Seminar Nr. 5

Şiruri de funcţii

1. i) Să se arate că şirul de funcţii $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x+n}{x+n+1}$ este uniform convergent.

ii) Să se arate că şirul de funcţii $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx)$ nu este uniform convergent.

iii) Să se arate că şirul de funcţii $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n}{x+n}$ nu este uniform convergent.

Soluţie. **i)** Cum $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ rezultă $f_n \underset{s}{\to} f$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x+n}{x+n+1} - 1 \right| = \frac{1}{x+n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

deci $\dfrac{1}{n} \to 0$ independent de x, prin urmare limita şirului este uniformă.

ii) Dacă

- $x < 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -\dfrac{\pi}{2}$,
- $x > 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{\pi}{2}$,
- $x = 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$,

deci $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, x > 0 \end{cases}$, adică $f_n \underset{s}{\to} f$.

Utilizăm teorema: *Limita uniformă a unui şir de funcţii continue este o funcţie continuă.*

Cum f nu este o funcţie continuă rezultă că nu avem convergenţă uniformă.
iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+x} = 1$, deci $f_n \underset{s}{\to} f$, unde $f(x) = 1$.
Se observă că dacă alegem şirul $x_n = n$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2},$$

deci din criteriul de convergenţă neuniformă rezultă că $f_n \underset{u}{\nrightarrow} f$.

2. Calculaţi:
i) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{n+x^5} dx$; **ii)** $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_2^5 e^{-nx^2} dx$.

Soluţie. **i)** Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n+x^5} \underset{s}{\to} 0$, şi notăm funcţia limită cu f. Convergenţa este uniformă deoarece $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{1}{n+x^5}\right| \leq \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ (independent de x.) Atunci se obţine

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{n+x^5} dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+x^5} dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

ii) Fie $f_n : [2,5] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx^2} \underset{s}{\to} 0$, şi notăm funcţia limită cu f. Convergenţa este uniformă deoarece $|f_n(x) - f(x)| = |e^{-nx^2}| \leq e^{-4n} \to 0$ independent de x. Rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^5 e^{-nx^2} dx = \int_2^5 \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} dx = \int_2^5 0 dx = 0.$$

3. Să se studieze convergenţa uniformă a următoarelor şiruri de funcţii:
i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$,
ii) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx^2} \sin(nx)$,
iii) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2 + x^4}$,
iv) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$,

v) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$.

Răspuns. i) iii) uniform convergent, ii),iv) v) nu sunt uniform convergente

4. Se consideră şirul de funcţii $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{1+\frac{1}{n}}$.

i) Să se studieze convergenţa punctuală.

ii) Să se studieze convergenţa uniformă pe $[0,1]$.

Soluţie. **i)** Fie $x \geq 0$ fixat; atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^{1+\frac{1}{n}} = x$. Rezultă că f_n converge punctual la $f(x) = x$.

ii) Pentru a studia convergenţa uniformă pe $[0,1]$ calculăm

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left(x - x^{1+\frac{1}{n}}\right).$$

Considerăm funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - x^{1+\frac{1}{n}}$. Rezultă

$$g'(x) = 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{\frac{1}{n}},$$

deci $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{\frac{1}{n}} = 1 \Leftrightarrow x = \left(\frac{n}{1+n}\right)^n$. Prin urmare rezultă

$$\sup_{x\in[0,1]} \left(x - x^{1+\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = 0,$$

deci şirul f_n converge uniform pe $[0,1]$ la funcţia f.

5 Să se arate că şirul de funcţii $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos kx}{k(k+1)}$ este uniform convergent.

Soluţie. $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos kx}{k(k+1)}\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \left|\dfrac{\cos kx}{k(k+1)}\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ $= \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+p+1} < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, $\forall n > n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. Din Teorema lui Cauchy rezultă f_n este un şir uniform convergent.

6. Fie $f_n : \mathbb{R}\backslash\{n\} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{x-n}$. Să se arate că pentru şirurile de funcţii (f_n) avem $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) \neq \lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. De ce ?

Indicaţie. $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) \neq \lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, deoarece convergenţa $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0$, pentru $x \in \mathbb{R}\backslash\{n\}$ nu este uniformă.

7. Să se demonstreze că şirul de funcţii (f_n), $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, unde $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ este un şir uniform convergent la zero pe intervalul $[0, 2\pi]$.

8. Să se studieze convergenţa uniformă a şirurilor de funcţii:
i) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$; $x \in \mathbb{R}$, **ii)** $f_n(x) = \dfrac{x^3}{n^3 + x^3}$; $x \in \mathbb{R}$,
iii) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2 x^2}$, $x \in [0, 1]$.

Răspuns. **i)** f_n este uniform convergent; **ii)** f_n nu este uniform convergent; **iii)** f_n nu este uniform convergent.