Aplicaţii :Unde electromagnetice

1.Structura undei electromagnetice liniar polarizate care se propagă pe direcţii paralele la axa *Oz* este:

a) $E_z \neq 0$, $E_y = 0$, $E_x \neq 0$; $H_{x,y,z} \neq 0$; $\vec{K} = 0$.

b) $E_x \neq 0$; $H_y \neq 0$; $\vec{K} = K \cdot \vec{k}$; $E_{y,z} = 0$, $H_{x.z} = 0$.

c) $\vec{E} = \vec{j}E_y$, $\vec{H} = \vec{i}H_x$, $\vec{K} = \vec{k} \cdot K$;

d) $E_z \neq 0$, $H_z \neq 0$, $K_z \neq 0$; $E_{x,y} = 0$, $H_{x,y} = 0$, $K_{x,y} = 0$;

e) $\vec{E}$ este diferit de zero pe toate direcţiile perpendiculare la direcţia de propagare;

f) $\vec{H}$ este diferit de zero pe toate direcţiile perpendiculare la direcţia de propagare.

2. În unda electromagnetică:

a) componenta electrică a energiei este egală cu componenta magnetică a energiei;

b) $w = \varepsilon E^2$; *c)* $w = \mu H^2$; *d)* $w = \mu E^2$; *e)* $w = \varepsilon H^2$; *f)* $I = |\vec{S}|$.

3. La distanţă mare de antena de emisie, intensitatea câmpului electric este dată de legea:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left(2\vec{i} + E_{0y}\vec{j} + 0{,}3\vec{k}\right)\exp[\omega t - 0{,}12x + 0{,}18y]\,\mathrm{i}$$

unde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt versori iar i = $\sqrt{-1}$.

Să se determine:

1) lungimea de undă λ şi frecvenţa undei υ;
2) intensitatea câmpului magnetic;
3) intensitatea undei.

Rezolvare:

Dependenţa $\vec{E}(\vec{r},\vec{t})$ este de forma $\vec{E}(\vec{r},\vec{t}) = \vec{E}_0 e^{i\left(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r}\right)}$.

Comparând această relaţie cu expresia concretă a câmpului obţinem:

$$-\vec{K}\cdot\vec{r} = Kx + K_y y + K_z z = -0{,}12x + 0{,}18y \text{, adică:}$$

$K_x = 0{,}12$; $K_y = -0{,}18$, $K_z = 0$; $K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = 0{,}216\ \mathrm{m}^{-1}$.

1) $\lambda = 2\pi/K$ = 29,04 m; $\nu = c/\lambda = 1{,}03\cdot10^7\ \mathrm{s}^{-1}$=10,3MHz; .

2) versorul direcţiei de propagare este $\vec{u}_K = \dfrac{\vec{K}}{K}$ deci $\vec{u}_K = -0{,}555\vec{i} + 0{,}833\vec{j}$.

Produsul scalar dintre $\vec{E}$ şi $\vec{u}_K$ este nul deoarece $\vec{E} \perp \vec{u}_K$. Se poate scrie :

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{u}_K = 0,$$

$$\left(2\vec{i} + E_{0y}\vec{j} + 0{,}3\vec{k}\right)\cdot -0{,}555\vec{i} + 0{,}833\vec{j} = 0$$

ceea ce conduce la :

$$-1{,}11 + 0{,}833\,E_{oy} = 0,$$

E_{oy}=1,33 V/m.

Amplitudinea câmpului electric este:

$$E_0 = \left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2\right)^{1/2} = \sqrt{2^2 + 1{,}33^2 + 0{,}3^2} = 2{,}42 \text{ V/m.}$$

Amplitudinea câmpului magnetic este:

$$\vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\vec{u}_K \times \vec{E}_0; \quad H_0 = 6{,}42 \cdot 10^{-3} \text{ A/m.}$$

Câmpul magnetic este:

$$\vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\vec{u}_K \times \vec{E} = 2{,}66 \cdot 10^{-3}\left(-1{,}08\vec{i} + 0{,}166\vec{j} - 2{,}4\vec{k}\right)e^{i(\omega t - 0{,}12x + 0{,}18y)}$$

3) $$\left|\vec{S}\right| = \left|\vec{E} \times \vec{H}\right| = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \vec{K}\vec{r}\right)$$

$$I = \left\langle\left|\vec{S}\right|\right\rangle; \; I = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}E_0^2; \; I = 2{,}35 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2.$$

4.

O antenă de mici dimensiuni emite unde electromagnetice monocromatice liniar polarizate care se propagă în sensul negativ al axei *Ox* (figura 1). Frecvenţa de emisie este ν = 620 MHz iar amplitudinea câmpului electric este E_0 = 620 mV/m.

Pentru punctele îndepărtate de antenă, să se calculeze intensitatea câmpului electric la distanţa x = -2 km.

Rezolvare:

Care este expresia şi valoarea vectorului de undă?

R: $\vec{u}_K \equiv -\vec{i}$; $\vec{K} = -\vec{i}K$; $K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$, K = 12,98 m^{-1}

1) Care este expresia câmpului electric şi care este valoarea sa în punctul x = -2 km?

R: $E = E_0 \cos(\omega t - Kx)$, unde: $x < 0$;

$\omega = 2\pi\nu$; ω = 3,8956·10^9 rad/s, $t = \frac{|x|}{c}$; $t = \frac{2}{3}10^{-8}$ s=6,6 ns;

ωt = 25,97 rad; Kx = -25,960 rad;

deci E = 0,6185 V/m.

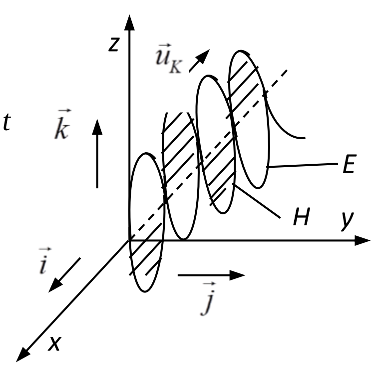

Fig.1 Mărimile *E* şi *H* ale undei.

5. O lamă cu feţele plan paralele are grosimea l = 4 mm. Pe faţa superioară indicele de refracţie al lamei este n_1 = 1,62 iar pe faţa inferioară este n_2 = 1,31. Între cele două feţe, prin lamă indicele de refracţie variază cu distanţa x, măsurată faţă de faţa superioară, după legea $n = a \cdot e^{-bx}$.

Să se calculeze durata în care o undă electromagnetică străbate prin lamă la incidenţă normală. (c = 3·10^8 m/s).

Rezolvare:

Indicele de refracţie n se defineşte cu relaţia $n = c/\text{v}$, v - viteza de propagare a luminii în mediu iar c - viteza de propagare a luminii în vid.

Mărimile a şi b le determinăm astfel: pentru $x = 0$, $n = n_1$, $n_1 = a = 1{,}62$; pentru $x = l$,

$n = n_2 = a\cdot e^{-bl}$; $b = -\dfrac{1}{l}\ln\dfrac{n_2}{a} = \dfrac{1}{l}\ln\dfrac{n_1}{n_2} = 0{,}053$ mm^{-1}.

- Durata în care unda străbate lama o determinăm astfel: perpendicular la direcţia de propagare a luminii delimităm un strat de grosime dx şi scriem $dt = \dfrac{dx}{v} = \dfrac{n}{c}dx$;

$$\Delta t = \int_{t1}^{t_2} dt = \frac{a}{c}\int_0^l e^{-bx}dx = -\frac{a}{bc}e^{-bx}\Big|_0^l = \frac{a}{bc}\left(1 - e^{-bl}\right);$$

$\Delta t = 19{,}5$ ps (figura 2)

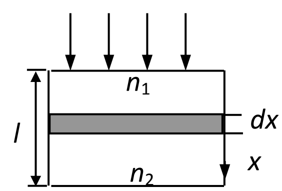

Figura 2 Lama cu feţe plan paralele.

Probleme propuse temă

1. Câmpul electric al unei unde electromagnetice la distanţă mare faţă de antenă este:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - Kz)}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Vectorul de propagare este $\vec{K} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$ (m^{-1}), amplitudinea este $\left|\vec{E}_0\right| = 0{,}15$ V/m, iar $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt versorii axelor.

Se cere să se descrie modul de propagare al undei şi să se determine:

1) lungimea de undă şi frecvenţa undei;

2) câmpul magnetic al undei;

3) vectorul Poynting.

Se cunosc: $\varepsilon_0 = 8{,}856\cdot10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ H/m.

2. **.** O undă electromagnetică plană cade sub incidenţă normală pe o placă dielectrică cu feţele plan paralele .Indicele de refracţie prin lamă variază după legea $n = a - bx$, $n = 1{,}84$ pentru $x = 0$ şi $n = 1{,}21$ pentru $x = l = 8$ mm. Calculaţi timpul necesar undei pentru a parcurge grosimea lamei.

Aplicaţii :Mecanică cuantică

Radiaţia termică

a) Formula lui Wien determină caracterul funcţiei de distribuţie a energiei în spectru lradiaţiei corpului negru şi este dată prin:

$$\varepsilon_{\nu,T} = c\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right).$$

b) Legea de deplasare a lui Wien este :

$$\lambda_{\max} T = b,$$

unde: $\lambda_{\max}$ reprezintă lungimea de undă corespunzătoare maximului funcţiei de distribuţie în spectrul radiaţiei corpului negru, iar b este constanta lui Wien ($b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ m·K).

c) Legea lui Stefan-Boltzmann

$$\varepsilon_T = \sigma T^4,$$

unde: ε_T reprezintă puterea globală a radiaţiilor emise de unitatea de suprafaţă a corpului negru, σ este constanta Stefan-Boltzmann, T este temperatura absolută (σ =5,66$\cdot 10^{-8}$ W·m^{-2}·K^{-4}).

d)Energia şi impulsul fotonului sunt:

$$W = h\nu = hc/\lambda \quad , \qquad p = \frac{h}{\lambda} \quad ,$$

unde : υ este frecvenţa fotonului şi λ reprezintă lungimea de undă de Broglie (asociată) .

Efectul fotoelectric

Ecuaţia lui Einstein pentru efectul fotoelectric extern este:

$$h\nu = L_{ex} + \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

unde: L_{ex} -lucrul mecanic de extracţie a electronului din metal, v_{max} - viteza maximă a fotoelectronului emis; m -masa electronului.

Efectul Compton

Variaţia lungimii de undă a fotonilor împrăştiaţi sub unghiul φ faţă de direcţia iniţială în procesul de difuzie Compton este:

$$\Delta\lambda = 2\Lambda \sin^2\frac{\varphi}{2}, \qquad \Lambda = \frac{h}{m_0 c} = 0{,}0242 \text{ Å}$$

este lungimea de undă Compton ; m_0 fiind masa de repaus a electronului, iar c viteza luminii în vid.

1. Dacă energia unui foton descreşte, atunci lungimea sa de undă:
a) creşte; *b)* descreşte; *c)* este posibil să crească dar să şi descrească; *d)* rămâne neschimbată; *e)* nu se poate preciza; *f)* depăşeşte lungimea de undă avută iniţial.

2. Un foton cu energia 5eV cade pe suprafaţa unui metal care emite un electron. Lucrul mecanic de extracţie al electronului din metal este 3eV. Energia cinetică a fotoelectronului este:
a) 3eV; *b)* 4eV*;* *c)* 5eV*;* *d)* 2eV*;* *e)* 20eV*;* *f)* nu se poate determina.

3. Efectul Compton poate fi explicat pe baza teoriei:
a) corpusculare; *b)* ondulatorii; *c)* ambelor; *d)* relativităţii restrânse;
e) relativităţii generale; *f)* nici uneia.

4. Lungimea de undă Compton Λ_C se calculează cu:

a) $\frac{h}{3m_0c}$; *b)* $\frac{h}{2m_0c}$; *c)* $\frac{h}{m_0c}$; *d)* $\frac{h^2}{m_0c}$; *e)* $\frac{hm_0}{c}$; *f)* $\frac{hm_0}{c^2}$.

5. Pragul fotoelectric pentru un metal necunoscut este $\lambda_0 = 275$ nm. Găsiţi lucrul mecanic de extracţie a electronului din acest metal şi viteza maximă a electronilor extraşi de către radiaţia cu lungimea de undă $\lambda = 180$ nm.

Rezolvare:

Lucrul mecanic de extracţie este $L_{ex} = \frac{hc}{\lambda_0} = 4{,}5eV$.

Din ecuaţia:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{mv_{\max}{}^2}{2}$$

rezultă: $v_{\max} = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)}$; $v_{\max} = 9{,}1 \cdot 10^5$ m/s.

6. O cuantă de lumină cu lungimea de undă $\lambda = 2{,}32 \cdot 10^{-7}$ m, eliberează un electron de pe suprafaţa unui electrod de platină.

Să se calculeze impulsul total transmis electrodului, dacă electronul este expulzat după directia de mişcare a cuantei în sens contrar ($L = 5{,}29$ eV).

Rezolvare:

Aplicăm legea conservării impulsului, pe direcţia de mişcare a cuantei :

$$\vec{p}_f = \vec{p}_{ed} + \vec{p}_{e^-}$$

cu p_f = impulsul fotonului, $p_f = \frac{h}{\lambda}$; p_{ed} = impulsul electrodului; p_{e^-} = impulsul electronului.

$$p_{e^-} = \sqrt{2m\left(\frac{hc}{\lambda} - L\right)},$$

$$p_{ed} = \frac{h}{\lambda} + \sqrt{2m\left(\frac{hc}{\lambda} - L\right)} = 1{,}4 \cdot 10^{-25}\,\text{Ns}$$

7. În procesul de răcire a unui corp negru prin emisie de radiaţie termică, lungimea de undă corespunzătoare maximului în spectrul de distribuţie al energiei ε_λ s-a deplasat cu 5000 Å.

Să se determine cu câte grade a scăzut temperatura corpului, dacă temperatura sa iniţială era $T_{in} =$ 2000 K.

Se foloseşte legea de deplasare a lui Wien : $\lambda_{\max} T = const.$

$\Delta T = 512K.$

8. Un electron se mişcă pe un cerc de rază $r = 0{,}5$ cm într-un câmp magnetic omogen de inducţie $B = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ T, perpendicular la traiectorie. Care este lungimea de undă de Broglie?

R: $\lambda_B = h/p$

$F_{cp} = F_L$

$mv^2/r = evB$; $mv = eBr$; $\lambda_B = h/eBr$

$\lambda = 0{,}18$ nm.

Referinte bibliografice

- I. LUMINOSU, NICOLINA POP, V. CHIRITOIU, M. COSTACHE , *Fizica - Teorie, Probleme, Teste,* Editura Politehnica, Timişoara, 2010.