Matematici speciale 13.03.2024

(tema 4)

4. Fie H_1, H_2 o partiţie a spaţiului de selecţie Ω şi A un eveniment astfel încât $P(H_1) = 0.4$, $P(A|\overline{H_1}) = 0.2$ şi $P(A|\overline{H_2}) = 0.7$. Să se calculeze $P(\overline{H_1})$, $P(H_2)$, $P(A|H_1)$ şi $P(A)$.

$P(H_1) = 0,4 \Rightarrow P(\overline{H_1}) = 1 - P(H_1) = 0,6$

$P(A|\overline{H_1}) = 0,2 \xrightarrow{\text{complementare}} P(A|H_1) = 0,7$

$P(A|\overline{H_2}) = 0,7 \longrightarrow P(A|H_2) = 0,2$

$P(H_2) = 1 - P(H_1) = 0,6$

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = 0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,28 + 0,12 = 0,4$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

5. Setul de date de intrare pentru un program conţine în proporţie de 70% date de tipul I şi în proporţie de 30% date de tipul II. Intrarile pot produce mesaje de atenţionare în proportie de 20% (cele de tipul I), respectiv 10% (cele de tipul II). Dacă dupa rulare este afişat un mesaj de atenţionare, care este probabilitatea ca el sa fie cauzat de datele de intrare de tipul I?

$P(H_1) = 0,7 \longrightarrow P(A|H_1) = 0,2$

$P(H_2) = 0,3 \longrightarrow P(A|H_2) = 0,1$

A - ev. de a primi mesaj de atenționare

H_1 - ev. de a se produce eroare de tipul I

H_2 - -||- II

? $P(H_1|A) \longleftrightarrow$ cu formula lui Bayes

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,1 = 0,14 + 0,03 = 0,17$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,7 \cdot 0,2}{0,17} = \frac{0,14}{0,17} \approx 0,82$$

6. Intr-un sistem de comunicatie digitală, biţii transmişi sunt eronaţi din cauza zgomotului din canalul de transmitere şi astfel sunt receptaţi eronat. Notăm cu E_b, evenimentul "s-a transmis bitul b", b = 0, 1, si cu R_b, evenimentul "s-a receptat bitul b", b = 0, 1. Ştiind că $P(R_0|E_0) = 0.7, P(R_1|E_1) = 0.8$ şi că bitul 0 este transmis cu probabilitatea 0.6, să se calculeze probabilitatea să se transmita bitul 0, ştiind că s-a recepţionat bitul 1.

$P(R_0|E_0) = 0{,}7 \longrightarrow P(R_1|E_0) = 0{,}3$

$P(R_1|E_1) = 0{,}8 \longrightarrow P(R_0|E_1) = 0{,}2$

$P(E_0) = 0{,}6 \longrightarrow P(E_1) = 1 - P(E_0) = 0{,}4$

$P(E_0|R_1) = ?$

$$P(E_0|R_1) = \frac{P(E_0)\cdot P(R_1|E_0)}{P(R_1)}$$

$$P(R_1) = P(E_0)\cdot P(R_1|E_0) + P(E_1)\cdot P(R_1|E_1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(E_0|R_1) = \frac{0{,}6\cdot 0{,}3}{0{,}5} = \frac{0{,}18}{0{,}5} = 0{,}36$$

7. Un robot se mişcă într-un spaţiu de lucru (de exemplu, o cameră). El are un senzor care poate măsura distanţa până la orice obiect din preajmă. Pe baza informaţiei primite de la senzor, sistemul de calcul încorporat calculează probabilitatea ca uşa camerei să fie deschisă. Notăm cu H evenimentul "uşa este deschisă", care are probabilitatea 0.6. Robotul primeşte informaţia de la senzor că o anumită distanţă până în zona uşii este d, privită ca o observaţie asupra unei variabile aleatoare D. Din experienţa robotului în spaţiul de lucru, sistemul de calcul are stocată informaţia că $P(D = d|H) = 0.7$, respectiv $P(D = d|\overline{H}) = 0.1$. Să se calculeze probabilitatea ca uşa să fie deschisă ştiind că distanţa măsurată este d.

$P(H) = 0{,}6 \longrightarrow P(\overline{H}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

$P(D=d|H) = 0{,}7$

$P(D=d|\overline{H}) = 0{,}1$

$$P(H|D=d) = \frac{P(H)\cdot P(D=d|H)}{P(D=d)} = ?$$

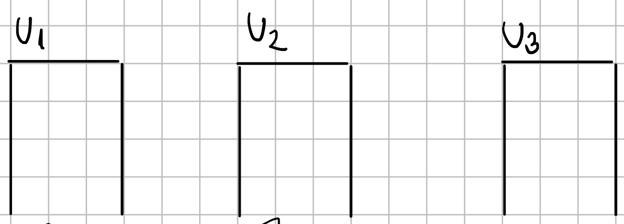
$$P(D=d) = P(H)\cdot P(D=d|H) + P(\overline{H})\cdot P(D=d|\overline{H}) = 0{,}46$$

$$\Rightarrow P(H|D=d) = \frac{0{,}6\cdot 0{,}7}{0{,}46} = 0{,}91$$

8. Monty Hall problem

Prezentăm acum una din cele mai cunoscute probleme din teorie probabilităţii, fiind legată de un concurs de televiziune din anii '70, Monty Hall: Într-un concurs televizat ţi se oferă posibilitatea alegerii dintre trei uşi, in spatele unei aflându-se un automobil, iar în spatele celorlalte, capre. Tu alegi o uşă, să zicem nr.1, iar gazda emisiunii, care ştie ce se află în spatele uşilor, deschide uşa numărul 2, în spatele căreia se află o capră. Apoi, te întreabă: "vrei să alegi uşa cu numărul 3?". Este în avantajul tău să schimbi alegerea iniţială?

Pentru mai multe informaţii va invităm sa citiţi pagina Wikipedia dedicată acestui subiect.



H_i – ev. mașina se află în spatele ușii i

U_i – ev. se deschide ușa i după alegere

I alegem U_1

II deschide ușa 2

$$P(H_1 \mid U_2) \longrightarrow \text{păstrează alegerea} = \frac{\underbrace{P(H_1)}_{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{P(U_2 \mid H_1)}_{\frac{1}{2}}}{P(U_2)} = \frac{1}{3}$$

$$P(H_3 \mid U_2) \longrightarrow \text{schimbă alegerea} = \frac{\underbrace{P(H_3)}_{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{P(U_2 \mid H_3)}_{1}}{P(U_2)} = \frac{2}{3}$$

$$P(U_2) = P(H_1) \cdot P(U_2 \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(U_2 \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(U_3 \mid H_3) =$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ mai bine schimbă alegerea