SEMINAR săptămâna 3: Metoda lui Gauss-Jordan

0.1 SARCINI

Ce începe cu ,,puteţi" este opţional. Restul este ,,recomandat cu căldură".

• Puteţi citi de pe wikipedia (în engleză) despre metoda lui Gauss.

• De citit din cartea scrisă cu dl. Dăianu:
- exemplul de la pagina 25
- §18 de la pagina 26
- exerciţiile rezolvate 3 şi 4a)

• De lucrat exerciţiile: 8 (pag. 41, cu metoda Gauss-Jordan), 17 (pag. 44 - de aflat matricea scară redusă cu Gauss-Jordan), 19 (pag. 45) şi 20 (pag. 45, cu metoda Gauss-Jordan)

• În fine, rezolvaţi şi încărcaţi pe CV exerciţiul pe care îl aveţi lăsat temă pe CV.

0.2 EXERCIŢIU REZOLVAT

Calculaţi inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ folosind metoda Gauss-Jordan.

Soluţie. Efectuăm transformări elementare asupra matricei

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

pentru a obţine matricea scară redusă. Efectuăm transformarea $-L_1 + L_3 \to L_3$ şi obţinem

$$(A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

Adunăm linia 2 la linia 3 şi obţinem forma scară a matricei A:

$$(A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ea are 3 pivoţi, deci matricea A este inversabilă. Facem acum pivoţii egali cu 1. Doi dintre ei sunt deja 1, mai avem doar de împărţit linia 3 cu 2. Obţinem că

$$(A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Facem acum 0-uri deasupra pivoţilor. Începem de pe coloana 3. Pe linia 1 avem deja 0; scădem din linia 2 linia 3. Obţinem $(A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$.

Facem 0 şi deasupra pivotului de pe coloana 2. Din linia 1 scădem linia 2. Obţinem

$$(A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim (I_3|A^{-1}).$$

Prin urmare $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

0.3 EXERCIŢII PROPUSE

Exerciţiile de mai jos corespund exerciţiilor 1-10 din tema precedentă. Acolo trebuiau rezolvate cu metoda lui Gauss. Dacă mai aveţi rezolvările cu Gauss, le puteţi continua pentru a le finaliza cu Gauss-Jordan.

1. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} z = 1 \\ 2y - z = 2 \\ 3x - y - z = 3 \end{cases}$$

2. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 4x - 7y + 9z = 8 \end{cases}$$

3. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ -x + 4y - 3z = 2 \\ -x + 5y - 4z = 3 \end{cases}$$

4. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x - 2y + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

5. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 5 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$$

6. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 5 \\ 4x + y = 6 \end{cases}$$

7. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

8. Folosind metoda Gauss-Jordan decideţi dacă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

este inversabilă. În caz că este, calculaţi-i inversa; în caz că nu este, aflaţi-i forma scară redusă.

9. Folosind metoda Gauss-Jordan decideţi dacă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

este inversabilă. În caz că este, calculaţi-i inversa; în caz că nu este, aflaţi-i forma scară redusă.

10. O matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ are rangul 2. Câte 0-uri poate avea o formă scară redusă a ei?