Dan NICULA

ELECTRONICĂ DIGITALĂ
Carte de învăţătură 2.0

Editura Universităţii *TRANSILVANIA* din Braşov
ISBN 978-606-19-0563-8

2015

Lecţia 2

Algebră Booleană

2.1 Noţiuni teoretice

Algebra Booleană este definită pe mulţimea binară $B = \{0, 1\}$ cu legile de compoziţie internă:
- conjuncţie (AND, $X \cdot Y$),
- disjuncţie (OR, $X + Y$),
- complement (NOT, $\overline{X}$).

Axioma	*Forma cu operatorul*	
	AND	*OR*
Axioma 1. Mulţimea B={0, 1} este închisă în raport cu operatorii AND şi OR	$\forall X, Y \in B \Rightarrow X \cdot Y \in B$	$\forall X, Y \in B \Rightarrow X + Y \in B$
Axioma 2. Asociativitatea	$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$	$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
Axioma 3. Comutativitatea	$X \cdot Y = Y \cdot X$	$X + Y = Y + X$
Axioma 4. Distributivitatea	$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$	$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$
Axioma 5. Existenţa elementului neutru	$X \cdot 1 = 1 \cdot X = X$	$X + 0 = 0 + X = X$
Axioma 6. Existenţa complementului	$X \cdot \overline{X} = \overline{X} \cdot X = 0$	$X + \overline{X} = \overline{X} + X = 1$

Teorema	*Forma cu operatorul*	
	AND	*OR*
Teorema 1. Idempotenţa (tautologia)	$X \cdot X = X$	$X + X = X$
Teorema 2. Legea lui 0 şi a lui 1	$X \cdot 0 = 0 \cdot X = 0$	$X + 1 = 1 + X = 1$
Teorema 3. Dubla negaţie (involuţia)	$\overline{\overline{X}} = X$	$\overline{\overline{X}} = X$
Teorema 4. Absorbţia directă Absorbţia inversă	$X \cdot (X + Y) = X$ $X \cdot (\overline{X} + Y) = X \cdot Y$	$X + X \cdot Y = X$ $X + \overline{X} \cdot Y = X + Y$
Teorema 5. Teorema lui DeMorgan	$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$	$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$

Suplimentar, pe baza legilor de compoziţie AND, OR, NOT, se defineşte operatorul $\oplus$, denumit SAU EXCLUSIV conform regulii:

$$X \oplus Y = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}$$

2.2 Pentru cei ce vor doar să promoveze examenul

1. Determinaţi şi justificaţi valoarea de adevăr a fiecărei afirmaţii:
   a) $A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + B \cdot C = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot C$
   b) $A + B \cdot C = A + \overline{A} \cdot B \cdot C$

2. Să se aplice teorema lui DeMorgan următoarelor expresii:

   a) $\overline{A \cdot B \cdot (C + D)}$
   b) $\overline{A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}}$
   c) $\overline{A + B + \overline{C}}$
   d) $\overline{A \cdot B \cdot (C \cdot D + E)}$
   e) $\overline{\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}}$
   f) $\overline{\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}}$

   Soluţie

   Aplicarea teoremei lui DeMorgan: negata unei funcţii AND este o funcţie OR în care toţi termenii se neagă.
   Aplicarea teoremei lui DeMorgan: negata unei funcţii OR este o funcţie AND în care toţi termenii se neagă.

   b) $\overline{A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D$

   c) $\overline{A + B + \overline{C}} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$

3. Folosind algebra Booleană, simplificaţi expresiile şi aduceţi-le la o formă echivalentă exprimată cu un număr minim de litere.

   a) $X \cdot Y + X \cdot \overline{Y}$
   b) $(X + Y) \cdot (X + \overline{Y})$
   c) $Y \cdot Z + Y \cdot \overline{Z} + X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$
   d) $X \cdot Y \cdot Z + \overline{X} \cdot Y + X \cdot Y \cdot \overline{Z}$
   e) $\overline{(X + Y)} \cdot \overline{(\overline{X} + \overline{Y})}$
   f) $(Y + Z) \cdot (\overline{Y} + Z) \cdot (X + \overline{Y} + Z)$

   Soluţie

   a) Utilizând *A4* şi ulterior *T1* expresia devine:
   $X \cdot Y + X \cdot \overline{Y} = X \cdot (Y + \overline{Y}) = X$

   b) Aplicând *A4* şi *T1* expresia devine:
   $(X + Y) \cdot (X + \overline{Y}) = X \cdot X + X \cdot \overline{Y} + Y \cdot X + Y \cdot \overline{Y} = X + X \cdot (Y + \overline{Y}) + 0 = X + X \cdot 1 + 0 = X + X + 0 = X$

   d) Conform *A4* expresia devine:
   $X \cdot Y \cdot Z + \overline{X} \cdot Y + X \cdot Y \cdot \overline{Z} = X \cdot Y \cdot (Z + \overline{Z}) + \overline{X} \cdot Y$ Prin aplicarea *A2* şi ulterior *A4* şi încă o dată *A2*:
   $X \cdot Y + \overline{X} \cdot Y = Y \cdot (X + \overline{X}) = Y$

   e) Prin aplicarea *T5* şi ulterior *A6* expresia devine: $\overline{(X + Y)} \cdot \overline{(\overline{X} + \overline{Y})} = \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot X \cdot Y = 0$

4. Aflaţi expresiile complementare următoarelor expresii:

   a) $X \cdot Y + \overline{X} \cdot \overline{Y}$
   b) $X \cdot \overline{Y} + Z(W + Q)$
   c) $(X + \overline{Y} + \overline{Z}) \cdot X$
   d) $A \cdot B + \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

2.3 Pentru cei ce vor să înveţe

1. Determinaţi şi justificaţi valoarea de adevăr a fiecărei afirmaţii:
   a) $W \cdot X + \overline{Y} + Z = (W + \overline{Y} + Z) \cdot (X + \overline{Y} + \overline{W} \cdot Z + W \cdot Z)$
   b) $X \cdot Y + X \cdot \overline{Y} = X$
   c) $X + \overline{X} \cdot Y = X + Y$
   d) $X \cdot (\overline{X} + Y) = X \cdot Y$

   Soluţie

   a) Expresia din partea dreaptă devine, după aplicarea *A4*:
   $(W + \overline{Y} + Z) \cdot (X + \overline{Y} + \overline{W} \cdot Z + W \cdot Z) = (W + \overline{Y} + Z) \cdot (X + \overline{Y} + Z \cdot (W + \overline{W}) =$
   utilizând *A6* şi după aplicarea *A4*:

$= (W + \overline{Y} + Z) \cdot (X + \overline{Y} + Z) = W \cdot X + W \cdot \overline{Y} + W \cdot Z + \overline{Y} \cdot X + \overline{Y} \cdot \overline{Y} + \overline{Y} \cdot Z + Z \cdot X + Z \cdot \overline{Y} + Z \cdot Z =$
$W \cdot X + \overline{Y} + Z \cdot \overline{Y} + Z + W \cdot Z + X \cdot Z =$
utilizând *T4* expresia devine egală cu expresia din partea stângă:
$= W \cdot X + \overline{Y} + Z$

b) Prin aplicarea *A4* şi utilizând *A6*, expresia din partea stângă devine:
$X \cdot Y + X \cdot \overline{Y} = X \cdot (Y + \overline{Y}) = X$

c) Prin aplicarea *T4* este justificată valoarea de adevăr a următoarei afirmaţii: $X + \overline{X} \cdot Y = X + Y$

d) Prin aplicarea *A4* şi ulterior *A6* expresiei din partea stângă, aceasta devine egală cu expresia din partea dreaptă: $X \cdot (\overline{X} + Y) = X \cdot \overline{X} + X \cdot Y = X \cdot Y$

2. Utilizând axiomele şi teoremele algebrei Booleene, să se demonstreze următoarele identităţi:
a) $B + \overline{A} \cdot C = (A + B + C) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C})$
b) $\overline{A} \cdot D + \overline{C} \cdot D + A \cdot \overline{B} = \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot C \cdot D$
c) $D \cdot (\overline{A} + B + C + \overline{D}) \cdot (A + B + \overline{C} + \overline{D}) = (D + A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot C) \cdot (\overline{A} \cdot \overline{C} + B \cdot D + A \cdot C)$

Soluţie

a) Expresia din partea dreaptă devine, după aplicarea *A4*:
$(A + B + C) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C}) =$
$= (A \cdot \overline{A} + A \cdot B + A \cdot C + \overline{A} \cdot B + B \cdot B + B \cdot C + \overline{A} \cdot C + B \cdot C + C \cdot C) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C}) =$
utilizând *A6*, *T1* şi ulterior *A4* (invers, pentru B şi C):
$= (A \cdot B + A \cdot C + \overline{A} \cdot B + B + B \cdot C + \overline{A} \cdot C + C) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C}) =$
$= [C \cdot (A + B + \overline{A} + 1) + B \cdot (A + \overline{A} + 1)] \cdot (\overline{A} + B + \overline{C}) =$
utilizând *T2*, *A5* şi aplicarea *A4* (invers, pentru B):
$= (C + B) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C}) = \overline{A} \cdot C + B \cdot C + C \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B + B \cdot B + B \cdot \overline{C} =$
observând că paranteza este egală cu 1 şi aplicând *A5*, rezultă:
$= \overline{A} \cdot C + B \cdot (C + \overline{A} + B + \overline{C}) = \overline{A} \cdot C + B = B + \overline{A} \cdot C$, expresie egală cu expresia din partea stângă.

b) Prin gruparea termenilor din partea dreaptă, şi aplicarea *A4*:
$(\overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot \overline{C} \cdot D) + (A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C) + \overline{A} \cdot C \cdot D = \overline{C} \cdot D \cdot (\overline{A} + A) + A \cdot \overline{B} \cdot (\overline{C} + C) + \overline{A} \cdot C \cdot D =$
aplicarea *A6* şi gruparea primului termen cu ultimul:
$= \overline{C} \cdot D + A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot C \cdot D = (\overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot C \cdot D) + A \cdot \overline{B} = D \cdot (\overline{C} + \overline{A} \cdot C) + A \cdot \overline{B} =$
la paranteză se aplică *T4* şi apoi *A4*: $= D \cdot (\overline{C} + \overline{A}) + A \cdot \overline{B} =$ după aplicarea *A4* şi *A3*:
$= D \cdot \overline{C} + D \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{B} = \overline{A} \cdot D + \overline{C} \cdot D + A \cdot \overline{B}$, care este expresia din partea stângă.

c) Prin aplicarea *A4* expresiilor din parantezele din partea stângă:
$D \cdot (\overline{A} + B + C + \overline{D}) \cdot (A + B + \overline{C} + \overline{D}) =$
$= D \cdot (\overline{A} \cdot A + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{D} + A \cdot B + B \cdot B + B \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{D} + A \cdot C + B \cdot C + C \cdot \overline{C} + C \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{D} + B \cdot \overline{D} + \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{D} \cdot \overline{D}) =$
şi restrângerea termenilor utilizând *A6* şi *T1*:
$= D \cdot (0 + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{D} + A \cdot B + B + B \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{D} + A \cdot C + B \cdot C + 0 + C \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{D} + B \cdot \overline{D} + \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{D}) =$
pe baza *A3*, se grupează B şi $\overline{D}$:
$= D \cdot [B \cdot (\overline{A} + A + 1 + \overline{C} + \overline{D} + C) + \overline{A} \cdot \overline{C} + A \cdot C + \overline{D} \cdot (\overline{A} + A + \overline{C} + 1)] =$
şi se observă că parantezele rotunde sunt egale cu 1, conform *T2*:
$= D \cdot (B + \overline{A} \cdot \overline{C} + A \cdot C + \overline{D}) = B \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot C \cdot D$

Expresia din partea dreaptă se procesează conform *A4*, *A6* şi *T1*:
$(D + A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot C) \cdot (\overline{A} \cdot \overline{C} + B \cdot D + A \cdot C) =$
$= \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + B \cdot D \cdot D + A \cdot C \cdot D + A \cdot \overline{C} \cdot \overline{A} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{C} \cdot B \cdot D + A \cdot \overline{C} \cdot A \cdot C + \overline{A} \cdot C \cdot \overline{A} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot C \cdot B \cdot D + \overline{A} \cdot C \cdot A \cdot C =$
$= \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + B \cdot D + A \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D =$
prin aplicarea *A3* se grupează favorabil termenii pentru a da în factor $B \cdot D$:
$= (B \cdot D + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D) + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot C \cdot D =$
$= B \cdot D \cdot (1 + A \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot C) + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot C \cdot D =$
prin aplicarea *T2* se ajunge la aceeaşi expresie ca după procesarea părţii stângi:
$= B \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot C \cdot D$

3. Utilizând axiomele şi teoremele algebrei Booleene, să se demonstreze următoarele identităţi:
a) $A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A \cdot B \cdot C} \cdot D = A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} + D$
b) $\overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C = B \cdot C + A \cdot \overline{B} + \overline{B} \cdot \overline{C}$
c) $A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot (B \cdot D + C \cdot D \cdot E) + A \cdot \overline{C} = A \cdot (\overline{C} + \overline{B} \cdot D \cdot E)$
d) $X \cdot Y + X \cdot \overline{Y} = X$
e) $X + \overline{X} \cdot Y = X + Y$

4. Utilizând axiomele şi teoremele algebrei Booleene, să se determine forma minimă a funcţiilor complementare următoarelor:
   a) $F = \overline{\overline{[\overline{(A \cdot B)} \cdot A]} \cdot \overline{[\overline{(A \cdot B)} \cdot B]}}$ (funcţia $A \oplus B$ exprimată prin operatorul NAND)
   b) $F = \overline{\overline{(A + B + \overline{C})} \cdot \overline{(\overline{A \cdot B} + \overline{C \cdot D})} + \overline{B \cdot C \cdot D}}$
   c) $F = \overline{(A \cdot B \cdot C + B \cdot \overline{C} \cdot D)} + \overline{(\overline{A \cdot C \cdot D} + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + B \cdot C \cdot \overline{D})}$
   d) $F = X \cdot (X + X \cdot \overline{Y})$
   e) $F = \overline{\overline{\overline{X}}} \cdot (\overline{X} + 1)$

   Soluţie

   a) $\overline{F} = \overline{[\overline{(A \cdot B)} \cdot A]} \cdot \overline{[\overline{(A \cdot B)} \cdot B]} =$
   $(A \cdot B + \overline{A}) \cdot (A \cdot B + \overline{B}) = A \cdot B \cdot A \cdot B + \overline{A} \cdot A \cdot B + A \cdot B \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{B} = A \cdot B + 0 + 0 + \overline{A} \cdot \overline{B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A \oplus B}$.

   b) $\overline{F} = \overline{(A + B + \overline{C})} \cdot \overline{(\overline{A \cdot B} + \overline{C \cdot D})} + \overline{B \cdot C \cdot D} = \overline{(A + B + \overline{C})} \cdot \overline{(\overline{A \cdot B} + \overline{C \cdot D})} + \overline{B \cdot C \cdot D} =$
   $= (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{\overline{C}}) \cdot (\overline{\overline{A \cdot B}} \cdot \overline{\overline{C \cdot D}}) + \overline{B \cdot C \cdot D} = (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C) \cdot (A \cdot B \cdot C \cdot D) + \overline{B \cdot C \cdot D} = \overline{B \cdot C \cdot D}$

   c) $\overline{F} = \overline{\overline{(A \cdot B \cdot C + B \cdot \overline{C} \cdot D)} + \overline{(\overline{A \cdot C \cdot D} + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + B \cdot C \cdot \overline{D})}} =$
   $= (A \cdot B \cdot C + B \cdot \overline{C} \cdot D) \cdot (\overline{A \cdot C \cdot D} + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + B \cdot C \cdot \overline{D}) =$
   $= (A \cdot B \cdot C + B \cdot \overline{C} \cdot D) \cdot (\overline{A} + \overline{C} + \overline{D} + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + B \cdot C \cdot \overline{D}) =$
   $= (A \cdot B \cdot C + B \cdot \overline{C} \cdot D) \cdot (\overline{A} + \overline{D} \cdot (1 + B \cdot C) + \overline{C} \cdot (1 + \overline{B} \cdot \overline{D})) =$
   $= (A \cdot B \cdot C + B \cdot \overline{C} \cdot D) \cdot (\overline{A} + \overline{D} + \overline{C}) =$
   $= A \cdot B \cdot C \cdot \overline{A} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C} \cdot D \cdot \overline{A} + B \cdot \overline{C} \cdot D \cdot \overline{D} + B \cdot \overline{C} \cdot D \cdot \overline{C} =$
   $= 0 + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + 0 + B \cdot \overline{C} \cdot D \cdot \overline{A} + 0 + B \cdot \overline{C} \cdot D =$
   $= A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + (\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + B \cdot \overline{C} \cdot D) = A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + B \cdot \overline{C} \cdot D$

5. Să se aplice teorema lui DeMorgan următoarelor expresii:

   a) $\overline{A \cdot \overline{B} \cdot (C + \overline{D})}$
   b) $\overline{(A + \overline{B} + C + \overline{D})} + \overline{A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}}$
   c) $\overline{\overline{A \cdot B} \cdot (C \cdot D + \overline{E} \cdot F) \cdot (\overline{A \cdot B} + \overline{C \cdot D})}$
   d) $\overline{(A + \overline{B \cdot \overline{C}} + C \cdot D)} + \overline{\overline{B \cdot C}}$
   e) $\overline{A \cdot B \cdot (C \cdot D + E \cdot F)}$
   f) $\overline{\overline{(\overline{A} + B + C + D)} \cdot \overline{(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D)}}$
   g) $\overline{\overline{\overline{(A \cdot B \cdot C)} \cdot \overline{(E \cdot F \cdot G)}} + \overline{\overline{(H \cdot I \cdot J)} \cdot \overline{(K \cdot L \cdot M)}}}$
   h) $\overline{\overline{\overline{(A + B)}} \cdot \overline{(C + D)} \cdot \overline{(E + F)} \cdot \overline{(G + H)}}$

   Soluţie

   a) $\overline{A \cdot \overline{B} \cdot (C + \overline{D})} = \overline{A} + \overline{\overline{B}} + \overline{(C + \overline{D})} = \overline{A} + B + \overline{C} \cdot \overline{\overline{D}} = \overline{A} + B + \overline{C} \cdot D$
   b) $\overline{(A + \overline{B} + C + \overline{D})} + \overline{A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}} = \overline{A} \cdot \overline{\overline{B}} \cdot \overline{C} \cdot \overline{\overline{D}} + (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{\overline{D}}) = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D)$
   e) $\overline{A \cdot B \cdot (C \cdot D + E \cdot F)} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{(C \cdot D + E \cdot F)} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C \cdot D} \cdot \overline{E \cdot F} = \overline{A} + \overline{B} + (\overline{C} + \overline{D}) \cdot (\overline{E} + \overline{F})$
   f) $\overline{\overline{(\overline{A} + B + C + D)} \cdot \overline{(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D)}} = \overline{\overline{(\overline{A} + B + C + D)}} + \overline{\overline{(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D)}} = (\overline{A} + B + C + D) + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$

6. Demonstraţi identităţile analitic, folosind axiomele şi teoremele algebrei Booleene:
   a) $Y + \overline{X} \cdot Z + X \cdot \overline{Y} = X + Y + Z$
   b) $\overline{X \cdot Y \cdot Z} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$
   c) $X + Y \cdot Z = (X + Y) \cdot (X + Z)$
   d) $\overline{X} \cdot Y + \overline{Y} \cdot Z + X \cdot \overline{Z} = X \cdot \overline{Y} + Y \cdot \overline{Z} + \overline{X} \cdot Z$
   e) $\overline{X} \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y + X \cdot Y = \overline{X} + Y$
   f) $\overline{X} \cdot Y + \overline{Y} \cdot \overline{Z} + X \cdot Y + \overline{Y} \cdot Z = 1$
   g) $\overline{X} \cdot \overline{Y} + \overline{Y} \cdot Z + X \cdot Z + X \cdot Y + Y \cdot \overline{Z} = \overline{X} \cdot \overline{Y} + X \cdot Z + Y \cdot \overline{Z}$
   h) $A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} = \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$
   i) $X \cdot Z + W \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} + \overline{W} \cdot Y \cdot \overline{Z} + W \cdot \overline{X} \cdot \overline{Z} = X \cdot Z + W \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} + W \cdot X \cdot \overline{Y} + \overline{W} \cdot X \cdot Y + \overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z}$

   Soluţie

   a) Expresia din partea stângă se procesează conform *T4*:
   $Y + \overline{X} \cdot Z + X \cdot \overline{Y} = Y + X + \overline{X} \cdot Z = Y + X + Z = X + Y + Z$ prin aplicarea *A3* se ajunge la o expresie egală cu expresia din partea dreaptă.

   b) Expresia din partea stângă devine, prin aplicarea *T5*, egală cu expresia din partea dreaptă:
   $\overline{X \cdot Y \cdot Z} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$

   c) Utilizând *A4* şi ulterior *T4* expresia din partea dreaptă devine egală cu cea din partea stângă:
   $(X + Y) \cdot (X + Z) = X \cdot X + X \cdot Z + Y \cdot X + Y \cdot Z = X + Y \cdot Z$

d) $\overline{X} \cdot Y + \overline{Y} \cdot Z + X \cdot \overline{Z} =$
$= \overline{X} \cdot Y \cdot Z + \overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z} + X \cdot \overline{Y} \cdot Z + \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$
$X \cdot \overline{Y} + Y \cdot \overline{Z} + \overline{X} \cdot Z = X \cdot \overline{Y} \cdot Z + X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + \overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z} + \overline{X} \cdot Y \cdot Z + \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z$

e) Prin aplicarea *A4* și ulterior *T1* expresia din partea dreaptă devine:
$\overline{X} \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y + X \cdot Y = \overline{X} \cdot (\overline{Y} + Y) + X \cdot Y = \overline{X} + X \cdot Y = \overline{X} + Y$ Aplicând *T4* expresia devine egală cu expresia din partea stângă.

7. Folosind algebra Booleană, simplificați expresiile și aduceți-le la o formă echivalentă exprimată cu un număr minim de litere.

a) $\overline{(X+Y)} \cdot (\overline{X} + \overline{Y})$
b) $\overline{X} \cdot Y \cdot Z + X \cdot Z$
c) $\overline{X} \cdot \overline{Z} + X \cdot Y \cdot Z + X \cdot \overline{Z}$
d) $X \cdot Y \cdot Z + \overline{X} \cdot Y + X \cdot Y \cdot \overline{Z}$
e) $(\overline{X} + \overline{Z}) \cdot (\overline{X} + Z) \cdot (X + Y + \overline{Z} \cdot W)$
f) $\overline{(A+B)} \cdot (\overline{A} + \overline{B})$
g) $B \cdot C + B \cdot (A \cdot D + A \cdot \overline{D})$
h $\overline{X} \cdot \overline{Y} + X \cdot Y \cdot Z + \overline{X} \cdot Y$
i) $\overline{W} \cdot X \cdot (\overline{Z} + \overline{Y} \cdot Z) + X \cdot (W + \overline{W} \cdot Y \cdot Z)$
j) $X \cdot (X + X \cdot \overline{Y})$
k) $(Y \cdot Z + \overline{X} \cdot W) \cdot (X \cdot \overline{Y} + Z \cdot \overline{W})$
l) $X \cdot Y + X \cdot (W \cdot Z + W \cdot \overline{Z})$
m) $\overline{(\overline{X} \cdot \overline{Y} + Z)} + Z + X \cdot Y + W \cdot Z$
n) $\overline{X} \cdot Y \cdot (\overline{W} + \overline{Z} \cdot W) + Y \cdot (X + X \cdot \overline{Z} \cdot W)$
o) $A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B$
p) $\overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot C$
q) $(A + \overline{B} + A \cdot \overline{B}) \cdot (A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C)$
r) $X + Y \cdot (Z + \overline{X + Z})$
s) $(A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot (\overline{C} \cdot \overline{D} + C \cdot D) + \overline{A \cdot C}$
t) $\overline{\overline{X}} \cdot (\overline{X} + 1)$

Soluție

a) Utilizând *T6* și ulterior *T4* expresia devine: $\overline{(X+Y)} \cdot (\overline{X} + \overline{Y}) = \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot (\overline{X} + \overline{Y}) = \overline{X} \cdot \overline{Y}$

k) După aplicarea *A4* expresia devine:
$(Y \cdot Z + \overline{X} \cdot W) \cdot (X \cdot \overline{Y} + Z \cdot \overline{W}) =$
$Y \cdot Z \cdot (X \cdot \overline{Y} + Z \cdot \overline{W}) + \overline{X} \cdot W \cdot (X \cdot \overline{Y} + Z \cdot \overline{W}) = Y \cdot Z \cdot X \cdot \overline{Y} + Y \cdot Z \cdot Z \cdot \overline{W} + \overline{X} \cdot W \cdot X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot W \cdot Z \cdot \overline{W}$
După restrângerea termenilor utilizând *A6*: $0 + Y \cdot Z \cdot \overline{W} + 0 + 0 = Y \cdot Z \cdot \overline{W}$

8. Aflați complementul expresiei $F = X + Y \cdot Z$. Arătați că $F \cdot \overline{F} = 0$ și $F + \overline{F} = 1$.

Soluție

$\overline{F} = \overline{X + Y \cdot Z} = \overline{X} \cdot \overline{Y \cdot Z} = \overline{X} \cdot (\overline{Y} + \overline{Z}) = \overline{X} \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot \overline{Z}$

$F \cdot \overline{F} = (X + Y \cdot Z) \cdot (\overline{X} \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot \overline{Z}) = X \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} + X \cdot \overline{X} \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} + Y \cdot Z \cdot \overline{X} \cdot \overline{Z} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

$F + \overline{F} = (X + Y \cdot Z) + (\overline{X} \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot \overline{Z}) = (X + \overline{X} \cdot \overline{Y}) + Y \cdot Z + \overline{X} \cdot \overline{Z} = X + (\overline{Y} + Y \cdot Z) + \overline{X} \cdot \overline{Z} = X + \overline{Y} + (Z + \overline{X} \cdot \overline{Z}) =$
$= X + \overline{Y} + Z + \overline{X} = (X + \overline{X}) + \overline{Y} + Z = 1 + \overline{Y} + Z = 1$

9. Aflați expresiile complementare următoarelor expresii:

a) $X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$
b) $X \cdot \overline{Y} + Z \cdot W + Q$
c) $\overline{V} \cdot W + X \cdot Y + \overline{Z}$
d) $(A + \overline{B} + C) \cdot (\overline{A} \cdot \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{B} \cdot \overline{C})$
e) $(X + \overline{Y} + \overline{Z}) \cdot (\overline{X} + \overline{Z}) \cdot (X + Y)$
f) $A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$
g) $W \cdot X \cdot (\overline{Y} \cdot Z + Y \cdot \overline{Z}) + \overline{W} \cdot \overline{X} \cdot (\overline{Y} + Z) \cdot (Y + \overline{Z})$

Soluție

Formele complementare ale expresiilor se obțin prin negarea acestora:

a) $\overline{X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y} = \overline{X \cdot \overline{Y}} \cdot \overline{\overline{X} \cdot Y} = (\overline{X} + Y) \cdot (X + \overline{Y})$

b) $\overline{X \cdot \overline{Y} + Z \cdot W + Q} = \overline{(X \cdot \overline{Y})} \cdot \overline{(Z \cdot W)} \cdot \overline{Q} = (\overline{X} + Y) \cdot (\overline{Z} + \overline{W}) \cdot \overline{Q}$

e) $\overline{(X + \overline{Y} + \overline{Z}) \cdot (\overline{X} + \overline{Z}) \cdot (X + Y)} = \overline{(X + \overline{Y} + \overline{Z})} + \overline{(\overline{X} + \overline{Z})} + \overline{(X + Y)} = \overline{X} \cdot Y \cdot Z + X \cdot Z + \overline{X} \cdot \overline{Y}$

f) $A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = \overline{A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B} = \overline{A \cdot \overline{B}} \cdot \overline{\overline{A} \cdot B} = (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B})$

2.4 Pentru cei ce vor să devină profesionişti

1. Ştiind că $A \cdot B = 0$ şi că $A + B = 1$, dovediţi prin prelucrări algebrice că $A \cdot C + \overline{A} \cdot B + B \cdot C = B + C$. Dovediţi egalitatea prin forme de undă, analizând toate cazurile posibile ale celor trei intrări.

Soluţie

Se consideră tabelul de adevăr:

Rând	A	B	C	$A \cdot B$	$A + B$	$A \cdot C$	$\overline{A} \cdot B$	$B \cdot C$	$A \cdot C + \overline{A} \cdot B + B \cdot C$	$B + C$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
3	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
6	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1

Se observă că:
- îndeplinirea condiţiei $A \cdot B = 0$ se face pentru rândurile 0, 1, 2, 3, 4, şi 5;
- îndeplinirea condiţiei $A + B = 1$ se face pentru rândurile 2, 3, 4, 5, 6, şi 7.

Rezultă că ambele condiţii sunt îndeplinite doar în cazurile liniilor 2, 3, 4 şi 5. În aceste cazuri, expresia menţionată este adevărată (coloanele corespunzătoare au aceleaşi valori pe rândurile 2, 3, 4 şi 5). Fomele de undă sunt prezentate în figura 2.1. De observat că, dacă ipotezele asupra semnalelor A şi B nu sunt îndeplinite, expresia menţionată nu este adevărată.

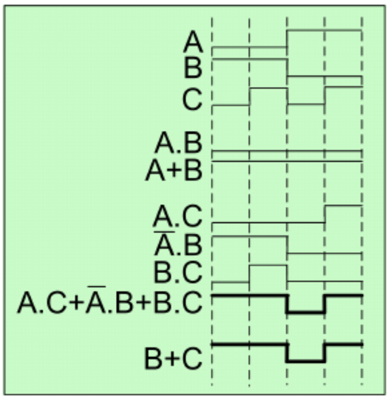

Figura 2.1 Forme de undă pentru problema 1.

Analitic, se observă faptul că îndeplinirea condiţiilor asupra semnalelor A şi B are loc doar dacă A şi B sunt complementare ($A = \overline{B}$). Înlocuind A cu $\overline{B}$, expresia din partea stângă devine:
$A \cdot C + \overline{A} \cdot B + B \cdot C = \overline{B} \cdot C + \overline{\overline{B}} \cdot B + B \cdot C = \overline{B} \cdot C + B \cdot B + B \cdot C = \overline{B} \cdot C + B + B \cdot C = \overline{B} \cdot C + B = B + C.$

2. Determinaţi relaţia dintre numărul de variabile ale unei funcţii şi numărul total de funcţii diferite existente. Calculaţi numărul total de funcţii de 2, 3, 4, 5 şi 6 variabile.

Soluţie

O funcţie cu N variabile de intrare are 2^N combinaţii diferite ale intrărilor. În fiecare din cele 2^N combinaţii funcţia poate avea două valori (0 sau 1). Numărul de funcţii distincte cu N intrări este 2^{2^N}.

Număr de intrări	Număr de funcţii distincte
2	$2^{2^2} = 2^4 = 16$
3	$2^{2^3} = 2^8 = 256$
4	$2^{2^4} = 2^{16} = 65.536$
5	$2^{2^5} = 2^{32} = 4.294.967.296$
6	$2^{2^6} = 2^{64} = 18.446.744.073.709.551.616$

3. Determinaţi şi justificaţi valoarea de adevăr a fiecărei afirmaţii:
   a) $(A \oplus B) \cdot C = (A \cdot B) \oplus (B \cdot C)$
   b) $Z \cdot X + \overline{Y} + W \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} = (X + \overline{Y} + \overline{Z}) \cdot (\overline{X} + Y + Z) \cdot (Z + W + Y)$
   c) $\overline{X} \cdot Y + \overline{Y} \cdot Z + X \cdot \overline{Z} = X \cdot \overline{Y} + Y \cdot \overline{Z} + \overline{X} \cdot Z$
   d) $\overline{X} \cdot Z + Y = (X + Y + Z) \cdot (\overline{X} + Y + \overline{Z})$
   e) $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C = A \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + B \cdot \overline{C} \cdot D + B \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$

4. Utilizând axiomele şi teoremele algebrei Booleene, să se demonstreze următoarele identităţi:
   a) $A \oplus 1 = \overline{A}$, $A \oplus 0 = A$, $A \oplus \overline{A} = 1$, $A \oplus A = 0$
   b) $A \cdot B + (A + B) \cdot C = A \cdot B + (A \oplus B) \cdot C$
   c) $A \oplus B = B \oplus A = \overline{A} \oplus \overline{B}$
   d) $\overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$
   e) $A \oplus B = \overline{A \oplus \overline{B}} = \overline{\overline{A} \oplus B}$

   Soluţie

   a) $A \oplus 1 = A \cdot \overline{1} + \overline{A} \cdot 1 = 0 + \overline{A} = \overline{A}$
   $A \oplus 0 = A \cdot \overline{0} + \overline{A} \cdot 0 = A + 0 = A$
   $A \oplus \overline{A} = A \cdot \overline{\overline{A}} + \overline{A} \cdot \overline{A} = A \cdot A + \overline{A} \cdot \overline{A} = A + \overline{A} = 1$
   $A \oplus A = A \cdot \overline{A} + \overline{A} \cdot A = 0 + 0 = 0$

   b) Expresia din partea stângă se procesează conform *A4* şi *T4*:
   $A \cdot B + (A + B) \cdot C = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C = A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C =$
   $A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$
   prin aplicarea *A4* şi *T4* în partea dreaptă se ajunge la o expresie egală cu expresia rezultată din partea stângă:
   $A \cdot B + (A \oplus B) \cdot C = A \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C = A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$

   c) $A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$
   $B \oplus A = B \cdot \overline{A} + \overline{B} \cdot A = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$
   $\overline{B} \oplus \overline{A} = \overline{B} \cdot \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} \cdot \overline{A} = \overline{B} \cdot A + B \cdot \overline{A} = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$

   d) Expresia din partea stângă, conform *A4* şi *T4*, devine:
   $\overline{A \oplus B} = \overline{A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B} = \overline{A \cdot \overline{B}} \cdot \overline{\overline{A} \cdot B} = (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B}) = \overline{A} \cdot A + \overline{A} \cdot \overline{B} + B \cdot A + \overline{B} \cdot B = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$, egală cu expresia din partea dreaptă.

5. Demonstraţi identităţile analitic, folosind axiomele şi teoremele algebrei Booleene:
   a) $C \cdot D + A \cdot \overline{B} + A \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B + \overline{C} \cdot \overline{D} = (\overline{A} + \overline{B} + C + \overline{D}) \cdot (A + B + \overline{C} + D)$
   b) $(A \oplus B) \cdot C = (A \cdot C) \oplus (B \cdot C)$