

$cumpara(x, y), scade(x),$
Subiectul și *complementele* (in)directe: *argumentele* predicatului
Atributele (proprietăți) devin *predicate* despre valorile-argument
 $bucuros(X), de\ aur(Y)$

Variabilele din formule pot lua valori *de orice fel* din *univers*
nu au un tip anume

⇒ *Categoriile* devin tot *predicate*, cu argument obiectul de acel fel
 $copil(X), caiet(X)$

Entitățile *unice* devin *constante*:
 $ion, emptyset, santaclaus$

Exemplu de formalizare (1)

1. *Fiecare investitor a cumpărat acțiuni sau obligațiuni.*

Cuantificatorii introduc variabile cu valori *arbitrare* din univers
⇒ impunem categorii prin predicate suplimentare
⇒ introducem un predicat $inv(X)$ (X e investitor)

Pentru orice X , dacă X e investitor, a făcut ceva
 $\forall X. inv(X) \rightarrow \boxed{\text{ce face } X}$

Ce se spune despre investitor? Există ceva ce a cumpărat
 $\forall X. inv(X) \rightarrow \exists C. cumpără(X, C) \wedge \boxed{\text{ce știm despre } C}$

$\forall X. inv(X) \rightarrow \exists C. cumpără(X, C) \wedge (acțiune(C) \vee oblig(C))$

$$\forall X.inv(X) \rightarrow \exists C.cumpără(X, C) \wedge (acțiune(C) \vee oblig(C))$$

Sursa: <http://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html>

Exemplu de formalizare (2)

2. Dacă indicele Dow Jones scade, toate acțiunile mai puțin aurul scad.

Indicele Dow Jones e o noțiune unică \Rightarrow folosim o constantă *dj*

alternativ: puteam folosi și o *propoziție* *scade**dj*
 $scade(dj) \rightarrow$ ce se întâmplă

$$scade(dj) \rightarrow \forall X. \text{ condiții pentru X } \rightarrow scade(X)$$

$$scade(dj) \rightarrow \forall X. acțiune(X) \wedge \neg aur(X) \rightarrow scade(X)$$

Exemplu de formalizare (3)

3. Dacă trezoreria crește dobânda, toate obligațiunile scad.

$$crestedob \rightarrow \forall X.oblia(X) \rightarrow scade(X)$$

3. Dacă trezoreria crește dobânda, toate obligațiunile scad.

$$\text{creștedob} \rightarrow \forall X.\text{oblig}(X) \rightarrow \text{scade}(X)$$

Dobânda e unicul lucru din problemă care crește \Rightarrow propoziție alternativ: o constantă *dobânda* + predicat *crește*

4. Orice investitor care a cumpărat ceva care scade nu e bucuros.

$$\forall X.\text{inv}(X) \rightarrow \boxed{\text{ce știm despre } X}$$

$$\forall X.\text{inv}(X) \rightarrow \boxed{\text{condiție pentru } X} \rightarrow \neg\text{bucuros}(X)$$

$$\forall X.\text{inv}(X) \rightarrow (\exists C.\text{cumpără}(X, C) \wedge \text{scade}(C)) \rightarrow \neg\text{bucuros}(X)$$

\rightarrow asociază la dreapta, $p \rightarrow q \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r) = p \wedge q \rightarrow r$, echivalent:

$$\forall X.\text{inv}(X) \wedge (\exists C.\text{cumpără}(X, C) \wedge \text{scade}(C)) \rightarrow \neg\text{bucuros}(X)$$

Exemplu de formalizare (4)

5. Dacă indicele Dow Jones scade și trezoreria crește dobânda, toți investitorii bucueroși au cumpărat ceva acțiuni de aur.

$$\text{scade}(dj) \wedge \text{creștedob} \rightarrow \boxed{\text{ce se întâmplă}}$$

$$\text{scade}(dj) \wedge \text{creștedob} \rightarrow$$

$$\forall X.\text{inv}(X) \wedge \text{bucuros}(X) \rightarrow \boxed{\text{ce știm despre } X}$$

$$\text{scade}(dj) \wedge \text{creștedob} \rightarrow \forall X.\text{inv}(X) \wedge \text{bucuros}(X) \rightarrow$$

$\forall X.inv(X) \wedge bucuros(X) \rightarrow \boxed{\text{ce ştiu despre } X}$

$scade(dj) \wedge creştedob \rightarrow \forall X.inv(X) \wedge bucuros(X) \rightarrow$
 $\exists C.cumpără(X, C) \wedge acţiune(C) \wedge aur(C)$

Atenție la cuantificatori!

Cuantificatorul *universal* ("toți") cuantifică o *implicație*: Toți studenții sunt tineri

$Studenti \subseteq Tineri$

$\forall x.student(x) \rightarrow tânăr(x)$

Eroare frecventă: \wedge în loc de \rightarrow : ~~$\forall x.student(x) \wedge tânăr(x)$~~
 Oricine/orice din univers e și student și tânăr!!!

Cuantificatorul *existențial* ("unii", "există") cuantifică o *conjunție*.

Există premianți studenți.

$Premianți \cap Studenți \neq \emptyset$

$\exists x.premiant(x) \wedge student(x)$

Eroare frecventă: \rightarrow în loc de \wedge : ~~$\exists x.premiant(x) \rightarrow student(x)$~~
 E adevărată dacă există un ne-premiant! (fals implică orice)

După traducerea în logică, putem demonstra!

După traducerea în logică, putem demonstra!

Având o *infinitate de interpretări* (valori din univers, funcții, valori pentru relații/predicate), nu putem scrie tabele de adevăr.

Putem face însă *demonstrații* (deducții) după *reguli de inferență* (pur sintactice), ca în logica propozițională.

Logica predicatelor e și ea *consistentă* și *completă*:

Orice teoremă e validă (adevărată în toate interpretările/atribuirile).

Orice formulă validă (tautologie) poate fi *demonstrată* (e teoremă).
dar dacă nu e validă, încercarea de a o demonstra (sau o refuta) poate continua la nesfârșit.

Demonstrația prin metoda rezoluției

O formulă e *validă* dacă și numai dacă *negația* ei e o *contradicție*.

Putem demonstra o teoremă prin *reducere la absurd* arătând că *negația ei e o contradicție* (nerealizabilă).

Fie ipotezele A_1, A_2, \dots, A_n și concluzia C .

Fie teorema

$$A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n \rightarrow C$$

Fie teorema

$$A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n \rightarrow C$$

adică: ipotezele A_1, A_2, \dots, A_n implică împreună concluzia C

Negația implicației: $\neg(H \rightarrow C) = \neg(\neg H \vee C) = H \wedge \neg C$

Deci arătăm că $A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n \wedge \neg C$ e o contradicție (*reducere la absurd*: ipoteze adevărate+concluzia falsă e imposibil)

Arătăm că o formulă e o contradicție prin *metoda rezoluției*.

Rezoluția în calculul propozițional

Rezoluția e o *regulă de inferență* care produce o *nouă clauză* din două clauze cu *literalii complementari* (p și $\neg p$).

$\frac{p \vee A \quad \neg p \vee B}{A \vee B} \quad \text{rezoluție}$
--

"Din clauzele $p \vee A$ și $\neg p \vee B$ deducem/derivăm clauza $A \vee B$ "

Reamintim: *clauză* = *disjuncție* \vee de *literalii* (propoziții sau negații)

Clauza obținută = *rezolventul* celor două clauze în raport cu p

Exemplu: $\text{rez}_p(p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee s) = q \vee \neg r \vee s$

Modus ponens poate fi privit ca un *caz particular de rezoluție*:

$$\frac{p \vee \text{false} \quad \neg p \vee q}{\text{false} \vee q}$$

Rezoluția e o regulă validă

$$\frac{p \vee A \quad \neg p \vee B}{A \vee B} \quad \text{rezoluție}$$

Rezoluția e o regulă de inferență *validă*:

$$\{p \vee A, \neg p \vee B\} \models A \vee B$$

orice atribuire care face premisele adevărate face și concluzia adevărată

pentru $p = T$, trebuie să arătăm $B \models A \vee B$:

dacă $B = T$, atunci și $A \vee B = T$

simetric pentru $p = F$, deci regula e validă

Corolar: dacă $A \vee B$ e contradicție, la fel și $(p \vee A) \wedge (\neg p \vee B)$

dacă ajungem la contradicție, și formula inițială era contradicție

Exemplu de rezoluție (1)

$$\begin{array}{ll} (a \vee \neg b \vee \neg d) & b \text{ negat} \\ \wedge (\neg a \vee \neg b) & b \text{ negat} \\ \wedge (\neg a \vee c \vee \neg d) & \\ \wedge (\neg a \vee b \vee c) & b \text{ pozitiv} \end{array}$$

$$\wedge (\neg a \vee c \vee \neg d)$$

$$\wedge (\neg a \vee b \vee c) \quad b \text{ pozitiv}$$

Luăm o propoziție cu ambele polarități (b) și construim rezolvenții

$$\text{rez}_b(a \vee \neg b \vee \neg d, \neg a \vee b \vee c) = a \vee \neg d \vee \neg a \vee c = T$$

$$\text{rez}_b(\neg a \vee \neg b, \neg a \vee b \vee c) = \neg a \vee \neg a \vee c = \neg a \vee c$$

Adăugăm noii rezolvenți (ignorăm T); eliminăm vechile clauze cu b

$$(\neg a \vee c \vee \neg d)$$

$$\wedge (\neg a \vee c)$$

Nu mai putem crea rezolvenți. Nu avem clauza vidă.

\Rightarrow formula e realizabilă, de exemplu cu $a = F$. Sau cu $c = T$.

Pentru o atribuire suficientă ca să facă formula realizabilă, revenim la formula inițială, și dăm valori și lui b și/sau d .

Exemplu de rezoluție (2)

$$a$$

$$\wedge (\neg a \vee b)$$

$$\wedge (\neg b \vee c)$$

c pozitiv

$$\wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$$

c negat

Aplicăm rezoluția după c , avem o singură pereche de clauze:

$$\text{rez}_c(\neg b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee \neg c) = \neg b \vee \neg a \vee \neg b = \neg a \vee \neg b$$

Eliminăm cele două clauze cu c și adăugăm clauza nouă:

$$a$$

$$\wedge (\neg a \vee b)$$

$$\wedge (\neg a \vee \neg b)$$

Aplicăm rezoluția după b :

$$\text{rez}_b(\neg a \vee b, \neg a \vee \neg b) = \neg a \vee \neg a = \neg a$$

Eliminăm cele două clauze cu b , adăugăm clauza nouă: a

$$\text{rez}_b(\neg a \vee b, \neg a \vee \neg b) = \neg a \vee \neg a = \neg a$$

Eliminăm cele două clauze cu b , adăugăm clauza nouă: $\begin{matrix} a \\ \wedge \neg a \end{matrix}$

Aplicăm rezoluția după a : $\text{rez}_a(a, \neg a) = F$ (clauza vidă) Deci formula inițială e o contradicție (e nerealizabilă).

Aplicarea rezoluției în calculul propozițional

Pornind de la o formulă în formă normală conjunctivă (CNF),
adăugăm rezolvenți, încercând să *obținem clauza vidă*:

Alegem o propoziție p și adăugăm toți rezolvenții în raport cu p :
din m clauze cu p și n clauze cu $\neg p$, creăm $m \cdot n$ rezolvenți
am eliminat $p \Rightarrow$ ștergem cele $m+n$ clauze inițiale

Dacă vreun rezolvent e *clauza vidă*, formula e *nerealizabilă*

Dacă nu mai putem crea rezolvenți (literalii au polaritate unică),
formula e *realizabilă* (facem T toți literalii rămași)

Numărul de clauze poate crește exponențial (problematic!)

Rezoluția: de la propoziții la predicate

În logica predicatelor, un *literal* nu e o propoziție, ci un *predicat*
nu doar p și $\neg p$, ci $P(\text{ara } 1)$ și $\neg P(\text{ara } 2)$ (argumente diferite)

În logica predicatelor, un *literal* nu e o propoziție, ci un *predicat* nu doar p și $\neg p$, ci $P(\text{arg } 1)$ și $\neg P(\text{arg } 2)$ (argumente diferite)

Pentru a deriva o nouă clauză din $A \vee P(\text{arg } 1)$ și $B \vee \neg P(\text{arg } 2)$ trebuie să încercăm să aducem argumentele la o expresie comună.

Vom avea clauze cu variabile implicit cuantificate universal pot lua orice valoare \Rightarrow le putem *substitui* cu *termeni*

Există o substituție care aduce predicatele la o formă comună?

ex. 1: $P(x, g(y))$ și $P(a, z)$

ex. 2: $P(x, g(y))$ și $P(z, a)$

În exemplul 1, substituind $x \mapsto a$, $z \mapsto g(y)$ obținem $P(a, g(y))$ și $P(a, g(y)) \Rightarrow$ am găsit o formă comună

În ex. 2 nu putem substitui *constantă* a cu $g(y)$ (a nu e variabilă) g e funcție arbitrară, nu știm dacă există un y cu $g(y) = a$

Substituții și unificări de termeni

O *substituție* e o *funcție* care asociază unor *variabile* niște *termeni*:

$$\{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$$

Doi termeni se pot *unifica* dacă există o substituție care îi face egali $f(x, g(y, z), t)\{x \mapsto h(z), y \mapsto h(b), t \mapsto u\} = f(h(z), g(h(b), z), u)$

Reguli de unificare

O *variabilă* x poate fi unificată cu orice *termen* t (substituție) dacă x *nu apare* în t (altfel, substituind obținem un termen infinit)

deci nu: x cu $f(h(v), a(x, z))$

O **variabilă** x poate fi unificată cu orice **termen** t (substituție) dacă x **nu apare** în t (altfel, substituind obținem un termen infinit)
deci nu: x cu $f(h(y), g(x, z))$

Doi **termeni** $f(\dots)$ pot fi unificați doar dacă au aceeași funcție, și **argumentele** (termeni) pot fi unificate (poziție cu poziție)

Două **constante** (funcții cu 0 arg.) \Rightarrow unificate dacă sunt identice

Rezoluția în calculul predicatelor

Fie clauzele: A cu $P(\dots)$ **pozitiv** și B , cu $\neg P(\dots)$ (**negat**) Exemplu:

$A: P(x, g(y)) \vee P(h(a), z) \vee Q(z)$

$B: \neg P(h(z), t) \vee R(t, z)$

Alegem niște (≥ 1) $P(\dots)$ din A și niște $\neg P(\dots)$ din B . aici: toți

Redenumim variabilele comune (nu au legătură între A și B)

$A: P(x, g(y)) \vee P(h(a), z) \vee Q(z)$ $B: \neg P(h(z_2), t) \vee R(t, z_2)$

Unificăm (toți odată) doar acei $P(\dots)$ din A și $\neg P(\dots)$ din B aleși

$\{P(x, g(y)), P(h(a), z), P(h(z_2), t)\} \quad x \mapsto h(a); z_2 \mapsto a; z, t \mapsto g(y)$

Eliminăm pe $P(\dots)$ și $\neg P(\dots)$ aleși din $A \vee B$. **Aplicăm substituția** rezultată **din unificare** și **adăugăm noua clauză** la lista clauzelor.

$Q(g(y)) \vee R(g(y), a)$

Păstrăm clauzele inițiale, se pot folosi cu alte alegeri de predicate.

Rezoluția: în concluzie

Generăm repetat clauze noi (*rezolvenți*) prin **rezoluție cu unificare**

Dacă repetând obținem *clauza vidă*, formula inițială e *nerealizabilă*.

Dacă *nu mai găsim rezolvenți noi*, formula inițială e *realizabilă*.

Reamintim: am pornit încercând să demonstrăm

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow C$$

prin *reducere la absurd*, negând concluzia și arătând că

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg C \text{ e } \textit{contradicție}$$

Metoda rezoluției e *completă* relativ la refutație

pentru orice formulă nerealizabilă, va ajunge la clauza vidă

dar nu poate *determina* realizabilitatea *oricărei formule*

(există formule pentru care rulează la infinit)

Exemplu de aplicare a rezoluției

Reluăm exercițiul formalizat anterior.

Folosim () și nu . pentru a evita greșeli la aplicarea cuantificării.

$$A_1: \forall X (inv(X) \rightarrow \exists C (cump(X, C) \wedge (act(C) \vee oblig(C))))$$

$$A_2: scadedj \rightarrow \forall X (act(X) \wedge \neg aur(X) \rightarrow scade(X))$$

$A_1: \forall X (inv(X) \rightarrow \exists C (cump(X, C) \wedge (act(C) \vee oblig(C))))$

$A_2: scadedj \rightarrow \forall X (act(X) \wedge \neg aur(X) \rightarrow scade(X))$

$A_3: crestedob \rightarrow \forall X (oblig(X) \rightarrow scade(X))$

$A_4: \forall X (inv(X) \rightarrow (\exists C (cump(X, C) \wedge scade(C)) \rightarrow \neg bucur(X)))$

$C: scadedj \wedge crestedob \rightarrow$

$\forall X (inv(X) \wedge bucur(X) \rightarrow \exists C (cump(X, C) \wedge act(C) \wedge aur(C)))$

Negăm concluzia *la început*, înainte de a transforma cuantificatorii!

$\neg C: \neg(scadedj \wedge crestedob \rightarrow$

$\forall X (inv(X) \wedge bucur(X) \rightarrow \exists C (cump(X, C) \wedge act(C) \wedge aur(C))))$

Eliminăm implicația, ducem negația până la predicate

1. *Eliminăm implicația*: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$, $\neg(A \rightarrow B) = A \wedge \neg B$

Orice transformare *într-o formulă* NU afectează ce e în afara ei!

În $\forall x A$, transformând oricum *pe A* (\rightarrow , \neg , ...) NU se schimbă $\forall x$

2. Ducem \neg *înăuntru*: $\neg \forall x P(x) = \exists x \neg P(x)$ $\neg \exists x P(x) = \forall x \neg P(x)$

$A_1: \forall X (inv(X) \rightarrow \exists C (cump(X, C) \wedge (act(C) \vee oblig(C))))$

$\forall X (\neg inv(X) \vee \exists C (cump(X, C) \wedge (act(C) \vee oblig(C))))$

$A_2: scadedj \rightarrow \forall X (act(X) \wedge \neg aur(X) \rightarrow scade(X))$

$\neg scadedj \vee \forall X (\neg act(X) \vee aur(X) \vee scade(X))$

$A_3: crestedob \rightarrow \forall X (oblig(X) \rightarrow scade(X))$

$\neg crestedob \vee \forall X (\neg oblig(X) \vee scade(X))$

$A_4: \forall X (inv(X) \rightarrow (\exists C (cump(X, C) \wedge scade(C)) \rightarrow \neg bucur(X)))$

$\neg \text{creștedob} \vee \forall X (\neg \text{oblig}(X) \vee \text{scade}(X))$

$A_4: \forall X (\text{inv}(X) \rightarrow (\exists C (\text{cump}(X, C) \wedge \text{scade}(C)) \rightarrow \neg \text{bucur}(X)))$

$\forall X (\neg \text{inv}(X) \vee \neg \exists C (\text{cump}(X, C) \wedge \text{scade}(C)) \vee \neg \text{bucur}(X))$

$\forall X (\neg \text{inv}(X) \vee \forall C (\neg \text{cump}(X, C) \vee \neg \text{scade}(C)) \vee \neg \text{bucur}(X))$

Eliminăm implicația, ducem negația înăuntru (cont.)

$\neg C: \neg(\text{scadedj} \wedge \text{creștedob} \rightarrow$

$\forall X (\text{inv}(X) \wedge \text{bucur}(X) \rightarrow \exists C (\text{cump}(X, C) \wedge \text{act}(C) \wedge \text{aur}(C))))$

$\neg C: \text{scadedj} \wedge \text{creștedob} \wedge$

$\neg \forall X (\text{inv}(X) \wedge \text{bucur}(X) \rightarrow \exists C (\text{cump}(X, C) \wedge \text{act}(C) \wedge \text{aur}(C)))$

$\text{scadedj} \wedge \text{creștedob} \wedge$

$\exists X (\text{inv}(X) \wedge \text{bucur}(X) \wedge \neg \exists C (\text{cump}(X, C) \wedge \text{act}(C) \wedge \text{aur}(C)))$

$\text{scadedj} \wedge \text{creștedob} \wedge$

$\exists X (\text{inv}(X) \wedge \text{bucur}(X) \wedge \forall C (\neg \text{cump}(X, C) \vee \neg \text{act}(C) \vee \neg \text{aur}(C)))$

Redenumim: nume unice la variabile cuantificate

3. Dăm *nume unice* variabilelor cuantificate în fiecare formulă,

3. Dăm *nume unice* variabilelor cuantificate în fiecare formulă, pentru a putea elimina ulterior cuantificatorii. De exemplu:

$\forall x P(x) \vee \forall x \exists y Q(x, y)$ devine $\forall x P(x) \vee \forall z \exists y Q(z, y)$

Nu e nevoie în exemplul nostru:

$A_1: \forall X (\neg inv(X) \vee \exists C (cump(X, C) \wedge (act(C) \vee oblig(C))))$

$A_2: \neg scadedj \vee \forall X (\neg act(X) \vee aur(X) \vee scade(X))$

$A_3: \neg crestedob \vee \forall X (\neg oblig(X) \vee scade(X))$

$A_4: \forall X (\neg inv(X) \vee \forall C (\neg cump(X, C) \vee \neg scade(C)) \vee \neg bucur(X))$

$\neg C : scadedj \wedge crestedob \wedge$

$\exists X (inv(X) \wedge bucur(X) \wedge \forall C (\neg cump(X, C) \vee \neg act(C) \vee \neg aur(C)))$

Skolemizare: eliminăm cuantificatorii existențiali

4. *Skolemizare*: În $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y$, alegerea lui y *depinde* de x_1, \dots, x_n ; introducem o nouă *funcție Skolem* $y = g(x_1, \dots, x_n)$, $\exists y$ dispare

$A_1: \forall X (\neg inv(X) \vee \exists C (cump(X, C) \wedge (act(C) \vee oblig(C))))$

C din \exists depinde de $X \Rightarrow C$ devine o *nouă funcție* $f(X)$, $\exists C$ dispare

$\forall X (\neg inv(X) \vee (cump(X, f(X)) \wedge (act(f(X)) \vee oblig(f(X))))$

Atenție! fiecare cuantificator \exists primește o *nouă funcție* Skolem!

Pentru $\exists y$ în *exteriorul* oricărui \forall , alegem o nouă *constantă Skolem*

$\neg C : scadedj \wedge crestedob \wedge \exists X (inv(X) \wedge bucur(X))$

Pentru $\exists y$ în *exteriorul* oricărui \forall , alegem o nouă *constantă Skolem*

$$\neg C : scadedj \wedge creștedob \wedge \exists X (inv(X) \wedge bucur(X) \\ \wedge \forall C (\neg cump(X, C) \vee \neg act(C) \vee \neg aur(C)))$$

X devine o nouă *constantă* b (nu depinde de nimic), $\exists X$ dispare

$$scadedj \wedge creștedob \wedge inv(b) \wedge bucur(b) \\ \wedge \forall C (\neg cump(b, C) \vee \neg act(C) \vee \neg aur(C))$$

5. Ducem *cuantificatorii universali în față: forma normală prenex*

$$A_4: \forall X (\neg inv(X) \vee \forall C (\neg cump(X, C) \vee \neg scade(C)) \vee \neg bucur(X)) \\ \forall X \forall C (\neg inv(X) \vee \neg cump(X, C) \vee \neg scade(C) \vee \neg bucur(X))$$

6. *Eliminăm cuantificatorii universali*

(devin implicați, o variabilă poate fi înlocuită cu orice termen).

$$A_1: (\neg inv(X) \vee (cump(X, f(X)) \wedge (act(f(X)) \vee oblig(f(X)))))$$

$$A_2: \neg scadedj \vee \neg act(X) \vee aur(X) \vee scade(X)$$

$$A_3: \neg creștedob \vee \neg oblig(X) \vee scade(X)$$

$$A_4: \neg inv(X) \vee \neg cump(X, C) \vee \neg scade(C) \vee \neg bucur(X)$$

$$\neg C : scadedj \wedge creștedob \wedge inv(b) \wedge bucur(b) \\ \wedge (\neg cump(b, C) \vee \neg act(C) \vee \neg aur(C))$$

Forma clauzală

7. Ducem *conjuncția în exteriorul* disjuncției (distributivitate) și scriem fiecare clauză separat (*formă clauzală*, CNF)

7. Ducem *conjunția în exteriorul* disjuncției (distributivitate) și scriem fiecare clauză separat (*formă clauzală*, CNF)

- (1) $\neg inv(X) \vee cump(X, f(X))$
- (2) $\neg inv(X) \vee act(f(X)) \vee oblig(f(X))$
- (3) $\neg scadedj \vee \neg act(X) \vee aur(X) \vee scade(X)$
- (4) $\neg creștedob \vee \neg oblig(X) \vee scade(X)$
- (5) $\neg inv(X) \vee \neg cump(X, C) \vee \neg scade(C) \vee \neg bucur(X)$
- (6) $scadedj$
- (7) $creștedob$
- (8) $inv(b)$
- (9) $bucur(b)$
- (10) $\neg cump(b, C) \vee \neg act(C) \vee \neg aur(C)$

Generăm rezolvenți până la clauza vidă

Căutăm predicate $P(\dots)$ și $\neg P(\dots)$ și unificăm, obținând rezolvenții:

$$(11) \neg act(X) \vee aur(X) \vee scade(X) \quad (3, 6)$$

$$(12) \neg cump(b, C) \vee \neg act(C) \vee scade(C) \quad (10, 11, X = C)$$

$$(13) \neg oblig(X) \vee scade(X) \quad (4, 7)$$

Când unificăm, redenumim clauzele să nu aibă variabile comune:

$$(13) \neg oblig(Y) \vee scade(Y) \quad \text{vom unifica cu (2), redenumim } X$$

$$(14) \neg inv(X) \vee act(f(X)) \vee scade(f(X)) \quad (2, 13, Y = X)$$

$$(15) \neg cump(b, f(X)) \vee \neg inv(X) \vee scade(f(X)) \quad (12, 14, C = f(X))$$

$$(16) \neg cump(b, C) \vee \neg scade(C) \vee \neg bucur(b) \quad (5, 8, X = b)$$

$$(17) \neg cump(b, C) \vee \neg scade(C) \quad (9, 16)$$

- (16) $\neg \text{cump}(b, C) \vee \neg \text{scade}(C) \vee \neg \text{bucur}(b)$ (5, 8, $X = b$)
 (17) $\neg \text{cump}(b, C) \vee \neg \text{scade}(C)$ (9, 16)
 (18) $\neg \text{cump}(b, f(X)) \vee \neg \text{inv}(X)$ (15, 17, $C = f(X)$)
 (19) $\neg \text{inv}(b)$ (1, 18, $X = b$)
 (20) \emptyset (contradicție = succes în reducerea la absurd) (8, 19)

Putem traduce (*formaliza*) din limbaj natural în logica predicatelor

Putem *demonstra teoreme* prin reducere la absurd:

negăm concluzia

transformăm în *formă clauzală* (conjunție \wedge de disjuncții \vee)

prin metoda *rezoluției* găsim o *contradicție* (clauza vidă)