PLANUL

- planul determinat de 1 PUNCT și de NORMALA SA

avem $\begin{cases} \vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \\ M(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0}$$

- ecuația generală

$$\boxed{\pi : ax + by + cz + d = 0}$$

- ecuația planului care trece prin 3 PUNCTE NECOLINIARE

$$\boxed{\pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0}$$

- planul determinat de 1 PUNCT și 2 DIRECȚII

avem $\begin{cases} M(x_0, y_0, z_0) \\ \vec{d_1} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} \\ \vec{d_2} = l'\vec{i} + m'\vec{j} + n'\vec{k} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0}$$

- unghiul diedru dintre 2 plane

avem $\begin{cases} \pi : ax + by + cz + d = 0 \\ \pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \arccos \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

DISTANȚA de la 1 PUNCT la PLAN

avem $\begin{cases} M_0(x_0, y_0, z_0) \\ \pi: ax+by+cz+d=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{d(M_0, \pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

DISTANȚA dintre 2 PLANE

avem $\begin{cases} \pi: ax+by+cz+d=0 \\ \alpha: a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ distanța dintre cele 2 plane este distanța dintre 2 puncte arbitrare $M \in \pi$ și $P \in \alpha$.

PROIECȚIA unui PUNCT pe plan

punct = intersecția unei drepte și un plan

știm că $\vec{d} = \vec{N_\pi}$ și trebuie să aflu coord. punctului.

Exemplu: $A(x,y,z)$, $Q(1,-1,0)$, $\pi: x-y+2z-8=0$

$\left.\begin{array}{l} \vec{QA} = \vec{N_\pi} = (1,-1,2) \\ Q \in QA \end{array}\right\} \Rightarrow QA: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{2} = t$

$\Rightarrow QA: \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t-1 \\ z = 2t \end{cases}$; $QA \cap \pi \Rightarrow (t+1)-(-t-1)+2(2t)-8=0$

$\Rightarrow \boxed{t=1} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(2,-2,2)}$

DREAPTA

- dreapta care trece prin 1 PUNCT și 1 DIRECȚIE

avem $\begin{cases} M_0(x_0, y_0, z_0) \\ \vec{d} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\boxed{d: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} (= t)}$ ecuațiile CARTEZIENE canonice

$\Rightarrow$ $\boxed{d: \begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases}}$ ecuațiile PARAMETRICE

! pt. a găsi puncte pe dreaptă, trb. să dăm valori lui t.

- dreapta care trece prin 2 PUNCTE

avem $\begin{cases} M_1(x_1, y_1, z_1) \\ M_2(x_2, y_2, z_2) \end{cases}$, $M_1 \neq M_2$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \boxed{d: \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}} \\ \vec{d} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) \end{cases}$

- ecuația generală a unei drepte determinată de 2 PLANE

$d: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \Rightarrow N_{P_1} = (a_1, b_1, c_1) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \Rightarrow N_{P_2} = (a_2, b_2, c_2) \end{cases}$

vectorul director: $\vec{d} = \vec{N}_{P_1} \times \vec{N}_{P_2}$

punct M: dai o val. lui x/y/z și rez. sistemul

- ecuația fasciculului de plane care trec prin dreapta

$$d: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_{\alpha,\beta}: \alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0}, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

- perpendiculara comună a 2 DREPTE

$$\text{avem} \begin{cases} d_1: & \Rightarrow \vec{d_1}=l_1\vec{i}+m_1\vec{j}+n_1\vec{k} \\ d_2: & \Rightarrow \vec{d_2}=l_2\vec{i}+m_2\vec{j}+n_2\vec{k} \\ M_1(x_1,y_1,z_1)\in d_1 & \hookrightarrow \vec{d_1}\times\vec{d_2}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k} \\ M_2(x_2,y_2,z_2)\in d_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{dreapta} \perp d_1: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

$$\text{dreapta} \perp d_2: \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

- DISTANȚA dintre 2 DREPTE

$$\text{avem} \begin{cases} d_1: & \rightarrow \vec{d_1} \\ d_2: & \rightarrow \vec{d_2} \\ M_1\in d_1 \\ M_2\in d_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{d(d_1,d_2)=\frac{\left|(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{d_1},\vec{d_2})\right|}{\|\vec{d_1}\times\vec{d_2}\|}}$$

DISTANȚA de la 1 PUNCT la 1 DREAPTĂ
(proiecția punctului M pe dreaptă)

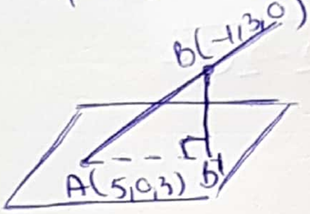
→ găsesc punctul pt. care d este normală

→ M' - intersecția lui d' cu planul

→ $\vec{MM'}$ - proiecția/distanța căutată

Exemplu:

$pr_{xOz} B = ?$



xOz

$\Rightarrow y = 0$

căutăm BB'

$BB' = \vec{n}_{xOz} = (0,1,0)$

$B(-1,3,0) \in BB'$

$\Rightarrow BB': \frac{x+1}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0} = t$

$$\Rightarrow BB' \begin{cases} x = -1 \\ y = t+3 \\ z = 0 \end{cases}$$

$BB' \cap xOz$

$xOz: y = 0$

$\Rightarrow t+3 = 0 \rightarrow t = -3 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow B'(-1,0,0)$

$B'(-1,0,0)$

$A(5,0,3)$

$\Rightarrow AB': \frac{x+1}{6} = \frac{y}{0} = \frac{z}{3} \rightarrow pr_{xOz} B$

SFERA

- R – raza, $O(x_0, y_0, z_0)$ – centrul

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2}$$ ecuația sferei

- def: $S(C,O) = \{P \mid d(O,P) = R\}$; $P(x,y,z)$

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

- sferele pot fi:
  - ↳ EXTERIOARE: $O_1O_2 > R_1 + R_2$
  - ↳ SECANTE: $O_1O_2 < R_1 + R_2$ și $O_1O_2 > |R_1 - R_2|$
  - ↳ TANGENTE: $O_1O_2 = |R_1 + R_2|$
  - ↳ TANGENTE INTERIOARE: $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$
  - ↳ SFERĂ INTERIOARĂ: $O_1O_2 < |R_1 - R_2|$

- ecuația PLANULUI tangent la S într-un punct P (Metoda dedublării)

avem $\begin{cases} S: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \\ P(x_1, y_1, z_1) \in S \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: (x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) = R^2}$$

- DISTANȚA de la centrul sferei la un plan

avem $\begin{cases} \alpha: ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow N_\alpha = (a, b, c) \\ O(x_0, y_0, z_0), R \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{d(O, \alpha) = \frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

$= \boxed{R}$ (dacă planul e tg. la sferă)

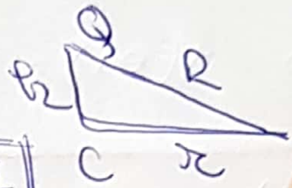
ERCUL

C - centrul, r = raza

• intersecția dintre o sferă și un plan

$$\mathcal{C}: \begin{cases} S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \\ \alpha: ax+by+cz+d=0 \end{cases}$$

⇒ găsim C (centrul) și r (raza)



↳ $pr_\alpha C$

↳ $\boxed{r=\sqrt{R^2-h^2}}$

APLICAȚII LINIARE

• $f: V_1 \to V_2$ este aplicație liniară, dacă:

1) $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2), \ \forall v_1, v_2 \in V_1$

2) $f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v), \ \forall \alpha \in K, \ \forall v \in V_1$

obs

1) $f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$

2) f izomorfism $\Rightarrow \det(A_{B_1B_2}) \neq 0$

• f - operator liniar, dacă $\begin{cases} f \text{ - aplicație liniară} \\ f: V_1 \to V_1 \end{cases}$

• f - izomorfism, dacă $\begin{cases} f \text{ - aplicație liniară} \\ f \text{ - bijectivă} \\ \dim V_1 = \dim V_2 \end{cases}$

• f - automorfism, dacă $\begin{cases} f \text{ - operator liniar} \\ f \text{ - bijectivă} \\ \dim V_1 = \dim V_2 \end{cases}$

• MATRICEA asociată lui f în perechea de baze (B_1, B_2)

avem $\begin{cases} B_1 = \{e_1, e_2, \dots\} \in V_1 \\ B_2 = \{u_1, u_2, \dots\} \in V_2 \\ f : V_1 \to V_2 \end{cases} \Rightarrow A_{B_1B_2} \in K^{m\times n}$

$\Rightarrow f(e_1) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \dots \Rightarrow$

coord.

$$\Rightarrow \boxed{A_{B_1B_2} = \left(f(e_1) \mid f(e_2) \mid \dots \mid\right)}$$

∇ Dacă $B_1 = B_2 \Rightarrow A_{B_1B_2} \overset{not}{=} A_B$

$$\boxed{[f(v)]_{B_2} = A_{B_1B_2} \cdot [v]_{B_1}, \forall v \in V_1}$$

• găsirea unei noi MATRICE $(V_1 = V_2)$

$$\boxed{A_{B'} = T_{BB'}^{-1} \cdot A_B \cdot T_{BB'}}$$

• injectivitate

$L : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $L(M) = M^T$

$L(M_1) = L(M_2) \Leftrightarrow M_1^T = M_2^T \overset{(T)}{\Leftrightarrow} (M_1^T)^T = (M_2^T)^T \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M_1 = M_2 \Rightarrow L$ - injectivă (1)

• surjectivitate

Fie $M_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a.î. $M_1 = M_2^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$L(M_1) = L(M_2^T) = (M_2^T)^T = M_2 \Rightarrow L$ - surjectivă (2)

(1)+(2) $\Rightarrow L$ - izomorfism

∇ Dacă $\det A = 0 \Rightarrow L$ nu e izomorfism