

( curs 6 - § 3)

#### 4.4. Curbe spline cubice

Curbele spline reprezinta o abordare alternativa a interpolarii datelor.

In interpolarea polinomiala, o singura formula, data printr-un polinom, este folosita pentru a interpola toate punctele.

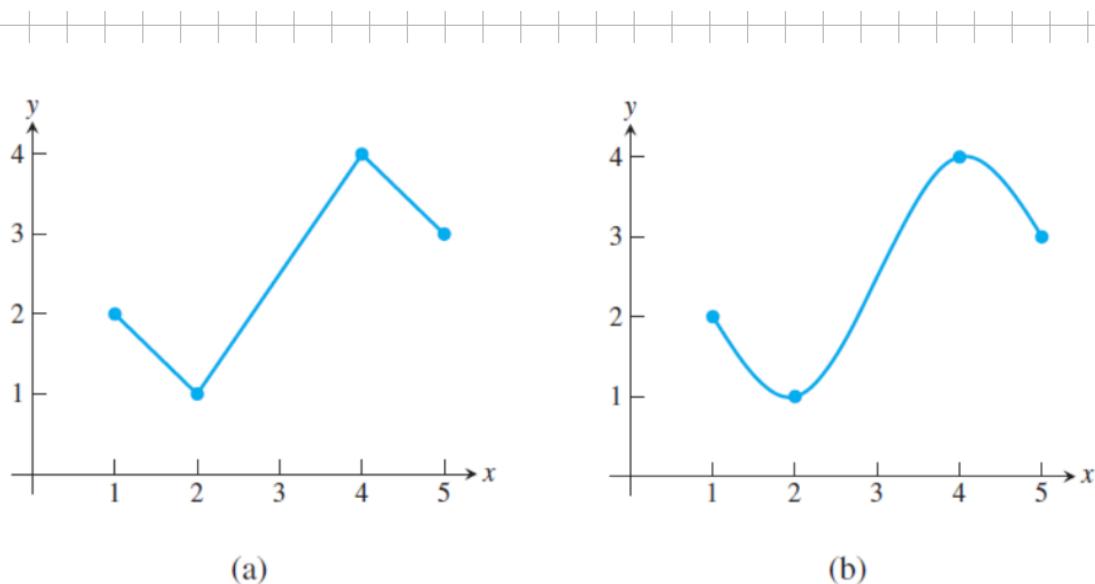
Ideea curbelor spline este de a folosi mai multe formule, fiecare fiind un polinom de grad mic, pentru a interpola punctele

cel mai simplu exemplu de curbă splină este o curbă splină liniară, în care punctele sunt unite prin segmente de dreaptă

presupunem că ni se dă o mulțime de puncte  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  cu  $x_1 < \dots < x_n$

o curbă splină liniară constă din  $n - 1$  segmente de dreaptă care sunt trasate între perechi adiacente de puncte

Figura 1(a) prezintă o curbă splină liniară, în care, între fiecare pereche adiacentă de puncte  $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ , funcția liniară  $y = a_i + b_i x$  este trasată, având cele două puncte drept capete



**Figura 1: Curbe spline care trec prin patru puncte.** (a) Curba splină liniară care trece prin  $(1, 2), (2, 1), (4, 4)$ , și  $(5, 3)$  constă din trei polinoame liniare date de (1). (b) Curba splină cubică interpolând aceleași puncte, dată de (2).

punctele date în figură sunt  $(1, 2), (2, 1), (4, 4)$ , și  $(5, 3)$ , și curba splină liniară este dată prin

Figura a)

$$S_1(x) = 2 - (x - 1) \text{ pe } [1, 2]$$

$$S_2(x) = 1 + \frac{3}{2}(x - 2) \text{ pe } [2, 4]$$

$$S_3(x) = 4 - (x - 4) \text{ pe } [4, 5].$$

(1)

Curba spline limiară interpolăază cu succes o multime arbitrară de m puncte.

- totuși, curbelor spline liniare le lipsește netezimea
  - curbele spline cubice sunt menite să împlinească acest neajuns al curbelor spline liniare
  - o curbă splină cubică înlocuiește funcțiile liniare trasate între puncte prin polinoame (cubice) de gradul 3
  - un exemplu de curbă splină cubică interpolând aceleași puncte  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(4, 4)$ , și  $(5, 3)$  este prezentată în Figura 1(b)
  - ecuațiile care definesc această curbă sunt

## Figura 6)

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 2 - \frac{13}{8}(x-1) + 0(x-1)^2 + \frac{5}{8}(x-1)^3 \text{ pe } [1, 2] \\ S_2(x) &= 1 + \frac{1}{4}(x-2) + \frac{15}{8}(x-2)^2 - \frac{5}{8}(x-2)^3 \text{ pe } [2, 4] \\ S_3(x) &= 4 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{15}{8}(x-4)^2 + \frac{5}{8}(x-4)^3 \text{ pe } [4, 5]. \end{aligned} \quad (2)$$

- observăm trecerea netedă de la un  $S_i$  la următorul în punctele de bază, numite și „noduri”  $x = 2$  și  $x = 4$
  - acest lucru se realizează prin aranjarea părților adiacente  $S_i$  și  $S_{i+1}$  ale curbei spline astfel încât să aibă aceleasi valori ale derivatelor de ordinul zero, unu și doi evaluate în noduri
  - cum se face acest lucru reprezintă subiectul secțiunii următoare
  - fiind date  $n$  puncte  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , există în mod evident o singură curbă splină liniară care trece prin aceste puncte
  - acest lucru nu este adevărat pentru curbele spline cubice
  - vom vedea că există o infinitate de astfel de curbe care trec printr-o mulțime de puncte
  - condiții suplimentare vor fi adăugate atunci când este necesară fixarea unei anumite curbe spline cubice de interes

P.p. că avem  $n$  puncte  $(x_i, y_i)$ ,  $x_i$  - distințe și ordonate crescător

$$S_1(x) = y_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 \quad \text{for } [x_1, x_2]$$

$$f_2(x) = y_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3 \quad \text{for } [x_2, x_3]$$

$$S_{m-1}(x) = y_{m-1} + b_{m-1}(x - x_{m-1}) + c_{m-1}(x - x_{m-1})^2 + d_2(x - x_{m-1})^3 \text{ for } [x_{m-1}, x_m]$$

Faptul 1

$S_i(x_i) = y_i$  și  $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$  pentru  $i = 1, \dots, n-1$ .

## Faptul 2

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) \text{ pentru } i = 2, \dots, n-1.$$

Faptul 3

$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$  pentru  $i = 2, \dots, n - 1$ .

- Faptul 1 garantează că splina cubică  $S(x)$  interpolează punctele date
  - Faptul 2 forțează părțile adiacente ale splinei să se întâlnească în același punct, și Faptul 3 face același lucru pentru curbură, reprezentată prin a doua derivată

## Exemplul 1

### Exemplul 1

verificați că  $\{S_1, S_2, S_3\}$  din (2) satisfac toate proprietățile curbelor spline cubice pentru punctele de bază  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(4, 4)$ , și  $(5, 3)$   
verificăm toate cele trei proprietăți

Faptul 1: Sunt 4 puncte de bază

$$?? \quad S_1(1)=2$$

$$S_1(2)=1$$

$$S_2(2)=1$$

$$S_2(4)=4$$

$$S_3(4)=4$$

$$S_3(5)=3$$

- ecuațiile care definesc această curbă sunt

$$S_1(x) = 2 - \frac{13}{8}(x-1) + 0(x-1)^2 + \frac{5}{8}(x-1)^3 \text{ pe } [1, 2]$$

$$S_2(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-2) + \frac{15}{8}(x-2)^2 - \frac{5}{8}(x-2)^3 \text{ pe } [2, 4]$$

$$S_3(x) = 4 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{15}{8}(x-4)^2 + \frac{5}{8}(x-4)^3 \text{ pe } [4, 5]. \quad (2)$$

$$S_1(1) = 2 - 0 - 0 + 0 = 2 \quad \checkmark$$

$$S_1(2) = 2 - \frac{13}{8} + \frac{5}{8} = 2 - \frac{8}{8} = 1 \quad \checkmark$$

$$S_2(2) = 1 + 0 + 0 - 0 = 1 \quad \checkmark$$

$$S_2(4) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{15}{8} \cdot 4 - \frac{5}{8} \cdot 8 = 1 + 8 - 5 = 4$$

$$S_3(5) = 4 + \frac{1}{4} - \frac{15}{8} + \frac{5}{8} = 4 + \frac{1}{4} - \frac{10}{8} = 4 - \frac{4}{4} = 3$$

$$S_3(4) = 4 + 0 - 0 + 0 = 4$$

Faptul 2: Facem prima derivată

$$S'_1(x) = -\frac{13}{8} + \frac{15}{8}(x-1)^2$$

$$S'_2(x) = \frac{1}{4} + \frac{15}{4}(x-2) - \frac{15}{8}(x-2)^2$$

$$S'_3(x) = \frac{1}{4} - \frac{15}{4}(x-4) + \frac{15}{8}(x-4)^2.$$

Verificăm dacă  $S'_1(2) = S'_2(2)$   $\Leftrightarrow -\frac{13}{8} + \frac{15}{8} \cdot 1 = \frac{1}{4} \quad \checkmark$

$$S'_1(4) = S'_3(4) \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{15}{4}(4-2) - \frac{15}{8} \cdot 4 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{30}{4} - \frac{30}{4} = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$

Faptul 3: Facem derivata a 2-a

$$S''_1(x) = \frac{15}{4}(x-1)$$

$$S''_2(x) = \frac{15}{4} - \frac{15}{4}(x-2)$$

$$S''_3(x) = -\frac{15}{4} + \frac{15}{4}(x-4).$$

Verificăm dacă  $S''_1(2) = S''_2(2)$   $\Leftrightarrow \frac{15}{4} \cdot 1 = \frac{15}{4} - \frac{15}{4} \cdot 0 \quad \checkmark$

$$S''_2(4) = S''_3(4) \Leftrightarrow \frac{15}{4} - \frac{15}{4} \cdot 2 = -\frac{15}{4} + \frac{15}{4} \cdot 0$$

$$-\frac{15}{4} = -\frac{15}{4} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow (2)$  este o curbă spline cubică

! Construirea unei curbe spline cubice constă în găsirea coeficientilor  $b_i, c_i, d_i$  care fac ca faptele 1–3 să aibă loc.

- prima jumătate din Faptul 1 este deja reflectată în forma (3); aceasta ne spune că termenul constant al curbei cubice  $S_i$  trebuie să fie  $y_i$

$$\begin{aligned} S_1(x) &= y_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 \text{ pe } [x_1, x_2] \\ S_2(x) &= y_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3 \text{ pe } [x_2, x_3] \\ &\vdots \\ S_{n-1}(x) &= y_{n-1} + b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x - x_{n-1})^3 \text{ pe } [x_{n-1}, x_n] \end{aligned} \quad (3)$$

- a doua jumătate din Faptul 1 constă din  $n - 1$  ecuații separate care trebuie să fie satisfăcute de coeficienți, pe care îi vom considera ca fiind necunoscute
- fiecare din Faptele 2 și 3 adaugă încă  $n - 2$  ecuații, totalizând astfel  $n - 1 + 2(n - 2) = 3n - 5$  ecuații independente care trebuie satisfăcute

nr. coeficienți:  $3 \cdot (n-1) = 3n-3$

- prin urmare, găsirea coeficientilor presupune rezolvarea a  $3n - 5$  ecuații liniare în  $3n - 3$  necunoscute
- dacă nu cumva există ecuații inconsistente în sistem (și nu există), sistemul de ecuații este subdeterminat, și prin urmare are o infinitate de soluții
- cu alte cuvinte, există o infinitate de curbe spline cubice care trec printr-o mulțime arbitrară de puncte  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$
- utilizatorii curbelor spline exploatează de obicei lipsa de ecuații prin adăugarea a două ecuații suplimentare celor  $3n - 5$  ecuații existente, pentru a forma un sistem de  $m$  ecuații cu  $m$  necunoscute, unde  $m = 3n - 3$
- constrângerile adăugate Faptelelor 1–3 sunt

#### Faptul 4

**Curbă splină naturală.**  $S_1''(x_1) = 0$  și  $S_{n-1}''(x_n) = 0$ .

- o curbă splină care satisface aceste condiții suplimentare se numește curbă splină **naturală**
- observăm că (2) este o curbă splină cubică naturală, deoarece se poate verifica ușor din (4) că  $S_1''(1) = 0$  și  $S_3''(5) = 0$
- există și alte feluri de a adăuga cele două condiții suplimentare

- de obicei, ca în cazul splinelor naturale, acestea determină proprietăți suplimentare ale capetelor din stânga și din dreapta ale curbei spline, astfel încât acestea sunt numite **condiții de capăt**
- acum că avem numărul corect de ecuații,  $3n - 3$  ecuații în  $3n - 3$  necunoscute, putem să le rezolvăm pentru a găsi coeficienții curbei spline
- mai întâi, vom scrie ecuațiile în necunoscutele  $b_i, c_i, d_i$
- partea a doua a Faptului 1 implică atunci următoarele  $n - 1$  ecuații:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2 = S_1(x_2) = y_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 + d_1(x_2 - x_1)^3 \\ \vdots \\ y_n = S_{n-1}(x_n) = y_{n-1} + b_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + c_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x_n - x_{n-1})^3. \end{array} \right. \quad (5)$$

- Faptul 2 generează alte  $n - 2$  ecuații,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = S'_1(x_2) - S'_2(x_2) = b_1 + 2c_1(x_2 - x_1) + 3d_1(x_2 - x_1)^2 - b_2 \\ \vdots \\ 0 = S'_{n-2}(x_{n-1}) - S'_{n-1}(x_{n-1}) = b_{n-2} + 2c_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2}) + 3d_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2})^2 - b_{n-1}, \end{array} \right. \quad (6)$$

- iar Faptul 3 implică următoarele  $n - 2$  ecuații:

$$\begin{aligned} 0 &= S_1''(x_2) - S_2''(x_2) = 2c_1 + 6d_1(x_2 - x_1) - 2c_2 \\ &\vdots \\ 0 &= S_{n-2}''(x_{n-1}) - S_{n-1}''(x_{n-1}) = 2c_{n-2} + 6d_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2}) - 2c_{n-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

- în loc să rezolvăm ecuațiile în această formă, sistemul poate fi simplificat drastic prin decuplarea ecuațiilor
- făcând anumite calcule, un sistem de ecuații mult mai mic în necunoscutele  $c_i$  poate fi rezolvat mai întâi, fiind urmat de formule explicite pentru  $b_i$  și  $d_i$  în funcție de valorile determinate ale necunoscutelor  $c_i$
- este mai simplu din punct de vedere conceptual dacă se introduce o necunoscută suplimentară  $c_n = S_{n-1}''(x_n)/2$
- în plus, introducem notațiile  $\delta_i = x_{i+1} - x_i$  și  $\Delta_i = y_{i+1} - y_i$
- atunci (7) poate fi rezolvată pentru a găsi coeficienții

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i} \text{ pentru } i = 1, \dots, n-1. \quad (8)$$

- rezolvând (5) pentru a găsi necunoscutele  $b_i$ , obținem

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - c_i \delta_i - d_i \delta_i^2 \\ &= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - c_i \delta_i - \frac{\delta_i}{3} (c_{i+1} - c_i) \\ &= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3} (2c_i + c_{i+1}), \end{aligned} \quad (9)$$

pentru  $i = 1, \dots, n-1$

- înlocuind (8) și (9) în (6) rezultă în următoarele  $n - 2$  ecuații în necunoscutele  $c_1, \dots, c_n$ :

$$\begin{aligned} \delta_1 c_1 + 2(\delta_1 + \delta_2) c_2 + \delta_2 c_3 &= 3 \left( \frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\Delta_1}{\delta_1} \right) \\ &\vdots \\ \delta_{n-2} c_{n-2} + 2(\delta_{n-2} + \delta_{n-1}) c_{n-1} + \delta_{n-1} c_n &= 3 \left( \frac{\Delta_{n-1}}{\delta_{n-1}} - \frac{\Delta_{n-2}}{\delta_{n-2}} \right). \end{aligned}$$

- încă două ecuații sunt date de condițiile de curbă splină naturală (Faptul 4):

$$\begin{aligned} S_1''(x_1) &= 0 \Rightarrow 2c_1 = 0 \\ S_{n-1}''(x_n) &= 0 \Rightarrow 2c_n = 0. \end{aligned}$$

- aceasta ne dă un total de  $n$  ecuații cu  $n$  necunoscute  $c_i$ , care pot fi scrise în formă matricială astfel:

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ \delta_1 & 2\delta_1 + 2\delta_2 & \delta_2 & \ddots & & \\ 0 & \delta_2 & 2\delta_2 + 2\delta_3 & \delta_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \\ & & & \delta_{n-2} & 2\delta_{n-2} + 2\delta_{n-1} & \delta_{n-1} \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \left( \frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\Delta_1}{\delta_1} \right) \\ \vdots \\ 3 \left( \frac{\Delta_{n-1}}{\delta_{n-1}} - \frac{\Delta_{n-2}}{\delta_{n-2}} \right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

- după ce  $c_1, \dots, c_n$  sunt obținute din (10),  $b_1, \dots, b_{n-1}$  și  $d_1, \dots, d_{n-1}$  pot fi calculate din (8) și (9)
- observăm că (10) are întotdeauna o soluție pentru necunoscutele  $c_i$

- matricea coeficienților este strict diagonal dominantă, deci rezultă că există o soluție unică pentru necunoscutele  $c_i$  și prin urmare și pentru  $b_i$  și  $d_i$
- am demonstrat astfel următoarea teoremă:

### Teorema 1

Fie  $n \geq 2$ . Pentru o mulțime de puncte  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  cu valori  $x_i$  distincte, există o singură curbă splină cubică naturală care interpolează punctele.

### Algoritmul 1 (Curbă splină cubică naturală)

Dându-se  $x = [x_1, \dots, x_n]$ , unde  $x_1 < \dots < x_n$ ,  $y = [y_1, \dots, y_n]$

**for**  $i = 1, \dots, n - 1$

$$a_i = y_i$$

$$\delta_i = x_{i+1} - x_i$$

$$\Delta_i = y_{i+1} - y_i$$

**end**

Rezolvăm (10) pentru a găsi  $c_1, \dots, c_n$

**for**  $i = 1, \dots, n - 1$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i}$$

$$b_i = \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

**end**

Curba splină cubică naturală este

$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$  pe  $[x_i, x_{i+1}]$  pentru  $i = 1, \dots, n - 1$ .

```

1 function coeff = splinecoeff(x,y)
2
3 n = length(x);
4 A = zeros(n,n);
5 r = zeros(n,1);
6 for i = 1:n-1
7
8     dx(i) = x(i+1) - x(i);
9     dy(i) = y(i+1) - y(i);
10    end
11
12    for i = 2:n-1
13        A(i,i-1:i+1) = [dx(i-1) 2 * (dx(i-1) + dx(i)) dx(i)];
14
15        r(i)=3*(dy(i)/dx(i) - dy(i-1)/dx(i-1));
16    end
17
18 A(1,1) = 1;
19 A(n,n) = 1;
20
21 coeff = zeros(n,3);
22
23 coeff(:,2) = A\r;
24
25 for i = 1:n-1
26
27     coeff(i,3) = (coeff(i+1,2) - coeff(i,2)) / (3 * dx(i));
28
29     coeff(i,1) = dy(i) / dx(i) - dx(i) * (2 * coeff(i,2) + coeff(i+1, 2)) / 3;
30 end
31 coeff = coeff(1:n-1,1:3);

```

Command Window

```

>> x=[0;1;2];
>> y=[3;-2;1];
>> coeff=splinecoeff(x,y)

coeff =

```

-7	0	2
-1	6	-2

```

>> x=[0;1;2];
>> y=[3;-2;1];
>> splineplot(x,y,10)
fx>>

```

```

1 function splineplot(x, y, k)
2
3 n = length(x);
4
5 coeff = splinecoeff(x, y);
6
7 x1 = [];
8 y1 = [];
9
10 for i = 1:n-1
11
12     xs = linspace(x(i), x(i+1), k+1);
13
14     dx = xs - x(i);
15
16     ys = coeff(i, 3) * dx;
17
18     ys = (ys + coeff(i, 2)) .* dx;
19
20     ys = (ys + coeff(i, 1)) .* dx + y(i);
21
22     x1 = [x1; xs(1:k)'];
23     y1 = [y1; ys(1:k)'];
24 end
25
26 x1 = [x1; x(end)];
27 y1 = [y1; y(end)];
28 plot(x, y, "o-", x1, y1);
29
30
31 % x=[0;1;2];
32 % y=[3;-2;1];
33 % coeff=splinecoeff(x,y)
34
35 Command Window

```

```

>> x=[0;1;2];
>> y=[3;-2;1];
>> coeff=splinecoeff(x,y)

coeff =

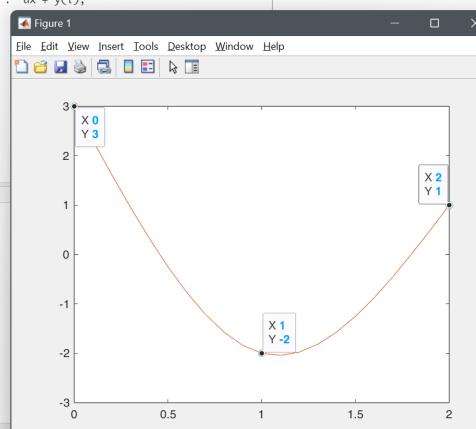
```

-7	0	2
-1	6	-2

```

>> x=[0;1;2];
>> y=[3;-2;1];
>> splineplot(x,y,10)
fx>>

```



### Exemplul 2

Găsiți curbă splină cubică naturală care trece prin  $(0,3)$ ,  $(1,-2)$  și  $(2,1)$

- $X: x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$
- $y: y_1 = 3, y_2 = -2, y_3 = 1$
- $\delta_1 = 1 - 0 = 1 \quad b_1 = -2 - 3 = -5$
- $\delta_2 = 2 - 1 = 1 \quad \Delta_2 = 1 - (-2) = 3$
- ecuația matricială

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \left( \frac{3}{1} - \frac{-5}{1} \right) = 24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + 4c_2 + c_3 = 24 \\ c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4c_2 = 24 \quad c_2 = 6$$

$\Rightarrow$  soluția este  $[0, 6, 0]^T$

- (8), (9)

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i} \text{ pentru } i = 1, \dots, n-1. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - c_i \delta_i - d_i \delta_i^2 \\ &= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - c_i \delta_i - \frac{\delta_i}{3} (c_{i+1} - c_i) \quad i \rightarrow n-1 \\ &= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3} (2c_i + c_{i+1}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3 \cdot \delta_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3 \cdot \delta_2} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$b_1 = \frac{\Delta_1}{\delta_1} - \frac{\delta_1}{3} (2c_1 + c_2) = -5 - \frac{1}{3}(6) = -4$$

$$b_2 = \frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\delta_2}{3} (2c_2 + c_3) = 3 - \frac{1}{3}(12) = -1$$

$\Rightarrow$  curba splină culeică este

$$S_1(x) = 3 - 7x + 0x^2 + 2x^3 \text{ pe } [0, 1]$$

$$S_2(x) = -2 - 1(x - 1) + 6(x - 1)^2 - 2(x - 1)^3 \text{ pe } [1, 2].$$

## 4.5. Curbe Bézier

$\rightarrow$  utilizatorul poate controla pantele curbei în moduri

- în schimbul acestui control suplimentar, netezimea primei și celei de-a doua deriveate într-un anumit nod, care au loc automat în cazul curbelor spline cubice din secțiunea anterioară, nu sunt garantate în acest caz
- curbele Bézier sunt potrivite pentru cazurile în care colțurile (prime deriveate discontinue) și schimbări brusă ale curburii (deriveate secunde discontinue) sunt proprietăți necesare

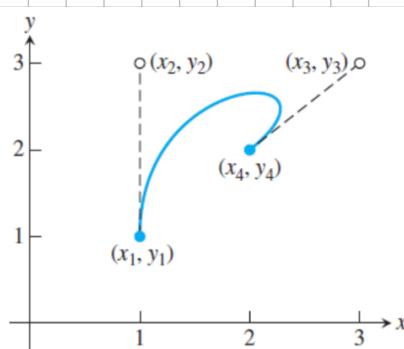


Figura 2: Curba Bézier din Exemplul 3. Punctele  $(x_1, y_1)$  și  $(x_4, y_4)$  sunt puncte spline, în timp ce  $(x_2, y_2)$  și  $(x_3, y_3)$  sunt puncte de control.

$\rightarrow$  fiecare parte dintr-o curbă Bézier planară este determinată de patru puncte  $(x_i, y_i)$

$\rightarrow (x_1, y_1), (x_4, y_4)$  = capetele curbei

$\rightarrow (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  = puncte de control

- curba părăsește punctul  $(x_1, y_1)$  de-a lungul direcției tangente  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  și se termină la  $(x_4, y_4)$  de-a lungul direcției tangente  $(x_4 - x_3, y_4 - y_3)$
- ecuațiile care realizează aceasta sunt exprimate sub forma curbei parametrice  $(x(t), y(t))$ , pentru  $0 \leq t \leq 1$

### Algoritmul 2 (Curbă Bézier)

Dându-se capetele  $(x_1, y_1), (x_4, y_4)$

Dându-se punctele de control  $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$

Considerăm

$$\begin{aligned} b_x &= 3(x_2 - x_1) \\ c_x &= 3(x_3 - x_2) - b_x \\ d_x &= x_4 - x_1 - b_x - c_x \\ b_y &= 3(y_2 - y_1) \\ c_y &= 3(y_3 - y_2) - b_y \\ d_y &= y_4 - y_1 - b_y - c_y. \end{aligned}$$

Curba Bézier este definită pentru  $0 \leq t \leq 1$  prin

$$x(t) = x_1 + b_x t + c_x t^2 + d_x t^3$$

$$y(t) = y_1 + b_y t + c_y t^2 + d_y t^3.$$

```

1 function coeff = beziercoeff(x,y)
2
3 bx = 3 * (x(2) - x(1));
4
5 by = 3 * (y(2) - y(1));
6
7 cx = 3 * (x(3) - x(2)) - bx;
8
9 cy = 3 * (y(3) - y(2)) - by;
10
11 dx = x(4) - x(1) - bx - cx;
12
13 dy = y(4) - y(1) - by - cy;
14
15 coeff = zeros(2,4);
16
17 coeff(1,:) = [x(1), bx, cx, dx];
18 coeff(2,:) = [y(1), by, cy, dy];

```

Command Window

```

>> x=[1;1;3;2];
>> y=[1;3;3;2];
>> coeff=beziercoeff(x,y)

coeff =

```

1	0	6	-5
1	6	-6	1

```

1 function bezierplot(x,y)
2
3 hold on;
4
5 t = 0:0.02:1;
6
7 plot([x(1) x(2)], [y(1) y(2)], 'r:', x(2),y(2), 'rs');
8
9 plot([x(3) x(4)], [y(3) y(4)], 'r:', x(3),y(3), 'rs');
10
11 plot(x(1), y(1), 'bo', x(4), y(4), 'bo');
12
13 coeff = beziercoeff(x,y);
14
15 xp = coeff(1,1) + t.* (coeff(1,2) + t.* (coeff(1,3) + t * coeff(1,4)));
16
17 yp = coeff(2,1) + t.* (coeff(2,2) + t.* (coeff(2,3) + t * coeff(2,4)));
18
19 plot(xp,yp)
20
21 hold off;
22
23 % >> x=[1;1;3;2];
24 % >> y=[1;3;3;2];
25 % >> coeff=beziercoeff(x,y)
26 % Aceeași curbă poate fi desenată
27 % >> x=[1;1;3;2];
28 % >> y=[1;3;3;2];
29 % >> bezierplot(x,y)

```

Command Window

```

>> x=[1;1;3;2];
>> y=[1;3;3;2];
>> coeff=beziercoeff(x,y)

coeff =

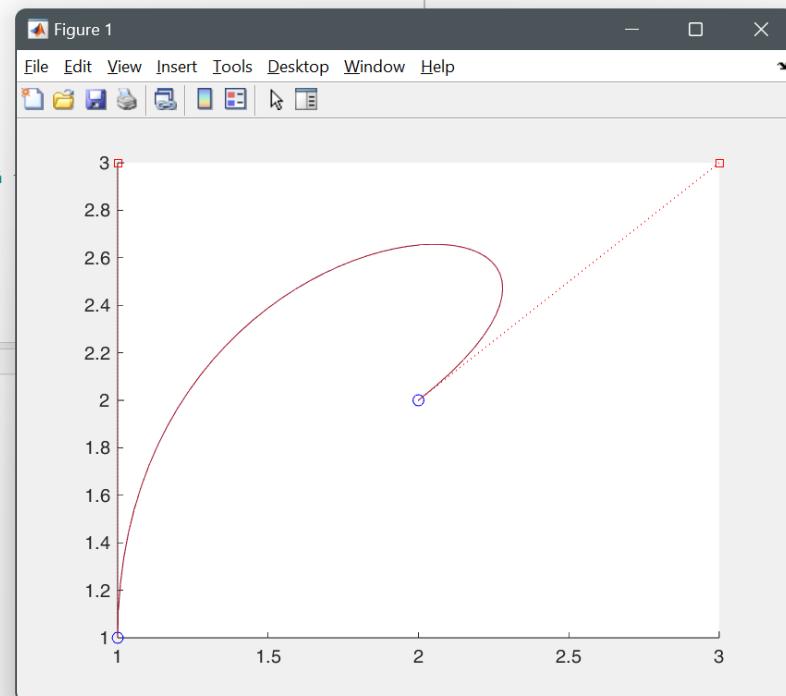
```

1	0	6	-5
1	6	-6	1

```

>> bezierplot(x,y)
fx>>

```



- sunt ușor de verificat cerințele de mai sus din aceste ecuații
- de fapt,

$$\begin{aligned}x(0) &= x_1 \\x'(0) &= 3(x_2 - x_1) \\x(1) &= x_4 \\x'(1) &= 3(x_4 - x_3),\end{aligned}$$

și cele analoage au loc pentru  $y(t)$

### Exemplul 3

- găsiți curba Bézier ( $x(t), y(t)$ ) care trece prin punctele  $(1,1), (2,2)$  și are puncte de control  $(1,3), (3,3)$

$$b_x = 3(x_2 - x_1) = 3(2 - 1) = 0$$

$$c_x = 3(x_3 - x_2) - b_x = 3(3 - 2) - 0 = 6$$

$$d_x = x_4 - x_1 - b_x - c_x = 3 - 1 - 0 - 6 = -5$$

$$b_y = 3(y_2 - y_1) = 6$$

$$c_y = 3(y_3 - y_2) - b_y = -6$$

$$d_y = y_4 - y_1 - b_y - c_y = 1$$

$\Rightarrow$  curba Bézier:

$$x(t) = 1 + 6t^2 - 5t^3$$

$$y(t) = 1 + 6t - 6t^2 + t^3$$

- curbele Bézier sunt elementele de bază care pot fi înlántuite pentru a interpoala valori arbitrare ale funcțiilor și ale pantelor
- ele reprezintă o îmbunătățire a curbelor spline cubice, în sensul că pantele și nodurile pot fi specificate de către utilizator
- totuși, această libertate este în detrimentul netezimii: derivatele secunde din cele două direcții diferite nu sunt în general egale în noduri
- în anumite aplicații, această diferență reprezintă un avantaj
- ca un caz special, când punctele de control sunt egale cu capetele, curba este un simplu segment de dreaptă, după cum se arată în următorul exemplu

## Exemplul 4

- demonstrați că o curbă Bézier pentru care  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  și  $(x_3, y_3) = (x_4, y_4)$  este un segment de dreaptă
- formulele Bézier arată că ecuațiile sunt

??

$$\begin{aligned}x(t) &= x_1 + 3(x_4 - x_1)t^2 - 2(x_4 - x_1)t^3 = x_1 + (x_4 - x_1)t^2(3 - 2t) \\y(t) &= y_1 + 3(y_4 - y_1)t^2 - 2(y_4 - y_1)t^3 = y_1 + (y_4 - y_1)t^2(3 - 2t),\end{aligned}$$

pentru  $0 \leq t \leq 1$

- fiecare punct de pe această curbă splină are forma

$$\begin{aligned}(x(t), y(t)) &= (x_1 + r(x_4 - x_1), y_1 + r(y_4 - y_1)) \\&= ((1 - r)x_1 + rx_4, (1 - r)y_1 + ry_4),\end{aligned}$$

unde  $r = t^2(3 - 2t)$

- deoarece  $0 \leq r \leq 1$ , fiecare punct se află pe segmentul de dreaptă care unește pe  $(x_1, y_1)$  cu  $(x_4, y_4)$

## 5. Cele mai mici pătrate

→ ecuațiile normale sunt introduse și aplicate pentru o varietate de

interpolare a datelor

- apoi, o abordare mai sofisticată, folosind factorizarea QR, este explorată, urmată de o discuție despre problemele neliniare de tip cele mai mici pătrate

### 5.1. Cele mai mici pătrate și ecuațiile normale

- nevoia pentru metode de tip cele mai mici pătrate vine din două direcții diferite, corespunzând celor studiate în Capitolele 3 și 4
- în Capitolul 3, am învățat cum să găsim o soluție a lui  $Ax = b$ , când aceasta există
- în acest capitol, vom afla ce să facem atunci când nu există o soluție
- când ecuațiile sunt inconsistente, ceea ce este foarte posibil dacă numărul de ecuații este mai mare decât numărul de necunoscute, răspunsul este că trebuie să găsim o aproximare de tip cele mai mici pătrate
- Capitolul 4 a tratat problema găsirii unor polinoame care interpolează exact punctele de bază
- însă, dacă punctele sunt foarte multe, sau sunt colectate doar cu o anumită eroare, interpolarea exactă a unui polinom de grad mare este rareori cea mai bună abordare
- în aceste cazuri, este mai rezonabil să fie interpolat un model mai simplu, care s-ar putea doar să aproximeze punctele de bază
- ambele probleme, rezolvarea de sisteme inconsistente de ecuații și interpolarea aproximativă a datelor, sunt cele care motivează metodele de tip cele mai mici pătrate

#### 5.1.1. Sisteme inconsistente de ecuații

- nu este greu să scriem un sistem de ecuații care nu are soluții
- să considerăm următoarele trei ecuații în două necunoscute:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 2 \\x_1 - x_2 &= 1 \\x_1 + x_2 &= 3.\end{aligned}\tag{12}$$

- orice soluție trebuie să satisfacă prima și a treia ecuație, ceea ce nu este posibil
- un sistem de ecuații care nu are nicio soluție se numește **inconsistent**

- de fapt,  $m$  ecuații în  $n$  necunoscute nu au de obicei soluție când  $m > n$
- deși eliminarea gaussiană nu ne va da o soluție a unui sistem inconsistent  $Ax = b$ , nu ar trebui să renunțăm complet
- o alternativă în această situație este de a găsi un vector  $x$  care se apropie cel mai mult de faptul de a fi o soluție

- dacă alegem această „apropiere” să însemne apropie în sensul distanței euclidiene, există un algoritm simplu pentru a afla cea mai apropiată valoare a lui  $x$
- acest  $x$  special va fi numit **soluția în sensul celor mai mici pătrate**
- putem vedea mai bine eșecul sistemului (12) de a avea o soluție scriindu-l într-o altă formă
- forma matricială a sistemului este  $Ax = b$ , sau

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

- perspectiva alternativă a înmulțirii matrice-vector este de a scrie ecuația echivalentă

? 0

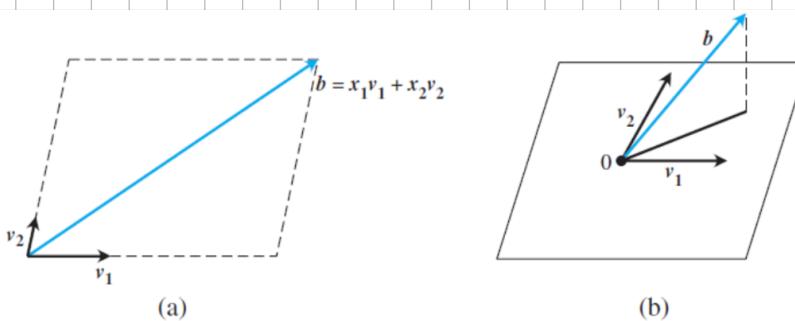
$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

- de fapt, orice sistem  $m \times n$   $Ax = b$  poate fi privit ca ecuația vectorială

!  $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = b,$  (15)

care îl exprimă pe  $b$  ca o combinație liniară a coloanelor  $v_i$  ale lui  $A$ , cu coeficienții  $x_1, \dots, x_n$

- în cazul nostru, încercăm să obținem vectorul țintă  $b$  ca o combinație liniară a doi alti vectori tridimensionali
- deoarece combinațiile de doi vectori tridimensionali formează un plan în  $\mathbb{R}^3$ , ecuația (14) are **soluție doar dacă vectorul  $b$  se află în acel plan**
- aceasta va fi întotdeauna situația când încercăm să rezolvăm  $m$  ecuații în  $n$  necunoscute, cu  **$m > n$**
- prea multe ecuații fac problema să fie supraspecificată și ecuațiile să fie inconsistente



**Figura 3: Soluția geometrică a unui sistem de trei ecuații cu două necunoscute.** (a) Ecuația (14) cere ca vectorul  $b$ , parte din dreapta ecuației, să fie o combinație liniară a vectorilor coloană  $v_1$  și  $v_2$ . (b) Dacă  $b$  se află în afara planului definit de  $v_1$  și  $v_2$ , nu va exista nicio soluție. Soluția în sensul celor mai mici pătrate  $\bar{x}$  face ca vectorul combinație  $Ax$  să fie acela din planul  $Ax$  care este cel mai aproape de  $b$  în sensul distanței euclidiene.

- Figura 3(b) prezintă o direcție în care să pornim în cazul în care nu există o soluție
- nu există nicio pereche  $x_1, x_2$  care rezolvă (12), dar există un punct în planul  $Ax$  al tuturor candidaților posibili care este cel mai aproape de  $b$
- acest vector special  $A\bar{x}$  se distinge prin următorul fapt: vectorul rezidual  $b - A\bar{x}$  este perpendicular pe planul  $\{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$
- vom exploata acest fapt pentru a găsi o formulă pentru  $\bar{x}$ , soluția în sensul celor mai mici pătrate
- în primul rând, stabilim anumite notații
- reamintim conceptul de **transpusă**  $A^T$  a matricii  $m \times n A$ , care este matricea  $n \times m$  ale cărei rânduri sunt coloanele lui  $A$  și ale cărei coloane sunt rândurile lui  $A$ , în aceeași ordine
- transpusa sumei a două matrici este suma transpuselor,  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- transpusa produsului a două matrici este produsul transpuselor în ordine inversă—și anume,  $(AB)^T = B^T A^T$
- pentru a lucra cu perpendicularitatea, ne reamintim că doi vectori sunt perpendiculari dacă produsul lor scalar este zero
- pentru doi vectori coloană  $m$ -dimensionali  $u$  și  $v$ , putem scrie produsul scalar doar în termeni de înmulțire de matrici astfel:

$$u^T v = [u_1, \dots, u_m] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}. \quad (16)$$

- vectorii  $u$  și  $v$  sunt perpendiculari, sau **ortogonali**, dacă  $u^T \cdot v = 0$ , folosind înmulțirea matricială obișnuită
- acum revenim la a căuta formula pentru  $\bar{x}$
- am stabilit că

$$(b - A\bar{x}) \perp \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}.$$

- exprimând perpendicularitatea în termeni de înmulțire de matrici, găsim că

$$(Ax)^T (b - A\bar{x}) = 0, \text{ pentru orice } x \text{ din } \mathbb{R}^n.$$

- folosind faptul anterior despre transpuze, putem rescrie această expresie în forma

$$x^T A^T (b - A\bar{x}) = 0, \text{ pentru orice } x \text{ din } \mathbb{R}^n,$$

ceea ce înseamnă că vectorul  $n$ -dimensional  $A^T(b - A\bar{x})$  este perpendicular pe orice vector  $x$  din  $\mathbb{R}^n$ , inclusiv el însuși

- există un singur fel în care acest lucru se poate întâmpla:

$$A^T(b - A\bar{x}) = 0.$$

- aceasta ne dă un sistem de ecuații care definește soluția în sensul celor mai mici pătrate, și anume

$$A^T A \bar{x} = A^T b. \quad (17)$$

- sistemul de ecuații (17) este cunoscut ca **ecuațiile normale**
- soluția  $\bar{x}$  a lui este aşa-numita soluție în sensul celor mai mici pătrate a sistemului  $Ax = b$

### Algoritm 3 (Ecuațiile normale pentru cele mai mici pătrate)

Dându-se sistemul inconsistent

$$Ax = b,$$

rezolvăm

$$A^T A \bar{x} = A^T b$$

pentru a găsi soluția în sensul celor mai mici pătrate  $\bar{x}$  care minimizează lungimea euclidiană a vectorului rezidual  $r = b - Ax$ .

## Problema\_1.m

```

1 A=[3 -1 2;4 1 0;-3 2 1;1 1 5;-2 0 3];
2
3 b=[10;10;-5;15;0];
4
5 x = (A' * A) \ (A' * b);
6
7 r = b - A * x;
8
9 norm(r)

```

## Command Window

&gt;&gt; Problema\_1

x =

2.5246  
0.6616  
2.0934

ans =

2.4135

*Exemplul 5*

- folosiți ecuațiile normale pentru a găsi soluția în sensul celor mai mici pătrate a sistemului inconsistent (12)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned} \quad (12)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

*Ecuatiile normale sunt*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

*Să facem eliminare gaussiană*  
 $\Rightarrow \bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]^T = \left[ \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right]^T$

## !! Continuare rezolvare !

- înlocuind soluția în sensul celor mai mici pătrate în problema inițială ne dă

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 2.5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- pentru a măsura succesul cu care am interpolat datele, calculăm rezidualul soluției în sensul celor mai mici pătrate  $\bar{x}$  ca fiind

$$r = b - A\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

- dacă rezidualul este vectorul zero, atunci am rezolvat sistemul inițial  $Ax = b$  exact
- dacă nu, lungimea euclidiană a vectorului rezidual este o măsură a cât de departe este  $\bar{x}$  de a fi o soluție
- există cel puțin trei moduri de a exprima mărimea rezidualului
- lungimea euclidiană a unui vector,

$$\|r\|_2 = \sqrt{r_1^2 + \dots + r_m^2}, \quad (18)$$

este o normă, numită **2-normă**

- eroarea pătratică**

$$EP = r_1^2 + \dots + r_m^2,$$

și **rădăcina erorii medii pătratice** (rădăcina pătrată a mediei erorii păratice)

$$REMP = \sqrt{\overline{EP}/m} = \sqrt{(r_1^2 + \dots + r_m^2)/m}, \quad (19)$$

sunt de asemenea folosite pentru a măsura eroarea soluției în sensul celor mai mici pătrate

- cele trei expresii sunt strâns legate între ele; și anume

$$REMP = \frac{\sqrt{EP}}{\sqrt{m}} = \frac{\|r\|_2}{\sqrt{m}},$$

astfel că acel  $\bar{x}$  care minimizează una dintre ele, le minimizează pe toate

- pentru Exemplul 5,  $EP = (0.5)^2 + 0^2 + (-0.5)^2 = 0.5$ , 2-norma erorii este  $\|r\|_2 = \sqrt{0.5} \approx 0.707$ , și  $REMP = \sqrt{0.5/3} = 1/\sqrt{6} \approx 0.408$

## Exemplul 6

- rezolvați următoarea problemă de tip cele mai mici pătrate:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Je fac  $A^T \cdot A$  și  $A^T \cdot b$

- ecuațiile normale  $A^T A x = A^T b$  sunt

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 75 \end{bmatrix}.$$

- soluția ecuațiilor normale este  $\bar{x}_1 = 3.8$  și  $\bar{x}_2 = 1.8$

!! de retinut

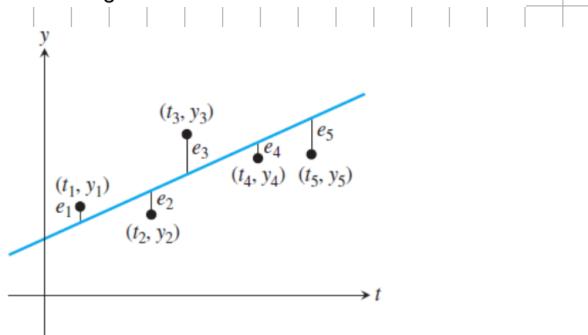
- vectorul rezidual este

$$\begin{aligned} r &= b - A\bar{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.8 \\ 1.8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.4 \\ 13 \\ 11.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 2 \\ -2.2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

care are normă euclidiană  $\|r\|_2 = \sqrt{(0.4)^2 + 2^2 + (-2.2)^2} = 3$

## 5.1.2. Interpolarea unor modele pentru multimi de date

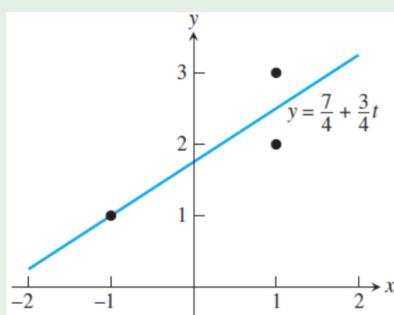
- fie  $(t_1, y_1), \dots, (t_m, y_m)$  o mulțime de puncte din plan, la care ne vom referi de multe ori sub numele de „date”
- fiind dată o clasă fixată de modele, cum ar fi, de exemplu, toate dreptele  $y = c_1 + c_2 t$ , căutăm să localizăm acea instanță a modelului care interpolează cel mai bine punctele în 2-normă
- nucleul ideii de cele mai mici pătrate constă din măsurarea rezidualului interpolării prin erorile pătratice ale modelului în punctele date și găsirea acestor parametri ai modelului care minimizează această cantitate
- acest criteriu este ilustrat în Figura 4



**Figura 4:** Interpolarea de tip cele mai mici pătrate a unei drepte pentru o mulțime de date. Cea mai bună dreaptă este cea pentru care eroarea pătratică  $e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_5^2$  este cea mai mică posibil dintre toate dreptele  $y = c_1 + c_2 t$ .

### Exemplul 7

- găsiți dreapta care interpolează cel mai bine punctele  $(t, y) = (1, 2)$ ,  $(-1, 1)$ , și  $(1, 3)$  din Figura 5



**Figura 5:** Cea mai bună dreaptă în Exemplul 7. Fiecare dintre punctele date se află deasupra, pe, sau dedesubtul celei mai bune drepte.

- Modelul este  $y = c_1 + c_2 \cdot t$
- Înlocuim
 
$$\begin{cases} c_1 + c_2 \cdot (1) = 2 \\ c_1 + c_2 \cdot (-1) = 1 \\ c_1 + c_2 \cdot (1) = 3 \end{cases}$$

sau, în formă matricială,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

știm că acest sistem nu are o soluție  $(c_1, c_2)$  din două motive diferite primul, dacă ar avea o soluție, atunci  $y = c_1 + c_2 t$  ar fi o dreaptă care conține punctele date

*→ se observă că punctele nu sunt coliniare*

- al doilea, acesta este sistemul corespunzător ecuației (13) pe care am discutat-o la începutul acestui capitol
- am observat atunci că prima și a treia ecuație sunt inconsistentă, și am găsit că cea mai bună soluție în sensul celor mai mici pătrate este  $(c_1, c_2) = (7/4, 3/4)$
- prin urmare, cea mai bună dreaptă este  $y = 7/4 + 3/4t$

- putem evalua interpolarea folosind statistica definită anterior
- rezidualii punctelor date sunt

$t$	$y$	dreapta	eroarea
1	2	2.5	-0.5
-1	1	1.0	0.0
1	3	2.5	0.5

- REMP-ul este  $1/\sqrt{6}$ , după cum am văzut mai sus
- exemplul anterior sugerează o metodă în trei pași pentru rezolvarea problemelor de interpolare de date în sensul celor mai mici pătrate

*→ exemplul 5*

#### Algoritmul 4 (Interpolarea datelor folosind cele mai mici pătrate)

Dându-se o mulțime de  $m$  puncte  $(t_1, y_1), \dots, (t_m, y_m)$ .

**PASUL 1. Alegem un model.** Identificăm un model parametrizat, de exemplu  $y = c_1 + c_2 t$ , care va fi folosit pentru a interpola datele.

**PASUL 2. Înlocuim punctele în model.** Fiecare punct dă naștere unei ecuații ale cărei necunoscute sunt parametri, de exemplu  $c_1$  și  $c_2$  în modelul cu dreapta. Aceasta rezultă într-un sistem  $Ax = b$ , în care necunoscuta  $x$  reprezintă parametrii necunoscuți.

**PASUL 3. Rezolvăm ecuațiile normale.** Soluția în sensul celor mai mici pătrate pentru parametri va fi găsită ca soluția sistemului de ecuații normale  $A^T Ax = A^T b$ .

*Exemplul 8*

- găsiți cea mai bună dreaptă și cea mai bună parabolă pentru cele patru puncte  $(-1, 1), (0, 0), (1, 0), (2, -2)$  din Figura 6

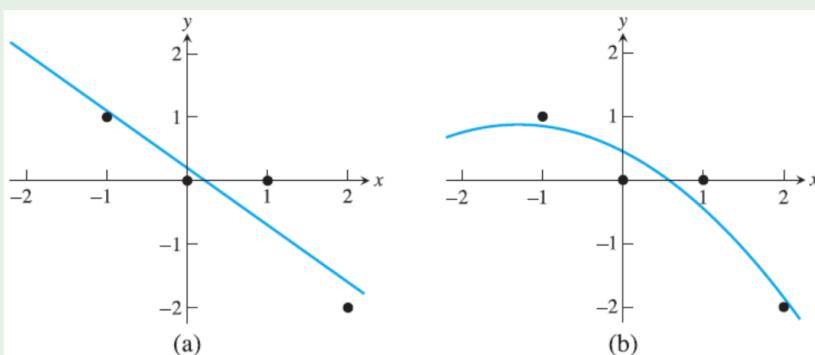


Figura 6: Interpolări de tip cele mai mici pătrate pentru punctele din

**Exemplul 8.** (a) Cea mai bună dreaptă  $y = 0.2 - 0.9t$ . REMP-ul este 0.418.  
(b) Cea mai bună parabolă  $y = 0.45 - 0.65t - 0.25t^2$ . REMP-ul este 0.335.

$$y = c_1 + c_2 t$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2(-1) = 1 \\ c_1 + c_2(0) = 0 \\ c_1 + c_2(1) = 0 \\ c_1 + c_2(2) = -2 \end{cases}$$

sau

$$A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Facem  $A^T A$  și  $A^T \cdot b$

- (3) ecuațiile normale sunt

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

- rezolvând pentru a găsi coeficienții  $c_1$  și  $c_2$  rezultă în găsirea celei mai bune drepte ca fiind  $y = c_1 + c_2 t = 0.2 - 0.9t$
- rezidualii sunt

$$r = b - A \cdot \bar{x}$$

$t$	$y$	dreapta	eroarea
-1	1	1.1	-0.1
0	0	0.2	-0.2
1	0	-0.7	0.7
2	-2	-1.6	-0.4

$m \rightarrow m$ . puncte?

- statisticile de eroare sunt eroarea pătratică  
 $EP = (-0.1)^2 + (-0.2)^2 + (0.7)^2 + (-0.4)^2 = 0.7$  și  
 $REMP = \sqrt{0.7}/\sqrt{4} = 0.418$
- în continuare, extindem acest exemplu păstrând aceleasi patru puncte, dar schimbând modelul
- luăm  $y = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$  și înlocuim punctele date, obținând

$$\begin{aligned} c_1 + c_2(-1) + c_3(-1)^2 &= 1 \\ c_1 + c_2(0) + c_3(0)^2 &= 0 \\ c_1 + c_2(1) + c_3(1)^2 &= 0 \\ c_1 + c_2(2) + c_3(2)^2 &= -2, \end{aligned}$$

sau, în formă matricială,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- de data aceasta, ecuațiile normale sunt trei ecuații în trei necunoscute:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

- rezolvând pentru a găsi coeficienții rezultă în găsirea celei mai bune parabole  $y = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 = 0.45 - 0.65t - 0.25t^2$
- erorile reziduale sunt date în tabelul următor:

$t$	$y$	parabola	eroarea
-1	1	0.85	-0.15
0	0	0.45	-0.45
1	0	-0.45	0.45
2	-2	-1.85	-0.15

- statisticile de eroare sunt eroarea pătratică  
 $EP = (0.15)^2 + (-0.45)^2 + (0.45)^2 + (-0.15)^2 = 0.45$  și  
 $REMP = \sqrt{0.45}/\sqrt{4} \approx 0.335$

## 5.2. 1. Date periodice

- datele periodice necesită modele periodice
- temperatura aerului de afară, de exemplu, respectă cicluri pe numeroase scale de timp, inclusiv cicluri zilnice și anuale guvernate de rotația Pământului și de revoluția Pământului în jurul Soarelui
- ca un prim exemplu, datele de temperatură orare sunt interpolate folosind sinuși și cosinuși

### Exemplu 9

- interpolatează temperaturile înregistrate în Washington, D.C., pe 1 ianuarie 2001, listate în următorul tabel, folosind un model periodic:

ora	$t$	temperatura ( $^{\circ}$ C)
0	0	-2.2
3	$\frac{1}{8}$	-2.8
6	$\frac{1}{4}$	-6.1
9	$\frac{3}{8}$	-3.9
12	$\frac{1}{2}$	0.0
15	$\frac{5}{8}$	1.1
18	$\frac{3}{4}$	-0.6
21	$\frac{7}{8}$	-1.1

Alegem modelul  $y = c_1 + c_2 \cos 2\pi t + c_3 \sin 2\pi t$

- alegem modelul  $y = c_1 + c_2 \cos 2\pi t + c_3 \sin 2\pi t$  pentru a se potrivii cu faptul că temperatura este aproximativ periodică cu o perioadă de 24 de ore, cel puțin în absența unor modificări de temperatură pe termen mai lung
- modelul folosește această informație fixând perioada pentru a fi exact o zi, unde folosim zilele ca unități pentru  $t$
- variabila  $t$  este listată în aceste unități în tabelul de mai sus
- înlocuind datele în model, rezultă următorul sistem supradeterminat de ecuații liniare:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \cos 2\pi(0) + c_3 \sin 2\pi(0) &= -2.2 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{8}\right) &= -2.8 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) &= -6.1 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{3}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{3}{8}\right) &= -3.9 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) &= 0.0 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{5}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{5}{8}\right) &= 1.1 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) &= -0.6 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{7}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{7}{8}\right) &= -1.1. \end{aligned}$$

- ecuația matricială inconsistentă corespunzătoare este  $Ax = b$ , unde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos 0 & \sin 0 \\ 1 & \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ 1 & \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} \\ 1 & \cos \frac{3\pi}{4} & \sin \frac{3\pi}{4} \\ 1 & \cos \pi & \sin \pi \\ 1 & \cos \frac{5\pi}{4} & \sin \frac{5\pi}{4} \\ 1 & \cos \frac{3\pi}{2} & \sin \frac{3\pi}{2} \\ 1 & \cos \frac{7\pi}{4} & \sin \frac{7\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2.2 \\ -2.8 \\ -6.1 \\ -3.9 \\ 0.0 \\ 1.1 \\ -0.6 \\ -1.1 \end{bmatrix}.$$

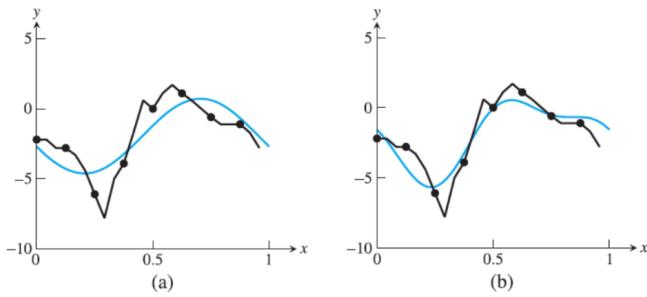
- ecuațiile normale  $A^T A c = A^T b$  sunt

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.6 \\ -2.9778 \\ -10.2376 \end{bmatrix},$$

a căror soluție este  $c_1 = -1.95$ ,  $c_2 = -0.7445$ , și  $c_3 = -2.5594$

- cea mai bună versiune a modelului, în sensul celor mai mici pătrate, este  $y = -1.9500 - 0.7445 \cos 2\pi t - 2.5594 \sin 2\pi t$ , care are  $\text{REMP} \approx 1.063$

- Figura 7(a) compară modelul de interpolare de tip cele mai mici pătrate cu temperaturile care au fost înregistrate în realitate



**Figura 7: Interpolări de tip cele mai mici pătrate pentru datele periodice din Exemplele 9 și 10.** (a) Modelul sinusoidal

$y = -1.95 - 0.7445 \cos 2\pi t - 2.5594 \sin 2\pi t$  prezentat îngroșat, împreună cu temperaturile înregistrate în 1 ianuarie 2001. (b) Sinusoida îmbunătățită  $y = -1.95 - 0.7445 \cos 2\pi t - 2.5594 \sin 2\pi t + 1.125 \cos 4\pi t$  interpolează datele mai exact.

### Exemplul 10

- interpolatează datele de temperatură folosind modelul îmbunătățit

$$y = c_1 + c_2 \cos 2\pi t + c_3 \sin 2\pi t + c_4 \cos 4\pi t. \quad (20)$$

- sistemul de ecuații este acum

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \cos 2\pi(0) + c_3 \sin 2\pi(0) + c_4 \cos 4\pi(0) &= -2.2 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{8}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{1}{8}\right) &= -2.8 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{1}{4}\right) &= -6.1 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{3}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{3}{8}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{3}{8}\right) &= -3.9 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{1}{2}\right) &= 0.0 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{5}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{5}{8}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{5}{8}\right) &= 1.1 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{3}{4}\right) &= -0.6 \\ c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{7}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{7}{8}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{7}{8}\right) &= -1.1, \end{aligned}$$

- care conduce la următoarele ecuații normale:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.6 \\ -2.9778 \\ -10.2376 \\ 4.5 \end{bmatrix},$$

- soluțiile sunt  $c_1 = -1.95$ ,  $c_2 = -0.7445$ ,  $c_3 = -2.5594$ , și  $c_4 = 1.125$ , cu  $\text{REMP} \approx 0.705$

- Figura 7(b) arată că modelul extins  $y = -1.95 - 0.7445 \cos 2\pi t - 2.5594 \sin 2\pi t + 1.125 \cos 4\pi t$  îmbunătățește în mod substanțial interpolarea