Curbe spline + Bezier

Spline

splină liniară

o curbă care $n-1$ segmente de dreaptă $\Rightarrow n$ puncte

- o **curbă splină cubică** $S(x)$ care trece prin punctele $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ este o mulţime de polinoame cubice

$$
\begin{aligned}
S_1(x) &= y_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3 \text{ pe } [x_1, x_2] \\
S_2(x) &= y_2 + b_2(x-x_2) + c_2(x-x_2)^2 + d_2(x-x_2)^3 \text{ pe } [x_2, x_3] \\
&\vdots \\
S_{n-1}(x) &= y_{n-1} + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x-x_{n-1})^3 \text{ pe } [x_{n-1}, x_n]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

cu următoarele proprietăţi:

Faptul 1

$S_i(x_i) = y_i$ şi $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ pentru $i = 1, \ldots, n-1$.

Faptul 2

$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ pentru $i = 2, \ldots, n-1$.

Faptul 3

$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ pentru $i = 2, \ldots, n-1$.

- constrângerile adăugate Faptelor 1–3 sunt

Faptul 4

Curbă splină naturală. $S''_1(x_1) = 0$ şi $S''_{n-1}(x_n) = 0$.

- o curbă splină care satisface aceste condiţii suplimentare se numeşte curbă splină **naturală**
- observăm că (2) este o curbă splină cubică naturală, deoarece se poate verifica uşor din (4) că $S''_1(1) = 0$ şi $S''_3(5) = 0$
- există şi alte feluri de a adăuga cele două condiţii suplimentare

- de obicei, ca în cazul splinelor naturale, acestea determină proprietăţi suplimentare ale capetelor din stânga şi din dreapta ale curbei spline, astfel încât acestea sunt numite **condiţii de capăt**
- acum că avem numărul corect de ecuaţii, $3n-3$ ecuaţii în $3n-3$ necunoscute, putem să le rezolvăm pentru a găsi coeficienţii curbei spline
- mai întâi, vom scrie ecuaţiile în necunoscutele b_i, c_i, d_i
- partea a doua a Faptului 1 implică atunci următoarele $n-1$ ecuaţii:

$$
\begin{aligned}
y_2 &= S_1(x_2) = y_1 + b_1(x_2-x_1) + c_1(x_2-x_1)^2 + d_1(x_2-x_1)^3 \\
&\vdots \\
y_n &= S_{n-1}(x_n) = y_{n-1} + b_{n-1}(x_n-x_{n-1}) + c_{n-1}(x_n-x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x_n-x_{n-1})^3.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

- Faptul 2 generează alte $n-2$ ecuaţii,

$$
\begin{aligned}
0 &= S'_1(x_2) - S'_2(x_2) = b_1 + 2c_1(x_2-x_1) + 3d_1(x_2-x_1)^2 - b_2 \\
&\vdots \\
0 &= S'_{n-2}(x_{n-1}) - S'_{n-1}(x_{n-1}) = b_{n-2} + 2c_{n-2}(x_{n-1}-x_{n-2}) \\
&\quad + 3d_{n-2}(x_{n-1}-x_{n-2})^2 - b_{n-1},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Algoritmul 1 (Curbă splină cubică naturală)

Dându-se $x = [x_1, \ldots, x_n]$, unde $x_1 < \cdots < x_n$, $y = [y_1, \ldots, y_n]$

for $i = 1, \ldots, n-1$

$\quad a_i = y_i$

$\quad \delta_i = x_{i+1} - x_i$

$\quad \Delta_i = y_{i+1} - y_i$

end

Rezolvăm (10) pentru a găsi $c_1, \ldots, c_n$

for $i = 1, \ldots, n-1$

$\quad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i}$

$\quad b_i = \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$

end

Curba splină cubică naturală este

$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ pe $[x_i, x_{i+1}]$ pentru $i = 1, \ldots, n-1$.

Exemplul 1

Exemplul 1

verificaţi că $\{S_1, S_2, S_3\}$ din (2) satisfac toate proprietăţile curbelor spline cubice pentru punctele de bază $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(4, 4)$, şi $(5, 3)$

verificăm toate cele trei proprietăţi

Faptul 1: Sunt 4 puncte de bază

$S_1(1)=2$ $\qquad$ $S_1(2)=1$

$S_2(2)=1$ $\qquad$ $S_2(4)=4$

$S_3(4)=4$ $\qquad$ $S_3(5)=3$

- ecuaţiile care definesc această curbă sunt

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 2 - \frac{13}{8}(x-1) + 0(x-1)^2 + \frac{5}{8}(x-1)^3 \text{ pe } [1,2] \\ S_2(x) &= 1 + \frac{1}{4}(x-2) + \frac{15}{8}(x-2)^2 - \frac{5}{8}(x-2)^3 \text{ pe } [2,4] \\ S_3(x) &= 4 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{15}{8}(x-4)^2 + \frac{5}{8}(x-4)^3 \text{ pe } [4,5]. \end{aligned} \tag{2}$$

$S_1(1) = 2 - 0 - 0 + 0 = 2$ ✓

$S_1(2) = 2 - \frac{13}{8} + \frac{5}{8} = 2 - \frac{8}{8} = 1$ ✓

$S_2(2) = 1 + 0 + 0 - 0 = 1$ ✓

$S_2(4) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{15}{\cancel{8}_2}\cdot 4 - \frac{5}{\cancel{8}}\cdot 8 = 1 + 8 - 5 = 4$ ✓

$S_3(5) = 4 + \frac{1}{4} - \frac{15}{8} + \frac{5}{8} = 4 + \frac{1}{4} - \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{8}_4} = 4 - \frac{4}{4} = 3$

$S_3(4) = 4 + 0 - 0 + 0 = 4$

Faptul 2: Facem prima derivată

$$\begin{aligned} S_1'(x) &= -\frac{13}{8} + \frac{15}{8}(x-1)^2 \\ S_2'(x) &= \frac{1}{4} + \frac{15}{4}(x-2) - \frac{15}{8}(x-2)^2 \\ S_3'(x) &= \frac{1}{4} - \frac{15}{4}(x-4) + \frac{15}{8}(x-4)^2. \end{aligned}$$

Verificăm dacă $S_1'(2) = S_2'(2) \Leftrightarrow -\frac{13}{8} + \frac{15}{8}\cdot 1 = \frac{1}{4}$ ✓

$S_2'(4) = S_3'(4) \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{15}{4}(4-2) - \frac{15}{8}\cdot 4 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} + \frac{30}{4} - \frac{30}{4} = \frac{1}{4}$ ✓

Faptul 3: Facem derivata a 2-a

$$\begin{aligned} S_1''(x) &= \frac{15}{4}(x-1) \\ S_2''(x) &= \frac{15}{4} - \frac{15}{4}(x-2) \\ S_3''(x) &= -\frac{15}{4} + \frac{15}{4}(x-4). \end{aligned}$$

Verificăm dacă $S_1''(2) = S_2''(2) \Leftrightarrow \frac{15}{4}\cdot 1 = \frac{15}{4} - \frac{15}{4}\cdot 0$ ✓

$S_2''(4) = S_3''(4) \Leftrightarrow \frac{15}{4} - \frac{15}{4}\cdot 2 = -\frac{15}{4} + \frac{15}{4}\cdot 0$

$-\frac{15}{4} = -\frac{15}{4}$ ✓

$\Rightarrow$ (2) este o curbă splină cubică

Exemplul 2

Găsiți curba splină cubică naturală care trece prin $(0,3)$, $(1,-2)$ și $(2,1)$

- $x: \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$

  $y: \quad y_1 = 3, \quad y_2 = -2, \quad y_3 = 1$

- $\delta_1 = 1 - 0 = 1 \qquad \Delta_1 = -2 - 3 = -5$

  $\delta_2 = 2 - 1 = 1 \qquad \Delta_2 = 1 - (-2) = 3$

- ecuația matricială

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cdot 1 + 2\cdot 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\left(\frac{3}{1} - \frac{-5}{1}\right) \\ 0 \end{bmatrix} = 24$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + 4c_2 + c_3 = 24 \\ c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 4c_2 = 24 \qquad c_2 = 6$$

$\Rightarrow$ soluția este $[0,6,0]^T$

- (8), (9)

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i} \text{ pentru } i = 1, \ldots, n-1. \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - c_i\delta_i - d_i\delta_i^2 \\ &= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - c_i\delta_i - \frac{\delta_i}{3}(c_{i+1} - c_i) && 1 \to n-1 \\ &= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), && (9) \end{aligned}$$

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3\cdot\delta_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3\delta_2} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$b_1 = \frac{\Delta_1}{\delta_1} - \frac{\delta_1}{3}(2c_1 + c_2) = -5 - \frac{1}{3}(6) = -7$$

$$b_2 = \frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\delta_2}{3}(2c_2 + c_3) = 3 - \frac{1}{3}(12) = -1$$

$\Rightarrow$ curba splină cubică este

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 3 - 7x + 0x^2 + 2x^3 \text{ pe } [0,1] \\ S_2(x) &= -2 - 1(x-1) + 6(x-1)^2 - 2(x-1)^3 \text{ pe } [1,2]. \end{aligned}$$

5. Găsiți curba spline cubică naturală care trece prin $(-1,1)$, $(1,1)$, $(2,4)$. Verificați apartenența punctelor la curba găsită și continuitatea și derivabilitatea ei

$x_1=-1$ $\quad x_2=1$ $\quad x_3=2$ $\quad \Rightarrow \delta_1=2$ $\quad \delta_2=1$

$y_1=1$ $\quad y_2=1$ $\quad y_3=4$ $\quad \rightarrow \Delta_1=0$ $\quad \Delta_2=3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$c_1=0$

$c_3=0 \qquad \Rightarrow [0, \frac{3}{2}, 0]^T$

$c_2=\frac{3}{2}$

$$d_1=\frac{\frac{\cancel{3}}{2}-0}{\cancel{3}\cdot 2}=\frac{1}{4} \qquad d_2=\frac{0-\frac{3}{2}}{3\cdot 1}=-\frac{1}{2}$$

$$b_1=\frac{\Delta_1}{\delta_1}-\frac{\delta_1}{3}(2c_1+c_2)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=-1$$

$$b_2=\frac{3}{1}-\frac{1}{\cancel{3}}(\cancel{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}+0)=3-1=2$$

$$S_1(x)=y_1+b_1(x-x_1)+c_1(x-x_1)^2+d_1(x-x_1)^3$$

$$=1+(-1)(x+1)+\frac{1}{4}(x+1)^3$$

$$S_2(x)=y_2+b_2(x-x_2)+c_2(x-x_2)^2+d_2(x-x_2)^3=$$

$$=1+2(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+(-\frac{1}{2})(x-1)^3$$

! pentru continuitate

$S_i(x_i)=y_i \qquad S_i(x_{i+1})=y_{i+1}$

$x_1=-1$ $\quad x_2=1$ $\quad x_3=2$ $\qquad S_1(-1)=1$ ✓ $\qquad S_1(1)=1-2+\frac{1}{4}\cdot 2^3=1$ ✓

$y_1=1$ $\quad y_2=1$ $\quad y_3=4$ $\qquad S_2(1)=1$ ✓ $\qquad S_2(2)=1+2+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=4$ ✓

$\Rightarrow$ continuă

$i \geq 2$

Pentru derivabilitate

$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$

$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$

$S_1(x) = 1 + (-1)(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)^3$

$S_2(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)^3$

$S_1'(x) = -1 + \frac{3}{4}(x+1)^2$

$S_2'(x) = 2 + 3(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2$

$x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2$

$y_1 = 1 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = 4$

$S_1'(1) = -1 + \frac{3}{4} \cdot 4 = 2 \qquad S_2'(1) = 2$

$S_1''(x) = \frac{3}{2}(x+1) \qquad S_2''(x) = 3 - 3(x-1)$

$S_1''(1) = 3 \qquad S_2''(1) = 3$

$\Rightarrow$ derivabilă

cond pt. naturală $S_1''(-1) = 0 \qquad S_2''(2) = 3 - 3 = 0$ ✓

Găsiți coeficienții curbei spline cubice naturale care interpolează $f(x) = \ln x$ în cinci puncte egal depărtate din intervalul $[1, 3]$, inclusiv capetele intervalului. $\to$ TEST

Găsiți coeficienții curbei spline cubice naturale care interpolează $f(x) = e^x$ în cinci puncte egal depărtate din intervalul $[-1, 1]$, inclusiv capetele intervalului. $\to$ TEST

Găsiți curba splină cubică naturală care trece prin punctele $(0, 0), (1, 1), (2, 4)$ (4p). Verificați apartenența punctelor la curba găsită (2p), și continuitatea și derivabilitatea curbei (4p).

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2 \qquad \delta_1 = 1 \quad \delta_2 = 1$

$y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = 4 \qquad \Delta_1 = 1 \quad \Delta_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$c_1 = 0 \quad c_2 = \frac{3}{2} \quad c_3 = 0 \qquad \left[0, \frac{3}{2}, 0\right]^T$

$d_1 = \frac{\frac{3}{2} - 0}{3} = \frac{1}{2} \qquad d_2 = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2}$

$b_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}\left(2 \cdot 0 + \frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$b_2 = 3 - \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{3}{2} + 0\right) = 2$

$S_1(x) = 0 + \frac{1}{2}(x-0) + 0\cdot(x-0)^2 + \frac{1}{2}(x-0)^3 =$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3$

$S_2(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + (-\frac{1}{2})(x-1)^3$

- Faptul 1 garantează că splina cubică $S(x)$ interpolează punctele date
- Faptul 2 forţează părţile adiacente ale splinei să se întâlnească în acelaşi punct, şi Faptul 3 face acelaşi lucru pentru curbură, reprezentată prin a doua derivată

F1: $S_i(x_i) = y_i$ și $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$

$S_1(0) = 0$ $S_1(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ $S_2(1) = 1$ ✓ $S_2(2) = 1 + 2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 4$

F2 $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ F3 $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$

$S_1'(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2$ $S_2'(x) = 2 + 3(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2$

$S_1''(x) = 3x$ $S_2''(x) = 3 - 3(x-1)$

se înlocuiește + calcule

Bezier

- curba părăseşte punctul (x_1, y_1) de-a lungul direcţiei tangente $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ şi se termină la (x_4, y_4) de-a lungul direcţiei tangente $(x_4 - x_3, y_4 - y_3)$

Algoritmul 2 (Curbă Bézier)

Dându-se capetele (x_1, y_1), (x_4, y_4)
Dându-se punctele de control (x_2, y_2), (x_3, y_3)
Considerăm

$$\begin{aligned} b_x &= 3(x_2 - x_1) \\ c_x &= 3(x_3 - x_2) - b_x \\ d_x &= x_4 - x_1 - b_x - c_x \\ b_y &= 3(y_2 - y_1) \\ c_y &= 3(y_3 - y_2) - b_y \\ d_y &= y_4 - y_1 - b_y - c_y. \end{aligned}$$

Curba Bézier este definită pentru $0 \le t \le 1$ prin

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 + b_x t + c_x t^2 + d_x t^3 \\ y(t) &= y_1 + b_y t + c_y t^2 + d_y t^3. \end{aligned}$$

$b_x \Leftrightarrow x'(t)$

Exemplul 3

- găsiți curba Bézier $(x(t), y(t))$ care trece prin punctele $\overset{1}{(1,1)}, \overset{4}{(2,2)}$ și are puncte de control $\overset{2}{(1,3)}, \overset{3}{(3,3)}$

$$b_x = 3(x_2 - x_1) = 3(1-1) = 0$$
$$c_x = 3(x_3 - x_2) - b_x = 3(3-1) - 0 = 6$$
$$d_x = x_4 - x_1 - b_x - c_x = 2 - 1 - 0 - 6 = -5$$
$$b_y = 3(y_2 - y_1) = 6$$
$$c_y = 3(y_3 - y_2) - b_y = -6$$
$$d_y = y_4 - y_1 - b_y - c_y = 1$$

=> curba Bézier:

$$x(t) = 1 + 6t^2 - 5t^3$$
$$y(t) = 1 + 6t - 6t^2 + t^3$$

- ca un caz special, când punctele de control sunt egale cu capetele, curba este un simplu segment de dreaptă, după cum se arată în următorul exemplu

7 Deduceți ec care def o curbă Bezier în spațiu. Găsiți curba Bezier def de punctele (1,0,0), (2,0,0), (0,2,1), (0,1,0). Ver. apartenența capetelor la curba găsită.

↳ calcule + $x(t), y(t), z(t)$

Deduceți ecuațiile care definesc o curbă Bézier în spațiu (2p). Găsiți cele două capete și cele două puncte de control pentru curba Bézier dată prin (6p):

$$\begin{cases} x(t) = 2 + t^2 - t^3 \\ y(t) = 1 - t + 2t^3 \\ z(t) = 2t^3. \end{cases}$$

Verificați aparteneța capetelor la curba dată mai sus (2p). $t \in [0,1]$ -> capetele

$$x(t) = x1 + bx\,t + cx\,t^2 + dx \cdot t^3$$
$$y(t) = y1 + by\,t + cy\,t^2 + dy\,t^3$$
$$z(t) = z1 + bz\,t + cz\,t^2 + dz\,t^3$$

$x_1 = 2 \qquad y_1 = 1 \qquad z_1 = 0$

$bx = 0 \Rightarrow x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$

$by = -1 \Rightarrow y_2 - y_1 = -3 \Rightarrow y_2 = -2$

$bz = 0 \Rightarrow z_2 - z_1 = 0 \Rightarrow z_2 = 0$

Cx = 1 + continuare

Deduceţi ecuaţiile care definesc o curbă Bézier în spaţiu (2p). Găsiţi cele două capete şi cele două puncte de control pentru curba Bézier dată prin (6p):

$$\begin{cases} x(t) = 3 + 4t - t^2 + 2t^3 \\ y(t) = 2 - t + t^2 + 3t^3 \\ z(t) = 3 + t + t^2 - t^3. \end{cases}$$

Verificaţi aparteneţa capetelor la curba dată mai sus (2p).