Curs 4: Vectori aleatori discreţi

.

1.1 Vectori aleatori discreţi

Dacă într-un experiment aleator se observă simultan două sau mai multe variabile aleatoare discrete, atunci o pereche, (X, Y), sau mai general un n-uplu , $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, de variabile aleatoare se numeşte vector aleator. Considerăm mai întâi cazul unei perechi, generalizarea noţiunilor şi rezultatelor la vectori aleatori de n componente fiind apoi evidentă.

Pentru a putea calcula probabilităţi ale evenimentelor în care sunt implicate două variabile aleatoare discrete, X şi Y, se precizează mulţimile de valori ale acestora, $D_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, respectiv $D_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ şi se dă distribuţia de probabilitate a vectorului aleator, care constă în precizarea probabilităţilor evenimentelor de forma $((X, Y) = (x_i, y_j)) = (X = x_i) \cap (Y = y_j)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Evenimentul $((X, Y) = (x_i, y_j))$ este evenimentul ca vectorul aleator (X, Y) să ia ca "valoare" perechea (x_i, y_j). Notând cu $p_{X,Y}(x_i, y_j) \overset{sau}{=} p_{ij} := P((X, Y) = (x_i, y_j))$, probabilitatea unui astfel de eveniment, distribuţia de probabilitate se afişează concentrat astfel:

$$(X, Y) = \begin{pmatrix} (x_i, y_j) \\ p_{ij} \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \tag{1}$$

Pentru vectori aleatori, (X, Y), cu număr redus de valori ale componentelor, distribuţia de probabilitate se dă într-un tablou 2D de tipul:

				Y			
		y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_n
	x_1	$\mathbf{p_{11}}$	$\mathbf{p_{12}}$	$\ldots$	$\mathbf{p_{1j}}$	$\ldots$	$\mathbf{p_{1n}}$
	x_2	$\mathbf{p_{21}}$	$\mathbf{p_{22}}$	$\ldots$	$\mathbf{p_{2j}}$	$\ldots$	$\mathbf{p_{2n}}$
X	$\vdots$						
	x_i	$\mathbf{p_{i1}}$	$\mathbf{p_{i2}}$	$\ldots$	$\mathbf{p_{ij}}$	$\ldots$	$\mathbf{p_{in}}$
	$\vdots$						
	x_m	$\mathbf{p_{m1}}$	$\mathbf{p_{m2}}$	$\ldots$	$\mathbf{p_{mj}}$	$\ldots$	$\mathbf{p_{mn}}$

Observaţia 1.1.1 *Fiind dat vectorul aleator (X, Y), evenimentul:*

$$((X, Y) = (x, y)) = (X = x) \cap (Y = y)$$

se notează $(X = x, Y = y)$.

Exemplul 1. Fie X, Y două variabile aleatoare discrete ce pot lua valorile $\{1, 2, 3, 4\}$. Distribuţia de probabilitate comună a celor două variabile este dată în tabloul:

			Y		
		1	2	3	4
	1	0.03	0.05	0.1	0.12
X	2	0.05	0.06	0.08	0.07
	3	0.07	0.06	0.06	0.02
	4	0.07	0.09	0.05	0.02

Fiecare element din poziţia (i, j) a matricii 4×4 reprezintă probabilitatea $P(X = i, Y = j)$. De exemplu $P(X = 2, Y = 3) = 0.08$. Suma tuturor acestor probabilităţi este 1: $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} p_{ij} = 1$.

Cunoscând distribuţia de probabilitate a vectorului aleator, (X, Y), ne întrebăm dacă putem afla distribuţia fiecărei componente, adică a lui X, respectiv Y. Mai precis, a determina distribuţia de probabilitate a lui X, revine la a determina probabilităţile evenimentelor $(X = x_i)$, $i = \overline{1, m}$.

Notăm cu $p_X(x_i) \overset{sau}{=} p_{i\bullet} = P(X = x_i)$, probabilitatea ca variabila aleatoare X să ia valoarea x_i şi cu $p_Y(y_j) \overset{sau}{=} p_{\bullet j} = P(Y = y_j)$, probabilitatea ca Y să ia valoarea y_j, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Exprimăm evenimentul $(X = x_i)$ ca reuniune de evenimente relativ la vectorul aleator (X, Y):

$$(X = x_i) = (X = x_i, Y = y_1) \cup (X = x_i, Y = y_2) \cup \cdots \cup (X = x_i, Y = y_n). \qquad (2)$$

Deoarece evenimentele:

$$(X = x_i, Y = y_1), (X = x_i, Y = y_2), \ldots, (X = x_i, Y = y_n) \qquad (3)$$

sunt incompatibile, rezultă că:

$$p_X(x_i) = p_{i\bullet} := P(X = x_i) = p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{in}, i = \overline{1, m}, \qquad (4)$$

adică $P(X = x_i)$ este suma elementelor de pe linia i din tabloul distribuţiei de probabilitate a vectorului aleator, (X, Y). Analog se argumentează că:

$$p_Y(y_j) = p_{\bullet j} := P(Y = y_j) = p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{mj}, j = \overline{1, n} \qquad (5)$$

Evident că $\sum_{j=1}^{n} p_{\bullet j} = 1$ şi $\sum_{i=1}^{m} p_{i\bullet} = 1$.

Definiţia 1.1.1 *Distribuţiile de probabilitate ale variabilelor aleatoare X şi Y:*

$$X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_{i\bullet} \end{pmatrix}, i = \overline{1, m}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_j \\ p_{\bullet j} \end{pmatrix}, j = \overline{1, n}, \qquad (6)$$

determinate din distribuţia de probabilitate a vectorului aleator, (X, Y), se numesc distribuţii marginale ale vectorului aleator (X, Y).

Cunoscând distribuţia de probabilitate a unui vector aleator, (X, Y), problema fundamentală este să stabilim interdependeţa dintre evenimentele de forma $(X = x_i)$, $i = \overline{1, m}$, $(Y = y_j)$, $j = \overline{1, n}$. Cu alte cuvinte sa investigăm dacă perechi de astfel de evenimente sunt independente sau nu. În acest scop calculăm probabilităţile condiţionate $P(X = x_i|Y = y_j)$ (probabilitatea ca X să ia valoarea x_i, ştiind că Y a luat valoarea y_j):

$$P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} p_{ij}} \tag{7}$$

Notăm $p(x_i|y_j) = P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} p_{ij}}$. Suma acestor probabilităţi condiţionate este:

$$\sum_{i=1}^{m} p(x_i|y_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \frac{p_{\bullet j}}{p_{\bullet j}} = 1. \tag{8}$$

Astfel, avem o variabilă aleatoare ce ia valorile x_i cu probabilităţile $p(x_i|y_j)$. Notăm această variabilă prin $(X|Y = y_j)$ şi citim: variabila aleatoare X condiţionată de evenimentul $(Y = y_j)$, j fixat:

$$(X|Y = y_j) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_m \\ p(x_1|y_j) & p(x_2|y_j) & \cdots & p(x_i|y_j) & \cdots & p(x_m|y_j) \end{pmatrix} \tag{9}$$

Analog variabila Y condiţionată de $(X = x_i)$ are distribuţia de probabilitate:

$$(Y|X = x_i) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_j & \cdots & y_n \\ p(y_1|x_i) & p(y_2|x_i) & \cdots & p(y_j|x_i) & \cdots & p(y_n|x_i) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

unde

$$p(y_j|x_i) := P(Y = y_j|X = x_i) = \frac{P(Y = y_j, X = x_i)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}} \tag{11}$$

Exemplul 2. Considerăm vectorul aleator (X, Y) din exemplul precedent. Adăugăm distribuţiei de probabilitate a vectorului aleator şi distribuţiile marginale:

			Y			
		1	2	3	4	p_X
	1	0.03	0.05	0.1	0.12	0.3
X	2	0.05	0.06	0.08	0.07	0.26
	3	0.07	0.06	0.06	0.02	0.21
	4	0.07	0.09	0.05	0.02	023
	p_Y	0.22	0.26	0.29	0.23	

Distribuţia de probabilitate a variabilei condiţionate $(X|Y = 2)$ este:

$$(X|Y=2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \dfrac{p_{12}}{p_Y(2)} & \dfrac{p_{22}}{p_Y(2)} & \dfrac{p_{32}}{p_Y(2)} & \dfrac{p_{42}}{p_Y(2)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \dfrac{0.05}{0.26} & \dfrac{0.06}{0.26} & \dfrac{0.06}{0.26} & \dfrac{0.09}{0.26} \end{pmatrix}$$

Definiţia 1.1.2 *Variabilele aleatoare discrete X, Y cu proprietatea că $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$, oricare ar fi $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, se numesc variabile aleatoare independente.*

Folosind notaţiile de mai sus, variabilele aleatoare X,Y, cu proprietatea că $p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$ sunt independente. Echivalent, variabilele aleatoare X, Y sunt independente dacă distribuţiile condiţionate coincid cu cele marginale:

$$P(X = x_i|Y = y_j) = P(X = x_i), \text{ sau } P(Y = y_j|X = x_i) = P(Y = y_j), \tag{12}$$

$\forall\ i, = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

Generalizând, variabilele aleatoare discrete $X_1, X_2, \ldots, X_n$, astfel încât distribuţia de probabilitate a vectorului aleator $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este produsul distribuţiilor marginale:

$$p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n),$$

oricare ar fi $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_{X_1} \times D_{X_2} \times \cdots \times D_{X_n}$, se numesc variabile aleatoare independente.

Exemplul 3. Un blogger realizează $0, 1$ sau 2 postări, sâmbăta şi 0 sau 1 duminica. Notăm cu S, respectiv D variabilele aleatoare ce dau numărul de postări făcute sâmbăta, respectiv, duminica. Vectorul aleator (S, D) are distribuţia de probabilitate:

		D	
		0	1
	0	0.1	0.1
S	1	0.3	0.2
	2	0.1	0.2

Este numărul de postări afişate sâmbăta independent de numărul celor afişate duminica?
Rezolvare: Pentru a răspunde la întrebare, calculăm probabilităţile marginale $P(S = i)$, $i = 0, 1, 2$, $P(D = j)$, $j = 0, 1$ şi avem:

		D		
		0	1	$p_{i.}$
	0	0.1	0.1	0.2
S	1	0.3	0.2	0.5
	2	0.1	0.2	0.3
	$p_{.j}$	0.5	0.5	

Să verificăm dacă $P(S=i, D=j) = P(S=i)P(D=j)$, $\forall\ i = 0,1,2$, $\forall\ j = 0,1$: pentru $i=0, j=0$, $0.1 = 0.2 \cdot 0.5$; pentru $i=0, j=1$, $0.1 = 0.2 \cdot 0.5$; $i=1, j=0$, $0.3 \neq 0.5 \cdot 0.5$. În concluzie variabilele S şi D nu sunt independente.

1.1.1 Vectori aleatori discreţi de distribuţie uniformă

Definiţia 1.1.3 *Fie X, Y două variabile aleatoare ce au ca mulţimi de valori pe $D_X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, respectiv $D_Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Vectorul aleator (X,Y) ce are distribuţia de probabilitate $p_{X,Y}(x,y) = P((X,Y)=(x,y)) = \dfrac{1}{|D_X|\,|D_Y|} = \dfrac{1}{mn}$, $\forall\ (x,y) \in D_X \times D_Y$, se numeşte vector aleator, uniform distribuit pe $D_X \times D_Y$.*

În notaţia adoptată anterior, distribuţia de probabilitate se dă printr-un tablou:

				Y			
		y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n
	x_1	$\frac{1}{mn}$	$\frac{1}{mn}$	$\dots$	$\frac{1}{mn}$	$\dots$	$\frac{1}{mn}$
X	x_2	$\frac{1}{mn}$	$\frac{1}{mn}$	$\dots$	$\frac{1}{mn}$	$\dots$	$\frac{1}{mn}$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	x_i	$\frac{1}{mn}$	$\frac{1}{mn}$	$\dots$	$\frac{1}{mn}$	$\dots$	$\frac{1}{mn}$
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		
	x_m	$\frac{1}{mn}$	$\frac{1}{mn}$	$\dots$	$\frac{1}{mn}$	$\dots$	$\frac{1}{mn}$

Calculând distribuţiile marginale obţinem:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

adică variabilele aleatoare, X şi Y, sunt uniform distribuite pe D_X, respectiv D_Y, şi

$$P((X,Y)=(x,y)) = \frac{1}{mn} = \frac{1}{m}\frac{1}{n} = P(X=x) \cdot P(Y=y), \forall\ x,y \in \mathbb{R},$$

ceea ce ilustrează că variabilele aleatoare, X şi Y, sunt independente. Prin urmare avem:

Propoziţia 1.1.1 *Dacă un vector aleator discret, (X,Y), este uniform distribuit pe produsul cartezian a două mulţimi finite D_X, D_Y, atunci coordonatele sale, X şi Y, sunt independente şi uniform distribuite pe D_X, respectiv D_Y.*

Reciproc, dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente şi uniform distribuite, pe mulţimile finite D_X, respectiv D_Y, atunci vectorul aleator discret (X,Y) este uniform distribuit pe $D_X \times D_Y$

1.2 Funcţii de două variabile aleatoare discrete

Fie X, Y două variabile aleatoare discrete ce au mulţimile de valori $D_X = \{x_i, i = \overline{1,m}\}$, respectiv $D_Y = \{y_j, j = \overline{1,n}\}$ şi funcţia $h : D_X \times D_Y \to \mathbb{R}$, continuă şi mărginită. Atunci $h(X, Y)$ este o variabilă aleatoare discretă ce ia valorile $z_{ij} = h(x_i, y_j)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Să calculăm distribuţia de probabilitate a variabilei imagine $h(X, Y)$:

$P(h(X, Y) = z_{ij}) = P((X, Y) \in h^{-1}(\{z_{ij}\}))$, $\forall\ i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, unde $h^{-1}(\{z\}) = \{(x, y) \,|\, h(x, y) = z\}$ este preimaginea elementului z.

Exemplul 4. Fie $h(x, y) = x + y$ şi variabila aleatoare $h(X, Y) = X + Y$. Distribuţia de probabilitate a variabilei aleatoare $Z = X+Y$ se obţine calculând $P(Z = z) = P(X+Y = z)$. Evenimentul $(X + Y = z)$ se poate produce în mai multe moduri, dacă există mai multe perechi (x_i, y_j) pentru care suma $x_i + y_j = z$. Astfel,

$$P(X + Y = z) = P((X, Y) \in h^{-1}(z)) = \sum_{i,j|x_i+y_j=z} P(X = x_i, Y = y_j). \tag{13}$$

Observaţii

• Putem calcula distribuţia de probabilitate a sumei a două variabile sau mai general, a compusei $h(X, Y)$, doar dacă cunoaştem distribuţia de probabilitate a vectorului aleator (X, Y);

• Distribuţia de probabilitate a sumei poate fi calculată în cazul variabilelor X, Y, independente şi când cunoaştem doar distribuţiile marginale ale lui X şi Y, pentru că $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$.

Exemplul 5. Considerăm exemplul prezentat anterior:

Exemplul 6. Un blogger realizează 0, 1 sau 2 postări, sâmbăta şi 0 sau 1 duminica. Notăm cu S, respectiv D variabilele aleatoare ce dau numărul de postări făcute sâmbăta, respectiv, duminica. Vectorul aleator (S, D) are distribuţia de probabilitate:

		D	
		0	1
	0	0.1	0.1
S	1	0.3	0.2
	2	0.1	0.2

Să se calculeze probabilitatea ca în cele două zile să afişeze două postări.
Rezolvare: Trebuie să calculăm $P(S+D = 2)$. Evenimentul $(S+D = 2) = (S = 1, D = 1) \cup (S = 2, D = 0)$. Deci $P(S + D = 2) = P(S = 1, D = 1) + P(S = 2, D = 0) = 0.2 + 0.1 = 0.3$.

Propoziţia 1.2.1 *Dacă* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sunt variabile aleatoare discrete având mediile* $m_i = M(X_i)$, $i = \overline{1,n}$, *şi* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, *atunci media combinaţiei liniare a variabilelor aleatoare, cu coeficienţii* a_i, *este combinaţia liniară cu aceeaşi coeficienţi, a mediilor* $M(X_i)$, $i = \overline{1,n}$:

$$M(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1M(X_1) + a_2M(X_2) + \cdots + a_nM(X_n)$$