Universitatea Politehnica Timişoara
P-ţa Victoriei nr. 2
RO 300006 - Timişoara
Tel: +4 0256 403000
Fax: +4 0256 403021
rector@rectorat.upt.ro
www.upt.ro

Logică digitală

-Curs 2-

ALGEBRA BOOLEANĂ
ȘI LOGICA DIGITALĂ

-2021-

Algebra booleană și logica digitală

- Axiomele și teoremele algebrei booleene;
- Funcții booleene;
- Aspecte legate de implementarea porților logice;

Noțiuni fundamentale de algebră

- **Set** – colecție de obiecte care au o anumită proprietate.
  - Dacă *S* este un set și *x un element* al setului S, at. scriem $x \in S$
  - *Notația* $A = \{2, 3, 4, 5\}$ denotă setul *A*, cu elementele 2, 3, 4, 5

- Un **operator binar** al setului *S* este o regulă prin care pentru oricare pereche de elemente din *S* prin aplicarea regulii se obține un element tot din *S*

- **Axiomă**: propoziție care este considerată adevărată fără a fi însă demonstrată.

Noțiuni fundamentale de algebră
Exemple de axiome

- **Comutativitatea**
  - Un operator binar • este comutativ dacă și numai dacă pentru oricare $x, y \in S$

$$x \bullet y = y \bullet x$$

- **Elementul invers**
  - Un set S are invers (e) dacă și numai dacă pt. oricare $x \in S$, există un element $y \in S$ astfel încât

$$x \bullet y = e$$

- **Distributivitate**
  - Dacă • și + sunt doi operatori binari asupra setului S, se spune că • e distributiv în raport cu + dacă, oricare ar fi $x, y, z \in S$

$$\boldsymbol{x \bullet (y + z) = (x \bullet y) + (x \bullet z)}$$

Axiomele algebrei booleene

Algebra booleană definita asupra unui set de elemente B cu 2 operatori binari, + și ·, care satisfac următoarele 6 axiome:

Axioma 1 (Proprietatea închiderii):

(a) B este închisă cu privire la operatorul +;

(b) B este închisă cu privire la operatorul · ;

Axiomele algebrei booleene

Algebra booleană este un set de elemente B cu 2 operatori binari, + și ·, care satisfac următoarele 6 axiome:

Axioma 2 (Element neutru):

(a) ∃element neutru faţă de operatorul **+** notat cu 0 a.î.: ∀ a∈B, a+0 = a;

(b) ∃element neutru faţă de operatorul **·** notat cu 1 a.î.: ∀ a∈B, a·1 = a;

Axiomele algebrei booleene

Algebra booleană este un set de elemente B cu 2 operatori binari, + și ·, care satisfac următoarele 6 axiome:

Axioma 3 (Comutativitate):

(a) ∀ a,b∈B, a+b = b+a;

(b) ∀ a,b∈B, a·b = b·a;

Axioma 4 (Distributivitate):

(a) ∀ a,b,c∈B, a+(b·c) = (a+b) · (a+c);

(b) ∀ a,b,c∈B, a·(b+c) = a·b + a·c;

Axiomele algebrei booleene

Algebra booleană este un set de elemente B cu 2 operatori binari, + și ·, care satisfac următoarele 6 axiome:

Axioma 5 (Complementul): Pentru fiecare $x \in B$, există $x' \in B$ a.î.

(a) $x + x' = 1$;

(b) $x \cdot x' = 0$;

x' se numește complementul lui x

$(se\ mai\ noteaza\ \bar{x})$

Axioma 6: Mulțimea B conține cel puțin 2 elemente diferite. x, y $\in B$, *și* $x \neq y$

Algebra booleană cu 2 valori

- Mulțimea B are 2 elemente**: 0** și **1**
- Algebra are 2 operatori: SAU (OR), ȘI (AND)

x	y	x·y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

op.și

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

op.sau

Algebra booleană: precedența operatorilor

Op. booleeni se aplică în urm. ordine:

- Paranteze ( )
- NOT ′ **sau** ¯
- AND **·**
- OR **+**

Exemplu: Evaluați expresia: $(x + xy)'$ pt. $x = 0$ și $y = 1$:

$(0+ 0\cdot1)' = (0 + 0)' = (0)' = 1$

Principiul dualității

- Axiomele algebrei booleene sunt prezentate în perechi fiecare axiomă din pereche fiind duală celeilalte;
- O axiomă se poate obţine din duala sa modificând operaţia "+"cu operaţia "."şi elementul 0 cu elementul 1 (şi invers).

Exemplu: existenţa elementului opus

$$\begin{array}{lcccc} \text{(i)} & a & + & a' & = 1 \\ & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{(ii)} & a & . & a' & = 0 \end{array}$$

Teoremele algebrei booleene

- T1 (Idempotența):

(a) $x + x = x$;

(b) $x \cdot x = x$;

- T2 (Prop. 0 și 1):

(a) $x + 1 = 1$;

(b) $x \cdot 0 = 0$;

Teoremele algebrei booleene

- T3 (Absorbție):

(a) $y \cdot x + x = x$;

(b) $(y + x) \cdot x = x$;

- T4 (Involuție):

$((x)')' = x$;

Teoremele algebrei booleene

- T5 (Asociativitate):

(a) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(b) $x \cdot (y \cdot \mathbf{z}) = (x \cdot y) \cdot \mathbf{z}$;

- T6 (De Morgan):

(a) $(x + y)' = x' \cdot y'$;

(b) $(x \cdot y)' = x' + y'$;

Demonstrarea teoremelor

- Prin considerarea tuturor combinațiilor de valori ale variabilelor

Exemplu: De Morgan

x	**y**	**x ′**	**y′**	**x+y**	**(x+y) ′**	**x′ · y′**
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Funcții booleene

- O funcţie de comutaţie de n variabile f($X_0, X_1, ..., X_{n-1}$) unde variabilele X_i iau valorile 0 şi 1, pentru i=0÷n-1, se defineşte ca o aplicaţie a mulţimii $\{0,1\}^n$ în mulţimea {0,1}.

- Prin $\{0,1\}^n$ s-a notat produsul cartezian al mulţimii {0,1} cu ea însăşi de n ori.

- Domeniul de definiţie al funcţiei f este:

X= $\{0,1\}^n$ = $\{(X_0, X_1, ..., X_{n-1}) \mid X_0 \in \{0,1\}, X_1 \in \{0,1\}, ..., X_{n-1} \in \{0,1\}\}$
ale cărei elemente sunt n-upluri de 1 şi 0 $\{X_0, ..., X_{n-1}\}$

Funcție booleană

- Expresie algebrică care este formată variabile binare și din operatorii: și, or, negare

Exemplu:

$F = xy + xy'z + x'yz$

F = 1 dacă $x = 1$ și $y = 1$, sau

dacă $x = 1$ și $y = 0$ și $z = 1$, sau

dacă $x = 0$ și $y = 1$ și $z = 1$;

altfel, $F = 0$.

Funcții booleene

- Tabel de adevăr prin care este specificată

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Complementul unei funcții

- Funcția F′, unde F′ poate fi obținută prin interschimbarea lui 0 cu 1 în tabelul de adevăr

x	y	z	F′
0	0	0	0→1
0	0	1	0→1
0	1	0	0→1
0	1	1	1→0
1	0	0	0→1
1	0	1	1→0
1	1	0	1→0
1	1	1	1→0

Complementul unei funcții

- Funcția F′, unde F′ poate fi obținută prin aplicarea repetată a teoremelor lui DeMorgan

Exemplu

$$
\begin{aligned}
F' &= (xy + xy'z + x'yz)' \\
&= (xy)' (xy'z)' (x'yz)' \\
&= (x' + y')(x' + y + z')(x + y' + z')
\end{aligned}
$$

Echivalența expresiilor

- Să se găsească o formă echivalentă mai simplă pentru expresia:

f= $x\bar{y}z + xyz$

f= $x\left(\bar{y} + y\right)z$ distributivitatea

f= $xz\left(\bar{y} + y\right)$ comutativitatea

f= xz Axioma 5 (complementul)