Cursul 2

2.2 Funcţii logice

O funcţie logică de "n" variabile $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, unde variabilele x_i, pentru $i = 1,2,\cdots,n$, iau valorile 0 şi 1, se defineşte ca o aplicaţie a mulţimii $\{0,1\}^n$ în mulţimea $\{0,1\}$, unde prin $\{0,1\}^n$ s-a notat produsul cartezian al mulţimii $\{0,1\}$ cu ea insăşi de "n" ori.

Există mai multe metode de specificare (exprimare) a unei funcţii logice, metode ce vor fi prezentate într-un alt subcapitol pentru a putea da exemple de funcţii logice. Dintre ele vom prezenta totuşi metoda definirii prin "tabel de adevăr".

Tabelul de adevăr al unei funcţii logice de "n" variabile este o configuraţie geometrică cu "n+1" coloane şi 2^n linii. Primele n coloane conţin cele 2^n combinaţii posibile de valori ale variabilelor funcţiei iar coloana "n+1" conţine valorile funcţiei. Pentru exemplificare în tabelul 2.4 este prezentat tabelul de adevar al funcţiei MAJORITATE DE 3 VARIABILE, funcţie ce ia valoarea 1 atunci când majoritatea variabilelor funcţiei au valoarea logică "1".

a	b	c	f_M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tabelul 2.4

2.2.1 Funcţii logice elementare

2.2.1.1 Funcţii logice de o variabilă

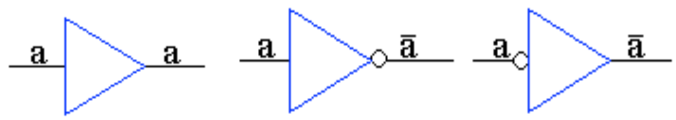
Există patru funcţii logice de o variabilă şi anume: DA, NU, 0, 1, cu menţiunea că funcţiile "0" şi "1" sunt constante logice şi se utilizează la implementarea funcţiilor logice atunci când circuitele logice utilizate la implementare au intrări nefolosite.

a	f=a	a	f=$\overline{a}$	a	f=0	a	f=1
0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1
A		b		c		d	

Tabelul 2.5.

Circuitele care realizează funcţia logică DA (adică nu schimbă valoarea logică a semnalului aplicat la intrare) se utilizează pentru formarea semnalelor sau pentru mărirea puterii semnalelor (amplificare). Simbolul utilizat pentru aceste circuite este redat in figura 2.1 a)

Circuitele care implementează funcţia logică NU (adică inversează valoarea logică a semnalului aplicat la intrare) sunt utilizate atât pentru complementarea semnalului aplicat la intrare cât şi pentru formarea şi/sau mărirea puterii sale. Simbolurile folosite pentru aceste circuite sunt cele din figura 2.1 b)



a) b)

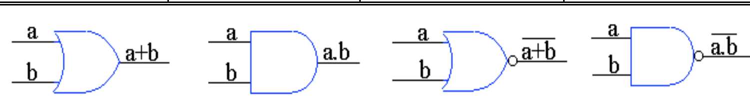
Figura 2.1.

2.2.1.2 Funcţii logice de două variabile

Există 16 funcţii logice de două variabile. Dintre acestea mai frecvent intâlnite sunt funcţiile logice SI, SAU, SI-NU, SAU-NU, SAU-EXCLUSIV. În continuare va fi prezentat tabelul de definiţie pentru aceste funcţii şi simbolurile utilizate pentru circuitele care le implementează:

Tabelul 2.6.

a	b	SAU $f = a + b$	SI $f = a.b$	SAU-NU $f = \overline{a + b}$	SI-NU $f = \overline{a.b}$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0



Observaţii:

a) funcţia logică SAU de două sau mai multe variabile ia valoarea logică 1 dacă cel puţin una din variabile are valoarea logică 1.
b) funcţia logică SI de două sau mai multe variabile ia valoarea logică 1 dacă toate variabilele au valoarea logică 1.

2.2.2 Moduri de exprimare a funcţiilor logice

Există mai multe moduri de exprimare a funcţiilor logice, moduri ce se împart în două categorii:

- moduri de exprimare algebrică;
- moduri de exprimare grafică.

Dintre modurile de exprimare algebrică existente în cadrul prezentului curs vor fi prezentate exprimările funcţiilor logice în formă canonică şi respectiv în formă normală, iar dintre modurile grafice vor fi prezentate exprimările funcţiilor logice prin tabel de adevăr, diagramă Veitch şi diagramă de timp .

2.2.2.1 Formele canonice ale funcţiilor logice

<u>Forma canonică disjunctivă</u>. Este aceea la care funcţia se exprimă ca o sumă logică de produse logice standard. Un produs standard este un produs în care fiecare variabilă apare o dată şi numai o dată, în forma negată sau nenegată.

În general cu “n” variabile se formează 2^n produse standard. În tabel sunt date produsele standard de trei variabile, reprezentarea lor binară şi notaţia folosită. De reţinut că un produs standard este o funcţie logică, care ia valoarea logică “1” pentru o singură combinaţie de valori ale variabilelor.

PRODUS STANDARD	REPREZENTATIE BINARA	NOTATIE
$\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}$	0 0 0	P_0
$\bar{a}.\bar{b}.c$	0 0 1	P_1
$\bar{a}.b.\bar{c}$	0 1 0	P_2
$\bar{a}.b.c$	0 1 1	P_3
$a.\bar{b}.\bar{c}$	1 0 0	P_4
$a.\bar{b}.c$	1 0 1	P_5
$a.b.\bar{c}$	1 1 0	P_6
$a.b.c$	1 1 1	P_7

Tabelul 2.7

Ţinând cont de această ultimă afirmaţie, precum şi de faptul că o sumă logică ia valoarea “1” dacă cel puţin un termen al sumei este egal cu “1”, rezultă că orice funcţie logică poate fi exprimată ca o sumă de produse logice standard şi anume, suma acelor produse standard ce corespund combinaţiilor de valori ale variabilelor pentru care funcţia ia valoarea logică "1".

De exemplu forma canonică disjunctiva a funcţiei "MAJORITATE DE TREI VARIABILE", funcţie definită în tabelul 2.4, este:

$$f_M = \bar{a}.b.c + a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c = P_3 + P_5 + P_6 + P_7 \quad (2.9)$$

<u>Forma canonică conjunctivă</u>. Este aceea la care funcţia se exprimă ca un produs logic de sume logice standard. O sumă logică standard este o sumă în care fiecare variabilă apare o dată şi numai o dată în formă negată sau nenegată.

În general cu "n" variabile se formează 2^n sume standard. În tabelul 2.8 sunt date sumele standard de trei variabile, reprezentarea lor binară şi notaţia folosită. De reţinut că o sumă standard este o sumă logică care ia valoarea logică "0" pentru o singură combinaţie de valori ale variabilelor.

SUME STANDARD	REPREZENTARE BINARA	NOTATIE
$a+b+c$	0 0 0	S_0
$a+b+\bar{c}$	0 0 1	S_1
$a+\bar{b}+c$	0 1 0	S_2
$a+\bar{b}+\bar{c}$	0 1 1	S_3
$\bar{a}+b+c$	1 0 0	S_4
$\bar{a}+b+\bar{c}$	1 0 1	S_5
$\bar{a}+\bar{b}+c$	1 1 0	S_6
$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$	1 1 1	S_7

Tabelul 2.8

Ţinând cont de această ultimă afirmaţie, precum şi de faptul că un produs logic ia valoarea logică "0" dacă cel puţin un termen al produsului este egal cu "0", rezultă că orice funcţie logică poate fi exprimată ca un produs de sume logice standard şi anume, produsul acelor sume standard ce corespund combinaţiilor de valori ale variabilelor pentru care funcţia ia valoarea logică "0".

De exemplu forma canonică conjunctivă a funcţiei "MAJORITATE DE TREI VARIABILE" este:

$$f_M = (a+b+c).(a+b+\bar{c}).(a+\bar{b}+c).(\bar{a}+b+c) = S_0.S_1.S_2.S_4 \quad (2.10)$$

2.2.2.2 Formele normale ale funcţiilor logice

Formele normale ale funcţiilor logice au în expresia lor termeni elementari. Un termen este elementar dacă nu conţine toate variabilele independente ale funcţiei de "n" variabile. Formele normale ale funcţiilor logice se obţin în urma operaţiilor de minimizare.

Există două forme normale şi anume:

- forma normală disjunctivă în care funcţia se exprimă ca o sumă logică de produse logice.
  Ex. $f_1 = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + b.\bar{c} + c$
- forma normală conjunctivă în care funcţia se exprimă ca un produs logic de sume logice.
  Ex. $f_2 = (\bar{a} + \bar{b} + c).(a + \bar{c}).b$

2.2.2.3 Reprezentarea funcţiilor logice prin tabel de adevăr

Studiată în 2.2.

2.2.2.4 Reprezentarea funcţiilor logice prin diagrame Veitch-Karnaugh

Diagrama Veitch-Karnaugh este tot o reprezentare tabelară, dar în raport cu tabelul de adevăr este mai compactă datorită dispunerii bidirecţionale a valorilor variabilelor.

În cazul general al unei funcţii logice de "n" variabile, diagrama Veitch-Karnaugh conţine 2^p linii şi 2^q coloane, astfel ca $p+q=n$. Dacă n este par, în mod obişnuit $p=q$, iar dacă n este impar, $q=p+1$ (sau $p=q+1$). Rezultă o diagramă cu 2^n celule, câte o celulă pentru fiecare combinaţie de valori ale variabilelor. Celulele sunt plasate folosind regula adiacenţei. Două celule se numesc adiacente dacă combinaţiile de valori ale variabilelor care le corespund diferă pentru o singură variabilă. Celulele de la extremităţile unei linii sunt adiacente între ele, afirmaţie valabilă şi pentru celulele de la extremităţile unei coloane. Valorile pe care le iau variabilele se scriu în dreptul liniilor şi al coloanelor sau, se trasează o bară în dreptul liniilor sau coloanelor în care o variabilă ia valoarea "1".

În figura 2.2. sunt reprezentate diagramele Veitch-Karnaugh de 2, 3, 4 şi 5 variabile, în interiorul celulelor trecându-se produsele logice standard care le corespund.

La reprezentarea funcţiilor logice prin diagrame Veitch-Karnaugh se introduce valoarea logică "1" în celulele diagramei corespunzătoare combinaţiilor de valori ale variabilelor funcţiei pentru care aceasta ia valoarea logică “1”.

<u>Observaţie:</u> Datorită creşterii complexităţii diagramelor odată cu creşterea numărului variabilelor funcţiei această metodă nu este utilizată pentru funcţii la care $n>6$.

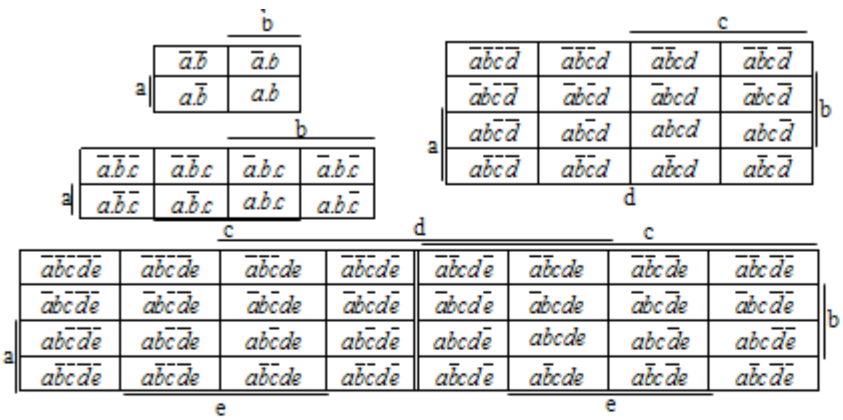


Figura 2.2

2.2.2.5 Reprezentarea funcţiilor logice de timp

Metoda constă în reprezentarea, cu ajutorul diagramelor temporale, a variaţiei valorilor variabilelor funcţiei şi a valorilor funcţiei, atasându-se pentru aceasta valorii logice “0” un semnal de nivel coborât, iar valorii logice “1” un semnal de nivel ridicat, astfel ca între cele doua nivele să existe o diferenţiere netă. Reprezentarea folosind aceasta metoda este utilă în studiul sistemelor secvenţiale în a căror evoluţie intervine şi timpul. De asemenea folosind această reprezentare se pot studia fenomenele tranzitorii de comutare şi fenomenele de hazard datorate funcţionării neideale a circuitelor de comutaţie care implementează variabilele şi funcţiile logice.

În fig.2.2. este reprezentată prin diagramă de timp funcţia logică $f = \overline{a.b}$.

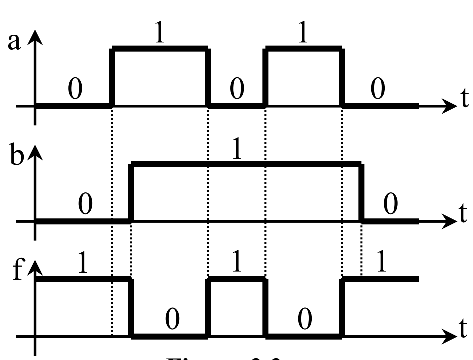


Figura 2.3

2.2.3 Funcţii incomplet definite

Uneori funcţiile logice pe care trebuie să le realizeze un circuit logic nu sunt definite pentru toate combinaţiile posibile de valori ale variabilelor de intrare deoarece anumite combinaţii nu pot să apară efectiv în timpul funcţionării sau valorile funcţiei pentru anumite combinaţii de valori ale variabilelor sunt indiferente.

O funcţie logica ale cărei valori nu sunt precizate pentru toate combinaţiile posibile de valori ale variabilelor de intrare se numeşte funcţie logică incomplet definită. În tabelul de adevăr al funcţiei logice incomplet definite, în dreptul combinaţiilor de valori ale variabilelor pentru care funcţia nu este definită se trece "*".

<u>Exemplu:</u> Se consideră un vehicul V ce se poate deplasa pe o cale de rulare a-d cu două viteze :

- viteza normală, VN, pe intervalul b-c;
- viteza redusă, VR, la extremităţile căii în vederea opririi.

Se pune problema exprimării funcţiilor VN şi VR ce trebuiesc implementate de către un sistem de comandă ce primeşte la intrare informaţiile X_1, X_2 şi X_3 referitoare la poziţia vehiculului pe calea de rulare.

Tabelul de adevăr al celor două funcţii se completează uşor ţinând cont că în timpul unei funcţionări normale combinaţiile 101 şi 111 nu pot să apară.

X_1	X_2	X_3	VN	VR
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	*	*
1	1	0	0	1
1	1	1	*	*

Tabelul 2.10

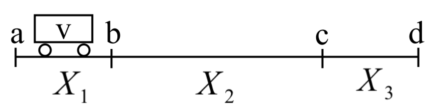


Figura 2.4

<u>Observaţie:</u> În cazul funcţiilor incomplet definite exprimate algebric, combinaţiile pentru care ele sunt nedefinite se menţionează explicit.

2.3 Minimizarea funcţiilor logice

Reprezentarea funcţiilor logice nu este unică, aceeaşi funcţie logică putând avea mai multe reprezentări. Prin urmare aceeaşi funcţie logică poate fi implementată cu diverse scheme şi diverse circuite de comutare. Din mulţimea variantelor de implementare a unei funcţii logice unele pot fi preferate în raport cu altele din diverse motive: simplitate, economicitate, fiabilitate, etc. Pentru a alege expresia minimă a unei funcţii logice trebuie folosit un criteriu de performanţă. Dintre criteriile de performanţă existente mai frecvent utilizate sunt următoarele:

- număr minim de litere în expresia funcţiei logice;
- număr minim de termeni în forma normală a funcţiei;
- număr minim de capsule integrate necesare la implementarea funcţiei.

Criteriul numărului minim de litere în expresia funcţiei logice este utilizat mai des în schemele cu relee unde numărul de litere este egal cu numărul de contacte folosite.

Forma normală disjunctiva sau conjunctivă se foloseşte atunci când se cere viteză mare de lucru. Formele normale se implementează cu circuite de comutare plasate pe doua nivele obtinându-se intârzieri minime în propagarea semnalelor.

În schemele cu circuite integrate costul global al instalaţiei este, în general, proporţional cu numărul capsulelor integrate, de unde rezultă cerinţa de a minimiza numărul capsulelor folosite.

În cele ce urmează se va considera minimizarea funcţiilor logice în formă normală. O expresie normală a unei funcţii este minimă daca conţine un număr minim de termeni, cu condiţia să nu existe o altă expresie normală cu acelaşi număr de termeni, dar cu un număr mai mic de litere.

2.3.1 Minimizarea funcţiilor logice folosind diagrame Veitch-Karnaugh
2.3.1.1 Minimizarea funcţiilor logice în formă normală disjunctivă

Cunoscând că la reprezentarea funcţiilor logice prin diagrame Veitch-Karnaugh se introduce valoarea logică “1” în celulele diagramei corespunzătoare combinaţiilor de valori ale variabilelor funcţiei pentru care aceasta ia valoarea “1”, metoda minimizării cu diagrame Veitch-Karnaugh urmăreşte gruparea acestor celule într-un număr minim de configuraţii rectangulare de dimensiuni cât mai mari şi exprimarea acestor grupări sub forma unor produse logice al acelor variabile care în cadrul grupării nu-şi schimbă valoarea.

Pentru prezentarea metodei se vor defini în prealabil noţiunile de implicaţie, implicant, implicant prim şi implicant prim esenţial, folosindu-ne pentru aceasta de funcţiile f_1 şi f_2 definite în fig.2.5.

f_1 (c, b, a, d)

0	0	1	0
0	0	1	0
1	1	1	0
1	0	1	0

f_2 (d, c, b, a, e, e)

1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0

Figura 2.5

Implicaţia: se zice că o funcţie *f* ' implică o altă funcţie *f* " dacă pentru orice combinaţie a variabilelor pentru care *f* ' ia valoarea logică 1, *f* " ia deasemenea valoarea logică 1.

De exemplu funcţia $f_3 = a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + c.d$ implică funcţia $f_1 = a.\bar{c}.\bar{d} + a.b.\bar{c} + c.d$.

Implicant: un produs în care apar una sau mai multe variabile este un implicant al unei funcţii dacă implică funcţia. De exemplu produsele: $c.d, a.b.\bar{c}, c.d.\bar{a}, \bar{a}.b.c.d, \cdots$ sunt implicanţi ai funcţiei f_1 , iar produsele $\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}.\bar{e}, a.\bar{c}.e, a.e, \cdots$ sunt implicanţi ai funcţiei f_2.

Implicant prim: un implicant care nu este conţinut într-un implicant format din mai puţine variabile se numeşte implicant prim. De exemplu $a.e$ este implicant prim al funcţiei f_2 în timp ce $a.\bar{c}.e$ nu este implicant prim deoarece el îl implică pe $a.e$ care are mai puţine variabile.

Implicant prim esenţial: este un implicant prim care acoperă un produs standard neacoperit de alţi implicanţi primi. De exemplu $a.\bar{c}.\bar{d}$ este implicant prim esenţial al funcţiei f_1 deoarece este singurul implicant prim care acoperă produsul standard $a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}$, în timp ce $a.b.\bar{c}$ nu este implicant prim esenţial al lui f_1 întrucât produsele standard $a.b.\bar{c}.d$ şi $a.b.\bar{c}.d$ sunt acoperite atât de implicantul prim $a.b.\bar{c}$ cât şi de implicantul prim $a.b.d$.

Observaţii ce stau la baza minimizării cu diagrame Veitch-Karnaugh:

a) Expresia minimală a unei funcţii logice este o sumă de implicanţi primi. Dacă expresia unei funcţii logice conţine un implicant care nu este implicant prim atunci acesta poate fi înloc`uit cu implicantul prim care îl conţine şi care are mai puţine variabile.
b) Orice funcţie logică poate fi exprimată ca o sumă de produse astfel încât fiecare produs corespunde unei grupări de 2^n celule în diagrama Veitch-Karnaugh şi fiecare celulă, care corespunde unei

combinaţii de valori ale variabilelor pentru care funcţia ia valoarea logică 1, este conţinută în cel puţin o grupare.

c) Implicanţii primi esenţiali intră toţi în expresia minimală a funcţiei.

Ţinând cont de aceste observaţii minimizarea se realizează în două etape:

1) Se determină implicanţii primi esenţiali.
2) Celulele în care este înscris 1 logic şi care nu sunt acoperite de implicanţi primi esenţiali se includ în grupări cât mai mari astfel încât numărul de implicanţi primi care se adaugă să fie cât mai mic.

Exemplu: minimizarea funcţiilor f_1 şi f_2 definite în fig.2.5.

$i.p.e: a.\bar{c}.\bar{d}, c.d$ $\qquad$ $i.p.e: \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}.\bar{e}, \bar{a}.\bar{b}.d, a.e$

$i.p.n: a.b.\bar{c}, a.b.d$ $\qquad$ $i.p.n: \bar{b}.d.e$ $\qquad$ (2.11)

$f_1 = a.\bar{c}.\bar{d} + c.d + a.b.\bar{c}$ $\qquad$ $f_2 = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}.\bar{e} + \bar{a}.\bar{b}.d + a.e$

2.3.1.2 Minimizarea funcţiilor logice în formă normală conjunctivă

Minimizarea funcţiilor logice în formă normală conjunctivă urmează aceleaşi reguli ca şi pentru forma normală disjunctivă. În continuare se vor redefini noţiunile de implicaţie, implicată, implicată primă şi implicată primă esenţială pe baza funcţiilor f_3 şi f_4 definite în fig.2.6.

f_1

			b	b
	0	1	1	0
a	1	1	1	1
		c	c	

f_2

			c	c	
	1	1	0	0	
	0	0	1	0	b
a	0	0	1	1	b
a	1	1	1	1	
		d	d		

Figura 2.6

<u>Implicaţia:</u> se consideră ca o funcţie f ‘ implică o altă funcţie f “ dacă pentru orice combinaţie a variabilelor pentru care f “ ia valoarea “0” f ‘ ia deasemenea valoarea “0”. De exemplu funcţia $f_1 = (a + b + c)(a + \bar{b} + c)$ implică funcţia $f_3 = (a + b = c)$.

<u>Implicată:</u> o sumă în care apar una sau mai multe variabile este o implicată a unei funcţii dacă funcţia o implică. De exemplu: $\bar{b} + c + d, \bar{b} + c$, $a + b + \bar{c}, a + \bar{c} + d$ sunt implicate ale funcţiei f_2.

Implicată primă: o implicată a unei funcţii care nu este conţinută într-o altă implicată formată din mai puţine variabile este implicată primă. De exemplu $\overline{b}+c$ este o implicată primă a funcţiei f_2 în timp ce $\overline{b}+c+d$ nu este implicată primă deoarece este implicată de $\overline{b}+c$.

Implicată primă esenţială: este o implicată primă care acoperă o sumă logică standard neacoperită de alte implicate prime. De exemplu $\overline{b}+c$ este implicată primă esenţială în timp ce $a+\overline{c}+d$ nu este implicată primă esenţială întrucât sumele logice standard $a+b+\overline{c}+d$ si $a+\overline{b}+\overline{c}+d$ sunt acoperite şi de implicatele prime $a+\overline{b}+d$ şi respectiv $a+b+\overline{c}$.

Minimizarea se realizează în două etape:

1) Se determină implicatele prime esenţiale;
2) Dacă rămân celule în care este inscris "0" neacoperite de implicatele prime esenţiale, acestea se includ în grupări cât mai mari astfel că numărul de implicate prime care se adaugă să fie cât mai mic.

Exemplu: minimizarea funcţiilor f_1 şi f_2 definite în fig.2.6.

$$\begin{array}{lll} i.p.e: a+c & i.p.e: \overline{b}+c, a+b+\overline{c} & \\ i.p.n: & i.p.n: a+\overline{c}+d, a+\overline{b}+d & (2.12) \\ f_1 = a+c & f_2 = (\overline{b}+c).(a+b+\overline{c}).(a+\overline{c}+d) & \end{array}$$

2.3.1.3 Minimizarea funcţiilor incomplet definite

Minimizarea funcţiilor incomplet definite este importantă întrucât, de cele mai multe ori, în cazul comenzilor secvenţiale, se întâlnesc situaţii de nedefinire. Luarea în considerare a combinaţiilor de valori ale variabilelor pentru care funcţia nu este definită conduce la obţinerea unor forme normale minime.

Pentru exemplificare se consideră cele trei funcţii definite prin diagramele Veitch din fig.2.7 si 2.8.

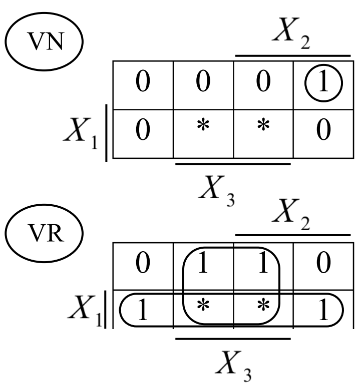


Figura 2.7

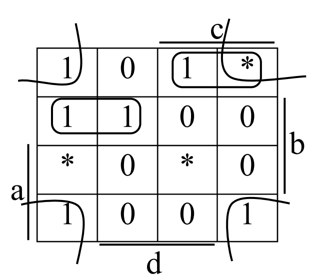


Figura 2.8

În urma analizării celor trei funcţii se observă că pentru prima funcţie este avantajos să se considere că funcţia ia valoarea logică “0” pentru combinaţiile indiferente, pentru cea de a doua că ia valoarea logica “1”, iar pentru cea de a treia pentru unele combinaţii se va considera *f*=1, iar pentru altele *f*=0.

$$\begin{aligned} VN &= \overline{X_1}.X_2.\overline{X_3} \\ VR &= X_1 + X_3 \\ f &= \overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.b.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}.c \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Pentru minimizarea funcţiilor incomplet definite se parcurg aceleaşi etape ca şi la funcţiile complet definite, dar cu următoarele precizări:

1) Pentru determinarea mulţimii implicanţilor primi se consideră că funcţia ia valoarea logică “1” pentru combinaţiile indiferente.

2) Pentru determinarea unei acoperiri minime a funcţiei în tabelul implicanţilor primi nu se introduc produsele (respectiv sumele) standard corespunzătoare combinaţiilor indiferente.