

Material 4

1. SEMNALE PERIODICE. CARACTERIZARE ÎN DOMENIILE TEMP ȘI FRECVENȚĂ.

Câteva moduri, nu singurele, prin care putem descrie semnalele pe care le utilizăm în aplicațiile ingineresti sunt următoarele:

- *Semnale periodice sau aleatorii* – semnalele periodice se mai numesc și semnale deterministe. Cele aleatorii se mai numesc și semnale nedeterministe. Câteva exemple de semnale periodice întâlnite în aplicații ingineresti ar fi cele de tip sinusoidal, triunghiular, rectangular sau dinte de fierastrău. Câteva exemple de semnale aleatorii ar fi sunetul creat de foșnetul frunzelor din copaci, sunetul vocii sau sunetul valurilor care lovesc stâncile;
- *Semnale analogice sau discrete* – semnalele analogice se mai numesc semnale continue. Cele discrete reprezintă replici ale unor semnale analogice și sunt obținute prin utilizarea procesului de *eșantionare*.

Semnalele periodice pot fi descrise (mai mult sau mai puțin) cu ajutorul unei relații matematice. Astfel, evoluția lor în timp este cunoscută. Acest tip de semnale este utilizat în cadrul multor aplicații ingineresti. Spre exemplu, în aplicațiile industriale care aparțin domeniului testării sau achiziției de date, semnalele periodice sunt omniprezente. Prin urmare, cunoașterea minimă a unor parametri ai acestora reprezintă o prioritate.

Semnalele aleatorii sunt mult mai dificil de caracterizat, din cauza comportamentului lor nepredictibil. În practică, calcule matematice complexe și diferite metode statistice reprezintă unelte cu ajutorul cărora sunt prelucrate eșantioanele semnalelor aleatorii.

Totuși, măsurarea caracteristicilor acestor semnale presupune urmărirea evoluției lor în domeniul timp. Osciloscopul reprezintă dispozitivul consacrat utilizat pentru vizualizarea și analiza complexă a *formelor de undă*. Este foarte posibil ca pentru anumite aplicații să avem nevoie de o caracterizare simplă a unui semnal periodic, prin evaluarea amplitudinii sale. În acest caz, determinarea *valorii efective* (sau valoarea *root mean square - rms*) este suficientă și poate fi rapid obținută cu ajutorul unui multimetre reglat pentru măsurarea semnalelor alternante.

Măsurarea semnalelor alternante trebuie să țină cont și de banda de frecvențe a dispozitivului de măsurare. Cu alte cuvinte, trebuie să ținem cont de faptul că impedanța de intrare a dispozitivelor este dependentă de frecvență. În plus, creșterea frecvenței semnalului de intrare determină apariția capacitaților paralele parazite și a inductivitaților serie parazite, specifice cablurilor sondelor de măsură. Reținem că măsurarea semnalelor alternante, comparativ cu măsurarea semnalelor continue, implică o analiză mai atentă a condițiilor de lucru.

În continuare vom discuta despre caracterizarea *semnalelor periodice* în domeniul timp. Relația următoare reprezintă descrierea generală a semnalelor sinusoidale, unde $x(t)$ este valoarea semnalului la momentul de timp t . Parametrul A reprezintă amplitudinea în alternanță pozitivă și este utilizat pentru a caracteriza simetria semnalului față de axa timpului. *Pulsăția semnalului* (sau *frecvența unghiulară*), ω , este exprimată în $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Defazajul semnalului față de origine, θ (uneori notat cu φ sau Φ), este exprimat în rad, dar în cele mai multe aplicații este ignorat. C reprezintă componenta continuă a semnalului sinusoidal și poate avea valori pozitive sau negative. Dacă această componentă este nulă, semnalul este simetric față de axa timpului.

$$x(t) = C + A \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta). \quad (1)$$

În general, semnalul periodic $x(t)$ respectă relația (2).

$$x(t) = x(t \pm n \cdot T). \quad (2)$$

Relația (2) prezintă repetiția ciclică a semnalului, unde T este perioada fundamentală, iar n este un număr întreg. Cu alte cuvinte, T reprezintă valoarea minimă (exprimată în unități de timp), pentru care semnalul poate fi deplasat la stânga sau la dreapta pe axa timpului, astfel încât să producă o reprezentare identică. Sau $x(t_0) = x(t_0 \pm T) = x(t_0 \pm 2 \cdot T) = x(t_0 \pm 3 \cdot T)$ etc. Relația este valabilă pentru o valoare a lui t_0 aleatorie.

Perioada fundamentală $T = \frac{1}{f}$ s, unde f este *frecvența semnalului* exprimată în Hz. Relația între f și ω este: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. În funcție de aplicația la care lucrăm, este important să știm că putem converti între ele cele două reprezentări.

Revenind la caracterizarea amplitudinii unui semnal, parametrul A_{PP} reprezintă amplitudinea vârf la vârf a semnalului, sau diferența între valorile maximă și minimă. Putem face observația că discuția noastră are în vedere acele semnale care nu prezintă valori tranzitorii.

Valoarea medie a semnalelor periodice se poate calcula cu ajutorul relației (3). Valoarea medie X_m a unui semnal periodic simetric față de axa timpului este nulă. Totuși, în unele aplicații este util calculul acestei valori doar pentru alternația pozitivă a semnalului.

$$X_m = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) dt. \quad (3)$$

Valoarea efectivă a unui semnal se poate calcula cu ajutorul relației (4).

$$X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t)^2 dt}. \quad (4)$$

Pentru a ușura modul în care obținem valorile efective ale unor semnale periodice des întâlnite, putem reține următoarele relații. Pentru un *semnal sinusoidal*, simetric față de axa timpului, valoarea $X_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0,354 \cdot A_{PP}$. Pentru un *semnal rectangular*, simetric față de axa timpului, valoarea $X_{rms} = A = 0,5 \cdot A_{PP}$. Pentru un *semnal triunghiular*, simetric față de axa timpului, valoarea $X_{rms} = \frac{A}{\sqrt{3}} = 0,289 \cdot A_{PP}$.

Factorul de formă $K_f = \frac{X_{rms}}{X_m}$ arată deviația de la valoarea medie a evoluției semnalului și reprezintă o masură a calității semnalului. Există valori predefinite ale parametrului K_f astfel încât să evaluăm cu ușurință calitatea semnalului nostru comparativ cu o valoare nominală. De exemplu, pentru *semnalul sinusoidal simetric*, K_f nominal este aproximativ 1,11. Pentru *semnalul rectangular simetric*, K_f nominal este 1. Pentru *semnalul triunghiular simetric*, K_f nominal este aproximativ 1,15. Pentru *semnalul de tip dinte de fierestrău* (sau rampă) simetric, K_f nominal este aproximativ 1,15.

Factorul de creastă $K_{cr} = \frac{A_{max}}{X_{rms}}$, unde A_{max} este valoarea maximă din semnal (peak value). Parametrul K_{cr} poate fi utilizat ca indicație a unor *creșteri/impulsuri/tranziții* (sau *spike-uri*)

nedorite. Există valori predefinite ale parametrului K_{cr} . Pentru un *semnal sinusoidal simetric*, K_{cr} nominal este aproximativ 1,41. Pentru un *semnal rectangular simetric*, K_{cr} nominal este 1, în timp ce pentru *semnalul triunghiular simetric*, K_{cr} nominal este aproximativ 1,73.

În Fig.1 observăm câteva tipuri de semnale uzuale.

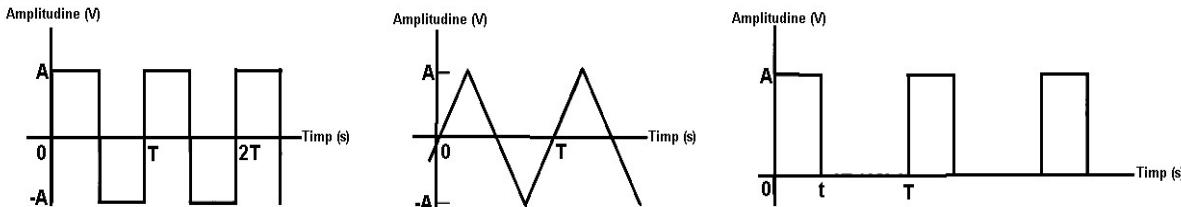


Fig.1 Reprezentarea unor semnale periodice uzuale $x(t)$: rectangular (stânga), triunghiular (centru), impuls (dreapta).

Factorul de umplere δ (sau *Duty Cycle*) apare în discuție dacă lucrăm cu semnale de tip impuls periodic. Nu faceți confuzia între un *semnal rectangular* și un *semnal de tip impuls*. În aplicațiile inginerești, semnalul de tip impuls apare des sub denumirea *PWM*, sau *Pulse Width Modulated*. Pentru acest semnal, parametrul δ este ajustabil. Un semnal rectangular reprezintă un semnal de tip impuls, având $\delta = 50\%$.

Cu referire la semnalul de tip impuls, intervalul $0 - t$ desemnează factorul de umplere δ . Relația $\delta = \frac{t}{T}$ reprezintă un procentaj. De exemplu: 33%, 40% etc. La unele dispozitive de tip generator de semnal, setarea factorului de umplere nu este specificată în procente, ci în unități de timp. Spre exemplu, setăm perioada $T = 2$ s, iar factorul de umplere $\delta = 500$ ms (25%, adică exprimat ca procent).

O procedură importantă pe care o vom întâlni în discuțiile inginerești este *eșantionarea semnalelor*. Prin procesul de eșantionare, cu ajutorul unor echipamente care permit conversia din reprezentarea analogică în reprezentarea digitală, obținem o colecție finită de valori extrase din semnalele reale. Acest set de valori poate fi procesat ulterior cu ajutorul calculatorului. Trebuie să fim foarte atenți, astfel încât extragerea valorilor din semnalul analogic să respecte reguli care permit păstrarea intactă a caracteristicilor de formă și frecvență. Evident, depindem și de calitatea echipamentelor de conversie, însă această discuție nu face parte din scopul prezentului material.

Teorema eșantionării (*Nyquist–Shannon sampling theorem*) precizează că pentru a păstra intactă informația de formă și frecvență din semnalul inițial, rata de conversie la care lucrăm trebuie să fie de cel puțin două ori mai mare decât frecvența maximă din semnalul analogic. Cu alte cuvinte, criteriul impus asupra frecvenței de eșantionare reprezintă o condiție suficientă pentru ca semnalul nostru discret să conțină toată informația utilă din semnalul analogic inițial (acesta având bandă de frecvențe finită). În practică, frecvența de eșantionare este setată la valori de cinci, până la zece ori mai mari decât frecvența maximă din semnal. În general, trebuie avut în vedere un compromis între frecvența de eșantionare la care lucrăm și numărul de eșanțioane pe care le prelucrăm. Nu are sens să achiziționăm un număr prea mare de eșanțioane dacă nu avem nevoie (apare fenomenul de supraeșantionare, sau oversampling).

Deseori, în specificațiile dispozitivelor pentru achiziția semnalelor (sau eșantionarea semnalelor), valoarea maximă a parametrului f_e apare sub abrevierile kS/s sau MS/s. Cu alte cuvinte, discutăm despre *kiloSamples/second* sau *număr de eșanțioane pe secundă*. Această notație este preferată pentru a face distincție între frecvența semnalului analogic (f cu exprimare în Hz, kHz, MHz etc.) și frecvența sau rata de eșantionare a dispozitivului în cauză (f_e cu exprimare în

S/s , kS/s , MS/s etc.). Exact cum ne arată denumirea, ne referim la capabilitatea dispozitivului de a înregistra un anumit număr de eșantioane în fiecare secundă. Dacă am presupune că un dispozitiv de achiziție a datelor poate eșantiona un semnal cu o rată de 2 kS/s, astă înseamnă că la fiecare secundă dispozitivul eșantionează 2500 de valori. Prin urmare, perioada de eșantionare este $T_e = 0,4\text{ ms}$ și $f_e = 2,5\text{ kHz}$.

Cercetătorul francez J.B.J. Fourier demonstrează că o funcție periodică poate fi descompusă într-o sumă infinită de componente sinusoidale și cosinusoidale, înrudite armonic. Astfel, perioada fiecărui termen (sau componentă) din seria Fourier este o armonică a ceea ce am numit perioada fundamentală T a semnalului inițial. În sens invers, putem afirma că adunând toate aceste componente sinusoidale și cosinusoidale, de amplitudini și frecvențe diferite, vom obține semnalul periodic inițial. Fig.2.4, preluată din mediul on-line, ilustrează descompunerea orientativă a unui semnal de tip dinte de fierestrău în componente sinusoidale și cosinusoidale.

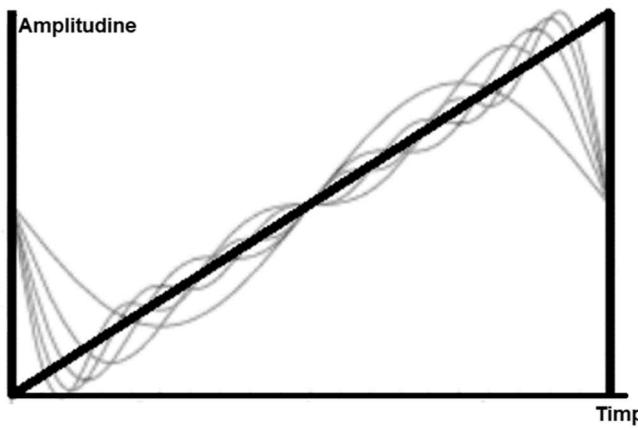


Fig.2 Reprezentare grafică a descompunerii în serie Fourier pentru semnalul de tip dinte de fierestrău.

Pornim de la relația care reprezintă descompunerea semnalului periodic $x(t)$ în seria Fourier de formă trigonometrică (care nu este singura formă a seriei):

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)] \quad (5)$$

În relația (5), a_0 reprezintă *componenta continuă C*, iar alături de a_n și b_n sunt *coeficienții seriei Fourier*, care vor fi calculați separat. Parametrul ω_0 reprezintă *frecvența fundamentală a semnalului $x(t)$* și este egală cu $\frac{2\pi}{T}$. Multiplii lui ω_0 (sau $2 \cdot \omega_0, 3 \cdot \omega_0, 4 \cdot \omega_0$ etc.) se numesc *frecvențe armonice ale semnalului $x(t)$* . Parametrul n reprezintă un număr întreg în secvența 1, 2, 3 etc.

În continuare vom defini *coeficienții seriei Fourier* și vom determina valoarea acestora.

$$a_0 = X_m = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt.$$

Vom aplica descompunerea în serie Fourier pentru semnalul de tip *dinte de fierestrău* caracterizat în domeniul timp cu ajutorul relației $x(t) = \frac{A}{T} \cdot t$, unde $0 < t < T$. Vom reveni asupra acestui semnal în cadrul secțiunii de aplicații. Momentan, acceptăm relația prezentată.

Calculăm coeficienții a_n și b_n cu ajutorul integrării prin părți.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt = \frac{2 \cdot A}{T^2} \left[\frac{t}{n \cdot \omega_0} \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{1}{n^2 \cdot \omega_0^2} \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) \right] \Big|_0^T \xrightarrow{\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T}} \\ a_n = \frac{2 \cdot A}{n \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \sin(n \cdot 2 \cdot \pi) + \frac{2 \cdot A}{n^2 \cdot 4 \cdot \pi^2} \cdot \cos(n \cdot 2 \cdot \pi) - \frac{2 \cdot A}{n^2 \cdot 4 \cdot \pi^2} = 0, \text{ indiferent de valoarea lui } n.$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt = \frac{2 \cdot A}{T^2} \left[\frac{1}{n^2 \cdot \omega_0^2} \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) - \frac{t}{n \cdot \omega_0} \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) \right] \Big|_0^T \xrightarrow{\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T}}$$

$$b_n = \frac{2 \cdot A}{n^2 \cdot 4 \cdot \pi^2} \cdot \sin(n \cdot 2 \cdot \pi) - \frac{A}{n \cdot \pi} \cdot \cos(n \cdot 2 \cdot \pi) = -\frac{A}{n \cdot \pi}, \text{ indiferent de valoarea lui } n.$$

$$a_0 = X_m = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t dt = \frac{A}{T^2} \int_0^T t dt = \frac{A}{T^2} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^T = \frac{A}{2}.$$

Seria Fourier devine $x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[0 \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) - \frac{A}{n \cdot \pi} \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) \right] = \frac{A}{2} - \frac{A}{n \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) - \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t) - \frac{A}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot \omega_0 \cdot t) - \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot \sin(4 \cdot \omega_0 \cdot t) - \dots \text{ s.a.m.d.}$

Dacă presupunem că semnalul $x(t)$ are perioada $T = 6 ms$ (astfel $f \cong 170 Hz$) și amplitudinea $A = 1 V$, putem scrie seria Fourier ca $x(t) \cong 0,5 - 0,32 \cdot \sin(1043 \cdot t) - 0,16 \cdot \sin(2086 \cdot t) - 0,11 \cdot \sin(3129 \cdot t) - \dots$ s.a.m.d. După cum observăm, semnalul $x(t)$ conține componenta continuă $C \cong 0,5 V$ și componente sinusoide descrise prin amplitudini și frecvențe proprii. Intuitiv, dacă am reprezenta grafic, în domeniul timp, toate aceste componente sinusoide, iar apoi le-am însuma alături de componenta continuă, rezultatul final ar fi semnalul de tip *dinte de fierestrău* prezentat în Fig.3.

Reprezentarea valorilor amplitudinii pentru componente seriei Fourier în funcție de frecvență (vezi Fig.3) constituie spectrul de amplitudini. Deoarece informația de conținut se regăsește la valori discrete de frecvență ($\omega_0, 2 \cdot \omega_0, 3 \cdot \omega_0, \dots$ unde $\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0$), graficul reprezintă aşa numitele *linii spectrale*. Trebuie menționat că, alături de spectrul de amplitudini, există și *spectrul de fază*. Aceasta reprezintă evoluția unghiului de fază în funcție de frecvență și caracterizează semnalul $x(t)$. Prezentul material nu are ca scop o discuție despre spectrul de fază, deoarece în cele mai multe aplicații din domeniul măsurărilor suntem interesati de conținutul spectral din punctul de vedere al amplitudinilor.

În Fig.3 identificăm liniile spectrale aferente descompunerii în serie Fourier. La frecvența $f = 0 Hz$ se situează componenta continuă $a_0 = X_m$, care are amplitudinea dublată. Este efectul conversiei spectrului de amplitudini de la forma dublă la forma simplă (*double sided spectrum* și *single sided spectrum*). Datorită aplicării algoritmului de calcul rapid FFT (sau Fast Fourier Transform), aplicația de reprezentare spectrală indică la frecvența $f = 0 Hz$ prezența unei componente $a_0 = 2 \cdot X_m$. Acest detaliu este suficient pentru scopul prezentului material. La frecvența $f_1 \cong 170 Hz$ se situează componenta sinusoidală de amplitudine $A_1 \cong 320 mV$. La frecvența $f_2 \cong 330 Hz$ - componenta sinusoidală de amplitudine $A_2 \cong 160 mV$. La $f f_3 \cong 500 Hz$ - cea de amplitudine $A_3 \cong 110 mV$. Iar reprezentarea continuă cu linii spectrale a căror amplitudine continuă să scadă. În cazul în care semnalul din exemplu nu ar fi avut componentă continuă ($C = 0 V$), spectrul de amplitudini ar fi fost neschimbat din punctul de vedere al

reprezentării liniilor spectrale pentru frecvențe mai mari decât 0 Hz. La frecvența de 0 Hz, nici nu am fi observat prezența liniei spectrale.

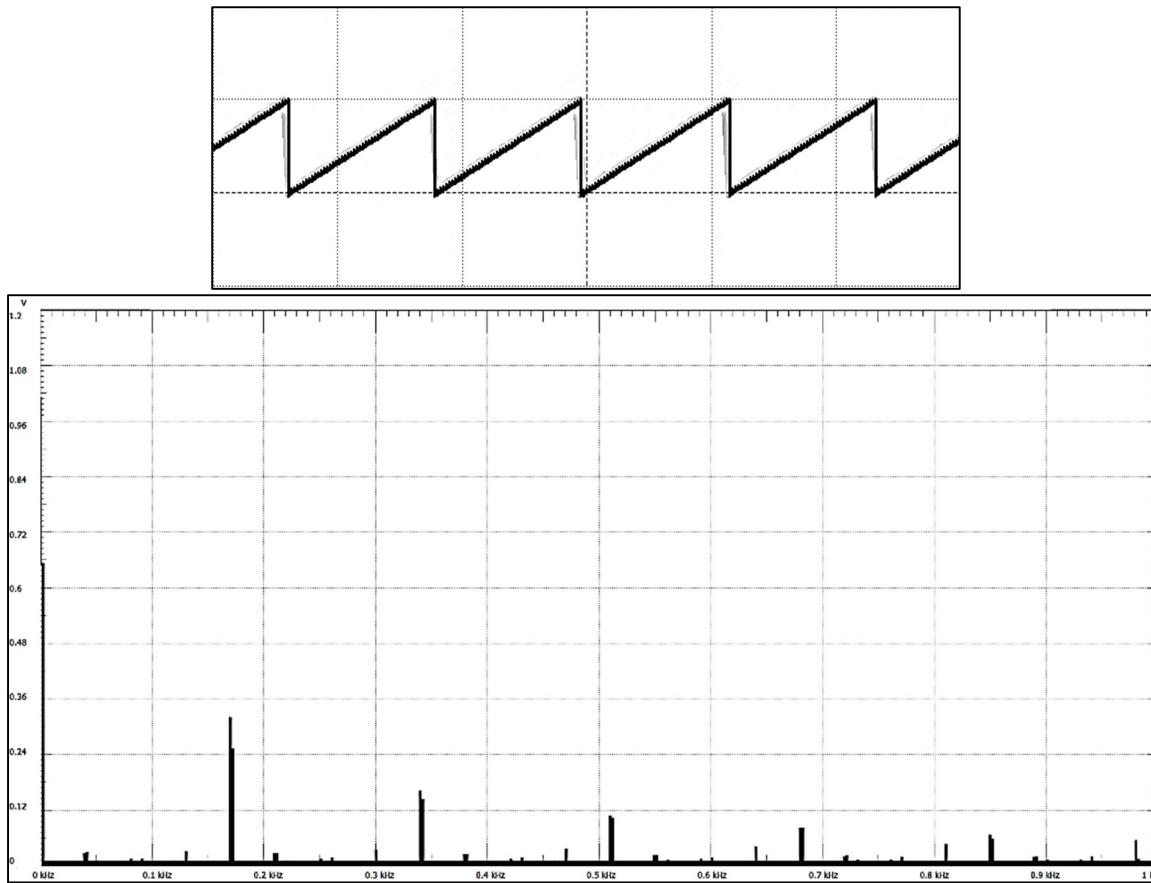
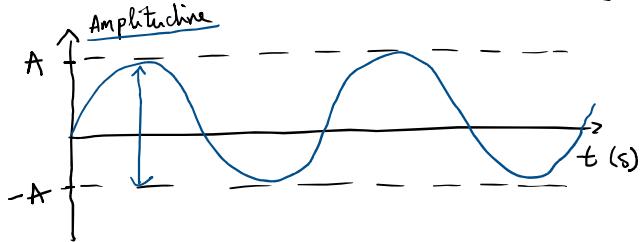


Fig.3 Reprezentare grafică a spectrului de amplitudini (în jos) pentru semnalul de tip dinte de fierestrău (în sus) vizualizat pentru setările osciloscopului ca fiind 1 V/div și 5 ms/div.

2. APLICATII.

În majoritatea cazurilor vom lucra cu semnale periodice (sinus, rectangular, triunghiular, impuls etc.). Dacă avem semnalul analogic din imaginea de mai jos, vom analiza descrierea parametrilor caracteristici.



$A = 1$, amplitudinea semnalului. A_{PP} - amplitudinea vârf la vârf (peak to peak), $A_{PP} = 2 \cdot A$.

W - pulsatia, frecventa angulară cu unitatea $[rad \cdot s^{-1}]$

$W = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{W}{2\pi}$, f - frecventa cu unitatea $[Hz]$

Θ - defazajul pe axa timpului, de cele mai multe ori este nul. Notații comune ar fi ϕ sau θ . Este interesant de studiat în aplicatii care tratează întârzierea la propagarea semnalilor (Ex. Radar) sau în momentul caracterizării componentelor de tip filtru. Θ se exprimă în radiani sau grade.

- semnalul este de tip sinusoidal, simetric ca amplitudine și poate fi descris ca:

$$x(t) = C + A \sin(\omega t + \Theta)$$

- în domeniul timp

C - componenta continuă, care în acest caz este nulă. Semnalul este simetric, $C = 0$. Dacă $C > 0$ atunci semnalul are exact aceeași formă, doar că este deplasat în sus pe axa amplitudinii. Dacă $C < 0$ atunci semnalul va fi deplasat în jos. C → offset.

Un semnal periodic, poate fi descris la modul general ca $x(t) = x(t \pm nT)$.
 Astfel $x(t) = x(t \pm T) = x(t \pm 2T) = x(t \pm 3T) = \dots$

Cu alte cuvinte, valoarea semnalului de la un anumit moment de timp se repetă cu $n \cdot T$. Așa că semnalul poate fi considerat determinist. Adică putem determina valorile sale la orice moment de timp, datorită acestei periodicități.

Exemplificăm cu ajutorul Matlab. Dorim să reprezentăm un semnal periodic analog.

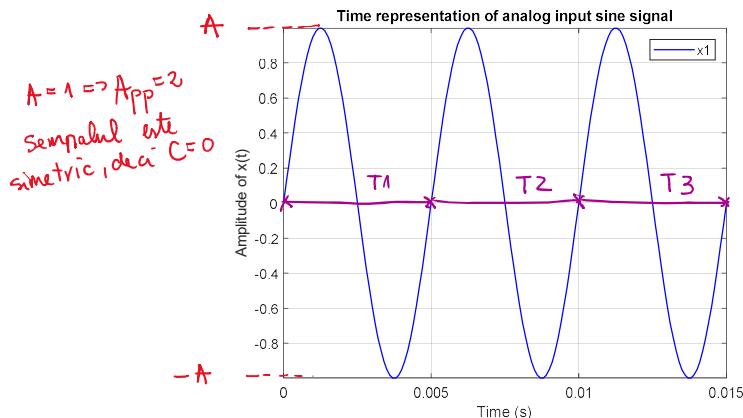
```

clear all;
close all;

END_TIME = 15*10^-3; % 15ms to plot 3 periods of the periodic signal
t = 0:0.0001:END_TIME; % vectorial de valori ajută la reprezentarea semnalului în domeniul timp
f_signal = 200; % 200Hz is the frequency of the input signal
T_signal = 1/f_signal; % → perioada semnalului
x1 = sin(2*pi*f_signal*t); % → A=1, ω=2π·200, θ=0°, C=0
disp('Frequency of analog periodic sine signal (Hz)');
f_signal
disp('Period of analog periodic sine signal (ms)');
T_signal

% representation of the analog input signal
figure(1);
set(gcf, 'Color', [1, 1, 1]);
plot(t, x1, '-b', 'LineWidth', 1); grid on; hold on; axis tight;
ylabel('Amplitude of x(t)');
xlabel('Time (s)')
title('Time representation of analog input sine signal');
legend('x1')

```



Am reprezentat 3 perioade, deci $5\text{ms} \times 3 = 15\text{ms}$ din evoluția semnalului analogic.

În continuare ne propunem să esantionăm acest semnal la diverse frecvențe și să vedem ce se întâmplă cu rezultatele obținute? Nu văd că prin esantionare, noi ne dorim să obținem replica digitală a semnalului pentru prelucrări ulterioare. Mai stiu că [replica digitală] a semnalului definit anterior este: $x[n] = A \cdot \sin(2\pi F n + \theta)$, unde F (frecvența digitală) = $\frac{f}{f_s}$ - frecvență semnal analogic
 f_s - frecvență de esantionare

n - numărul esantioanelor

Stim că teoretic $f_s > 2 \cdot f_{max}$, deci ar trebui ca f_s să fie de cel puțin 2 ori mai mare decât frecvența maximă din conținutul semnalului.

În cazul de față $f_{max} = 200\text{Hz} \Rightarrow f_s > 400\text{Hz}$.

```

%digital replica of the analog input signal sampled at 2*frequency of the
input signal
fs1 = 2*f_signal;%400Hz       $2 \cdot 200 \text{ Hz} = 400 \text{ Hz}$ ,  $T_{e1} = \frac{1}{400 \text{ Hz}} = 2,5 \text{ ms}$  (Atentie perioada de
Te1 = 1/fs1;                                esantionare ≠ perioada
disp('Sampling frequency fs1');
fs1                                         semnalului analogic
                                              de intrare)

replica din toată                                calcul valoare
digitoală                                     ale semnalului
                                              digital obținut
                                              după esantionarea
x1_sampled_1 = sin(2*pi*(f_signal/fs1)*n1);%digital replica of the input
                                              descrierea anterior
n1 = [];
for i = 1:(T_signal/Te1)*END_TIME/T_signal
    n1 = cat(1,n1,i*Te1);
end

%digital replica of the analog input signal sampled at 4*frequency of the
input signal
fs2 = 4*f_signal;%800Hz
Te2 = 1/fs2;
disp('Sampling frequency fs2');
fs2
disp('Time (s)/Period');%how many samples/period do we record?
T_signal/Te2
disp('Sampling period Te2');
Te2
n2 = 1:1:(T_signal/Te2)*END_TIME/T_signal; %vector of recorded samples
representation
x1_sampled_2 = sin(2*pi*(f_signal/fs2)*n2);%digital replica of the input
signal
n2 = [];
for i = 1:(T_signal/Te2)*END_TIME/T_signal
    n2 = cat(1,n2,i*Te2);
end

%digital replica of the analog input signal sampled at 8*frequency of the
input signal
fs3 = 8*f_signal;%1.6kHz
Te3 = 1/fs3;
disp('Sampling frequency fs3');
fs3
disp('Time (s)/Period');%how many samples/period do we record?
T_signal/Te3
disp('Sampling period Te3');
Te3
n3 = 1:1:(T_signal/Te3)*END_TIME/T_signal; %vector of recorded samples
representation
x1_sampled_3 = sin(2*pi*(f_signal/fs3)*n3);%digital replica of the input
signal
n3 = [];
for i = 1:(T_signal/Te3)*END_TIME/T_signal
    n3 = cat(1,n3,i*Te3);
end

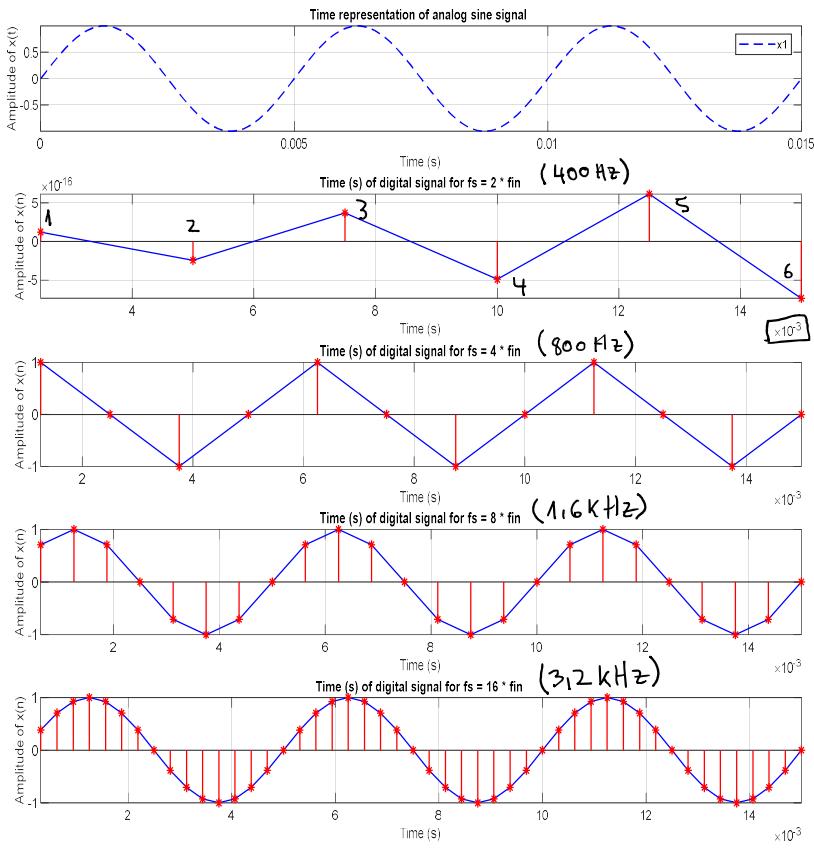
```

```

%digital replica of the analog input signal sampled at 16*frequency of the
input signal
fs4 = 16*f_signal;%3.2kHz
Te4 = 1/fs4;
disp('Sampling frequency fs4');
fs4
disp('Time (s)/Period');%how many samples/period do we record?
T_signal/Te4
disp('Sampling period Te4');
Te4
n4 = 1:1:(T_signal/Te4)*END_TIME/T_signal; %vector of recorded samples
representation
x1_sampled_4 = sin(2*pi*(f_signal/fs4)*n4);%digital replica of the input
signal
n4=[];
for i = 1:(T_signal/Te4)*END_TIME/T_signal
    n4 = cat(1,n4,i*Te4);
end

figure(2);
set(gcf,'Color',[1,1,1]);
subplot(511);
plot(t,x1,'--b','LineWidth',1);grid on;hold on;axis tight;
ylabel('Amplitude of x(t)');
title('Time representation of analog sine signal');
xlabel('Time (s)')
legend('x1')
subplot(512);
plot(n1,x1_sampled_1,'-b','LineWidth',1);grid on;hold on;axis tight;
stem(n1,x1_sampled_1,'-r*','LineWidth',1);grid on;hold on;axis tight;
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude of x(n)');
title('Time (s) of digital signal for fs = 2 * fin');
subplot(513);
plot(n2,x1_sampled_2,'-b','LineWidth',1);grid on;hold on;axis tight;
stem(n2,x1_sampled_2,'-r*','LineWidth',1);grid on;hold on;axis tight;
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude of x(n)');
title('Time (s) of digital signal for fs = 4 * fin');
subplot(514);
plot(n3,x1_sampled_3,'-b','LineWidth',1);grid on;hold on;axis tight;
stem(n3,x1_sampled_3,'-r*','LineWidth',1);grid on;hold on;axis tight;
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude of x(n)');
title('Time (s) of digital signal for fs = 8 * fin');
subplot(515);
plot(n4,x1_sampled_4,'-b','LineWidth',1);grid on;hold on;axis tight;
stem(n4,x1_sampled_4,'-r*','LineWidth',1);grid on;hold on;axis tight;
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude of x(n)');
title('Time (s) of digital signal for fs = 16 * fin');

```



15 ms reprezentare
in timp

$$\frac{15 \text{ ms}}{2.5 \text{ ms}} = \frac{T}{T_{e1}} = 6 \text{ esantioane.}$$

$T_{e2} = 1.25 \text{ ms} \Rightarrow 12 \text{ esantioane}$
subesantionare

Recomandare \Rightarrow esantionarea se face cu $8 \div 10 \times f_{\max}$.

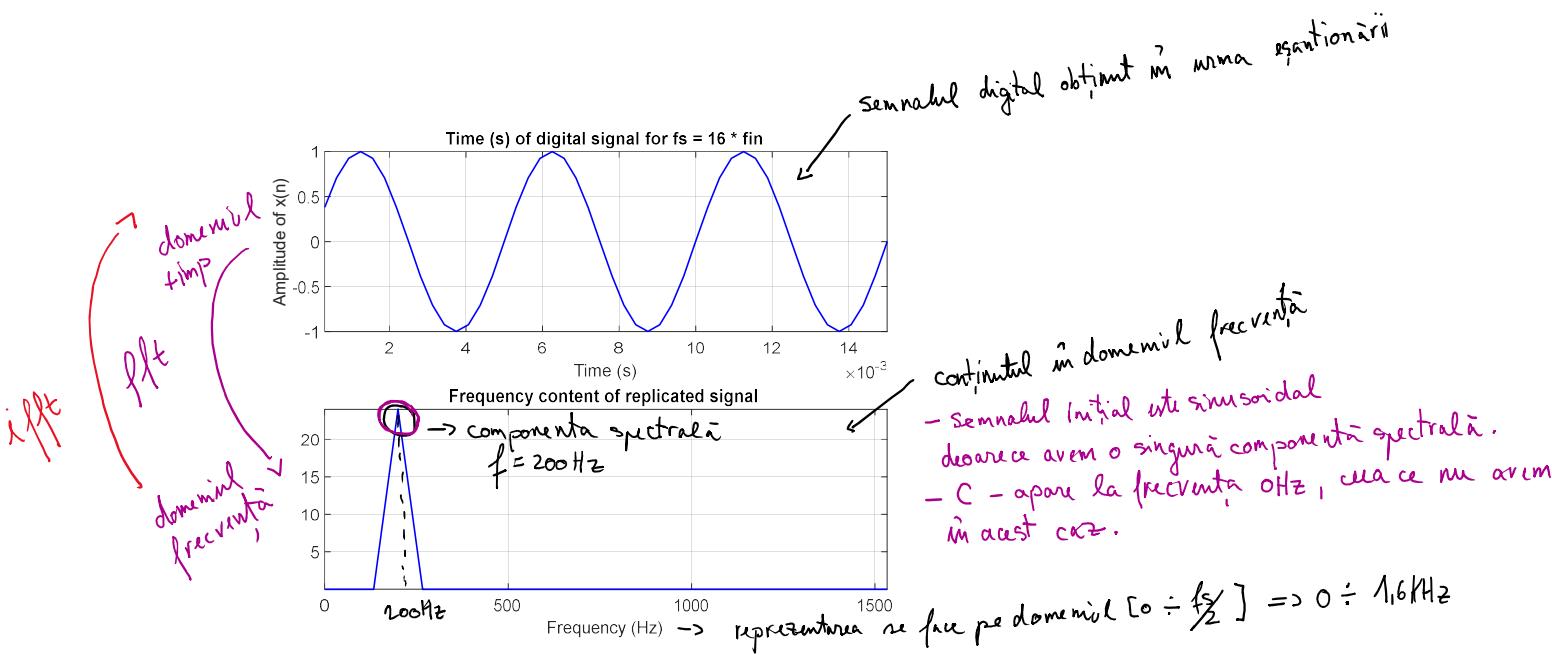
$T_{e4} \approx 0.31 \text{ ms}$
Supraesantionare

Semnal analogic de intrare \rightarrow esantionat la diverse frecvențe
 $f_s > 2 \cdot f_{\max}$, $16 \cdot f_{\max} = 3.2 \text{ kHz} \Rightarrow$ replica digitală x_1 -sampled-4

```
%frequency content of the discrete replica sampled at fs = 16 * fin
Y = abs(fft(x1_sampled_4,length(x1_sampled_4)));
f = fs4*(0:(length(x1_sampled_4)-1))/length(x1_sampled_4);
f = f(1:(length(f)/2));
N=length(Y);
```

} Calcul spectru, este stocat in variabila Y.

```
figure(3);
set(gcf, 'Color', [1,1,1]);
subplot(211);
plot(n4,x1_sampled_4,'-b','LineWidth',1);grid on;hold on;axis tight;
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude of x(n)');
title('Time (s) of digital signal for fs = 16 * fin');
subplot(212);
plot(f,Y(1:N/2),'-b','LineWidth',1);grid on;hold on;axis tight;
title('Frequency content of replicated signal');
xlabel('Frequency (Hz)');
```



%aliasing demo

```
END_TIME = 125*10^-3; %125ms to plot 5 periods of the lowest frequency
periodic signal
t = 0:0.0001:END_TIME;
f_c1 = 25; %in Hz
c1 = 2*sin(2*pi*f_c1*t); %sine component of 25Hz frequency
f_c2 = 70; %in Hz
c2 = 0.5*sin(2*pi*f_c2*t); %sine component of 70Hz frequency
f_c3 = 160; %in Hz
c3 = 2.5*sin(2*pi*f_c3*t); %sine component of 160Hz frequency
f_c4 = 340; %in Hz
c4 = 5*sin(2*pi*f_c4*t); %sine component of 340Hz frequency
x_sum = c1+c2+c3+c4; %signal including all sinusoidal components
```

↳ semnal analogic de intrare $\Leftrightarrow f_{max} = 340 \text{ Hz}$
 $\Leftrightarrow f_{min} = 25 \text{ Hz}$

```
%let us assume that this signal is sampled at  $10 \cdot f_{max} = 3400 \text{ Hz}$  3.4 kHz
SamplingF_ok = 10*f_c4;
SamplingT_ok = 1/SamplingF_ok;
T_signal = 1/f_c1; %the lowest frequency in the signal
n5 = 1:1:(T_signal/SamplingT_ok)*END_TIME/T_signal; %vectorul de reprezentare
pe axa timpului
x_sum_OK = 2*sin(2*pi*f_c1/SamplingF_ok*n5) +
0.5*sin(2*pi*f_c2/SamplingF_ok*n5)+2.5*sin(2*pi*f_c3/SamplingF_ok*n5)+5*sin(2
*pi*f_c4/SamplingF_ok*n5);
```

replica
digitală →

calculă
spectrală
replică
digitală

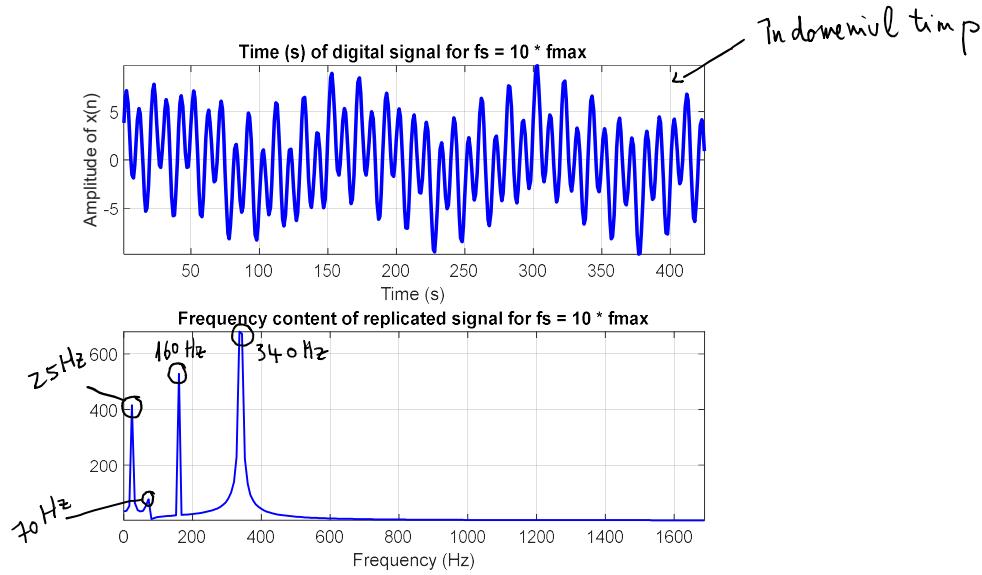
```
%frequency content of resulting sum signal
Y = abs(fft(x_sum_OK,length(x_sum_OK)));
f = SamplingF_ok*(0:(length(x_sum_OK)-1))/length(x_sum_OK);
f = f(1:(length(f)/2));
N=length(Y);
```

figure(4);

```

set(gcf, 'Color', [1,1,1]);
subplot(211);
plot(n5,x_sum_OK, '-b', 'LineWidth', 2); grid on; hold on; axis tight;
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude of x(n)');
title('Time (s) of digital signal for fs = 10 * fmax');
subplot(212);
plot(f,Y(1:N/2), '-b', 'LineWidth', 1); grid on; hold on; axis tight;
title('Frequency content of replicated signal for fs = 10 * fmax');
xlabel('Frequency (Hz)');

```



```

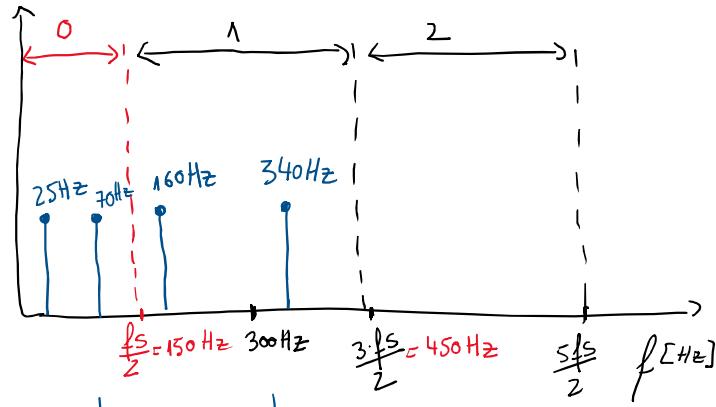
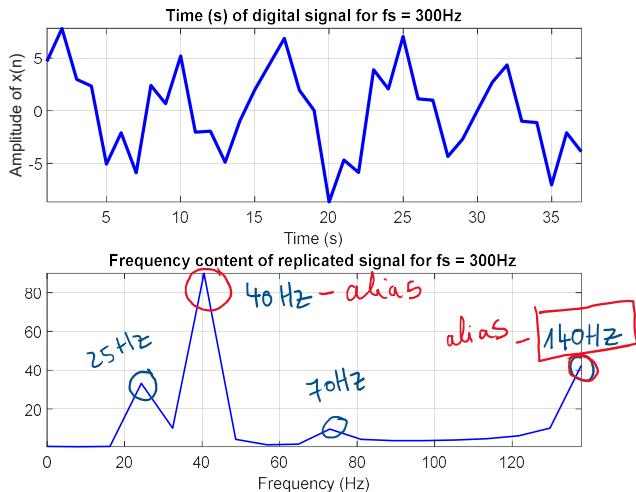
%let us assume that this input signal is sampled at 300Hz
SamplingF_nok = 300;
SamplingT_nok = 1/SamplingF_nok;
T_signal = 1/f_c1;%the lowest frequency in the signal
n5 = 1:1:(T_signal/SamplingT_nok)*END_TIME/T_signal; %vectorul de
reprezentare pe axa timpului
x_sum_NOK = 2*sin(2*pi*f_c1/SamplingF_nok*n5) +
0.5*sin(2*pi*f_c2/SamplingF_nok*n5)+2.5*sin(2*pi*f_c3/SamplingF_nok*n5)+5*sin
(2*pi*f_c4/SamplingF_nok*n5);

%frequency content of resulting sum signal
Y = abs(fft(x_sum_NOK,length(x_sum_NOK)));
f = SamplingF_nok*(0:(length(x_sum_NOK)-1))/length(x_sum_NOK);
f = f(1:(length(f)/2));
N=length(Y);

figure(5);
set(gcf, 'Color', [1,1,1]);
subplot(211);
plot(n5,x_sum_NOK, '-b', 'LineWidth', 2); grid on; hold on; axis tight;
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude of x(n)');
title('Time (s) of digital signal for fs = 300Hz');
subplot(212);
plot(f,Y(1:N/2), '-b', 'LineWidth', 1); grid on; hold on; axis tight;
title('Frequency content of replicated signal for fs = 300Hz');

```

xlabel('Frequency (Hz)');



$$f_1 = |25\text{Hz} - 0 \cdot f_s| = 25\text{Hz}$$

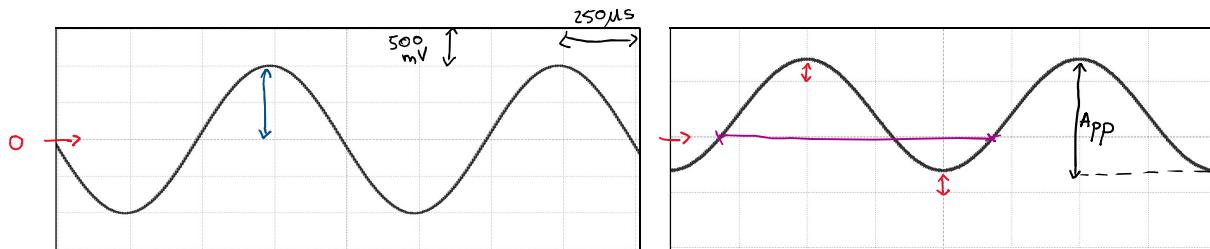
$$f_2 = |70\text{Hz} - 0 \cdot f_s| = 70\text{Hz}$$

$$f_3 = |160\text{Hz} - 1 \cdot f_s| = 140\text{Hz}$$

↓
frecvența de 160Hz este reprezentată
prin alias la 140Hz!!

$$f_4 = |340\text{Hz} - 1 \cdot f_s| = 40\text{Hz}$$

Pentru semnalele sinusoidale reprezentate mai jos, calculați valorile parametrilor: amplitudine, perioadă, frecvență, valoare efectivă și valoare medie. Cunoaștem setările pe axe ale ecranului osciloscopului ca fiind 500 mV/div și 250 μs/div.



Reprezentarea în domeniul timp, pe ecranul osciloscopului, a unor semnale sinusoidale.

Semnal stanga $\rightarrow A \approx 2 \text{ div} \times 500 \text{ mV/div} \approx 1 \text{ V} \Rightarrow A_{pp} = 2 \text{ V}$. Semnalul este simetric față de axa timpului, deci $C=0$.

$X_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$ (semnal sinusoidal) $\approx 0,7 \text{ V}$, $C=0 \Rightarrow$ valoarea medie $X_m = 0 \text{ V}$, cele 2 alterante se anulează reciproc din punct de vedere al valorii medii. $T \approx 4 \text{ div} \times 250 \mu\text{s/div} \approx 1 \text{ ms} \Rightarrow f = 1 \text{ kHz}$.

Semnal dreapta \rightarrow Deplasat în sus pe axa amplitudinii cu aproximativ jumătate de divizie. Deci $C \approx 0,4 \text{ div} \times 500 \text{ mV/div} \approx 200 \text{ mV}$. $A_{pp} \approx 1 \text{ V}$, deci $A = 500 \text{ mV}$. Datorită componentei constante C , valoarea maximă a semnalului este $A_{max} \approx 700 \text{ mV}$. $T \approx 4 \text{ divizii} \times 250 \mu\text{s/div} \approx 1 \text{ ms}$ și $f = 1 \text{ kHz}$. Semnalul este și defazat însă ignorăm acest aspect.

Definim acest semnal ca $x(t) = 0,2 \text{ V} + 0,5 \sin(2\pi \cdot 1000 \text{ Hz})$ \leftarrow relația care definește semnalul, defazajul este ignorat pentru scopul problemei,

$$\text{Valoarea medie } X_m = \frac{1}{T} \int_0^T (0,2 \text{ V} + 0,5 \sin(2\pi \cdot 1000 \text{ Hz})) \text{ dt} = 0,2 \text{ V} + 0 \text{ V} = 0,2 \text{ V}$$

\hookrightarrow valoarea componentei C .

$$\text{Perioada: } \frac{1}{f} \cdot 0,2 \text{ V} + \left| \int_0^T \right| = 0,2 \text{ V}$$

$$\text{Termen 2: } \frac{1}{T} \cdot 0,5 \text{ V} \cdot \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \Big|_0^T = \frac{0,5 \text{ V}}{T} \cdot \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T = \frac{0,5 \text{ V}}{2\pi} \cos(2\pi) - \frac{0,5 \text{ V}}{2\pi} \cos(0) = 0 \text{ V}$$

verifică tabel
integrale pentru
funcția sin.

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ dar } f = \frac{1}{T} \Rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ deci } \frac{1}{\omega} = \frac{T}{2\pi}$$

Valoarea efectivă pe o perioadă $X_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (0,04V + 0,5 \sin(2\pi \cdot 1000 \text{Hz})V)^2 dt$, apoi extragem X_{rms} .

$$X_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (0,04 + 0,1 \sin(2\pi \cdot 1000 \text{Hz}) + 0,25 \sin(2\pi \cdot 1000 \text{Hz}))^2 V^2 dt = 0,04V^2 + 0V^2 + 0,125V^2 = 0,165V^2$$

Termen 1: $\frac{1}{T} \cdot 0,04 \cdot t \Big|_0^T = \frac{0,04T}{T} - 0 = 0,04V^2$

Termen 2: $\frac{0,1}{T} \cdot \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \Big|_0^T = \frac{0,1V^2}{T} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T = \frac{0,1}{2\pi} \cdot \cos(0) - \frac{0,1}{2\pi} \cdot \cos(2\pi) = 0V^2$

Termen 3: $\frac{0,125}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{2} dt = 0,125V^2 + 0V^2 = 0,125V^2$ $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, $\omega_0 = 2\pi f$
 $\int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{2} dt = \frac{0,125}{2} V^2 = 0,125V^2$ (sau $\frac{A^2}{2}$)

Termen 3+1: $\frac{0,125}{T} \cdot \frac{1}{2} t \Big|_0^T = \frac{0,125}{2} V^2 = 0,125V^2$

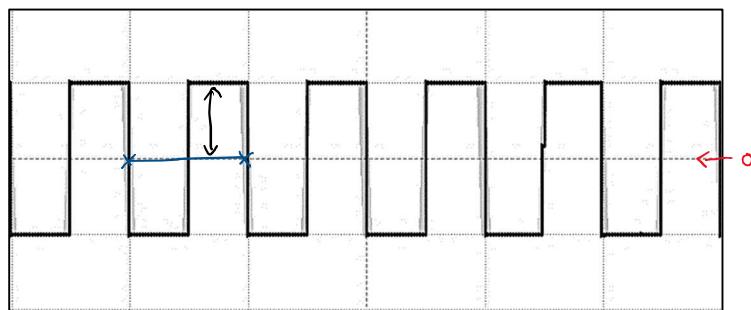
Termen 3+2: $\frac{0,125}{T} \int_0^T \frac{\cos(2\omega_0 t)}{2} dt = \frac{0,125}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\omega_0} \cdot \sin(2\omega_0 t) \Big|_0^T = \frac{0,125}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \sin\left(2\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T = \frac{0,125}{8\pi} \cdot \sin(4\pi) - \frac{0,125}{8\pi} \cdot \sin(0) = 0V^2$

$X_{rms} = \sqrt{0,165V^2} \approx 400 \text{ mV}$ (sau $2\pi C$).

$X_{rms} = \sqrt{0,04V^2 + \frac{A^2}{2}}$, unde $0,04V^2 = C^2$ (două componente continuă arătă contribuție proporțională)

$\frac{A^2}{2}$ (stăm că $\frac{A}{\sqrt{2}}$ este X_{rms} pentru semnal sinusoidal fără componentă continuă)

Pentru semnalul de tip rectangular, calculați valorile parametrilor: amplitudine, perioadă, frecvență, valoare efectivă și valoare medie. Cunoaștem setările pe axe ale ecranului osciloscopului ca fiind 500 mV/div și 1 ms/div. Determinați seria Fourier (spectrul de amplitudini), inclusiv armonica trei.



Reprezentarea în domeniul timp, pe ecranul osciloscopului, a unui semnal de tip rectangular.

$T = 1 \text{ div} \times 1 \text{ ms/div} = 1 \text{ ms} \Rightarrow f = 1 \text{ kHz}$. $A = 1 \text{ div} \times 500 \text{ mV/div} = 500 \text{ mV} \Rightarrow A_{pp} = 1 \text{ V}$ și $C = 0$, semnalul fiind centrat față de axa timpului. $X_m = 0 \text{ V}$ și $X_{rms} = A = 500 \text{ mV}$ conform preuzărilor de la partea teoretică.

Sun semnalul $x(t)$ întă definit ca $x_1(t) = A$, pentru $0 < t < \frac{T}{2}$ și $x_2(t) = -A$, pentru $\frac{T}{2} < t < T$.
 X_{rms} pe o perioadă $= \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_0^{T/2} A^2 dt + \int_{T/2}^T A^2 dt \right)} \approx \sqrt{\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}} \approx A$ sau 500 mV .

Pentru seria Fourier \rightarrow

$$a_0 = X_m = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) dt; a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt; b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt.$$

$a_0 = X_m = 0\sqrt{A}$, prin urmare nu avem componentă continuă după cum era de așteptat.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \cdot \cos(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T -A \cdot \cos(n\omega_0 t) dt$$

* *

$$* \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \frac{A}{n\omega_0} \sin(n\omega_0 t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{T} \frac{A\pi}{n\cdot 2\pi} \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = \frac{2\pi A}{Tn} \sin(n\pi) = \frac{A}{n\cdot 2\pi} \sin(n\pi)$$

$$* \frac{2}{T} \int_{T/2}^T -A \cos(n\omega_0 t) dt = -\frac{2A}{T} \cdot \frac{\pi}{n\cdot 2\pi} \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_{\frac{T}{2}}^T = -\frac{A}{n\pi} \sin(n\cdot 2\pi) + \frac{A}{n\pi} \sin(n\pi)$$

$$a_n = \frac{A}{n\cdot 2\pi} \sin(n\pi) + \frac{A}{n\pi} \sin(n\pi) - \frac{A}{n\pi} \sin(n\cdot 2\pi) = \frac{A}{n\pi} (2 \cdot \sin(n\pi) - \sin(n\cdot 2\pi))$$

Unde $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ număr întreg conform teoriei.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A}{\pi} \cdot (2 \cdot \sin(\pi) - \sin(2\pi)) = 0 \\ a_2 &= \frac{A}{2\pi} \cdot (2 \cdot \sin(2\pi) - \sin(4\pi)) = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Toti coeficienți } a_n = 0. \\ \hline \text{s.a.m.d.} \end{array} \right.$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \sin(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T -A \sin(n\omega_0 t) dt$$

* *

Se calculează în mod similar și obținem rezultatul

$$b_1 = \frac{A}{\pi} (2 \cdot \cos(\pi) - \cos(2\pi) - 1)$$

$$b_2 = \frac{A}{2\pi} (2 \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - \underbrace{\cos(4\pi)}_{1} - 1) \approx -0,637$$

$$b_3 = \frac{A}{3\pi} (2 \cdot \underbrace{\cos(3\pi)}_{-1} - \underbrace{\cos(6\pi)}_{1} - 1) \approx -0,212$$

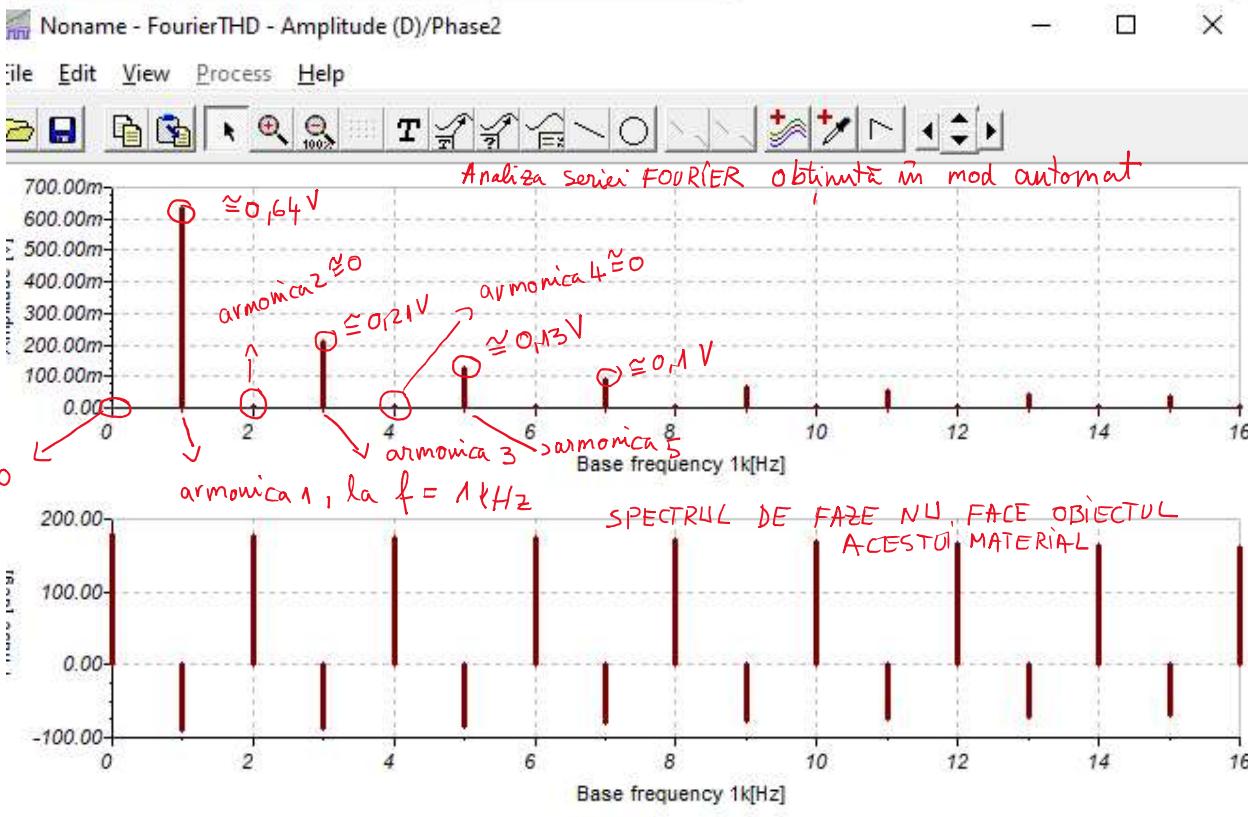
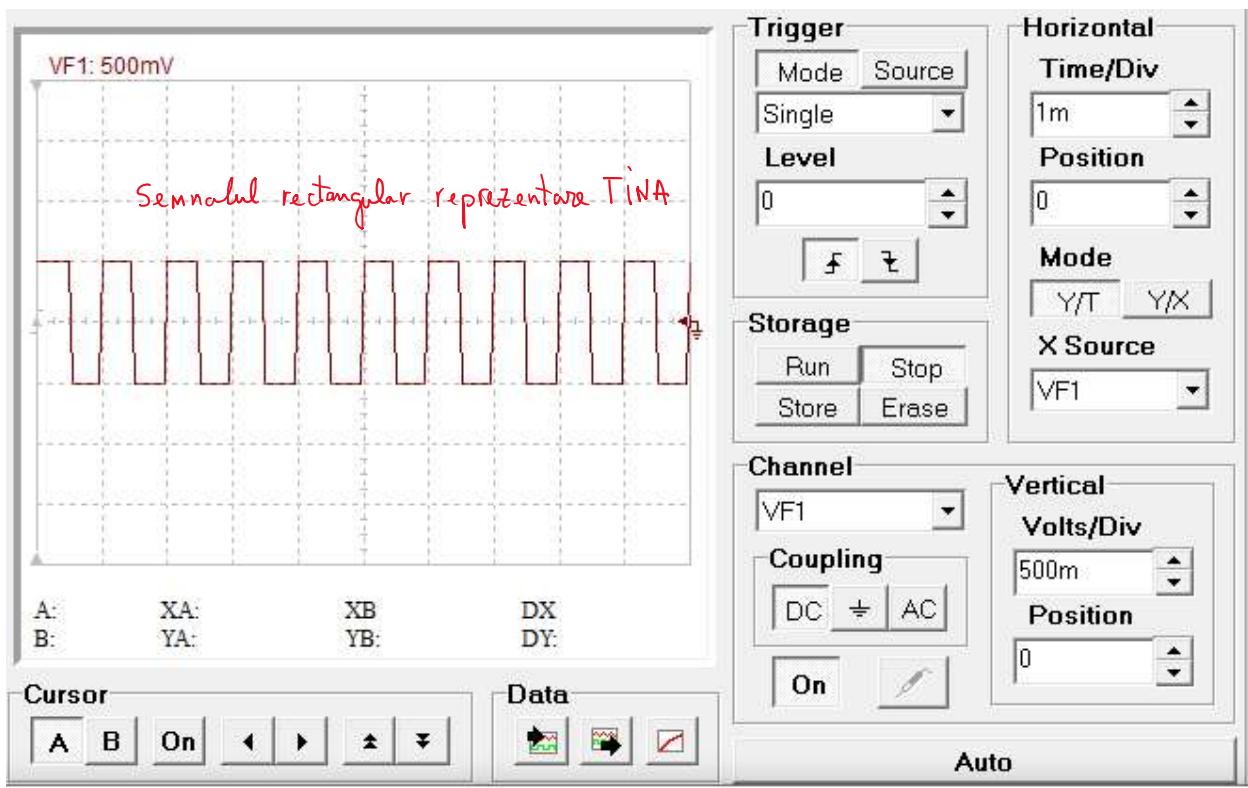
s.a.m.d.

Pentru calculul seriei Fourier. $\omega = 2\pi f$, $f = 1\text{ kHz} \Rightarrow \omega \approx 6283 \text{ rad.s}^{-1}$

semnalul $x(t)$ se poate descompune în următoarele componente:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)]$$

$$\begin{aligned} x(t) &\approx 0 + \underbrace{a_1 \cdot \cos(1 \cdot 6283 \cdot t)}_0 - 0,637 \sin(6283t) + \underbrace{a_2 \cdot \cos(2 \cdot 6283 \cdot t)}_0 + b_2 \cdot \sin(2 \cdot 6283t) + \\ &+ \underbrace{a_3 \cdot \cos(3 \cdot 6283 \cdot t)}_0 - 0,212 \sin(3 \cdot 6283t) + \dots \end{aligned}$$



X_{rms} calculat inițial $\approx 500\text{ mV}$ (domeniul timp)

$$X_{rms} \text{ calculat pe baza spectrului de amplitudini} \approx \sqrt{a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_{\text{arm}-n}}{\sqrt{2}} \right)^2} \approx$$

$$\approx \sqrt{0 + 0,206 + 0 + 0,022 + 0 + 0,009 + 0 + \dots} \approx 486\text{ mV} \text{ (deci } \approx 500\text{ mV} \text{ includând restul armonicilor)}$$