Matematici Speciale (PS)
(curs 1 - S1)

pt. a număra cazuri posibile: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

experimente aleatoare = experimentele care pot avea rezultate diferite în funcție de o serie de circumstanțe și rezultatele nu pot fi cunoscute înainte de realizarea experimentului

Notații în TP

- experiment aleator → aruncarea unui zar
- realizare (outcome) = rezultat exp. aleator
- mulțimea tuturor realizărilor (Ω) (sample space)
- eveniment = o colecție de realizări (submulțime din Ω)
- eveniment elementar = un element al lui Ω
- **eveniment imposibil** ($\emptyset$)
- **eveniment sigur** (Ω)

- **eveniment $C_\Omega A$ sau $\bar{A}$** = are loc dacă nu are loc A
  = nu se realizează A

- **eveniment ($A \cup B$)** (sau) = are loc dacă se realizează fie A, fie B

- **eveniment ($A \cap B$)** (și) = presupune realizarea lui A și a lui B

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$

$C_\Omega A$ sau $\bar{A} = \{x \mid x \in \Omega \text{ și } x \in A\}$

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\} \neq B \setminus A$

$A \setminus B = A \cap C B$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

A, B - disjuncte $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ - disjunctă dacă $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$

-> partiție a lui Ω dacă:

a) $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

b) e descompunere a lui Ω : $\Omega = \cup_i A_i$

Probabilitatea unui eveniment A : $P(A) \in [0,1]$

a) mulțimea observabilelor este finită și toate realizările experimentului sunt egal probabile

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

b) experiment aleator cu un nr. finit de realizări ce nu sunt egal probabile.

$$P(A) \approx \frac{h}{n}$$

h -> nr. cazuri în care s-a produs ev.

n -> nr. experimente

Spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ este format din:

- spațiul tuturor realizărilor unui experiment Ω:
  - cazul discret : aruncarea unei monede
  - cazul continuu : timp de așteptare $(\Omega = \{t \mid 0 \leq t \leq 30\})$
- eveniment = o submulțime a lui Ω
- spațiu de evenimente $\mathcal{K}$
- probabilitatea P

Fie o experiență aleatoare, iar $\mathcal{K}$ - familia tuturor evenimentelor asociate acestui experiment aleator, $\mathcal{K} \subset P(\Omega)$, care verifică:

- $\Omega \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K} \Rightarrow C_\Omega A \in \mathcal{K}$
- $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{K}$

$\Rightarrow$ familie admisibilă de evenimente

$$\Rightarrow A, B \in \mathcal{K} \begin{cases} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{K} \\ \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{K} \end{cases}$$

evenimente incompatibile sau mutual exclusive $A \cap B = \emptyset$

Definiția axiomatică a probabilității

$P : \mathcal{K} \to [0,1]$:

1) $P(\Omega) = 1$

2) $$\left.\begin{array}{l} A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{K} \\ A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} P(A_i)$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

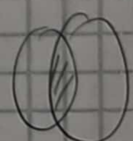
$(\Omega, \mathcal{K}, P) \to$ spațiu de probabilitate

Proprietăți ale probabilității

1) $P(C_\Omega A) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} A \cup C_\Omega A = \Omega \\ A \cap C_\Omega A = \emptyset \end{array}\right. \overset{def}{\Rightarrow} P(A) + P(C_\Omega A) = 1$$

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\quad A \cap B \neq \emptyset$



dacă $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = ?$

$B = A \cap B - B \setminus A \Rightarrow P(B) = P(A \cap B) - P(B \setminus A)$

$\Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$

Obs: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

4) Inegalitatea lui Boole $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Principiul includerii - excluderii

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Ev. A	Multime A	$P(A) \in [0,1]$
Ev. sigur	Ω	1
Ev. imposibil	$\emptyset$	0
Ev. contrar lui A	$C_\Omega A$	$P(C_\Omega A) = 1 - P(A)$
Ev. reuniune	$A \cup B$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Ev. intersecție	$A \cap B$	$P(A \cap B) = ?$
Ev. mutual exclusive	$A \cap B = \emptyset$	$P(A \cap B) = 0$
Ev. diferență	$A \setminus B$	$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$