

§ 3.3 Caracterizarea sistemelor în timp discret

1. Sisteme liniare în timp discret, invariante în timp redate prin MM-ISI

A) Abordarea în domeniul timp

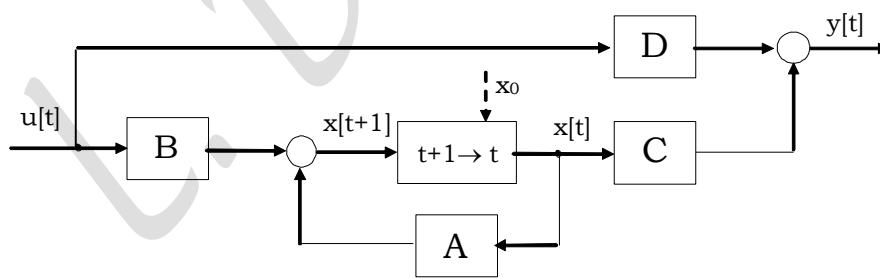
STD se prezintă sub forma de ecuații recursive¹ care leagă eșantioane ale secvenței de intrare $\{u[t]\}_{t \in T}$ de eșantioane ale secvenței de ieșire $\{y[t]\}_{t \in T}$. Pentru MM-ISI ale STD se utilizează forma cu operator de avans²:

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + Bu[t], & \text{cu } x[t_0] = x_0 \\ y[t] = Cx[t] + Du[t] \end{cases} \quad (1)$$

În aceste ecuații:

- ✓ $u \in \mathbf{R}^m$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^p$, $t \in T = \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots, t_f\}$, cu $t_0 \in \mathbf{N}$ – moment inițial și $t_f \in \mathbf{N}$ – moment final.
- ✓ Vectorul x_0 conține *condițiile inițiale* care sunt de tipul „condiții la momentul inițial”.
- ✓ Matricele A , B , C și D au aceleași denumiri ca și în cazul timp continuu: A - matricea sistemului, B - matricea de comandă (intrare), C - matricea de ieșire (observare), D - matricea de interconexiune. Ele sunt matrice constante cu coeficienți reali.
- ✓ T este mulțimea timp sau *orizontul de timp*. În particular putem avea $t \in T = \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots, \infty\}$. Ori de câte ori este posibil considerăm $t \in T = \mathbf{N}$, respectiv $t_0 = 0$.

Relațiile (1) cuprind de fapt un sir de sisteme de egalități, sir care se obține dând lui t , consecutiv, valorile din mulțimea T . MM (1) îi asociem schema bloc din figură. Blocul simbolizat prin $t+1 \rightarrow t$ corespunde operației de decalare (întârziere) în timp a secvenței $\{x[t+1]\}_{t \in T}$ cu un pas h la stânga, prin care $x[t+1]$ calculat în pasul curent devine $x[t]$ din pasul de calcul următor.



În situația în care $D \neq 0$ sistemul este la limita de strictă cauzalitate respectiv de realizabilitate fizică.

Când $D = 0$ sistemul este strict cauzal respectiv fizic realizabil:

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + Bu[t], & \text{cu } x[t_0] = x_0 \\ y[t] = Cx[t] \end{cases} \quad (2)$$

Sistemele (1) și (2) sunt de tip MIMO. În cazul SISO ele devin:

¹ Numite și ecuații recurente sau ecuații cu diferențe.

²) Aceasta înseamnă că argumentele care apar pentru variabilele modelului sunt t și $t+1$.

$$\begin{cases} \mathbf{x}[t+1] = A\mathbf{x}[t] + b\mathbf{u}[t], \\ \mathbf{y}[t] = c^T \mathbf{x}[t] + d\mathbf{u}[t] \end{cases}, \quad (1')$$

respectiv

$$\begin{cases} \mathbf{x}[t+1] = A\mathbf{x}[t] + b\mathbf{u}[t], \\ \mathbf{y}[t] = c^T \mathbf{x}[t] \end{cases}. \quad (2')$$

MM în timp discret pot fi obținute plecând de la procese fizice în care fenomenele sunt descriptibile prin valori asociate unor momente discrete, sau plecând de la procese fizice descriptibile prin MM în timp continuu, dar monitorizate numai la momente discrete. Pentru primul caz reamintim două din exemplele deja întâlnite:

- **Problema de stoc** (sistem de ordinul 2, s – stoc, v – valoare stoc):

$$\begin{bmatrix} s[t+1] \\ v[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s[t] \\ v[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c[t] \\ a[t] \end{bmatrix}; \quad y[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s[t] \\ v[t] \end{bmatrix}$$

- **Problema populației de crustacee** (sistem de ordinul 5, x_1, \dots, x_5 – numărul de crustacee aflate în primul an de viață, ..., în al cincilea an de viață):

$$\begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \\ x_3[t+1] \\ x_4[t+1] \\ x_5[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \\ x_3[t] \\ x_4[t] \\ x_5[t] \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_2[0] \\ x_3[0] \\ x_4[0] \\ x_5[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100000 \\ 1104 \\ 115 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1[t] \\ y_2[t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-s_1 & 1-s_2 & 1-s_3 & 1-s_4 & 1-s_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \\ x_3[t] \\ x_4[t] \\ x_5[t] \end{bmatrix}$$

Problema de calcul a răspunsului sistemului (1) la un semnal de intrare dat se enunță astfel:

Se dau: $\begin{cases} \mathbf{x}[t+1] = A\mathbf{x}[t] + B\mathbf{u}[t], & \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0 \text{ fixat,} \\ \mathbf{y}[t] = C\mathbf{x}[t] + D\mathbf{u}[t] \\ \mathbf{u}[t], t \in \mathbb{N} \end{cases}$ Se cere: $\mathbf{y}[t], t \in \mathbb{N}$, eventual și $\mathbf{x}[t], t \in \mathbb{N}$.	(3)
--	-----

Calculul se poate efectua direct în domeniul timp discret sau prin intermediul domeniului operațional folosind teorema sumei de conoluție. În primul caz soluționarea decurge astfel:

- Se rezolvă sistemul de ecuații recursive de ordinul I reprezentat de ecuațiile de stare considerând $t_0 = 0$ și condițiile inițiale \mathbf{x}_0 , respectiv secvența de intrare $\{\mathbf{u}[t]\}_{t \in \mathbb{N}}$. Rezolvarea ecuațiilor de stare se soldează cu determinarea secvenței de stare $\{\mathbf{x}[t]\}_{t \in \mathbb{N}}$.
- Se înlocuiește rezultatul de la punctul i) în ecuațiile de ieșire.

Ecuațiile de stare din (3) au soluția³

$$\mathbf{x}[t] = \begin{cases} \mathbf{x}_0, & t = 0 \\ A^t \mathbf{x}_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B \mathbf{u}[\tau], & t \in \mathbb{N}^* \end{cases}. \quad (4.1)$$

³⁾ Verificați acest rezultat prin inducție matematică.

Înlocuind rezultatul în ecuația de ieșire se obține:

$$y[t] = \begin{cases} \underbrace{Cx_0}_{\substack{y_\ell[t], t \in \mathbb{N}^* \\ \text{răspunsul} \\ \text{liber}}} + \underbrace{Du[0]}_{\substack{y_f[t], t \in \mathbb{N}^* \\ \text{răspunsul} \\ \text{fortat}}}, & t = 0 \\ \underbrace{CA^t x_0}_{\substack{y_\ell[t], t \in \mathbb{N}^* \\ \text{răspunsul} \\ \text{liber}}} + \underbrace{\sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1} Bu[\tau] + Du[t]}_{\substack{y_f[t], t \in \mathbb{N}^* \\ \text{răspunsul} \\ \text{fortat}}}, & t \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (4.2)$$

Pentru *regimul liber*, când $u[t] = 0$, $t \in \mathbb{N}$, rezultă:

$$x_\ell[t] = A^t x_0, \quad t \in \mathbb{N}; \quad y_\ell[t] = c^T A^t x_0, \quad t \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

În *regim forțat*, când $x_0 = 0$, obținem:

$$x_f[t] = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu[\tau], & t \in \mathbb{N}^* \end{cases}, \quad y_f[t] = \begin{cases} Du[0], & t = 0 \\ \sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1} Bu[\tau] + Du[t], & t \in \mathbb{N}^* \end{cases}. \quad (6)$$

Și în acest caz este valabilă *proprietatea de superpoziție*.

Matricea

$$\Phi[t, \tau] = A^{t-\tau} \quad (7)$$

se numește *matricea de tranziție* sau *matricea fundamentală a sistemului*. În cazul $\tau = 0$ convenim să notăm matricea $\Phi[t, 0]$ cu $\Phi[t]$:

$$\Phi[t] = A^t \quad (8)$$

Denumirea de matrice de tranziție este sugerată de prima ecuație (5), $\Phi[t]$ caracterizând tranziția sistemului liber din stare inițială x_0 în stare curentă $x_\ell[t]$.

- A doua relație (6) permite stabilirea imediată a formulei de calcul a *funcției răspuns la impuls unitar*. Astfel, pentru sistemele de tip SISO când $d = 0$, considerând în relația (6) secvența de intrare $\{\delta[t]\}_{t \in \mathbb{N}}$ se obține⁴:

$$y_\delta[t] = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ c^T A^{t-1} b, & t \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (9)$$

Folosind acest rezultat și formula (11) de la pag. 78, bazată pe suma de conoluție, rezultă următoarea formulă echivalentă formulei (6):

$$y_f[t] = \sum_{\tau=0}^{\infty} y_\delta[t-\tau] \cdot u[\tau], \quad t \in \mathbb{N}. \quad (6')$$

Relația evidențiază faptul că răspunsul forțat se poate calcula ca sumă de conoluție între „răspunsul la impuls unitar” $h[t] \}_{t \in \mathbb{N}}$ și semnalul de intrare unilateral $\{u[t]\}_{t \in \mathbb{N}}$. Rezultatul este similar celui din paragraful anterior.

⁴ În literatură răspunsul la impuls unitar se notează adeseori cu $\{h[t]\}_{t \in \mathbb{N}}$ (6') devinind: $y_f[t] = \sum_{\tau=0}^t h[t-\tau] \cdot u[\tau], t \in \mathbb{N}$.

B. Abordarea în domeniul imaginilor (operational)

Pentru a calcula matricele și funcțiile de transfer ale STD sunt importante următoarele trei proprietăți ale transformatei \mathbf{z} : i) proprietatea de liniaritate, ii) teoremele de translatăre ale șirului original; iii) teorema sumei de conoluție a funcțiilor original.

Stabilim în continuare *formula de calcul a matricei de transfer pentru sistemul în timp discret de tip MIMO redat prin MM-ISI*:

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + Bu[t], \quad x[0] = x_0 \\ y[t] = Cx[t] + Du[t], \quad t \in \mathbf{T} = \mathbf{N} \end{cases} . \quad (10)$$

Făcând uz de primele două proprietăți rezultă:

$$(10) \quad \boxed{\begin{cases} z[x(z) - x[0]] = Ax(z) + Bu(z) \\ y(z) = Cx(z) + Du(z) \end{cases}} \quad (11)$$

Din prima ecuație obținem

$$x(z) = (zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x[0] + (zI - A)^{-1} \cdot B \cdot u(z) \quad (12.1)$$

iar prin înlocuirea rezultatului în a doua ecuație avem

$$y(z) = C \cdot (zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x[0] + [C \cdot (zI - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot u(z). \quad (12.2)$$

Matricea de transfer se determină în condiții inițiale nule, deci din egalitatea

$$y(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D] \cdot u(z). \quad (13)$$

Deducem că:

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D. \quad (14)$$

Pentru sistemele de tip SISO se fac în (12) și (14) substituțiile $b \rightarrow B, c^T \rightarrow C, d \rightarrow D$; rezultă

$$x(z) = (zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x[0] + (zI - A)^{-1} \cdot b \cdot u(z) \quad (12.1')$$

$$y(z) = c^T \cdot (zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x[0] + [c^T \cdot (zI - A)^{-1} \cdot b + d] \cdot u(z) \quad (12.2')$$

și funcția de transfer:

$$H(z) = c^T (zI - A)^{-1} b + d. \quad (15)$$

Pentru sistemele fizic realizabile avem $D=0$ sau $d=0$. Deci

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B \quad (14')$$

sau

$$H(z) = c^T (zI - A)^{-1} b. \quad (15')$$

Termenii în $x[0]$ din formulele (12.1) și (12.2) corespund răspunsurilor libere, iar termenii care conțin pe $u(z)$ corespund răspunsurilor forțate. Scriem că:

$$x(z) = x_f(z) + x_\ell(z), \quad y(z) = y_f(z) + y_\ell(z), \quad (16)$$

în care

$$\begin{aligned} x_f(z) &= (zI - A)^{-1} \cdot B \cdot u(z), \quad x_\ell(z) = (zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x[0], \\ y_f(z) &= H(z) \cdot u(z), \quad y_\ell(z) = C \cdot (zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x[0] \end{aligned} \quad (16')$$



Variabile unificate în domeniile timp și operațional

Plecând de la aspectele asemănătoare ale MM-ISI ale STC și STD a apărut ideea ca pentru unele probleme de teoria sistemelor cazul sistemelor în timp continuu și cazul sistemelor în timp discret să fie surprinse, formal, printr-un singur tip de MM-ISI folosind aşa-numitele variabile unificate în domeniul timp:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}, t \in \mathbf{T} \quad , \quad (17)$$

în care:

- dacă mulțimea \mathbf{T} este continuă, atunci u , x și y sunt funcțiile în timp continuu $u(t)$, $x(t)$ și $y(t)$ iar $x' = \dot{x}(t)$,
- dacă mulțimea \mathbf{T} este discretă, atunci u , x și y sunt funcții în timp discret cu valorile $u[t]$, $x[t]$ și $y[t]$ la momentul curent, iar $x' = x[t+1]$.

De asemenea, se observă că atunci când se pleacă de la MM-ISI formulele obținute în domeniul operațional pentru STD se asemănă cu cele din cazul STC. În primele apare variabila operațională \mathbf{z} , în celelalte variabila operațională \mathbf{s} . Pentru a evidenția acest lucru și pentru a sistematiza și mai mult modul de exprimare se folosește variabila unificată în domeniul operațional

$$\lambda = \begin{cases} s, & \text{pentru cazul STC} \\ z, & \text{pentru cazul STD} \end{cases} .$$

Astfel, sistemului (17) cu polinomul caracteristic $\mu(\lambda) = |\lambda I - A|$ îi corespunde matricea de transfer

$$H(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1} B + D . \quad (18)$$

2. Sisteme liniare în timp discret invariante în timp redate prin MM-II

A) Abordarea în domeniul timp

Prezentarea se referă numai la sisteme de tip SISO. MM-II ale STD liniare și invariante în timp au formă de ecuații recurente de ordinul n cu coeficienți constanți. Ecuațiile leagă în mod direct $n+1$ valori consecutive ale secvenței (semnalului) de intrare $\{u[t]\}_{t \in \mathbf{T}}$ de $n+1$ valori consecutive ale secvenței (semnalului) de ieșire $\{y[t]\}_{t \in \mathbf{T}}$. Ordinul de recurență, n , este și ordinul sistemului.

Ca formă canonică se consideră MM-II la limita de realizabilitate fizică (la limita de cauzalitate) redat de ecuația recursivă (se folosește forma cu termeni de întârziere):

$$\begin{aligned} a_n y[t] + a_{n-1} y[t-1] + \dots + a_1 y[t-n+1] + a_0 y[t-n] = \\ = b_n u[t] + b_{n-1} u[t-1] + \dots + b_1 u[t-n+1] + b_0 u[t-n] , \end{aligned} \quad (19)$$

cum $y[t_0-1], y[t_0-2], \dots, y[t_0-n]$ și $u[t_0-1], u[t_0-2], \dots, u[t_0-n]$ fixate.

Pentru sistemul (19) mulțimea timp este $\mathbf{T} = \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots, t_f\} \subseteq \mathbf{Z}$ (sau \mathbf{N}) cu t_0 - moment inițial și t_f - moment final, iar coeficientul $a_n \neq 0$. În particular putem avea $t \in \mathbf{T} = \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots, \infty\}$. Vom observa că se consideră condițiile inițiale $y[t_0-1], y[t_0-2], \dots, y[t_0-n]$ și $u[t_0-1], u[t_0-2], \dots, u[t_0-n]$. Aceasta înseamnă că de fapt se operează cu eșantioane din mulțumea

$$\mathbf{T}^* = \{t_0-n, t_0-n+1, \dots, t_0-1\} \cup \mathbf{T} = \{t_0-n, t_0-n+1, \dots, t_0-1, t_0, t_0+1, t_0+2, \dots, t_f\} \subseteq \mathbf{Z} (\text{sau } \mathbf{N}),$$

mulțime care conține și momente anterioare momentului inițial. Ca moment inițial t_0 convenim să considerăm primul moment de la care începând se poate opera cu MM (19), adică primul moment pentru care se poate folosi (19) pentru a calcula pe $y[t]$. Ori de câte ori este posibil adoptăm $\mathbf{T} = \mathbf{N}$.

Este esențial să realizăm faptul că relația (19) sintetizează un sistem redat printr-un sir de egalități care se obține pentru valorile succesive ale t ($t \in \mathbb{T}$):

$$\begin{aligned} a_n y[t_0] + a_{n-1} y[t_0 - 1] + \dots + a_1 y[t_0 - n + 1] + a_0 y[t_0 - n] = \\ = b_n u[t_0] + b_{n-1} u[t_0 - 1] + \dots + b_1 u[t_0 - n + 1] + b_0 u[t_0 - n], \end{aligned} \quad (20.0)$$

$$\begin{aligned} a_n y[t_0 + 1] + a_{n-1} y[t_0] + \dots + a_1 y[t_0 - n + 2] + a_0 y[t_0 - n + 1] = \\ = b_n u[t_0 + 1] + b_{n-1} u[t_0] + \dots + b_1 u[t_0 - n + 2] + b_0 u[t_0 - n + 1], \end{aligned} \quad (20.1)$$

...

$$\begin{aligned} a_n y[t] + a_{n-1} y[t - 1] + \dots + a_1 y[t - n + 1] + a_0 y[t - n] = \\ = b_n u[t] + b_{n-1} u[t - 1] + \dots + b_1 u[t - n + 1] + b_0 u[t - n], \end{aligned} \quad (20.t=t_0)$$

...

$$\begin{aligned} a_n y[t_f] + a_{n-1} y[t_f - 1] + \dots + a_1 y[t_f - n + 1] + a_0 y[t_f - n] = \\ = b_n u[t_f] + b_{n-1} u[t_f - 1] + \dots + b_1 u[t_f - n + 1] + b_0 u[t_f - n]. \end{aligned} \quad (20.t_f=t_0)$$

Se observă că sistemul de ecuații (20) permite calcularea succesivă prin operații algebrice elementare a valorilor $y[t_0]$, $y[t_0+1]$, ..., $y[t_f]$ ale sevenței semnalului de ieșire $\{y[t]\}$, $t \in \{t_0, \dots, t_f\}$.

Problema de calcul a răspunsului sistemului (19), pentru $t_0 = 0$ și $t_f \rightarrow \infty$, este de forma:

$$\boxed{\begin{cases} \text{Se dau : } \begin{cases} a_n y[t] + a_{n-1} y[t - 1] + \dots + a_1 y[t - n + 1] + a_0 y[t - n] = \\ = b_n u[t] + b_{n-1} u[t - 1] + \dots + b_1 u[t - n + 1] + b_0 u[t - n], \\ y[-1], y[-2], \dots, y[-n] \text{ și } u[-1], u[-2], \dots, u[-n], \\ u[t], \quad t \in \mathbb{N}. \end{cases} \\ \text{Se cere : } y[t], \quad t \in \mathbb{N}. \end{cases}} \quad (21)$$

Soluționarea ecuației recurente din (21) se bazează pe utilizarea polinomului

$$\mu(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (22)$$

considerat *polinom caracteristic al sistemului*. Problema poate fi soluționată atât în domeniul timp cât și în domeniul operațional. Metodele de rezolvare în domeniul timp discret nu fac obiectul acestei lucrări.

B) Abordarea în domeniul imaginilor (operațional)

În continuare stabilim *formula de calcul a funcției de transfer pentru sistemul monovariabil la intrare și la ieșire* (19).

În condiții inițiale nule, din (19) se obține

$$y(z) = \frac{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \dots + b_1 z^{-(n-1)} + b_0 z^{-n}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-(n-1)} + a_0 z^{-n}} u(z). \quad (23)$$

Comparând acest rezultat cu formula de definire a f.d.t., pentru expresia acesteia rezultă:

$$H(z) = \frac{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \dots + b_1 z^{-(n-1)} + b_0 z^{-n}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-(n-1)} + a_0 z^{-n}}. \quad (24.1)$$

Sub această formă f.d.t. $H(z)$ este un raport de 2 funcții polinomiale de variabilă z^1 . Pentru multe calcule este mai avantajoasă forma care folosește funcțiile polinomiale în z asociate polinoamelor reciproce:

$$H(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z^1 + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}. \quad (24.2)$$

Având f.d.t. a unui sistem, ieșirea sistemului pentru un semnal de intrare unilateral în condiții inițiale nule poate fi calculată cu relația $y(z) = H(z) u(z)$. Pentru trecerea din domeniul operațional în domeniul timp se folosesc tabelele de transformare.

Funcțiile de transfer (24) pot fi rescrise sub forme care evidențiază polii și zerourile STD:

$$\underline{H}(z) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n (1 - z_j z^{-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i z^{-1})} = \frac{b_n}{a_n} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} = H(z).$$

C) Implementarea legilor de reglare numerică

Matricele și funcțiile de transfer în z sunt folosite în mod frecvent pentru sinteza **legilor de reglare numerică** numite și *regulatoare numerice* sau *algoritmi de reglare numerică*. Odată determinată funcția de transfer a unui regulator numeric este necesară explicitarea algoritmului în domeniul timp, de exemplu sub forma (19). Pe baza explicitării algoritmului sub forma (19) se scrie apoi modulul de program care implementează calculul mărimii de comandă.

Într-o aplicație concretă acest modul de program este o parte componentă a programului de conducere. Modulul de program care implementează algoritmul de reglare depinde în detaliu de caracteristicile suportului pe care se implementează și cuprinde pe lângă calculele aferente algoritmului de reglare numeroase alte operații (de achiziție a datelor măsurate, de filtrare, de calcul a erorii de reglare (sau mărimii de acționare a) și de transmitere a comenzii calculate, mărimea c).

Operația de explicitare a algoritmului de reglare în domeniul timp, destinat calculării pas cu pas (la intervale de timp de valoare h) a mărimii de comandă c în funcție de mărimi de intrare (w – mărimea de referință și y – mărimea de reacție, sau $a = w - y$, numită mărime de acționare) constă în principiu în asocierea unui sistem de forma (19) unei f.d.t. de forma (24.1) și în explicitarea din acest MM-II a valorii ieșirii (mărimea c) la momentul curent t , adică a lui $c[t]$.



Exemplu: Pentru regulatorul numeric din figură, în ipoteza că are f.d.t. $H_{RG}(z) = \frac{0.8z - 0.4}{z^2 - 1.2z + 0.2}$, se obține ecuația recursivă $c[t] - 1.2 \cdot c[t-1] + 0.2 \cdot c[t-2] = 0.8 \cdot a[t-1] - 0.4 \cdot a[t-2]$, respectiv algoritmul de reglare numerică pentru care trebuie elaborat programul de implementare:

$$c[t] = 0.8 \cdot a[t-1] - 0.4 \cdot a[t-2] + 1.2 \cdot c[t-1] - 0.2 \cdot c[t-2].$$

D) Sisteme cu răspuns la impuls în timp finit⁵

Se numește *sistem cu răspuns la impuls în timp finit* sau sistem de tip FIR (Finite Impulse Response) un sistem liniar în timp discret al cărui răspuns la impuls $\{h[t]\}_{t \in \mathbb{Z}}$ are un număr finit de valori nenule.

Restrângem discuția la sistemele cauzale, caracterizate de faptul că $h[t] = 0$, $t < 0$. Fie, în acest caz, $\{h[t]\}_{t \in \mathbb{N}} = \{h[0], h[1], \dots, h[t_f], 0, 0, \dots\}$ răspunsul la impuls al sistemului de tip FIR. Transformata z a acestuia,

$$h(z) = h[0] + h[1] \cdot z^{-1} + \dots + h[t_f] \cdot z^{-t_f}, \quad (25)$$

este convergentă în întreg planul „ z ” fiindcă suma are un număr finit de termeni nenuli. Întrucât funcția răspuns la impuls $h(z)$ este totodată și f.d.t. $H(z)$ a sistemului FIR, rezultă că:

⁵ În această secțiune răspunsul la impuls unitar se notează cu $\{h[t]\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

$$H(z) = h[0] + h[1] \cdot z^{-1} + \dots + h[t_f] \cdot z^{-t_f} = \frac{h[0] \cdot z^{t_f} + h[1] \cdot z^{t_f-1} + \dots + h[t_f]}{z^{t_f}}. \quad (26)$$

Se observă că sistemul FIR este de ordinul t_f .

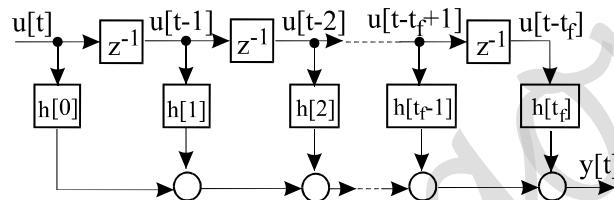
Cu $H(z)$ astfel determinat se poate calcula imaginea operațională a semnalului de ieșire al sistemului pentru orice semnal de intrare $\{u[t]\}_{t \in \mathbb{N}}$, dat prin transformata $u(z)$, și pentru condiții initiale nule, cu formula:

$$y(z) = H(z) \cdot u(z) = h[0] \cdot u(z) + h[1] \cdot z^{-1} \cdot u(z) + \dots + h[t_f] \cdot z^{-t_f} \cdot u(z) \quad (27)$$

În domeniul timp din (27) rezultă

$$y[t] = h[0] \cdot u[t] + h[1] \cdot u[t-1] + \dots + h[t_f] \cdot u[t-t_f], \quad t \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Modelului (27) îl se poate asocia schema bloc de mai jos numită *schema bloc a unui sistem de tip FIR*. Blocurile notate cu z^{-1} sunt blocuri de întârziere cu un pas de discretizare (blocuri de întârziere unitară, identice cu blocul notat cu $t+1 \rightarrow t$ din schema bloc de la începutul § 2.3). Este important de observat că schema bloc reprezintă o conexiune paralelă. Trăsătura caracteristică a structurii din figură este lipsa conexiunii cu reacție.

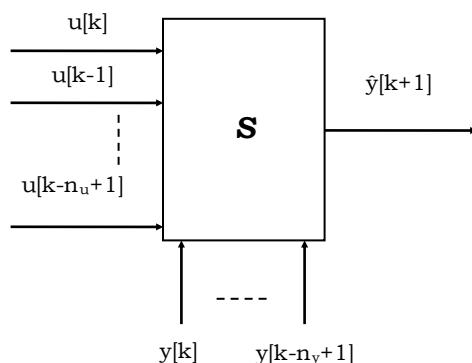


Spre deosebire de modelele de forma (19), adică de sistemele cu MM-II

$$\begin{aligned} a_n y[t] + a_{n-1} y[t-1] + \dots + a_1 y[t-n+1] + a_0 y[t-n] &= \\ &= b_n u[t] + b_{n-1} u[t-1] + \dots + b_1 u[t-n+1] + b_0 u[t-n] \end{aligned}$$

care conțin în membrul stâng cel puțin doi termeni referitor la y , reprezentând astfel o ecuație recurrentă, respectiv o conexiune cu reacție, modelul (28) conține în membrul stâng un singur termen și nu reprezintă o ecuație recurrentă. Efectul îl constituie faptul că orice secvență de intrare cu un număr finit de termeni se transmite prin sistem FIR într-un interval de timp finit. Efectul recurrentei constă în faptul că răspunsul la impuls nu mai este în timp finit, ci conține un număr infinit de termeni nenuli. De aceea modelele cu ecuații recurrente sunt denumite și sisteme cu răspuns la impuls în timp infinit sau sisteme de tip IIR (Infinite Impulse Response). La nivel de schema bloc trăsătura caracteristică a structurii unui sistem de tip IIR este prezența conexiunii cu reacție.

Un caz de utilizare a sistemelor de tip FIR îl reprezintă sistemele de predicție destinate estimării unei valori ulterioare a mărimii de ieșire a unui sistem fizic din secvențe de valori ale mărimii de intrare și de ieșire fără introducerea de interacțiuni dinamice între acestea. Figura următoare ilustrează un sistem de predicție într-un singur pas.



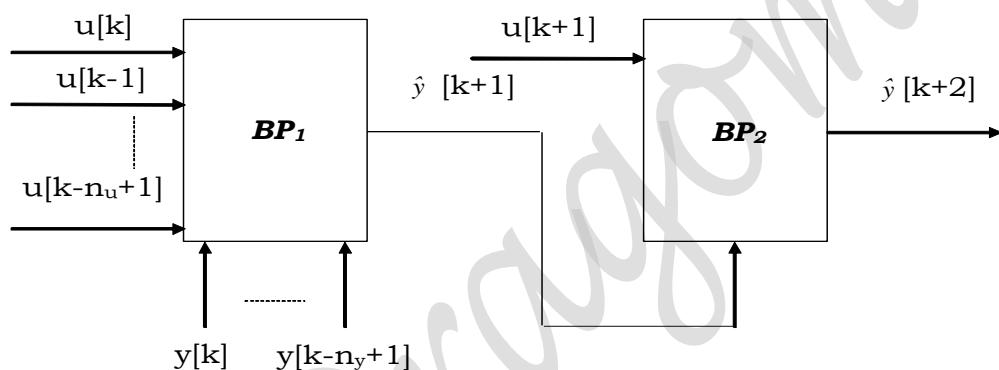
Din secvențele $\{u[k], u[k-1], \dots, u[k-n_u+1]\}$ și $\{y[k], y[k-1], \dots, y[k-n_y+1]\}$ sistemul estimează valoarea $\hat{y}[k+1]$ a lui y pentru pasul următor. Spunem că $\hat{y}[k+1]$ se obține prin *predicție într-un pas* din cele două șiruri de valori. În cazul liniar predicția într-un singur pas se realizează pe baza unei relații de forma:

$$\hat{y}[k+1] = \alpha_0 \cdot y[k] + \alpha_1 \cdot y[k-1] + \dots + \alpha_{n_y-1} \cdot y[k-n_y+1] + \beta_0 \cdot u[k] + \beta_1 \cdot u[k-1] + \dots + \beta_{n_u-1} \cdot u[k-n_u+1] \quad (29)$$

Identificarea modelui de predicție (29) constă în determinarea rangurilor n_u și n_y și a coeficienților și $\{\alpha_i\}_{i=0,n_u}$ și $\{\beta_j\}_{j=0,n_y}$. Odată stabilite rangurile, coeficienții se determină astfel încât eroarea de predicție ($\hat{y}[k+1] - y[k+1]$) să fie minimă.

Este ușor de observat că relația (29) este de forma (28) întrucât cele două secvențe au rolul de mărimi de intrare.

În practică se operează și cu modele de predicție în mai mulți pași. Ele pot fi realizate în diferite variante care diferă prin volumul de date memorate și resursele folosite pentru memorare și prelucrare. În figură este ilustrată schema bloc a unui *sistem de predicție în 2 pași*. Ea utilizează două blocuri de predicție BP_1 și BP_2 , de tipul celui din figura anterioară. Structura blocului BP_2 este însă mult mai simplă decât structura blocului BP_1 .



Roul sistemului este de a furniza valoarea lui $\hat{y}[k+2]$ astfel încât eroarea de predicție ($\hat{y}[k+2] - y[k+2]$) să fie minimă. Ca urmare, diferența $\hat{y}[k+1] - y[k+1]$ nu mai face obiectul minimizării, iar valoarea $\hat{y}[k+1]$ nu reprezintă în general o estimată corectă a lui $y[k+1]$. Din acest motiv ea nu apare în figură ca un semnal de ieșire.

§. 3.4 Stabilirea modelelor matematice ale conexiunilor de sisteme

Una dintre problemele care se pune în mod frecvent cu privire la conexiunile de sisteme este stabilirea MM al unei conexiuni de sisteme atunci când se cunosc MM ale sistemelor componente. În acest context vorbim despre *problema stabilirii modelelor matematice ale conexiunilor de sisteme*. Ne referim numai la situația în care sistemele interconectate sunt liniare și separabile în raport cu modul de interconectare.

Calculul se poate efectua cu MM în domeniul timp sau cu MM operaționale. Obiectul paragrafului este prezentarea unor metode de stabilire a modelelor conexiunilor. Atât în domeniul timp, cât și în domeniul imaginilor, avem de a face din punct de vedere matematic cu o problemă de eliminare. *De fiecare dată, se operează cu variabilele unificate.*

1. Stabilirea MM-ISI pentru conexiunile fundamentale¹.

Conexiunile fundamentale sunt conexiunile serie, derivație și cu reacție. Problema stabilirii MM-ISI ale acestora este următoarea:

Se cunosc: *MM-ISI ale sistemelor (strict cauzale) interconectate*:

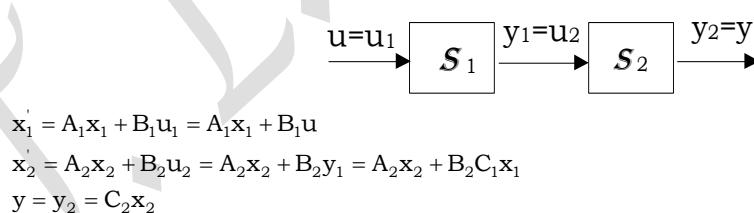
$$(S_1): \begin{cases} \dot{x}_1' = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \text{ și } (S_2): \begin{cases} \dot{x}_2' = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Se cere: MM-ISI al conexiunii

$$(S): \begin{cases} \dot{x}' = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2)$$

Potrivit *principiului agregării stărilor* mulțimea variabilelor de stare ale conexiunii este formată din ansamblul mărimilor de stare ale subsistemelor componente. În consecință, *conexiunea are vectorul de stare* $x = [x_1^T \quad x_2^T]^T$, *iar ordinul sistemului rezultat este egal cu suma ordinelor sistemelor componente*. Afirmația redă un fapt evident atât din punct de vedere matematic cât și din punct de vedere fenomenologic.

- MM-ISI al conexiunii serie din figură se obține eliminând toate variabilele diferite de intrarea u , ieșirea y și vectorul de stare x . Succesiv obținem:



Matriceal, rezultatul ia forma:

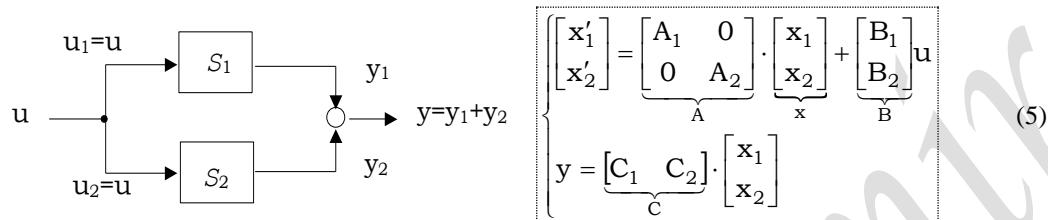
$$\boxed{\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}} \quad (3)$$

¹ Metoda de calcul în acest caz constă în efectuarea de substituții succesive și aducerea rezultatului final la forma canonica a MM-ISI.

Polinomul caracteristic al sistemului este egal cu produsul polinoamelor caracteristice $\mu_{A_1}(\lambda)$ și $\mu_{A_2}(\lambda)$ ale sistemelor (1):

$$\mu_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda I - A_1 & 0 \\ -B_2 C_1 & \lambda I - A_2 \end{vmatrix} = \mu_{A_1}(\lambda) \cdot \mu_{A_2}(\lambda). \quad (4)$$

➤ Pentru conexiunea derivație rezultă

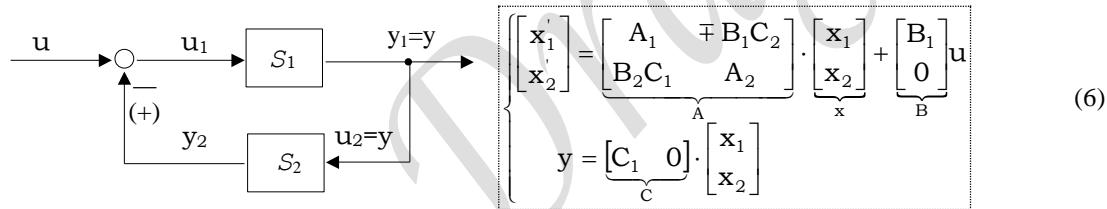


Și în acest caz este valabil rezultatul din (4)

➤ În cazul conexiunii cu reacție eliminările se efectuează astfel:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u_1 = A_1 x_1 + B_1 (u - y_2) = A_1 x_1 + B_1 u - B_1 C_2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= A_2 x_2 + B_2 u_2 = A_2 x_2 + B_2 y = A_2 x_2 + B_2 y_1 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y &= y_1 = C_1 x_1 \end{aligned}$$

Sub formă matriceală ecuațiile devin



Polinomul caracteristic al sistemului este

$$\mu_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - A_1 & \pm B_1 C_2 \\ -B_2 C_1 & \lambda I - A_2 \end{vmatrix} = \mu_{A_1}(\lambda) \cdot \mu_{A_2}(\lambda) \cdot |I \pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)|. \quad (7)$$

În urma dezvoltării determinantului din ultima expresie din (7) polinoamele $\mu_{A_1}(\lambda)$ și $\mu_{A_2}(\lambda)$ se simplifică. Deci valorile proprii ale conexiunii cu reacție sunt date numai de numărătorul determinantului.

2. Algebra schemelor bloc (MM-II)

Prin algebra schemelor bloc se înțelege un ansamblu de reguli destinate calculului matricelor și funcțiilor de transfer ale sistemelor complexe atunci când se cunosc: schemele bloc ale sistemelor complexe precum și matricele și funcțiile de transfer ale blocurilor componente. Se disting două categorii de reguli:

- reguli de reducere,
- reguli de reconfigurare.

Regulile de reducere servesc pentru reducerea numărului de blocuri dintr-o schemă bloc inițială prin înlocuirea diferitelor tipuri de conexiuni printr-un singur bloc având aceeași funcție sau matrice de transfer ca și conexiunea.

Regulile de reconfigurare servesc pentru modificarea unei scheme bloc date astfel încât să poată fi aplicate regulile de reducere.

Spre deosebire de regulile de reducere care, în principiu, nu introduc modificări sistemică, aplicarea regulilor de reconfigurare se soldează întotdeauna cu modificări sistemică (de exemplu: rezultă un sistem de ordin mai mare) care păstrează neschimbate doar dependențele intrare-iesire.

- În continuare se prezintă *trei reguli de reducere*. Ele se referă la conexiunile fundamentale care au făcut obiectul secțiunii anterioare. Se presupun cunoscute matricea de transfer $H_1(\lambda)$ a sistemului S_1 și matricea de transfer $H_2(\lambda)$ a sistemului S_2 . Trebuie determinate matricele de transfer ale conexiunilor.

1°. În *cazul conexiunii serie* :

$$y(\lambda) = y_2(\lambda) = H_2(\lambda)u_2(\lambda) = H_2(\lambda)y_1(\lambda) = H_2(\lambda)H_1(\lambda)u_1(\lambda) = H_2(\lambda)H_1(\lambda)u(\lambda).$$

Comparând acest rezultat cu relația de definire a matricei de transfer, $y(\lambda) = H(\lambda) \cdot u(\lambda)$, obținem următoarea formulă de calcul a matricei de transfer a conexiunii serie a două subsisteme:

$$H(\lambda) = H_2(\lambda) \cdot H_1(\lambda) . \quad (8)$$

Pentru q subsisteme inseriate având f.d.t. $H_i(\lambda)$, $i=1; q$ se obține formula generală:

$$H(\lambda) = \prod_{i=q}^1 H_i(\lambda) . \quad (9)$$

Trebuie să observăm că matricea de transfer a conexiunii este egală cu produsul matricelor de transfer ale subsistemelor componente *luate în ordinea de la ieșire spre intrare*. Întrucât calculul a fost făcut pentru cazul MIMO produsul nu este comutativ. Dacă cele q subsisteme sunt de tip SISO atunci, matricele de transfer se reduc la f.d.t., iar produsele din (8) și (9) sunt comutative.

2°. Pentru *conexiunea derivatie* se obține matricea de transfer

$$H(\lambda) = H_1(\lambda) + H_2(\lambda) . \quad (10)$$

Pentru cazul a q subsisteme legate în paralel formula devine:

$$H(\lambda) = \sum_{i=1}^q H_i(\lambda) . \quad (11)$$

3°. Pentru *conexiunea cu reacție* matricea de transfer a conexiunii se determină *considerând ca punct de plecare exprimarea mărimii de ieșire $y(\lambda)$ de pe calea directă și făcând apoi substituții succesive până când se obține un rezultat în funcție tocmai de $y(\lambda)$ și de mărimea de intrare $u(\lambda)$:*

$$y(\lambda) = y_1(\lambda) = H_1(\lambda) \cdot u_1(\lambda) = H_1(\lambda) \cdot (u(\lambda) \mp y_2(\lambda)) = H_1(\lambda)[u(\lambda) \mp H_2(\lambda)u_2(\lambda)] = H_1(\lambda)[u(\lambda) \mp H_2(\lambda)y(\lambda)].$$

De aici deducem:

$$[I \pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)]y(\lambda) = H_1(\lambda)u(\lambda) \rightarrow y(\lambda) = [I \pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)]^{-1}H_1(\lambda)u(\lambda).$$

Identificând acest rezultat cu formula de definire $y(\lambda) = H(\lambda)u(\lambda)$, obținem

$$H(\lambda) = [I \pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)]^{-1}H_1(\lambda). \quad (12)$$

Dacă S_1 și S_2 sunt de tip SISO, atunci H_1 și H_2 sunt funcții de transfer, deci expresii scalare. Rezultă

$$H(\lambda) = \frac{H_1(\lambda)}{1 \pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)}. \quad (13)$$

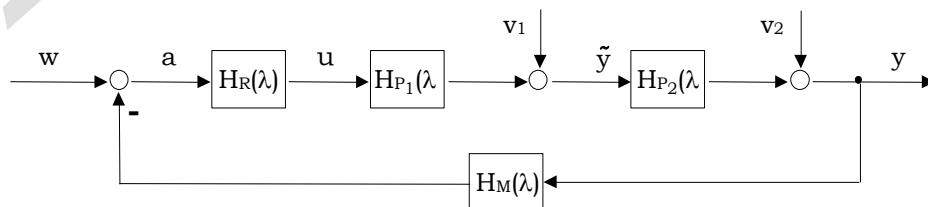
Notăm funcția de transfer a căii directe $u \rightarrow u_1 \rightarrow S_1 \rightarrow y$, cu H_d , iar a canalului $u \rightarrow y_1 \rightarrow S_1 \rightarrow y \rightarrow S_2 \rightarrow y_2$, denumit sistem deschis, cu \tilde{H} . În consecință, avem:

$$\begin{aligned} H_d(\lambda) &= H_1(\lambda) \\ \tilde{H}(\lambda) &= H_1(\lambda)H_2(\lambda) \end{aligned} \rightarrow H(\lambda) = \frac{H_d(\lambda)}{1 \pm \tilde{H}(\lambda)}. \quad (14)$$

În formulele de calcul ale matricelor și funcțiilor de transfer pentru conexiunea cu reacție *semnul (+) corespunde reacției negative, iar semnul (-) corespunde reacției pozitive.*

În cazul sistemelor liniare cu mai multe mărimi de intrare dependența intrare-ieșire se poate obține în domeniul imaginilor prin superpoziție, folosind regulile de reducere de mai sus.

Exemplu: Să se stabilească dependența intrare - ieșire în domeniul imaginilor pentru sistemul (de reglare cu un grad de libertate) din figură, sistemul având orientarea $\{w, v_1, v_2\} \rightarrow y$.



Soluție: Fie $H_w(\lambda)$, $H_{v1}(\lambda)$ și $H_{v2}(\lambda)$ f.d.t. prin care se exprimă influența mărimilor de intrare asupra mărimii de ieșire. Ele se obțin din schema bloc dată, prin particularizări, astfel:

$$H_w(\lambda) = \frac{y(\lambda)}{w(\lambda)} \Big|_{\begin{subarray}{l} v_1(\lambda)=0 \\ v_2(\lambda)=0 \end{subarray}} = \frac{H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)H_{P_2}(\lambda)}{1 + H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)H_{P_2}(\lambda)H_M(\lambda)} \quad (15.1)$$

$$\begin{aligned} H_{v1}(\lambda) &= \frac{y(\lambda)}{v_1(\lambda)} \Big|_{\begin{subarray}{l} w(\lambda)=0 \\ v_2(\lambda)=0 \end{subarray}} = \frac{H_{P_2}(\lambda)}{1 - H_{P_2}(\lambda)H_M(\lambda)(-1)H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)} = \\ &= \frac{H_{P_2}(\lambda)}{1 + H_{P_2}(\lambda)H_M(\lambda)H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)} \end{aligned} \quad (15.2)$$

$$\begin{aligned} H_{v2}(\lambda) &= \frac{y(\lambda)}{v_2(\lambda)} \Big|_{\begin{subarray}{l} w(\lambda)=0 \\ v_1(\lambda)=0 \end{subarray}} = \frac{1}{1 - H_M(\lambda)(-1)H_{P_1}(\lambda)H_{P_2}(\lambda)H_R(\lambda)} = \\ &= \frac{1}{1 + H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)H_{P_2}(\lambda)H_M(\lambda)} \end{aligned} \quad (15.3)$$

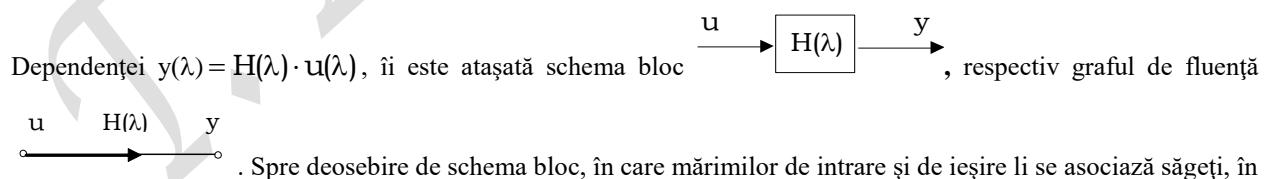
Sistemul fiind liniar este valabil principiul superpoziției, astfel că dependența intrare-ieșire are forma:

$$y(\lambda) = H_w(\lambda)w(\lambda) + H_{v1}(\lambda)v_1(\lambda) + H_{v2}(\lambda)v_2(\lambda). \quad (16)$$

3. Regula lui Mason (MM-II)

Un mijloc de calcul facil, alternativ algebrei schemelor bloc, îl reprezintă *folosirea grafelor de fluență*.²

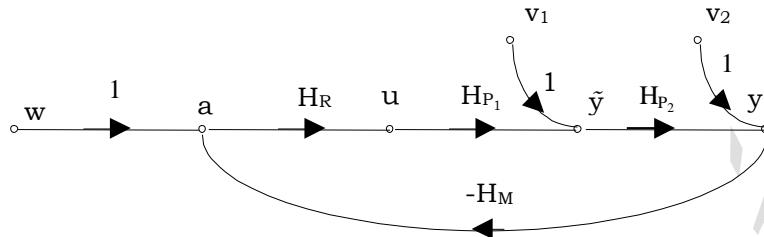
Considerăm numai cazul sistemelor de tip SISO. Schemele bloc ale acestora se pot înlocui prin grafe care pot fi citite și utilizate cu ușurință. Odată înlocuită o schemă bloc printr-un graf sau odată atașat un graf unui model matematic scris sub formă operațională, funcțiile de transfer care interesează pot fi calculate folosind aşa-numita *regulă a lui Mason*.



² Graful reprezintă o *rețea de ramuri dirijate* interconectate în puncte numite *noduri* și care definesc în mod unic un sistem de ecuații algebrice liniare. Fiecare nod corespunde unei variabile. Fiecare ramură are asociată o anumită mărime numită *transmitanță ramurii*. Un nod din care toate ramurile diverg (au sensuri de plecare din nod) se numește *nod de intrare*. Un nod în care toate ramurile converg (au sensuri de intrare în nod) se numește *nod de ieșire*. Celealte noduri, în care apar atât ramuri convergente cât și ramuri divergente, se numesc *noduri ordinare*. Nodurile de intrare reprezintă variabilele independente ale sistemului, iar celelalte noduri variabilele dependente (de ieșire sau interne). Semnalul dintr-un nod ordinar sau dintr-un nod de ieșire este egal cu suma produselor dintre transmitanțele ramurilor convergente și semnalele nodurilor din care aceste ramuri pleacă. Semnalul dintr-un nod de intrare se consideră dat.

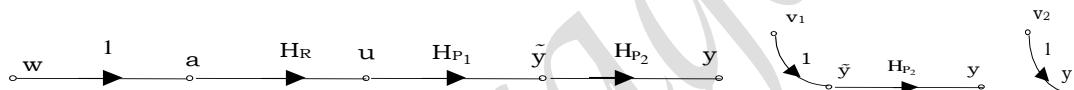
cazul grafului celor două mărimi li se asociază noduri. Funcției de transfer din interiorul blocului îi corespunde în cazul grafului *transmitanța arcului* care leagă nodurile.

În figură este ilustrat graful echivalent schemei bloc din exemplul din secțiunea 2 (secțiunea anterioară):

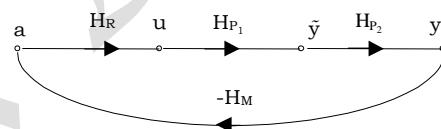


Terminologia asociată utilizării formulei lui Mason este următoarea:

- ◆ *cale elementară* - un subgraf în circuit deschis alcătuit din arce simple care leagă un nod de intrare de un nod de ieșire fără a utiliza un același nod de două ori; în graful din figură apar trei căi elementare; *transmitanța unei căi elementare este egală cu produsul transmitanțelor arcelor componente*;



- ◆ *buclă* - un subgraf în circuit închis, alcătuit din arce simple, care pornește dintr-un nod și revine în același nod fără a parcurge orice alt nod de două ori; în figură apare o singură buclă; *transmitanța unei bucle este egală cu produsul transmitanțelor arcelor componente*;



- ◆ *elemente confluente ale unui graf* - două căi elementare, două bucle sau o cale elementară și o buclă care au în comun cel puțin un nod;
- ◆ *elemente disjuncte ale unui graf* – două bucle, două căi elementare, o buclă și o cale elementară care diferă cel puțin printr-un arc.

Notăm cu T_i , $i = 1; n_{ce}$ - transmitanța unei căii elementare „ i ” care leagă o intrare u de o ieșire y și cu T_j , $j = 1; n_b$ transmitanța unei bucle oarecare „ j ” a grafului. Cu n_{ce} și n_b s-au notat, respectiv, numărul căilor elementare disjuncte de la u la y și numărul buclelor disjuncte din graf.

Funcția de transfer corespunzătoare canalului care leagă mărimea (nodul) de intrare u de mărimea (nodul) de ieșire y se obține cu formula:

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{n_e} T_i \Delta'_i}{\Delta} \quad (17)$$

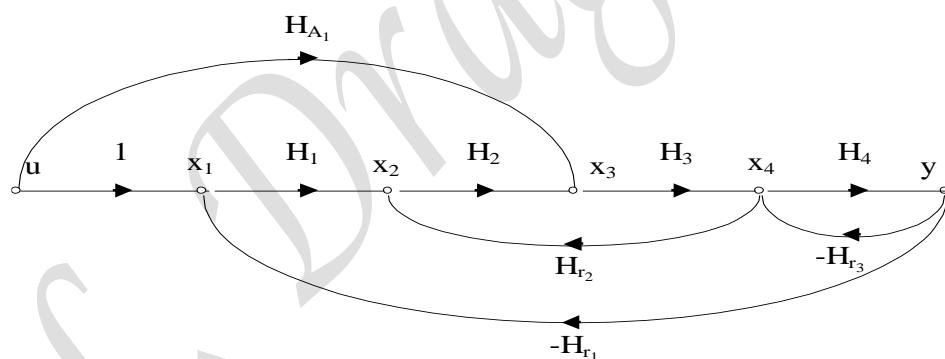
numită *formula lui Mason*. În această formulă³

$$\Delta = 1 - \sum T'_i + \sum T_i T'_j - \sum T_i T'_j T'_k + \dots \quad (18)$$

este determinantul grafului, iar Δ'_i minorul asociat căii elementare „i”. Minorul Δ'_i se obține din Δ înlocuind în expresia acestuia cu 0 toate transmitanțele corespunzătoare buclelor confluente cu calea elementară „i”.

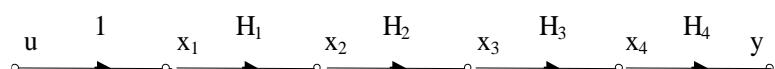
În (18) $\sum T'_i = \sum_{i=1}^{n_b} T'$ reprezintă suma transmitanțelor tuturor buclelor din graf, $\sum T'_i T'_j$ suma produselor transmitanțelor tuturor perechilor de bucle neconfluente din graf, iar $\sum T'_i T'_j T'_k$ suma produselor transmitanțelor tuturor tripletelor de bucle neconfluente două câte două din graf s.a.m.d.

Exemplul : Să se calculeze f.d.t. pentru un sistem cu orientarea $u \rightarrow y$ redat de graful din figură (s-a omis scrierea argumentului operațional λ).



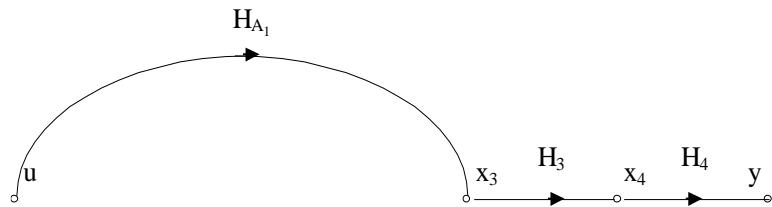
Soluție : Nodul de intrare și nodul de ieșire sunt interconectate prin intermediul a două căi elementare care diferă prin porțiunile cuprinse între nodurile u și x_3 . Ele sunt:

Calea elementară 1 cu transmitanța $T_1 = H_1 H_2 H_3 H_4$:



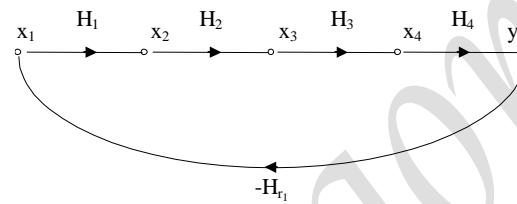
³ De observat alternanța semnelor în formula (18) !

Calea elementară 2 cu transmitanța $T_2 = H_{A_1}H_3H_4$:

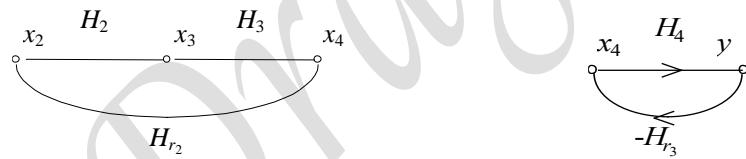


Graful conține trei bucle.

Bucla 1 are transmitanța $T'_1 = -H_1H_2H_3H_4H_{r_1}$:



Bucurile 2 și 3 au transmitanțele $T'_2 = H_2H_3H_{r_2}$, $T'_3 = -H_4H_{r_3}$:



Întrucât toate perechile de bucle sunt confluente determinantul sistemului este $\Delta = 1 - (T'_1 + T'_2 + T'_3)$. Totodată, buclele fiind confluente cu ambele căi elementare minorii asociați acestora sunt egali cu 1: $\Delta'_1 = 1$, $\Delta'_2 = 1$.

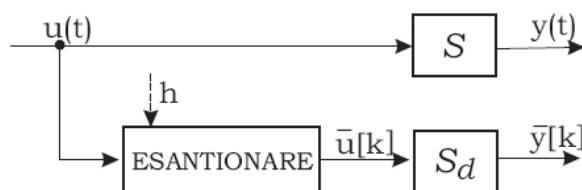
Folosind formula lui Mason rezultă:

$$H(\lambda) = \frac{T_1\Delta'_1 + T_2\Delta'_2}{1 - T'_1 - T'_2 - T'_3} = \frac{(H_1H_2 + H_A)H_3H_4}{1 + H_1H_2H_3H_4H_{r_1} - H_2H_3H_{r_2} + H_4H_{r_3}}.$$

§ 3.5 Discretizarea sistemelor în timp continuu

1. Tipuri de probleme de discretizare

Discretizarea unui sistem în timp continuu reprezintă operația prin care unui sistem în timp continuu S i se asociază un sistem în timp discret S_d care, atunci când lucrează cu secvențele $\{\bar{u}[k]\}$ rezultate prin eșantionarea semnalului de intrare $u(t)$ al sistemului în timp continuu, furnizează la ieșire, pentru momentele $k \cdot h$, de discretizare a timpului, fie exact valoarea mărimei de ieșire a sistemului în timp continuu corespunzătoare eșantionării la momentul kh , adică $\bar{y}[k] = y(t)|_{t=k \cdot h}$, fie o aproximare a valorii respective, adică $\bar{y}[k] \approx y(t)|_{t=k \cdot h}$. Modul de punere al problemei este sugerat prin figura de mai jos.



În primul caz spunem că sistemul în timp discret este o realizare invariantă a sistemului în timp continuu, iar metodele de discretizare le denumim *metode de obținere a realizărilor invariante*. Nu există realizări invariante general valabile. Există realizări invariante valabile numai pentru anumite clase de sisteme și numai în raport cu anumite clase de semnale de intrare. În cazul de față se prezintă doar *metoda de obținere a realizării invariante la semnal treaptă (R.I.S.T) pentru sisteme liniare*.

În al doilea caz vorbim despre *metode de discretizare prin aproximare*. Ele se utilizează atunci când semnalul de intrare este oarecare. Există mai multe tipuri de metode de discretizare prin aproximare. În acest paragraf ne referim numai la cele cunoscute sub denumirea de *metode de substituție*. Aspectul practic care ne interesează este implementarea regulatoarelor numerice proiectate inițial ca regulatoare în timp continuu.

2. Metode de discretizare

În vederea prezentării metodelor de discretizare menționate se consideră sistemul în timp continuu (S):

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (1)$$

Fie intervalul de timp $[t_0, t_f]$, cu $t_0=kh$ și $t_f=(k+1)h$, corespunzător unui pas de discretizare h . Sistemele în timp discret S_d asociate prin discretizare sistemului (1) se obțin prin exprimarea răspunsului sistemului (1) pentru un semnal de intrare dat $u(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ și condiții initiale $x(t_0)$ date sub forma unei ecuații de recurență¹.

A. Obținerea realizării invariante la semnal treaptă în domeniul timp

Se consideră formula de calcul a răspunsului $x(t)$ al sistemului (1):

¹ O denumire alternativă, folosită frecvent, este cea de „ecuație cu diferențe”. Se mai folosește și denumirea de „ecuație recursivă”.

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Particularizând-o pentru intervalul $[t_0, t_f]$ rezultă

$$\mathbf{x}((k+1)h) = e^{Ah} \cdot \mathbf{x}(kh) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{A(kh+h-\tau)} B u(\tau) d\tau. \quad (3)$$

În cazul R.I.S.T. ipoteza de lucru este că pe intervalul $[t_0, t_f]$ semnalul $u(t)$ este constant:

$$u(t) = u(kh), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (4)$$

În această ipoteză (3) devine $\mathbf{x}((k+1)h) = e^{Ah} \cdot \mathbf{x}(kh) + \left[\int_{kh}^{(k+1)h} e^{A(kh+h-\tau)} d\tau \right] \cdot B u(kh)$, iar prin schimbarea de

variabilă $v = (k+1)h - \tau$ obținem:

$$\mathbf{x}((k+1)h) = e^{Ah} \cdot \mathbf{x}(kh) + \left[\int_0^h e^{Av} dv \right] \cdot B u(kh). \quad (5.1)$$

Particularizând ecuațiile de ieșire din (1) pentru momentul $t = kh$ avem

$$y(kh) = C \cdot \mathbf{x}(kh) + D u(kh). \quad (5.2)$$

Ecuațiile (5) furnizează *realizarea invariантă la semnal treaptă căutată*. Cu notațiile uzuale pentru semnalele în timp discret: $x[k] = \mathbf{x}(kh)$, $x((k+1)h) = x[k+1]$, $u[k] = u(kh)$ și $y[k] = y(kh)$, ecuațiile (5) iau forma:

$$\mathcal{S}_d : \begin{cases} x[k+1] = e^{Ah} \cdot x[k] + \left[\int_0^h e^{Av} dv \right] \cdot B u[k] \\ y[k] = C \cdot x[k] + D u[k] \end{cases} \quad (6)$$

Forma realizării invariante la semnal treaptă pe care o folosim în mod obișnuit se obține din (6) și are aspectul:

$$\mathcal{S}_d : \begin{cases} x[t+1] = A_d x[t] + B_d u[t] & , \quad t \in Z \\ y[t] = C_d x[t] + D_d u[t] \end{cases}, \quad (7)$$

În (7) s-a folosit convenția de notare a argumentului „timp normat”² și notațiile:

$$A_d = \Phi(h) = e^{Ah}, \quad B_d = \Gamma(h) = \left[\int_0^h e^{Av} dv \right] B, \quad C_d = C, \quad D_d = D \quad (8)$$

h este pasul de discretizare a timpului, iar A , B , C și D sunt matricele sistemului în timp continuu (1).

Rezumat: În cazul aplicării metodei de discretizare pentru obținerea unei R.I.S.T. a STC (1) pentru un pas de discretizare a timpului de valoare h , rezultatul îl reprezintă STD (7) ale cărui matrice se calculează cu formulele (8). Sistemul (7) corespunde situației în care semnalul de intrare al sistemului (1) este semnalul scară $u(t) = \sum [u(kh) \cdot \sigma(t-kh) - \sigma(t-kh-h)]$, cu trepte de durată h și amplitudini $u(kh)$, notate în (7) cu $u[t]$. La sfârșitul fiecărui pas de discretizare h semnalele de ieșire ale sistemelor (1) și (7) au aceeași valoare.

Exemplu: Să se determine R.I.S.T. pentru sistemul de poziționare

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B = b} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{C = c^T} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C = c^T} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

² În loc de $x[k]$, $u[k]$, $y[k]$; l $x[k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$ notăm $x[t]$, $u[t]$, $y[t]$; l $x[t+1]$, $t \in \mathbb{Z}$.

Soluție: Matricea de tranziție a sistemului este $\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Deci

$$A_d = \Phi(h) = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_d = \Gamma(h) = \left[\int_0^h e^{Av} dv \right] B = \int_0^h e^{Av} BdV = \int_0^h \Phi(v) BdV = \int_0^h \begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dv = \int_0^h \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} dv = \begin{bmatrix} \int_0^h v dv \\ \int_0^h 1 dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix},$$

iar R.I.S.T asociată sistemului de poziționare este:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5h^2 \\ h \end{bmatrix} u[t] \\ y[t] = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} \end{cases}. \quad (9)$$

B. Obținerea realizării invariante la semnal treaptă în domeniul operațional

R.I.S.T. (7) a fost asociată sistemului (1) calculând răspunsul sistemului (1) la semnalul de intrare (4). Pentru simplificarea prezentării presupunem că (1) este un sistem de tip SISO cu f.d.t. $H(s)$. Ca urmare, R.I.S.T. (7) este, de asemenea, un sistem de tip SISO. În acest caz f.d.t. $H(z)$ a R.I.S.T se obține cu formula:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\} \quad (10)$$

în care \mathcal{Z} reprezintă operatorul de asociere a transformatei z originalului semnalului corespunzător lui $\frac{1}{s} H(s)$ prin eșantionare la momentele kh . În aplicarea formulei se parcurg *trei etape*:

- Se calculează produsul $\frac{1}{s} H(s)$, adică transformata Laplace a răspunsului la semnal treaptă al sistemului S (funcția indicială).
- Se calculează folosind tabelele de transformare $\mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\}$ (transformata z a secvenței rezultate prin eșantionarea funcției indiciale eșantionate la momentele kh).
- Se înmulțește ³ rezultatul cu $1 - z^{-1} = \frac{z - 1}{z}$. (De regulă z de la numitor se simplifică întrucât $\mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\}$ conține pe z ca factor la numărător).

Rezumat: În cazul aplicării metodei de discretizare pentru obținerea unei R.I.S.T. a unui sistem cu f.d.t. $H(s)$ pentru un pas de discretizare a timpului de valoare h rezultatul îl reprezintă sistemul în timp discret cu f.d.t. (10). Rezultatul corespunde situației în care semnalul de intrare al sistemului (1) este semnalul scară $u(t) = \sum [u(kh)] [\sigma(t-kh) - \sigma(t-kh-h)]$, cu trepte de durată h și amplitudini $u(kh)$, iar semnalul de la intrarea sistemului cu f.d.t. $H(z)$ este secvența $\{u(0), u(h), u(2h), \dots, u((k-1)h)\}$ notată sub forma $\{u[0], u[1], u[2], \dots, u[t-1]\}$. La sfârșitul fiecărui pas de discretizare h semnalele de ieșire ale sistemelor cu f.d.t. $H(s)$ și $H(z)$ au aceeași valoare.

Exemplul 1: Să se determine R.I.S.T. pentru sistemul de poziționare din exemplul din secțiunea A, anterioară, folosind f.d.t. a acestuia: $H(s) = \frac{1}{s^2}$.

³ Înmulțirea echivalează cu o împărțire prin $\frac{z}{z - 1}$, adică cu transformata z a semnalului treaptă unitară discretă.

Soluție: Înlocuind expresia lui $H(s)$ în (10) rezultă: $H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$. Din tabelele de transformare obținem $\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{h^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$, iar prin înlocuire în expresia lui $H(z)$ găsim f.d.t. $H(z) = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$. Este ușor de verificat că f.d.t. a sistemului (9) are expresia de mai sus.

Exemplul 2: Să se calculeze funcția de transfer a realizării invariante la semnal treaptă pentru cazul când $H(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$, $h = 0.2$ sec.

Soluție: Se calculează produsul: $\frac{1}{s} H(s) = \frac{s+1}{s^2(s+2)}$. O expresie de această formă nu apare în tabelele de transformare. Pentru a folosi tabelele recurgem la descompunerea: $\frac{1}{s} H(s) = \frac{1}{s(s+2)} + \frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s(s+2)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{s^2(s+2)}$ căreia îi corespund liniile transformare

$f(s)$	$f(z)$
$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$\frac{(ah-1+e^{-ah})z^2+(1-ahe^{-ah}+e^{-ah})z}{(z-1)^2(z-e^{-ah})}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-ah})z}{(z-1)(z-e^{-ah})}$

Aplicând aceste formule pentru $a = 2$, $h = 0.2$ sec rezultă

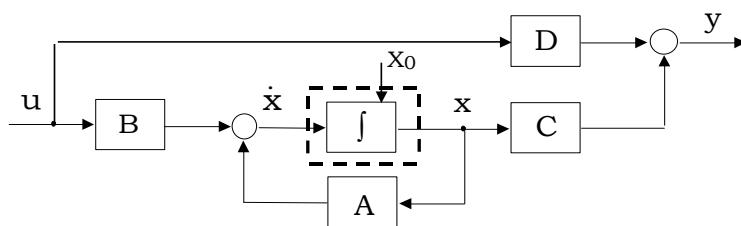
$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} H(s)\right\} = \frac{(1-e^{-0.4}) \cdot z}{2 \cdot (z-1) \cdot (z-e^{-0.4})} + \frac{(-0.6+e^{-0.4}) \cdot z^2 + (1-0.4 \cdot e^{-0.4}+e^{-0.4}) \cdot z}{4 \cdot (z-1)^2 \cdot (z-e^{-0.4})}.$$

În final, cu formula (10) obținem $H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} H(s)\right\} = \frac{1-e^{-0.4}}{2 \cdot (z-e^{-0.4})} + \frac{(-0.6+e^{-0.4}) \cdot z + (1+0.6 \cdot e^{-0.4})}{4 \cdot (z-1) \cdot (z-e^{-0.4})}$, respectiv

$$H(z) = \frac{(1.4-e^{-0.4}) \cdot z + 2.6 \cdot e^{-0.4} - 1}{4 \cdot (z-1) \cdot (z-e^{-0.4})}.$$

C. Discretizarea prin aproximare folosind metode de substituție

Obținerea MM în timp discret din MM în timp continuu prin metodele de discretizare prin aproximare numite *metode de substituție* se bazează pe observarea schemei bloc din figură, asociată sistemului (1).



În schemă apar trei tipuri de operații: *însumări*, *înmulțiri cu constante și integrări*. Procedural, primele două operații se efectuează în același mod pentru STC și pentru STD. Operația de integrare, căreia îi corespunde blocul încadrat

cu linie întreruptă, nu are un echivalent exact în timp discret. Ea poate fi însă aproximată folosind diferite formule utilizate în metodele de integrare numerică sau de aproximare a derivatelor prin diferențe. *Ideea discretizării prin aproximare constă în esență în păstrarea primelor două operații și în aproximarea operației de integrare.*

În acest context discuția se restrâng la considerarea formei diferențiale a unui element de transfer integrator cu orientarea $u \rightarrow y$, adică la considerarea modelului matematic⁴

$$\dot{y}(t) = u(t), y(t_0) \text{ dat.} \quad (11)$$

- Un prim grup de relații de substituție se obțin prin aproximarea operației de integrare a acestei egalități în cazul în care se consideră o variație arbitrară a semnalului de intrare $u(t)$ pe intervalul de timp $[kh, (k+1)h]$, având lungimea unui pas de discretizare h (v. figura de mai jos). Prin integrare pe acest interval de timp avem:

$$\int_{kh}^{(k+1)h} \dot{y}(t) dt = \int_{kh}^{(k+1)h} u(t) dt. \quad (12)$$

Integrala din membrul stâng fiind o diferențială exactă o calculăm folosind formula Leibnitz - Newton:

$$\int_{kh}^{(k+1)h} \dot{y}(t) dt = y((k+1)h) - y(kh) . \quad (13)$$

Semnalul de intrare având o formă oarecare, integrala din membrul drept se poate evalua numai prin aproximare.

Aproximarea se bazează pe interpretarea grafică a integralei în sens Riemann $\int_{kh}^{(k+1)h} u(t) dt$. Conform figurii ce urmează, integralei îi corespunde aria $A[\overline{MNPQ}]$ a dreptunghiului curbiliniu \overline{MNPQ} . Pentru valori mici ale lui h ea poate fi aproximată prin ariile:

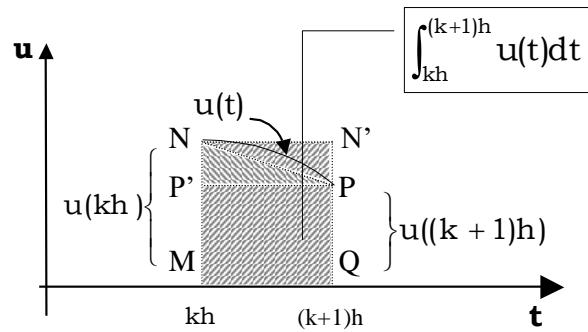
- $A[MNN'Q]$, a dreptunghiului $MNN'Q$ - caz în care vorbim despre *metoda Euler* (sau *metoda dreptunghiului retardată* (MDR)),
- $A[MP'PQ]$, a dreptunghiului $MP'PQ$ - când vorbim despre *metoda dreptunghiului avansată* (MDA))⁵,
- $A[MNPQ]$ a trapezului rectiliniu $[MNPQ]$ - caz în care vorbim despre *aproximarea Tustin* (sau *metoda trapezului* (MT)).

Rezultă:

$$\int_{kh}^{(k+1)h} u(t) dt = A[\overline{MNPQ}] \approx \begin{cases} A[MNN'Q] = h \cdot u(kh) & (\text{MDR}) \\ A[MP'PQ] = h \cdot u((k+1)h) & (\text{MDA}) \\ A[MNPQ] = \frac{1}{2} h \cdot [u(kh) + u((k+1)h)] & (\text{MT}) \end{cases} \quad (14)$$

⁴ Forma diferențială (11) a MM-II a unui ET-I se obține derivând în raport cu timpul forma integrală: $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$.

⁵ Atributele "retardată" și "avansată" se referă la faptul că dreptunghiurile considerate au în comun cu trapezul curbiliniu latura din stânga, corespunzătoare momentului kh (aflat în "urmă"), respectiv latura din dreapta, corespunzătoare momentului $(k+1)h$ (aflat "înainte").



Folosirea pentru o problemă dată a uneia dintre cele trei metode - MTR, MDA sau MT – reprezintă opțiunea utilizatorului.

Rezultatul obținut poate fi utilizat în mai multe moduri. Unul dintre ele, denumit *metoda substituției*, se bazează pe înlocuirea în (12) a dezvoltărilor din (13) și (14). Aplicând convenția de notare a argumentului „temp normat”, rezultă succesiv:

$$y[t+1] - y[t] = \begin{cases} h \cdot u[t] \\ h \cdot u[t+1] \\ \frac{1}{2} h \cdot (u[t] + u[t+1]) \end{cases}, \quad t \in T, \quad (15)$$

respectiv

$$\{y[t+1]\}_{t \in T} - \{y[t]\}_{t \in T} = \begin{cases} h \cdot \{u[t]\}_{t \in T} \\ h \cdot \{u[t+1]\}_{t \in T} \\ \frac{1}{2} h \cdot (\{u[t]\}_{t \in T} + \{u[t+1]\}_{t \in T}) \end{cases} \xrightarrow{\text{def. }} (z-1)y(z) = \begin{cases} h \cdot u(z) \\ h \cdot z u(z) \\ \frac{1}{2} h \cdot (1+z) u(z) \end{cases}.$$

În consecință, pentru aproximarea comportării unui ET-I cu funcția de transfer $H(s) = \frac{1}{s}$, se pot folosi un sistem în

temp discret cu orientarea $u(z) \rightarrow y(z)$ și funcția de transfer:

$$H(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \begin{cases} \frac{h}{z-1} & \text{(MDR)} \\ \frac{h \cdot z}{z-1} & \text{(MDA)} \\ \frac{1}{2} h \cdot \frac{z+1}{z-1} & \text{(MT)} \end{cases} \quad (16)$$

Pe această bază, având în vedere remarcă privitoare la tipul operațiilor care apar în schema bloc asociată sistemului

(1), f. d. t. $\frac{1}{s}$ a blocului integrator se va substitui prin una din expresiile de mai jos:

$$\frac{1}{s} \cong \begin{cases} \frac{h}{z-1} & \text{(MDR)} \\ \frac{h \cdot z}{z-1} & \text{(MDA)} \\ \frac{1}{2} h \cdot \frac{z+1}{z-1} & \text{(MT)} \end{cases} \quad (17)$$

Notă: Se știe că pentru sistemele în timp continuu caracterul integrator este asociat cu prezența polului $p = 0$, iar caracterul derivator cu cea a zeroului $z = 0$. Se observă că potrivit relațiilor (17) polului $p = 0$ din cazul STC îi corespunde pentru STD polul $z = 1$.

Rezumat: Aplicarea metodei de discretizare prin aproximare prin metoda substituției constă în folosirea uneia dintre formulele comasate în (17) prin efectuarea substituției corespunzătoare în funcția de transfer $H(s)$ a STC care trebuie discretizat. Sistemul în timp discret rezultat, de f.d.t. $H(z)$, furnizează în fiecare moment de discretizare a timpului o valoare de aproximare a răspunsului sistemului în timp continuu la momentele de discretizare.

Exemplul: i) Să se determine STD asociat prin metoda dreptunghiului avansată sistemului în timp continuu $5\dot{u}(t) + 2u(t) = 3a(t)$. ii) Să se determine f.d.t. a STD asociat prin metoda dreptunghiului retardată algoritmului de reglare cu

$$f.d.t. H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} . În ambele cazuri pasul de discretizare a timpului este h.$$

Soluție: i) Sistemului îi corespunde funcția de transfer $H(s) = \frac{3}{5s + 2} = \frac{3 \cdot \frac{1}{s}}{5 + 2 \cdot \frac{1}{s}}$, iar în conformitate cu (17) rezultă

$$H(z) = H(s) \Big|_{\frac{1-hz}{s-z-1}} = \frac{3 \cdot \frac{hz}{z-1}}{5 + 2 \cdot \frac{hz}{z-1}} = \frac{3hz}{(5+2h)z-5} = \frac{3h}{5+2h-5z^{-1}} .$$

$$\text{Întrucât } H(z) = \frac{\bar{u}(z)}{\bar{a}(z)}, \text{ avem } \frac{\bar{u}(z)}{\bar{a}(z)} = \frac{3h}{5+2h-5z^{-1}}, \text{ respectiv } (5+2h) \cdot \bar{u}(z) - 5z^{-1} \cdot \bar{u}(z) = 3h \cdot \bar{a}(z) .$$

$$\text{În consecință, modelul în timp discret este } \bar{u}[t] = \frac{5}{5+2h} \cdot \bar{u}[t-1] + \frac{3h}{5+2h} \cdot \bar{a}[t] .$$

ii) $H(s)$ se scrie sub forma $H(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + 2 \frac{1}{s} + 5 \frac{1}{s^2}}$, deci

$$H(z) = H(s) \Big|_{\frac{1-\frac{h}{z-1}}{1+2\frac{h}{z-1}+5\frac{h^2}{(z-1)^2}}} = \frac{\frac{h^2}{(z-1)^2}}{1+2\frac{h}{z-1}+5\frac{h^2}{(z-1)^2}} = \frac{h^2 z^{-2}}{1-2(1-h)z^{-1}+(1-2h+5h^2)z^{-2}} .$$

- Un al doilea grup de relații de substituție se obține considerând cantitățile $f(t+h)-f(t)$, respectiv $f(t)-f(t-h)$ numite *diferență înainte* (forward difference) sau în avans, respectiv *diferență înapoi* (backward difference) sau în întârziere ale unei funcții $f(t)$ derivabile în raport cu timpul lui. Cantitatea h este pasul de discretizare al timpului. Derivata $f'(t)$ se poate approxima cu ajutorul lor astfel:

$$\dot{f}(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad \ddot{f}(t) \approx \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (18)$$

Pentru derivatele de ordin mai mare se pot deduce formule de aproximare de ordin superior pornind de la relațiile (18). Un exemplu este formula de aproximare de ordinul II centrată:

$$\ddot{f}(t) \approx \frac{\dot{f}(t) - \dot{f}(t-h)}{h} = \frac{\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}}{h} = \frac{f(t) - 2 \cdot f(t-h) + f(t-2h)}{h^3} .$$

Pentru discretizarea prin aproximarea a MM ale sistemelor liniare în timp continuu sunt suficiente relațiile (18). Ele pot fi aplicate în mod direct sau prin substituție. Formulele de substituție se obțin plecând de la egalitatea (11). Folosind (18), din (11) rezultă

$$\begin{aligned} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= u(t) \rightarrow y[t+1] - y[t] = h \cdot u[t] \Rightarrow y(z) = \frac{h}{z-1} \cdot u(z) \\ \frac{y(t) - y(t-h)}{h} &= u(t) \rightarrow y[t] - y[t-1] = h \cdot u[t] \Rightarrow y(z) = \frac{h \cdot z}{z-1} \cdot u(z) \end{aligned} \quad (19)$$

Se observă că s-au regăsit primele două formule de substituție (17).

3. Utilizarea metodelor de discretizare în cazul sistemelor de reglare numerică

Sistemele de reglare numerică sunt structuri hibride în care procesul condus este de regulă de tip analogic, iar regulatorul este tip numeric. În Fig. 1 se prezintă o astfel de structură de reglare.

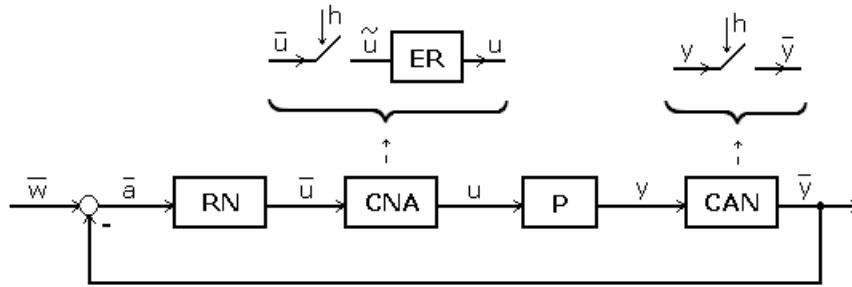


Fig. 1. Structură convențională de reglare numerică

În figură **P** este procesul condus (sistem în timp continuu), iar **RN** este regulatorul numeric (sistem în timp discret). Cele două părți interacționează prin intermediul convertorului numeric-analogic **CNA** și al convertorului analogic-numeric **CAN**. Semnalele notate cu litere supraliniate sunt semnale eșantionate, adică semnale în timp discret necuantizate în amplitudine, iar cele notate cu litere nesupraliniate sunt semnale analogice. RN comandă procesul prin semnalul de comandă \bar{u} și se „informează” despre situația procesului condus prin semnalul de reacție \bar{y} obținut prin eșantionarea și conversia analogic-numerică a mărimii de reglare y . Prin semnalul de referință \bar{w} se prescrie pentru y un regim de funcționare dorit.

În scopul dezvoltării unor modele matematice utilizabile pentru sinteza sistemului de reglare, **CNA** și **CAN** se înlocuiesc, în contextul precizat în continuare, cu modelele reprezentate în Fig.1 deasupra acoladelor. Modelele conțin două întrerupătoare care se închid sincron și periodic, cu perioada h , pe intervale de timp infinit mici și un element de reținere (**ER**)⁶ cu rol de element de memorare. Intervalele de timp mici servesc pentru transmiterea semnalelor eșantionate.

- **CNA** convertește sirul de numere $\{\bar{u}[k]\}$ generat

în **RN** la momentele kh , $k \in \mathbb{Z}$, într-un semnal în timp continuu $u(t)$ de tip scară cu trepte de durată h (Fig.2). Operația

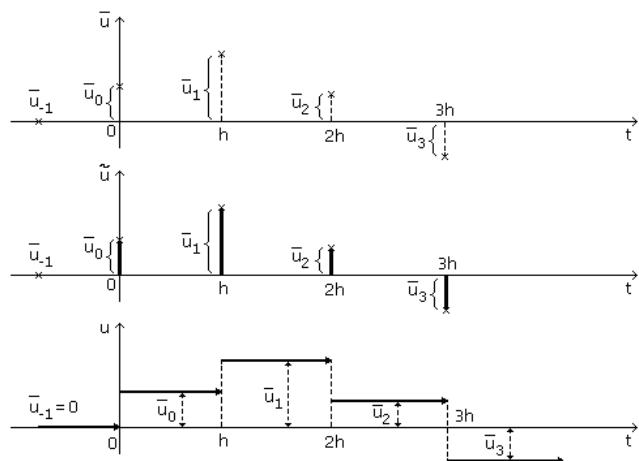


Fig.2. Semnalele asociate în modelarea CNA

⁶ Elementul de reținere reprezintă extrapolator de ordinul zero (zero order holder (ZOH), cel mai simplu element de refacere a semnalelor în timp continuu.

este pusă pe seama unei structuri seriale alcătuită dintr-un convertor – generator de impulsuri, simbolizat prin întrerupător și din elementul de reținere **ER**. Convertorul generator de impulsuri, imaginat ca element ce prezintă facilitățile de conversie N/A și de generare de impulsuri Dirac, asociază la ieșirea lui fiecarei valori $\bar{u}[k] = \bar{u}_k$ din secvența de intrare $\{\bar{u}[k]\}$, aplicată la intrarea lui la momentul kh , un impuls Dirac $\bar{u}_k \cdot \delta(t - k \cdot h)$ rezultând semnalul în timp continuu $\tilde{u}(t)$ de tip pieptene (distribuție δ periodică)⁷.

Elementul de reținere produce din fiecare impuls Dirac $\bar{u}_k \cdot \delta(t - k \cdot h)$ o treaptă de durată h și cu aceeași amplitudine și polaritate ca ale impulsului, rezultând semnalul scară $u(t)$.

- CAN este modelat printr-o structură care conține un singur element: eșantionatorul - convertor, simbolizat tot printr-un întrerupător. Se consideră că eșantionatorul - convertor efectuează periodic, la momentele kh , atât operația de eșantionare cât și operația de conversie analogic-numerică a valorilor eșantioanelor, furnizând la ieșire semnalul eșantionat $\{\bar{y}[k]\}$, $\bar{y}[k] = y(k \cdot h) = y_k$ ⁸. În Fig. 3 sunt ilustrate semnalele asociate CAN.

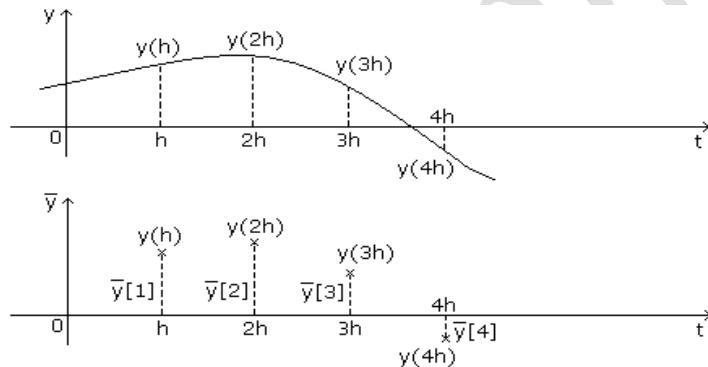


Fig.3. Semnalele asociate în modelarea CAN

Făcând în Fig.1 înlocuirile menționate se obține structura din Fig.4.

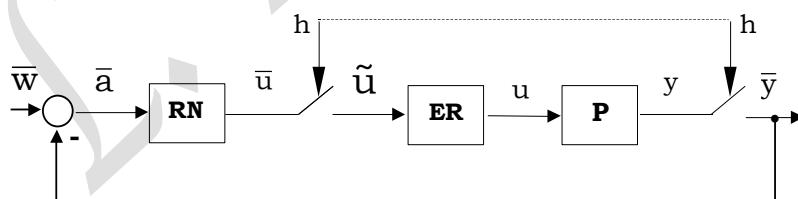


Fig.4.

⁷ Maniera în care au fost modelate procesele care au loc în CNA are acoperire doar în ceea ce privește dependența dintre intrare și ieșire. Semnalul $\tilde{u}(t)$ nu există în realitate. În convertoarele reale informația $\bar{u}[k] = \bar{u}_k$, generată secvențial, este reținută în registre ale căror conținuturi sunt modificate la momentele $k \cdot h$ și folosite pentru comandă adecvată a unui sistem de comutatoare ale unor circuite electronice. La ieșirea acestora rezultă un semnal $u(t)$ cuantizat în amplitudine. În mod obișnuit, datorită valorii foarte mici a cantelor, se face abstracție de această cuantizare considerând, în acord cu cele menționate, semnale eșantionate. Prin aceasta se simplifică modelarea și calculele de proiectare.

⁸ Și de data aceasta, maniera în care au fost modelate procesele dintr-un CAN are acoperire doar în ceea ce privește dependența dintre intrare și ieșire. În realitate fenomenele sunt complexe și se desfășoară într-un ansamblu alcătuit dintr-un circuit de eșantionare și reținere și din convertorul analog-numeric propriu-zis. Circuit de eșantionare și reținere funcționează alternativ în regim de sistem de urmărire a semnalului de intrare și în regim de eșantionare la momentele $k \cdot h$, durata procesului de conversie fiind considerată foarte mică. După conversie rezultă semnalul $\{\bar{y}[k]\}$, $\bar{y}[k] = y(k \cdot h)$ cuantizat în amplitudine. Datorită valorii foarte mici a cantelor, în mod obișnuit se face abstracție de cuantizarea în amplitudine, ceea ce conduce la simplificarea modelării și a calculelor de proiectare.

Regulatorul **RN** intervine asupra lui **P** prin **ER** la a cărui ieșire rezultă un semnal scară cu trepte de durată h (lungimea unui pas de discretizare a timpului). Nivelurile treptelor semnalului scară depind de modul de variație în timp a mărimii de comandă $\{\bar{u}[k]\}$ aşa cum sugerează Fig.2.

O altă caracteristică a schemei din Fig.4 este faptul că evoluția mărimii de ieșire a procesului nu este observată de către regulatorul numeric în mod continuu ci în mod discret, la momentele de discretizare $k \cdot h$, sincron cu apariția treptelor în funcția scară $u(t)$. Sincronizarea este redată prin linia întreruptă care unește cele două întrerupătoare.

Pentru analiza și sinteza sistemului de reglare numerică este necesar un model al procesului **P** care să redea, în condițiile prezentate, legătura dintre secvențele $\{\bar{u}[k]\}$ și $\{\bar{y}[k]\}$ la momentele de discretizare $t_k = th$, $t \in \mathbf{T}^9$, adică un model care să facă legătura între secvențele $\{\bar{u}[t]\}_{t \in \mathbf{T}} = \{u(th)\}_{t \in \mathbf{T}}$ și $\{\bar{y}[t]\}_{t \in \mathbf{T}} = \{y(th)\}_{t \in \mathbf{T}}$. Pentru sistemele liniare astfel de modele se pot obține tocmai prin *metoda realizării invariante la semnal treaptă* prezentată în secțiunile A și B de mai sus. Operația de obținere o denumim *discretizare a STC*, iar rezultatul *realizare invariantă la semnal treaptă*.

În consecință, dacă procesul **P** are MM-ISI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (20)$$

sau MM-II

$$y(s) = H(s) \cdot u(s), \quad (21)$$

unde $H(s)$ este matricea de transfer a sistemului, R.I.S.T. aferentă canalului $\bar{u} \rightarrow \bar{y}(t)$ este

$$\begin{cases} x[t+1] = A_d x[t] + B_d \bar{u}[t], & t \in \mathbf{Z} \\ \bar{y}[t] = C_d x[t] + D_d \bar{u}[t] \end{cases}, \quad (22)$$

cu matricele determinate cu formulele (8), respectiv

$$\bar{y}(z) = H(z) \cdot \bar{u}(z) \quad (23.1)$$

unde

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\}. \quad (23.2)$$

Atunci când pentru proiectarea unui sistem de reglare numerică procesul condus se reprezintă prin realizarea sa invariantă la semnal treaptă, regulatorul **RN** se proiectează direct ca sistem în timp discret.

Există însă și situații de proiectare a **RN** în care acesta se obține ca model de aproximare al unui regulator în timp continuu **R** proiectat pentru un sistem de reglare în timp continuu, fictiv, care trebuie să conducă tot procesul **P** și să realizeze aceleși performanțe ca și sistemul de reglare numerică dorit. Spunem că regulatorul **RN** se proiectează ca *regulator cvasicontinual*. În astfel de cazuri, dacă regulatorul **R** are f.d.t. $H_R(s)$, f.d.t. a regulatorului **RN** se va obține prin metoda substituției

⁹ Multimea \mathbf{T} coincide cu multimele \mathbf{Z} sau \mathbf{N} , după cum semnalele se consideră bilaterale sau unilaterale.

$$H_{RN}(z) = H_R(s) \Big|_{\text{cu } \frac{1}{s} \text{ substituit conform rel. (17)}} \quad . \quad (24)$$

În Fig.5 sunt precizate canalele informaționale cărora li se aplică cele două metode de discretizare: canalul r.i.s.t., al structurii implicate în obținerea R.I.S.T. și canalul d.a., implicat în discretizarea prin aproximare. Cele două canale având un tronson comun, rezultă că pentru un sistem de reglare dat ele nu pot fi folosite niciodată împreună. *Pentru un sistem de reglare dat se folosește fie o metodă de discretizare, fie cealaltă*¹⁰, în funcție de metoda de proiectare aleasă pentru sinteza sistemului de reglare.

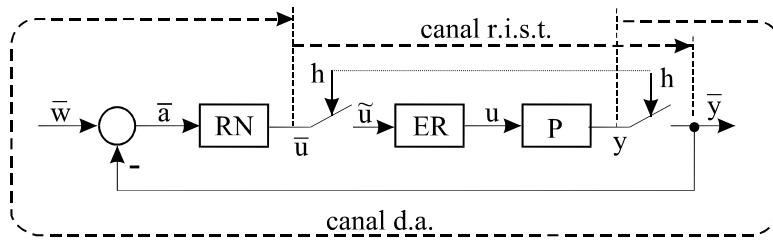


Fig.5.

Aplicând metoda de discretizare prin aproximare prezentată pentru sistemele în timp continuu cu funcțiile de transfer

$$H(s) = \frac{b_1 \cdot s + b_0}{a_1 \cdot s + a_0} \quad (25)$$

și

$$H(s) = \frac{b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \quad (26)$$

se obțin sisteme în timp discret cu funcțiile de transfer

$$H(z) = \frac{\beta_1 + \beta_0 \cdot z^{-1}}{1 + \alpha_0 \cdot z^{-1}} \quad (27)$$

și

$$H(z) = \frac{\beta_2 + \beta_1 \cdot z^{-1} + \beta_0 \cdot z^{-2}}{1 + \alpha_1 \cdot z^{-1} + \alpha_0 \cdot z^{-2}}, \quad (28)$$

respectiv cu modelele intrare – ieșire în domeniul timp discret

$$\alpha_1 \cdot y[t] + \alpha_0 \cdot y[t-1] = \beta_1 \cdot u[t] + \beta_0 \cdot u[t-1] \quad (29)$$

și

$$\alpha_2 \cdot y[t] + \alpha_1 \cdot y[t-1] + \alpha_0 \cdot y[t-2] = \beta_2 \cdot u[t] + \beta_1 \cdot u[t-1] + \beta_0 \cdot u[t-2] \quad (30)$$

Formulele de legătură între coeficienții din relațiile (25) și (26) în cazul aplicării MDR, MDA și MT sunt următoarele:

$H(s) = \frac{b_1 \cdot s + b_0}{a_1 \cdot s + a_0}$	α_1	α_0	β_2	β_1	β_0
(27), (29) MDR	-	$\frac{a_0 \cdot h - a_1}{a_1}$	-	$\frac{b_1}{a_1}$	$\frac{b_0 \cdot h - b_1}{a_1}$

¹⁰ Metoda R.I.S.T se aplică proceselor și nu se aplică legilor de reglare. Discretizarea prin aproximare se aplică regulatoarelor și nu se aplică proceselor.

(27), (29) MDA	-	$-\frac{a_1}{a_0 \cdot h + a_1}$	-	$\frac{b_0 \cdot h + b_1}{a_0 \cdot h + a_1}$	$-\frac{b_1}{a_0 \cdot h + a_1}$
(27), (29) MT	-	$\frac{a_0 \frac{h}{2} - a_1}{a_0 \frac{h}{2} + a_1}$	-	$\frac{b_0 \frac{h}{2} + b_1}{a_0 \frac{h}{2} + a_1}$	$\frac{b_0 \frac{h}{2} - b_1}{a_0 \frac{h}{2} + a_1}$

$H(s) = \frac{b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$	a_1	a_0	β_2	β_1	β_0
(28), (30) MDR	$\frac{a_1 \cdot h - 2a_2}{a_2}$	$\frac{a_0 h^2 - a_1 h + a_2}{a_2}$	$\frac{b_2}{a_2}$	$\frac{b_1 \cdot h - 2b_2}{a_2}$	$\frac{b_0 h^2 - b_1 h + b_2}{a_2}$
(28), (30) MDA	$-\frac{a_1 \cdot h + 2 \cdot a_2}{a_0 \cdot h^2 + a_1 h + a_2}$	$\frac{a_2}{a_0 \cdot h^2 + a_1 h + a_2}$	$\frac{b_0 h^2 + b_1 h + b_2}{a_0 \cdot h^2 + a_1 h + a_2}$	$-\frac{b_1 \cdot h + 2b_2}{a_0 \cdot h^2 + a_1 h + a_2}$	$\frac{b_2}{a_0 \cdot h^2 + a_1 h + a_2}$
(28), (30) MT	$\frac{2 \cdot (a_0 \frac{h^2}{4} - a_2)}{a_0 \frac{h^2}{4} + a_1 \frac{h}{2} + a_2}$	$\frac{a_0 \frac{h^2}{4} - a_1 \frac{h}{2} + a_2}{a_0 \frac{h^2}{4} + a_1 \frac{h}{2} + a_2}$	$\frac{b_0 \frac{h^2}{4} + b_1 \frac{h}{2} + b_2}{a_0 \frac{h^2}{4} + a_1 \frac{h}{2} + a_2}$	$\frac{2 \cdot (b_0 \frac{h^2}{4} - b_2)}{a_0 \frac{h^2}{4} + a_1 \frac{h}{2} + a_2}$	$\frac{b_0 \frac{h^2}{4} - b_1 \frac{h}{2} + b_2}{a_0 \frac{h^2}{4} + a_1 \frac{h}{2} + a_2}$

Aceste formule permit, prin particularizare, stabilirea algoritmilor de reglare în timp discret asociabili legilor de reglare tipizate.

Bunăoară, legii de reglare PI cu funcția de transfer $H(s) = K_R \cdot (1 + \frac{1}{T_I} \cdot \frac{1}{s})$ asocierea se face rescriind expresia sub

forma $H(s) = \frac{K_R T_I \cdot s + K_R}{T_I \cdot s}$. Identificând-o cu funcția de transfer din primul tabel vom avea $b_1 = K_R T_I$,

$b_0 = K_R$, $a_1 = T_I$, $a_0 = 0$ etc.

4. Despre jitter, cu referire la implementarea regulatoarelor numerice ¹¹⁾

Presupunem că regulatorul numeric RN al unui sistem de reglare numerică se obține prin discretizare cu MDR și pasul $h = 0.01$ sec. din regulatorul PI cu filtrare având funcția de transfer:

$$H_R(s) = \left(1 + \frac{1}{0.02s}\right) \cdot \frac{1}{0.0125s + 1}.$$

Modelul în timp discret se obține efectuând substituția $\frac{1}{s} = \frac{0.01}{z-1}$. Rezultă

¹¹⁾ În electronică și telecomunicații se utilizează în mod curent termenul „jitter” pentru a denumi fluctuațiile care apar în durata tactului folosit în cursul transmisiei. Astfel de fluctuații reprezintă perturbații parazite care modifică brutal caracteristicile semnalelor transmise (atât spectrul de fază, cât și spectrul de amplitudine) și performanțele sistemelor, roșului de transmisie. <http://en.wikipedia.org/wiki/Jitter>, <http://de.wikipedia.org/wiki/Jitter>.

$$H_{RN}(z) = \frac{0.8 \cdot (z-0.5)}{(z-1)(z-0.2)} = \frac{0.8 \cdot z-0.4}{z^2 - 1.2z + 0.2}, \quad (31)$$

respectiv algoritmul de reglare

$$c[t] = 0.8 \cdot a[t-1] - 0.4 \cdot a[t-2] + 1.2 \cdot c[t-1] - 0.2 \cdot c[t-2], \quad (32)$$

despre care s-a discutat și în exemplul de la pag. 99 din § 3.3.

În mod obișnuit un algoritm de reglare numerică, cum este algoritmul (32), este proiectat (sintetizat) în ipoteza că se implementează în timp real ca un task periodic ale cărui instanțe se execută în cursul fiecărui pas h de discretizare a timpului τ , $\tau \in [th, th+h]$, pe un subinterval de timp $I=[th, th+vh] \subset [th, th+h]$, $v < 1$. Principalele operații care trebuie efectuate în subintervalul $[th, th+vh]$ sunt: i) achiziționarea valorii $y[t]$ de la procesul condus, prin intermediul CAN, ii) calcularea erorii de reglare $a[t]=w[t]-y[t]$, iar după aceea calcularea cu relația (32) a valorii curente $c[t]$ a mărimii de comandă, iii) transmiterea valorii $c[t]$ a mărimii de comandă, prin intermediul CNA spre procesul condus.

Nerespectarea în implementare a ipotezei menționate (neadecvarea implementării la ipotezele de proiectare ale regulatorului) poate compromite în diferite moduri performanțele sistemului de reglare. Aceasta înseamnă că pentru reușita implementării în proiectarea algoritmului de reglare trebuie să se țină seamă de modul de implementare și invers, în implementare să se respecte ipotezele pe care s-a bazat proiectarea.

Bunăoară, în situațiile în care resursele de procesare folosite pentru implementarea RN (31) pe baza algoritmului de reglare (32) sunt limitate, este probabil ca execuția algoritmului de reglare să nu se mai poată efectua exact în intervalul $I = [th, th+vh]$. Sunt posibile diferite situații:

- decalarea intervalului în timp I ,
- modificarea lungimii intervalului I ,
- amplasarea momentului $th + vh$ în cursul următorului pas de discretizare a timpului,
- neefectuarea în ordine a operațiilor i), ii) și iii) etc.

Toate aceste abateri sunt denumite, la fel ca și în electronica, prin termenul de *jitter*. Efectele jitterului constau în degradarea valorilor indicatorilor de performanță ai sistemului de reglare (crește suprareglajul, crește timpul de reglare etc.) și pot ajunge până la pierderea stabilității sistemului de reglare.

Din punct de vedere matematic degradarea performanțelor poate fi explicată observând că datorită jitterului utilizarea algoritmului de reglare (32) nu mai corespunde RN (31) proiectat. Astfel, dacă sistemul de reglare rămâne din punctul de vedere al procesului condus în regim liniar algoritmul de reglare efectiv implementat va corespunde unei alte funcții de transfer decât (31), iar dacă procesul ajunge în regim de funcționare neliniar performanțele se pot modifica în mod complet neașteptat.

Figurile de mai jos ilustrează o situație corespunzătoare reglării pozitiei pentru sistemul de poziționare din exemplul 1 de la pag. 102 folosind, corespunzător realizării sistemică (9), un algoritm de reglare după stare de forma

$$u[k] = f_1 \cdot x_1[k] + f_2 \cdot x_2[k], \quad (33)$$

cu f_1 și f_2 amplificări constante. În figurile de mai jos curbele reprezentate cu albastru ilustrează variația mărimii de ieșire y (Fig. 1) și variația mărimii de comandă u (Fig. 2) ale sistemului de poziționare (STC) în cazul aplicării unui semnal treaptă la momentul $t = 1$ s.

Curbele reprezentate cu verde și roșu redau ceea ce se petrece atunci când în implementare apare un jitter (diferite valori ale lui ν). Se constată atât producerea unui suprareglaj sau a unor oscilații (Fig. 1) cât și modificări ale limitelor de variație ale semnalului de comandă (Fig. 2).

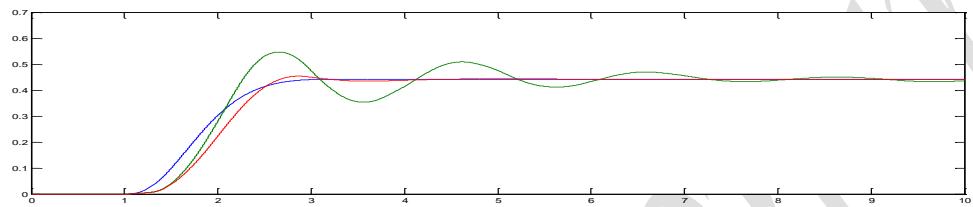


Fig.1. Răspunsul $y(t)$, la semnal treaptă, al ieșirii y a sistemului de poziționare de la pag. 102 în cazul conducerii sistemului prin reacție după stare când implementarea nu este afectată de jitter (albastru) și când implementarea este afectată de jitter (verde, roșu)

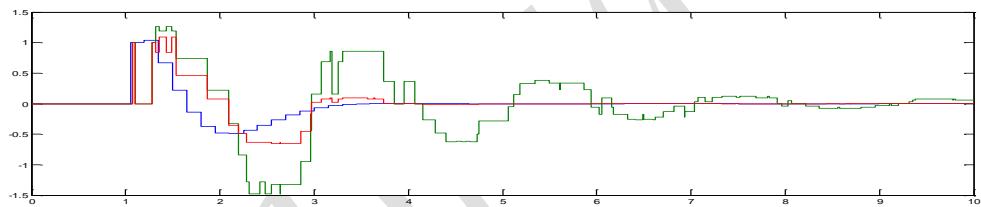


Fig.2. Răspunsul $u(t)$, la semnal treaptă, al comenzi u a sistemului de poziționare de la pag. 102 în cazul conducerii sistemului prin reacție după stare când implementarea nu este afectată de jitter (albastru) și când implementarea este afectată de jitter (verde, roșu)

Având în vedere aspectele prezentate înseamnă că la proiectarea unui RN trebuie să se țină seamă, prin intermediul programatorului de taskuri, și de resursele care se vor folosi la implementare și invers, să se folosească resurse adecvate complexității calculului (co-design).

§ 3.6 Realizări sistemicice

Termenul „realizare sistemică” este folosit în acceptiunea de MM-ISI. MM-ISI permit, spre deosebire de MM-II, o analiză completă a proprietăților sistemelor.

Din punct de vedere matematic obținerea unei realizări sistemicice este problema determinării unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul I sau a unui sistem de ecuații recursive de ordinul I „echivalent intrare-ieșire” unei ecuații diferențiale sau recurente de ordinul n.

În continuare ne referim la problema obținerii unei realizări sistemicice atunci când se cunoaște MM-II al sistemului. Problema inversă, de obținere a MM-II din MM-ISI, este deja cunoscută, rezolvarea ei constând în cazul sistemelor liniare în calculul matricei sau funcției de transfer din MM-ISI, scrierea dependențelor intrare-ieșire în domeniul operațional și transpunerea rezultatului în domeniul timp.

Unui MM-II îi corespund o infinitate de realizări sistemicice. Toate furnizează aceeași dependență intrare-ieșire. Doar câteva dintre realizările sistemicice asociate unui MM-II au la nivelul variabilelor de stare semnificație fizică.

1. Asocierea unei realizări sistemicice unui sistem dat printr-o funcție de transfer

① Pentru început considerăm **modelele strict cauzale în TC respectiv TD** redate de ecuațiile (1), respectiv (2):

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y(t) + a_0 y(t) = b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + b_0 u(t), \quad (1)$$

$$a_n y[t] + a_{n-1} y[t-1] + \dots + a_1 y[t-n+1] + a_0 y[t-n] = b_{n-1} u[t-1] + \dots + b_1 u[t-n+1] + b_0 u[t-n] \quad (2)$$

Lor le corespunde în variabile unificate funcția de transfer:

$$H(\lambda) = \frac{b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0}{a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0} = \frac{b_{n-1}\lambda^{-1} + \dots + b_1\lambda^{-n+1} + b_0 \cdot \lambda^{-n}}{a_n + a_{n-1}\lambda^{-1} + \dots + a_1\lambda^{-n+1} + a_0 \cdot \lambda^{-n}} \quad (3)$$

Realizarea sistemică asociată funcției de transfer (3) este:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \cdot u \quad (4)$$

$$y = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Exemplu: Realizarea sistemică a sistemului de ordinul $n = 2$, $\frac{5}{a_2} \ddot{y}(t) + \frac{2}{a_1} \dot{y}(t) + \frac{0.5}{a_0} y(t) = \frac{3}{b_0} u(t)$, este:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [3 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Matricea A care apare în (4) poartă numele de *matrice companion* (matrice de însoțire, sau de acompaniere) sau *matrice Frobenius*. Prima denumire provine din faptul că ea însoțește polinomul caracteristic

$$\mu(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (5)$$

al sistemul (1) sau (2).

② Un al doilea caz îl reprezintă **sistemele la limita de cauzalitate**, cu f.d.t:

$$H(\lambda) = \frac{b_n^* \lambda^n + b_{n-1}^* \lambda^{n-1} + \dots + b_1^* \lambda + b_0^*}{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0}. \quad (6)$$

Problema obținerii realizării sistemicice se reduce, printr-o simplă împărțire, la problema anterioară. Astfel, împărțind în (6) numărătorul la numitor obținem descompunerea:

$$H(\lambda) = \frac{b_n^*}{a_n} + \frac{b_{n-1}^* \lambda^{n-1} + \dots + b_1^* \lambda + b_0^*}{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0} \quad (7)$$

Întrucât $y(\lambda) = H(\lambda) \cdot u(\lambda)$, ieșirea acestui sistem are, comparativ cu situația din cazul ①, încă o componentă, pe $\frac{b_n^*}{a_n} u(\lambda)$. Deci față de (4), ecuația de ieșire a MM-ISI va avea forma:

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \left[\frac{b_n^*}{a_n} \right] \cdot u \quad (4')$$

Exemplu: Dacă $H(z) = \frac{2z^2 + 3z + 1}{z^2 + 5z + 2} = 2 + \frac{-7z - 3}{z^2 + 5z + 2}$, atunci realizarea sistemică asociată este:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u[t] \\ y[t] = [-3 \quad -7] \cdot \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} + [2] \cdot u[t] \end{cases}$$

2. Realizări sistemicice standard

În tehnica prelucrării semnalelor, în sinteza sistemelor de conducere și.a.m.d. există metode de proiectare care sunt elaborate plecând de la anumite forme canonice de realizări sistemicice. Ele mai sunt denumite *realizări standard*. Pentru a putea aplica metodele menționate este necesar ca MM al sistemului cu care lucrăm să fie adus la forma standard pentru care a fost elaborată metoda.

În cele ce urmează considerăm trei realizări standard. Toate se aplică sistemelor de tip SISO.

1^o Realizarea standard controlabilă. Ea corespunde f.d.t. a sistemului în forma (8), ireductibilă, cu $a_n=1$:

$$H(\lambda) = \frac{b_n \cdot \lambda^n + b_{n-1}^* \lambda^{n-1} + \dots + b_1^* \lambda + b_0^*}{\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0} = b_n + \frac{b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0}{\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0}. \quad (8)$$

Ca urmare, din (4) rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1}] \cdot x + [b_n] \cdot u \end{array} \right. \quad (9)$$

Realizarea standard controlabilă se obține astfel: i) se calculează f.d.t. a sistemului plecând de la forma dată inițial; ii) se aduce f.d.t. la o formă ireductibilă iar aceasta se descompune sub forma (8); iii) se scrie direct sistemul (9) pentru f.d.t. de la punctul ii). Realizarea sistemică astfel obținută este minimală¹ și descrie în mod corect numai dependența intrare-ieșire.

2^o Realizarea standard observabilă. Ea are forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot u \\ y = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \cdot x + [b_n] \cdot u \end{array} \right. \quad (10)$$

Observație:

Notând cu indicele „(9)” matricele sistemului (9) și cu indicele „(10)” matricele sistemului (10), se observă că sunt valabile următoarele relații de legătură:

$$A_{(10)} = A_{(9)}^T; \quad b_{(10)} = c_{(9)}; \quad c_{(10)} = b_{(9)}. \quad (11)$$

Sistemele ale căror matrice sunt legate prin relații de tipul (11) se numesc *sisteme duale*.

3^o Realizarea standard diagonală. Prezentarea se restrâng la cazul când polinomul caracteristic $\mu(\lambda)$, al sistemului, are numai rădăcini simple: $\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$. Se numește realizarea standard diagonală o realizare sistemică de forma:

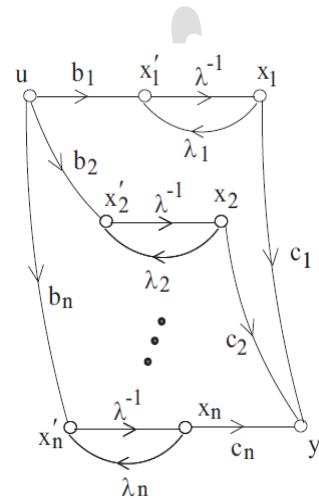
¹⁾ Realizare minimală = realizare sistemică cu numărul minim de variabile de stare care corespunde unei dependențe intrare – ieșire date.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot x + b \cdot u \\ y = c^T \cdot x \end{cases} \quad (12)$$

În acest caz matricea A este o matrice diagonală care are pe diagonala principală tocmai valorile proprii ale matricei A. Fiecare ecuație de stare din (12) este de forma:

$$\dot{x}_i = \lambda_i \cdot x_i + b_i \cdot u. \quad (13)$$

Cu alte cuvinte, pentru realizarea standard diagonală dacă $b_i \neq 0$ variabila de stare depinde de ea însăși și de mărimea de intrare. Dacă $b_i = 0$ mărimea de intrare nu afectează acea variabilă de stare. Funcția exponențială $x_i(0) \cdot e^{\lambda_i t}$ sau funcția putere $x_i[0] \cdot \lambda_i^t$ care, după cum avem un STC sau un STD, reprezintă soluția unei ecuații de stare de forma (13) în regim liber, adică atunci când $u = 0$, poartă denumirea de „mod asociat valorii proprii λ_i ”. Amplitudinea modului depinde numai de condițiile inițiale. Modurile se regăsesc și în regimurile forțate. Sistemului (13) îi corespunde graful din figură.



Observație: Cazul prezentat e varianta simplă a cazului general corespunzător sistemelor pentru care polinomul caracteristic are rădăcini multiple. Cazul general este cunoscut sub denumirea de *realizare standard Jordan*.

La o realizare diagonală de forma (12) se ajunge de la o formă inițială oarecare:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = A^* \cdot x^* + B^* \cdot u \\ y = C^* \cdot x^* \end{cases} \quad (14)$$

printr-o transformare de stare de formă

$$x = \mathcal{T} \cdot x^* \quad (15)$$

în care, matricea transformării \mathcal{T} are forma

$$\mathcal{T} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \dots \ \theta_n]^{-1}. \quad (16)$$

θ_i este vectorul propriu asociat valorii proprii λ_i . Aceasta înseamnă că θ_i este soluția ecuației vectoriale

$$A^* \cdot \theta_i = \lambda_i \cdot \theta_i. \quad (17)$$

(12) se obține din (14) folosind relațiile :

$$A = \mathcal{T} \cdot A^* \cdot \mathcal{T}^{-1}, \quad B = \mathcal{T} \cdot B^*, \quad C = C^* \cdot \mathcal{T}^{-1}. \quad (18)$$

Practic, matricea A nu mai trebuie calculată întrucât se știe că rezultatul are forma diagonală din (12).

Observație:

Ecuația (17) reprezintă un sistem liniar nedeterminat de n ecuații cu n necunoscute care are, înțotdeauna, un grad de libertate întrucât valorile proprii s-au presupus simple. Forma matricei A obținută cu formula (18) nu depinde,

evidență, de utilizarea acestor grade de libertate. Alegerea lor influențează doar coeficienții care apar în matricele B și C calculate conform relațiilor (18).

Exemplu: Să se aducă în forma standard diagonală sistemul

$$\begin{cases} x^*[t+1] = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot x^*[t] + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot u[t] \\ y[t] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot x^*[t] \end{cases}$$

Soluție: $\mu(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 0 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5) \cdot (\lambda + 1) \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5.$

Pentru $\underline{\lambda_1 = -1}$: $A^* \cdot \theta_1 = \lambda_1 \theta_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5\theta_{11} = -\theta_{11} \\ 2\theta_{11} - \theta_{12} = -\theta_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{11} = 0 \\ \theta_{11} = 0 \end{cases}$. Deci

θ_{12} = arbitrar = α parametru $\Rightarrow \theta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \Re^*$.

Pentru $\underline{\lambda_2 = 5}$: $A^* \theta_2 = \lambda_2 \theta_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{21} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} \theta_{21} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5\theta_{21} = 5\theta_{21} \\ 2\theta_{21} - \theta_{22} = 5\theta_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \theta_{21} = 3\theta_{22} \end{cases}$. Deci

θ_{22} = arbitrar = β parametru $\Rightarrow \theta_2 = \begin{bmatrix} 3\beta \\ \beta \end{bmatrix}, \beta \in \Re^*$.

În consecință matricea de transformare este

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & 3\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3\alpha\beta} \begin{bmatrix} \beta & -3\beta \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{3\beta} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \text{ și } C = [a \quad 4\beta]$$

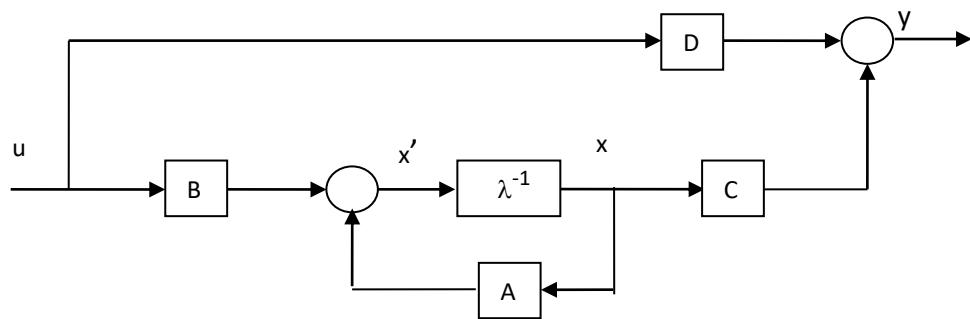
Valorile parametrilor α, β se adoptă astfel încât $\alpha\beta \neq 0$, iar B și C să aibă forme favorabile pentru aplicația care necesită forma diagonală.

3. Asocierea de realizări sistemică pe baza schemelor bloc

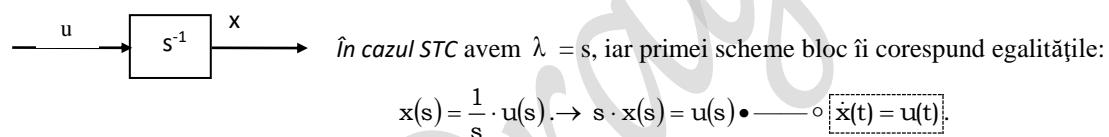
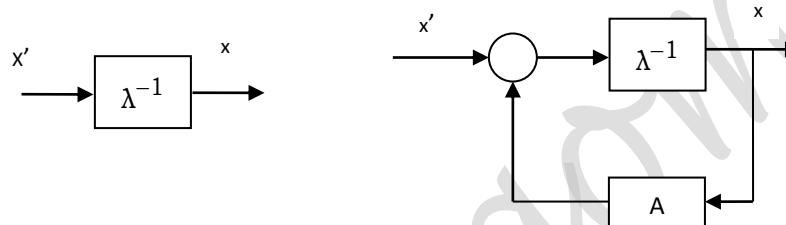
În problemele practice sistemele sunt date prin scheme bloc în care apar f.d.t. ale obiectelor componente. Subiectul acestei secțiuni este prezentarea unui procedeu de obținere a unei realizări sistemică a unui sistem plecând de scheme bloc. În esență este vorba de o metodă de obținere a către unei ecuații de stare pentru fiecare variabilă de stare asociată pe baza schemei bloc.

Din punct de vedere teoretic metoda are la bază inspectarea schemei bloc din figura următoare, corespunzătoare sistemului

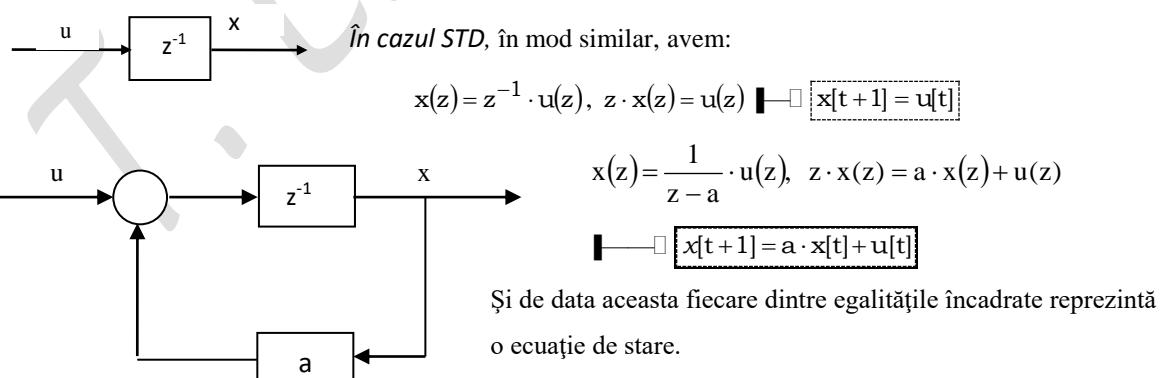
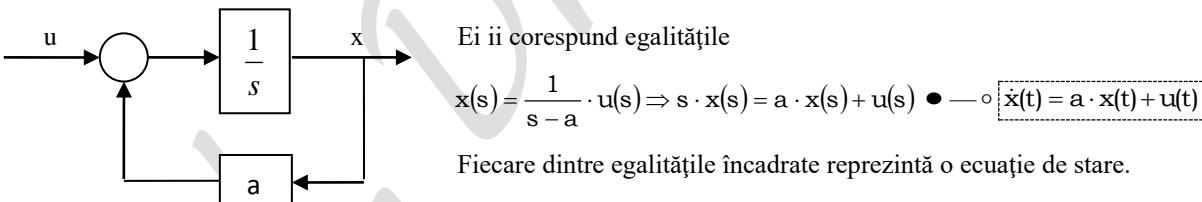
$$\begin{cases} x' = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases}$$



În schemă poziția variabilelor de stare poate fi interpretată în două moduri: i) ca mărimi de ieșire ale blocurilor cu f.d.t. λ^{-1} , ii) ca mărimi de ieșire ale conexiunii cu reacție proporțională realizată prin matricea A în jurul blocurilor cu f.d.t. λ^{-1} .



Cea de a doua schemă bloc ia forma:

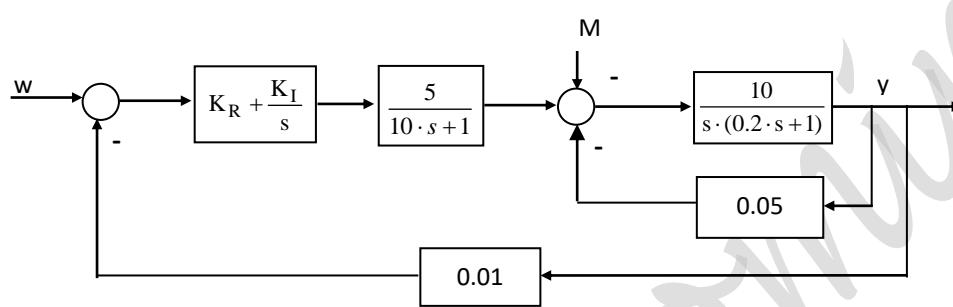


Calculele de mai sus au în primul rând valoare metodologică cu privire la obținerea ecuațiilor de stare.

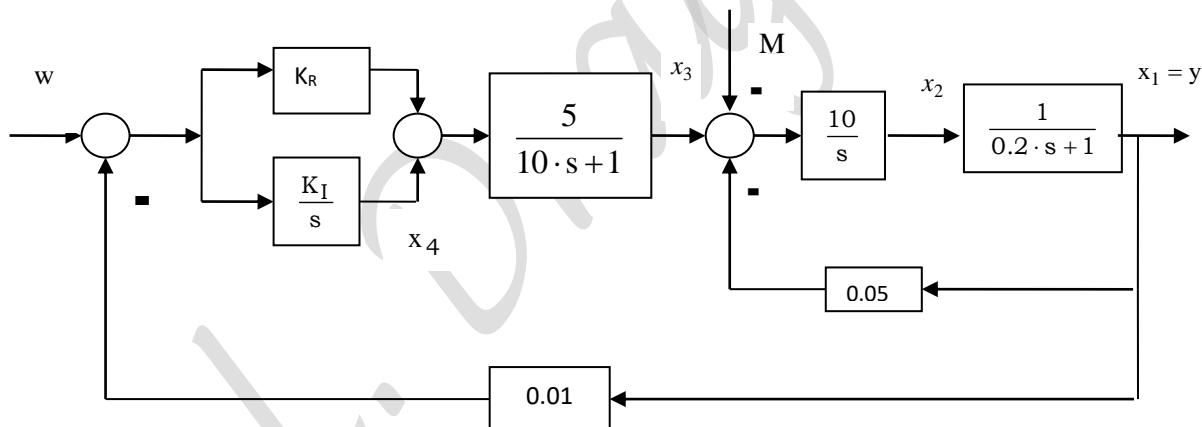
Metoda de asociere a unei realizări sistemică pe baza schemelor bloc constă în parcurgerea următoarelor etape:

- i) Schema bloc dată se aduce la o formă în care să apar doar operații de înmulțire cu constante, operații de însumare și blocuri cu funcții de transfer de tipul λ^{-1} , fără sau cu reacție de tip proporțional. În acest scop poate fi folosită algebra schemelor bloc.
- ii) Se adoptă ca variabile de stare ieșirilor tuturor blocurilor cu denumirile subliniate.
- iii) Tuturor blocurilor de la ii) li se asociază ecuațiile de stare potrivit exemplelor de mai sus.
- iv) Se ordonează ecuațiile de stare și se alcătuiește MM-ISI al sistemului.

Exemplu: Să se determine o realizare sistemică pentru sistemul din figură:



Observăm că în schema apar 2 blocuri care nu corespund tipurilor menționate. Ca urmare, schema se reconfigurează astfel:



S-au definit variabilele de stare de la $x_1 \rightarrow x_4$ ca ieșiri ale blocului cu f.d.t. de tip PT_1 , $\left(\frac{K}{Ts+1}\right)$, și de tip integrator, $\left(\frac{K}{s}\right)$. Succesiv, avem:

$$x_1(s) = \frac{1}{0.2+1} x_2(s) \Rightarrow s x_1(s) = -5x_1(s) + 5x_2(s) \bullet - \circ \quad \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + 5x_2(t),$$

$$x_2(s) = \frac{10}{s} \cdot [-M(s) + x_3(s) - 0.05x_1(s)] \bullet - \circ \quad \dot{x}_2(t) = -0.5x_1(t) + 10x_3(t) - 10M(t),$$

$$x_3(s) = \frac{5}{10s+1} \cdot [x_4(s) + K_R(w(s) - 0.01x_1(s))] \bullet - \circ \quad \dot{x}_3(t) = -0.1x_3(t) + 0.5x_4(t) + 0.5K_R w(t) - 0.005 \cdot K_R x_1(t),$$

$$x_4(s) = \frac{K_I}{s} (w(s) - 0.01x_1(s)) \bullet - \circ \quad \dot{x}_4(t) = K_I \cdot w(t) - 0.01 \cdot K_I \cdot x_1(t),$$

$$y(s) = x_1(s) \bullet - \circ \quad y(t) = x_1(t)$$

În consecință rezultă:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 10 & 0 \\ -0.005 \cdot K_R & 0 & -0.1 & 0.5 \\ -0.01 \cdot K_I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -10 \\ 0.5 \cdot K_R & 0 \\ K_I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ M(t) \end{bmatrix}; \quad y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$

4. Transformări de stare

Se consideră sistemul liniar (Atenție! Se lucrează cu variabile unificate.)

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases}, \quad (19)$$

cu $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Fie \mathcal{T} , (n,n) o matrice pătratică nesingulară $\Rightarrow \exists \mathcal{T}^{-1}$.

Se consideră egalitatea

$$x^* = \mathcal{T} x. \quad (20)$$

Spunem că relația (20) realizează o transformare de stare în sensul că x reprezintă vechea variabilă de stare iar x^* - noua variabilă de stare. Pentru noua variabilă de stare rezultă că $x^* \in \mathbb{R}^n$. Fiecare componentă a lui x^* e o combinație liniară în raport cu componentele lui x . În consecință, *de cele mai multe ori componentele lui x^* nu au sens fizic*.

Prin transformare de stare înțelegem transpunerea MM-ISI (19) de variabila de stare x într-un MM-ISI de variabilă de stare x^* . Transformarea decurge astfel:

$$x' = A \cdot x + B \cdot u \mid \mathcal{T} \blacksquare \quad (\text{Se înmulțește egalitatea, la stânga, cu matricea } \mathcal{T}) \rightarrow$$

$$\mathcal{T} \cdot x' = \mathcal{T} \cdot A \cdot x + \mathcal{T} \cdot B \cdot u \quad (21)$$

$$(20) \Rightarrow x = \mathcal{T}^{-1} \cdot x^*. \text{ Deci}$$

$$(21) \Rightarrow x'^* = \mathcal{T} \cdot A \cdot \mathcal{T}^{-1} \cdot x^* + \mathcal{T} \cdot B \cdot u \quad (22)$$

Analog, din a doua egalitate din (19) rezultă

$$y = C \cdot x + D \cdot u = C \cdot \mathcal{T}^{-1} \cdot \mathcal{T} \cdot x + D \cdot u \Rightarrow y = C \cdot \mathcal{T}^{-1} \cdot x^* + D \cdot u$$

În consecință, noul MM-ISI (noua realizare sistemică) este:

$$\begin{cases} x'^* = A^* \cdot x^* + B^* \cdot u \\ y = C^* \cdot x^* + D \cdot u \end{cases} \quad (23)$$

în care $A^* = \mathcal{T} \cdot A \cdot \mathcal{T}^{-1}$; $B^* = \mathcal{T} \cdot B$; $C^* = C \cdot \mathcal{T}^{-1}$.

Precizări:

- 1) Calculele făcute sunt valabile atât pentru STC cât și pentru STD.

2) De cele mai multe ori folosim o transformare de stare pentru a ajunge la anumite forme canonice, adică la realizări sistemică, pentru care A^* , B^* , C^* trebuie să aibă anumite forme bine precizate cerute de diferite metode de rezolvare a unor probleme concrete.

3) Transformarea de stare de tipul (20) conservă proprietățile sistemului (19), adică (23) are aceleași proprietăți ca și (19). Afirmația se bazează pe faptul că (23) și (19) au aceleași matrice de transfer (altfel spus aceeași dependență intrare-ieșire). În adevăr, din (23) succesiv rezultă:

$$H^*(\lambda) = C^*(\lambda \cdot I - A^*)^{-1} \cdot B^* + D = C T^{-1} \left(\underbrace{\lambda I - T \cdot A \cdot T^{-1}}_{\underbrace{(T(\lambda \cdot I - A) T^{-1})}_{(T^{-1})^{-1} (\lambda \cdot I - A) (T)^{-1}}} \right)^{-1} T \cdot B + D$$

$$\rightarrow H^*(\lambda) = C \cdot T^{-1} \cdot T(\lambda \cdot I - A)^{-1} T^{-1} \cdot B + D$$

$$\rightarrow H^*(\lambda) = C \cdot (\lambda \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D = H(\lambda).$$

CAPITOLUL IV: ELEMENTE DE ANALIZĂ A SISTEMELOR LINIARE

§ 4.1 Regimul permanent constant

În *regim permanent constant* (r.p.c.) mărimile caracteristice ale unui sistem sunt funcții constante în raport cu timpul. Regimul permanent constant este unul dintre cele mai frecvente regimuri de funcționare cerut în practică.

Obiectivul paragrafului îl constituie prezentarea modalităților de obținere a *modelelor matematice de regim permanent constant ale sistemelor liniare*, adică a modelelor care caracterizează comportarea sistemelor liniare în regim permanent constant. Prințipiu de obținere este următorul: *modelul de regim permanent constant se determină ca și un caz particular de regim dinamic* și anume, cazul când variabilele modelului sunt funcții constante de timp. Particularizările diferă, după cum sistemul este un STC sau un STD. Atunci când lucrăm cu modele operaționale particularizările se fac utilizând teoremele valorii finale.

1. Regimul permanent constant pentru STC

Considerăm pentru început sistemele date prin modelul intrare-iesire în domeniul timp:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y(t) + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + \dots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u^{(0)}(t). \quad (1)$$

Sistemul (1) fiind un STC, particularizarea care conduce la modelul de r.p.c. constă în omiterea derivatelor (derivatele funcțiilor constante sunt nule). În consecință, notând valorile în r.p.c. cu indicele ∞ , din (1) rezultă:

$$a_0 \cdot y_\infty = b_0 \cdot u_\infty. \quad (2)$$

Analog, în cazul când operăm cu MM-ISI obținem (x_∞ – valoarea variabilei de stare în r.p.c.):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty = 0 \\ y_\infty = C \cdot x_\infty + D \cdot u_\infty \end{cases} \quad (3)$$

Observație: Fie $f(t)$ o funcție de timp continuu original pentru care există limita $f_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ și fie $f(s) = L[f(t)]$ imaginea Laplace a acestei funcții. Atunci, valoarea f_∞ poate fi calculată din imaginea operațională $f(s)$ cu formula $f_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot f(s)$. Rezultatul este cunoscut sub numele de *teorema valorii finale pentru semnale în timp continuu*.

Presupunem un sistem de tip SISO, cu orientarea $u \rightarrow y$ și f.d.t. $H(s)$. Atunci, este valabilă dependența intrare-iesire $y(s) = H(s) \cdot u(s)$. Din punctul de vedere al r.p.c. corespunzător unui semnal de intrare care se stabilizează la o valoare u_∞ avem în vedere că același regim permanent constant rezultă și în urma aplicării unui semnal treaptă $u(t) = u_\infty \cdot \sigma(t)$. Folosind în această ipoteză teorema valorii finale în raport cu $y(s)$ rezultă:

$$u(s) = \frac{u_\infty}{s} \Rightarrow y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot H(s) \cdot \frac{u_\infty}{s}.$$

Ca urmare, este valabilă formula:

$$y_\infty = \left[\lim_{s \rightarrow 0} H(s) \right] \cdot u_\infty^1 \quad (4)$$

Aprofundăm formula (4) considerând sistemul (1), deci f.d.t. $H(s) = \frac{b_n \cdot s^n + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$:

- Dacă $a_0 = 0$, atunci f.d.t. admite ca factor pe $\frac{1}{s}$. Întrucât acest factor reprezintă tocmai f.d.t. a unui integrator spunem că sistemul (1) este de **tip I (integrator)**. Pentru sistemele de tip I, $\lim_{s \rightarrow 0} H(s)$ nu există. Există însă $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{H(s)} = 0$. În acest caz din (4) deducem că $u_\infty = \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{H(s)} \right) y_\infty = 0$.
- Dacă $b_0 = 0$, $H(s)$ avem ca factor la numărător pe s , adică f.d.t. a unui element **derivator**. În acest caz spunem că sistemul (1) este de **tip D (derivator)**. Pentru sistemele de tip D, $H(0) = 0$.
- Dacă $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ spunem că sistemul e de **tip P (proportional)**. Pentru sistemele de tip P, $H(0) = \frac{b_0}{a_0}$.

În consecință din (2) și (4) rezultă că în r.p.c. avem:

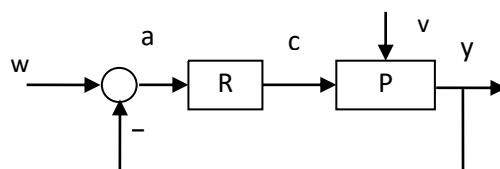
$$\Rightarrow \text{pentru sistemele de tip P: } y_\infty = \frac{b_0}{a_0} \cdot u_\infty \quad (5.1)$$

$$\Rightarrow \text{pentru sistemele de tip D: } y_\infty = 0 \quad (5.2)$$

$$\Rightarrow \text{pentru sistemele de tip I: } u_\infty = 0. \quad (5.3)$$

Ultimul rezultat este deosebit de important din punct de vedere aplicativ. El se folosește pentru a obține sisteme de reglare cu eroare staționare nulă potrivit schemei bloc de mai jos. Ipotezele de lucru sunt:

- i) regulatorul R este un subsistem de tip I;
- ii) sistemul este stabil și ca urmare poate ajunge în regim permanent constant.



Importanța rezultă din faptul că regulatorul R fiind un subsistem de tip I atunci, potrivit relației (5.3), în r.p.c. mărimea lui de intrare este nulă. Deci $a_\infty = 0$. Dar $a_\infty = w_\infty - y_\infty \Rightarrow y_\infty = w_\infty$. Ca urmare mărimea reglată y are exact valoarea prescrisă prin w.

¹ Toate relațiile încadrate, de mai sus sau care urmează, reprezintă modele de r.p.c. a căror obținere constituie obiectul paragrafului.

2. Regimul permanent constant pentru STD

În acest caz semnalele sunt reprezentate prin şiruri de valori constante. Presupunem că sistemul e dat prin MM-II:

$$a_n \cdot y[t] + a_{n-1} \cdot y[t-1] + \dots + a_0 \cdot y[t-n] = b_n \cdot u[t] + b_{n-1} \cdot u[t-1] + \dots + b_0 \cdot u[t-n]. \quad (6)$$

În r.p.c. MM-II (6) devine:

$$a_n \cdot y_\infty + a_{n-1} \cdot y_\infty + \dots + a_0 \cdot y_\infty = b_n \cdot u_\infty + b_{n-1} \cdot u_\infty + \dots + b_0 \cdot u_\infty.$$

Dacă notăm $\alpha = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ și $\beta = b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n$, relația anterioară obține forma:

$$\boxed{\alpha \cdot y_\infty = \beta \cdot u_\infty} \quad (7)$$

În cazul când sistemul este dat prin MM-ISI avem:

$$\begin{cases} x[t+1] = A \cdot x[t] + B \cdot u[t] \\ y[t] = C \cdot x[t] + D \cdot u[t] \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} (A - I) \cdot x_\infty + B \cdot u_\infty = 0 \\ y_\infty = C \cdot x_\infty + D \cdot u_\infty \end{cases}}. \quad (8)$$

Observație: Fie semnalul în timp discret $\{f[t]\}_{t \in \mathbb{N}}$ cu proprietatea că există $f_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} f[t]$ și fie $f(z)$

transformata z a semnalului. Atunci, este valabilă relația $\boxed{f_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})f(z)}$, cunoscută sub

denumirea de *teorema valorii finale pentru semnale în timp discret*.

Considerăm un STD, de tip SISO, cu f.d.t. $H(z)$. Deci este valabilă relația intrare-iesire $y(z) = H(z) \cdot u(z)$.

Presupunem că sistemul ajunge în regim permanent constant în urma aplicării secvenței de intrare constante

$$\{u[t]\}_{t \in \mathbb{N}}, u[t] = u_\infty. \text{ Ei îi corespunde transformata } z: u(z) = \frac{u_\infty}{1 - z^{-1}}. \text{ Ca urmare:}$$

$$y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{u_\infty}{1 - z^{-1}} \cdot H(z) \Rightarrow \boxed{y_\infty = \left[\lim_{z \rightarrow 1} H(z) \right] \cdot u_\infty} \quad (9)$$

Aprofundăm formula (9) în cazul sistemului (6), deci al f.d.t. $H(z) = \frac{b_n \cdot z^n + \dots + b_1 \cdot z + b_0}{a_n \cdot z^n + \dots + a_1 \cdot z + a_0}$.

- Presupunem că numitorul lui $H(z)$ admite rădăcina $z = 1$. Deci $a = 0$, iar f.d.t. admite ca factor pe $\frac{1}{z - 1}$, expresie care este și f.d.t. a unui element integrator în timp discret cu amplificare unitară.

$$(\text{În adevară: } y[t+1] = y[t] + u[t] \quad \square \quad z \cdot y(z) = y(z) + u(z) \Rightarrow y(z) = \frac{1}{z - 1} \cdot u(z).)$$

Spunem că în acest caz, când $a = 0$, sistemul (6) sau sistemul cu f.d.t. $H(z)$ sunt de **tip I**.

- Dacă numărătorul lui $H(z)$ admite rădăcina $z = 1$, adică $\beta = 0$, spunem că sistemul este de **tip D**.
- Dacă $a \cdot \beta \neq 0$ spunem că sistemul este de **tip P**.

În consecință, din (6) și (9) rezultă, la fel ca și în cazul timp continuu, că în r.p.c. avem:

$$\Rightarrow \boxed{y_\infty = \frac{\beta}{a} \cdot u_\infty} \text{ pentru sistemele de tip P,}$$

$\Rightarrow \boxed{y_\infty = 0}$ pentru sistemele de tip D,

$\Rightarrow \boxed{u_\infty = 0}$ pentru sistemele de tip I.

Ultima relație stă la baza realizării sistemelor de reglare cu eroare de reglare staționară nulă. Principiul este același ca și în cazul STC.

3. Regimul permanent constant pentru sisteme hibride

În contextul acestei secțiuni prin sistem hibrid înțelegem un sistem în care apar interconectate atât subsisteme în TC cât și subsisteme în TD. Interconectarea se realizează prin elemente de interfațare: CNA și CAN conform Fig. 1 de la pag. 117². Modelele matematice pentru regimul permanent constant se obțin folosind pentru subsistemele în TC rezultatele din secțiunea 1, pentru subsistemele în TD rezultatele din secțiunea 2, iar pentru elementele de interfațare, reprezentate în figurile de mai jos, următoarele formule:

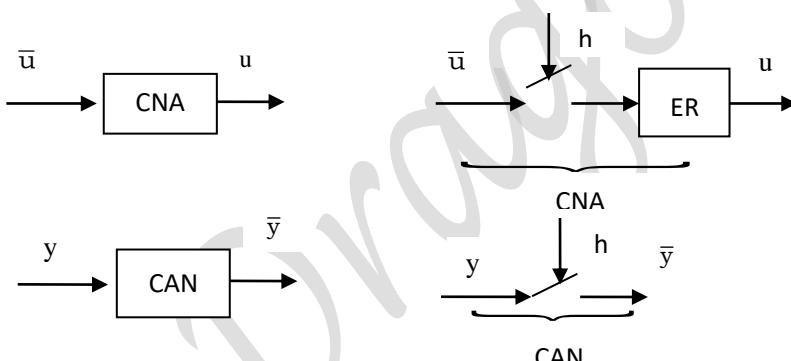
$$u_\infty = k_{\text{CNA}} \cdot \bar{u}_\infty \quad (10);$$

$$\bar{y}_\infty = k_{\text{CAN}} \cdot y_\infty \quad (11);$$

de ex. $k_{\text{CNA}} = \frac{10}{2^{n_{\text{CNA}}}} [\text{V/biti}]$ dacă u se masoara în Volt.

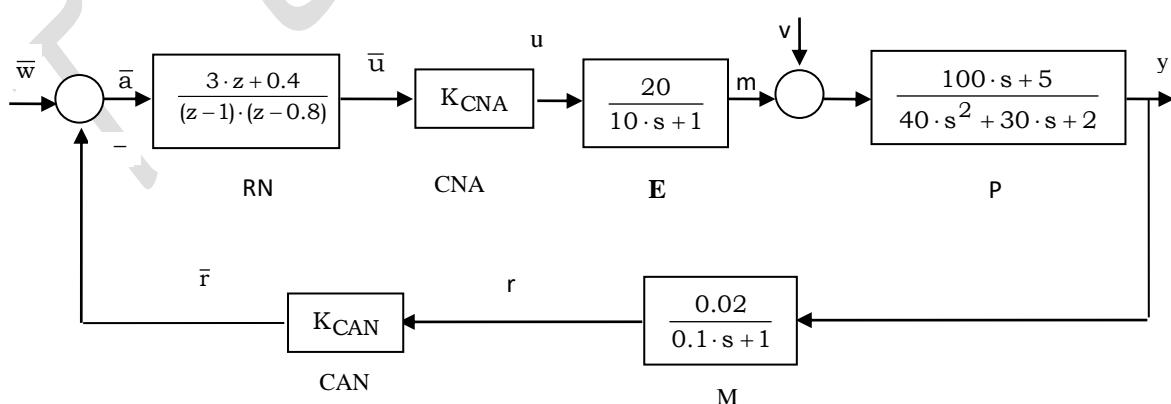
de ex. $k_{\text{CAN}} = \frac{2^{n_{\text{CAN}}}}{20} [\text{biti/mA}]$ dacă y se masoara în mA.

Coeficienții k_{CNA} și k_{CAN} sunt constantele de transfer ale convertoarelor.



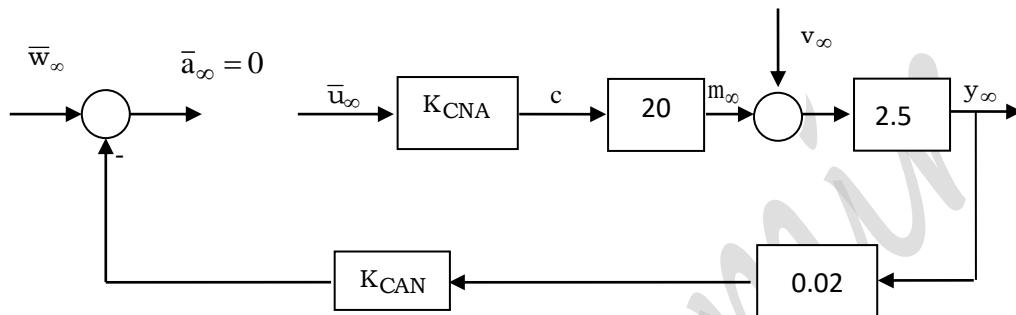
Ilustrăm în continuare, printr-un exemplu, o modalitate de folosire a modelor de r.p.c.

Exemplu: Să se determine pentru sistemul de reglare din figură dependențele de regim permanent constant $y_\infty = f_1(\bar{w}_\infty, v_\infty)$; $u_\infty = f_2(\bar{w}_\infty, v_\infty)$.



² În prezentarea de la pag. 117 s-a considerat pentru simplitate că atât CNA cât și CAN au coeficienți de conversie unitari.

Soluție: Pentru a rezolva problema deducem din schema bloc data o schemă bloc (de fapt un model) valabilă pentru r.p.c. Observăm că regulatorul este de tip I $\Rightarrow \bar{a}_\infty = 0$. Întrucât în r.p.c. ieșirea regulatorului, \bar{u}_∞ , are o valoare constantă, nenulă și finită, în modelul de r.p.c. calea directă se întreștepe în dreptul regulatorului. Se obține schema din figura următoare în care \bar{u}_∞ apare ca o nouă intrare în sistem. Valoarea \bar{u}_∞ (datorată preistoriei sistemului de reglare, adică funcționării anterioare instalării r.p.c.) rezultă din context (adică din alte calcule specifice structurii particulare considerate). Fiecare bloc din modelul de r.p.c. s-a obținut din schema bloc dată prin enunț efectuând particularizările prezentate în secțiunile 1 și 2.



Observăm că $\bar{a}_\infty = \bar{w}_\infty - k_{CAN} \cdot 0.02y_\infty$. Totodată, $\bar{a}_\infty = 0$ fiindcă ne găsim în r.p.c.. Egalând cele două expresii ale

$$\text{lui } \bar{a}_\infty \Rightarrow y_\infty = \frac{50}{k_{CAN}} \cdot \bar{w}_\infty. \text{ Deci } \boxed{f_1(\bar{w}_\infty, v_\infty) = \frac{50}{k_{CAN}} \cdot \bar{w}_\infty}. (\text{Rezultatul nu depinde de } v_\infty!).$$

$$\text{Urmărind calea directă rezultă: } y_\infty = 2.5(v_\infty + 20 \cdot K_{CNA} \cdot \bar{u}_\infty) \Rightarrow \bar{u}_\infty = \frac{0.02}{K_{CNA}} y_\infty - \frac{0.05}{K_{CNA}} v_\infty.$$

$$\text{Folosind expresia lui } y_\infty \Rightarrow \bar{u}_\infty = \frac{1}{K_{CNA} \cdot K_{CAN}} \bar{w}_\infty - \frac{0.05}{K_{CNA}} v_\infty. \text{ Deci,}$$

$$\boxed{f_2(\bar{w}_\infty, v_\infty) = \frac{1}{K_{CNA} \cdot K_{CAN}} \bar{w}_\infty - \frac{0.05}{K_{CNA}} v_\infty}.$$

§ 4.2 Regimul permanent armonic

Un sistem S se găsește în regim permanent armonic (denumit și regim permanent sinusoidal) atunci când toate mărimile caracteristice sunt funcții sinusoidale de timp, având aceeași pulsație ω . Amplitudinile și fazele mărimilor caracteristice diferă de la mărime la mărime. Regimul permanent armonic este un regim periodic specific sistemelor liniare în timp continuu. Practic, el se întâlnește în sisteme stable.

1. Caracteristici de pulsație și caracteristici Bode

Fie sistemul liniar S din figură. Dacă la intrare i se aplică semnalul sinusoidal

$$u(t) = u_m \cdot \sin \omega t, \quad (1)$$

atunci, în regim permanent armonic la ieșire se obține semnalul tot un semnal sinusoidal:

$$y(t) = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Cantitatea φ reprezintă diferența de fază dintre faza semnalului de ieșire și cea a semnalului de intrare. De regulă $\varphi < 0$.



Repetând experimentul pentru diferite valori ale pulsării ω și diferențe de fază φ sunt funcții doar de pulsărie ω , adică:

$$\frac{y_m}{u_m} = f_1(\omega), \quad \varphi = f_2(\omega) . \quad (3)$$

Ansamblul celor două funcții este denumit *caracteristici de pulsărie* ale sistemului S.

Întrucât graficele caracteristicilor (3) sunt relativ greu de interpretat, se utilizează reprezentări modificate ale acestora (introduse de Bode) și anume:

$$F_1(\omega_{lg}) = 20 \cdot \lg f_1(\omega) \quad (4.1)$$

$$F_2(\omega_{lg}) = f_2(\omega) \quad (4.2)$$

În funcțiile F_1 și F_2 variabila independentă este logaritmul zecimal al lui ω , adică cantitatea $\lg \omega$. Ea este notată cu ω_{lg} . Pentru orice valoare a lui ω funcția F_1 ia valoarea $20 \cdot \lg f_1$, denumită *valoare a lui f_1 în decibeli (dB)*³, și o asociază valorii $\lg \omega$, iar funcția F_2 ia valoarea $f_2(\omega)$ și o asociază tot valorii $\lg \omega$. Valorile lui F_2 se exprimă în radiani sau grade hexagesimale.

Caracteristica (4.1) este o *caracteristică logaritmică*, având logaritmate atât axa absciselor cât și axa ordonatelor. Caracteristica (4.2) este o *caracteristică semilogaritmică* având logaritmată doar axa absciselor.

Ansamblul caracteristicilor (4) este denumit *caracteristici Bode* sau *caracteristici (logaritmice) de pulsărie* ale sistemului S. Caracteristica (4.1) se numește *caracteristică amplitudine-pulsărie* (c.a.-p.), iar caracteristica (4.2) *caracteristică fază-pulsărie* (c.f.-p.).

În prezentarea de mai sus caracteristicile de pulsărie, respectiv caracteristicile Bode, au fost definite *pe baze experimentale*. Teoretic ele se obțin din particularizarea funcției de transfer a sistemului de-a lungul axei imaginare, denumită *funcție răspuns la pulsărie*, așa cum se prezintă în continuare.

Fie $H(s)$ f.d.t. a sistemului S. Restricția acesteia la axa imaginară ω , adică particularizarea lui $H(s)$ pentru cazul când $s = j\omega$,

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}, \quad \omega \in (-\infty, +\infty) , \quad (5)$$

³ Bel-ul (B) este unitatea de măsură folosită pentru a exprima pentru o mărime fizică pe o scară logaritmică raportul dintre valoarea măsurării și o valoare de referință. Dacă x este valoarea raportului atunci x exprimat în beli este $x_B = \log_{10} x$, iar x exprimat în decibeli (dB) reprezintă multiplul $x_{dB} = 10 \cdot \log_{10} x$. Aceste forme sunt utilizate atunci când x reprezintă raportul a două puteri. În majoritatea situațiilor puterea se calculează ca produs a două mărimi fizice sau cu ajutorul păratului uneia dintre cele două mărimi; de exemplu, în circuitele electrice liniare avem $p = u \cdot i = u^2 / R = r \cdot i^2$, astfel că raportul de puteri x ia forma $x = y^2$. Ca urmare, $x_B = \log_{10} y^2 = 20 \cdot \log_{10} y$. Plecând de la ultima expresie, în situațiile în care o cantitate x nu este raport de puteri ci raport de alte mărimi fizice folosim o exprimare în decibeli de forma $x_B = 20 \cdot \log_{10} x = 20 \lg(x)$. Acest mod este utilizat și în cazul caracteristicilor Bode.

se numește *funcție răspuns la pulsărie* a sistemului S . Cantitatea complexă $H(j\omega)$ se descrie sub formă polară, prin relația:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\arg H(j\omega)} . \quad (6)$$

Se demonstrează că dacă aplicăm la intrarea unui STC cu f.d.t. $H(s)$ semnalul $u(t) = u_m \cdot \sin \omega t$ atunci în regim permanent armonic se obține semnalul de ieșire

$$y(t) = \underbrace{u_m \cdot 10^{\frac{|H(j\omega)|}{20}}}_{y_m} \cdot \underbrace{\sin(\omega t + \underbrace{\arg H(j\omega)}_{\varphi})}_{\sin(\omega t + \varphi)} = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) . \quad (7)$$

În consecință, cele două caracteristici de pulsărie definite prin relațiile (3) pot fi obținute și din funcția răspuns la pulsărie cu relațiile:

$$f_1(\omega) = |H(j\omega)|, \quad f_2(\omega) = \arg H(j\omega) . \quad (8)$$

Relațiile (8) sunt de importanță fundamentală întrucât ele pun în legătură caracteristici definite experimental (f_1 și f_2) cu caracteristici determinabile teoretic ($|H(j\omega)|$ și $\arg H(j\omega)$).

Pentru simplificarea exprimării, în locul notațiilor $F_1(\omega_{lg})$ și $F_2(\omega_{lg})$ se folosesc notațiile $|H|_{dB}(\omega_{lg})$ și $\varphi_H(\omega_{lg})$ sau doar $|H|_{dB}$ și φ_H .

Notă: Relația (7) reprezintă un caz particular. În general, aplicând la intrarea sistemului S semnalul $u(t) = u_m \cdot \sin(\omega t + \alpha)$, la ieșire se obține semnalul $y(t) = y_m \cdot \sin(\omega t + \alpha + \varphi)$, iar aplicând semnalul $u(t) = u_m \cdot \cos(\omega t + \alpha)$, la ieșire se obține semnalul $y(t) = y_m \cdot \cos(\omega t + \alpha + \varphi)$. În ambele cazuri y_m și φ au expresiile din (7).

Algebric, $H(j\omega)$ se poate scrie sub forma $H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$, $P(\omega) = \operatorname{Re}\{H(j\omega)\}$; $Q(\omega) = \operatorname{Im}\{H(j\omega)\}$.

Reprezentarea grafică în planul „H” a perechii $(P(\omega), Q(\omega))$ cu ω parametru cu valori în domeniul $(-\infty, +\infty)$ sau a perechi $(|H(j\omega)|_{dB}, \arg H(j\omega))$, este cunoscută sub denumirea de *hodograf Nyquist* sau *loc de transfer*.

Hodograful Nyquist este simetric față de axa reală a planului “H”. Datorită acestui fapt el se trasează de cele multe ori numai pentru $\omega \in [0, \infty)$ sau pentru $(0, \infty)$.

Hodograful Nyquist și caracteristicile Bode sunt utilizate în analiza și sinteza sistemelor, bunăoară pentru analiza stabilității sistemelor și determinarea performanțelor lor, respectiv pentru proiectarea sistemelor de reglare automată. Construcția graficelor lor se poate face în mod exact numai prin puncte. Mediul Matlab permite calculul și reprezentarea grafică a hodografului Nyquist și a caracteristicilor de pulsărie ale sistemelor lineare.

Astfel, calculul celor două componente P și Q ale lui $H(j\omega)$ se poate face cu funcția: *nyquist* folosind instrucțiunea

[P,Q]=nyquist(num,den,omega),

în care *num* și *den* definesc numitorul, respectiv numărătorul funcției de transfer $H(s)$, iar

`omega=logspace(d1,d2,N)`

defineste domeniul pulsatiilor $\omega \in [10^{d1}, 10^{d2}]$, discretizat la scară logaritmică prin N puncte echidistante.

Calculul caracteristicilor Bode se poate face folosind funcția *bode* prin instrucțiuni ce folosesc aceleși argumente și sunt de forma

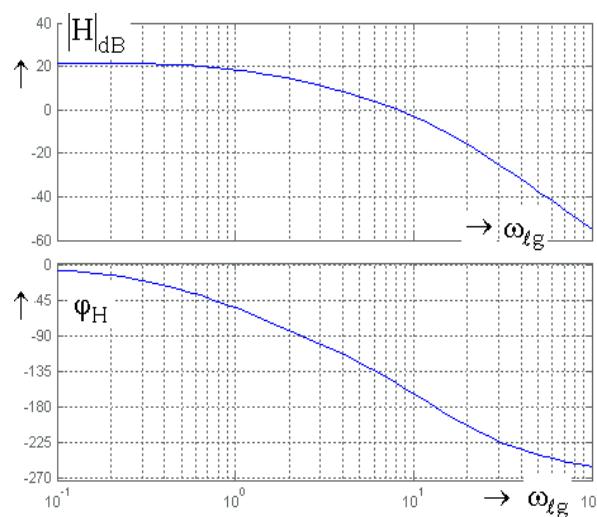
`[Am,fi] = bode(num,den,omega);`

`HdB=20*log10(Am),`

unde $HdB = F_1(\omega_{lg})$ iar $fi = F_2(\omega_{lg})$.

Cu titlu de exemplu, în figura de mai jos sunt reprezentate caracteristicile Bode obținute pe această cale pentru

un sistem cu f.d.t. $H(s) = \frac{1800}{(s+1) \cdot (s+10) \cdot (s+15)}$.



Cu privire la figură trebuie reținut în primul rând modul de notare al axelor. Abscisa este o axă logaritmică notată prin valorile lui ω , din decadă în decadă (decada este intervalul dintre două pulsări aflate în raportul 1:10). Ordonata caracteristicii amplitudine-pulsărie este notată din 20 în 20 de decibeli, iar ordonata caracteristicii fază-pulsărie în grade sau radiani.

Caracteristicile reprezentate particularizează câteva din trăsăturile caracteristicilor Bode: i) La pulsări mari caracteristicile Bode sunt monoton descrescătoare. Acesta denotă caracterul inertial al sistemului; ii) La pulsări mari panta caracteristicii amplitudine-pulsărie și asymptota orizontală a caracteristicii fază-pulsărie sunt egale cu $-20 \cdot \partial \text{ dB/dec}$, respectiv $90^0 \cdot \partial$, unde ∂ reprezintă excesul polilor față de zerouri din expresia lui $H(s)$, adică diferența dintre numărul de poli și de zerouri.

Dacă pentru un sistem se cunosc caracteristicile Bode, atunci cu ajutorul lor și al relației (7) putem calcula răspunsul sistemului în regim permanent armonic la un semnal armonic de intrare dat.

Spre exemplu, dacă sistemului din figura anterioară î se aplică semnalul $u(t) = 4.5 \cdot \sin 2t$, atunci, din diagramele Bode „citim” pentru $\omega = 2 \text{ sec}^{-1}$, valorile $|H(j\omega)|_{db} = 15 \text{ dB}$ și $\arg H(j\omega) = -85^\circ$, iar la ieșire vom obține

$$y(t) = 4.5 \cdot 10^{20} \cdot \sin(2t - 85 \frac{\pi}{180}) = 4.5 \cdot 5.62 \cdot \sin(2t - 1.4835) = 96.94956 \cdot \sin(2t - 1.4835).$$

2. Domeniul de reprezentare al caracteristicilor Bode

Legat de caracteristicile Bode, una dintre problemele care ne interesează din punct de vedere practic este modul în care stabilim domeniului de pulsații pe care acestea se reprezintă. Răspunsul depinde de scopul în care urmează să fie folosite caracteristicile. Întotdeauna este vorba despre prelucrare de semnale. Din această perspectivă se disting două situații, după cum *nu dispunem de informații despre semnalele de intrare* (a) sau *dispunem de informații despre semnalele de intrare* (b).

(a) *Dacă nu dispunem de informații despre semnale de intrare*, caracteristicile Bode se trasează pe un domeniu care trebuie să acopere toate pulsațiile de frângere asociate constantelor de timp din f.d.t. a sistemului.

Dacă T este o constantă de timp (de întârziere sau de anticipare) care apare în f.d.t. a sistemului S , atunci ei î se asociază prin relația $\omega_0 = \frac{1}{T}$ o pulsație ω_0 numită *pulsăcie de frângere*. Fie $\{\omega_{0i}\}$ – mulțimea tuturor pulsățiilor de frângere ω_0 , iar $\omega_{0\min}$ și $\omega_{0\max}$ cea mai mică, respectiv cea mai mare dintre valorile ω_{0i} care apar. Caracteristicile Bode se reprezintă pe un interval care include în mod obligatoriu domeniul $[10 \cdot \omega_{0\min}, 10 \cdot \omega_{0\max}]$.

(b) *Atunci când dispunem de informații despre semnalul de intrare sub formă de spectru*, domeniul de reprezentare al caracteristicilor Bode se adoptă în funcție de acest spectru. În concret, caracteristicile Bode se reprezintă pe acel domeniu de pulsații pentru care spectrul semnalului de intrare ia valori care nu sunt neglijabile, adică pe domeniul $[-2\pi f_B, 2\pi f_B]$ unde f_B este frecvența de bandă a semnalului de intrare, sau pe un domeniu mai larg care include intervalul $[-2\pi f_B, 2\pi f_B]$.

3. Construcția caracteristicilor Bode

Din punct de vedere practic se disting două situații:

- cazul când sunt necesare construcții exacte ale caracteristicilor Bode,
- cazul când sunt suficiente construcții aproximative ale caracteristicilor Bode.

În prima situație se folosesc programe de calcul, de exemplu facilitățile oferite de mediul Matlab-Simulink (v. Secțiunea 1 din acest paragraf).

În continuare ne referim la cea de a doua situație pentru care, de regulă se folosește metoda grafo-analitică.

A. Principiul metodei grafo-analitice de construcție a caracteristicilor Bode

Principiul construcției este cel al “jocului de lego” în sensul realizării unei construcții prin îmbinarea unui număr limitat de tipuri de piese. În cazul de față: *caracteristicile Bode ale unui sistem se obțin prin compunere, folosind ca piese caracteristicile Bode ale unor elemente de transfer tipizate*.

Componerea se realizează pe baza următorului rezultat: *caracteristicile Bode ale unei conexiuni serie se obțin prin însumarea, punct cu punct, a caracteristicilor Bode ale subsistemelor (componentelor) inseriate.*

Afirmația poate fi argumentată cu ușurință. Astfel, pentru conexiunea din figură avem $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$, respectiv

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega). \quad (9)$$



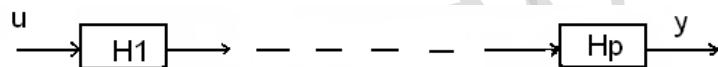
Întrucât

$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg H(j\omega)}$, $H_1(j\omega) = |H_1(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg H_1(j\omega)}$, $\cdot H_2(j\omega) = |H_2(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg H_2(j\omega)}$, prin înlocuire în (9) obținem egalitățile

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = |H_1(j\omega)| \cdot |H_2(j\omega)| \\ \arg H(j\omega) = \arg H_1(j\omega) + \arg H_2(j\omega) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |H|_{dB} = |H_1|_{dB} + |H_2|_{dB} \\ \varphi_H = \varphi_{H_1} + \varphi_{H_2} \end{cases} \quad (10)$$

Interpretarea rezultatului: *caracteristicile Bode ale conexiunii, $|H|_{dB}$, φ_H , se obțin prin însumarea punct cu punct a caracteristicilor Bode ale celor două subsisteme inseriate, $|H_1|_{dB}$, φ_{H_1} și $|H_2|_{dB}$, φ_{H_2} .*

Generalizăm rezultatul considerând conexiunea serială din figură, alcătuită din p sisteme de tip SISO:



Sistemul, în ansamblu, are funcția de transfer $H(s) = \prod_{i=1}^p H_i(s)$, respectiv funcția răspuns la pulsație $H(j\omega) = \prod_{i=1}^p H_i(j\omega)$. Această egalitate se scrie sub formă: $|H(j\omega)| e^{j \arg H(j\omega)} = \prod_{i=1}^p (|H_i(j\omega)| e^{j \arg H_i(j\omega)})$. Rezultă că;

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \prod_{i=1}^p |H_i(j\omega)| \\ \arg H(j\omega) = \sum_{i=1}^p \arg H_i(j\omega) \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} |H|_{dB} = \sum_{i=1}^p |H_i|_{dB} \\ \varphi_H = \sum_{i=1}^p \varphi_{H_i} \end{cases} \quad (11)$$

Deci, caracteristicile Bode ale unei conexiuni serie se obțin prin însumarea punct cu punct a caracteristicilor Bode ale subsistemelor inseriate.

Reciproc, acest rezultat poate fi folosit în următoarea idee:

- i) Presupunem că avem o funcție de transfer $H(s)$ pe care o descompunem în factori sub formă:

$$H(s) = \frac{K}{s^q} \frac{\prod(T_l s + 1)}{\prod(T_i s + 1)} \frac{\prod(T_l''^2 s^2 + 2\zeta_l T_l'' s + 1)}{\prod(T_k''^2 s^2 + 2\zeta_k T_k'' s + 1)} e^{-T_m s} \quad . \quad (12)$$

- ii) Interpretăm expresia (12) ca funcție de transfer a unei conexiuni serie realizată prin asocierea a câte unui element de transfer tipizat pentru fiecare factor (aceste elemente de transfer sunt piesele jocului de lego!).
- iii) Se reprezintă caracteristicile Bode ale elementelor de transfer asociate factorilor identificați.
- iv) Se determină caracteristicile Bode ale conexiunii însumând punct cu punct caracteristicile Bode de la punctul iii).

Problema reprezentării grafice poate fi simplificată și mai mult folosind noțiunea de element de transfer invers.

Astfel, dacă un sistem are f.d.t. $H(s)$, atunci un sistem cu funcția $\frac{1}{H(s)}$ se numește *element de transfer invers*.

Simplificarea se bazează pe faptul că sistemul cu f.d.t. $H(s)$ și elementul de transfer invers asociat au caracteristicile Bode simetrice în raport cu axa ω_{lg} (axa logarithmică a pulsării). De exemplu, caracteristicile Bode ale ET-PD sunt simetrice în raport cu axa ω , față de caracteristicile Bode ale ET-PT₁ corespunzător, iar caracteristicile Bode ale ET-PD₂ sunt simetrice în raport cu axa ω față de caracteristica ET-PT₂ corespunzător.

Bibliografie: Dragomir, T. L., Teoria Sistemelor - Aplicații 2, Ed. Politehnica, 2008. (v. Explicațiile din culegerea de probleme).

B. Caracteristici Bode pentru elemente de transfer tipizate

1. **[ET-P]** Deoarece $H(s) = k$, avem: $\begin{cases} |H(j\omega)| = k \\ \arg H(j\omega) = 0 \end{cases}$, respectiv
 $\begin{cases} |H|_{dB} = 20 \lg k = k_{dB} \\ \varphi_H = 0 \end{cases}$.

Reprezentarea grafică este cea din figura alăturată.

2. **[ET-I]** $H(s) = \frac{1}{s}$ $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j(\pi/2)}$

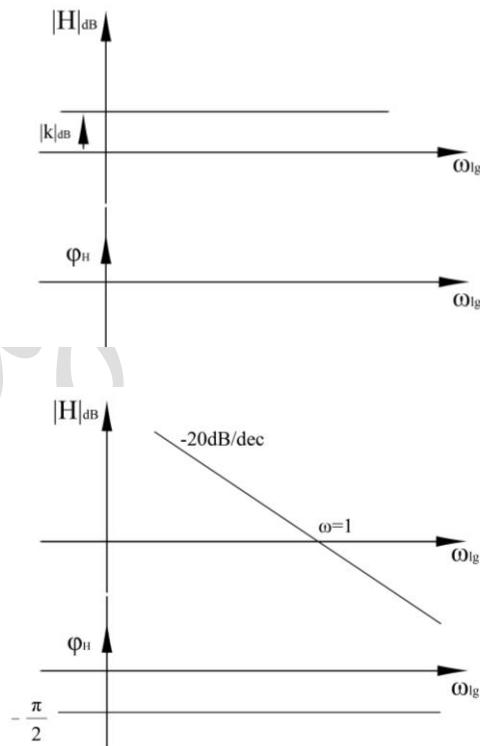
Deci: $|H| = \frac{1}{\omega} \rightarrow |H|_{dB} = -20 \lg \omega = -20 \omega_{lg}$

iar $\arg H = -\frac{\pi}{2}$; $\rightarrow \varphi_H = -\frac{\pi}{2}$.

Diagramele au aspectul din figura alăturată.

3. **[ET-D]** $H(s) = s$

Caracteristicile Bode ale ET-D se construiesc având în vedere că ET-D este inversul ET-I.⁴⁾



⁴⁾ Spațiile libere se completează la curs.

4. [ET-Tm] $H(s) = e^{-\tau \cdot s} \rightarrow H(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = 1 \Rightarrow |H|_{dB} = 0 \\ \arg H(j\omega) = -\omega\tau = -\tau \cdot 10^{\lg \omega} = -\tau \cdot 10^{\omega_{lg}} \end{cases},$$

5. [ET-PT₁] $H(s) = \frac{K}{Ts+1} \rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} e^{-j\arctg(\omega T)}$

$$\text{Deci } |H| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \text{ iar } \arg H = -\arctg \omega T.$$

Modulul $|H|$ se poate aproxima astfel:

$$|H| \approx \begin{cases} 1, & \text{daca } \omega T < 1; \\ \frac{1}{\omega T}, & \text{daca } \omega T > 1. \end{cases} \quad (13)$$

Se introduce notația:

$$\omega_0 = \frac{1}{T}, \quad (14)$$

unde ω_0 se numește *pulsărie de frângere*. Atunci relația (13) devine:

$$|H| \approx \begin{cases} 1, & \text{daca } \omega < \frac{1}{T}; \\ \frac{1}{\omega T}, & \text{daca } \omega > \frac{1}{T}; \end{cases} \rightarrow |H|_{dB} \cong \begin{cases} 0, & \text{daca } \omega < \omega_0; \\ 20 \cdot (\omega_{0lg} - \omega_{lg}), & \text{daca } \omega > \omega_0. \end{cases}$$

Reprezentarea grafică a caracteristicilor Bode este cea din figură. S-a considerat $\phi_H = -\arctg \omega T$.

Exemplu 1: Să se determine caracteristicile Bode ale sistemului din figură considerând că $R=10k\Omega$ și $C=0.01 \mu F$.

Cuadripolul are modelul matematic: $RCy^{(1)}(t) + y(t) = u(t)$, respectiv f.d.t.

$$\text{este: } H(s) = \frac{1}{RCs + 1}. \text{ Constanta de timp a sistemului este } T = RC = 10^4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}$$

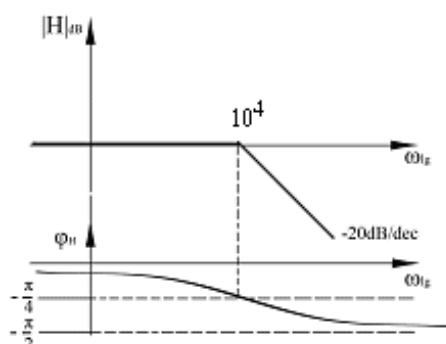
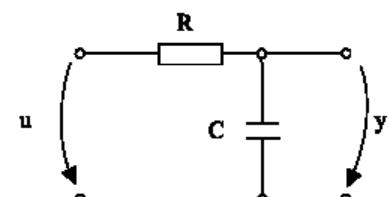
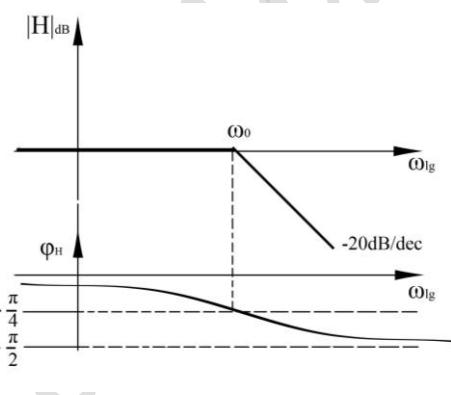
$$= 10^{-4} \text{ sec} = 0.1 \text{ msec.}$$

$$\text{Rezultă pulsăria de frângere } \omega_0 = \frac{1}{T} = 10^4 \text{ sec}^{-1}.$$

Pentru reprezentarea grafică a caracteristicilor Bode particularizăm construcția din cazul general folosindu-ne de ω_0 și de pantele c.a.p..

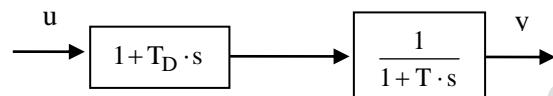
6. [ET-PD] $H(s) = K \cdot (1 + T_D \cdot s)$

ET-PD este ET invers al ET-PT₁.



Exemplul 2. Ca aplicație la cele prezentate se consideră **[ET-PDT₁]**. El are f.d.t. $H(s) = K \cdot \frac{1 + T_D \cdot s}{1 + T \cdot s}$. Pentru simplitate adoptăm $K=1$.

Elementului de transfer i se poate asocia schema bloc din figură, adică o structură în care apar inseriate un ET-PD și un ET-PT₁.



Se disting 2 cazuri $T_D > T \Rightarrow$ ET cu anticipare-întârziere (lead-lag);

$T > T_D \Rightarrow$ ET cu întârziere anticipare (lag-lead).

7. **[ET-PT₂]**...F.d.t. este $H(s) = \frac{K}{T^2 \cdot s^2 + 2\xi T \cdot s + 1}$

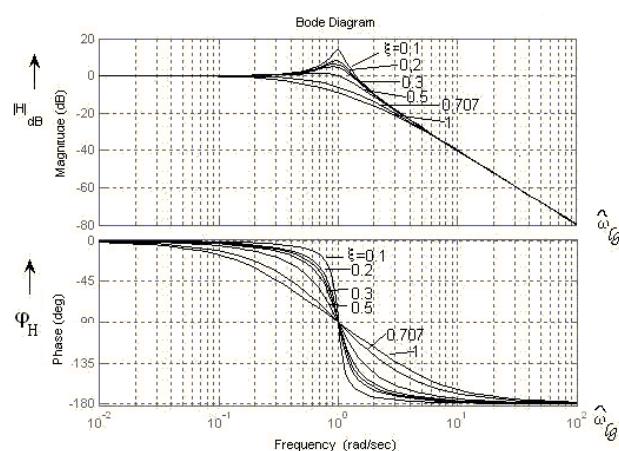
sau $H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$. Formulele sunt

legate prin relația $\omega_n = \frac{1}{T}$.

În figura alăturată sunt reprezentate caracteristicile Bode ale ET-PT₂. S-a considerat $K = 1$. În abscisă

s-a utilizat variabila $\hat{\omega}_{lg} = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)_{lg}$, numită

pulsărie raportată, în loc de ω_{lg} , denumită în acest context pulsărie absolută. Amortizarea ξ joacă rol de parametru. Ca urmare, spre deosebire de cazurile anterioare, nu mai avem două caracteristici ci două



familii de caracteristici corespunzătoare diferitelor valori ale lui ξ . Familia de c.a.p. redă faptul că pentru ξ foarte mică apare un *vârf de rezonanță*, cu atât mai pronunțat cu cât valoarea lui ξ este mai redusă.

8. **[ET-DT₂]** $H(s) = K \cdot (T^2 s^2 + 2T\xi s + 1)$. Întrucât pentru $K = 1$ cele două elemente de transfer de la punctele 7 și 8 sunt inverse, caracteristicile Bode din acest caz sunt în principiu simetrice în raport cu axele ω_{lg} sau $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_{lg}$ față de cele de la punctul 7.

4. Tipuri de probleme în care se folosesc caracteristici Bode

A. Filtre

Transmiterea, generarea sau prelucrarea de semnale este afectată în general de perturbații. Pentru prelucrarea semnalelor afectate de perturbații se interpun, în aval de receptor filtre. Filtrele sunt subsisteme destinate prelucrării semnalelor de intrare astfel încât semnalele de la ieșirea lor să rețină numai o parte din componentele semnalului de intrare (sau din spectrul semnalului de intrare). Cu ajutorul filtrelor:

- i) pot fi eliminate componente parazite ale semnalului de intrare, atunci când acesta este afectat de perturbații parazite, reținându-se semnalul util (semnalul purtător de informație);
- ii) pot fi selectate componente dintr-o bandă îngustă din semnalul de intrare necesare pentru prelucrări ulterioare (filtre selective) sau dintr-o bandă largă (filtre trece jos, - trece bandă sau -trece sus), componentele din afara plajei fiind rejectate.

Principalul mod de caracterizare al filtrelor îl reprezintă f.d.t. și caracteristicile Bode asociate.

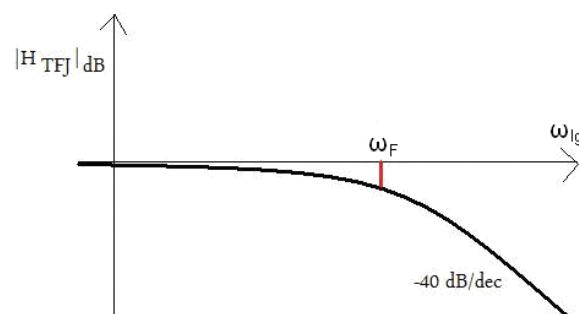
Cu titlu de exemplu, ne referim la trei filtre de ordin 2 care apar frecvent în aplicații. De obicei amortizarea lor

are valoarea $\xi_F = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pulsația ω_F este pulsația proprie a filtrului. Reprezentăm doar c.a.p.

a) Filtrul trece-jos cu f.d.t.

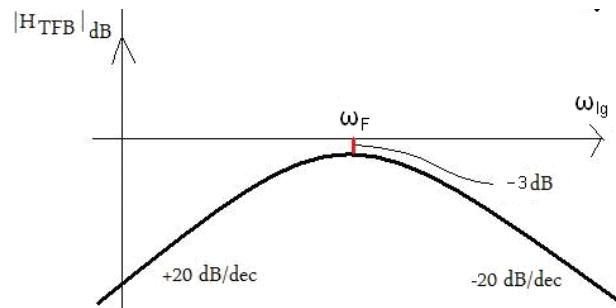
$$H_F(s) = \frac{1}{T_F^2 s^2 + 2\xi_F T_F s + 1} \text{ sau}$$

$$H_F(s) = \frac{\omega_F^2}{s^2 + 2\xi_F \omega_F s + \omega_F^2};$$



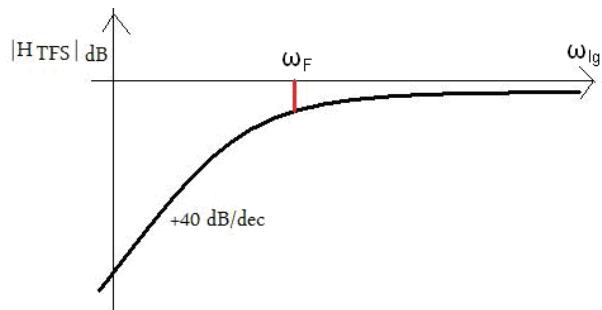
b) Filtrul trece-bandă cu f.d.t.

$$H(s) = \frac{s\omega_F}{s^2 + 2\xi_F \omega_F s + \omega_F^2};$$



c) *Filtrul trece-sus cu f.d.t.*

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi_F\omega_F s + \omega_F^2}.$$



B. Definirea unor indicatori de calitate ai sistemelor cu ajutorul caracteristicilor Bode

În tehnică, pentru evaluarea diverselor apărute destinate prelucrării de semnale sau pentru evaluarea unor sisteme de reglare, se utilizează pe lângă indicatorii de calitate definiți în §.2.1, și indicatori definiți pe baza caracteristicilor Bode ale aparatelor, respectiv ale sistemelor de reglare.

De regulă se consideră că atenuările semnificative se produc atunci când $|H| < \sqrt{2}/2$. Aceasta înseamnă $|H|_{dB} < 20 \lg \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \Leftrightarrow |H|_{dB} < -3 \text{ dB}$.

În acest context pe c.a.-p se definesc două mărimi: *banda de pulsărie și pulsăția de bandă*. Modul în care sunt definite rezultă din figură. *Banda de pulsărie* este notată cu Δ_b și reprezintă domeniul de valori ale lui ω pentru care $|H|_{dB} \geq -3 \text{ dB}$. Banda de pulsărie este mărginită superior de valoarea ω_b numită *pulsăție de bandă*.

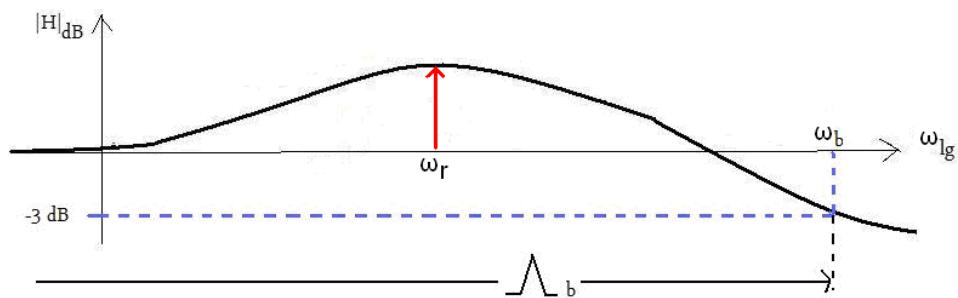


Figura evidențiază și posibilitatea producerii unor procese rezonante. Ele se manifestă față de componente sinusoïdale ale semnalului de intrare de pulsării apropiate de ω_r , pe care le amplifică foarte mult.

Banda de pulsării, pulsăția de bandă și $|H(j\omega_r)|_{dB}$ sunt considerate *indicatori de calitate* ai sistemelor. De regulă se cere ca primii doi să aibă valori cât mai mari, iar cel de al treia să tindă spre valoarea 0 dB.

§. 4.3 Stabilitatea sistemelor

1. Conceptul de stabilitate

Stabilitatea este o proprietate fundamentală intrinsecă a unui sistem. Ea exprimă două aspecte¹: *capacitatea sistemului de a ajunge într-un regim de funcționare impus prin semnalele de intrare și capacitatea sistemului de a reveni într-un regim de funcționare, de a se recupera, după ce a fost supus unor perturbații pe durată limitată.*

- *Primul aspect al conceptului de stabilitate are în vedere cerința ca sistemul să ajungă într-un regim de funcționare impus prin aplicarea unui semnal de intrare începând cu un moment t_0 , în situația în care până la momentul t_0 el se găsea într-un alt regim de funcționare datorat unei forme anterioare de variație a semnalului de intrare.*

Pentru exemplificarea primului aspect considerăm figurile de mai jos. Curbele 1 reprezintă traectorii de stare ipotetice corespunzătoare regimului impus începând cu momentul t_0 , iar curbele 2 sunt traectoriile pe care sistemul evoluează în realitate. *Regimul de funcționare descris prin traectoria 1 este stabil atunci când traectoria 2 va tinde spre traectoria 1.* Trecerea nu este instantanea din cauza inerției sistemului.

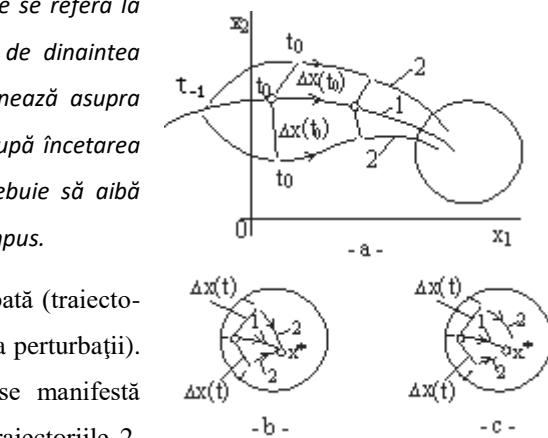


În situația din fig. a traectoria 2 se apropie de traectoria 1. Deci regimul de funcționare 1 este stabil. În situația din fig. b cerința nu este îndeplinită, traectoria 2 se depărtează de traectoria 1, deci regimul 1 este instabil.

- *Cel de al doilea aspect al conceptului de stabilitate se referă la menținerea sistemului în regimul de funcționare de dinaintea apariției perturbațiilor, în ideea că acestea acționează asupra sistemului pe un interval de timp limitat $[t_{-1}, t_0]$. După încetarea acțiunii perturbațiilor la momentul t_0 sistemul trebuie să aibă capacitatea de a reveni în regimul de funcționare impus.*

Alăturat, în fig. a, curba 1 reprezintă traectoria neperturbată (traекторia pe care sistemul ar evoluă dacă asupra lui nu ar acționa perturbații). În realitate, din cauza acțiunii unor perturbații care se manifestă începând cu momentul t_{-1} , sistemul ajunge pe una din traectoriile 2.

Perturbațiile încearcă la momentul t_0 . Se observă că după acest moment traectoriile 2 converg spre traectoria 1. Aceasta înseamnă că regimul de funcționare reprezentat prin traectoria 1 este stabil. În medaliajane se detaliază două situații. În cazul din fig. b traectoriile 2 ajung în final în regim permanent constant (pentru $t \rightarrow \infty$) în starea x^* , la fel ca și traectoria 1; spunem să *regimul de funcționare este asymptotic stabil*. În cazul din fig. c traectoriile 2 ajung în final într-o vecinătate a stării x^* ; spunem că *regimul de funcționare este stabil*.



¹ Din punct de vedere matematic cele două aspecte pot fi reduse la unul singur.

Potrivit celor de mai sus conceptul de stabilitate este asociat regimurilor de funcționare ale unui sistem, astfel încât vorbim despre *stabilitatea regimurilor de funcționare*. Un sistem poate funcționa într-un număr foarte mare de regimuri. Unele pot fi stabile, altele instabile. De aceea, vom spune că *un sistem este stabil numai atunci când toate regimurile de funcționare ale sistemului sunt stable*.

- Prezentarea de până acum a fost de natură calitativă. Plecând de la exemplele date putem trece în continuare la o abordare cantitativă. Astfel:

Un regim de funcționare al unui sistem este descris prin ansamblul variației mărimilor caracteristice ale acestuia pe un interval de timp finit sau infinit. Din cauza inerției sistemului regimul impuls nu se poate instala sau reinstala instantaneu ci doar temporizat, printr-un proces tranzitoriu. Fie $x^*(t)$ și $y^*(t)$ semnalele de stare și de ieșire care descriu regimul de funcționare impuls unui sistem în timp continuu prin aplicarea semnalului de intrare $u^*(t)$. Fie $x(t)$ și $y(t)$ semnalele care descriu variațiile mărimilor de stare și de ieșire în regimurile tranzitorii ce urmează momentului impunerii noului regim de funcționare sau momentului începerii acțiunii perturbațiilor. În cazul când regimul de funcționare este stabil, valorile curente, $x(t)$ și $y(t)$, ale stării și ieșirii diferă la începutul procesului tranzitoriu față de valorile impuse $x^*(t)$ și $y^*(t)$, dar ajung în vecinătatea lor odată cu trecerea timpului. În acest context proprietatea de stabilitate poate fi urmărită prin intermediul diferențelor $\Delta x(t) = x^*(t) - x(t)$, respectiv $\Delta y(t) = y^*(t) - y(t)$, iar concepțele de **regim stabil**, respectiv de **sistem stabil**, se pot formula astfel:

Un regim de funcționare al unui sistem este stabil, respectiv asimptotic stabil dacă începând cu un anumit moment t_0 diferențele $|\Delta x(t)| = |x^*(t) - x(t)|$ sau $|\Delta y(t)| = |y^*(t) - y(t)|$ pot fi păstrate între anumite limite, respectiv dacă, mai mult, $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta x(t)| = 0$ sau $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta y(t)| = 0$.

Un sistem este stabil, respectiv asimptotic stabil, dacă această proprietate este valabilă pentru orice regim impuls $x^*(t)$ sau $y^*(t)$.

Atunci când urmărim stabilitatea regimurilor de funcționare prin intermediul mărimilor de stare x , vorbim despre **stabilitate internă**. Ea este definită prin următorul enunț cunoscut în literatură sub denumirea de **stabilitate în sens Liapunov**:

Un regimul impuls $x^*(t)$ este stabil dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) și orice $t_0 \in \mathbb{R}$ există $\delta(\varepsilon, t_0) \in \mathbb{R}$ astfel încât dacă $|\Delta x(t_0)| = |x_0^* - x_0| < \delta(\varepsilon, t_0)$ atunci și $|\Delta x(t)| = |x^*(t) - x(t)| < \varepsilon$ pentru $t > t_0$.

Dacă, în plus, pentru orice $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) există un $\delta_0(\varepsilon)$ astfel încât dacă $|\Delta x(t_0)| < \delta_0(\varepsilon)$ atunci și $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta x(t)| = 0$, spunem că regimul impuls este asimptotic stabil.²

Dacă există cel puțin o stare inițială x_0 pentru care implicația $|\Delta x(t_0)| = |x_0^* - x_0| < \delta(\varepsilon, t_0) \rightarrow |\Delta x(t)| = |x^*(t) - x(t)| < \varepsilon$ nu este valabilă, regimul impuls este considerat instabil.

² Dacă în definiția stabilității în sens Liapunov cantitatea $\delta(\varepsilon, t_0)$ nu depinde de momentul inițial t_0 , (notăm acest lucru scriind $\delta(\varepsilon)$), spunem că regimul impuls este invariant stabil în timp sau că regimul impuls este uniform stabil.

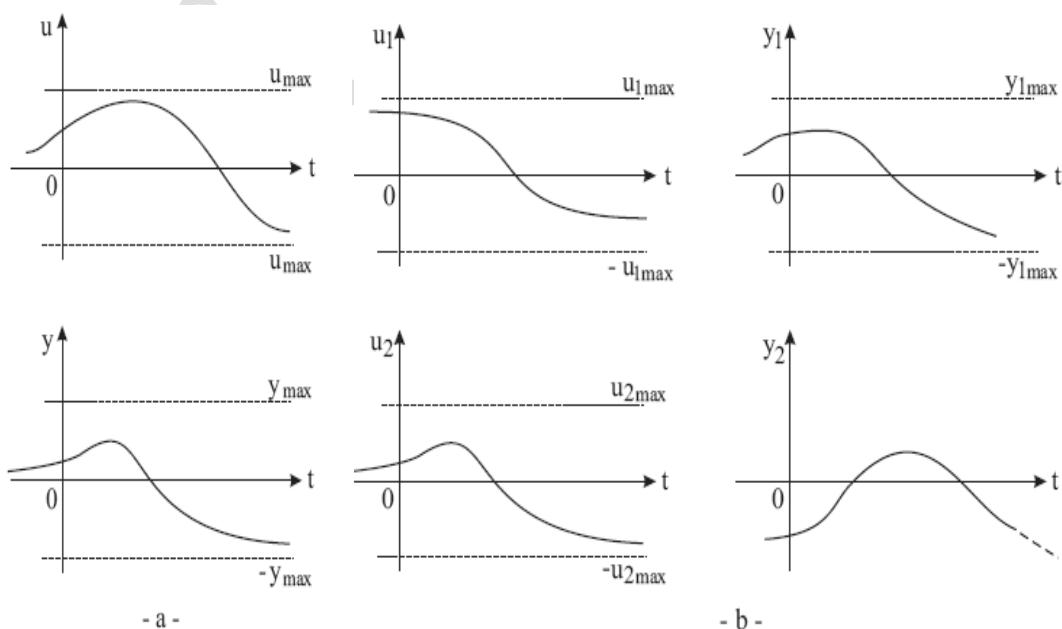
Stabilitatea internă poate fi studiată folosind diferența $\tilde{x}(t) = \dot{x}^*(t) - \dot{x}(t)$ ca o nouă variabilă de stare. În acest caz $x(t) \rightarrow x^*(t)$ este echivalentă cu $\tilde{x}(t) \rightarrow 0$. Problema este astfel redusă la stabilitatea unui singur regim, regimul $\tilde{x}(t) = 0$.

Stabilitatea internă este un concept deosebit de important din punct de vedere teoretic prin faptul că furnizează mijloace analitice sistematice de investigare a stabilității. Din punct de vedere experimental **stabilitatea internă este însă un concept cu care mai multe ori nu se poate opera**. Explicație: pe de-o parte, nu toate variabilele de stare sunt măsurabile, iar pe de altă parte, provocarea unor situații experimentale acoperitoare din punctul de vedere al variabilelor de stare este de regulă imposibilă.

În cazul în care urmărim stabilitatea sistemului prin diferența $|\Delta y(t)| = |y^*(t) - y(t)|$ vorbim despre **stabilitatea externă a sistemului**. Conceptul de **stabilitate externă** se aplică experimental prin raportarea variației semnalului de ieșire $\Delta y(t)$ la variația semnalului de intrare $\Delta u(t)$ sub forma: „*intrarea mărginită implică ieșire mărginită*”. Conceptul este cunoscut sub denumirea de **BIBO-stabilitate** (Bounded Input Bounded Output – Stability). El caracterizează comportarea sistemului într-un număr foarte mare de regimuri de funcționare și se utilizează în practică sub forma următoare:

„Se aplică sistemului fizic un semnal de intrare $u^(t)$ mărginit în amplitudine și limitat în durată, adoptat astfel încât să solicite sistemul cât mai puternic din punctul de vedere al funcției pe care sistemul trebuie să o îndeplinească. Dacă răspunsul sistemului la această solicitare este mărginit atunci se consideră că regimurile de funcționare cauzate de funcții de intrare $u(t)$ mai puțin solicitante decât $u^*(t)$ vor fi, de asemenea, mărginite, deci stabile externe.”*

În figurile următoare apar câteva exemple referitoare la BIBO – stabilitate.



- *Fig. a:* Pentru un sistem de tip SISO sunt ilustrate un semnal de intrare și răspunsul sistemului la acest semnal. Se observă că $|u^*(t)| \leq u_{max}$ și că există un y_{max} astfel încât $|y(t)| \leq y_{max}$. În ipoteza că acest tip de comportare este general valabil, vom considera că sistemul este BIBO-stabil.
- *Fig. b:* La intrările unui sistem MIMO, cu două intrări și două ieșiri, se aplică două semnale de intrare $u_1^*(t)$ și $u_2^*(t)$ mărginite în amplitudine ($|u_1^*(t)| \leq u_{1max}$ și $|u_2^*(t)| \leq u_{2max}$). Răspunsul sistemului, redat de semnalele $y_1(t)$ și $y_2(t)$, nu verifică în ansamblu condițiile $|y_1^*(t)| \leq y_{1max}$ și $|y_2^*(t)| \leq y_{2max}$. A doua condiție fiind încălcată înseamnă că sistemul nu este BIBO – stabil. Aceasta nu exclude existența unor semnale de intrare mărginite la care sistemul să răspundă cu semnale de ieșire mărginite.

Așa cum se arată în continuare în secțiunea 3, *stabilitatea internă asimptotică a unui sistem liniar implică stabilitatea externă a aceluia sistem*.

Până aici, în cele prezentate în această secțiune, ne-am referit doar la sisteme în timp continuu. Conceptele sunt valabile și pentru *sistemele în timp discret*. Pentru aceste sisteme urmărirea proceselor care au loc se realizează prin intermediul valorile mărimilor caracteristice numai la momentele de discretizare. Traекторiile sunt constituite din puncte discrete și nu din curbe continue.

2. Criteriul rădăcinilor

După cum s-a precizat, „stabilitatea internă a oricărui regim poate fi studiată folosind variabila de stare $\tilde{x}(t) = x^*(t) - x(t)$, problema stabilității tuturor regimurilor fiind redusă la stabilitatea regimului $\tilde{x}(t) = 0$. Simplificăm exprimarea vorbind despre „stabilitatea punctului $\tilde{x} = 0$ ”.

- În continuare ne referim la stabilitate din această perspectivă. Fie sistemul liniar în timp continuu:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1)$$

În cazul traectoriilor notate cu 1 în figurile din secțiunea 1, sistemul (1) evoluează sub acțiunea semnalului de intrare $u(t) = u^*(t)$, $t > t_0$, plecând din starea inițială x_0^* . În cazul traectoriilor notate cu 2 în aceeași figuri sistemul evoluează tot sub acțiunea semnalului de intrare $u(t) = u^*(t)$, $t > t_0$, dar plecând din starea inițială x_0 . Ca urmare, $x^*(t)$ și $x(t)$ vor satisface relațiile:

$$\left(x^*(t) \right)^* = Ax^*(t) + Bu^*(t), x(t_0) = x_0^* \quad \text{și} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu^*(t), x(t_0) = x_0$$

Scăzându-le membru cu membru și introducând variabila de stare $\tilde{x}(t) = x^*(t) - x(t)$, se obține sistemul

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A \cdot \tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0^* - x_0, \quad t \geq t_0. \quad (2)$$

Polinomul caracteristic al matricei A (matrice de tipul n x n), este

$$\mu(s) = \det(sI - A). \quad (3)$$

În acest context, plecând de la realizarea standard diagonală, se obține următorul rezultat cunoscut sub denumirea de **criteriul rădăcinilor** sau **criteriul fundamental al stabilității** pentru sistemele liniare în timp continuu:

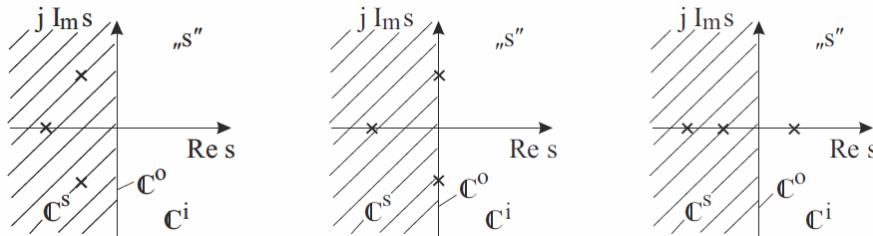
Sistemul (1) este:

- **asimptotic stabil** atunci când valorile proprii ale polinomului caracteristic (3) au partea reală strict negativă,
- **stabil** atunci când unele valori proprii au partea reală strict negativă iar restul valorilor proprii sunt pur imaginare, dar simple (în acest caz se mai spune că sistemul este "marginal stabil")

și

- **instabil** în restul cazurilor.

Celor trei situații le corespund reprezentările din figura de mai jos care se referă la un sistem de ordinul III.



➤ În cazul sistemului în timp discret

$$\begin{cases} \dot{x}[t+1] = Ax[t] + Bu[t], \\ y[t] = Cx[t] + Du[t] \end{cases}, \quad (4)$$

similar sistemului (2), obținem

$$\tilde{x}[t+1] = A \cdot \tilde{x}[t], \quad \tilde{x}[t_0] = x_0^* - x_0, \quad t \in \mathbb{N}, t \geq t_0, \quad (5)$$

cu polinomul caracteristic

$$\mu(z) = \det(zI - A). \quad (6)$$

De data aceasta este semnificativă amplasarea rădăcinilor polinomului caracteristic în raport cu cercul de rază unitară $|z| = 1$. **Criteriul rădăcinilor** (criteriul fundamental al stabilității) pentru sistemele în timp discret este:

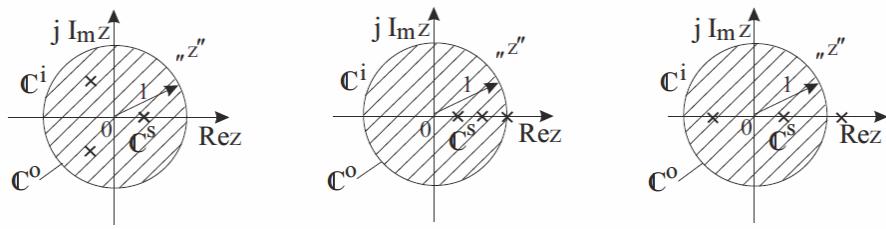
Sistemul (5) este:

- **asimptotic stabil** atunci când valorile proprii ale polinomului caracteristic (6) sunt în modul subunitare, adică $|z_i| < 1, i = 1; n$,
- **stabil dacă, cu excepția unor rădăcini simple amplasate pe cercul $|z| = 1$, restul rădăcinilor sunt în interiorul cercului unitar (sistem marginal stabil)**

și

- **instabil** în restul cazurilor.

Celor trei situații le corespund (în cazul unui sistem de ordinul III) reprezentările următoare:



Se observă că analizarea stabilității sistemelor liniare pe baza calculării valorilor proprii (rădăcinilor) se reduce, formal, la identificarea amplasării imaginilor lor în planul complex, față de axa imaginară a planului complex „s” în cazul STC, respectiv față de cercul de rază unitate $|z| = 1$ din planul complex „z” în cazul STD.

Majoritatea programelor de analiză a stabilității sistemelor liniare se bazează pe criteriul rădăcinilor și pe metode numerice de rezolvare a ecuațiilor polinomiale.

3. BIBO – stabilitatea sistemelor liniare, Criteriul răspunsului la impuls.

Limităm prezentarea la cazul sistemelor de tip SISO:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), x(0) = x_0 \\ y(t) = c^T x(t) + du(t) \end{cases}, t \geq 0 \quad (7)$$

pentru care răspunsul sistemului la semnalul de intrare $u^*(t)$, $t \geq 0$ este

$$y(t) = c^T \cdot e^{At} \cdot x(0) + \int_0^t h(t-\tau) \cdot u^*(\tau) \cdot d\tau + d \cdot u^*(t). \quad (8)$$

Potrivit conceptului de BIBO – stabilitate introdus în secțiunea 1 a acestui paragraf răspunsul $y(t)$ al sistemului (7) la o intrare $u^*(t)$, $t \geq 0$ mărginită trebuie să fie mărginit. Semnalul $u^*(t)$ fiind mărginit deducem că și

termenul $d \cdot u^*(t)$ este mărginit. Deci trebuie să fie mărginită suma $c^T \cdot e^{At} \cdot x(0) + \int_0^t h(t-\tau) \cdot u^*(\tau) \cdot d\tau$.

Întrucât, $x(0)$ și $u^*(t)$ sunt cantități independente, rezultă, pe de-o parte, că răspunsul liber $c^T \cdot e^{At} \cdot x(0)$ trebuie să fie mărginit, iar pe de altă parte că răspunsul forțat $\int_0^t h(t-\tau) \cdot u^*(\tau) \cdot d\tau$ trebuie să fie mărginit.

Pentru acesta avem:

$$\left| \int_0^t h(t-\tau) \cdot u^*(\tau) \cdot d\tau \right| \leq \int_0^t |h(t-\tau) \cdot u^*(\tau)| \cdot d\tau = \int_0^t |h(t-\tau)| \cdot |u^*(\tau)| \cdot d\tau \leq u_{\max} \cdot \int_0^t |h(t-\tau)| \cdot d\tau.$$

Deoarece inegalitatea $\left| \int_0^t h(t-\tau) \cdot u^*(\tau) \cdot d\tau \right| \leq u_{\max} \cdot \int_0^t |h(\tau)| \cdot d\tau$ trebuie să fie adevărată pentru orice $t \geq 0$ rezultă că

$$\left| \int_0^\infty h(t-\tau) \cdot u^*(\tau) \cdot d\tau \right| \leq u_{\max} \cdot \int_0^\infty |h(\tau)| \cdot d\tau. \quad (9)$$

Ca urmare, termenul $\int_0^\infty h(t-\tau) \cdot u^*(\tau) \cdot d\tau$ este mărginit atunci când $\int_0^\infty |h(\tau)| \cdot d\tau$ este mărginită, adică:

Pentru ca sistemul (7) să fie BIBO stabil în condiții inițiale nule este suficient ca funcția răspuns la impuls unitar $h(t)$ să fie absolut convergentă, adică $\int_0^{\infty} |h(\tau)| \cdot d\tau$ să ia o valoare finită. (**Criteriul răspunsului la impuls**).

Întrucât $h(t) = c^T e^{At} b$ și $H(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$ iar răspunsul liber are expresia $c^T e^{At} x(0)$, o condiție suficientă ca $h(t)$ să fie absolut convergentă, respectiv ca răspunsul $y(t)$ dat de (8) să fie mărginit, este ca toate valorile proprii ale matricei A , adică toți polii funcției de transfer $H(s)$, să îndeplinească condiția $\operatorname{Re}\{s_i\} < 0$. În consecință:

Pentru ca sistemul (7) să fie BIBO – stabil, o condiție suficientă este ca el să fie asimptotic stabil.

Similar, pentru sistemul în timp discret:

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + bu[t], x[0] = x_0 \\ y[t] = c^T x[t] + du[t] \end{cases} \quad (10)$$

este valabilă precizarea:

Pentru ca sistemul (10) să fie BIBO – stabil, o condiție suficientă este ca el să fie asimptotic stabil. Aceasta înseamnă $|z_i| < 1$, $i = 1; n$.

- În locul condiției „ $\int_0^{\infty} |h(\tau)| \cdot d\tau$ mărginită”, în cazul sistemului (10) în **criteriul răspunsului la impuls** apare condiția „ $\sum_{t=0}^{\infty} |h[t]|$ mărginită”.

Exemplul 1: Să se analizeze stabilitatea internă și existența proprietății de BIBO – stabilitate pentru sistemul de poziționare (STC).

Soluție: Pentru sistemului de poziționare $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ și are valorile proprii $s_1 = s_2 = 0$. Deoarece valoarea proprie este pe axa imaginară și este dublă sistemul este instabil. Pentru a ne pronunța asupra BIBO-stabilității trebuie să examinăm răspunsul la impuls. Întrucât $b = [0 \ 1]^T$ și $c = [1 \ 0]$, se obține $h(t) = t$. În consecință condiția ca $\int_0^{\infty} |h(\tau)| \cdot d\tau$ să fie finită nu poate fi îndeplinită. Ca urmare, sistemul de poziționare nu are proprietatea de BIBO - stabilitate.

Exemplul 2: Să se analizeze stabilitatea internă și existența proprietății de BIBO – stabilitate pentru sistemul în timp discret

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} \cdot u[t] \\ y[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} \end{cases}.$$

Soluție: și în acest caz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ iar valorile proprii sunt $z_1 = z_2 = 0$. Datorită faptului că valoarea proprie este în origine (deci în interiorul cercului de rază unitară) sistemul este asimptotic stabil și are proprietatea de BIBO - stabilitate.

4. Criterii de stabilitate

După cum s-a precizat, metodele numerice de analiză a stabilității sistemelor liniare se bazează pe criteriul rădăcinilor. În ingineria reglării se folosesc o serie de alte procedee de analiză a stabilității care ocolesc utilizarea criteriului rădăcinii. Ele se numesc *criterii de stabilitate*.

Se disting *criterii de stabilitate pentru STC* și *criterii de stabilitate pentru STD*. Atât pentru STC cât și pentru STD avem *criterii de stabilitate algebrice* și *criterii de stabilitate frecvențiale*. Primele se referă în mod direct la polinomul caracteristic al sistemului $\mu(s)$, respectiv $\mu(z)$ ³. Celelalte operează cu caracteristicile de pulsărie sau cu locurile de transfer ale sistemelor⁴.

În continuare ne vom referi numai la două criterii algebrice: *criteriul lui Hurwitz*, pentru STC, și *criteriul Jury*, pentru STD. Principalul criteriu de stabilitate frecvențial este *criteriul lui Nyquist* care are versiuni distincte pentru STC și STD. În încheierea paragrafului vom prezenta doar o variantă a unei versiuni a criteriului lui Nyquist pentru STC cunoscută sub numele de *criteriul rezervei de fază*.

4.1. Criteriul de stabilitate Hurwitz

Criteriul de stabilitate Hurwitz este un criteriu de tip algebraic care se folosește pentru STC. El are următorul enunț:

Un sistem liniar cu polinomul caracteristic

$$\mu(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s^1 + a_0 \quad (11)$$

este intern asimptotic stabil dacă și numai dacă sunt satisfăcute condițiile:

- i) $a_i > 0$, pentru $i = 0 ; n - 1$,
- ii) $H_i > 0$, pentru $i = 1; n$,

în care $H_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$ este așa-numitul determinant Hurwitz, iar

$$H_1 = |a_{n-1}|, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ 1 & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

sunt minorii principali ai determinantului Hurwitz, numiți și determinanți de nord-vest.

Precizări:

- a) Pentru aplicarea criteriului Hurwitz $\mu(s)$ trebuie adus în prealabil în forma monică ($a_n = 1$).

Exemplu: În loc de $\mu(s) = 7s^3 + 2as^2 + 5bs + 3$ se operează cu $\mu(s) = s^3 + \frac{2a}{7}s^2 + \frac{5b}{7}s + \frac{3}{7}$.

b) Se observă că în expresia lui H_n , la parcurgerea diagonalei principale în sens descendent, indicii elementelor de pe diagonala principală se înșiră în ordine descrescătoare, iar la parcurgerea coloanelor în sens descendent indicii elementelor de pe fiecare coloană cresc cu câte o unitate. Dacă indicii nu se regăsesc în polinomul caracteristic, atunci elementele respective ale matricei H_n se înlocuiesc cu 0.

- c) Dacă condiția $a_i > 0$, $i=0;n-1$ nu e îndeplinită, atunci nu mai aplicăm condiția ii).
- d) Criteriul lui Hurwitz reprezintă un algoritm care se pretează la programare.

³ În mod riguros se operează cu polinomul minimal al sistemului. (v. Dragomir, T.L., Teoria sistemelor, Aplicații 2, Ed. Politehnica, 2008).

⁴ Locurile de transfer sunt reprezentările grafice în raport cu ω a lui $H(j\omega)$ pentru STC sau a lui $H(e^{j\omega h})$ pentru STD.

Exemplul 1: Să se analizeze stabilitatea sistemului în timp continuu care are polinomul caracteristic $\mu(s) = 7s^3 + 2s^2 + 5s + 1$.

Soluție: Se operează cu $\mu(s) = s^3 + \frac{2}{7}s^2 + \frac{5}{7}s + \frac{1}{7}$. Observăm că prima condiție de stabilitate Hurwitz este îndeplinită

(coeficienții sunt strict pozitivi). Pentru a investiga cea de a doua condiție calculăm:

$$H_3 = \begin{vmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 1 & \frac{5}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} \Rightarrow H_1 = \left| \begin{matrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \end{matrix} \right| = \frac{2}{7} > 0 ; \quad H_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 1 & \frac{5}{7} \end{vmatrix} = \frac{10}{49} - \frac{1}{7} = \frac{3}{49} > 0 .$$

$$H_3 = \frac{1}{7} H_2 = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 1 & \frac{5}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{7} \left(\frac{10}{49} - \frac{1}{7} \right) = \frac{3}{343} > 0 .$$

H_1 , H_2 și H_3 îndeplinesc a doua condiție de stabilitate Hurwitz \Rightarrow Sistemul este asimptotic stabil.

Exemplul 2: Se consideră familia de sisteme de ordinul al 2-lea cu polinoamele caracteristice de forma $\mu(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0$, cu a_2, a_1, a_0 de același semn. Să se demonstreze că aceste sisteme sunt asimptotic stabile.

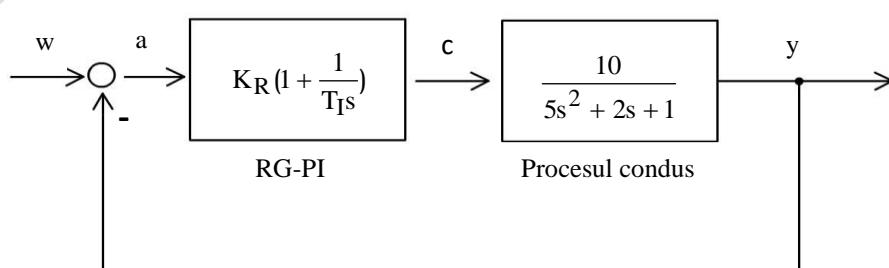
Soluție: $\mu(s) = s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2}$. Prima condiție de stabilitate Hurwitz este îndeplinită deoarece toți coeficienții au același

semn $\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} > 0$, $\frac{a_0}{a_2} > 0$. Privind a doua condiție observăm că determinantul Hurwitz fiind $H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \\ 1 & \frac{a_0}{a_2} \end{vmatrix} \Rightarrow$

$$H_1 = \left| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right| > 0 , \quad H_2 = \frac{a_1}{a_2} \frac{a_0}{a_2} > 0 \Rightarrow sistemele sunt asimptotic stabile.$$

➤ In practică problema proiectării sistemelor de reglare automată se reduce din punct de vedere matematic, odată ales tipul de regulator, la problema determinării parametrilor regulatorului. O prima condiție pe care parametrii trebuie să o îndeplinească este aceea de a conferi stabilitate asimptotică sistemului închis.

Exemplul 3: Să se determine domeniul de stabilitate al sistemului din figură în planul $\langle K_R, T_I \rangle$ al parametrilor regulatorului, având în vedere că $K_R, T_I > 0$.



Soluție: Sistemul are ordinul $n = 3$. Pentru canalul $w \rightarrow y$ avem f.d.t.

$$H(s) = \frac{K_R(1 + \frac{1}{T_I s}) \frac{10}{5s^2 + 2s + 1}}{1 + K_R(1 + \frac{1}{T_I s}) \frac{10}{5s^2 + 2s + 1}} = \dots = \frac{10(K_R T_I s + K_R)}{5T_I s^3 + 2T_I s^2 + T_I(1 + 10K_R)s + 10K_R}.$$

Polinomul caracteristic îl vom folosi sub forma $\mu(s) = s^3 + 0.4s^2 + 0.2(1+10K_R)s + 2\frac{K_R}{T_I}$.

Deoarece $K_R > 0$, $T_I > 0 \Rightarrow$ coeficienții polinomului sunt strict pozitivi \Rightarrow prima condiție a criteriului Hurwitz este îndeplinită. Pentru a investiga a doua condiție calculăm:

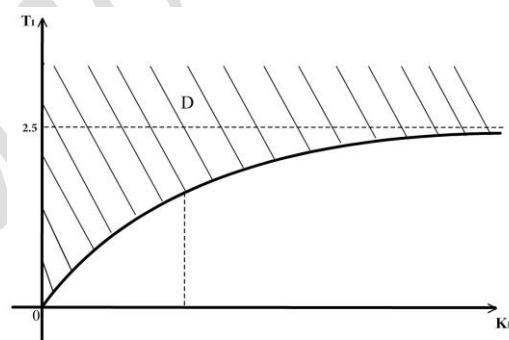
$$H_3 = \begin{vmatrix} 0.4 & 2\frac{K_R}{T_I} & 0 \\ 1 & 0.2(1+10K_R) & 0 \\ 0 & 0.4 & \frac{2K_R}{T_I} \end{vmatrix} \Rightarrow H_1 = |0.4| = 0.4 > 0, H_2 = \begin{vmatrix} 0.4 & \frac{2K_R}{T_I} \\ 1 & 0.2(1+10K_R) \end{vmatrix}, H_3 = \frac{2K_R}{T_I} H_2.$$

Deci, pentru ca sistemul să fie asimptotic stabil este necesar și suficient să avem $H_2 = 0.08(1+10K_R) - \frac{2K_R}{T_I} > 0$ sau

$$0.08(1+10K_R) - \frac{2K_R}{T_I} > 0 \Rightarrow 0.08(1+10K_R) > \frac{2K_R}{T_I} \Rightarrow T_I > \frac{K_R}{0.08(1+10K_R)} = \frac{25K_R}{1+10K_R}.$$

Notăm $f(K_R) = \frac{25K_R}{1+10K_R}$. Funcția f are graficul din figură: un arc de hiperbolă.

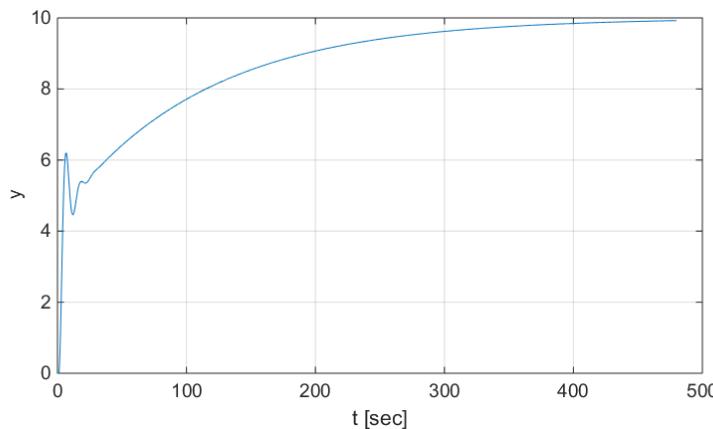
Domeniul de stabilitate este domeniul în care este îndeplinită condiția $T_I > \frac{25K_R}{1+10K_R}$. El este reprezentat hașurat și notat cu D.



Observație:

Analiza stabilității unui sistem reprezintă, de regulă, doar o parte a unei probleme de sinteză a unui sistem de conducere. În această ordine de idei analiza stabilității sistemului de mai sus este inclusă în problema de sinteză a regulatorului, problema având ca obiectiv determinarea parametrilor K_R și T_I ai regulatorului PI. Problema poate fi soluționată pe mai multe căi. În continuare prezentăm etapizat una dintre ele.

- Având în vedere că procesul condus are polinomul caracteristic $\mu_P(s) = 5s^2 + 2s + 1$, deci o amortizare de $\zeta_P = 0.447$ impunem pentru polinomul caracteristic al sistemului de reglare forma $\mu(s) = (s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n s + \omega_n^2) \cdot (s + \omega_a)$ cu $\zeta = 0.8$. Această formă asigură un pol real și doi poli complecsi conjugăți stabili.
- Coeficienții celor două expresii ale polinomului caracteristic al sistemului de reglare $\mu(s)$ trebuie să fie identici, rezultă egalitățile $1.6 \cdot \omega_n + \omega_a = 0.4$, $\omega_n^2 + 1.6 \cdot \omega_n = 0.2(1+10K_R)$ și $\omega_n^2 \cdot \omega_a = 2\frac{K_R}{T_I}$.
- Pe baza primei egalități adoptăm $\omega_n = 0.2 \text{ sec}^{-1}$, $\omega_a = 0.08 \text{ sec}^{-1}$. Atunci, din a doua egalitate se obține $K_R = 0.08$, iar din a treia $T_I = 50 \text{ sec}$. Valorile lui K_R și T_I corespund unui punct din domeniul de stabilitate.
- În figură este ilustrat răspunsul sistemului la un semnal treptă $w(t)$ cu amplitudinea de 10 unități. Intervalul de timp considerat este de 480 secunde (este vorba de un proces lent).



- Dacă rezultatul nu convine, problema se reia cu adoptarea valorilor ω_n, ω_a .

4.2. Criteriul de stabilitate Jury

Este un criteriu algebric de stabilitate pentru STD liniare având polinomul caracteristic.

$$\mu(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0. \quad (12)$$

Aplicarea criteriului constă în verificarea satisfacerii mai multor inegalități dintre care o parte se referă la cantități generate cu ajutorul aşa-numitei *scheme a lui Jury*. Schema are aspectul:

[J]	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n	perechea de linii i=1
$b_1 = a_0/a_n$	a_n	a_{n-1}	...	a_1	a_0	
	j_{31}	j_{32}	...	j_{3n}		perechea de linii i=2
$b_2 = j_{31}/j_{3n}$	j_{3n}	$j_{3,n-1}$...	j_{31}		
...		

- i) Schema are n perechi de linii. Elementul de pe linia k și coloana ℓ se notează cu $j_{k\ell}$.
- ii) Fiecare pereche de linii se caracterizează prin faptul că cea de a doua linie a perechii o reproduce pe prima în ordine inversă.
- iii) Prima linie a primei perechi de linii conține coeficienții lui $\mu(z)$ în ordinea crescătoare a indicelui.
- iv) Fiecarei perechi de linii i se asociază pe a doua linie un coeficient b_i , trecut în stânga barei, calculat cu relația $b_i = \frac{j_{2i-1,1}}{j_{2i,1}}$. Coeficienții b_1, b_2, \dots se numesc *coeficienți Jury* (coloana [J]).
- v) Începând cu perechea a doua de linii, prima linie a fiecărei perechi de linii i se calculează în funcție de elementele perechii de linii anterioare $i-1$ cu formula

$$j_{2i-1,\ell} = j_{2(i-1)-1,\ell+1} - b_{i-1} \cdot j_{2(i-1),\ell+1}, \ell = 1; \varsigma - 1, \quad (13)$$

în care ς este numărul elementelor de pe o linie a perechii de linii $i-1$.

Criteriul de stabilitate Jury are următorul enunț:

Un sistemul liniar invariant în timp cu polinomul caracteristic (13) este intern asimptotic stabil dacă și numai dacă toți coeficienții Jury sunt în modul subunitari, adică

$$|b_i| < 1, i = 1; n. \quad (14)$$

De observat că relația (14) conține n duble inegalități, adică $2n$ inegalități simple:

$$|b_i| < 1, i = 1; n \Rightarrow -1 < b_i < 1, i = 1; n.$$

Un al doilea enunț, cunoscut sub denumirea de *varianta simplificată a criteriului Jury*, utilizează aşa-numita *schemă Jury redusă*, care diferă de schema Jury de mai sus prin absența ultimei perechi de linii. Pentru acest caz, când schema are numai $n-1$ perechi de linii, este valabil următorul enunț:

Un sistemul liniar invariant în timp, având polinomul caracteristic (13), este intern asimptotic stabil dacă și numai dacă sunt satisfăcute condițiile:

$$\mu(1) > 0, (-1)^n \mu(-1) > 0, |b_i| < 1, i = 1; n-1. \quad (15)$$

Și de data aceasta avem în total tot $2n$ inegalități simple.

Exemplul 1: Să se analizeze stabilitatea unui sistem cu $\mu(z) = z^2 - 0.36z + 0.5$.

Soluție: i) $\mu(1) = 1 - 0.36 + 0.5 > 0$; ii) $(-1)^2 \mu(-1) = 1 + 0.36 - 0.5 > 0$; iii) Schema Jury este

[J]			
-	0.5	-0.36	1
$b_2 = 0.5$	1	-0.36	0.5

Deoarece $|b_2| = 0.5 < 1 \Rightarrow$ sistemul este asimptotic stabil.

Exemplul 2: Să se analizeze stabilitatea sistemului: $\begin{cases} x[t+1] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0.5 \\ 0 & -2 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot x[t] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u[t] \\ y[t] = [1 \ 2 \ 0] \cdot x[t] \end{cases}$

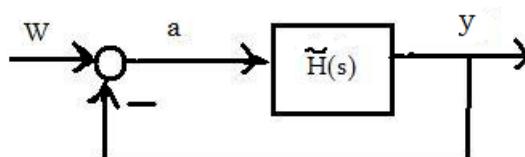
Soluție: $\mu(z) = \begin{vmatrix} z+1 & 0 & -2 \\ -1 & z+1 & -0.5 \\ 0 & 2 & z-0.5 \end{vmatrix} = (z+1)^2(z-0.5) + 4 + (z+1) = z^3 + 1.5z^2 + z + 4.5$.

Deci: i) $\mu(1) = 1 + 1.5 + 4.5 > 0$, ii) $(-1)^3 \mu(-1) = -(-1 + 1.5 - 1 + 4.5) < 0 \Rightarrow$ sistemul este instabil.

4.3. Criteriul de rezervei de fază

Criteriul rezervei de fază este o variantă a criteriului de stabilitate al lui Nyquist. Ambele criterii se referă la

structura cu reacție unitară negativă din figura următoare pentru care $H(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{1 + \tilde{H}(s)}$.



În aplicarea criteriului rezervei de fază se folosesc caracteristicile Bode ale sistemului deschis. Presupunem că acestea au aspectul din figura de mai jos.

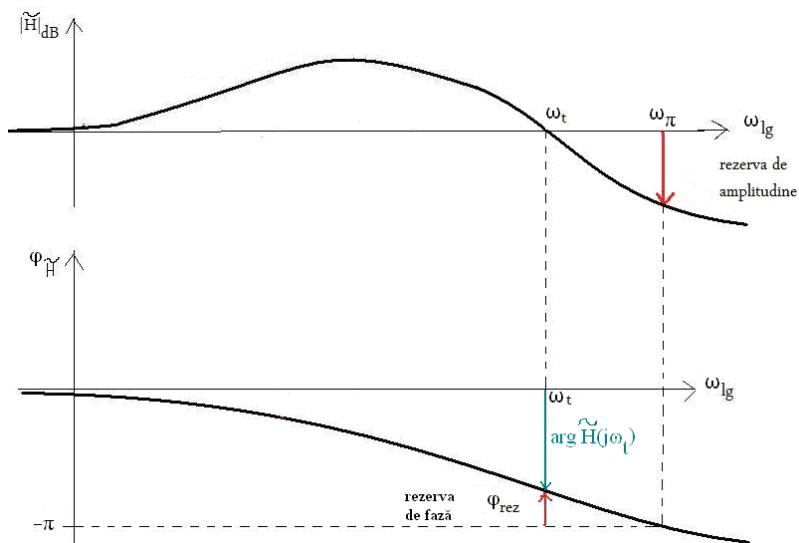


Figura introduce următoarele mărimi:

ω_t (pulsăția de trecere sau de tăiere) - este pulsăția pentru care $|\tilde{H}(j\omega)| = 1$ sau $|\tilde{H}|_{dB} = 0$;

φ_{rez} - rezerva de fază, $\varphi_{rez} = \pi + \arg(\tilde{H}(j\omega_t))$.

Criteriul rezervei de fază se referă la cazul când $\tilde{H}(s)$ este de forma

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{K}}{s^q} \cdot \frac{1 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \dots + a_{n-q} s^{n-q}} \cdot e^{-\tau s} \quad (16)$$

cu $\tilde{K} > 0$, $q \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m < n$, $\tau \geq 0$, $1 + b_1 s + \dots + b_m s^m$ și $1 + a_1 s + \dots + a_{n-q} s^{n-q}$ polinoame Hurwitz coprime.

Enunțul criteriului rezervei de fază este următorul:

Sistemul în circuit închis cu reacție unitară negativă având funcția de transfer a sistemului deschis de forma

(16) este asimptotic stabil dacă și numai dacă este îndeplinită condiția:

$$\varphi_{rez} > 0^5. \quad (17)$$

În practică trebuie să ne asigurăm față de impreciziile de determinare a lui $\tilde{H}(s)$. Acest lucru se face prin modificarea membrului drept din relația (17) sub forma:

$$\varphi_{rez} > \frac{\pi}{9}. \quad (18)$$

⁵ Aplicând criteriul pentru situația de la pag. 156 rezultă că sistemul este asimptotic stabil.

§ 4.4 Accesibilitatea și controlabilitatea sistemelor

1. Conceptul de controlabilitate

Din punct de vedere aplicativ este important ca un sistem să poată fi adus *pe parcursul unui interval de timp finit*, printr-o variație în timp adecvată a mărimii de comandă, dintr-o stare inițială dată într-o stare finală dorită. Acestei cerințe îi corespunde proprietatea structurală denumită *controlabilitate*. În esență satisfacerea unei astfel de cerințe garantează posibilitatea tranzitării sistemului, prin comandă, de la un regim de funcționare la alt regim de funcționare.

Definiții (se consideră un sistem cu orientarea $u \rightarrow x$ (intrare → stare)) :

1. Spunem că ***o stare inițială x_0 este controlabilă*** dacă există o funcție de intrare $u(\cdot)$ astfel încât prin aplicarea ei sistemul ajunge într-un interval de timp finit în starea de repaus $x_f = 0$. (Aceasta înseamnă că în urma aplicării lui $u(\cdot)$ sistemul trece din starea x_0 în starea $x_f = 0$).
2. Dacă orice stare x_0 este controlabilă în sensul definiției anterioare spunem că ***sistemul este controlabil***.
3. Spunem că ***o stare finală x_f este accesibilă*** dacă există o funcție de intrare $u(\cdot)$ prin aplicarea căreia sistemul este adus într-un interval de timp finit din starea inițială de repaus $x_0 = 0$ în starea finală x_f . (Aceasta înseamnă că în urma aplicării lui $u(\cdot)$ sistemul trece din starea $x_0 = 0$ în starea x_f).
4. Dacă orice stare finală este accesibilă spunem că ***sistemul este accesibil***.

Pentru *sistemele în timp continuu* proprietățile 1 și 3, respectiv 2 și 4, sunt echivalente.

Notă: Plecând de la această echivalență, inițial, s-a răspândit termenul de *controlabilitate*, iar în general se vorbește despre *controlabilitatea sistemelor*.

Pentru *sistemele în timp discret* echivalența nu este, teoretic, general valabilă. În situațiile practice ea se verifică însă.

Aprecierea controlabilității unui sistem se face prin intermediul **criteriilor de controlabilitate**. Ele reprezintă algoritmi de calcul care consemnează controlabilitatea în sensul definițiilor de mai sus prin verificarea îndeplinirii anumitor condiții (referitoare la rangul unei matrice sau la ordinul unei funcții de transfer). Dacă răspunsul este afirmativ, sistemul este controlabil. În caz contrar sistemul este necontrolabil.

2. Criteriul de controlabilitate al lui Kálmán

Considerăm sistemul liniar¹

$$x' = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (1)$$

Cu matricele A și B din (1) definim următoarea matrice de tipul (n, mn):

$$M_c = [B : AB : \cdots : A^{n-1}B],^2 \quad (2)$$

¹ Se observă că operăm cu modele cu variabilă unificată. Ca urmare enunțul criteriului se referă simultan atât la STC cât și la STD.

numită **matrice de controlabilitate** a sistemului (1). Pentru sistemul (1), prin impunerea proprietății de controlabilitate se ajunge la următorul enunț cunoscut sub de numele de **criteriul de controlabilitate al lui Kalman**:

Sistemul liniar (1) este controlabil dacă și numai dacă rangul matricei de controlabilitate este egal cu ordinul sistemului

$$\text{rang } M_c = n . \quad (3)$$

Pentru sistemele monovariabile la intrare, când $m=1$, deci M_c este o matrice pătrată de tipul (n,n) , echivalent condiției (3) avem:

$$\det M_c \neq 0 . \quad (3')$$

Exemplul 1: Să se analizeze controlabilitatea sistemului:

$$\mathbf{x}[t+1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}[t] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u[t] . \quad (4)$$

Soluție: Din (4) rezultă:

$$n = 2, \quad M_c = [b \mid Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det M_c = 0, \quad \text{rang } M_c = 1 < 2 = n$$

Deci sistemul nu este controlabil.

Exemplul 2: Să se analizeze controlabilitatea sistemului de poziționare:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5h^2 \\ h \end{bmatrix} \cdot u[t] \\ \begin{bmatrix} y_1[t] \\ y_2[t] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

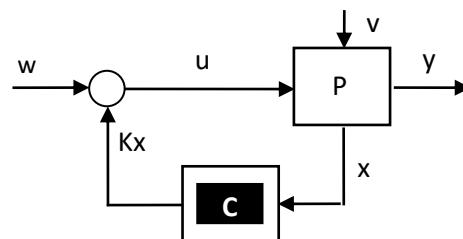
Soluție: Din (5) rezultă: $n=2, \quad M_c = \begin{bmatrix} 0.5h^2 & 1.5h^2 \\ h & h \end{bmatrix}, \det M_c = -h^3 \neq 0$. Deci rang $M_c = 2$. Deci sistemul de poziționare este controlabil.

Observație:

Analiza controlabilității, la fel ca și analiza stabilității, este parte a sintezei unui sistem de conducere. În acest context proiectării unui sistem de conducere se utilizată următorul rezultat cunoscut sub denumirea de **teorema alocării** (v. figura alăturată):

„**Polii unui sistem închis rezultat prin reacție după starea unui proces controlabil sunt alocabili.**”

Potrivit acestei teoreme, dacă procesul P din figură este de ordinul n și este controlabil, atunci sistemului în circuit închis i se pot impune n poli, alocabili după dorință prin reacția după stare $u = Kx$, unde K este matricea (cu amplificările) compensatorului C . Matricea K se obține prin simple calcule algebrice după poziționarea (allocarea) polilor sistemului închis astfel încât acesta să fie stabil și să aibă o dinamică favorabilă.



² Matricea M_c este o matrice celulară. Simbolurile : sau | servesc ca separatoare pentru delimitarea (în scris a) celulelor. Așadar, lângă prima celulă B , se pune a doua celulă AB , apoi celula A^2B și.a.m.d.

De exemplu, pentru procesul (5) se consideră $K = [k_1 \ k_2]$, $u = K \cdot x + w = [k_1 \ k_2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + w = k_1 x_1 + k_2 x_2 + w$.

Înlocuind pe u în (5) se obțin următoarele ecuații de stare ale sistemului închis:

$$\begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0.5h^2 k_1 & h + 0.5h^2 k_2 \\ h \cdot k_1 & 1 + h \cdot k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5h^2 \\ h \end{bmatrix} \cdot w[t].$$

Lor le corespunde polinomul caracteristic:

$$\mu(z) = \begin{vmatrix} z - 1 - 0.5h^2 k_1 & -h - 0.5h^2 k_2 \\ -h \cdot k_1 & z - 1 - h \cdot k_2 \end{vmatrix} = z^2 - (2 + 0.5h^2 k_1 + h \cdot k_2) \cdot z + 1 - 0.5h^2 k_1 + h \cdot k_2$$

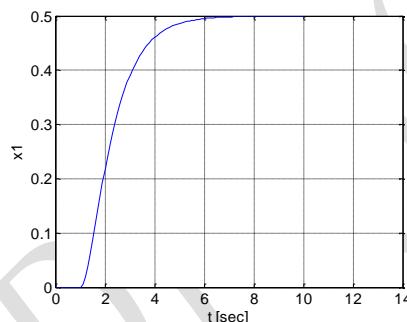
Presupunem că impunem sistemului închis polii $z_1 = 0.8$ și $z_2 = 0.9$, respectiv polinomul caracteristic $\mu(z) = (z - 0.8) \cdot (z - 0.9) = z^2 - 1.7 \cdot z + 0.72$. Această alocare asigură atât stabilitate cât și un timp de reglare bun.

Egalând cele două expresii ale lui $\mu(z)$ obținem sistemul $\begin{cases} 2 + 0.5h^2 k_1 + h \cdot k_2 = 1.7 \\ 1 - 0.5h^2 k_1 + h \cdot k_2 = 0.72 \end{cases}$, respectiv amplificările

$$\begin{cases} k_1 = -0.02/h^2 \\ k_2 = -0.29/h \end{cases}$$

Presupunem că $h = 0.1$ sec. Deci $k_1 = -2$, $k_2 = -2.9$. În figură este reprezentat răspunsul sistemului,

$x_1(t)$, la semnal treaptă unitate.



Implementarea este realizată potrivit schemei bloc din Fig. 1 de la pag. 117.

3. Alte criterii de controlabilitate

- Criteriul lui Kalman se referă la controlabilitatea ansamblului mărimilor de stare ale sistemului, fără a furniza informații despre controlabilitatea fiecărei stări. Se știe că orice sistem poate fi adus printr-o transformare de stare adecvată la forma de realizare standard diagonală. Prin această transformare, mărimile de stare ale oricărei alte realizări sistemic sunt descompuse sub formă de combinații liniare ale mărimilor de stare ale realizării standard diagonale. Funcțiile care descriu variațiile în raport cu timpul ale variabilelor de stare ale realizării standard diagonale sunt numite *moduri ale sistemului*, iar variabilele de stare cărora le corespund sunt numite *variabile de stare modale*. În acest context controlabilitatea stării unui sistem liniar luând în considerare, separat, fiecare dintre variabilele de stare modale este **criteriul de controlabilitate al lui Hautus**:

Sistemul $x' = Ax + Bu$, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ este controlabil dacă și numai dacă orice valoare proprie λ_i a matricei A satisface condiția:

$$\text{rang}[\lambda_i I - A : B] = n, \quad \forall \lambda_i \in \sigma_A. \quad (6)$$

Relația (6) cere să se verifice pentru fiecare valoare proprie λ_i a matricei A dacă matricea alcătuită din cele două celule $\lambda_i I - A$ și B are rangul egal cu ordinul n al sistemului.

Dacă pentru o valoare proprie λ_i rezultă că rang $[\lambda_i I - A] < n$, atunci modul $e^{t\lambda_i}$ (la STC) sau modul λ_i^t (la STD) nu este influențabil prin mărimea de intrare $u(\cdot)$ iar sistemul nu este controlabil.

- Pentru sisteme liniare de tip SISO plecând de la criteriul lui Kalman se poate ajunge la un criteriu de controlabilitate al mărimii de ieșire³ (**criteriul lui Gilbert**):

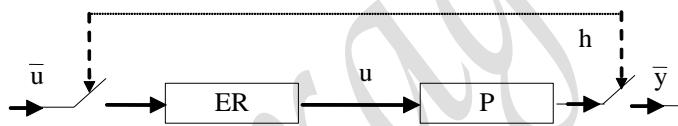
Un sistem de tip SISO, de funcție de transfer $H(\lambda)$, are ieșirea controlabilă dacă și numai dacă după efectuarea tuturor simplificărilor în expresia funcției de transfer gradul numitorului este egal cu ordinul sistemului.

Practic, în numeroase cazuri această condiție impune cerința ca f.d.t. a sistemului să nu permită simplificări.

4. Controlabilitatea proceselor discretizate (R.I.S.T.)

Reglarea numerică a proceselor în timp continuu se bazează pe conducerea procesului, care este un STC, de către un regulator numeric, care este un STD. În raport cu regulatorul procesul apare prin R.I.S.T (modelul discretizat). Fie $H_P(s)$ f.d.t a procesului P. În acest context se pune problema dacă operația de discretizare influențează sau nu controlabilitatea modelului discretizat al procesului redat prin f.d.t. $H_P(z)$.

Atunci când am prezentat metoda R.I.S.T. am considerat structura de mai jos (v. Fig. 5, pag. 120):



Răspunsul la întrebarea pusă este:

Ansamblul din figură, având pe \bar{u} mărime de intrare și \bar{y} mărime de ieșire, este controlabil dacă:

i) procesul P în timp continuu este controlabil

ii) oricare ar fi p_i și p_k poli distincți ai funcției de transfer $H_P(s)$ a lui P, este îndeplinită condiția

$$e^{p_i \cdot h} \neq e^{p_k \cdot h}.^4 \quad (7)$$

Potrivit condiției ii) controlabilitatea poate să depindă de valoarea pasului de discretizare h . În adevăr, fie p_i și p_k doi poli complex conjugăți $p_{i,k} = \sigma_i \mp j\omega_i$ ai lui P. Atunci $e^{p_i h} - e^{p_k h} = e^{(\sigma_i - j\omega_i)h} \cdot (1 - e^{j2\omega_i h})$. Diferența este nulă numai dacă $2\omega_i h = 2q\pi$, $q \in \mathbb{N}^*$. Deci, dacă $h = q \frac{\pi}{\omega_i}$, $q \in \mathbb{N}^*$, sistemul în timp discret nu este controlabil. Ca

urmăre, pentru h este interzisă adoptarea valorilor $\frac{\pi}{\omega_i}$ și a multiplilor acestora. Altfel spus, h se adoptă astfel încât:

$$h \neq q \cdot \frac{\pi}{\omega_i}, \quad q \in \mathbb{N}^*. \quad (8)$$

³ Controlabilitatea ieșirii se definește în aceeași manieră ca și controlabilitatea stării.

⁴ Polii sistemului sunt totodată și valori proprii ale polinomului caracteristic al sistemului, adică $p_i = \lambda_i$. În acest context se observă că (7) este în esență tot o condiție modală.

Exemplu: Fie sistemul (P) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}u \\ y = [1 \ 0]x \end{cases}$. Să se analizeze controlabilitatea sistemului P și a sistemului discret asociat lui ca r.i.s.t.

Soluție: Pentru început rezolvăm problema aplicând criteriul lui Kalman sub forma (3). Calculând matricea de controlabilitate pentru sistemul în timp continuu obținem rang $M_C = 2$. Deci sistemul P este controlabil, condiția i) fiind îndeplinită.

Din MM-ISI al sistemului rezultă că funcția sa de transfer este $H(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}$. Ea are polii $p_{1,2} = \mp j\omega$, ceea ce înseamnă că sistemul este de tip oscilant neamortizat (o pereche de poli pur imaginari de pulsărie $\omega \text{ sec}^{-1}$). Într-adevăr, modelul lui

P este modelul unui oscilator armonic. Aplicând condiția (7) rezultă $h \neq q \cdot \frac{\pi}{\omega}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

Reluăm rezolvarea problemei⁵ folosind r.i.s.t. asociată sistemului dat.

R.i.s.t. a sistemului P pentru un pas de discretizare h este:

$$\begin{cases} x[t+1] = \begin{bmatrix} \cos \omega h & \sin \omega h \\ -\sin \omega h & \cos \omega h \end{bmatrix} \cdot x[t] + \begin{bmatrix} 1 - \cos \omega h \\ \sin \omega h \end{bmatrix} \cdot u[t] \\ y[t] = [0 \ 1] \cdot x[t] \end{cases}$$

Pentru acest sistem: $M_c = [b / Ab] = \begin{bmatrix} 1 - \cos \omega h & \cos \omega h - \cos 2\omega h \\ \sin \omega h & \sin 2\omega h - \sin \omega h \end{bmatrix}$, det $M_c = 2 \sin \omega h (1 - \cos \omega h)$. Aplicând criteriul lui Kalman sub forma (3') deducem că sistemul este controlabil pentru orice valoare a lui h care satisface condițiile $\begin{cases} \sin \omega h \neq 0 \\ \cos \omega h \neq 1 \end{cases}$. În consecință, sistemul nu este controlabil pentru valorile lui h care satisfac egalitățile $\omega h = q\pi$, $q \in \mathbb{N}^* \Rightarrow h = q \frac{\pi}{\omega}$, $q \in \mathbb{N}^*$. Regăsim astfel rezultat obținut prin aplicarea criteriului prezentat în această secțiune.

§ 4.5. Observabilitatea sistemelor

1. Conceptul de observabilitate

Prin definiție, ieșirea y și intrarea u , ultima cu rol de mărimi de comandă, ale unui proces sunt măsurabile. În afara lor ne poate interesa și măsurarea altor mărimi din proces, în particular măsurarea mărimilor de stare x cu ajutorul căror se poate apoi exprima orice altă mărime din proces.

O situație tipică este cea în care ne interesă măsurarea mărimilor de stare cu scopul de a le utiliza pentru conducerea procesului prin "reacție după stare". Dacă mărimile de stare nu pot fi măsurate nemijlocit atunci avem nevoie de un sistem care să le măsoare indirect. Un astfel de sistem poartă numele de *estimator de stare*.

Observație: În mod obișnuit, în cazul determinist estimatoarele sunt numite *observatoare*, iar în cazul stocastic *filtre*.

⁵ Această parte poate fi considerată ca exercițiu recapitulativ.

În contextul celor mai sus menționate apare problema determinării vectorului de stare al unui sistem prin măsurători indirecte efectuate asupra lui y și u . Răspunsul este dat de aşa-numita *proprietate de observabilitate*. Dacă sistemul este observabil atunci, teoretic, pentru determinarea stării poate fi conceput un algoritm de calcul denumit estimator. În cele ce urmează ne referim numai la problema observabilității, problema sintezei unui estimator tratându-se la alte discipline.

Pentru început considerăm sistemul în timp discret de ordinul n :

$$\begin{cases} \dot{x}[t+1] = Ax[t] + Bu[t] \\ y[t] = Cx[t] \end{cases}. \quad (1)$$

Presupunem că sistemul se găsește într-o stare inițială $x[0]=x_0$.

Definiția 1: Spunem că o stare inițială $x[0] = x_0$ a sistemului (1) de ordin n nu este observabilă atunci când aplicându-i sistemului aflat în această stare inițială semnalul de intrare $u[t] = 0$, $t \geq 0$, până la momentul $n-1$ inclusiv, la ieșire se obține $y[t] = 0$ pentru $t < n-1$.

Conform acestei definiții starea x_0 nu este observabilă (stare neobservabilă) atunci când, în condițiile unei intrări nule, urmărind mărimea de ieșire pe un număr de pași cel puțin egal cu ordinul sistemului se constată că starea inițială a sistemului x_0 nu influențează ieșirea („nu se vede” în mărimea de ieșire), aceasta fiind permanent nulă.

Definiția 2: Dacă $x_0 = 0$ este singura stare neobservabilă spunem că *sistemul (1) este observabil*.

2. Criteriul de observabilitate al lui Kálmán

Matematic, faptul că o stare x_0 nu este observabilă se interpretează prin imposibilitatea determinării ei pe baza ecuațiilor sistemului din înregistrări ale variabilelor de intrare și de ieșire. Investigarea din această perspectivă a sistemului (1), precum și a sistemului în timp continuu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases} \quad (2)$$

a condus la rezultatul prezentat în continuare.

Fie matricea

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ CA \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ea se numește *matricea de observabilitate a sistemului* (1). Pentru sistemele (1) și (2) este valabil următorul enunț cunoscut sub denumirea de *criteriul de observabilitate al lui Kalman*:

Sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}' = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \quad (4)$$

este observabil atunci și numai atunci când

$$\text{rang } M_0 = n. \quad (5)$$

În cazul când $p = 1$, sistemul (4) având o singură mărime de ieșire, M_0 este o matrice pătratică iar condiția rang $M_0 = n$ poate fi înlocuită prin condiția

$$\det M_0 \neq 0. \quad (6)$$

Mulțimea stărilor neobservabile ale sistemului (4) este dată de nucleul matricei de observabilitate

$$\text{Ker } M_0 = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid M_0 x_0 = 0 \right\}. \quad (7)$$

Exemplu: Să se analizeze observabilitatea sistemului

$$\begin{cases} x[t+1] = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x[t] + bu[t] \\ y[t] = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \end{bmatrix} x[t] \end{cases}$$

și să se precizeze dacă stările

$$x_{00} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_{01} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad x_{02} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{03} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

sunt observabile.

Soluție:

$$M_0 = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0.6 & -0.3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det M_0 = 0 \Rightarrow \text{rang } M_0 = 1 < n$$

Deci sistemul nu este observabil. Determinăm nucleul matricei de observabilitate rezolvând sistemul nedeterminat

$$M_0 x_0 = 0, \text{ adică sistemul } \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0.6 & -0.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Soluția sistemului este dată de ecuația } x_{10} - 0.5 \cdot x_{20} = 0, \text{ fiind}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Deci $\text{Ker } M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Mulțimea conține punctele dreptei $x_{20}=2 \cdot x_{10}$ pe care se găsește și starea de repaus (se obține considerând $a = 0$).

Comparând x_0 din (8) cu fiecare din cele 4 stări precizate în enunț conchidem:

 $x_{00} \in \text{Ker } M_0$ (x_{00} se obține pentru $a = 0.5$), deci starea este x_{00} este neobservabilă;

$x_{01}, x_{02}, x_{03} \notin \text{Ker } M_0$, reprezentând stări observabile.

3. Alte criterii de observabilitate

În afara criteriului de observabilitate al lui Kalman se utilizează și alte criterii de observabilitate care evidențiază, simultan și alte proprietăți.

- Unul dintre acestea este **criteriul de observabilitate al lui Hautus**, conform căruia:

Sistemul $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, având valorile proprii $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, este observabil atunci și

numai atunci când

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda_i I \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda_i \in \sigma_A. \quad (9)$$

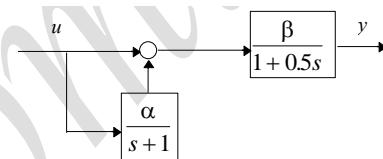
Fiecarei valori proprii λ_i pentru care condiția de rang (9) nu este îndeplinită îi corespunde în sistem un mod neobservabil.

- În altă ordine de idei, pentru sistemele de tip SISO aspectul funcției de transfer poate să fie un indiciu și pentru o eventuală pierdere a proprietății de observabilitate. Astfel:

Dacă în urma aducerii funcției de transfer a unui sistem de ordin n la o formă ireductibilă gradul numitorului este egal cu n, atunci sistemul este observabil (criteriul de observabilitate al lui Gilbert).

Temă:

Să se analizeze controlabilitatea și observabilitatea sistemului din figură în funcție de parametrii α și $\beta > 0$.



4. Observabilitatea proceselor discretizate (r.i.s.t.)

La fel ca în cazul controlabilității, discretizarea unui sistem în timp continuu poate să afecteze și observabilitatea. În acest context este valabilă următoarea teoremă:

Sistemul în timp discret obținut ca r.i.s.t. dintr-un sistem în timp continuu cu f.d.t. H(s) este observabil dacă :

i) *sistemul în timp continuu este observabil ;*

ii) *oricare ar fi p_i și p_k poli distincți ai funcției de transfer $H(s)$ este îndeplinită condiția $e^{p_i \cdot h} \neq e^{p_k \cdot h}$.*

Ca aplicație considerăm și de această dată cazul oscillatorului armonic studiat la sfârșitul paragrafului anterior din punctul de vedere al controlabilității. Analizăm observabilitatea lui prin două metode.

i) *Matricea de observabilitate a sistemului discretizat fiind* $M_0 = \begin{bmatrix} C^T \\ C^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \omega h & \sin \omega h \end{bmatrix}$, *rezultă că*

$\det M_0 = \sin \omega h$. *Sistemul nu este observabil pentru valorile $h > 0$ pentru care*

$$\sin \omega h = 0, \text{ deci } h\omega = q\pi, \quad q \in \mathbb{N}^* \Rightarrow h = q \frac{\pi}{\omega}, \quad q \in \mathbb{N}^*.$$

ii) *Sistemul în timp continuu este observabil fiind îndeplinită condiția i) din ultimul enunț. Întrucât condiția ii), $e^{p_i \cdot h} \neq e^{p_k \cdot h}$, conduce la același rezultat ca și în cazul controlabilității (v. sfârșitul paragrafului referitor la controlabilitate) rezultă*

$$h\omega = q\pi, \quad q \in \mathbb{N}^* \Rightarrow h = q \frac{\pi}{\omega}, \quad q \in \mathbb{N}^*.$$

După cum era de așteptat, am regăsit rezultatul de la punctul i).