# CIRCUITE LINIARE ȘI FILIFORME DE CURENT CONTINUU

# Teoremele lui Kirchhoff

- Problema generală a circuitelor de curent continuu constă în determinarea curenţilor din laturile reţelei şi a tensiunilor laturilor de reţea când se cunosc rezistenţele laturilor de reţea, tensiunile imprimate ale generatoarelor ideale de tensiune şi curenţii generatoarelor ideale de curent.

- Cele două teoreme ale lui Kirchhoff determină univoc comportarea reţelelor de curent continuu.

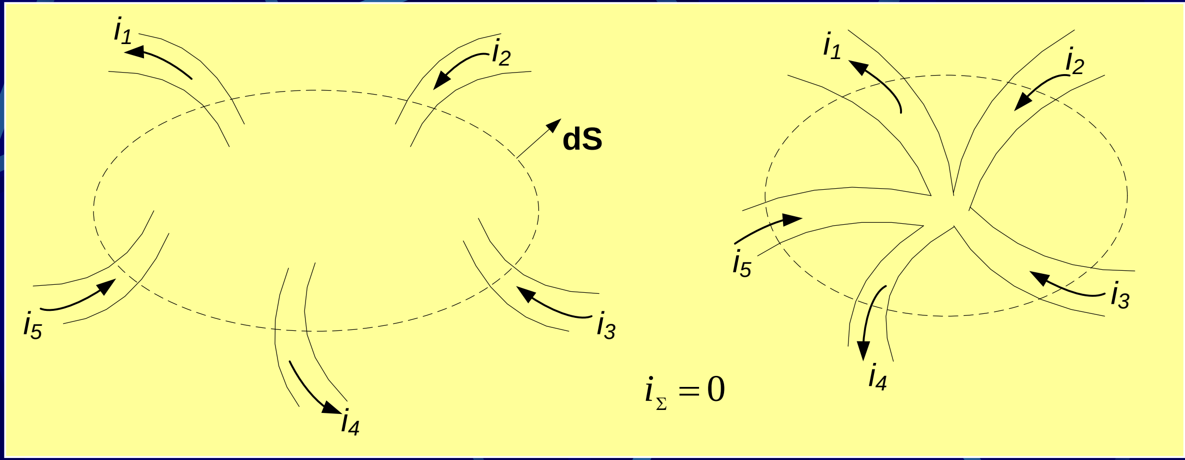
- Sistemul de ecuaţii necesar pentru determinarea curenţilor din laturile reţelei este generat pe baza celor două teoreme ale lui Kirchhoff.

- Valorile curenţilor determinaţi pe baza teoremelor lui Kirchhoff sunt unice.

**Gustav Robert Kirchhoff** (1824–1887), a German physicist, stated two basic laws in 1847 concerning the relationship between the currents and voltages in an electrical network. Kirchhoff's laws, along with Ohm's law, form the basis of circuit theory. Born the son of a lawyer in Konigsberg, East Prussia, Kirchhoff entered the University of Konigsberg at age 18 and later became a lecturer in Berlin. His collaborative work in spectroscopy with German chemist Robert Bunsen led to the discovery of cesium in 1860 and rubidium in 1861. Kirchhoff was also credited with the Kirchhoff law of radiation. Thus Kirchhoff is famous among engineers, chemists, and physicists.

# Prima teoremă a lui Kirchhoff

- Prima teoremă a lui Kirchhoff se referă la nodurile unei reţele electrice.




- Experienţa arată că în regim electrocinetic staţionar (curent continuu) când mărimile de stare ale câmpului sunt invariabile în timp, curentul rezultant ce intersectează o suprafaţă închisă arbitrară Σ este zero.

- Prima teoremă a lui Kirchhoff se obține când suprafața Σ închide un singur nod de rețea.

$$i_\Sigma = 0$$

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 - i_5 = 0$$

**Generalize:** $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \pm i_k = 0}$

- Prima teoremă a lui Kirchhoff se enunță astfel: suma algebrică a intensităţilor curenţilor electrici ce concură într-un nod de circuit este zero. În relaţia curenţii sunt pozitivi dacă ies din nod şi negativi în caz contrar.

$$i_{\Sigma} = 0$$

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 - i_5 = 0$$

**Generalize:** $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \pm i_k = 0}$$

- O altă formă a teoremei se obține dacă curenții cu semn – se trec în membrul drept:

$$i_1 + i_4 = i_2 + i_3 + i_5$$

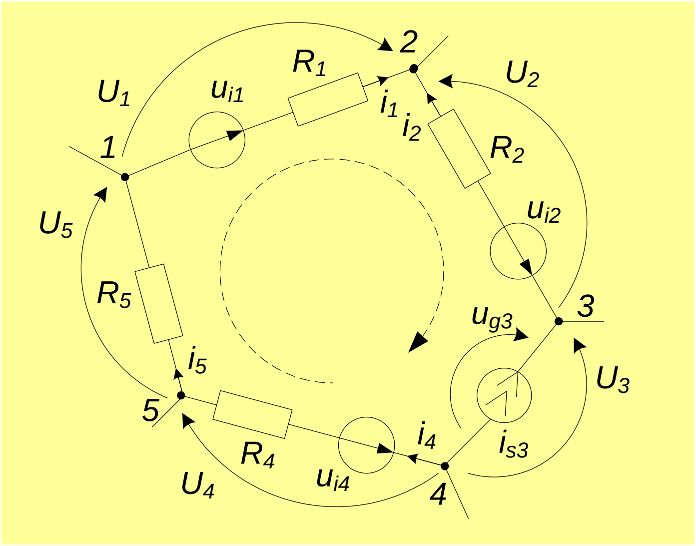
- Conform acestei forme alternative a primei teoreme a lui Kirchhoff suma curenţilor care ies din nod este egală cu suma curenţilor care intră în nod.

# A doua teoremă a lui Kirchhoff

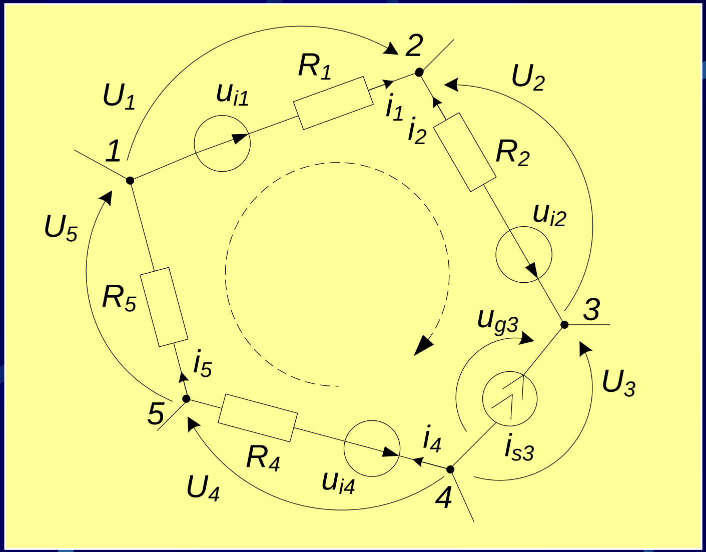
- A doua teoremă a lui Kirchhoff se referă la ochiurile reţelei electrice.
- Experiența arată că în regim electrocinetic staţionar, integrala de linie a intensităţii câmpului electric (tensiunea electrică) de-a lungul oricărei curbe închise *Γ*, este nulă.
- A doua teoremă a lui Kirchhoff se obține când curba *Γ* se alege de-a lungul unui ochi de rețea.
- Pentru cazul particular al ochiului de rețea, conform celei de a doua teoremă a lui Kirchhoff, avem:

$$\sum_{k\in(O)} \pm U_k = 0$$

$$U_1 - U_2 - U_3 + U_4 + U_5 = 0$$




- O primă formă a celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff se enunță astfel: suma algebrică a tensiunilor la borne ale laturilor unui ochi de reţea este zero.
- Tensiunea la bornele laturilor este pozitivă dacă are acelaşi sens cu sensul de referinţă al ochiului considerat de-a lungul curbei închise, şi negativ în caz contrar.




$$\sum_{k\in(O)} \pm U_k = 0$$

$$U_1 - U_2 - U_3 + U_4 + U_5 = 0$$

- O a doua formă a teoremei, cea mai folosită, se obține dacă se exprimă tensiunile de laturi în funcție de tensiunile elementelor de circuit.

$$U_1 = -u_{i1} + i_1 R_1$$
$$U_2 = i_2 R_2 + u_{i2}$$
$$U_3 = u_{g3}$$
$$U_4 = u_{i4} + i_4 R_4$$
$$U_5 = i_5 R_5$$

$$-u_{i1} + i_1 R_1 - i_2 R_2 - u_{i2} - u_{g3} + u_{i4} + i_4 R_4 + i_5 R_5 = 0$$

$$i_1 R_1 - i_2 R_2 + i_4 R_4 + i_5 R_5 - u_{g3} = u_{i1} + u_{i2} - u_{i4}$$

$$\sum_{\lambda\in(o)} \pm i_\lambda R_\lambda + \sum_{\lambda\in(o)} \pm u_{g\lambda} = \sum_{\lambda\in(o)} \pm u_{i\lambda}$$

# Aplicarea teoremelor lui Kirchhoff în calculul circuitelor electrice de curent continuu

- Problema circuitelor electrice este aceea de a identifica variabilele independente (de regulă curenții) și scrierea unui număr de ecuații independente egal cu numărul necunoscutelor.
- Ecuațiile independente se obțin cu ajutorul celor două teoreme a lui Kirchhoff. Se poate arăta că:
  - Numărul ecuațiilor independente folosind prima teoremă a lui Kirchhoff se obține pentru numărul nodurilor rețelei mai puțin unul;
  - Numărul ecuațiilor independente folosind cea de-a doua teoremă a lui Kirchhoff se obține pentru ochiurile independente ale rețelei. Un ochi se numeşte independent faţă de un sistem de ochiuri, dacă ecuaţia scrisă pentru ochiul respectiv nu poate fi dedusă printr-o combinaţie liniară a ecuaţiilor scrise pentru ochiurile anterioare. Ochiurile independente pot fi alese în general arbitrar cu condiţia ca fiecare ochi să conţină cel puţin o latură de reţea nouă faţă de cele anterioare şi toate laturile circuitului să fie folosite la stabilirea ochiurilor independente.

# Aplicarea teoremelor lui Kirchhoff în calculul circuitelor electrice de curent continuu

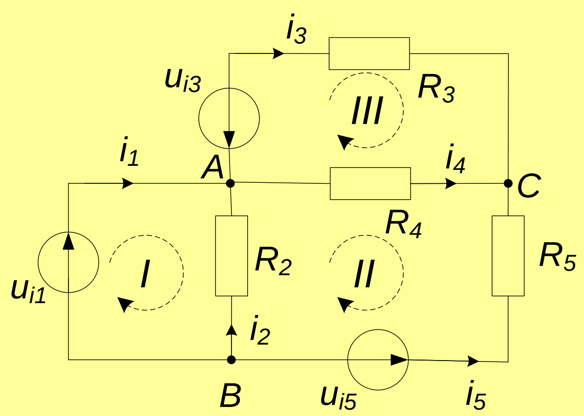
- Ca urmare, pentru un circuit cu *N* noduri și *l* laturi, având doar rezistențe și surse de tensiune, numărul curenților necunoscuți este egal cu *l*. Cele *l* ecuații independente se scriu după cum urmează:

  cu TK1 *(N-1)* ecuații independente;

  cu TK2 *l-(N-1)* ecuații independente.

- Metoda de rezolvare a unui circuit electric de curent continuu folosind teoremele lui Kirchhoff presupune următoarele etape:
  - se determină din circuit numărul laturilor *l* şi al nodurilor *n* şi se calculează numărul ochiurilor fundamentale;
  - se stabilesc arbitrar sensurile de referinţă ale curenţilor (mărimilor necunoscute) în raport cu care se vor scrie teoremele lui Kirchhoff;
  - se scriu ecuaţiile cu prima teoremă a lui Kirchhoff pentru *(n-1)* noduri arbitrare;
  - se stabilesc ochiurile fundamentale pentru care se aleg sensurile arbitrare de parcurgere a ochiurilor;
  - se scriu ecuaţiile folosind a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru aceste ochiuri fundamentale;
  - se rezolvă sistemul liniar corespunzător teoremelor lui Kirchhoff.

# Example




***R2=2Ω***
***R3=3Ω***
***R4=4Ω***
***R5=5Ω***
$u_{i1}$***=20V***
$u_{i3}$***=12V***
$u_{i5}$***=5V***

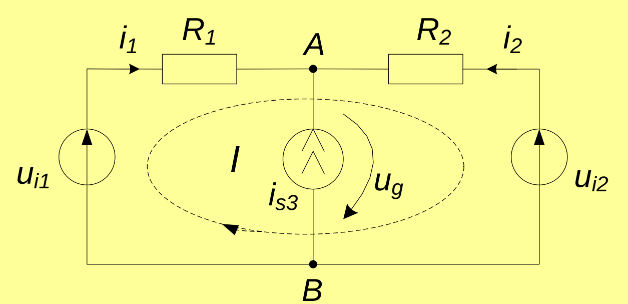
**N=3, l=5**

$$\begin{cases} -i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0 \\ -i_3 - i_4 - i_5 = 0 \\ -i_2 R_2 = u_{i1} \\ i_2 R_2 + i_4 R_4 - i_5 R_5 = -u_{i5} \\ i_3 R_3 - i_4 R_4 = -u_{i3} \end{cases}$$

$i_1$***=11.213A***
$i_2$***=-10A***
$i_3$***=-1.021A***
$i_4$***=2.234A***
$i_5$***=-1.213A***

- În cazul în care există laturi cu generatoare ideale de curent, curentul acestor laturi este cunoscut, necunoscută fiind tensiunea la bornele generatoarelor ideale de curent.
- Presupunând că avem *g* astfel de laturi cu generatoare de curent, numărul curenţilor necunoscuţi va fi *(l-g)*.
- Cele *(l-lg)* ecuații se obțin astfel:
  - *(N-1)* ecuații folosind prima teoremă a lui Kirchhoff;
  - *l-lg-(N-1)* ecuații folosind cea de a doua teoremă a lui Kirchhoff.

- Cele *l-lg-(N-1)* ochiuri fundamentale vor fi astfel alese încât să nu conțină laturi cu generatoare de curent.




$R_1=5\Omega$
$R_2=2\Omega$
$i_{s3}=2A$
$u_{i1}=15V$
$u_{i2}=4V$

**N=2, l=3, $l_g$=1**

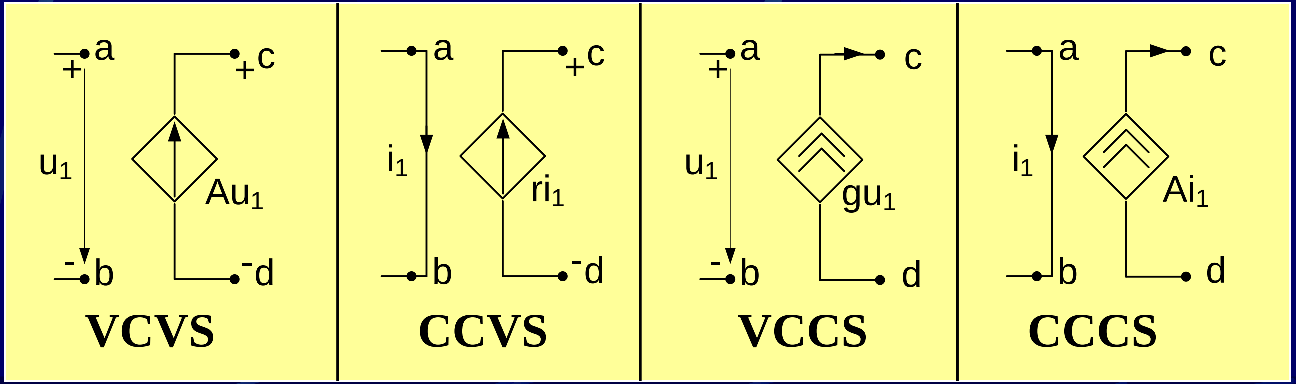
$$\begin{cases} i_1+i_2+i_s=0 \\ i_1R_1-i_2R_2=u_{i1}-u_{i2} \end{cases}$$

***i1=1A***
***i2=-3A***

$$u_g=-i_1R_1+u_{i1}=-i_2R_2+u_{i2}=10V$$

# Surse controlate

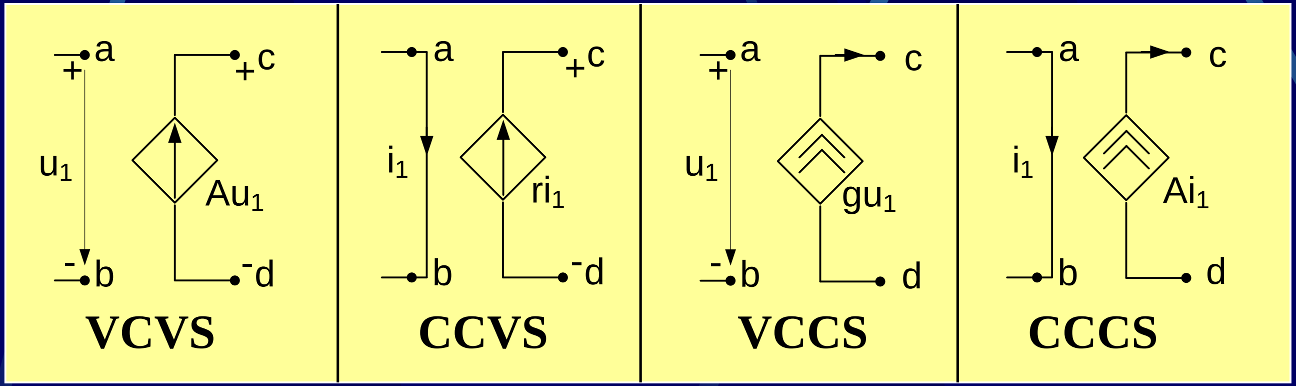
- În circuit pot exista surse caracterizate prin aceea că valoarea tensiunii sursei sau a curentului prin sursă depind de valoarea unui curent sau a unei tensiuni definite undeva în circuit.
- Sursele care satisfac această dependenţă se numesc *surse controlate* sau *surse dependente*.
- Deoarece un curent sau o tensiune pot controla valoarea sursei, pot exista patru tipuri de astfel de surse comandate, reprezentate schematic în figură.
- Sursa, reprezentată printr-un romb, acţionează între terminalele c şi d, în timp ce controlul sursei este asigurat între terminalele a şi b. Între terminalele a şi b, în funcţie de tipul controlului, este dat sensul de referinţă pentru tensiunea sau curentul care controlează valoarea sursei.
- Constantele de proporționalitate *A*, *r* and *q* indică relaţia dintre mărimile de control (tensiune sau curent) şi valoarea sursei.




**VCVS – voltage controlled voltage sources**
**CCVS – current controlled voltage sources**
**VCCS – voltage controlled current sources**
**CCCS – current controlled current sources**

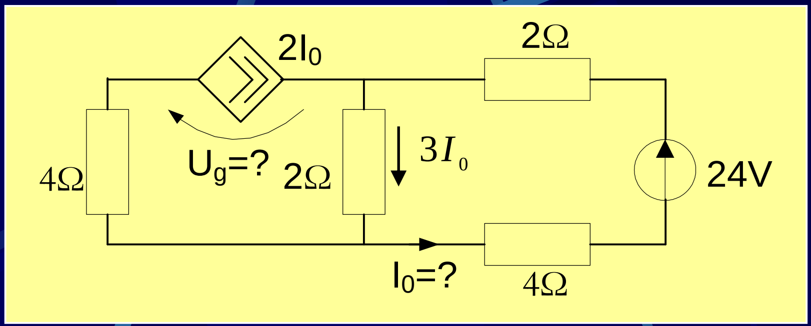
# Surse comandate

- Diferenţa principală dintre sursele comandate şi sursele independente constă în aceea că pentru sursele dependente avem nevoie de 4 terminale în timp ce sursele independente sunt definite doar de 2 terminale.
- Din cele 4 terminale ale surselor comandate, o pereche asigură controlul sursei în timp ce cealaltă pereche asigură caracterul sursei.




**VCVS – voltage controlled voltage sources**
**CCVS – current controlled voltage sources**
**VCCS – voltage controlled current sources**
**CCCS – current controlled current sources**

# Exemple ce folosesc surse controlate



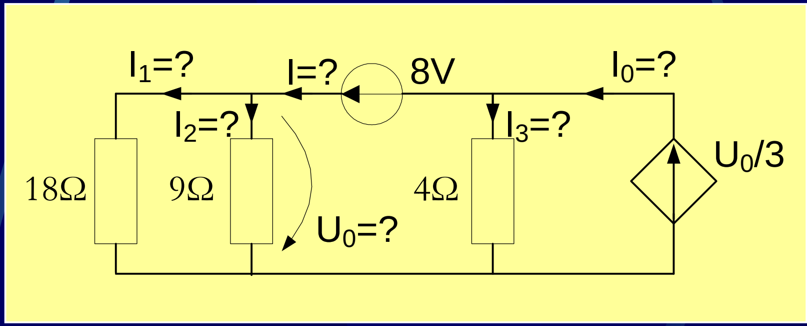

$$24 = 2\,I_0 + 2\cdot 3I_0 + 4\,I_0 \;\Rightarrow I_0 = 2(A)$$

$$U_g = 2\cdot 3I_0 + 4\cdot 2I_0 = 14\,I_0 = 28(V)$$

$$U_g = -2\,I_0 + 24 - 4\,I_0 + 4\cdot 2I_0 = 28(V)$$

$$p_g = U_g\,2I_0 + 24\,I_0 = 160(W)$$

$$p_c = (2I_0)^2 4 + (3I_0)^2 2 + I_0^2\,2 + I_0^2\,4 = 160(W)$$




$$p_g = 8I + \frac{U_0}{3} I_0 = 16 + 12 = 28(W)$$

$$p_g = (I_1)^2 18 + (I_2)^2 9 + (I_3)^2 4 = \frac{4}{9}18 + \frac{16}{9}9 + 1\cdot 4 = 28(W)$$

$$8 = U_0 - \frac{U_0}{3} \;\Rightarrow U_0 = 12(V)$$

$$I_1 = \frac{U_0}{18} = \frac{2}{3}(A)$$

$$I_2 = \frac{U_0}{9} = \frac{4}{3}(A)$$

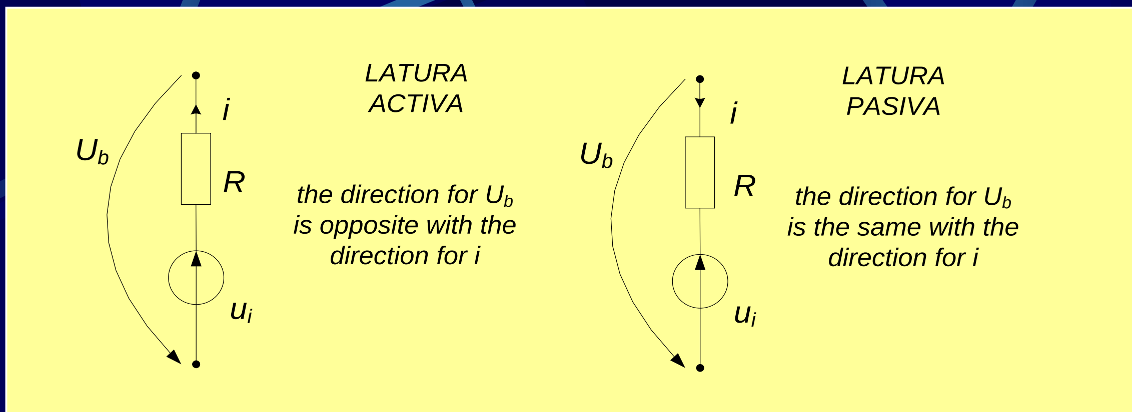
$$I = I_1 + I_2 = 2(A)$$

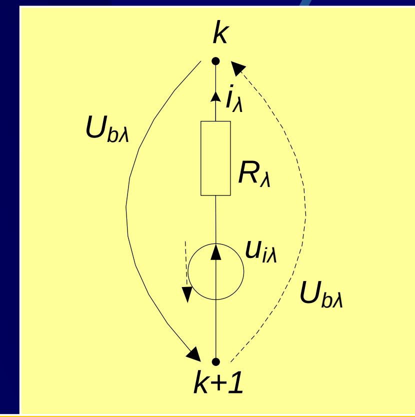
$$\frac{U_0}{3} = I_3 4 \;\Rightarrow I_3 = \frac{U_0}{12} = 1(A)$$

$$I_0 = I + I_3 = 3(A)$$

# Teorema de conservare a puterii

- In funcție de sensul de referință al tensiunii laturii și a curentului prin ea, laturile pot fi generatoare sau receptoare .




$$(A): \quad u_{b\lambda} = \pm u_{i\lambda} - i_\lambda R_\lambda$$
$$(P): \quad u_{b\lambda} = \mu u_{i\lambda} + i_\lambda R_\lambda$$

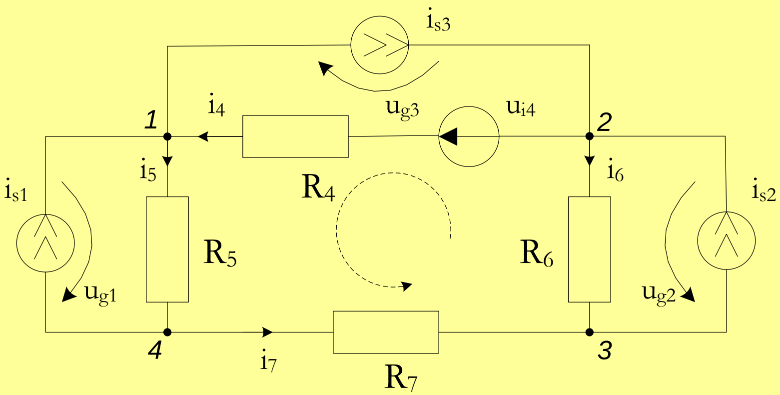
- O primă formă a teoremei se enunță astfel: suma puterilor debitate de laturile de rețea generatoare este egală cu suma puterilor primite de laturile receptoare.

$$\sum_{\lambda \in (A)} u_{b\lambda} i_\lambda = \sum_{\lambda \in (P)} u_{b\lambda} i_\lambda$$

- O a doua formă se obține in funcție de puterile elementelor din rețea: puterile cedate de sursele generatoare din rețea se regăsește în puterea primită de sursele receptoare și puterea consumată în rezistențele laturilor.

$$\sum_{\lambda \in (A_i)} u_{i\lambda} i_\lambda = \sum_{\lambda \in (P_i)} u_{i\lambda} i_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{l} i_\lambda^2 R_\lambda$$

# Exemplu




***R4=4KΩ***
***R5=5KΩ***
***R6=6KΩ***
***R7=7KΩ***
***is1=1mA***
***is2=2mA***
***is3=3mA***
***ui4=27V***

$I_4=?$
$I_5=?$
$I_6=?$
$I_7=?$
$P_g=?$
$P_c=?$

$N=4$

$l=7$

$l_g=3$

$$\begin{cases} -i_{S1}+i_{S3}-i_4+i_5=0 \\ -i_{S2}-i_{S3}+i_4+i_6=0 \\ i_{S2}-i_6-i_7=0 \\ i_4R_4+i_5R_5+i_7R_7-i_6R_6=u_{i4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -i_4+i_5=-2\cdot 10^{-3} \\ i_4+i_6=5\cdot 10^{-3} \\ -i_6-i_7=-2\cdot 10^{-3} \\ 4i_4+5i_5-6i_6+7i_7=27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_4=4\ mA \\ i_5=2\ mA \\ i_6=1\ mA \\ i_7=1\ mA \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{g1}=U_{14}=i_5R_5=10(V) \\ u_{g2}=U_{23}=i_6R_6=6(V) \\ u_{g3}=U_{21}=-u_{i4}+i_4R_4=-11(V) \end{cases}$$

$$P_{g1}=i_{s1}u_{g1}=10\ (mW)$$

$$P_{g2}=i_{s2}u_{g2}=12\ (mW)$$

$$P_{g3}=i_{s3}|u_{g3}|=33\ (mW)$$

$$u_{i4}i_4=108\ (mW)$$

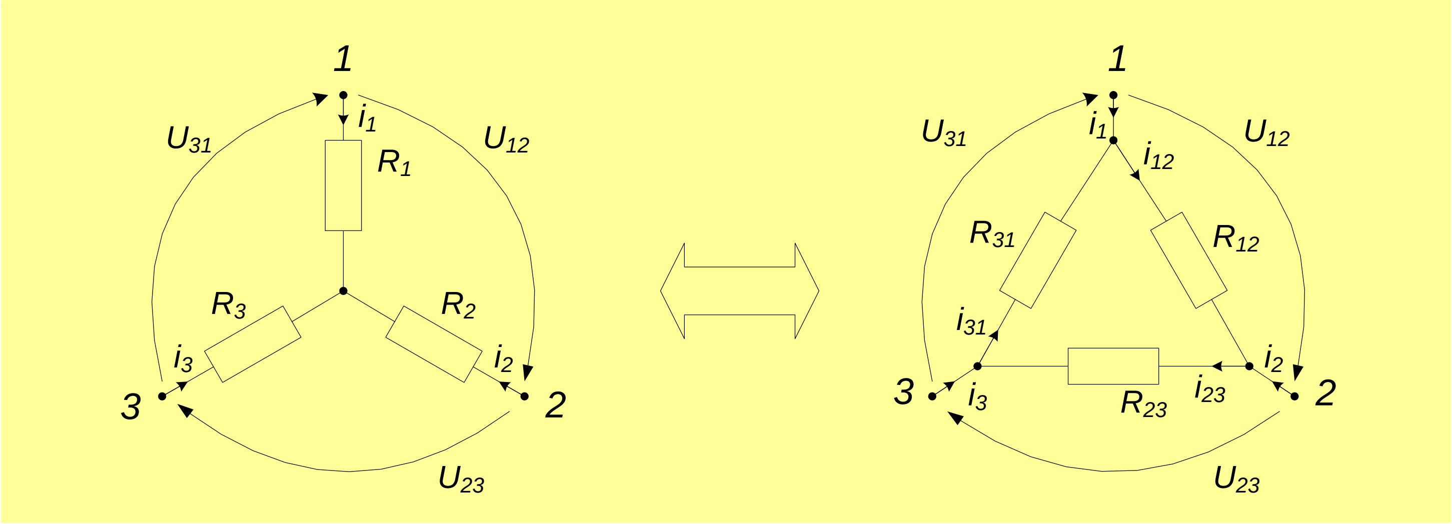
$$P_g=P_{g1}+P_{g2}+u_{i4}i_4=130(mW)$$

$$P_c=P_{g3}+i_4^2R_4+i_5^2R_5+i_6^2R_6+i_7^2R_7=130(mW)$$

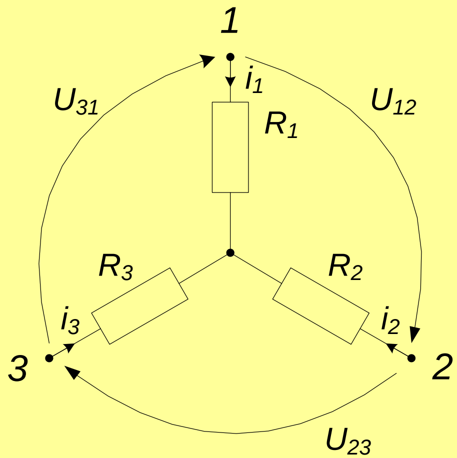
$$P_g=P_c$$

# Transfigurarea stea-triunghi a rezistenţelor

- Există câteva configuraţii ale rezistenţelor care nu se pot simplifica folosind transfigurarea serie sau paralel a rezistenţelor.
- Aceste configuraţii pot fi simplificate folosind transfigurarea stea-triunghi.
- Această transfigurare permite înlocuirea a trei rezistenţe conectate în stea să fie înlocuite de trei rezistenţe conectate în triunghi, sau invers.
- In figura de mai jos avem o conexiune stea şi o conexiune triunghi a rezistenţelor, conexiuni care dorim să fie echivalente.
- Scopul este să exprimăm valorile rezistenţelor din conexiunea triunghi în funcţie de valorile rezistenţelor din conexiunea stea, şi invers.

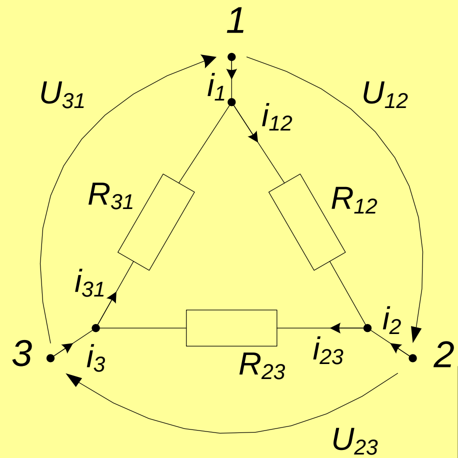


$$U_{12}+U_{23}+U_{31}=0$$




$$\begin{cases} i_1+i_2+i_3=0 \\ i_1 R_1 - i_2 R_2 = U_{12} \\ i_2 R_2 - i_3 R_3 = U_{23} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$




$$\begin{cases} i_1 = i_{12} - i_{31} = \dfrac{U_{12}}{R_{12}} - \dfrac{U_{31}}{R_{31}} \\ i_2 = i_{23} - i_{12} = \dfrac{U_{23}}{R_{23}} - \dfrac{U_{12}}{R_{12}} \\ i_3 = i_{31} - i_{23} = \dfrac{U_{31}}{R_{31}} - \dfrac{U_{23}}{R_{23}} \end{cases}$$

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ U_{12} & -R_2 & 0 \\ U_{23} & R_2 & -R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix}} = \frac{U_{12}R_2 + U_{23}R_2 + U_{12}R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} = \frac{U_{12}R_3 - U_{31}R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

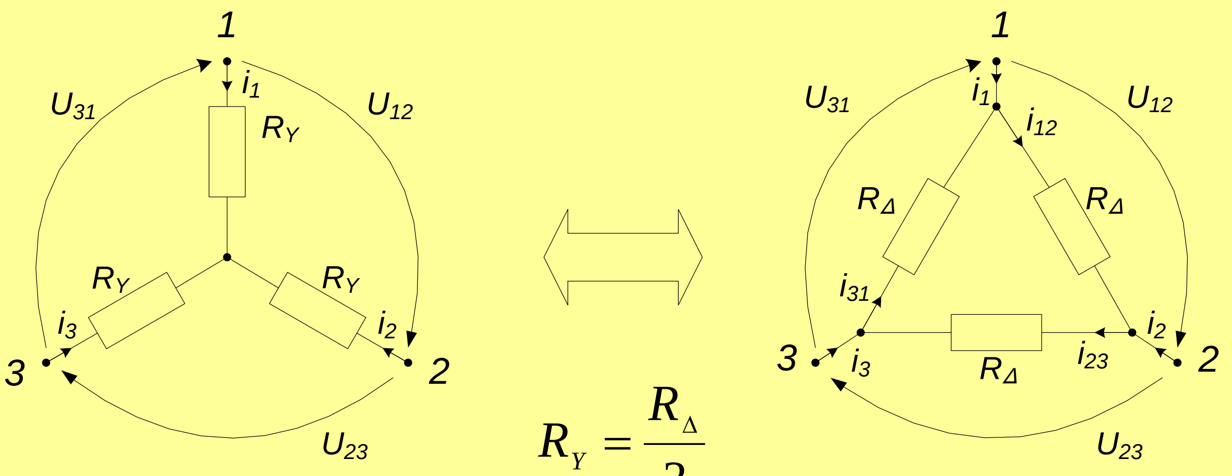
$$\boxed{\begin{cases} R_{12} = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} \\ R_{23} = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} \\ R_{31} = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} \end{cases}}$$

$$i_2 = \frac{U_{23}R_1 - U_{12}R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \qquad i_3 = \frac{U_{31}R_2 - U_{23}R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

$$\boxed{\begin{cases} R_1 = \dfrac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 = \dfrac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_1 = \dfrac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{cases}}$$

$$R_{12}+R_{23}+R_{31} = \frac{\left(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1\right)^2}{R_1R_2R_3} \qquad R_{12}R_{23} = \frac{\left(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1\right)^2}{R_2R_3}$$

- Pentru un caz particular $R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_{\Delta}$ , avem $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R_{\Delta}}{3}$ .

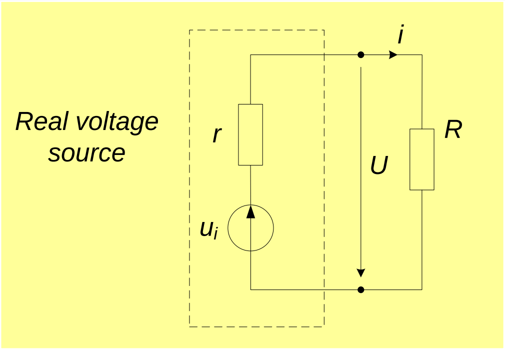



$$R_Y = \frac{R_{\Delta}}{3}$$

# Surse reale. Transfigurarea surselor reale

## Surse reale de tensiune

- O sursă reală de tensiune se compune dintr-o sursă ideală de tensiune în serie cu o rezistență (rezistența internă).



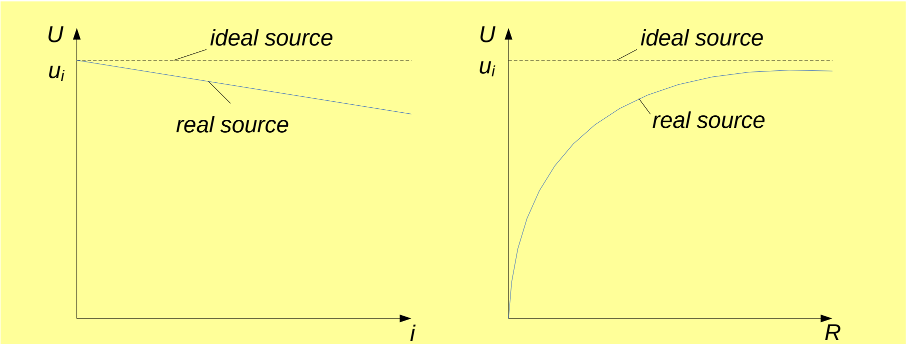

Sursa în gol: **$U=u_i$, $i=0$**

Sursa în scurt circuit: **$U=0$, $i=u_i/r$**

**Sursa alimentând un consumator:**

$$i = \frac{u_i}{r+R}$$

$$U = i\,R = \frac{R}{r+R}u_i$$




$$U = u_i - r\,i$$

$$U = \frac{R}{r+R}u_i$$

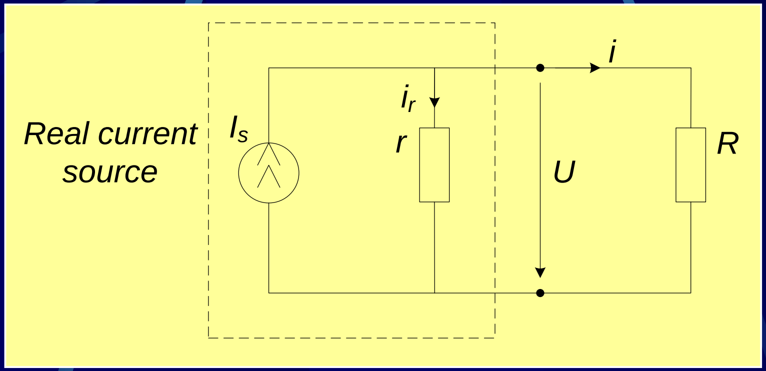
- Cu cât rezistența internă a sursei este mai mică, sursa de tensiune este mai bună.

# Sursă reală de curent

- O sursă reală de tensiune cu o rezistență internă foarte mare, satisface:

$$i = \frac{u_i}{r+R} \cong \frac{u_i}{r}$$

- O sursă care se manifestă astfel se numește sursă reală de curent.




Sursa în gol (R=∞): **$U=i_s r$, $i=0$**
Sursa în scurt circuit (R=0): **$U=0$, $i=i_s$**

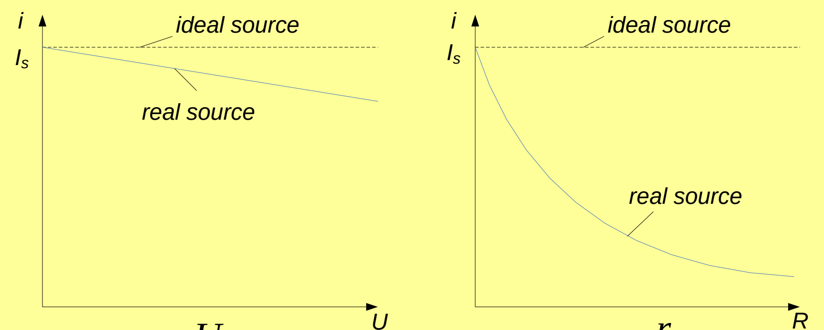
**Sursa alimentând un consumator:**

$$I_s = i + i_r$$

$$U = iR = i_r r = (I_s - i)r$$

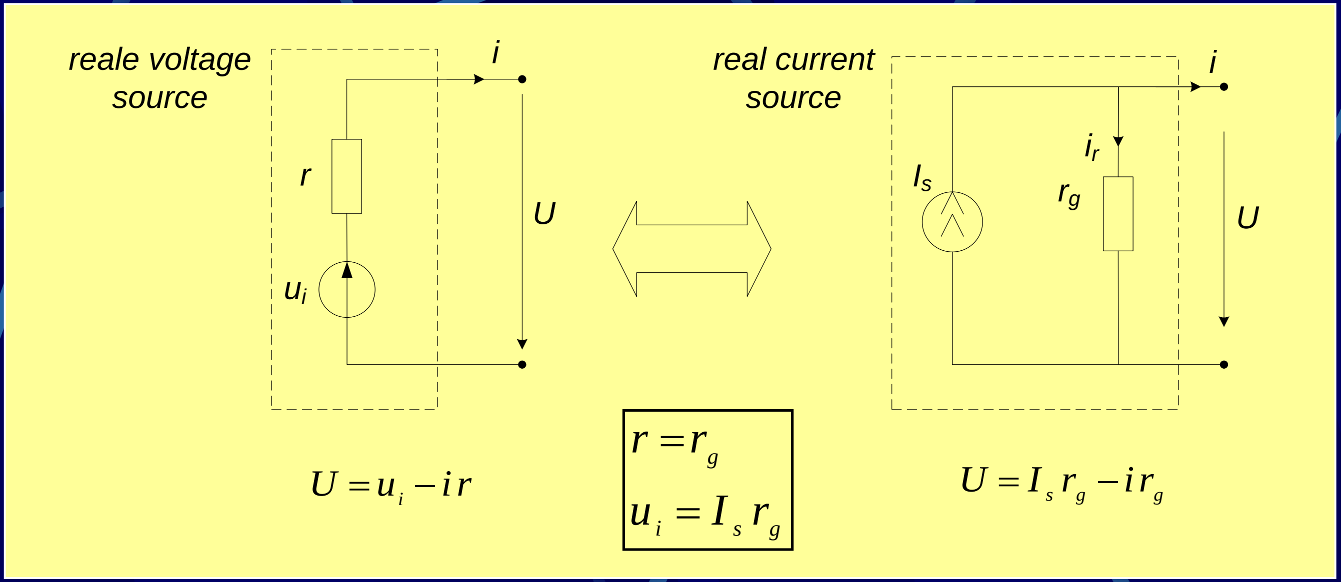
$$i = -\frac{U}{r} + I_s$$

$$iR = (I_s - i)r \quad \Rightarrow i = \frac{r}{R+r} i_s$$

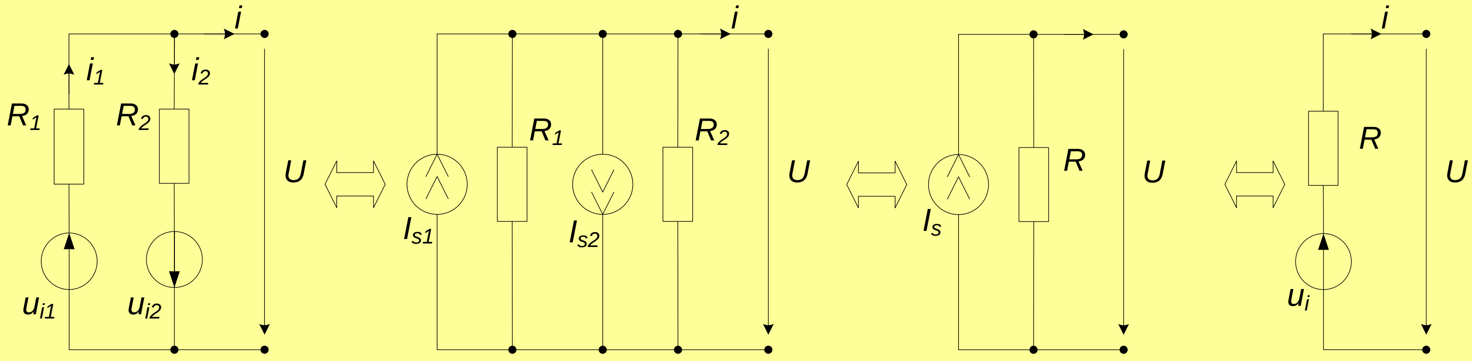



$$i = -\frac{U}{r} + I_s \qquad i = \frac{r}{R+r} i_s$$

# Transfigurarea surselor reale



# Exemplu




$$G_e = \sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda$$

$$u_i = \frac{\sum_{\lambda=1}^{n} \pm u_{i\lambda} G_\lambda}{G_e}$$

$$I_{s1} = \frac{u_{i1}}{R_1} \qquad I_{s2} = \frac{u_{i2}}{R_2}$$

$$I_s = I_{s1} - I_{s2}$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

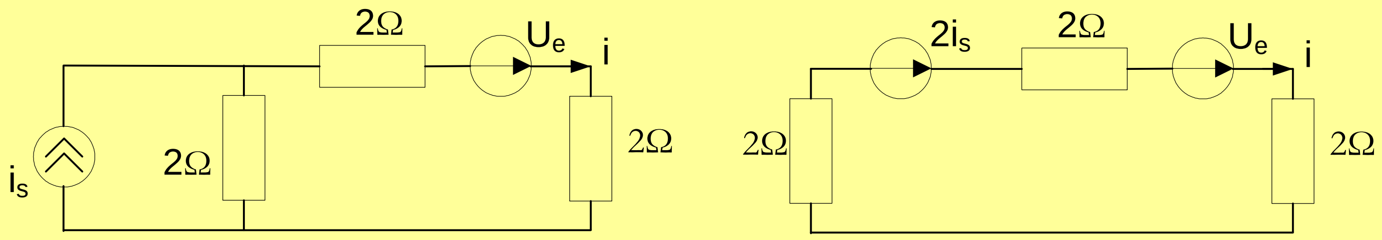
$$u_i = (I_{s1} - I_{s2})R$$

$$u_i = (I_{s1} - I_{s2})R = \left(\frac{u_{i1}}{R_1} - \frac{u_{i2}}{R_2}\right)\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{u_{i1}R_2 - u_{i2}R_1}{R_1 + R_2} = \frac{u_{i1}G_1 - u_{i2}G_2}{G_1 + G_2}$$

$$G = G_1 + G_2 \qquad G_1 = \frac{1}{R_1} \qquad G_2 = \frac{1}{R_2}$$

# Liniaritate şi Superpoziţie

- Liniaritatea este proprietatea de care se bucură răspunsurile în tensiune şi curent în circuite formate doar din surse independente şi rezistenţe.
- Pentru un circuit liniar, răspunsul curentului sau al tensiunii este o combinaţie liniară a tuturor surselor existente în circuit.
- Considerăm circuitul simplu de mai jos în care valorile surselor independente reprezintă variabilele $i_s$ şi $u_e$.




$$i = \frac{U_e + 2i_s}{6} = \frac{1}{6}U_e + \frac{1}{3}i_s$$

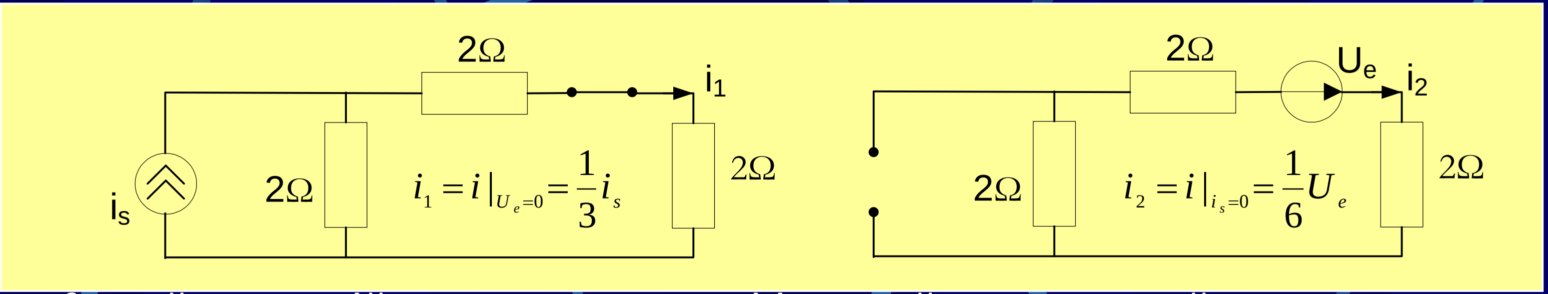
- Putem defini parametrii curent $i_1$ şi $i_2$ astfel:

$$i_1 = i\,|_{U_e=0} = \frac{1}{3}i_s$$

$$i_2 = i\,|_{i_s=0} = \frac{1}{6}U_e$$

- Parametrii $i_1$ şi $i_2$ reprezintă răspunsurile parţiale; $i_1$ răspunsul când sursa de tensiune este redusă la zero iar $i_2$ răspunsul când sursa de curent este redusa la zero.

- A dezactiva o sursa de tensiune presupune scurtcircuitarea sursei în timp ce dezactivarea unei surse de curent presupune înlocuirea ei cu un gol.
- Astfel, răspunsurile parţiale pot fi descrise de următoarele circuite:



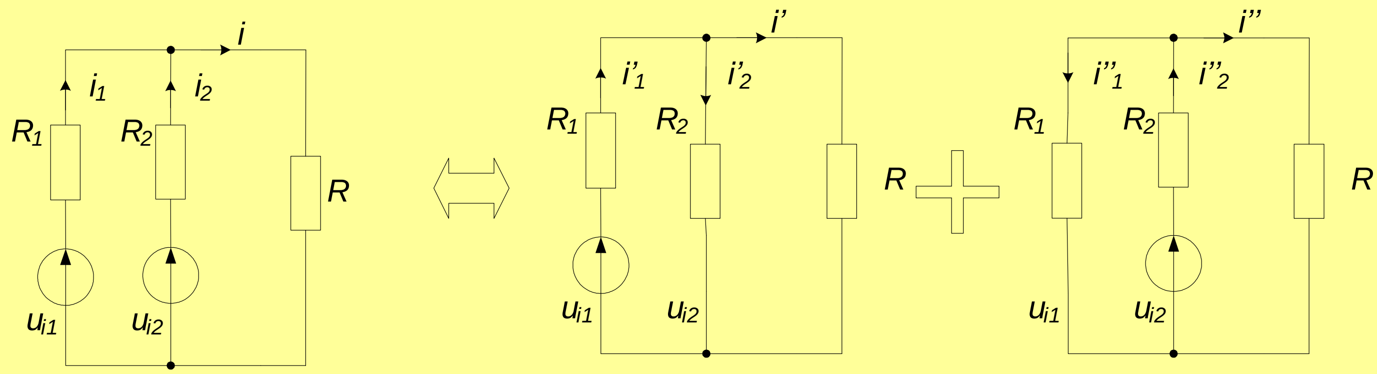

- O formă generală pentru principiul liniarităţii este următoarea:
- Considerăm un circuit format numai din rezistoare şi n surse independente (de tensiune şi de curent) cu valorile: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Orice răspuns y, tensiune sau curent, este de forma: $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$

unde $a_i$, $i=1,n$ reprezintă constante determinate de partea rezistivă a circuitului.

- Astfel, se pot defini n răspunsuri parţiale: $y_i = a_i x_i, \quad i = \overline{1,n}$ iar răspunsul total funcţie de răspunsurile parţiale $y_i$ este: $y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$

  unde $y_i = y|_{x_k=0}, \; k = \overline{1,n}$ cu $k \neq i$.
- Astfel putem calcula fiecare răspuns parţial $y_i$ din circuite obţinute prin dezactivarea tuturor surselor independente mai puţin sursa i.
- Aceasta procedură este cunoscută ca principiul superpoziţiei, şi uneori este utilă in calculul circuitului. Un cicuit complicat poate fi descompus in mai multe circuite simple.

# Exemplu care foloseste superpozitia




$$i = i' + i''$$

$$i_1 = i_1' - i_1''$$

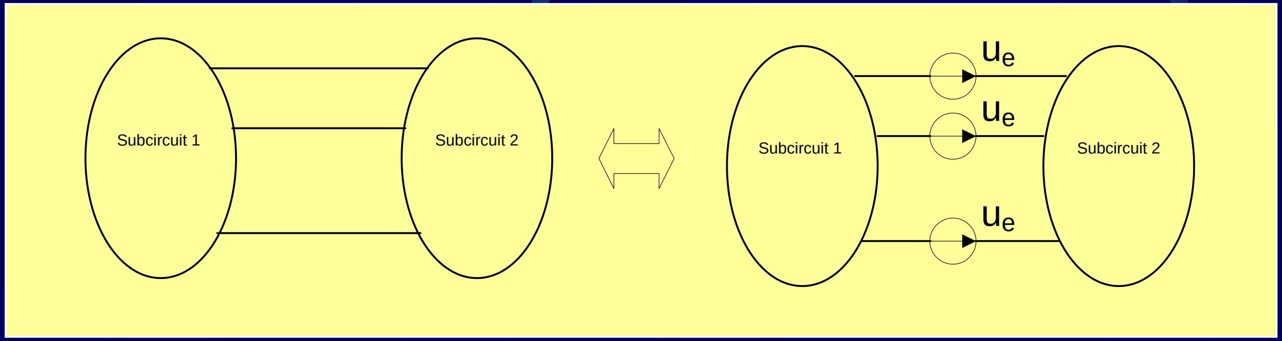
$$i_2 = -i_2' + i_2''$$

# Teoreme ale surselor de acţiune nulă

- Aceste teoreme se referă la posibilitatea de introducere de surse suplimentare in circuit într-o manieră în care să nu schimbe curenţii din circuit.

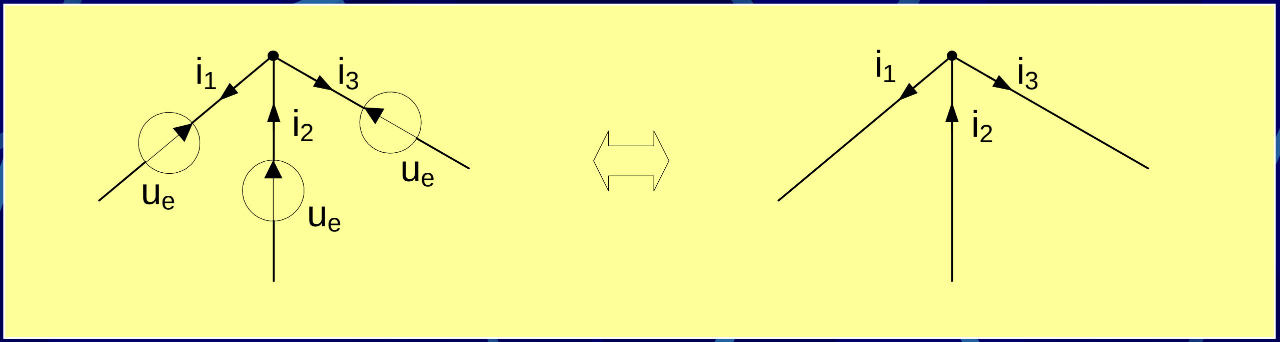
# Teorema surselor de tensiune de acţiune nulă

- Consideram un circuit format din doua sub-circuite şi punem in evidenţă toate laturile ce leagă cele două sub-circuite.
- Al doilea circuit se obţine din primul prin introducerea surselor de tensiune de aceiaşi valoare si polarizare, în toate laturile ce leagă cele doua sub-circuite.
- Curenţii corespunzători din cele două circuite sunt identici pentru că satisfac acelaşi sistem de ecuaţii liniare corespunzătoare teoremelor lui Kirchhoff.
- Cele două circuite sunt echivalente din punct de vedere al curenţilor din laturi.

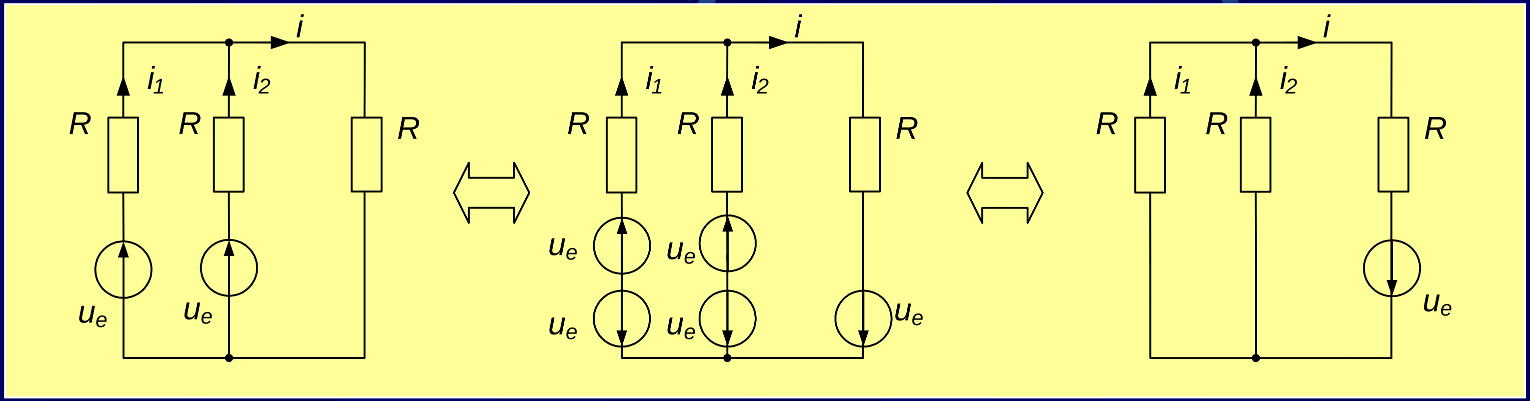


- Ecuaţiile liniar independente obţinute pe baza celor două teoreme ale lui Kirchhoff nu sunt afectate de introducerea surselor suplimentare (in modul in care au fost introduse).
- Sursele de tensiune nu afectează sistemul de ecuaţii liniar independente care folosesc a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru ochiuri formate în interiorul fiecărui sub-circuit.
- Ecuaţiile liniar independente folosind a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru ochiuri formate din laturi aflate în ambele sub-circuite de asemenea nu sunt afectate de introducerea surselor suplimentare. Pentru astfel de ecuaţii, sursele de tensiune suplimentare apar de un număr par de ori în membrul drept al egalităţii, o dată cu + şi o data cu -, astfel că aceste surse se anulează reciproc.

Un caz particular referitor la un nod de reţea, este prezentat mai jos.

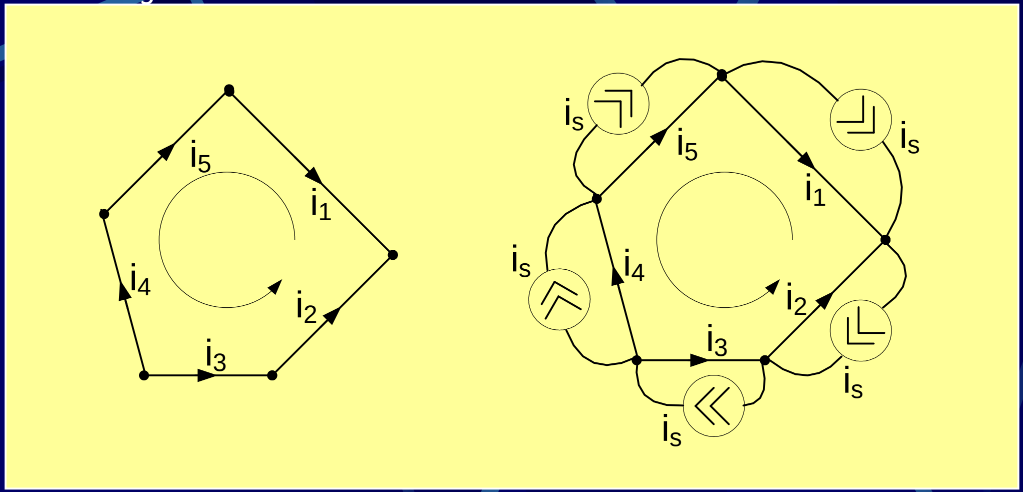



## Examplu



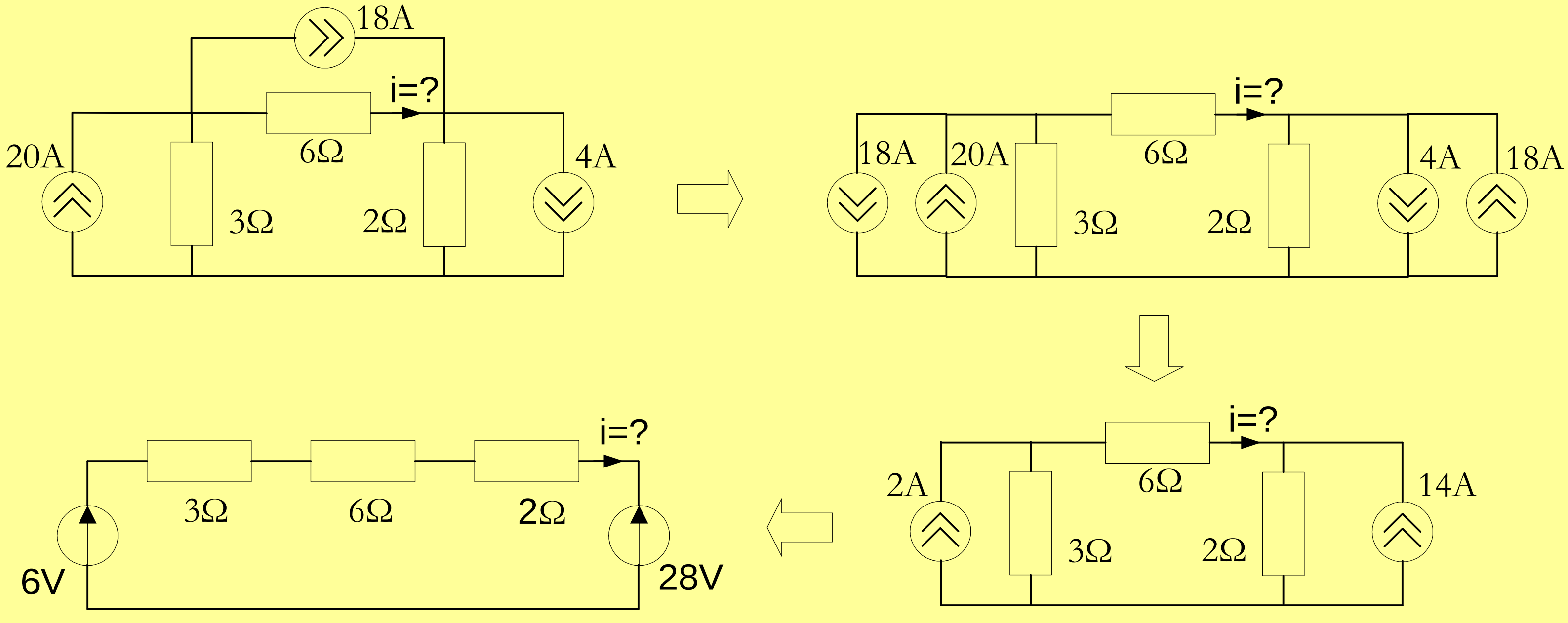
# Teorema surselor de curent de acţiune nulă

- Considerăm un ochi de reţea (fără a figura elementele ochiului).
- In paralel cu laturile ochiului de reţea se introduc surse de curent identice de aceiaşi orientare, $i_s$ .




- Sistemul de ecuaţii liniar independente folosind cele două teoreme ale lui Kirchhoff este identic pentru cele două circuite.
- Sistemul de ecuaţii liniar independente folosind prima teoremă a lui Kirchhoff nu se schimbă; pentru un nod, curentul $i_s$ o dată intră în nod şi o dată iese din nod.
- Ochiurile fundamentale folosite pentru a doua teoremă a lui Kirchhoff nu sunt afectate de sursele de curent; ele se formează fără a include sursele de curent.

# Exemplu




$$i(3+6+2)=6-28 \quad \Rightarrow \quad i=\frac{-22}{11}=-2(A)$$

# Thevenin's and Norton's Theorem

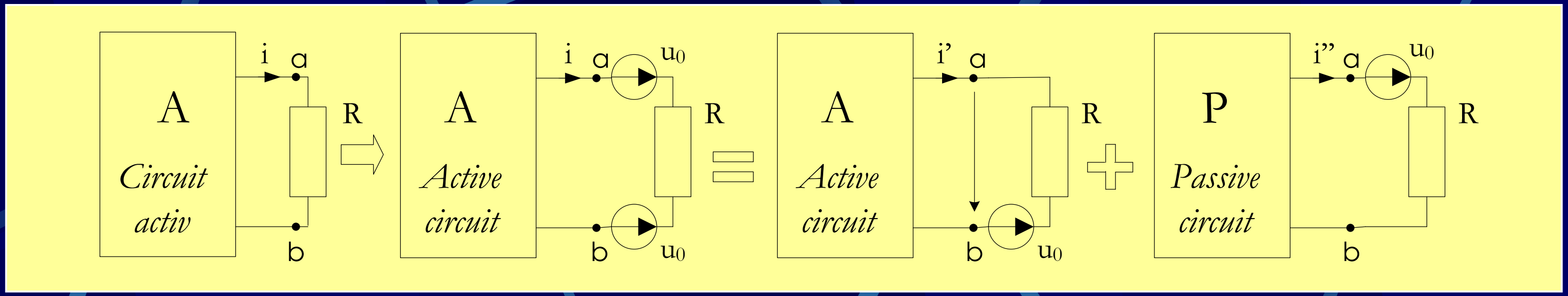
- Uneori în analiza circuitului interesează curentul dintr-o singură latură sau tensiunea la bornele unei singure laturi de reţea. In aceste cazuri este avantajos să folosim teorema generatorului echivalent de tensiune (a lui Thevenin) respectiv teorema generatorului echivalent de curent (a lui Norton).
- Cele două teoreme se bazează pe echivalenţa Thevenin sau echivalenţa Norton, conform căreia, faţă de un element sau un grup de elemente, restul circuitului poate fi înlocuit cu un circuit echivalent simplificat.

**Léon Charles Thévenin (30 March 1857 – 21 September 1926) was a French telegraph engineer who extended Ohm's law to the analysis of complex electrical circuits. Born in Meaux, France, Thévenin graduated from the École polytechnique in Paris in 1876. In 1878, he joined the Corps of telegraph Engineers (which subsequently became the French PTT). There, he initially worked on the development of long distance underground telegraph lines.**

**As a result of studying Kirchhoff's circuit laws and Ohm's law, he developed his famous theorem, Thévenin's theorem, which made it possible to calculate currents in more complex electrical circuits and allowing people to reduce complex circuits into simpler circuits called Thévenin's equivalent circuits. The theorem was independently derived in 1853 by the German scientist Hermann von Helmholtz and in 1883 by Léon Charles Thévenin.**

# Thevenin's Theorem

- Considerăm un circuit activ în care punem în evidenţă o latură pasivă a cărui curent dorim să-l calculăm.

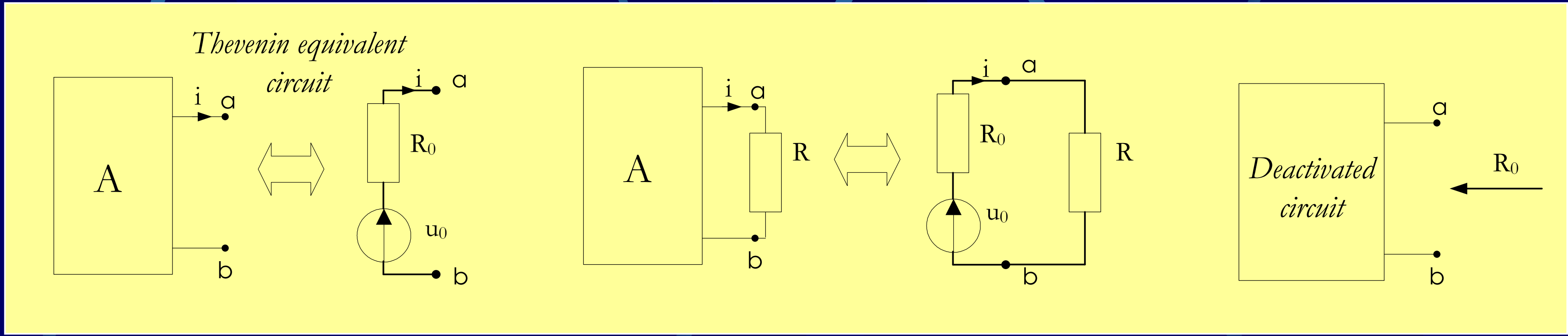



- Folosind succesiv teorema surselor de tensiune de acţiune nulă şi principiul superpoziţiei, circuitul poate fi împărţit în două circuite:
  - Un circuit ce conţine toate sursele din circuitul iniţial şi una din cele două surse de acţiune nulă introduse, $u_i$.
  - Al doilea circuit care conţine doar cea de-a doua sursă introdusă din teorema surselor de acţiune nulă, $u_0$.
- Conform principiului superpoziţiei: $i = i' + i''$
- Pentru al doilea circuit, având o singură sursă, întotdeauna $i'' \neq 0$; pentru primul circuit, având mai multe surse, este posibil ca $i'=0$, când $u_{ab}=u_0$ (sursa de tensiune neutralizează tensiunea de gol a circuitului), caz în care curentul este determinat doar de curentul din al doilea circuit $i=i''$. Tensiunea de gol între bornele ab, $u_{ab}$ este determinată de sursele din subcircuitul rezultat după înlăturarea laturii în care dorim să calculăm curentul.

- Circuitul echivalent Thevenin, care stă la baza teoremei lui Thevenin, pentru un circuit rezistiv se enunţă astfel:

  Faţă de o pereche de borne, *ab*, orice circuit liniar poate fi echivalat cu un circuit echivalent format dintr-o sursă de tensiune în serie cu o rezistenţă.

- Valoarea sursei de tensiune $u_0=u_{ab}$ reprezintă tensiunea de gol măsurată între bornele *ab*.
- Rezistenţa $R_0$ reprezintă rezistenţa echivalentă a circuitului pasivizat, privită dinspre bornele *ab*, după înlăturarea laturii cu rezistenţa *R*.

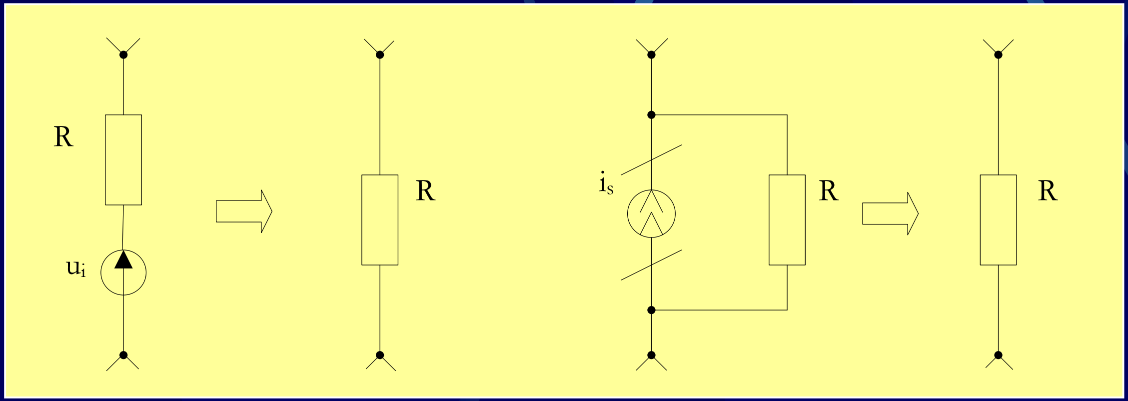



- În acord cu teorema lui Thevenin, curentul printr-o latură pasivă de rezistenţă *R*, este:

$$\boxed{i=\frac{u_0}{R+R_0}}$$

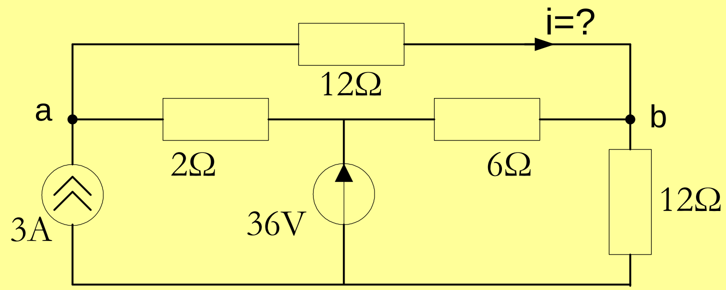
unde $u_0$ reprezintă tensiunea de gol măsurată între bornele *ab* iar $R_0$ reprezintă rezistența echivalentă față de bornele ab a restului de circuit pasivizat.

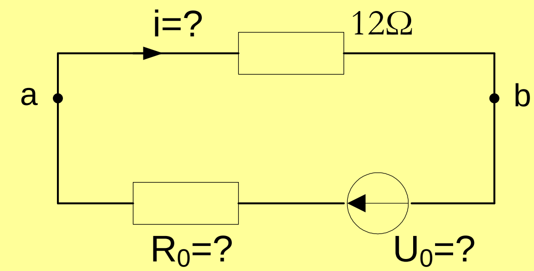
- Pasivizarea unui circuit presupune dezactivarea tuturor surselor din circuit (eliminarea surselor de tensiune şi a surselor de curent). Rezultă astfel un circuit format doar din rezistenţe.
- Pentru o sursă de tensiune, pasivizarea sursei (reducerea la zero) presupune înlocuirea sursei cu un scurt circuit.
- Pentru o sursă de curent, pasivizarea sursei (reducerea la zero) presupune îndepărtarea sursei şi lăsarea terminalelor în gol.

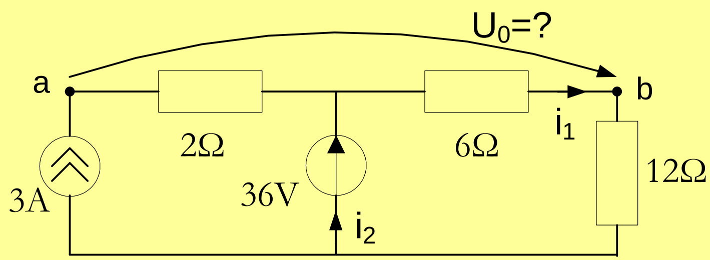


# Exemplu ce foloseşte teorema lui Thevenin

**Determinaţi parametrii** $R_0$ şi $U_0$ folosiţi în echivalenţa Thevenin şi determinaţi curentul i folosind teorema lui Thevenin, pentru circuitul de mai jos.



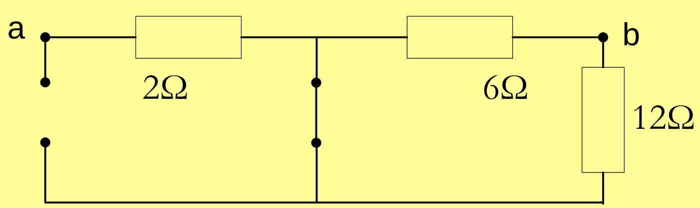



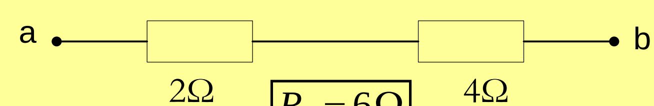

$$36 = i_1(6+12) \Rightarrow i_1 = 2(A)$$

$$3 + i_2 = 2 \Rightarrow i_2 = -1(A)$$

$$U_0 = 3 \cdot 2 + 6i_1 = 18(V)$$

$$\boxed{U_0 = 18V}$$




$$\boxed{R_0 = 6\Omega}$$

$$\boxed{i = \frac{U_0}{R_0 + 12} = 1(A)}$$

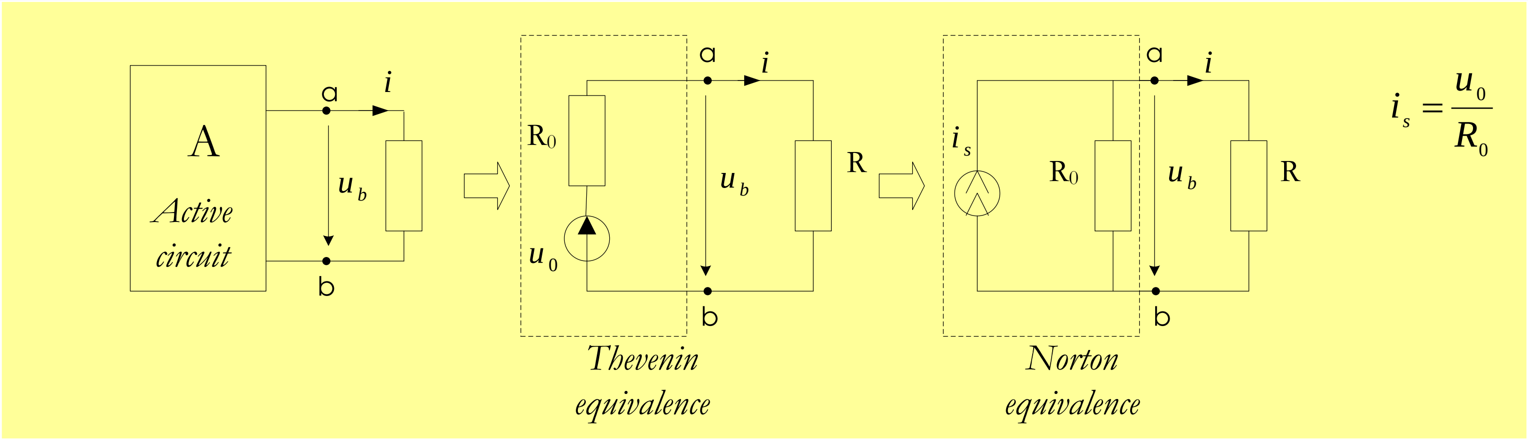
Edward Lawry Norton (28 July 1898–28 January 1983) was an accomplished Bell Labs engineer and scientist famous for developing the concept of the Norton equivalent circuit. He attended the University of Maine for two years before transferring to M.I.T. and received a S.B. degree (electrical engineering) in 1922. He received an M.A. degree from Columbia University in 1925.

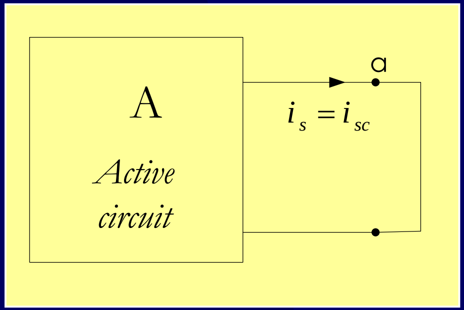
Although interested primarily in a communications circuit theory and the transmission of data at high speeds over telephone lines, Edward L. Norton is best remembered for development of the dual of Thevenin's equivalent circuit, currently referred to as Norton's equivalent Circuit. In fact, Norton and his associates at AT&T in the early 1920s are recognized as some of the first to perform pioneering work applying Thevenin's equivalent circuit and who referred to this concept simply as Thévenin's theorem. In 1926, he proposed the equivalent circuit using a current source and parallel resistor to assist in the design of recording instrumentation that was primarily current driven

Norton's theorem was independently derived in 1926 by Siemens & Halske researcher Hans Ferdinand Mayer (1895–1980) and Bell Labs engineer Edward Lawry Norton (1898–1983).

# Teorema lui Norton

- Echivalenţa Thevenin poate înlocui orice sub-circuit format din rezistenţe, surde de tensiune şi de curent.
- Echivalenţa Norton este un circuit echivalent alternativ care poate fi determinat independent sau se poate obţine din echivalenţa Thevenin aplicând teorema de transfigurare a surselor reale.



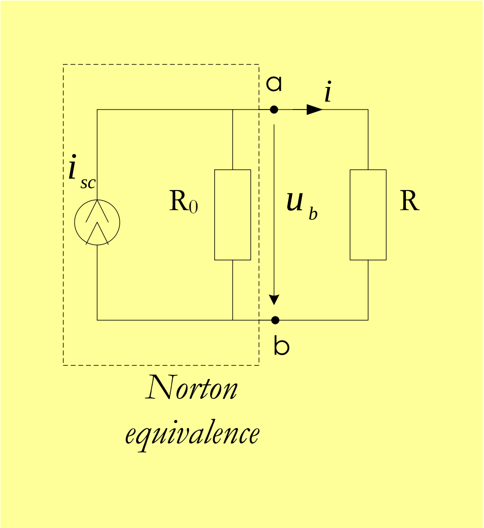




Curentul $i_s$ poate fi obţinut din curentul $i$ când $R \to 0$, $(i = i_{sc})$.

Pentru $R=0$, $i_s = i_{sc}$, curentul generat de sursa de curent este curentul de scurt circuit între terminalele *ab*.

- Notând cu $G_0=1/R_0$ şi $G=1/R$ conductanţa laturii şi respectiv conductanţa restului de circuit pasivizat văzută faţă de bornele *ab*, avem:

$$i_{sc} = u_b G + u_b G_0$$



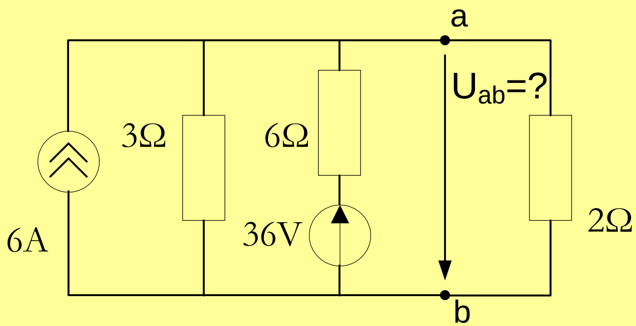

- În acord cu teorema lui Norton, tensiunea unei laturi de reţea de rezistenţă *R* (conductanţă *G=1/R*), este:

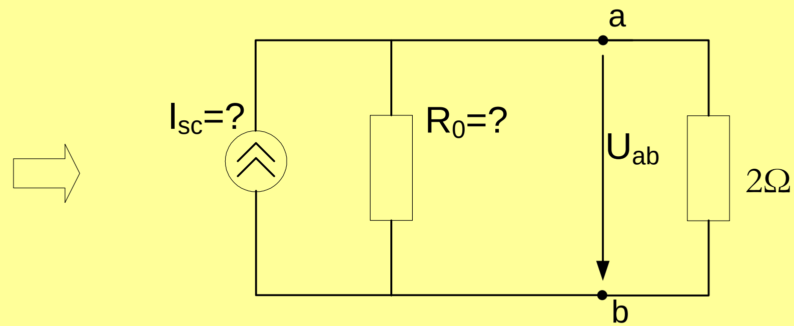
$$u_b = \frac{i_{sc}}{G + G_0}$$

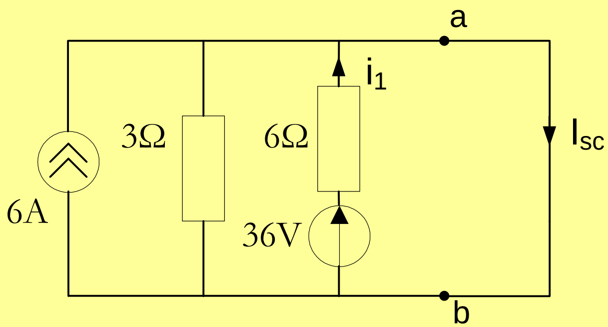
unde $i_{sc}$ reprezintă curentul intre bornele *ab* scurtcircuitate, iar $G_0$ reprezintă conductanţa echivalentă a restului de circuit pasivizat, faţă de bornele *ab*.

# Exemplu ce foloseşte teorema lui Norton

Determinaţi parametrii $R_0$ şi $i_{sc}$ din echivalenţa Norton faţă de latura cu rezistenţa de 2 Ω şi determinaţi tensiunea $U_{ab}$ folosind teorema lui Norton, pentru circuitul de mai jos.

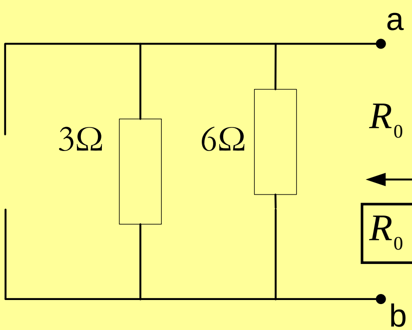


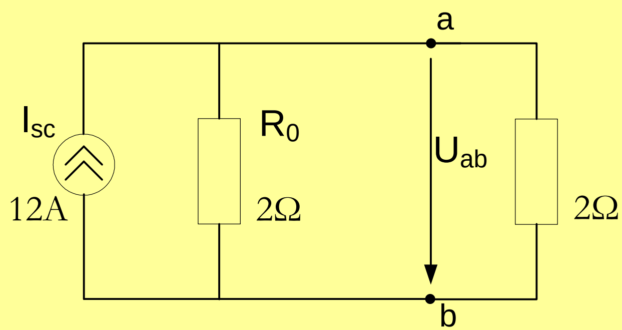

$$i_1 \cdot 6 = 36 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 6(A)$$

$$I_{sc} = 6 + i_1 \qquad \boxed{I_{sc} = 12\,A}$$




$$R_0 = \frac{3 \cdot 6}{3+6}$$

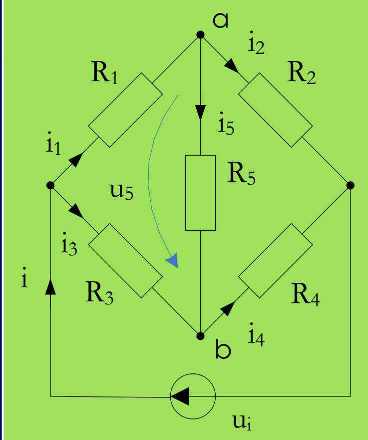
$$\boxed{R_0 = 2\Omega}$$

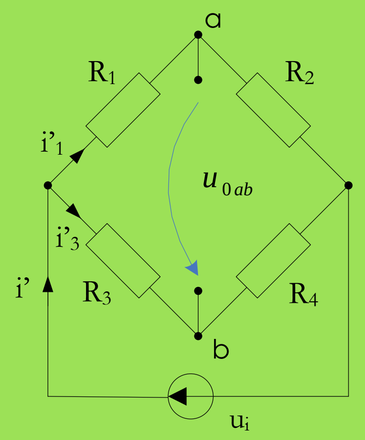



$$U_{ab} = \frac{I_{sc}}{G+G_0} = \frac{12}{0.5+0.5} = 12(V) \qquad \boxed{U_{ab} = 12V}$$

# Example

- Folosind teorema lui Thevenin, determinați curentul $i_5$ pentru circuitul de mai jos:

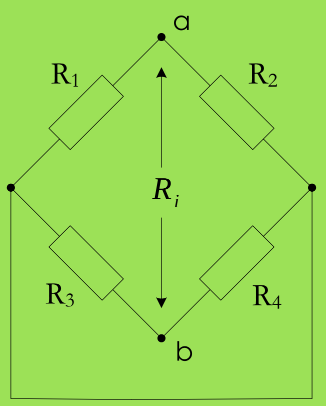


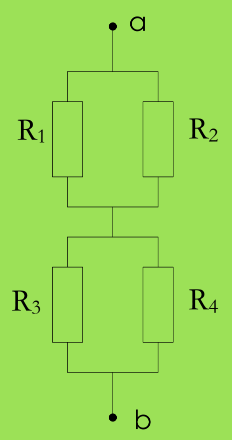




$$i_5 = \frac{u_{0ab}}{R_5 + R_i}$$

$$i_1^{'} = \frac{u_i}{R_1 + R_2} \qquad i_3^{'} = \frac{u_i}{R_3 + R_4}$$

$$u_{0ab} = i_1^{'} R_2 - i_3^{'} R_4 = u_i \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) = u_i \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$



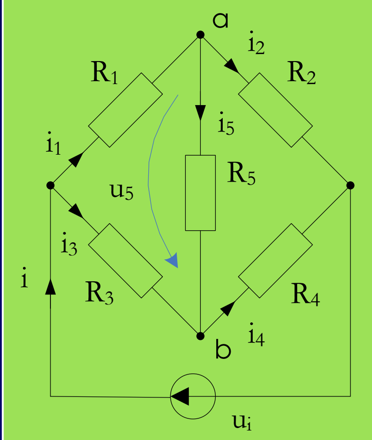



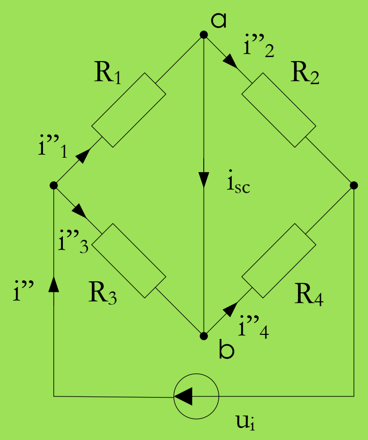

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

$$\boxed{i_5 = \frac{u_i (R_2 R_3 - R_1 R_4)}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2) + R_5 (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}}$$

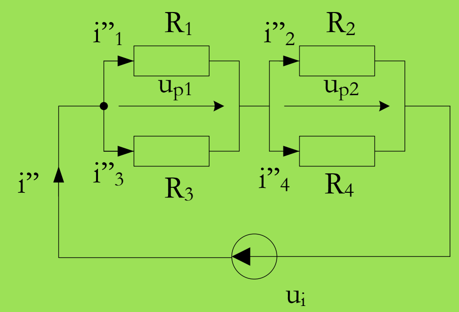
# Example

- Folosind teorema lui Norton, determinați tensiunea $u_5$ pentru circuitul de mai jos:




$$\boxed{u_5 = \frac{i_{sc}}{G_5 + G_i}}$$




$$G_5 = \frac{1}{R_5} \qquad G_i = \frac{1}{R_i}$$

$$i_{sc} = i_1'' - i_2'' = i_4'' - i_3''$$

$$R_e = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

$$i'' = \frac{u_i}{R_e} = \frac{u_i (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)}$$

$$u_{p1} = i'' \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{u_i R_1 R_3 (R_2 + R_4)}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)}$$

$$u_{p2} = i'' \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{u_i R_2 R_4 (R_1 + R_3)}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)}$$

$$i_1'' = \frac{u_{p1}}{R_1} = \frac{u_i R_3 (R_2 + R_4)}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)}$$

$$i_3'' = \frac{u_{p1}}{R_3} = \frac{u_i R_1 (R_2 + R_4)}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)}$$

$$i_2'' = \frac{u_{p2}}{R_2} = \frac{u_i R_4 (R_1 + R_3)}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)}$$

$$i_4'' = \frac{u_{p2}}{R_4} = \frac{u_i R_2 (R_1 + R_3)}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)}$$

$$\boxed{i_{sc} = i_1'' - i_2'' = \frac{u_i (R_2 R_3 - R_1 R_4)}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)}}$$

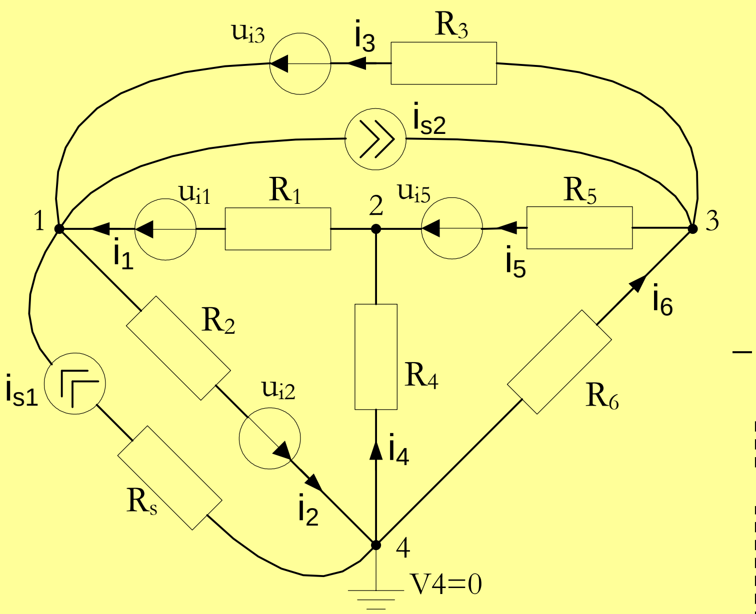
# Teorema potenţialelor la noduri. Teorema curenţilor ciclici

- O limitare a aplicării directe ale teoremelor lui Kirchhoff in rezolvarea circuitelor de curent continuu o reprezintă creşterea numărului de variabile odată cu creşterea complexităţii circuitului, şi ca urmare creşterea numărului de ecuaţii care necesită a fi rezolvate simultan.
- Teorema potenţialelor la noduri si teorema curenţilor ciclici reprezintă tehnici care reduc numărul variabilelor de circuit si ca urmare scade numărul de ecuaţii care trebuie rezolvate simultan.
- Teorema potenţialelor la noduri generează un sistem de ecuaţii liniar independente în care variabilele sunt date de un set de potenţiale care satisfac implicit a doua teoremă a lui Kirchhoff. Ca urmare circuitul este descris complet de un număr de ecuaţii care satisfac doar prima teorema a lui Kirchhoff. Soluţiile sistemului generează apoi curenţii din laturile circuitului.
- Teorema curenţilor ciclici (de contur sau de buclă) generează un sistem de ecuaţii liniar independente în care variabilele sunt date de un set de curenţi fictivi care satisfac implicit prima teorema a lui Kirchhoff. Ca urmare circuitul este descris complet de un număr de ecuaţii care satisfac doar a doua teoremă a lui Kirchhoff. Soluţiile sistemului generează apoi curenţii din laturile circuitului.

# Teorema potenţialelor la noduri

- In teorema potenţialelor la noduri unul din nodurile circuitului este ales ca nod de referinţa, atribuindu-i-se potenţialul nul. In general alegerea nodului de referinţa este arbitrară dar nu întotdeauna.
- Potenţialele celorlalte noduri se definesc în raport cu nodul de referinţa. Aceste potenţiale reprezintă practic tensiunea fiecărui nod faţă de nodul de referinţă, şi reprezintă noile variabile introduse de teoremă.
- Sistemul de ecuaţii corespunzător teoremelor lui Kirchhoff se va scrie în raport cu potenţialele din noduri (variabilele sistemului). Acest set de variabile satisfac implicit a doua teoremă a lui Kirchhoff.
- Numărul necunoscutelor, a potenţialelor din nodurile reţelei faţa de nodul de referinţă, este egal cu numărul nodurilor de reţea mai puţin unul.
- Având potenţialele din nodurile circuitului, putem calcula curenţii din laturile circuitului.

- Pentru a demonstra teorema potenţialelor la noduri, pornim de la un exemplu particular.
- Considerăm circuitul de mai jos cu l=8, $l_g$=2, N=4.




$$V_1 - V_2 = u_{i1} - i_1 R_1 \Rightarrow \quad i_1 = u_{i1} G_1 - (V_1 - V_2) G_1$$
$$V_1 - 0 = i_2 R_2 - u_{i2} \Rightarrow \quad i_2 = u_{i2} G_2 + V_1 G_2$$
$$V_1 - V_3 = u_{i3} - i_3 R_3 \Rightarrow \quad i_3 = u_{i3} G_3 - (V_1 - V_3) G_3$$

$$-i_3 + i_{s2} - i_1 + i_2 - i_{s1} = 0$$

$$-u_{i3} G_3 + (V_1 - V_3) G_3 + i_{s2} + u_{i1} G_1 + (V_1 - V_2) G_1 + u_{i2} G_2 + V_1 G_2 - i_{s1} = 0$$

$$\boxed{V_1 (G_1 + G_2 + G_3) - V_2 G_1 - V_3 G_3 = i_{s1} - i_{s2} + u_{i3} G_3 - u_{i2} G_2 + u_{i1} G_1}$$

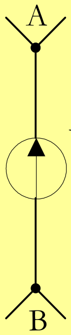
$$\boxed{\begin{array}{l} V_2 (G_1 + G_4 + G_5) - V_1 G_1 - V_3 G_5 = -u_{i1} G_1 + u_{i5} G_5 \\ V_3 (G_3 + G_5 + G_6) - V_2 G_5 - V_1 G_3 = i_{s2} - u_{i5} G_5 - u_{i3} G_3 \end{array}}$$

$$\boxed{-V_1 G_{k1} - V_2 G_{k2} - \ldots - V_\lambda G_{k\lambda} - \ldots + V_k G_{kk} - \ldots - V_{N-1} G_{k(N-1)} = \sum_{\lambda \in (k)} \pm i_{s\lambda} + \sum_{\lambda \in (k)} \pm u_{i\lambda} G_\lambda}$$

$$G_{\lambda k} = G_{k\lambda} = \sum_{\gamma \in (k\lambda)} G_\gamma \qquad\qquad G_{kk} = \sum_{\gamma \in (k)} G_\gamma$$

- Procedura folosită la aplicarea teoremei potenţialelor la noduri urmăreşte următorii paşi:
  - Se defineşte arbitrar potenţialul de referinţă pentru unul din nodurile circuitului, potenţial al cărui valoare se ia zero;
  - Se scrie câte o ecuaţie nodală pentru fiecare din cele (N-1) noduri rămase; rezultă un sistem liniar de (N-1) ecuaţii care se rezolvă în raport cu variabilele potenţialele din nodurile rămase;
  - Se calculează curenţii din laturile circuitului în funcţie de potenţialele din noduri.

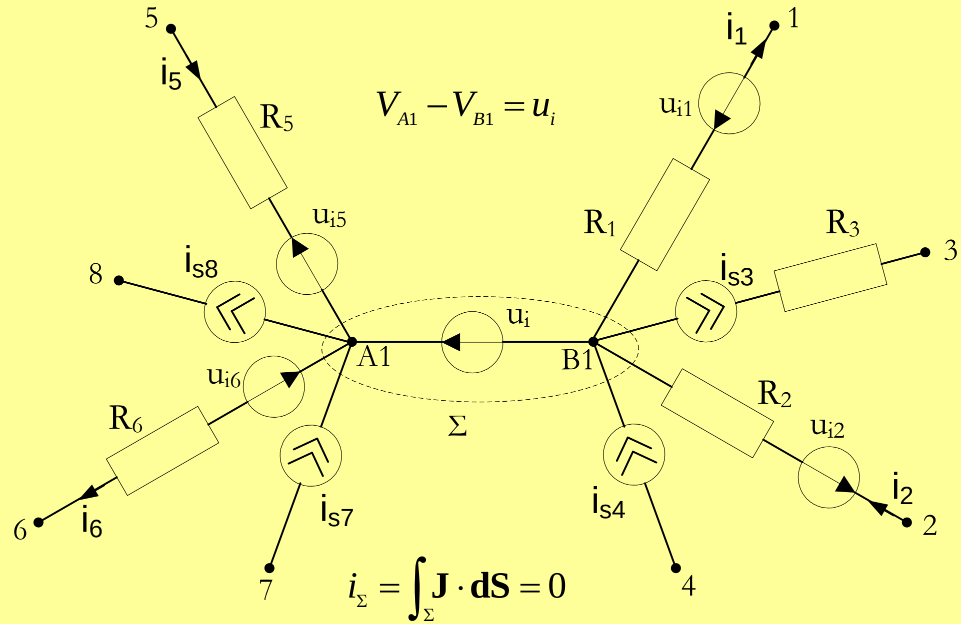
# Exixtă câteva excepţii în folosirea teoremei potenţialelor la noduri.




$$R=0 \Rightarrow G=\infty$$

$$V_B=0 \Rightarrow V_A=u_i$$

$$V_A=0 \Rightarrow V_B=-u_i$$




$$V_5-V_{A1}=i_5R_5+u_{i5} \quad\Rightarrow\quad i_5=(V_5-V_{A1})G_5-u_{i5}G_5$$

$$V_6-V_{A1}=-i_6R_6-u_{i6} \quad\Rightarrow\quad i_6=(V_{A1}-V_6)G_6-u_{i6}G_6$$

$$V_2-V_{B1}=u_{i2}-i_2R_2 \quad\Rightarrow\quad i_2=(V_2-V_{B1})G_2-u_{i2}G_2$$

$$V_1-V_{B1}=-i_1R_1-u_{i1} \quad\Rightarrow\quad i_1=(V_{B1}-V_1)G_1-u_{i1}G_1$$

$$i_1+i_{s3}-i_2-i_{s4}-i_5+i_6-i_{s7}+i_{s8}=0$$

$$(V_{B1}-V_1)G_1-u_{i1}G_1+i_{s3}+(V_2-V_{B1})G_2+u_{i2}G_2-i_{s4}-(V_5-V_{A1})G_5+u_{i5}G_5+(V_{A1}-V_6)G_6+u_{i6}G_6-i_{s7}+i_{s8}=0$$

$$\boxed{V_{A1}(G_5+G_6)+V_{B1}(G_1+G_2)-V_1G_1-V_2G_2-V_5G_5-V_6G_6=u_{i1}G_1-u_{i2}G_2-u_{i5}G_5+u_{i6}G_6-i_{s3}+i_{s4}+i_{s7}-i_{s8}}$$

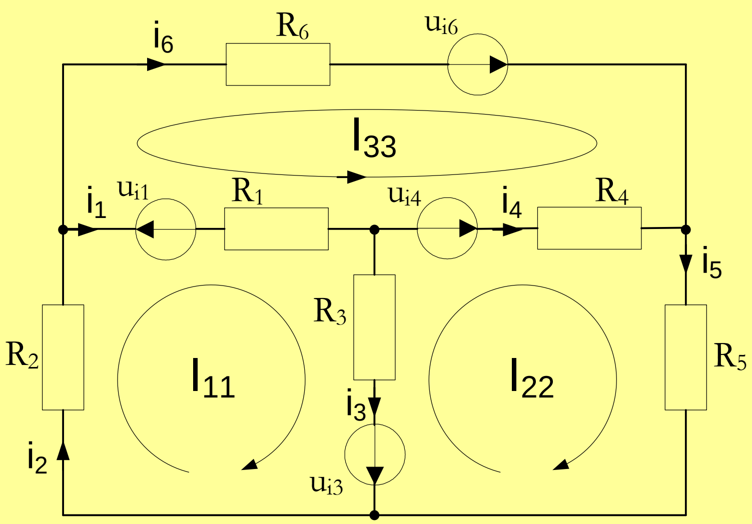
$$\boxed{V_{A1}-V_{B1}=\pm u_i}$$

$$\boxed{V_{A1}\sum_{\lambda\in(A1,\Sigma)}G_\lambda+V_{B1}\sum_{\lambda\in(B1,\Sigma)}G_\lambda-V_1\sum_{\lambda\in(1,\Sigma)}G_\lambda-\ldots-V_k\sum_{\lambda\in(k,\Sigma)}G_\lambda-\ldots=\sum_{\lambda\in\Sigma}\pm u_{i\lambda}G_\lambda+\sum_{\lambda\in\Sigma}\pm i_{s\lambda}}$$

# Teorema curenţilor ciclici (de contur sau de buclă)

- Tehnica adoptată in teorema curenţilor ciclici este aceea de introducere ca variabile independente a unor curenţi fictivi (curenţi ciclici) corespunzători fiecărui ochi fundamental.
- Curenţii fictivi, numiţi *curenţi ciclici (de contur sau de buclă)*, trec prin fiecare element din circuit. Astfel, pentru un nod existent într-un ochi de reţea, curentul ciclic corespunzător ochiului o dată intră în nod şi o dată iese din nod, astfel că satisface inerent prima teoremă a lui Kirchhoff.
- Dacă trec mai mulţi curenţi ciclici printr-un element, curentul de latură reprezintă suma algebrică a curenţilor ciclici ce trec prin element.

Pentru a demonstra teorema curenţilor ciclici, pornim de la un exemplu particular. Considerăm circuitul de mai jos cu l=6, N=4.




$$i_\lambda = \sum_{\beta\in(\lambda)} \pm I_{\beta\beta}$$

$$i_1 = I_{11} + I_{33} \qquad i_4 = I_{22} + I_{33}$$

$$i_2 = I_{11} \qquad i_5 = I_{22}$$

$$i_3 = I_{11} - I_{22} \qquad i_6 = -I_{33}$$

$$-i_1 + i_3 + i_4 = 0 \Rightarrow -I_{11} - I_{33} + I_{11} - I_{22} + I_{22} + I_{33} = 0$$

$$i_1R_1 + i_2R_2 + i_3R_3 = -u_{i1} + u_{i3}$$

$$(I_{11} + I_{33})R_1 + I_{11}R_2 + (I_{11} - I_{22})R_3 = -u_{i1} + u_{i3}$$

$$(R_1 + R_2 + R_3)I_{11} - R_3I_{22} + R_1I_{33} = -u_{i1} + u_{i3}$$

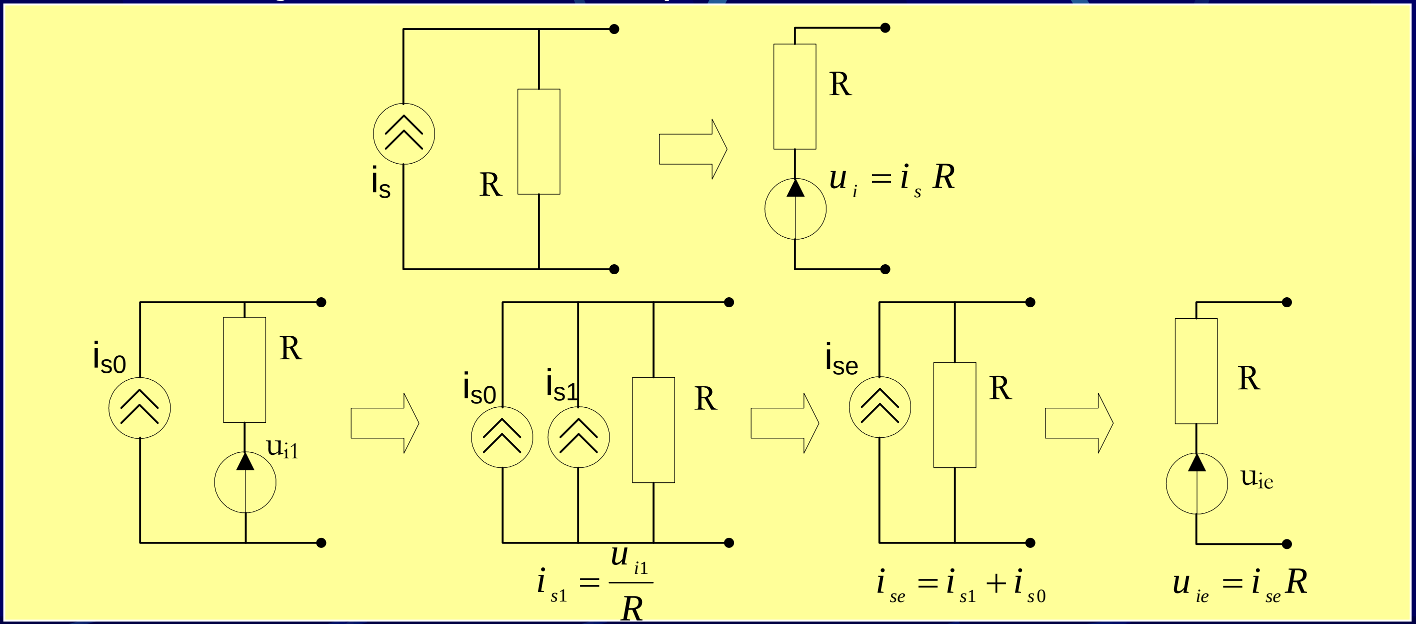
$$\boxed{R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = -u_{i1} + u_{i3}} \qquad R_{11} = R_1 + R_2 + R_3 \qquad R_{12} = -R_3 \qquad R_{13} = R_1$$

$$\boxed{R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = -u_{i3} + u_{i4}} \qquad R_{21} = R_{12} = -R_3 \qquad R_{22} = R_3 + R_4 + R_5 \qquad R_{23} = R_4$$

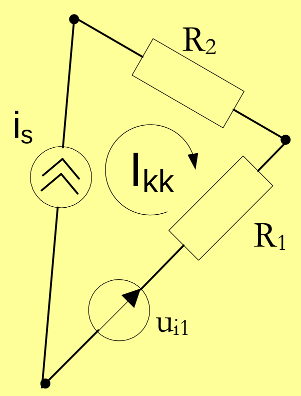
$$\boxed{R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = -u_{i1} + u_{i4} - u_{i6}} \qquad R_{31} = R_{13} = R_1 \qquad R_{32} = R_{23} = R_4 \qquad R_{33} = R_1 + R_4 + R_6$$

$$i_\gamma = \sum_{\lambda\in(\gamma)} \pm I_{\lambda\lambda} \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{o} R_{k\lambda} I_{\lambda\lambda} = \sum_{\lambda\in(k)} \pm u_{i\lambda}} \qquad R_{kk} = \sum_{\lambda\in(k)}^{o} R_\lambda > 0 \qquad R_{k\lambda} = \pm \sum_{\substack{\gamma\in(k)\\ \gamma\in(\lambda)}}^{o} R_\gamma$$

- Procedura folosită la aplicarea teoremei curenţilor ciclici urmăreşte următorii paşi:
- Se transfigurează toate sursele reale de curent în surse reale de tensiune (dacă este posibil) şi se reconsideră circuitul.
- Se aleg arbitrar curenţii ciclici pentru fiecare ochi fundamental, cu sensurile de parcurge o ochiurilor.
- Se scrie ecuaţia corespunzătoare curenţilor ciclici pentru fiecare ochi fundamental. Se rezolvă sistemul de ecuaţii în raport cu variabilele curenţii ciclici din ochiurile fundamentale.
- Curenţii din laturile circuitului se obţin în funcţie de curenţii ciclici. (suma algebrică a curenţilor ciclici ce trec prin latura în care dorim calculul curentului)



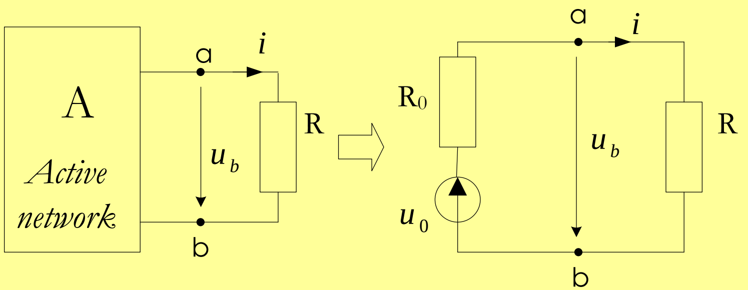
- In aplicarea teoremei curenţilor ciclici exstă câteva excepţii.




$$I_{kk} = i_s$$

# Teorema transferului maxim de putere

- Considerăm un sub-circuit liniar echivalat printr-o sursă de tensiune şi o rezistenţă (echivalenţă Thevenin) la bornele căruia se conectează o sarcină *R*.
- Sarcina R consumă putere luată de la sub-circuit.
- Se pune problema, ce valoare are sarcina *R* pentru care puterea dezvoltată în ea este maximă şi cât este această putere.




$$P_R = u_b i = i^2 R$$

$$i = \frac{u_0}{R + R_0}$$

$$P_R = \frac{R}{(R + R_0)^2} u_0^2$$

- Pentru a afla valoarea sarcinii $R^*$ care va absorbii puterea maximă de la sub+circuit, formăm derivata $dP_R/dR$ şi o egalăm cu zero. Se obţine:

$$\frac{\partial P_R}{\partial R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{R}{(R+R_0)^2} u_0^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_0^2 - R^2}{(R+R_0)^2} u_0^2 = 0$$

- Determinând pe R, avem: $R^* = R_0$ iar puterea maximă va fi: $P_{R\max} = \frac{u_0^2}{4R^*}$

“The reasonable man adapts himself to the world;
The unreasonable one persists in trying to adapt the world to himself.
**Therefore, all progress depends on the unreasonable man”**
(*George Bernard Shaw, Irish Dramatist & Socialist, 1856 - 1950*)