PS

(curs 10 - S10)

Inegalitatea Markov

Fie X o v.a. astfel încât $X \geq 0$, adică X ia valori nenegative. Dacă X are medie finită, atunci, pentru $a > 0$, avem

$$P(X \geq a) \leq \frac{M(X)}{a}.$$

Demo:

- $X \geq 0 \rightarrow P(X \geq 0) = 1$, deci $P(X < 0) = 0 = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$.
- ⇒ presupune că funcția f este zero pe întreg intervalul $(-\infty, 0)$
- $$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx}_{=0} + \underbrace{\int_{0}^{a} xf(x)\,dx}_{\geq 0} + \int_{a}^{\infty} xf(x)\,dx \geq \int_{a}^{\infty} xf(x)\,dx.$$
- $M(X) \geq \int_a^\infty af(x)\,dx = a\int_a^\infty f(x)\,dx = a\int_{[a,\infty)} f(x)\,dx = aP(X \geq a)$

$\Rightarrow M(X) \geq a\,P(X \geq a)$ q.e.d.

Inegalitatea Cebîșev

Fie X o v.a. arbitrară de medie $M(X)$ și dispersie $\sigma^2(X)$ finite. Atunci:

$$P(|X - M(X)| \geq a) \leq \frac{\sigma^2(X)}{a^2}, \quad a > 0.$$

Demo:

- Fie variabila aleatoare $Y = (X - M(X))^2 \geq 0$;
- Evident $M(Y) = \sigma^2(X)$;
- inegalitatea Markov pentru v.a. Y:
  $$P(|X - M(X)| \geq a) = P((X - M(X)^2) \geq a^2) = P(Y \geq a^2) \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{M(Y)}{a^2}.$$
- $M(Y) = \sigma^2(X)$, rezultă inegalitatea Cebîșev.

Cazul $a = k\sigma(X)$, $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(|X - M(X)| \geq a) \leq \frac{\sigma^2(X)}{k^2\sigma^2(X)} = \frac{1}{k^2}.$$

Echivalent:

$$P(|X - M(X)| < k) = 1 - P(|X - M(X)| \geq k) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

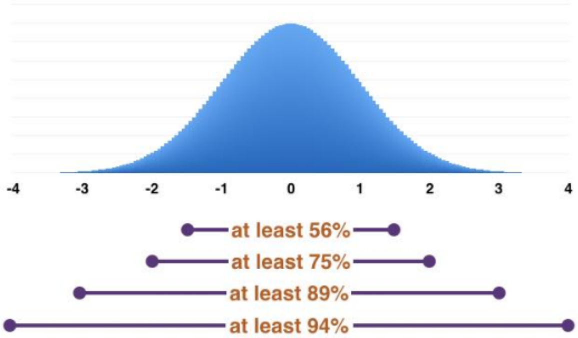
- pentru $k = 2$ avem: $P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{4} = 0.75$.
- pentru $k = 3$ avem $P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} = 0.88$.
- pentru $k = 4$ avem
  $P(m - 4\sigma < X < m + 4\sigma) \geq 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0.9375$.

Concluzie: probabilitatea ca variabila aleatoare X să ia valori in intervale centrate în valoarea sa medie și de lungime 4σ, 6σ, 8σ este mai mare decât $0.75, 0.88$, respectiv 0.9375.

Chebyshev's Inequality

The proportion of observations within k standard deviations is at least 1-1/k²

No. Std Devs	1 - 1/k²
1.5	0.56
2.0	0.75
3.0	0.89
4.0	**0.94**



Covarianța

Definiție

Covarianța variabilelor aleatoare X și Y, ce au mediile $m_X = M(X)$, $m_Y = M(Y)$ finite, este definită prin

$$cov(X, Y) = M((X - m_X)(Y - m_Y)).$$

Observație:

- Covarianța=generalizare la două variabile a dispersiei

$$\text{cov}(X, X) = M((X - m_X)(X - m_X)) = M((X - m_X)^2) = \sigma^2(X).$$

- formula mai simplă de calcul

$$\text{cov}(X, Y) = M(XY) - M(X)\,M(Y)$$

Variabile aleatoare necorelate: $cov(X, Y) = 0$.

Definiție

Coeficientul de corelație a două variabile aleatoare X și Y, de abateri standard nenule, este un număr real, notat cu $\rho(X, Y)$, definit prin

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

unde σ_X, σ_Y- abaterile standard ale variabilelor aleatoare X, respectiv Y.

- daca $Z_1 = \frac{X - m_X}{\sigma_X}, \quad Z_2 = \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}$, atunci
$$\rho(X, Y) = cov(Z_1, Z_2)$$
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.

Proprietate

Dacă între variabilele aleatoare X și Y există o relație liniară de forma

$$Y = aX + b, \ a, b \in, \ a \neq 0,$$

atunci

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } a < 0, \\ 1, & \text{dacă } a > 0. \end{cases}$$

Reciproc, dacă $|\rho(X, Y)| = 1$, atunci între ele există o relație liniară,

$$Y = aX + b, \quad a \neq 0$$

În concluzie:

- $\rho(X, Y) = 0$, atunci X și Y sunt **necorelate**;
- $\rho(X, Y)$ este apropiat de zero, atunci X și Y sunt **slab corelate** (intensitatea legăturii dintre ele este redusă);
- $\rho(X, Y) = 1$, atunci $Y = aX + b, \quad a > 0$, X și Y sunt **pozitiv corelate**;
- $\rho(X, Y) = -1$, atunci $Y = aX + b, \quad a < 0$, X și Y sunt **negativ corelate**;
- $|\rho(X, Y)|$ are o valoare apropiată de 1, **relația dintre variabilele aleatoare este "aproape liniară"**, adică valorile (x, y) ale vectorului aleator (X, Y) sunt ușor dispersate în jurul unei drepte de ecuație $y = ax + b$.

Matricea de covarianță

Definiție

Matricea de covarianță a vectorului aleator $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ este matricea notată cu Σ, ale cărei elemente sunt $\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Observații:

- $\sigma_{ii} = cov(X_i, X_i) = \sigma^2(X_i)$
- Σ este simetrică și semipozitiv definită
- $\Sigma = M(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)$, unde $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{m} = (X_1 - m_1, X_2 - m_2, \ldots, X_n - m_n)^T$ iar $M(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\mathbf{T})$ notează matricea mediilor elementelor matricii $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\mathbf{T}$.

Mixturi de probabilitate

Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n \in (0, 1)$ astfel încât $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

- Dacă $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sunt funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$, atunci funcția

$$F = p_1 F_1 + p_2 F_2 + \cdots + p_n F_n$$

  este o funcție de repartiție, numită **repartiție compusă**.
- Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sunt densitățile de probabilitate ale variabilelor aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$, atunci

$$f = p_1 f_1 + p_2 f_2 + \cdots + p_n f_n$$

  este o densitate de probabilitate, numită **densitate compusă**.

Definiție

O variabilă aleatoare X ce are densitatea de probabilitate compusă f sau funcția de repartiție compusă F, se numește **mixtură de distribuții de probabilitate** sau, mai simplu, **mixtură de probabilitate**.

- Dacă X este o v.a. cu densitatea $f = p_1 f_1 + p_2 f_2 + \ldots + p_n f_n \Longleftrightarrow X$ are densitatea f_1 cu probab. p_1, …, X are densitatea f_n cu probab. p_n.
- Reprezentând fiecare densitate f_k prin indicele său k, asociem unei densități compuse o variabilă aleatoare discretă:
  $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k & \ldots & p_n \end{pmatrix}$.

Definiție

O v.a. X a cărei densitate de probabilitate

$$f = p_1 f_1 + p_2 f_2 + \cdots + p_n f_n, \text{unde } f_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_i} e^{-x/\theta_i}, & \text{dac`a } x \geq 0, \\ 0, & \text{dacă } x < 0, \end{cases}$$

este compusa a n densități ale distribuției exponențiale de parametrii $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ se numește **variabilă aleatoare hiperexponențială**.

Variabilele aleat. hiperexponențiale modelează durata serviciului procesorului. Se folosesc în simularea rețelelor de cozi.

Mixura Poisson

Exemplu:

Facebook monitorizează atitudinea unui user față de postările pe wall-uri și îi asociază un număr de reacții ce sunt modelate de o mixtură Poisson.

- reacția R_1 (cu prob. p_1) = linkuri la articole din *Times New Roman* cu rata λ_1/oră
- reacția R_2 (cu prob. p_1) = like-uri la pozele amicilor, cu rata λ_2/oră

Astfel, numărul de reacții/manifestări ale userului pe oră este o variabilă aleatoare X ce are ca distribuție de probabilitate mixtura Poisson:

$$P_X(k) := P(X = k) = p_1 e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} + p_2 e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^k}{k!}.$$

Mixtura de distribuții de probabilitate **nu** înseamnă că variabila X este de forma $X = p_1 X_1 + p_2 X_2$, cu $X_i \sim Poiss(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, ci că X are distribuția Poisson de rată λ_1 cu probab. p_1, respectiv X are distribuția Poisson de rată λ_2 cu probab. p_2.