C10

miercuri, 24 ianuarie 2024 23:24

Sintaxa logicii propoziționale

Un *limbaj* e definit prin
simbolurile sale
și *regulile* după care combinăm corect simbolurile (*sintaxa*)

Simbolurile logicii propoziționale:
propoziții: notate deobicei cu litere p, q, r, etc.
operatori (conectori logici): negație $\neg$, implicație $\rightarrow$, paranteze ( )

Formulele logicii propoziționale: definite prin *inducție structurală*
(construim formule complexe din altele mai simple)

O formulă e:
orice *propoziție* (numită și formulă atomică)
$(\neg \alpha)$ dacă α este o formulă
$(\alpha \rightarrow \beta)$ dacă α și β sunt formule (α, β numite *subformule*)

Alți operatori (conectori) logici

Deobicei, dăm definiții *minimale* (cât mai puține cazuri)

Deobicei, dăm definiții *minimale* (cât mai puține cazuri)
(orice raționament ulterior trebuie făcut pe toate cazurile)

Operatorii cunoscuți pot fi definiți folosind $\neg$ și $\rightarrow$:

$\alpha \wedge \beta \stackrel{def}{=} \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$ (ȘI)

$\alpha \vee \beta \stackrel{def}{=} \neg\alpha \rightarrow \beta$ (SAU)

$\alpha \leftrightarrow \beta \stackrel{def}{=} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ (echivalență)

Omitem parantezele redundante, definind precedența operatorilor.

Ordinea precedenței: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Implicația e asociativă *la dreapta*! $p \rightarrow q \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Semantica unei formule: funcții de adevăr

Definim riguros cum calculăm valoarea de adevăr a unei formule
= dăm o *semantică* (înțeles) formulei (formula=noțiune *sintactică*)

O *funcție de adevăr* v atribuie oricărei formule o *valoare de adevăr* $\in \{T, F\}$ astfel încât:

$v(p)$ e definită pentru fiecare *propoziție* atomică p.

$$v(\neg\alpha) = \begin{cases} T & \text{dacă } v(\alpha) = F \\ F & \text{dacă } v(\alpha) = T \end{cases}$$

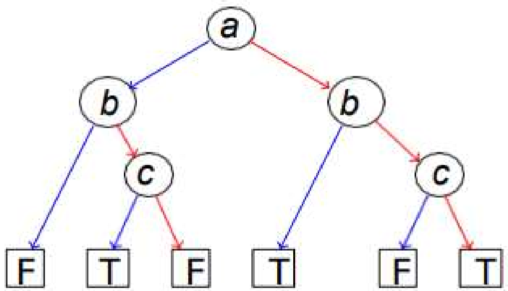
$$v(\neg a) = \begin{cases} T & \text{dacă } v(a) = F \\ F & \text{dacă } v(a) = T \end{cases}$$

$$v(a \to \beta) = \begin{cases} F & \text{dacă } v(a) = T \text{ și } v(\beta) = F \\ T & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Arbore de decizie binar

$$f = (a \vee b) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$$

$$f|_{a=T} = T \wedge T \wedge (\neg b \vee c) = \neg b \vee c$$
$$f|_{a=F} = b \wedge \neg c \wedge T = b \wedge \neg c$$



Sintaxă și semantică

Pentru logica propozițională, am discutat:

Sintaxa: o formulă are *forma*:
propoziție sau (¬ *formulă*) sau (*formulă* → *formulă*)

Semantica: calculăm *valoarea de adevăr* (înțelesul), pornind de la cea a propozițiilor

$$v(\neg\alpha) = \begin{cases} T & \text{dacă } v(\alpha) = F \\ F & \text{dacă } v(\alpha) = T \end{cases}$$

$$v(\alpha \rightarrow \beta) = \begin{cases} F & \text{dacă } v(\alpha) = T \text{ și } v(\beta) = F \\ T & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Deducții logice

Deducția ne permite să demonstrăm o formulă în mod *sintactic* (folosind doar structura ei)

E bazată pe o *regulă de inferență* (de deducție)

$A \qquad A \rightarrow B$

E bazată pe o *regulă de inferență* (de deducție)

$$\frac{A \qquad A \to B}{B} \qquad \textit{modus ponens}$$

(din A și $A \to B$ deducem/inferăm B; A, B formule oarecare)

și un set de *axiome* (formule care pot fi folosite ca premise/ipoteze)
A1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
A2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
A3: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
în care α, β etc. pot fi înlocuite cu *orice* formule

A1 - A3 sunt tautologii

Deducție (demonstrație)

Informal, o deducție (demonstrație) e o *înșiruire de afirmații* în care fiecare *rezultă* (poate fi derivată) din cele *anterioare*.

Riguros, definim:

Fie H o mulțime de formule (ipoteze).
O *deducție* (demonstr.) din H e un șir de formule $A_1, A_2, \ldots, A_n$, astfel ca $\forall i \in [1, n]$

1. A_i este o *axiomă*, sau
2. A_i este o *ipoteză* (o formulă din H), sau
3. A_i rezultă prin *modus ponens* din A_j, A_k anterioare ($j, k < i$)

2. A_i este o *ipoteză* (o formulă din H), sau

3. A_i rezultă prin *modus ponens* din A_j, A_k anterioare ($j, k < i$)

Spunem că A_n *rezultă* din H (e *deductibil*, e o *consecință*).
Notăm: $H \vdash A_n$

Exemplu de deducție

Demonstrăm că $A \to A$ pentru orice formulă A

(1) $A \to ((A \to A) \to A))$ A1 cu $\alpha = A$, $\beta = A \to A$

(2) $A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$

A2 cu $\alpha = \gamma = A$, $\beta = A \to A$

(3) $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ MP(1,2)

(4) $A \to (A \to A)$ A1 cu $\alpha = \beta = A$

(5) $A \to A$ MP(3,4)

Verificarea unei demonstrații e un proces simplu, mecanic (verificăm motivul indicat pentru fiecare afirmație; o simplă comparație de șiruri de simboluri).

Găsirea unei demonstrații e un proces mai dificil.

Alte reguli de deducție

Alte reguli de deducție

Modus ponens e suficient pentru a formaliza logica propozițională dar sunt și alte reguli de deducție care simplifică demonstrațiile

$$\frac{p \rightarrow q \qquad \neg q}{\neg p}$$ *modus tollens (reducere la absurd)*

$$\frac{p}{p \vee q}$$ *generalizare (introducerea disjuncției)*

$$\frac{p \wedge q}{p}$$ *specializare (simplificare)*

$$\frac{p \vee q \qquad \neg p}{q}$$ *eliminare (silogism disjunctiv)*

$$\frac{p \rightarrow q \qquad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$ *tranzitivitate (silogism ipotetic)*

Deducția (exemplu)

Fie $H = \{a, \neg b \vee d, a \rightarrow (b \wedge c), (c \wedge d) \rightarrow (\neg a \vee e)\}$.
Arătați că $H \vdash e$.

(1) a — ipoteză, H_1
(2) $a \rightarrow (b \wedge c)$ — ipoteză, H_3

(1) a ipoteză, H_1
(2) $a \rightarrow (b \wedge c)$ ipoteză, H_3
(3) $b \wedge c$ modus ponens (1, 2)
(4) b specializare (3)
(5) d eliminare (4, H_2)
(6) c specializare (3)
(7) $c \wedge d$ (5) și (6)
(8) $\neg a \vee e$ modus ponens (7, H_4)
(9) e eliminare (1, 8)

Consecința logică (semantică)

Interpretare = atribuire de adevăr pentru propozițiile unei formule. O formulă poate fi adevărată sau falsă într-o interpretare.

Def.: O mulțime de formule $H = \{H_1, \ldots, H_n\}$ *implică* o formulă C dacă *orice interpretare* care satisface (formulele din) H satisface C

Notăm: $H \models C$

(C e o *consecință logică* / consecință semantică a ipotezelor H)

Consecința logică (semantică)

Ca să stabilim consecința semantică trebuie să *interpretăm* formule (cu valori/funcții de adevăr)
$\Rightarrow$ lucrăm cu *semantica* (înțelesul) formulelor

Exemplu: arătăm $\{A \vee B, C \vee \neg B\} \vDash A \vee C$

Cazul 1: $v(B) = T$. Atunci $v(A \vee B) = T$ și $v(C \vee \neg B) = v(C)$. Dacă $v(C) = T$, atunci $v(A \vee C) = T$, deci afirmația e adevărată.

Cazul 2: $v(B) = F$. La fel, reducem la $\{A\} \vDash A \vee C$ (adevărat).

Consistență și completitudine

$H \vdash C$: *deducție* (pur sintactică, din axiome și reguli de inferență)
$H \models C$: *implicație, consecință semantică* (valori de adevăr)

Consistență:

Dacă H e o mulțime de formule, și C este o formulă astfel ca $H \vdash C$, atunci $H \models C$

(Orice teoremă e *validă*;
orice afirmație obținută prin deducție e *întotdeauna adevărată*).

Consistență și completitudine

$H \vdash C$: *deducție* (pur sintactică, din axiome și reguli de inferență)
$H \models C$: *implicație, consecință semantică* (valori de adevăr)

Completitudine:

Dacă H e o mulțime de formule, și C e o formulă astfel ca $H \models C$, atunci $H \vdash C$.

(Orice tautologie e o teoremă,
orice consecință semantică poate fi *dedusă* din *aceleași ipoteze*).

Consistență și completitudine

$H \vdash C$: *deducție* (pur sintactică, din axiome și reguli de inferență)
$H \models C$: *implicație, consecință semantică* (valori de adevăr)

Logica propozițională e *consistentă și completă*:

Ca să demonstrăm o formulă, putem arăta că e *validă*.

Pentru aceasta, verificăm că *negația ei nu e* *validă*.

Pentru aceasta, verificăm că *negația ei nu e realizabilă*.