

## Seminar 2: Dinamica punctului material si a sistemelor de puncta materiale

### Teoreme si legi de conservare

#### I. Întrebări cu răspunsuri multiple

1. O barcă de masă  $m$  întâmpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei, cu constanta de proporționalitate  $k$ .

După cât timp viteza inițială  $v_0$  se micșorează de  $n$  ori?

a)  $t = \frac{mn}{kv_0}$ ;      b)  $t = \frac{m(n-1)}{kv_0}$ ;      c)  $t = \frac{mk}{v_0(n-1)}$ ;      d)  $t = \frac{m}{kv_0(n-1)}$ ;

e)  $t = \frac{mn}{kv(n-1)}$ ;      f) nici un răspuns nu este corect.

$$R : F = -kv^2 = m \, dv/dt; \quad dv/v^2 = -\frac{k}{m} \cdot dt$$

$$\int_{v_0}^{\frac{v_0}{n}} \frac{m}{v^2} dv = -\int_0^t k dt \quad ; \quad m \left( \frac{n}{v_0} - \frac{1}{v_0} \right) = kt$$

$$t = \frac{m(n-1)}{kv_0}$$

2. Care din următoarele propoziții ce implică lucrul mecanic sunt adevărate?

- a) Lucrul mecanic este o mărime vectorială și se măsoară în N;
- b) Lucrul mecanic este o mărime scalară și se măsoară în J;
- c) Lucrul mecanic al forței gravitaționale care acționează asupra unui corp aflat în ridicare este negativ;
- d) Lucrul mecanic al unei forțe care ridică vertical un corp este pozitiv;
- e) Dacă un corp se mișcă pe o traiectorie circulară, lucrul mecanic al forței centripete este nul;
- f) Atunci când un corp alunecă pe o suprafață orizontală fixă, lucrul mecanic al forței de frecare care se exercită asupra corpului este pozitiv.

3. Teorema momentului cinetic se poate scrie:

$$\begin{aligned}
 a) \quad d\vec{J} &= d(\vec{r} \times \vec{p}); & b) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{J}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\vec{r} \times \vec{p})}{\Delta t}; \\
 c) \quad \frac{d\vec{J}}{dt} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}; & d) \quad \vec{M} &= d\vec{J}/dt; \\
 e) \text{ dacă } \vec{M} &= \vec{C} \text{ (} \vec{C} \text{ - o constantă vectorială), atunci } \vec{J} &= 0; & f) \quad \frac{d\vec{J}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}.
 \end{aligned}$$

### Probleme rezolvate pri metoda explicativa

1. Un corp de masă  $m=2$  kg este plasat pe suprafața Pământului. Asupra sa acționează pe verticală în sus o forță  $F=100$  N. Știind că  $g=10$  m/s<sup>2</sup>, să se calculeze:

- acceleerația și viteza corpului după parcurgerea distanței de 10 m;
- energia cinetică și energia potențială a corpului după parcurgerea acestei distanțe;
- variația energiei cinetice, potențiale și totale pe această distanță;
- precizați forțele care acționează și natura lor, apoi calculați lucrul mecanic efectuat de fiecare;
- verificați teoremele variației energiei cinetice, energiei potențiale și totale pentru acest caz.

Rezolvare:

$$a) F-G=ma; v^2=2ad; a=40 \text{ m/s}^2; v=20\sqrt{2} \text{ m/s};$$

$$b) E_c = \frac{mv^2}{2}; E_p = mgh$$

$$E_c=800J; E_p=200J;$$

c)  $\Delta E_c=800$  J;  $\Delta E_p=200$  J;  $\Delta E_t=1000$  J; d)  $F$ -neconservativă (tracțiune);  $G$ -conservativă;  $F-G$  – rezultanta;  $L_F=1000$  J;  $L_G=-200$  J;  $L_{F-G}=800$  J; e)  $L_{F-G}=\Delta E_c$ ;  $L_G=-\Delta U$ ;  $L_F=\Delta E_t$ .

2. Vectorul de poziție al unui corp cu masa de 2 kg este:

$$\vec{r} = (3t^2 - 6t)\vec{i} - 4t^3\vec{j} + (3t + 2)\vec{k} \text{ (m)}.$$

Să se găsească:

- 1) forța care acționează asupra corpului;
- 2) momentului forței,  $\vec{M} = \vec{f}(t)$ , față de originea axelor;
- 3) impulsul și momentul cinetic,  $\vec{J} = \vec{f}(t)$ , față de originea axelor;
- 4) să se verifice teorema de variație a impulsului:  $d\vec{p}/dt = \vec{F}$
- 5) să se verifice teorema de variație a momentului cinetic,  $d\vec{J}/dt = \vec{M}$ ;

*Rezolvare:*

$$1) \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}; \vec{v} = \dot{\vec{r}} = (6t - 6)\vec{i} - 12t^2\vec{j} + 3\vec{k}; \quad \ddot{\vec{r}} = 6\vec{i} - 24t\vec{j}; \quad \vec{F} = 12\vec{i} - (48t)\vec{j}$$

$$2) \vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 48t(3t + 2)\vec{i} + 12(3t + 2)\vec{j} + 48t^2(-2t + 6)\vec{k};$$

$$3) \vec{p} = m\vec{v}; \quad \vec{p} = (12t - 12)\vec{i} + (-24t^2)\vec{j} + 6\vec{k}; \quad \vec{J} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$4) d\vec{p}/dt = 12\vec{i} - (48t)\vec{j} = \vec{F}.$$

5) Diferențiind în raport cu timpul rezultatul obținut la 3), se obține pentru  $\vec{M}$  aceeași expresie cu cea obținută la punctul 2).

**3.** Un corp cu masa de 1 kg se află sub acțiunea forței:  $\vec{F} = 7\vec{i} - 6\vec{j}$ .

Să se calculeze:

- 1) lucrul mecanic efectuat de forță când particula se deplasează de la originea sistemului de coordonate în punctul cu  $\vec{r} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 16\vec{k}$  (m).

- 2) puterea medie, dacă deplasarea particulei se face în 0,6 s;
- 3) energia cinetică a particulei în originea sistemului de coordonate și în punctul  $P(-3; 4; 16)$ ;
- 4) variația energiei potențiale între cele două puncte menționate.

*Rezolvare:*

$$1) L = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{-3} 7dx + \int_0^4 (-6)dy = -45J;$$

$$2) P_m = \frac{|L|}{t} = 75 \text{ W};$$

$$3) E_{C0} = \frac{mv_0^2}{2};$$

Ecuatiile cinematice ale mișcării sunt:

$$x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, y = v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, z = v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2};$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t, v_y = v_{0y} + a_y t, v_z = v_{0z} + a_z t;$$

$$a_x = \frac{F_x}{m}, a_y = \frac{F_y}{m}, a_z = \frac{F_z}{m} = 0.$$

Folosind valorile pentru coordonatele punctului P, obținem:  $v_{0x} = -7,1 \text{ m/s}$ ,  $v_{0y} = 8,46 \text{ m/s}$ ,

$$v_{0z} = 26,66 \text{ m/s de unde } v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 \cong 832,74 \text{ m}^2/\text{s}^2;$$

$$E_{C0} = \frac{mv_0^2}{2} \cong 416,37 \text{ J.}$$

$$v_x = -2,9 \text{ m/s}, v_y = 4,86 \text{ m/s}, v_z = 26,66 \text{ m/s};$$

$$E_{CP} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \cong 371,39 \text{ J.}$$

4) Deoarece lucrul mecanic nu depinde de drum,  $\Delta U = -L = 45 \text{ J}$ .

**4.** O roată de lemn în repaus este suspendată în plan vertical pe o osie orizontală. În punctul superior al roții este înfipt un cui. Spre cui, pe direcția orizontală se deplasează o bilă de plumb de masă  $m = 0,05 \text{ kg}$  și viteză  $v = 90 \text{ m/s}$ . Bila ciocnește cuiul și rămâne imobilizată pe acesta.

Calculați energia cinetică a sistemului după ciocnirea plastică cui – bilă. Momentul de inerție al roții este  $I = 0,68 \text{ kg m}^2$ . Ciocnirea este instantanee iar frecarea între roată și osie este neglijabilă. Raza medie a roții este  $R = 0,45\text{m}$ .

*Rezolvare:*

În procesul ciocnirii, momentul cinetic se conservă:

$$J_i = J_f, \quad mvR = (mR^2 + I)\omega$$

$$\omega = \frac{mvR}{mR^2 + I}; \quad \omega = 2,94 \text{ rad / s}$$

Energia cinetică a sistemului roată-bilă după ciocnire este:

$$E_{c,r-b} = \frac{1}{2}(I + mR^2)\omega^2$$

$$E_{c,r-b} = 2,98 \text{ J}$$

Energia cinetică a bilei înaintea ciocnirii este:

$$E_{c,b} = \frac{1}{2}mv^2; \quad E_{c,b} = 202,5 \text{ J.}$$

Energia pierdută sub formă de căldură este:

$$\Delta E_c = E_{c,b} - E_{c,r-b} = 199,5 \text{ J.}$$

## **Tema**

### **Intrebari cu raspunsuri multiple**

1. Vectorul de poziție al unui mobil este  $\vec{r} = 4\cos 2t \cdot \vec{i} + 2\sin 2t \cdot \vec{j}$ .

Pentru momentul la care  $2t = \pi/3$ , unghiul  $\alpha$  dintre vectorul viteză și axa  $Ox$  este dat de expresia:

- a)  $\cos \alpha = 0,96$ ;      b)  $\sin \alpha = 0,27$ ;      c)  $2\pi$ ,  
d)  $\sin \alpha = 0,86$ ;      e)  $\cos \alpha = 0,5$ ;      f)  $\tan \alpha = 0,28$ .

2. Un corp cade liber de la înălțimea  $h_0 = 30 \text{ m}$  față de sol.

Atunci, despre expresia  $\frac{1}{2}v^2(t) + g \cdot h(t)$ , ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ) se poate afirma:

- a) variază liniar cu  $t$ ;  
b) este o constantă a mișcării și are valoarea,  $C = 294,30 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ;  
c) este o constantă universală;  
d) este o mărime adimensională;

- e) este o mărime conservativă;
- f) afirmația (b) este corectă.

**3** Se știe că o mărime asociată unei axe de rotație (viteza unghiulară  $\vec{\omega}$ , momentul cinetic  $\vec{J}$ , momentul forței  $\vec{M}$ ) poate fi reprezentată printr-un vector de-a lungul axei.

Ținând cont de acest lucru, care din următoarele propoziții (relații) poate fi considerată o argumentare a afirmației făcute anterior?

- a)  $\vec{M} = I \frac{d\omega}{dt}$ , unde  $I$  este momentul de inerție al corpului rigid în raport cu axa;
- b)  $E_c = I \frac{\omega^2}{2}$ , cu  $E_c$  energia cinetică a corpului rigid care se rotește în jurul axei;
- c)  $J = I \cdot \omega$ ;
- d)  $P = M \cdot \omega / 2$ , cu  $P$  puterea dezvoltată de o forță ce rotește corpul;
- e) vectorul  $\vec{\omega}$  se modifică pentru imaginea într-o oglindă plană a unui corp aflat în rotație;
- f)  $\vec{M} = d\vec{L}/dt$ .

**4.** Un om a cărui masă este de 80 kg, se află într-un ascensor.

Forța  $F = 1024$  N reprezintă forța pe care o exercită podeaua asupra lui atunci când:

- a) ascensorul urcă cu viteză constantă;
- b) ascensorul coboară cu viteză constantă;
- c) ascensorul urcă cu o accelerație de  $3 \text{ m/s}^2$ ;
- d) ascensorul coboară cu o accelerație de  $3 \text{ m/s}^2$ ;
- e) ascensorul coboară cu o accelerație de  $2 \text{ m/s}^2$ ;
- f) cablul se rupe și cabina cade liber.

**5.** Două corpuri care se găsesc la aceeași înălțime  $h = 5$  m față de Pământ și la distanța  $x = 8$  m unul față de celălalt, sunt lansate, simultan, unul spre altul cu viteze orizontale egale cu  $10 \text{ m/s}$ .

Dacă  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , atunci:

- a) timpul scurs de la lansare până în momentul ciocnirii este  $0,4$  s;
- b) înălțimea la care se ciocnesc corpurile este  $2,8$  m;
- c) timpul scurs de la lansare până în momentul ciocnirii este  $0,8$  s;
- d) înălțimea la care se ciocnesc corpurile este  $4,2$  m;
- e) timpul scurs de la lansare până în momentul ciocnirii este  $0,2$  s;
- f) înălțimea la care se ciocnesc corpurile este  $4,8$  m.

### Probleme propuse

**1.** Un corp cu masa  $m = 0,5$  kg, se mișcă în planul orizontal  $xOy$  astfel încât vectorul său de poziție este :

$$\vec{r} = 2 \cos \omega t \cdot \vec{i} + 2 \sin \omega t \cdot \vec{j} \quad (\text{m}), \text{ cu } \omega > 0; \text{ constantă.}$$

Se cere:

- 1) să se precizeze pe ce traiectorie se va deplasa particula;
- 2) să se determine viteza particulei la un moment oarecare  $t$ ;
- 3) să se arate că forța care acționează asupra particulei este tot timpul orientată către originea sistemului de coordonate;
- 4) să se calculeze accelerația tangențială și accelerația normală într-un punct oarecare de pe traiectorie;

5) să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța care acționează asupra particulei în decurs de o perioadă;

2. Bara  $MN$  de lungime  $l = MN = 4$  m se rotește în jurul capătului  $M$  în planul orizontal  $xOy$  cu viteza unghiulară  $\omega = 16$  rad/s. Densitatea liniară a barei este dependentă de distanța  $x$  măsurată față de capătul  $M$  conform relației  $\rho = 3 + 4x + 5x^2$ . Calculați energia cinetică a barei.

3. Legea mișcării pentru un corp cu masa  $m = 0,4$  kg care se mișcă în planul orizontal este:  $\vec{r} = 5\cos 3t \cdot \vec{i} + 3\sin 3t \cdot \vec{j}$  (m). Să se calculeze energia cinetică a corpului în punctele de intersecție ale traiectoriei cu axele  $Ox$  și  $Oy$ .

4. Un corp cu masa de 2 kg este supus unei forțe care variază proporțional cu timpul  $\vec{F} = \vec{b}t$ , unde  $\vec{b}$  este un vector constant,  $|\vec{b}| = 6$  N/s. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forță în timp de 10 s, dacă corpul are o viteză inițială de 6 m/s.

**Referințe bibliografice:**

- I. LUMINOSU, NICOLINA POP, V. CHIRITOIU, M. COSTACHE , *Fizica - Teorie, Probleme, Teste*, Editura Politehnica, Timișoara, 2010.