

Dan Dăianu

Andrei Eckstein

# ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE

TEORIE ȘI APLICAȚII



Dan Dăianu

Andrei Eckstein

# ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE

TEORIE ȘI APLICAȚII

EDITURA MIRTON, TIMIȘOARA, 2015



# CUPRINS

<b>PREFAȚĂ</b>	6
<b>1. MATRICE. SISTEME LINIARE</b>	9
<b>A. TEORIE</b>	9
Concatenări	10
Suma matricelor	10
Înmulțirea matricelor cu scalari	10
Transpusa unei matrice	11
Matrice nulă. Matrice unitate	11
Matricea unei permutări	12
Înmulțirea matricelor	12
Inversa unei matrice	14
Sistem liniar	14
Teorema Kronecker-Capelli	15
Matrice triunghiulare	16
Matrice scară pe linii	16
Transformări elementare	17
Metoda lui Gauss	17
Proprietăți induse de transformări elementare	19
Determinarea rangului	20
Determinarea inversei. Calculul matricei $A^{-1}C$ .	21
Descompunerea LU a unei matrice pătratice	22
<b>B. PROBLEME REZOLVATE</b>	24
<b>C. PROBLEME PROPUSE</b>	32
<b>2. SPAȚII VECTORIALE</b>	44
<b>A. TEORIE</b>	44
Definiția spațiului vectorial	44
Exemple de spații vectoriale	46
Subspații vectoriale	48
Exemple de subspații vectoriale	49
Dependență și independență liniară	51
Criteriul practic de dependență	53

Baze. Caracterizări	56
Schimbări de baze	58
B. PROBLEME REZOLVATE	62
C. PROBLEME PROPUSE	68
<b>B2D 3 APLICAȚII LINIARE</b>	75
A. TEORIE	75
Definiția aplicației liniare —	75
Subspații asociate aplicațiilor liniare ✓	80
Matricea unei aplicații liniare —	81
B. PROBLEME REZOLVATE	84
C. PROBLEME PROPUSE	87
<b>B2D 4 VALORI PROPRII ȘI VECTORI PROPRII</b>	93
A. TEORIE	93
Operatori. Problema diagonalizării ✓	93
Valori proprii și vectori proprii ✓	96
Algoritm de rezolvare a problemei diagonalizării ✓	98
Teorema Cayley-Hamilton ✓	102
B. PROBLEME REZOLVATE	103
C. PROBLEME PROPUSE	108
5. FORME LINIARE. FORME BILINIARE. FORME PĂTRATICE	116
A. TEORIE	116
Forme liniare	116
Forme biliniare	118
Forme pătratice	120
Determinarea formei canonice prin metoda Gauss	122
Determinarea formei canonice prin metoda Jacobi	124
B. PROBLEME REZOLVATE	126
C. PROBLEME PROPUSE	133
<b>B2D 6 SPAȚII VECTORIALE EUCLIDIENE</b>	139
A. TEORIE	139
Produse scalare ✓	139

<del>Regăsirea informației</del>	143
Baze ortonormate ✓	144
Matrice ortogonale ✓	146
Subspații ortogonale	147
Proiecții ortogonale	149
Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt	150
B. PROBLEME REZOLVATE	152
C. PROBLEME PROPUSE	156
7. TRANSFORMĂRI ORTOGONALE ȘI APLICAȚII	164
A. TEORIE	164
82 Izometrii ✓	164
Matrice simetrice și valorile lor proprii ✓	166
Diagonalizarea matricelor simetrice ✓	167
Reducerea formelor pătratice la forma canonică prin transformări ortogonale ✓	170
Descompunerea singulară a unei matrice	172
B. PROBLEME REZOLVATE	176
C. PROBLEME PROPUSE	180
Algoritmul QR de descompunere a unei matrice nesingulare	183
8. SPAȚII AFINE EUCLIDIENE	185
A. TEORIE	185
Spațiul afin euclidian $\mathbb{E}^n$	185
Repere ortonormate în $\mathbb{E}^n$	189
Schimbări de repere	191
Produs vectorial. Produs mixt	193
B. PROBLEME REZOLVATE	195
C. PROBLEME PROPUSE	198
9. PLANUL ȘI DREAPTA	202
A. TEORIE	202
Planul	202
Dreapta în $\mathbb{E}^3$	205
B. PROBLEME REZOLVATE	209
C. PROBLEME PROPUSE	215

10. CURBE PLANE ȘI CURBE ÎN SPAȚIU	219
A. TEORIE	219
Reprezentări	219
Conice	233
Reducerea la forma canonică a ecuației unei conice	242
Curbe exprimate parametric	247
Curbe obținute prin intersecția a două suprafețe	249
B. PROBLEME REZOLVATE	250
C. PROBLEME PROPUSE	XX
11. SUPRAFETE	XX
A. TEORIE	XX
Reprezentări analitice	
Cuadrice	
Reducerea cuadricelor la forma canonică	
B. PROBLEME REZOLVATE	XX
C. PROBLEME PROPUSE	XX
ADDENDA	XX
BIBLIOGRAFIE	XX
INDEX	XX



# PREFAȚĂ

Cartea de față se adresează studenților de la facultățile tehnice, cu precădere celor de la Automatică și Calculatoare. Volumul acoperă programa primului semestru din primul an aferentă disciplinei „Algebră și geometrie”.

## Despre subiect

Printre cele 4-6 discipline de matematică prevăzute în curricula universităților tehnice, Algebra liniară s-a impus treptat, mai cu seamă în ultima decadă, prin caracterul ei direct aplicativ, în special în Computer Science. Marile universități tehnice din lume și-au adaptat programele la această situație, oferind spațiu mai larg acestei discipline. La noi nu s-a făcut acest lucru. Cartea de față vine să suplinească - parțial, și cu ajutorul celui care o studiază - această lacună: parcurgând-o **activ**, poți ajunge mai repede la performanță, fără „lecții” suplimentare. Partea de geometrie este orientată în special pe nevoile studenților de la Ingineria sistemelor, Automatică și Informatică.

## Despre scop, stil și conținut

Este o carte ceva mai atipică. Este prima versiune a unui manual centrat pe tehnica învățării prin exemple, cu puternic accent pe latura aplicativă a teoriei.

În ultima perioadă, de când învățământul superior a devenit învățământ de masă, partea de cabotinism din maniera de predare s-a extins până la cursurile scrise. Vedem, tot mai des, la profesori, altfel pe deplin onorabili, lungi pledoarii mai mult sau mai puțin matematice - marcate de expresii de genul „vești bune, vești proaste” - pentru o propoziție care poate fi redată pe maximum trei rânduri și ale cărei subtilități pot fi subliniate limpede într-un comentariu pe alte trei-patru rânduri. Sigur că *un student care vrea să învețe, care vrea să înțeleagă, care vrea să fie rapid capabil să folosească propoziția și care nu are prea mult timp de pierdut*, preferă abordarea concisă. ***Cartea de față este dedicată acestui student.***

Fiecare dintre cele 11 capitole ale cărții are o structură standard: conține trei secțiuni mari - *Teorie*, *Probleme rezolvate* și *Probleme propuse*.

*Teoria* este expusă succint, cu scurte motivații despre aplicabilitatea ei, iar demonstrațiile teoremelor și propozițiilor sunt preponderent lăsate la latitudinea utilizatorului. Doar câteva asemenea demonstrații sunt oferite ca modele, suficiente pentru abordarea cu succes a celorlalte. În schimb sunt date o mulțime de observații și exemple concrete de aplicare a teoriei.

*Problemele rezolvate* vin să întregască clasa exemplificărilor din *Teorie*. Sunt rezolvate principalele tipuri de probleme care apar în practică și care sunt esențiale pentru formarea abilităților personale de înțelegere a tematicilor care succed capitolul.

*Problemele propuse* sunt gândite ca un instrument necesar studentului pentru a-și verifica și consolida nivelul de învățare, de înțelegere și de integrare a cunoștințelor parcurse în prealabil.

## Despre o modalitate de învățare

Am constatat că, mai ales în ultima vreme, absolvenții de liceu care au ajuns studenții *Politehnicii* nu stăpînesc o tehnică a *învățării formative*, cea care te face să gîndești corect, care face ca materia parcursă (la curs, la seminar, acasă ori la bibliotecă) să se integreze natural în sistemele de cunoștințe și de valori personale, și, astfel, să permită studentului, mai apoi inginerului, să aplice creativ cele învățate. Majoritatea studenților memorează mecanic - în cel mai bun caz! - materia predată, iar consecințele acestei abordări sunt dezastruoase.

De aceea o să-mi permit să repet cele comunicate prin diverse canale unei minorități studențești și să dau cîteva sfaturi studentului pentru care am scris această carte, despre cîteva tehnici optime de abordare a învățării și nu numai...

## Scopurile predării

*Cursul vorbit (proiectat)* este o expunere a principalelor noțiuni pe care trebuie să le asimilezi pentru a putea accede la următoarele materii care se vor preda și la tehnicile de rezolvare a problemelor care apar în practica inginerescă. Niciun manual nu poate să înlocuiască complet o prelegere bună; un dascăl cu experiență va sublinia capcanele teoriei și modul în care teoria expusă trebuie să se integreze în arsenalul personal de cunoștințe al unui inginer bun. Va pregăti terenul, prin observații și exemple adecvate, pentru o abordare firească a tehnicilor de rezolvare a problemelor concrete. Și va pregăti terenul pentru accesul mai facil la noțiunile care vor apărea.

*Seminarul* este o formă de aprofundare, detaliere și diversificare a cunoștințelor predate la curs. Un dascăl bun care conduce un seminar - în consonanță cu studentul bun - va pretinde ca materia predată la curs să fie cunoscută. La seminar se vor discuta atunci doar acele probleme din curs ori din carte care nu au fost pe deplin înțelese ori nu au fost pe deplin „simțite”. Apoi se vor rezolva și comenta cît mai multe probleme. Dar cel mai bun seminar este acela care se ocupă doar de problemele cu „probleme”: adică de problemele pe care studentul serios nu a reușit să le rezolve singur acasă. În felul acesta studentul va absorbi maximum din ce i se oferă. Desigur, asta presupune ca studentul să fi parcurs etapele pe care trebuie să le parcurgă un student la o universitate serioasă.

Și de aceea o să înșir cîteva dintre pașii pe care trebuie să îi parcurgă un student care dorește să devină un inginer bun, într-o săptămână obișnuită de lucru, la o materie din programa de matematică.

## Etapele învățării

*Etapa I - participarea activă la curs:* urmărește cu atenție maximă materia predată la curs realizând conexiuni cu celelalte cursuri și luând notițe bune. Aceste deziderate se pot realiza - de către un student debutant - doar după câteva săptămâni de practică intensă. Ai beneficiat optim de cursul predat dacă ai acumulat bine ceea ce s-a făcut până la cursul respectiv, ai reușit să treci prin „procesorul” personal ceea ce se transmite de la tablă și ai notat chestiunile importante transmise de profesor (dacă notezi doar ce scrie dascălul la tablă, notițele tale nu vor avea nicio valoare!).

*Etapa a II-a – pregătirea seminarului.* Din notițele luate la cursul vorbit extragi teoremele (fără demonstrații), formulele, exemplele, observațiile și încerci o primă memorare - prin conexiuni - a acestui material; *fă-ți un curs scurt, numai al tău!* Este bine să construiești singur alte exemplificări pentru termenii noi. Reiei cu pixul, ori alt obiect de scris, toate exemplele și problemele abordate la curs, ori personal construite, fără ajutoare suplimentare. Nu se poate acumula o materie fără a exersa singur problemele expuse. Apoi treci la rezolvarea personală a problemelor și exercițiilor „rezolvate” din cursul tipărit (ori cel online) - din *Teorie*, dar și din *Probleme rezolvate*. Dacă nu reușești să rezolvi singur o problemă, te uiți la rezolvare, și, după ce ai reușit să o refaci singur, răspunde la întrebarea *de ce nu mi-a venit mie ideea?* Studentul mai ambițios completează formularul de curs personal cu alte teoreme, formule ori exemple pe care le găsește în *Teorie*. În sfârșit, rezolvi cât mai multe dintre *Problemele propuse* în aceste materiale. Pentru problemele pe care nu ai reușit să le rezolvi singur, cere ajutor la seminar, la consultații, ori colegilor. Nu e nici o rușine să nu știi la început; rușinea este să nu te lămurești.

*Etapa a III-a – pregătirea de performanță.* Dacă vrei mai mult, atunci „despică firul în patru”. Citește, cu creionul în mână, fiecare demonstrație și încearcă să o reproducă cu propriile notații, cu propriile forțe. Dacă schimbarea notațiilor te blochează, atunci subiectul de care te ocupi nu a fost înțeles în profunzime, a fost doar memorat. Ai modele de demonstrații în textul scris; demonstrează cât mai multe dintre propozițiile nedemonstrate acolo, demonstrează „problemele propuse” cu aspect teoretic. Rezolvă problemele mai dificile: cele marcate cu steluță, cele date la concursurile de matematică locale și naționale, ori cele propuse pentru asemenea competiții (vezi și bibliografia de la sfârșitul acestei cărți). Începi cu cele concepute pentru profilurile „neelectrice”, apoi „atacă-le” pe celelalte. Dacă ai ajuns în această fază atunci toate ușile se vor deschide pentru tine.

Succes!

Timișoara, noiembrie 2014

Dan Dăianu



# 1 MATRICE. SISTEME LINIARE

Matricele sunt principalul instrument folosit în Algebra liniară. Ele sunt utilizate nu numai în matematică ci și în majoritatea disciplinelor practice. De exemplu matricele joacă un rol central în tehnicile de criptare, în teoria jocurilor, și, în general în economie, la motoarele de căutare pe Internet, în grafica pe computer, în mecanica cuantică, în teoria stringurilor, etc.

Principalele probleme pe care le impune practica pentru matrice sunt legate de tehnicile de rezolvare a sistemelor mari - tehnici care impun, printre altele, transformări de „rarefiere” (formări de zerouri) asupra matricelor -, de tehnicile de inversare pentru matricele nesingulare, de tehnicile de calcul al determinantilor „mari”, de tehnicile de descompunere în produse ușor manevrabile din punct de vedere computațional și de tehnicile de determinare a valorilor proprii pentru matricele pătratice, toate cu aplicații directe cu precădere în Computer Science.

Metodele cunoscute din liceu pentru rezolvarea acestor probleme sunt ineficiente, cel puțin din cauza volumului mare de calcule - volum care induce viteze de procesare extrem de reduse -, din cauza erorilor propagate și din cauza volumului foarte mare de memorie necesară la executarea programelor aferente acestor metode.

Introducem aici noi procedee de determinare a rangului, de inversare a matricelor și de rezolvare a sistemelor liniare, bazate pe tehnica transformărilor elementare. Încheiem capitolul cu metoda de factorizare LU inventată de Alain Turing utilă la calculul determinantilor „mari”, la inversarea matricelor „mari” și la rezolvarea sistemelor liniare „mari”.

Pentru a descrie tehnici mai nuanțate de utilizare a matricelor, va trebui să extindem cadrul de lucru la spațiile vectoriale, aspect care va fi abordat în următoarele capitole.

În toate capitolele de algebră care urmează vom folosi noțiunile pe care le introducem în prezentul capitol.

## A. TEORIE

**1. Notații.** Notăm cu  $\mathcal{M}_{m,n}(K)$  sau cu  $K^{m \times n}$  mulțimea matricelor cu  $m$  linii și  $n$  coloane având elementele din corpul  $(K, +, \cdot)$  (de regulă  $K = \mathbb{R}$  - corpul numerelor reale,  $K = \mathbb{C}$  - corpul numerelor complexe, ori  $K = \mathbb{Z}_p$  - corpul claselor de resturi modulo  $p$ , unde  $p$  este un număr prim); despre o asemenea matrice spunem că este o *matrice de tip  $m \times n$* . Matricele cu același număr de linii și de coloane ( $m = n$ ) se numesc *matrice pătratice*. În exemplele (exercițiile) pe care le vom da, în lipsa altor precizări, corpul  $K$  este corpul numerelor reale.

**2. Concatenări.** Dacă  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{m \times n}$ , mai scriem

$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ , ori, dacă nu este pericol de confuzie,  $A = (a_{ij})$ .

Atunci matricea considerată are descrierea tabelară

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

sau

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

și se poate exprima prin *concatenarea* (alăturarea) coloanelor sale astfel: notând cu

$$A_{:j} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

matricea coloană formată cu elementele coloanei  $j$  a matricei  $A$ , atunci concatenarea matricelor  $A_{:1}, A_{:2}, \dots, A_{:n}$  reface matricea  $A$ :

$$A = (A_{:1} \mid A_{:2} \mid \dots \mid A_{:n});$$

analog se poate scrie matricea  $A$  prin alăturarea, pe coloană, a matricelor linie  $A_{i:} := (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$ , unde  $i = \overline{1, m}$ .

**3. Suma matricelor**  $A = (a_{ij})$  și  $B = (b_{ij})$  de tip  $m \times n$  este o matrice de tip  $m \times n$  notată  $A + B$  al cărei element generic este  $a_{ij} + b_{ij}$ , (adică elementul de pe poziția  $(i, j)$  al matricei sumă). De exemplu:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix} \text{ și } \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

**4. Înmulțirea matricei**  $A = (a_{ij})$  de tip  $m \times n$  cu **scalarul**  $c$  (adică  $c$  este un element al corpului  $K$ ) are ca ieșire matricea de tip  $m \times n$  notată  $cA$  al cărei element generic este  $ca_{ij}$ . De exemplu:

$$\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} \text{ și } 3 \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 6,1 & 2,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1,5 \\ 18,3 & 8,7 \end{bmatrix}.$$

**Proprietăți.** Fie  $A, B$  și  $C$  matrice de tip  $m \times n$ , iar  $c$  și  $d$  scalari. Atunci:

- a.  $A + B = B + A$  - *comutativitatea adunării matricelor*;
- b.  $A + (B + C) = (A + B) + C$  - *asociativitatea adunării matricelor*;
- c.  $c(A + B) = cA + cB$  și  $(c + d)A = cA + dA$  - *legile distributivității înmulțirii matricelor cu scalari*;
- d.  $(cd)A = c(dA)$ ;
- e.  $1A = A$  - *elementul  $1 \in K$  este „element neutru” pentru înmulțirea matricelor cu scalari.*

**5. Transpusa matricei**  $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$  este o matrice, notată  $A^T$ , de tip  $n \times m$  obținută din  $A$  prin schimbarea liniilor cu coloanele (de la stânga la dreapta, de sus în jos). Deci transpusa (*matricea transpusă a matricei  $A$* ) este  $A^T := (a'_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ , unde  $a'_{ij} = a_{ji}$ . Folosind concatenarea liniilor matricei  $A$ , putem scrie transpusa astfel:  $A^T = (A_1: | A_2: | \dots | A_n:)$ .

De exemplu:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Proprietăți.** Pentru orice matrice  $A, B \in K^{m \times n}$  și  $C \in K^{n \times l}$

- a.  $(A^T)^T = A$ ;
- b.  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;
- c.  $(AC)^T = C^T A^T$ ;
- d. pentru orice scalar  $r$ ,  $(rA)^T = rA^T$ ;
- e. dacă  $A$  este o **matrice diagonală** (elementele care nu sunt pe diagonala principală sunt toate 0) atunci  $A = A^T$ .

O matrice pătratică este **simetrică** dacă  $A^T = A$ .

**6. Matrice nulă. Matrice unitate.** Notăm cu  $O_{m,n}$  (sau doar  $O$  dacă nu este pericol de confuzie) *matricea nulă*, adică o matrice de tip  $m \times n$  având toate elementele nule (i.e. elementul neutru al grupului  $(K^{m \times n}, +)$ ). Cu  $I_n$  (ori, uneori doar cu  $I$ ) notăm *matricea unitate* de tip  $n \times n$ , adică

$$I_n = (\delta_{ij}), \text{ unde } \delta_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \neq j \\ 1, & \text{dacă } i = j \end{cases}$$

este *simbolul lui Kronecker*. Prin urmare  $I_n$  este matricea care are pe diagonala principală doar 1, iar în rest 0 (i.e.  $I_n$  este *elementul neutru față de înmulțirea matricelor pătrate de tip  $n \times n$* ). Coloana  $j$  din matricea unitate va fi notată  $e_j$ , deci

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ iar prin concatenare}$$

$$I_n = (e_1 | e_2 | \dots | e_n).$$

**Proprietăți.** Fie  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

- a.  $O \in K^{m \times n}$  este **element neutru** față de adunarea matricelor din  $K^{m \times n}$ :  $O + A = A + O = A$  pentru orice  $A \in K^{m \times n}$ ;
- b. matricea  $(-1)A := -A$  este **elementul simetric** al elementului  $A$  (pentru adunarea matricelor):  $A + (-A) = (-A) + A = O$ ;
- c.  $(\mathcal{M}_{m,n}(K), +)$  este un grup abelian.

**7. Matricea permutării**  $\pi \in S_n$ . Reamintim că  $\pi$  este o bijecție având domeniul și codomeniul  $\{1, 2, \dots, n\}$ ; se mai notează tabelar astfel:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Matricea permutării  $\pi \in S_n$  este de tip  $n \times n$  și este definită prin

$$P_\pi = (\delta_{i\pi^{-1}(j)}),$$

adică matricea  $P_\pi$  are pe linia  $i$  doar elementul de pe coloana  $\pi(i)$  egal cu 1, în rest 0. Altfel spus, matricea permutării  $\pi$  se obține din matricea unitate  $I_n$  schimbând liniile în raport cu  $\pi^{-1}$ : linia  $\pi(i)$  din  $I_n$  devine linia  $i$  din  $P_\pi$ .

De exemplu, dacă  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ , atunci matricea permutării  $\pi$  este

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Din definiția determinantilor (dacă  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$  atunci  $\det(A) := \sum_{s \in S_n} \varepsilon(s) a_{1s(1)} a_{2s(2)} \dots a_{ns(n)}$ , unde  $\varepsilon(s)$  înseamnă *signatura permutării*  $s$ ) urmează că  $\varepsilon(\pi) = \det(P_\pi)$ .

În exemplul de mai sus signatura permutării  $\pi$  (i.e.  $\varepsilon(\pi) = (-1)^{m(\pi)}$ , unde  $m(\pi)$  este numărul tuturor inversiunilor permutării  $\pi$ ) este:  $\varepsilon(\pi) = (-1)^2 = 1 = \det(P_\pi)$ .

Din definiția matricei permutării  $\pi \in S_n$  rezultă că dacă  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ ,

atunci matricea  $P_\pi x$  este matricea  $x$  în care liniile sunt permutate în raport cu  $\pi$ , deci

$$P_\pi x = \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ x_{\pi(2)} \\ \vdots \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix}.$$



**8. Înmulțirea matricelor.** Dacă  $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$  iar  $B = (b_{jk}) \in K^{n \times p}$  atunci *produsul matricelor*  $A$  și  $B$  este o matrice de tip  $m \times p$  obținută prin tehnica înmulțirii „linie cu coloană”, adică

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{jp} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{jp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{jp} \end{pmatrix} = \\ &= \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right)_{ik} = (AB_{:1} \mid AB_{:2} \mid \dots \mid AB_{:p}). \end{aligned}$$

De exemplu,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix},$$

iar

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

În particular, dacă  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ , atunci

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1A_{:1} + x_2A_{:2} + \dots + x_nA_{:n}.$$

De exemplu

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix}$$

și

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 14 & -6 \end{bmatrix}.$$

**Proprietăți ale înmulțirii matricelor.** Fie  $A$  și  $A'$  matrice de tip  $m \times n$ ,  $B$  și  $B'$  de tip  $n \times k$  și  $C$  de tip  $k \times \ell$ . Atunci:

- a.  $(AB)C = A(BC)$  (asociativitatea înmulțirii matricelor);
- b.  $A(B + B') = AB + AB'$  (distributivitatea la stânga a înmulțirii matricelor față de adunare);
- c.  $(A + A')B = AB + A'B$  (distributivitatea la dreapta a înmulțirii matricelor față de adunare);
- d. pentru orice scalar  $r$ ,  $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ ;
- e. dacă  $B = (B_{:1} | B_{:2} | \dots | B_{:k})$ , atunci  $AB = (AB_{:1} | AB_{:2} | \dots | AB_{:k})$ ;
- f. dacă  $\pi, \sigma \in S_n$ , atunci  $P_\pi^T P_\pi = I_n$ , iar  $P_\pi P_\sigma = P_{\sigma\pi}$ ;
- g. dacă  $\pi \in S_m$ , atunci

$$P_\pi A = (P_\pi A_{:1} | P_\pi A_{:2} | \dots | P_\pi A_{:n}) =$$

$$= (a_{\pi(i)j})_{ij} = \begin{pmatrix} a_{\pi(1)1} & a_{\pi(1)2} & \dots & a_{\pi(1)n} \\ a_{\pi(2)1} & a_{\pi(2)2} & \dots & a_{\pi(2)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\pi(m)1} & a_{\pi(m)2} & \dots & a_{\pi(m)n} \end{pmatrix}.$$

**9. Inversa matricei** pătratice  $A$  este o matrice  $B$  de același tip astfel încât:  $AB = I = BA$ . Inversa matricei  $A$  se notează cu  $A^{-1}$ . O matrice care admite inversă se numește *matrice inversabilă* sau *nesingulară*. O matrice care nu are inversă se numește *matrice singulară*.

**Proprietăți.**

- a. Dacă  $\pi \in S_n$ , atunci  $P_\pi^T = P_{\pi^{-1}} = P_\pi^{-1}$ .
- b. Matricea  $A$  este nesingulară dacă și numai dacă  $\det(A) \neq 0$ .
- c. Dacă  $A$  și  $B$  sunt matrice pătratice pentru care  $AB = I$ , atunci  $B = A^{-1}$  (și  $A = B^{-1}$ ).
- d. Dacă  $A$  este matrice pătratică nesingulară și  $k \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $A^{-k} := (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$  (unde  $A^k := \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } k \text{ ori}}$ ).

**Exemplul 1.**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

deci:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

### Exemplul 2.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 941 & 942 \\ 1256 & 1255 \end{pmatrix}$$

xi

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^{-3} = \begin{pmatrix} -\frac{1255}{2197} & \frac{942}{2197} \\ \frac{1256}{2197} & -\frac{941}{2197} \end{pmatrix}.$$

Se verifică imediat că  $(\mathcal{M}_{n,n}(K), +, \cdot)$  este un inel (necomutativ, în general) în care  $I_n$  este elementul neutru față de înmulțirea matricelor „ $\cdot$ ”.

**10.** Un **sistem liniar** de  $m$  ecuații cu  $n$  necunoscute având coeficienții  $a_{ij}$  din corpul  $K$  (la noi  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , ori  $\mathbb{Z}_p$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

se poate scrie matriceal astfel:

$$Ax = b,$$

adică

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

unde  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$  este matricea coeficienților sistemului (1),

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$$

este matricea coloană a necunoscutelor, iar

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(K)$$

este matricea coloană a termenilor liberi. Un asemenea sistem poate fi *incompatibil*, i.e. mulțimea soluțiilor  $\mathcal{S}$  este vidă ( $\mathcal{S} = \emptyset$ ), *compatibil determinat*, i.e. sistemul are soluție unică, sau *compatibil nedeterminat*, i.e. sistemul are mai multe soluții (o infinitate în cazul  $K = \mathbb{R}$  sau  $K = \mathbb{C}$ , o putere a lui  $p$  dacă  $K = \mathbb{Z}_p$ ,  $p$  prim).

**11. Teorema Kronecker-Capelli.** *Sistemul (1) este compatibil dacă și numai dacă  $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$ , unde  $\bar{A} = (A \mid b)$  este **matricea extinsă** a matricei  $A$  (i.e. matricea  $A$  bordată (concatenată) cu coloana termenilor liberi  $b$ ):*

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Reamintim că rangul unei matrice  $A \in K^{m \times n}$  este cel mai mare ordin de determinant nenul care se poate construi din elementele de intersecție a  $k$  linii și  $k$  coloane ale matricei  $A$ , unde  $k \in \{1, 2, \dots, \min(m, n)\}$ .

**12. Matrice triunghiulară.** Un sistem de forma

[illegible]

unde  $a_{ii} \neq 0$  pentru orice  $i$ , se rezolvă prin *metoda substituției inverse* (i.e. obținem  $x_n$  din ultima ecuație, apoi  $x_{n-1}$  din penultima etc.) și are ca matrice o *matrice superior triunghiulară*, adică  $a_{ij} = 0$ , ori de câte ori  $j < i$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad (2)$$

dacă în plus coeficienții  $a_{ii}$  au toți valoarea 1 spunem că matricea este superior triunghiulară *diagonal unitară*.

Un sistem în care  $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, n}$  de forma

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 & = & b_1 \\ a_{12}x_2 + a_{22}x_2 & = & b_2 \\ \dots\dots\dots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

se rezolvă prin *metoda substituției directe* iar matricea acestuia este *inferior triunghiulară*.

**13. Matrice scară pe linii.** Fie  $S = (s_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$  o matrice care îndeplinește următoarele două condiții:

**a.** Dacă o linie este nulă, e.g.  $S_{i:} = (0 \ 0 \ \dots \ 0)$ , atunci toate liniile de sub aceasta sunt nule, deci  $S_{k:} = (0 \ 0 \ \dots \ 0)$ , pentru orice  $k \geq i$ .

**b.** Dacă primul element nenul de pe o linie  $S_{i:}$  este  $s_{ij}$  atunci elementele de pe coloanele precedente inclusiv  $S_{:j}$  (i.e.  $S_{:1}, S_{:2}, \dots, S_{:j}$ ) aflate sub linia  $i$  sunt nule (i.e.  $s_{\ell k} = 0$ , pentru orice  $\ell > i$  și  $k \leq j$ ).

Atunci matricea  $S$  se numește **matrice scară pe linii**; elementul  $s_{ij}$  (adică primul element nenul de pe o linie, dacă există) se numește **pivot**.

**Exemple.** Matricea (2) este o matrice scară pe linii; de asemenea matricele

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sunt matrice scară pe linii, iar matricele

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 13 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nu sunt matrice scară pe linii.

Orice matrice diagonală este matrice scară pe linii. În particular,  $I_n$  este o matrice scară pe linii.

**14. Transformări elementare.** Fie sistemul liniar de  $m$  ecuații cu  $n$  necunoscute (1) cu mulțimea soluțiilor  $\mathcal{S}$ ; notăm ecuația a  $i$ -a cu  $L_i$ , adică:

$$L_i : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i.$$

Un sistem echivalent cu sistemul (1) este un sistem liniar de  $m$  ecuații cu  $n$  necunoscute pentru care mulțimea soluțiilor este tot  $\mathcal{S}$ .

Numim *transformări elementare* (aferente sistemului (1)), următoarele acțiuni efectuate asupra sistemului (1):

- a.** interschimbarea a două ecuații:  $L_i \leftrightarrow L_k$ ;
- b.** multiplicarea unei ecuații cu un scalar nenul  $\lambda \in K$ :  $\lambda L_i \rightarrow L_i$ ;
- c.** multiplicarea unei ecuații cu un scalar  $\lambda \in K$  și adunarea rezultatului la altă ecuație:  $\lambda L_i + L_k \rightarrow L_k$ .

Desigur, transformările elementare efectuate asupra unui sistem conduc la un sistem echivalent.

Transformărilor elementare efectuate asupra unui sistem le corespund transformările elementare efectuate asupra matricei  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$  pe linii:

- a. interschimbarea a două linii:  $L_i \leftrightarrow L_k$ : o numim transformare de tip 1;
- b. multiplicarea unei linii cu un element nenul  $\lambda \in K$ :  $\lambda L_i \rightarrow L_i$ : transformare de tip 2;
- c. multiplicarea unei linii cu un element  $\lambda \in K$  și adunarea rezultatului la altă linie:  $\lambda L_i + L_k \rightarrow L_k$ : transformare de tip 3.

**15. Metoda lui Gauss** de rezolvare a unui sistemului (1): efectuăm succesiv transformări elementare asupra matricei extinse a sistemului (1) până ajungem la o formă scară; din forma scară obținem mulțimea soluțiilor  $\mathcal{S}$ .

**Metoda Gauss-Jordan** presupune în plus față de metoda Gauss:

- o transformarea fiecărui pivot în 1;
- o anularea succesivă a tuturor celorlalte elemente de pe coloana pivotului.

Matricea astfel obținută se numește **matrice scară redusă**.

**Notăție.** Fie  $A$  și  $B$  două matrice. Vom scrie

$$A \sim B$$

dacă și numai dacă matricele sunt de același tip și una s-a obținut din cealaltă prin transformări elementare pe linii.

**Exemplul. 1.** Să se rezolve sistemul 
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$$
 prin

metoda Gauss.

*Rezolvare.* Atașăm sistemului matricea sa extinsă

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array} \right)$$

și efectuăm transformări elementare pe linii pentru a obține o formă scară. Pentru a forma zerouri pe prima coloană alegem pivotul  $a_{11} = 3$  (căci  $a_{11} \neq 0$ ) și efectuăm transformările  $-2L_1 + L_2 \rightarrow L_2$  și  $-3L_1 + L_3 \rightarrow L_3$ ; obținem matricea echivalentă

$$\overline{A} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right);$$

din ultimile două linii rezultă că  $x_4 = 1$ , iar din prima linie obținem  $x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2$ . Deci sistemul nostru este compatibil (dublu) nedeterminat, iar mulțimea soluțiilor sale este  $\mathcal{S} = \{(\alpha, \beta, 1 - 3\alpha - 4\beta, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .

Am considerat, implicit,  $K = \mathbb{R}$ . Dacă, în același exemplu luăm  $K$  corpul claselor de resturi modulo 2, deci parametrii  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ , atunci avem patru soluții:  
 $\mathcal{S} = \{(0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1)\}$ .

**Exemplul. 2.** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \end{cases}$$

prin metoda Gauss-Jordan.

*Rezolvare.* Atașăm sistemului matricea sa extinsă:

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array} \right)$$

și efectuăm transformări elementare pe linii pentru a obține *forma scară redusă*. Pentru a obține pivotul 1 pe prima linie putem să înmulțim linia a 5-a cu  $(-1)$  și să adunăm rezultatul la prima linie, adică să efectuăm transformarea elementară:  
 $-L_5 + L_1 \rightarrow L_1$ :

$$\overline{A} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array} \right),$$

ceea ce permite crearea de zerouri sub pivotul 1 al primei linii:

$$-3L_1 + L_2 \rightarrow L_2, -4L_1 + L_3 \rightarrow L_3, -L_2 + L_4 \rightarrow L_4, -7L_1 + L_5 \rightarrow L_5,$$

adică obținem matricea echivalentă:

$$\overline{A} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -10 & 5 & 2 & -3 \end{array} \right).$$

Asemănător procedăm cu celelalte coloane: pe coloana a II-a formăm un pivot 1 și zerouri în rest, etc. De exemplu, cu  
 $-L_4 + L_1 \rightarrow L_1, 2L_4 + L_2 \rightarrow L_2$ :

$$\bar{A} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -10 & 5 & 2 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2L_2 + \widetilde{L_4} \rightarrow L_4 \\ 5L_4 + L_5 \rightarrow L_5 \\ 3L_4 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 22 \end{array} \right) \begin{array}{l} -L_4 \leftrightarrow L_3 \\ -2L_3 + L_5 \rightarrow L_5 \\ L_4 + \widetilde{L_1} \rightarrow L_1 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2L_4 + \widetilde{L_1} \rightarrow L_1 \\ -L_4 + L_2 \rightarrow L_2 \\ -2L_4 + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

deci mulțimea soluțiilor este formată dintr-un singur element (sistem compatibil determinat):  $\mathcal{S} = \{(3, 0, -5, 11)\}$ .

Următoarele proprietăți ale matricelor, cărora li s-au aplicat transformări elementare pe linie - provenite din transformările similare efectuate asupra sistemelor sunt extrem de utile, printre altele, la *determinarea rangului* unei matrice, la *calculul inversei* unei matrice nesingulare și la *rezolvarea sistemelor liniare*.

**16. Proprietăți induse de transformări elementare.** Fie  $A$  o matrice,  $S$  o forma scară a sa, iar  $S_0$  forma scară redusă. Atunci:

- $\text{rang}(A) = \text{rang}(S) = \text{numărul de pivoți din } S$ ;
- forma scară  $S$  nu este, în general, unică, în schimb forma scară redusă  $S_0$  este unică;
- dacă  $A$  este matrice pătratică,  $I$  este matricea unitate de același tip și  $(A | I) \sim (S_0 | I')$  atunci:
  - dacă  $S_0 = I$  rezultă că  $I' = A^{-1}$ , iar
  - dacă  $S_0 \neq I$  rezultă că matricea  $A$  este singulară.
- dacă  $A$  este matrice pătratică nesingulară de tip  $n \times n$  și  $B$  este o matrice de același tip, atunci  $(A | B) \sim (I_n | C)$  dacă și numai dacă  $C = A^{-1}B$ ;
- transformările elementare asupra matricei  $A$  se exprimă matriceal cu ajutorul matricelor elementare de tip 1, 2 și 3 ( $P_{(i,k)}, E^i(\lambda)$ , respectiv  $E_{ik}(\lambda)$ , inversabile, definite mai jos) astfel:

· pentru transformarea de tip 1:  $L_i: \leftrightarrow L_k$ : noua matrice este produsul  $P_{(i,k)}A$ , unde  $P_{(i,k)}$  este matricea transpoziției  $(i, k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$ ;

desigur  $P_{(i,k)}^{-1} = P_{(i,k)}$  deci **inversa unei transformări de tip 1 este o transformare de tip 1**;

· pentru transformarea de tip 2:  $\lambda L_i: \rightarrow L_i$ : noua matrice este produsul  $E^i(\lambda)A$ , unde cu  $E^i(\lambda)$  am notat matricea unitate  $I$  având intrarea  $(i, i)$  modificată în  $\lambda$  (în



loc de 1); cum  $(E^i(\lambda))^{-1} = E^i(\lambda^{-1})$ , urmează că **inversa unei transformări de tip 2 este o transformare de tip 2**;

· pentru transformarea de tip 3:  $\lambda L_{i:} + L_{k:} \rightarrow L_{k:}$ , noua matrice este produsul  $E_{ik}(\lambda)A$ , unde cu  $E_{ik}(\lambda)$  am notat matricea unitate  $I$  având intrarea  $(k, i)$  modificată în  $\lambda$  (în loc de 0); deoarece  $(E_{ik}(\lambda))^{-1} = E_{ik}(-\lambda)$ , rezultă că **inversa unei transformări de tip 3 este o transformare de tip 3**.

**17. Determinarea rangului.** Fie  $A$  o matrice pătratică. Efectuând transformări elementare pe linie, transformăm matricea  $A$  într-o matrice scară  $S$ . Atunci  $\text{rang}(A) = \text{rang}(S)$ , adică rangul este egal cu numărul de pivoți din matricea  $S$ .

**Exemplu.** Să determinăm  $\text{rang}(A)$ , unde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -3 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Scopul nostru este să obținem, prin transformări elementare în matricea dată, o matrice scară; rangul va fi egal cu numărul de pivoți din matricea scară. Vom efectua transformări elementare pornind de la linia a II-a, deoarece numerele de aici sunt mai mici, iar  $a_{21} = 1$  este un pivot ușor de folosit. Efectuând transformările de tip 3:  $-3L_2 + L_1 \rightarrow L_1$ ,  $-L_2 + L_3 \rightarrow L_3$  și  $5L_2 + L_4 \rightarrow L_4$  obținem

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 7 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 10 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

apoi, pentru transformările  $L_1 \leftrightarrow L_2$ ,  $-L_1 + L_3 \rightarrow L_3$ ,  $2L_1 + L_4 \rightarrow L_4$  și obținem matricea scară  $S$ :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S.$$

Pivoții fiind  $s_{11} = 1$  și  $s_{22} = 7$  rezultă că numărul de pivoți este 2. În consecință  $\text{rang}(A) = \text{rang}(S) = 2$ .

**Observații. 1.** Matricea scară redusă se poate obține din orice formă intermediară (obținută din matricea inițială prin transformări elementare); în exemplul de mai sus, ea este

$$S_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & \frac{6}{7} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2.** Deoarece rangul matricei  $A$  coincide cu rangul matricei transpuse  $A^T$ , putem, pentru determinarea rangului, să efectuăm și „transformări elementare pe coloane” în  $A$  pentru a obține numărul maxim posibil de zerouri; atunci  $\text{rang}(A)$  va fi egal cu numărul de elemente nenule rămase.

**18. Determinarea inversei. Calculul matricei  $A^{-1}C$ .** Metoda Gauss-Jordan poate fi folosită și pentru *calculul inversei* unei matrice pătratice  $A \in K^{n \times n}$  nesingulare. Deoarece determinarea inversei  $B$  a unei matrice  $A$  revine la rezolvarea ecuației matriceale  $AB = I$ , iar

$$AB = (AB_{:1} \mid AB_{:2} \mid \dots \mid AB_{:n}),$$

avem de determinat coloanele  $B_{:i}$  ale inversei din condiția

$$(AB_{:1} \mid AB_{:2} \mid \dots \mid AB_{:n}) = (e_1 \mid e_2 \mid \dots \mid e_n).$$

Pentru fiecare  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  avem de rezolvat sistemul  $AB_{:i} = e_i$ . Așadar inversarea unei matrice revine la rezolvarea a  $n$  sisteme, însă toate cu aceeași matrice a sistemului,  $A$ . Aceste sisteme se rezolvă simultan. Considerăm așadar matricea sistemului, extinsă simultan cu toate coloanele de termeni liberi care ne interesează. Am văzut în exemplele de mai sus că alegerea pașilor care trebuie efectuați pentru rezolvarea unui sistem nu depinde de coloana termenilor liberi, ci numai de matricea sistemului. Atunci rezolvarea sistemelor  $AB_{:i} = e_i$  poate fi făcută simultan.

Sau, efectuând echivalența  $(A|I_n) \sim (I_n|B)$  (forma scară redusă a unei matrice nesingulare este matricea unitate), rezultă că există matricele elementare  $E_1, E_2, \dots, E_m \in K^{n \times n}$  astfel ca  $I_n = E_m E_{m-1} \cdots E_1 A$ . Cum matricele elementare sunt inversabile (cu inversele - matrice elementare de același tip), rezultă imediat că  $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_m^{-1}$  și  $B = E_m E_{m-1} \cdots E_1$ .

Mai general, dacă  $C \in K^{n \times n}$ , atunci avem echivalența

$$(A|C) \sim (I_n|A^{-1}C).$$

**Exemplu.** Să calculăm inversa matricei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Efectuăm transformări elementare asupra matricei

$$(A|I_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

pentru a obține matricea scară redusă. De exemplu, înmulțirea la stânga a matricei  $A$  cu  $E_{13}(-1)$  corespunde transformării  $-L_1 + L_3 \rightarrow L_1$ , deci

$$(A|I_3) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right);$$

analog, înmulțind cu  $E_{23}(1)$ , cu  $E_{32}(-\frac{1}{2})$ , cu  $E^3(\frac{1}{2})$  și cu  $E_{21}(-1)$  avem, succesiv

$$(A|I_3) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim (I_3|A^{-1}).$$

Prin urmare  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . În plus, știm că

$$A^{-1} = E_{21}(-1) E^3(\frac{1}{2}) E_{32}(-\frac{1}{2}) E_{23}(1) E_{13}(-1).$$

**19. Descompunerea  $LU$  a unei matrice pătratice.** Spunem că matricea nesingulară  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$  admite *factorizare (descompunere)  $LU$*  dacă există două matrice  $L, U \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ , astfel ca  $A = LU$ ,  $L$  fiind o matrice inferior triunghiulară diagonal unitară, iar  $U$  o matrice superior triunghiulară<sup>1</sup>, i.e.  $L$ , respectiv  $U$  sunt de forma:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

**Proprietăți.** Fie  $A = (a_{ij})$  o matrice pătratică nesingulară de tip  $n \times n$ .

◦ Dacă  $A$  poate fi transformată într-o matrice scară  $U$  folosind doar matrice elementare de tip 3, de forma  $E_{ij}(\lambda)$  cu  $i < j$ , atunci  $A$  admite descompunere  $LU$ . De fapt dacă  $U = E_k E_{k-1} \dots E_1 A$  unde  $E_1, \dots, E_k$  sunt matrice elementare de tip 3, de forma  $E_{ij}(\lambda)$  cu  $i < j$ , atunci  $L = E_1^{-1} \dots E_k^{-1}$ , iar  $A = LU$ .

◦ Dacă minorii principali  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  sunt nenuli, unde:

$$\Delta_1 = |a_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

atunci matricea  $A$  admite descompunere  $LU$

◦ Există două permutări  $\pi, \sigma \in S_n$  astfel încât matricea  $P_\pi A P_\sigma$  să admită descompunere  $LU$ .

---

<sup>1</sup>Literele „L” și „U” provin de la „Lower”, respectiv „Upper triangular matrix”.

**Exemplu.** Să se descompună în produs  $LU$  matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Rezolvare.* Încercăm să aplicăm doar transformări elementare de tip 3 asupra matricei  $A$  până la forma scară  $U$ . Formăm zerouri pe prima coloană folosind ca pivot elementul  $a_{11} = 2$ ; aceasta înseamnă de fapt că înmulțim, la stânga, matricea  $A$  succesiv cu matricele elementare:  $E_{12}(-\frac{3}{2})$ ,  $E_{14}(-\frac{5}{2})$ , apoi formăm zerouri pe a doua coloană folosind ca pivot elementul  $a'_{22} = -\frac{1}{2}$ , adică înmulțim la stânga cu matricele elementare  $E_{23}(8)$  și  $E_{24}(-1)$  și, în sfârșit, cu  $E_{34}(\frac{2}{3})$ ; obținem:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & 23 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{46}{3} \end{pmatrix} = U. \end{aligned}$$

Deci am obținut

$$U = E_{34}(\frac{2}{3})E_{24}(-1)E_{23}(8)E_{14}(-\frac{5}{2})E_{12}(-\frac{3}{2})A,$$

sau, echivalent (aplicând formula  $(E_{ik}(\lambda))^{-1} = E_{ik}(-\lambda)$ ),

$$\begin{aligned} A &= (E_{34}(\frac{2}{3})E_{24}(-1)E_{23}(8)E_{14}(-\frac{5}{2})E_{12}(-\frac{3}{2}))^{-1}U = \\ &= E_{12}(\frac{3}{2})E_{14}(\frac{5}{2})E_{23}(-8)E_{24}(1)E_{34}(-\frac{2}{3})U. \end{aligned}$$

Luând

$$L = E_{12}(\frac{3}{2})E_{14}(\frac{5}{2})E_{23}(-8)E_{24}(1)E_{34}(-\frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

rezultă descompunerea

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{46}{3} \end{pmatrix}.$$

## B. PROBLEME REZOLVATE

1. Rezolvați sistemele de mai jos folosind metoda lui Gauss:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 4x - y + 5z = 7 \end{cases} & \text{(b)} \quad & \begin{cases} y + 2z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - z = 3 \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ 5x - y = 3 \end{cases} & \text{(d)} \quad & \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 4x + 2y - z = 2 \\ 6x + 3y + 2z = 3 \end{cases} \\ \text{(e)} \quad & \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} & \text{(f)} \quad & \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = -11 \\ 5x + 6y = 2 \end{cases} & \text{(g)} \quad & \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \\ 7x + 8y = 9 \end{cases} \end{aligned}$$

*Rezolvare.*

(a) Vom folosi notația matriceală și vom efectua operații asupra matricei extinse

$$\text{a sistemului: } \overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 7 \end{array} \right). \text{ Deoarece } a_{11} = 1 \neq 0, \text{ putem con-}$$

sidera  $a_{11}$  drept pivot. Pentru a provoca zerouri dedesubtul pivotului, adunăm mai întâi la linia a doua prima linie înmulțită cu  $-2$  (și vom face 0 coeficientul lui  $x$  din ecuația a doua). Apoi vom aduna la linia a treia prima linie înmulțită cu  $-4$ , făcând astfel 0 și coeficientul lui  $x$  din ecuația a treia. Avem succesiv:

$$\overline{A} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 3 \end{array} \right). \text{ Pe coloana a doua}$$

alegem pivot pe  $a'_{22} = -4 \neq 0$ . Pentru a face 0 coeficientul lui  $y$  din ecuația

a treia (și a obține forma scară a matricei  $A$ ), adunăm la linia a treia linia a doua înmulțită cu  $-\frac{9}{4}$ . Obținem

$$A \sim \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{9}{4}} & 3 \end{array} \right). \text{ De aici se vede mai întâi că } \text{rang } A = 3 \text{ (numărul}$$

pivoților), că  $z = \frac{4}{3}$ , apoi, din ecuația a doua,  $y = 1$  și, înlocuind în prima ecuație,  $x = \frac{1}{3}$ . Așadar sistemul este compatibil determinat și are soluția unică

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3} \right) \right\}.$$

(b) Procedăm la fel ca la exercițiul precedent. Observăm însă că elementul din colțul din stânga-sus al matricei extinse  $\bar{A}$  este  $a_{11} = 0$ , deci nu poate fi luat pe post de pivot. În acest caz, vom schimba ordinea ecuațiilor astfel încât în colțul amintit să avem un element nenul. Schimbând între ele primele două linii ale matricei  $\bar{A}$ , obținem

$$\bar{A} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Pentru a face 0 și coeficientul lui  $x$  de pe linia a treia (cel de pe linia a doua este deja 0), vom aduna la cea de-a treia linie prima linie înmulțită cu  $-3$ . Atunci

$$\bar{A} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & -3 \end{array} \right). \text{ Alegem } a'_{22} = 1 \neq 0 \text{ drept pivot. Pentru a face 0}$$

coeficientul lui  $y$  din ecuația a treia, adunăm la ultima linie a matricei obținute

$$\text{linia a doua înmulțită cu } -3. \text{ Obținem: } \bar{A} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-13} & -6 \end{array} \right). \text{ De}$$

aici se vede mai întâi că  $\text{rang } A = 3$ , că  $z = \frac{6}{13}$ , apoi, din ecuația a doua,

$y = \frac{1}{13}$  și, înlocuind în prima ecuație,  $x = \frac{15}{13}$ . Așadar sistemul este compatibil

determinat și are soluția unică  $\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{15}{13}, \frac{1}{13}, \frac{6}{13} \right) \right\}$ .

$$(c) \text{ Avem } \bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right). \text{ Alegem } a_{11} = 1 \neq 0 \text{ pivot, adunăm la}$$

linia a doua prima linie înmulțită cu  $-2$  și adunăm la linia a treia prima linie

înmulțită cu  $-5$ . Obținem astfel zerouri sub primul pivot:

$$\bar{A} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 10 & -2 \end{array} \right). \text{ Pe linia a doua alegem pivot elementul de pe}$$

coloana a doua:  $a'_{22} = -3 \neq 0$ . Adunăm la linia a treia linia a doua înmulțită cu  $-2$ . Găsim că:

$$\bar{A} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right). \text{ Am obținut o formă scară cu doar doi pivoți}$$

deci  $\text{rang } A = 2$ . Ultima ecuație,  $0 = -2$ , ne arată că sistemul este incompatibil.

(d) Avem  $\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right)$ . Alegem  $a_{11} = 2 \neq 0$  pivot și adunăm la

linia a doua prima linie înmulțită cu  $-2$ , apoi adunăm la linia a treia prima linie înmulțită cu  $-3$ . Obținem astfel zerouri sub primul pivot:

$$\bar{A} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right). \text{ Alegem ca al doilea pivot elementul de pe linia 2,}$$

coloana 3,  $a'_{23} = 1 \neq 0$ . Adunăm la linia a treia linia a doua înmulțită cu  $-5$ ,

și obținem că  $\bar{A} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ . Ultima ecuație,  $0 = 0$ , este satisfăcută

întotdeauna. Din linia a doua rezultă  $z = 0$ . Apoi din prima ecuație găsim  $x = \frac{1-y}{2}$ . Sistemul este compatibil (simplu) nedeterminat și are ca soluții

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{1-\alpha}{2}, \alpha, 0 \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(e) Cu notații matriceale, adunând la linia a doua prima linie înmulțită cu  $-2$ , obținem imediat forma scară a matricei  $\bar{A}$ :

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -3 & -6 \end{array} \right). \text{ De aici se vede că}$$

$\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2$  (avem doi pivoți) deci sistemul este compatibil nedeterminat. Din ecuația a doua obținem  $y = 2 - z$ . Înlocuind în prima ecuație găsim  $x = 1$ . Așadar mulțimea soluțiilor sistemului este  $\mathcal{S} = \{(1, 2 - \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .

(f) Alegem elementul din colțul din stânga sus al matricei extinse,  $a_{11} = 1 \neq 0$ , drept pivot. Adunând la linia a doua prima linie înmulțită cu  $-3$  și la linia a

treia prima linie înmulțită cu  $-5$ , obținem

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -11 \\ 5 & 6 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-2} & -20 \\ 0 & -4 & -13 \end{array} \right). \text{ Alegem pivot acum elementul}$$

de pe linia a doua, coloana a doua a matricei obținute:  $a'_{22} = -2 \neq 0$ . Adunăm la linia a treia linia a doua înmulțită cu  $-2$  (pentru a produce 0 sub pivot).

$$\text{Obținem că } \bar{A} \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & 27 \end{array} \right). \text{ Deoarece ultima linie se traduce în ecuația}$$

$0 = 27$ , sistemul este incompatibil.

(g) Alegem elementul din colțul din stânga sus al matricei extinse,  $a_{11} = 1 \neq 0$ , drept pivot. Adunând la linia a doua prima linie înmulțită cu  $-4$  și la linia a treia prima linie înmulțită cu  $-7$ , obținem

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{array} \right). \text{ Alegem pivot acum elementul de}$$

pe linia a doua, coloana a doua a matricei obținute:  $a'_{22} = -3 \neq 0$ . Adunăm la linia a treia linia a doua înmulțită cu  $-2$  (pentru a produce 0 sub pivot).

$$\text{Obținem că } \bar{A} \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \text{ Deoarece ultima linie se traduce în ecuația}$$

$0 = 0$ , sistemul este compatibil. Din ecuația a doua avem  $y = 2$ , iar din prima ecuație,  $x = -1$ . Așadar mulțimea soluțiilor sistemului este  $\mathcal{S} = \{(-1, 2)\}$ .

2. Folosind metoda lui Gauss, calculați rangurile matricelor:

$$(a) \left( \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{array} \right) \quad (b) \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{array} \right)$$

$$(c) \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \end{array} \right).$$

*Rezolvare.*

$$(a) \text{rang} \left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{4L_1+L_2 \rightarrow L_2} \text{rang} \left( \begin{array}{ccc} \boxed{1} & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{array} \right)$$



$$\xrightarrow{-7L_1+L_3 \rightarrow L_3} \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 6 \\ 0 & 6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{2L_2+L_3 \rightarrow L_3}$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Avem doi pivoți, deci rangul căutat este 2.}$$

$$(b) \text{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4L_1+L_2 \rightarrow L_2}$$

$$= \text{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -7 & -7 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-6L_1+L_3 \rightarrow L_3}$$

$$= \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -12 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1,5L_2+L_3 \rightarrow L_3}$$

$$= \text{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{3}{2}} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Avem trei pivoți, deci rangul este 3.

$$(c) \text{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \end{pmatrix} \xrightarrow{-(n+1)L_1+L_2 \rightarrow L_2}$$

$$= \text{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & -n & -2n & \dots & -(n-1)n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \end{pmatrix} \xrightarrow{-(2n+1)L_1+L_3 \rightarrow L_3}$$

$$= \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & \boxed{-n} & -2n & \dots & -(n-1)n \\ 0 & -2n & -4n & \dots & -2(n-1)n \end{pmatrix} \xrightarrow{-2L_2+L_3 \rightarrow L_3}$$

$$= \text{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & \boxed{-n} & -2n & \dots & -(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Avem doi pivoți deci rangul este 2.

3. Determinați forma scară redusă pentru matricele de mai jos:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

*Rezolvare.*

(a) Alegem pivot elementul din colțul din stânga-sus. Următoarea etapă ar fi să împărțim linia 1 cu  $a_{11}$  dar cum  $a_{11} = 1$  acest lucru nu mai este necesar. Ca la

metoda lui Gauss producem zerouri dedesubtul pivotului.  $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2L_1+L_2 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Alegem acum pivot elementul de pe linia a doua, coloana a doua:  $a'_{22} = -1 \neq 0$ .

Vom înmulți linia a doua cu  $-1$  pentru a face pivotul să fie egal cu 1. Obținem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_2 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Provocăm acum zerouri pe coloana a doua, nu numai sub pivot, ca la metoda lui Gauss, ci și deasupra acestuia.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_1 \rightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_3 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alegem acum pivot elementul de pe linia a treia, coloana a treia a matricei obținute. Împărțim linia pivotului cu pivotul pentru a face pivotul să fie egal cu 1. Obținem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \xrightarrow{-(1/4)L_3 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}. \text{ Acum provocăm zerouri pe coloana}$$

pivotului (coloana a treia):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{3L_3+L_1 \rightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{-6L_3+L_2 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Din cele de mai sus rezultă că matricea este inversabilă. Vom vedea la exercițiul următor cum, parcurgând exact aceleași etape, putem găsi inversa acestei matrice.

$$(b) \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1+L_3 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2L_2+L_1 \rightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{-2L_2+L_3 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ care este forma scară redusă a matricei din enunț.}$$

Deoarece ea este diferită de  $I_3$  (sau, deoarece nu avem decât doi pivoți, matricea din enunț are rangul 2), deci nu este inversabilă.

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_1+L_2 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_1+L_3 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{-L_2+L_1 \rightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3L_2+L_3 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{-1/2 L_3 \rightarrow L_3} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3+L_1 \rightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{-2L_3+L_2 \rightarrow L_2} I_3, \end{aligned}$$

deci matricea din enunț este inversabilă.

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2L_1+L_2 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{-3L_1+L_3 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1+L_4 \rightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{-1/3 L_2 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_1 \rightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{3L_2+L_3 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2L_2+L_4 \rightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{L_3+L_2 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_3+L_4 \rightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{-1/6 L_4 \rightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\underbrace{-2L_4 + L_2 \rightarrow L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \\
& \underbrace{-L_4 + L_3 \rightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4, \text{ deci matricea este inversabilă.}
\end{aligned}$$

4. Folosind metoda Gauss-Jordan, calculați inversele matricelor de mai jos:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

*Rezolvare.*

(a) După cum am văzut în prezentarea teoretică, calcularea inversei matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ revine la rezolvarea a trei sisteme, anume a celor care au}$$

matricele extinse:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \text{ și } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Observăm că dacă am rezolva aceste sisteme cu Metoda Gauss-Jordan, am efectua pentru fiecare din ele exact aceleași operații pe care le-am văzut în exercițiul precedent:

$$\begin{aligned}
& -2L_1 + L_2 \rightarrow L_2, \quad -L_2 \rightarrow L_2, \quad -L_2 + L_1 \rightarrow L_1, \quad -L_2 + L_3 \rightarrow L_3, \\
& -(1/4)L_3 \rightarrow L_3, \quad 3L_3 + L_1 \rightarrow L_1, \quad -6L_3 + L_2 \rightarrow L_2.
\end{aligned}$$

Această observație ne face să descoperim algoritmul de inversare a unei matrice cu metoda Gauss-Jordan: în loc să rezolvăm succesiv aceste trei sisteme, considerăm matricea  $A$  extinsă simultan cu cele trei coloane de termeni liberi care ne interesează:  $e_1, e_2$  și  $e_3$ , adică considerăm matricea  $(A \mid I_3) =$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Prin succesiunea de transformări (pe care le-am folosit la exercițiul 3.a))  $-2L_1 + L_2 \rightarrow L_2, \quad -L_2 \rightarrow L_2, \quad -L_2 + L_1 \rightarrow L_1, \quad -L_2 + L_3 \rightarrow L_3, \quad -(1/4)L_3 \rightarrow L_3, \quad 3L_3 + L_1 \rightarrow L_1, \quad -6L_3 + L_2 \rightarrow L_2$  se ajunge la  $(I_3 \mid A^{-1})$ . Să reluăm pașii de mai sus și să urmărim ce „pățește” matricea din dreapta. Alegem pivot elementul din colțul din stânga-sus. Ca la metoda lui Gauss producem zerouri dedesubtul pivotului.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2L_1+L_2 \rightarrow L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Alegem acum pivot elementul de pe linia a doua, coloana a doua:  $a'_{22} \neq 0$ . Vom înmulți linia a doua cu  $-1$  pentru a face pivotul să fie egal cu 1. Obținem:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-L_2 \rightarrow L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Provocăm acum zerouri pe coloana a doua, nu numai sub pivot, ca la metoda lui Gauss, ci și deasupra acestuia.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-L_2+L_1 \rightarrow L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-L_2+L_3 \rightarrow L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Alegem acum pivot elementul de pe linia a treia, coloana a treia a matricei obținute. Împărțim linia pivotului cu pivotul pentru a face pivotul să fie egal cu 1. Obținem:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}L_3 \rightarrow L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right).$$

Acum provocăm zerouri pe coloana pivotului (coloana a treia):

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{3L_3+L_1 \rightarrow L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{-6L_3+L_2 \rightarrow L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right).$$

În momentul în care am ajuns în stânga la matricea scară redusă a lui  $A$  algoritmul se încheie: dacă această formă scară redusă este  $I$  (ceea ce este cazul la acest exercițiu), atunci matricea obținută în dreapta barei este  $A^{-1}$ ; în caz

contrar, matricea nu este inversabilă.

$$\text{Prin urmare, am obținut că } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

## C. PROBLEME PROPUSE

1. Concatenați următoarele matrice:

- (a)  $\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$   
 (b)  $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix},$   
 (c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & -8 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

*Răspunsuri.* (a)  $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$

(b)  $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix};$

(c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 13 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Fie  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  și  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$ .

- (a) Să se calculeze  $\pi^{-1}, \sigma^{-1}, \pi\sigma, \sigma\pi, \pi^{-1}\sigma^{-1}, \sigma^{-1}\pi^{-1}, (\pi\sigma)^{-1}$  și  $(\sigma\pi)^{-1}$ .  
 (b) Să se calculeze numărul inversiunilor  $m(\pi), m(\sigma)$ , precum și semnatura permutărilor date.  
 (c) Să se determine matricele permutărilor de la punctul (a) și determinanții acestora.  
 (d) Să se calculeze inversele matricelor de la punctul precedent.

(e) Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

- i. Să se calculeze produsele  $P_\pi A$ ,  $P_\sigma A$ ,  $P_{\sigma^2} A$  și  $P_{\sigma\pi^{-1}} A$ .  
ii. Să se determine toate produsele posibile dintre matricele determinate la punctul (c) și matricea  $A$ .

*Răspunsuri.*

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \pi^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\
\pi\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi^{-1}\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\
\sigma^{-1}\pi^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad (\pi\sigma)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma^{-1}\pi^{-1}, \\
(\sigma\pi)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \pi^{-1}\sigma^{-1}; \\
\text{(b)} \quad m(\pi) &= 2, \quad m(\sigma) = 2, \quad \varepsilon(\pi) = \varepsilon(\sigma) = (-1)^2 = 1; \\
\text{(c)} \quad P_\pi &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\det P_\pi = \varepsilon(\pi) = 1, \quad \det P_\sigma = \varepsilon(\sigma) = 1,$$

$$P_{\pi^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det P_{\pi^{-1}} = 1,$$

$$P_{\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det P_{\sigma^{-1}} = 1,$$

$$P_{\pi\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{(\pi\sigma)^{-1}} = P_{\sigma^{-1}\pi^{-1}}, \quad \det P_{\pi\sigma} = 1,$$

$$P_{\sigma\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_{(\sigma\pi)^{-1}} = P_{\pi^{-1}\sigma^{-1}}, \quad \det P_{\sigma\pi} = 1,$$

$$\begin{aligned}
\text{(d)} \quad P_{\pi}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{\pi^{-1}} \\
P_{\sigma}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{\sigma^{-1}}; \\
(P_{\pi^{-1}})^{-1} &= P_{\pi}, (P_{\sigma^{-1}})^{-1} = P_{\sigma}, (P_{\pi\sigma})^{-1} = P_{(\pi\sigma)^{-1}} = P_{\sigma^{-1}\pi^{-1}}, (P_{\sigma\pi})^{-1} = \\
&P_{(\sigma\pi)^{-1}} = P_{\pi^{-1}\sigma^{-1}}; \\
\text{(e)} \quad P_{\pi}A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; P_{\sigma}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \\
\sigma^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, P_{\sigma^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
P_{\sigma^2}A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \sigma\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\
P_{\sigma\pi^{-1}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{\sigma\pi^{-1}}A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

3. Arătați că

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. O *matrice Markov* este o matrice pătratică cu elemente reale  $(a_{ij})$  unde  $a_{ij} \in [0, 1]$ , iar suma elementelor de pe fiecare linie este egală cu 1. Arătați că produsul a două matrice Markov de același tip este o matrice Markov.

*Soluția 1:* Dacă  $A$  și  $B$  sunt matrice Markov de ordin  $n$ , atunci suma elementelor de pe linia  $j$  a produsului  $AB$  este

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \left( \sum_{i=1}^n b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot 1 = 1.$$

*Soluția 2:* Fie  $U$  matricea cu  $n$  linii și o coloană care are toate elementele egale



cu 1. Se verifică ușor că o matrice pătrată  $A$  de ordinul  $n$  este matrice Markov dacă și numai dacă  $AU = U$ . Dacă  $A$  și  $B$  sunt matrice Markov de ordin  $n$ , atunci  $(AB)U = A(BU) = AU = U$ , deci  $AB$  este la rândul ei matrice Markov.

5. Fie  $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$  și  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Să se arate că  $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

6. \* *Urma* matricei  $A \in K^{n \times n}$  este suma elementelor de pe diagonala principală și se notează  $tr(A)$ . Dovediți că pentru orice  $A, B \in K^{n \times n}$

(a)  $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

(b)  $tr(AB) = tr(BA)$ .

7. Fie  $A, B \in K^{n \times n}$  astfel încât  $(A|I_n) \sim (I_n|B)$ . Să se arate că  $B = A^{-1}$ .

8. Arătați că

(a)  $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ .

(b)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

(c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  în  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ .

(d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Să se calculeze produsele  $AB_{:1}$ ,  $AB_{:2}$ ,  $AB_{:3}$ ,  $A_{1:}B$ ,  $A_{2:}B$ ,  $A_{3:}B$  și  $A_{4:}B$ .  
(b) Să se determine matricele  $AB$  și  $(AB_{:1} \mid AB_{:2} \mid AB_{:3})$ .  
(c) Să se calculeze  $B^{-1}$  și  $AB^{-1}$ .

*Răspunsuri.*

(a)  $AB_{:1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ ;  $AB_{:2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $AB_{:3} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;

$A_{1:}B = (1 \ 5 \ -5)$ ;  $A_{2:}B = (5 \ -2 \ -1)$ ;  $A_{3:}B = (7 \ 5 \ -7)$ ;  
 $A_{4:}B = (9 \ 0 \ -1)$ ;

(b)  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 7 & 5 & -7 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ;  $(AB_{:1} \mid AB_{:2} \mid AB_{:3}) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 7 & 5 & -7 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ;

(c)  $B^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -8 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ ;

$AB^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ -2 & -3 & -11 \end{pmatrix}$ .

10. Să se arate că, dacă există produsul  $AB$  și  $B = (B_{:1} \mid B_{:2} \mid \dots \mid B_{:p})$ , atunci  $AB = (AB_{:1} \mid AB_{:2} \mid \dots \mid AB_{:p})$ .

11. Arătați că dacă  $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ,  $n$  impar, verifică  $A^T = -A$ , atunci  $\det A = 0$ .

*Rezolvare.*

$\det A = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$ , de unde  $\det A = 0$ .

12. Se numește *matrice simetrică* o matrice cu proprietatea  $A^T = A$ .
- (a) Arătați că  $B \cdot B^T$  și  $B^T \cdot B$  sunt matrice simetrice,  $\forall B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ .
- (b) Arătați că dacă o matrice simetrică este inversabilă atunci și inversa ei este tot o matrice simetrică.
- (c) Este adevărat că dacă  $A$  și  $B$  sunt două matrice simetrice de același tip, atunci  $AB$  este tot o matrice simetrică? Justificați răspunsul.

*Rezolvare.*

- (a)  $(B \cdot B^T)^T = (B^T)^T \cdot B^T = B \cdot B^T$  și analog cealaltă;
- (b)  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow (A \cdot A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I^T = I \Rightarrow (A^{-1})^T \cdot A^T = A^T \cdot (A^{-1})^T = I$  deci  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$ ;
- (c) Nu. De exemplu  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sunt matrice simetrice, dar  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  nu este o matrice simetrică.

13. Fie  $A, B \in K^{n \times n}$  astfel încât  $(A|B) \sim (I_n|C)$ . Să se arate că  $C = A^{-1}B$ .

14. Determinați inversele matricelor:

- (a)  $\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ;
- (b)  $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ;
- (c)  $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ;
- (d)  $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ .

*Răspunsuri.* (a)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ; (b) nu admite inversă;

(c)  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix}$ ; (d) nu admite inversă.

15. Dovediți că dacă  $\pi, \sigma \in S_n$ , atunci

- (a)  $P_\pi P_\sigma = P_{\sigma\pi}$ .  
 (b)  $P_\pi^T P_\pi = I_n$ .  
 (c)  $P_\pi^T = P_{\pi^{-1}} = P_\pi^{-1}$ .

16. \* Să se descrie în pseudocod algoritmul de aducere a unei matrice la forma scară, respectiv la forma scară redusă.

17. Să se determine o matrice scară și matricea scară redusă pentru următoarele matrice și să se precizeze rangul lor:

(a)  $\begin{pmatrix} 11 & -4 & 3 & 0 \\ 10 & 1 & 2 & -9 \\ 9 & 2 & -4 & 13 \end{pmatrix},$

(b)  $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix},$

(c)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$

(d)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 33 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$

Răspunsuri. (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{53}{287} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{743}{287} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1185}{287} \end{pmatrix}, 3;$

(b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 2;$  (c)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 4;$

(d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -120 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 152 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -151 \end{pmatrix}, 5.$

18. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze:

(a)  $A^{-1}$  și  $A^{-1}B^{-1}$ , unde  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

(b) Să se calculeze produsele  $P_{(1,3)}A$ ,  $E_{13}(-1)A$  și  $E^2(\frac{1}{2})E_{23}(-\frac{1}{2})A$  (unde  $E$  cu diverși indici desemnează matrice elementare).

(c) Să se rezolve sistemul  $Ax = b$ , unde  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

*Răspunsuri.*

(a)  $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $A^{-1}B^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ ;

(b)  $P_{(1,3)}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $E_{13}(-1)A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ;

$E^2(\frac{1}{2})E_{23}(-\frac{1}{2})A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ; (c)  $x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

19. Fie  $A \in K^{n \times n}$  și  $b \in K^{n \times 1}$  astfel încât  $(A|b) \sim (I_n|c)$ . Să se arate că dacă  $x \in K^{n \times 1}$ , atunci ecuația matriceală  $Ax = b$  are soluția  $x = c$ .

20. Să se rezolve prin metoda Gauss în  $\mathbb{R}$  sistemele liniare ale căror matrice extinse sunt:

(a)  $\begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{pmatrix}$ ;

(b)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ ;

(c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

*Răspunsuri.*

$$(a) \mathcal{S} = \left\{ \left( \alpha, \beta, 2 - \frac{27}{13}\alpha + \frac{9}{13}\beta, -1 + \frac{3}{13}\alpha - \frac{1}{13}\beta \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(b) \mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{-6 + 8\beta}{7}, \frac{1 - 13\beta}{7}, \frac{15 - 6\beta}{7}, \beta \right) \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(c) \mathcal{S} = \emptyset.$$

21. \* Să se descrie în pseudocod algoritmi de rezolvare a unui sistem liniar prin metoda Gauss, respectiv prin metoda Gauss-Jordan.

22. \* Fie  $(K, +, \cdot)$  un corp și  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(K)$  astfel încât  $abcd \neq 0$ . Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) există  $\alpha \neq 0$  astfel încât  $A_{:,1} = \alpha A_{:,2}$ ;

(b) există  $\beta \neq 0$  astfel încât  $A_{1,:} = \beta A_{2,:}$ .

23. \* Să se arate că un sistem liniar cu coeficienți reali nu poate să aibă exact două soluții.

*Indicație.* Arătați că dacă  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  sunt soluții ale sistemului atunci și  $\frac{1}{2}(x + x')$  e soluție a sistemului.

24. \* Să se dea un exemplu de sistem liniar care admite exact două soluții.

*Rezolvare:* În  $\mathbb{Z}_2$  sistemul  $x + y = \hat{0}$  are exact două soluții.

25. Să se descompună în produs  $LU$  matricele:

(a)  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$R\ddot{a}s\ddot{p}u\ddot{n}s\ddot{u}r\ddot{i}. \quad (a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{83}{12} \end{pmatrix};$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

22. \* Să se descompună în produs  $PLU$ , unde  $P$  este matricea unei permutări, următoarele matrice.

$$(a) \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(d) \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$(e)^*. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(f)^* \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$Răspunsuri. (a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{7} & 1 & 0 \\ \frac{6}{7} & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 0 & -\frac{9}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{13} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{5}{13} \end{pmatrix};$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{9}{5} & -1 & 1 & 0 \\ \frac{7}{5} & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$(f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & -\frac{11}{5} & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(matricea nu este inversabilă!).

26. \* Dacă  $A$  și  $B$  sunt două matrice pătratice de același tip cu elemente reale atunci egalitatea  $ABAB = O$  implică egalitatea  $BABA = O$ ?



(Concursul „Putnam”, 1990, A-5)

27. \* Fie  $A$  o matrice nesingulară cu elemente dintr-un corp  $K$ . Să se arate ca există două permutări  $\pi, \sigma$  pentru care matricea  $P_\pi A P_\sigma$  este decompozabilă  $LU$ .

28. \* Fie  $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  astfel încât să existe  $x, y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $x$  nenulă, pentru care  $Ax = O$  și  $Ay = Bx$ . Dacă  $A_i$  este matricea obținută prin înlocuirea coloanei  $A_{:,i}$  cu coloana  $B_{:,i}$ , să se arate că

$$\det(A_1) + \det(A_2) + \dots + \det(A_n) = 0.$$

(Concursul „Traian Lalescu”, 2009, etapa finală)

29. \* Fie  $a, b, n$  numere naturale astfel ca  $0 \leq a \leq b \leq n$  și  $0 \leq a + b - n$ . Să se arate că pentru orice număr natural  $c$  cu proprietatea  $a + b - n \leq c \leq a$  există două matrice  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  astfel ca  $\text{rang } A = a$ ,  $\text{rang } B = b$  și  $\text{rang}(AB) = c$ .

(Concursul național studențesc de matematică „Traian Lalescu”, ediția a 7-a, Timișoara, 21-23 mai 2014)

## 2 SPAȚII VECTORIALE

Este momentul să introducem o structură matematică fundamentală - cea de spațiu vectorial - structură care oferă cadrul cel mai adecvat atât pentru algebra liniară, pentru geometrie, pentru analiza matematică, cât și pentru aplicațiile importante ale acestora.

Conceptul de spațiu vectorial - un grup abelian ale cărui elemente se numesc vectori, vectori care, în plus, se pot înmulți cu elemente ale unui corp numite scalari - este o abstractizare a nenumărate alte structuri uzuale.

De exemplu, în spațiul vectorilor studiat în liceu, vectorii se pot aduna între ei (după regula paralelogramului; suma a doi vectori este un vector) și se pot înmulți cu scalari (produsul dintre un număr real și un vector este un vector). Sau, matricele se pot aduna (suma a două matrice de un anumit tip este o matrice de același tip) și se pot înmulți cu scalari (produsul dintre un scalar și o matrice este o matrice). Sau, polinoamele cu coeficienți reali se pot aduna (suma a două polinoame este un polinom) și se pot înmulți cu scalari (produsul dintre un număr real și un polinom este un polinom). Toate aceste exemple sunt generalizate în cele ce urmează.

Frumusețea și puterea unei asemenea abstractizări este dată de larga aplicabilitate a rezultatelor pe care le vom stabili într-un asemenea cadru, și de relativa lor simplitate. Teoria pe care o facem aici va fi aplicată peste tot în următoarele capitole.

### A. TEORIE

#### 1. Definiția spațiului vectorial.

Fie  $(V, +)$  un grup abelian și  $(K, +, \cdot)$  un corp comutativ (de regulă  $K = \mathbb{R}$  - corpul numerelor reale,  $K = \mathbb{C}$  - corpul numerelor complexe, sau  $K = \mathbb{Z}_p$ , unde  $p$  este un număr prim - corpul claselor de resturi modulo  $p$ ). Dacă

$$K \times V \rightarrow V, \quad (\alpha, v) \mapsto \alpha v$$

este o operație care verifică axiomele:

$$(a) \quad \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w,$$

$$(b) \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v,$$

$$(c) \quad \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \text{ și}$$

(d)  $1v = v$ , (unde 1 este elementul neutru față de înmulțirea din corpul  $K$ ),

pentru orice  $\alpha, \beta \in K$  și pentru orice  $v, w \in V$  spunem că pe  $V$  s-a definit o structură de **spațiu vectorial** (sau **liniar**) peste corpul  $K$ , sau că  $V$  este **spațiu vectorial (liniar) peste corpul  $K$** .

Folosim terminologia și notațiile următoare:

- elementele grupului  $V$  se numesc *vectori*;
- elementele corpului  $K$  se numesc *scalari*;
- operația  $K \times V \rightarrow V$ ,  $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$  o numim *înmulțirea scalarilor cu vectori*;
- spunem că operația de adunare a vectorilor este o *operație internă* (deoarece suma a doi vectori este un vector);
- spunem că operația de înmulțire a scalarilor cu vectori este o *operație externă* (adică pentru orice element  $\alpha$  al corpului  $K$  și pentru orice element  $v$  al grupului  $V$  s-a definit produsul  $\alpha v \in V$ , sau, produsul dintre un scalar și un vector este un vector);
- în lipsa altor precizări notăm cu  $\theta$  elementul neutru al grupului  $(V, +)$  (adică *vectorul nul*), cu  $-v$  simetricul (opusul) vectorului  $v$ , cu 0 elementul neutru (*scalarul nul*) al grupului  $(K, +)$ , iar cu 1 elementul neutru al grupului  $(K^*, \cdot)$ , unde  $K^* := K \setminus \{0\}$ ;
- notația  $V/K$  indică faptul că  $V$  este spațiu liniar peste corpul  $K$ ;
- când  $K = \mathbb{R}$  spunem că  $V/K$  este *spațiu vectorial real*, iar când  $K = \mathbb{C}$  spunem că  $V/K$  este *spațiu vectorial complex*;
- un spațiu liniar format cu un singur vector (vectorul nul!) se numește *spațiu trivial*.

Câteva proprietăți elementare pe care le folosim frecvent sunt demonstrate mai jos.

**Proprietatea 2.1.1.** Fie  $V/K$  un spațiu vectorial,  $\alpha \in K$  și  $v \in V$ . Atunci:

- (a)  $0v = \theta$ , adică produsul dintre scalarul nul și un vector oarecare este vectorul nul;
- (b)  $\alpha\theta = \theta$ , adică produsul dintre un scalar oarecare și vectorul nul este vectorul nul;
- (c)  $(-1)v = -v$ , adică produsul dintre scalarul  $-1$  și vectorul  $v$  este opusul vectorului  $v$ ;
- (d)  $\alpha v = \theta \Rightarrow \alpha = 0$  sau  $v = \theta$ , adică produsul dintre un scalar și un vector este nul dacă și numai dacă scalarul este nul sau vectorul din produs este nul;

- (e) Dacă  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$  și  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  atunci  
 $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \in V$ .  
 Un vector de forma

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

cu  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$  se numește **combinație liniară** a vectorilor  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

**Demonstrație.** Folosim axiomele spațiului liniar.

- (a)  $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$ , de unde obținem  $0v = \theta$ .  
 (b)  $\alpha\theta = \alpha(\theta + \theta) = \alpha\theta + \alpha\theta$ , de unde obținem imediat  $\alpha\theta = \theta$ .  
 (c)  $\theta = 0v = (1 - 1)v = 1v + (-1)v = v + (-1)v$ , de unde obținem imediat că  $(-1)v = -v$ .  
 (d) Presupunem că  $\alpha v = \theta$  și că  $\alpha \neq 0$ . Atunci  $\alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}\theta = \theta$ , deci  $(\alpha^{-1}\alpha)v = \theta$ , adică  $v = \theta$ .  
 (e) Se demonstrează prin inducție matematică.

## 2. Exemple de spații vectoriale.

- (a) *Mulțimea vectorilor legați*, având același punct de aplicație, notat  $O$ , din spațiul fizic  $\mathcal{S}$ , adică  $V = \{\overrightarrow{OA} \mid A \in \mathcal{S}\}$ , studiați la fizică este un spațiu liniar peste corpul numerelor reale. La matematică ați studiat numai vectori în plan. În spațiu, adunarea vectorilor  $\overrightarrow{OA}$  și  $\overrightarrow{OB}$  se definește ca și în plan ținând cont de faptul că punctele  $O, A, B$  sunt coplanare, iar adunarea vectorilor necoliniari este definită prin regula paralelogramului (sau a triunghiului).
- (b) *Spațiul aritmetic*  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ , unde  $\mathbb{R}^n$  este mulțimea  $n$ -uplurilor de numere reale, i.e.

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

(notația consacrată în Computer Science pentru  $n$ -uplul  $x \in \mathbb{R}^n$  este cea din  $\mathbb{R}^{n \times 1} := \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ; de aceea vom scrie uneori și noi, prin abuz de notație,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ); adunarea vectorilor și înmulțirea cu scalari sunt definite prin

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

respectiv

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

pentru orice  $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  și pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
 Mai general:

(c) *Spațiul*  $K^n/K$ , unde  $(K, +, \cdot)$  este un corp comutativ; într-adevăr,

$$K^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in K\}$$

cu operațiile, internă și externă, definite ca la spațiul aritmetic, adică  
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$  și  
 $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

pentru orice  $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in K^n$  și orice  $\alpha \in K$ , este un spațiu liniar peste corpul  $K$ .

În particular, pentru corpul  $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ , obținem spațiul vectorial al  $n$ -uplurilor de elemente din  $\mathbb{Z}_2$  - numite *șiruri de  $n$  biți* (ori „stringuri” de  $n$  biți)

$$\mathbb{Z}_2^n = \{b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \mid b_i \in \mathbb{Z}_2, i = \overline{1, n}\};$$

suma șirurilor  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n), c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  este șirul  
 $b + c = (b_1 \oplus c_1, b_2 \oplus c_2, \dots, b_n \oplus c_n),$

unde „ $\oplus$ ” este adunarea modulo 2 (operația XOR între biți):

$$0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 0 + 0 = 0,$$

iar șirul  $\theta = (0, 0, \dots, 0)$  este vectorul nul; produsul scalarului  $\alpha \in \mathbb{Z}_2$  cu șirul  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  este

$\alpha b = (\alpha \cdot b_1, \alpha \cdot b_2, \dots, \alpha \cdot b_n)$ , unde pe componente am folosit înmulțirea modulo 2 :  $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$  și  $1 \cdot 1 = 1$ .

(d) Dacă  $A$  este o mulțime, iar  $(K, +, \cdot)$  este un corp comutativ, atunci *mulțimea*

$$\mathcal{F}(A) = \{f : A \rightarrow K \mid f \text{ este funcție}\}$$

admite o structură de spațiu vectorial peste  $K$  relativ la adunarea funcțiilor din  $\mathcal{F}(A)$  (pentru  $f, g \in \mathcal{F}(A)$  suma  $f + g \in \mathcal{F}(A)$  este definită punctual prin

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in A,$$

respectiv, înmulțirea cu scalari - pentru  $f \in \mathcal{F}(A)$  și  $\alpha \in K$  produsul  $\alpha f \in \mathcal{F}(A)$  se definește prin

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in A.$$

În electronică se studiază *spațiul vectorial real al semnalelor în timp continuu*  $\mathcal{F}(\mathcal{T})/\mathbb{R}$  și *spațiul vectorial complex al semnalelor în timp continuu*  $\mathcal{F}(\mathcal{T})/\mathbb{C}$ , unde  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$  este, de regulă, un interval de numere reale.

Dacă impunem ca  $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}$  atunci  $\mathcal{F}(\mathcal{T})/\mathbb{R}$ , respectiv  $\mathcal{F}(\mathcal{T})/\mathbb{C}$  este spațiu vectorial real, respectiv complex de *semnale discrete*.

Dacă  $T = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$  este spațiul șirurilor de elemente din  $K$ .

- (e) Dacă  $A$  este o mulțime de numere reale atunci *mulțimea*

$$\mathcal{C}^0(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este funcție continuă}\}$$

înzestrată cu operațiile de adunare a funcțiilor, respectiv, de înmulțire a acestora cu numere reale (adică operațiile din  $\mathcal{F}(A)/\mathbb{R}$ ) este spațiu vectorial peste  $\mathbb{R}$ .

- (f) *Mulțimea matricelor*  $K^{m \times n}$ , unde  $(K, +, \cdot)$  este un corp comutativ, devine un spațiu liniar relativ la operațiile de adunare a matricelor (operația internă) și de înmulțire a acestora cu elemente din  $K$  (operația externă).
- (g) Fie  $A \in K^{m \times n}$ , unde  $(K, +, \cdot)$  este un corp comutativ. *Mulțimea*  $\text{Null}(A)$  a soluțiilor sistemului liniar și omogen  $Ax = 0$  înzestrată cu operațiile din spațiul  $K^{n \times 1}/K$  este un spațiu vectorial peste corpul  $K$ .

### 3. Subspații vectoriale.

Așa cum s-a analizat la grupuri noțiunea de subgrup, la inele noțiunea de subinel, ori la corpuri noțiunea de subcorp - și aici, în cazul spațiilor vectoriale, ne punem problema: *în ce condiții o submulțime  $S$  a unui spațiu liniar  $V/K$ , este, la rândul ei, un spațiu vectorial peste corpul  $K$  relativ la restricțiile operațiilor, internă, respectiv, externă.*

**Definiția 2.3.1.** Fie  $V/K$  un spațiu liniar și  $S$  o submulțime a sa. Dacă  $(S, +)$  este subgrup al grupului  $(V, +)$ , iar

$$\alpha v \in S \quad \forall \alpha \in K \quad \text{și} \quad v \in S$$

spunem că  $S$  este *subspațiu vectorial (liniar)* al spațiului  $V$ ; indicăm faptul că  $S$  este subspațiu vectorial al spațiului  $V$  prin *notația*  $S \leq V$ .

Exemplul 2.(e) arată că mulțimea funcțiilor continue pe mulțimea  $A$ , privită ca submulțime în  $\mathcal{F}(A)$  este spațiu vectorial relativ la operațiile din spațiul  $\mathcal{F}(A)/\mathbb{R}$ , deci, cu notația introdusă, avem  $\mathcal{C}^0(A) \leq \mathcal{F}(A)$ .

Exemplul 2.(g) arată că, în spațiul  $K^{n \times 1}/K$ , avem  $\text{Null}(A) \leq K^{n \times 1}$ ;  $\text{Null}(A)$  se numește *spațiul nul al matricei*  $A$ , iar ecuațiile sistemului  $Ax = 0$ , (unde  $x \in K^{n \times 1}$ ) se numesc *ecuațiile spațiului*  $\text{Null}(A)$ .

**Propoziția 2.3.1.** Fie  $S$  o submulțime nevidă din spațiul  $V/K$ .

*Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (a)  $S \leq V$ ;
- (b) *pentru orice vectori*  $u, v \in S$  *și pentru orice scalar*  $\alpha \in K$  *avem*  $u + v \in S$  *și*  $\alpha u \in S$ ;
- (c) *pentru orice vectori*  $u, v \in S$  *și pentru orice scalari*  $\alpha, \beta \in K$  *avem*  $\alpha u + \beta v \in S$ .

Aplicând inductiv afirmația (c) din propoziția de mai sus, rezultă că o *submulțime*  $S$  a unui spațiu vectorial  $V$  este *subspațiu* dacă și numai dacă orice combinație liniară de vectori din  $S$  rămâne în  $S$ .

**Exercițiul 1.** Să arătăm că

$$S := \left\{ A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a + 2b = c \right\} \leq \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Folosim propoziția de mai sus (punctul (c)). Considerăm doi vectori arbitrari  $A(a, b, c)$ ,  $A(a', b', c') \in S$  și doi scalari arbitrari  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . În combinația liniară  $\alpha A(a, b, c) + \beta A(a', b', c') = A(\alpha a, \alpha b, \alpha c) + A(\beta a', \beta b', \beta c') = A(\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b', \alpha c + \beta c')$  avem, conform ipotezei,  $\alpha c + \beta c' = \alpha(a + 2b) + \beta(a' + 2b') = \alpha a + \beta a' + 2(\alpha b + \beta b')$ , ceea ce indică faptul că  $\alpha A(a, b, c) + \beta A(a', b', c') \in S$ . Prin urmare  $S$  este subspațiu vectorial al spațiului  $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}$ .

#### 4. Exemple de subspații vectoriale.

- (a) Dacă  $\theta$  este vectorul nul din spațiul  $V/K$  atunci  $\{\theta\} \leq V$ ; subspațiul  $\{\theta\}$  se numește *subspațiul nul* al spațiului  $V$ . De asemenea  $V \leq V$ . Subspațiile  $\{\theta\}$  și  $V$  se numesc *subspații triviale* ale spațiului  $V$ . Un subspațiu  $S$  diferit de subspațiile triviale se numește *subspațiu propriu*. Subspațiul  $S$  de la Exercițiul 1 este un subspațiu propriu al spațiului  $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}$ .
- (b) Fie  $V$  spațiul vectorial al vectorilor legați de origine în spațiul 3D. Mulțimea  $S$  a vectorilor situați în planul  $xOy$  este un subspațiu vectorial al lui  $V$ . Mai mult, totalitatea vectorilor din  $V$  aflați într-un plan ce conține originea este subspațiu al lui  $V$ .
- (c) *Spațiul  $C$  al șirurilor convergente* de numere reale este un subspațiu în spațiul șirurilor de numere reale  $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ . Într-adevăr, suma a două șiruri convergente este un șir convergent, iar produsul cu un scalar al unui șir convergent este tot un șir convergent. Spațiul șirurilor de numere reale care tind la 0 este și el un subspațiu vectorial al lui  $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ , dar și al lui  $C$ , aceasta deoarece  $x_n \rightarrow 0$ ,  $y_n \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha x_n + \beta y_n \rightarrow 0$  pentru orice  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- (d) Dacă  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$ , unde  $V$  este spațiu vectorial peste corpul  $K$ , mulțimea tuturor combinațiilor liniare ale vectorilor din  $S$  notată  $\text{span}(S)$  este un subspațiu vectorial al spațiului  $V$  (deci  $\text{span}(S) \leq V$ ) numit *subspațiul generat de sistemul de vectori  $S$* . Dacă  $\text{span}(S) = V$ , atunci  $S$  se numește *sistem de generatori pentru spațiul  $V$* .

- (e) În particular, dacă  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sunt coloanele matricei  $A = [c_1 | \dots | c_n] \in K^{m \times n}$ , subspațiul  $\text{span}(c_1, \dots, c_n)$  al lui spațiului  $K^{m \times 1}/K$  îl numim *subspațiul coloanelor matricei  $A$*  și îl vom nota  $\text{Col}(A)$ .

Cu matricea  $A$  de mai sus definim patru subspații vectoriale:

- i. spațiul nul al matricei  $A$ , adică  $\text{Null}(A) \leq K^{n \times 1}$ ,
- ii. spațiul generat de liniile sale  $\text{Lin}(A) := \text{Col}(A^T) \leq K^{n \times 1}$ ,
- iii. spațiul nul al matricei transpuse  $\text{Null}(A^T) \leq K^{m \times 1}$  și
- iv. spațiul coloanelor  $\text{Col}(A) \leq K^{m \times 1}$ .

Aceste patru subspații se mai numesc cele patru *(sub)spații fundamentale definite de matricea  $A$* .

- (f) Fie  $U$  și  $W$  două subspații vectoriale ale spațiului  $V/K$ . Atunci:

- i.  $U \cap W \leq V$ , adică *intersecția a două subspații este subspațiu*;
- ii.  $U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\} \leq V$ . Subspațiul  $U + W$  se numește *suma subspațiilor  $U$  și  $W$* . Analog se definește suma mai multor subspații.
- iii. Dacă suma subspațiilor  $U$  și  $W$  are proprietatea:

$$\forall v \in U + W \quad \exists! u \in U \text{ și } \exists! w \in W \text{ astfel încât } v = u + w,$$

atunci notăm suma  $U + W$  cu

$$U + W := U \oplus W$$

și numim această mulțime *suma directă* a subspațiilor  $U$  și  $W$ . Dacă  $V = U \oplus W$  spunem că  $U$  și  $W$  sunt *subspații suplementare*. (Simbolul  $\exists!$  este o prescurtare a sintagmei „*există și este unică*”). Mai general:

- iv. Dacă  $U_1, U_2, \dots, U_m \leq V$ , atunci suma subspațiilor  $U_1, U_2, \dots, U_m$  este subspațiu, adică

$$U_1 + U_2 + \dots + U_m := U \leq V;$$

dacă, în plus,  $\forall v \in U \quad \exists! u_i \in U_i, i = \overline{1, m}$  astfel încât  $v = u_1 + u_2 + \dots + u_m$ , subspațiul  $U$  se numește *suma directă* a subspațiilor  $U_1, U_2, \dots, U_m$  și scriem

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m := \bigoplus_{i=1}^m U_i.$$

**Exercițiul 2.** Fie  $A(a, b, c) \in S$ , unde  $S$  este subspațiul de la Exercițiul 1. Deoarece

$$A(a, b, c) = A(a, b, a + 2b) = aA(1, 0, 1) + bA(0, 1, 2)$$

rezultă că

$$S = \text{span}(A(1, 0, 1), A(0, 1, 2)).$$



Tehnica de obținere a unui sistem de generatori pentru subspațiul  $S$  - numită *parametrizare* (am utilizat legătura dintre parametrii  $a, b$  și scalarul  $c = a + 2b$ ) - va fi folosită adesea în cele ce urmează.

Mai mult, observăm că

$$S = \text{span}(A(1, 0, 1)) + \text{span}(A(0, 1, 2)),$$

iar dacă

$$A(a, b, c) \in \text{span}(A(1, 0, 1)) + \text{span}(A(0, 1, 2))$$

atunci  $A(a, 0, a) \in \text{span}(A(1, 0, 1))$ , respectiv  $A(0, b, 2b) \in \text{span}(A(0, 1, 2))$  sunt unicele matrice din  $\text{span}(A(1, 0, 1))$  respectiv  $\text{span}(A(0, 1, 2))$  pentru care  $A(a, b, c) = A(a, 0, a) + A(0, b, 2b)$ . În consecință  $S$  este suma directă a subspațiilor  $\text{span}(A(1, 0, 1))$  și  $\text{span}(A(0, 1, 2))$ .

De fapt avem

$$\text{span}(A(1, 0, 1)) \cap \text{span}(A(0, 1, 2)) = \left\{ \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

condiție care asigură faptul că  $\text{span}(A(1, 0, 1))$  și  $\text{span}(A(0, 1, 2))$  sunt subspații suplimentare pentru spațiul vectorial  $S$ .

În general are loc următoarea caracterizare a sumelor directe.

**Propoziția 2.4.1.** Fie  $U_1, U_2, \dots, U_m$  subspații vectoriale ale spațiului  $V/K$ . Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a)  $U_1 + U_2 + \dots + U_m = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$ ;
- (b)  $U_i \cap (U_1 + U_2 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_m) = \{\theta\}$ , pentru  $i = \overline{1, m}$ .

## 5. Dependență și independență liniară.

**Definiția 2.5.1.** Fie  $V/K$  un spațiu vectorial.

- (a) Vectorii  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  sunt *liniar dependenți* dacă există  $n$  scalari  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ , nu toți nuli, astfel încât

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \theta; \quad (*)$$

în acest caz mai spunem că mulțimea  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  este un *sistem de vectori liniar dependenți* (sau că  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  este un *sistem liniar dependent*), iar relația (\*) este o *relație de dependență liniară* (pentru vectorii  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ); dacă, de exemplu, am determinat scalarii  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , cu  $\alpha_1 \neq 0$ , care satisfac relația (\*) atunci

$$v_1 = -\alpha_1^{-1}(\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n)$$

este de asemenea o *relație de dependență liniară*;

cu alte cuvinte, vectorii  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  sunt liniar dependenți dacă (măcar) unul dintre vectorii  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  se scrie ca o combinație liniară a celorlalți (faptul că în relația de dependență liniară (\*) măcar unul dintre coeficienții  $\alpha_i$  este nenul, ne permite să scriem vectorul corespunzător ca o combinație liniară a celorlalți).

- (b) vectorii  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sunt *liniar independenți* dacă nu sunt liniar dependenți, i.e. are loc implicația

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \theta, \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0;$$

mai spunem, în acest caz, că  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  este un *sistem de vectori liniar independenți* (sau *sistem liniar independent*).

Altfel spus: considerăm în spațiul  $V/K$  ecuația (\*) de necunoscute  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ .

- Dacă ecuația admite soluții nebanale, atunci  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  este un sistem de vectori liniar dependenți.
- Dacă ecuația admite doar soluția banală, atunci  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  este un sistem de vectori liniar independenți.

**Observația 2.5.1.** Orice sistem de vectori care conține vectorul nul este un sistem liniar dependent.

**Exemplul 2.5.1.** În spațiul vectorial al vectorilor legați din plan, doi vectori nenuli  $u$  și  $v$  vor fi liniar independenți dacă și numai dacă sunt necoliniari, căci relația de dependență liniară  $u = \alpha v$  implică faptul că ei sunt coliniari. În schimb trei vectori legați din plan  $u, v, w$  vor fi întotdeauna liniar dependenți pentru că putem găsi  $\alpha u$  coliniar cu  $u$  și  $\beta v$  coliniar cu  $v$  astfel încât  $w$  să fie diagonala paralelogramului construit pe  $\alpha u$  și  $\beta v$ .

**Exercițiul 3.** Fie  $v_1 = (1, 1, 2)$ ,  $v_2 = (1, -2, -1)$ ,  $v_3 = (2, 3, \alpha)$  trei vectori din spațiul vectorial  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ , unde  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Să analizăm dependența/independența sistemului  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ .

Conform definiției, considerăm, în  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ , ecuația

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = \theta, \quad (1)$$

unde  $\theta = (0, 0, 0)$  și necunoscutele sunt scalarii  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ; trebuie să aflăm dacă ecuația are doar soluția banală  $x = y = z = 0$  (ceea ce indică liniar independența vectorilor  $v_1, v_2, v_3$ ) sau are mai multe soluții (ceea ce înseamnă dependența liniară a sistemului  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ ). Deoarece

$$(1) \Leftrightarrow (x, x, 2x) + (y, -2y, -y) + (2z, 3z, \alpha z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x + y + 2z, x - 2y + 3z, 2x - y + \alpha z) = (0, 0, 0)$ ,  
 rezultă că relația (1) este echivalentă cu sistemul liniar omogen:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + \alpha z = 0 \end{cases} . \quad (2)$$

Conform teoriei sistemelor liniare și omogene, problema noastră este acum să determinăm rangul matricei sistemului:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

matrice care se obține prin concatenarea coloanelor  $v_1^T, v_2^T, v_3^T$ . Avem două posibilități:

- dacă rangul este 3, sistemul este compatibil determinat, i.e. unica soluție este  $x = y = z = 0$  (soluția banală), caz în care  $S$  este un sistem de vectori liniar independent;
- dacă rangul este mai mic decât 3, sistemul admite și soluții nebanale, deci  $S$  este un sistem de vectori liniar dependent, iar o relație de dependență liniară se poate determina cu ajutorul matricei scară redusă. (O relație de dependență liniară este dată de scrierea relației  $xv_1 + yv_2 + zv_3 = \theta$ , cu  $(x, y, z)$  o soluție nebanală a sistemului (2). O asemenea soluție se poate obține rezolvând sistemul (2), de exemplu, cu metoda lui Gauss-Jordan.)

Cu transformările elementare pe linii  $-L_1 + L_2 \rightarrow L_2$  și  $-L_1 - L_2 + L_3 \rightarrow L_3$  obținem

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 5 \end{pmatrix};$$

matricea obținută are forma scară, furnizează rangul ( $\text{rang}(A) =$  numărul pivoților) și, implicit, tranșează natura sistemului  $S$ :

- dacă  $\alpha \neq 5$  atunci  $\text{rang}(A) = 3$ , deci  $S$  este liniar independent;
- dacă  $\alpha = 5$  atunci  $\text{rang}(A) = 2$ , deci  $S$  este liniar dependent; în acest caz, continuând cu transformările elementare  $-\frac{1}{3}L_2 \rightarrow L_2$  și  $-L_2 + L_1 \rightarrow L_1$  obținem forma scară redusă a matricei  $A$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

observăm că a treia coloană se poate exprima ca o combinație liniară a coloanelor care conțin pivoții:

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

observăm că și în matricea  $A$  coloana a III-a se poate exprima ca o combinație liniară a primelor două coloane folosind de asemenea coeficienții  $\frac{7}{3}$ , respectiv  $-\frac{1}{3}$ :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{7}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_3 = \frac{7}{3} v_1 - \frac{1}{3} v_2,$$

adică am obținut o relație de dependență liniară a vectorilor dați.

**Observația 2.5.2.** Aici am folosit o proprietate importantă a formei scară redusă: *forma scară redusă păstrează combinațiile liniare de coloane ale unei matrice*. Mai precis, o coloană a unei matrice  $A$  se poate scrie ca o combinație liniară de alte coloane ale matricei dacă și numai dacă aceeași combinație liniară are loc și între coloanele de pe aceleași poziții ale formei scară redusă  $S_A^0$  a matricei  $A$ . Tehnica utilizată în acest exercițiu este aplicabilă în  $K^n/K$  și o sintetizăm în criteriul următor.

## 6. Criteriul practic de dependență în $K^n/K$ .

Vectorii  $v_1, v_2, \dots, v_m \in K^n$  sunt liniar dependenți dacă și numai dacă rangul matricei  $A = (v_1^T \mid v_2^T \mid \dots \mid v_m^T)$  este diferit de  $m$ ; mai mult, deoarece transformările elementare pe linie conservă rangul și relațiile de dependență liniară, dacă  $S_A$  este forma scară redusă a matricei  $A$ , rezultă că:

- (a) dacă numărul de pivoți din  $S_A$  coincide cu numărul de vectori,  $m$ , atunci vectorii sunt liniar independenți;
- (b) dacă numărul  $r$  de pivoți din matricea  $S_A$  este diferit de numărul vectorilor (adică  $r \neq m$ ), atunci vectorii  $v_1, v_2, \dots, v_m$  sunt liniar dependenți; în cazul în care vectorul nul nu este printre vectorii dați, atunci
  - i. pozițiile pivoților sunt  $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (r, j_r)$ ;
  - ii. vectorii  $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r}$  sunt liniar independenți;
  - iii. ceilalți vectori sunt combinații liniare ale vectorilor  $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r}$ , combinații care se citesc din coloanele matricei  $S_A$ ; de exemplu, dacă în matricea  $S_A$  avem coloana  $S_{:j} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)^T$  (cu  $j \notin \{j_1, \dots, j_r\}$ ), atunci  $v_j = \alpha_1 v_{j_1} + \alpha_2 v_{j_2} + \dots + \alpha_r v_{j_r}$ .

**Exercițiul 4.** Fie  $v_1 = (1, 1, 2, 1)$ ,  $v_2 = (1, -2, -1, 2)$ ,  $v_3 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $v_4 = (0, 1, 1, 0)$ ,  $v_5 = (0, 0, 1, 1)$  vectori în spațiul vectorial  $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}$ .

- (a) Să se arate că  $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  este sistem de vectori liniar dependenți.
- (b) Să se determine numărul maxim  $m$  de vectori liniar independenți din mulțimea  $M$  și să se indice o submulțime  $M_m \subset M$  de  $m$  astfel de vectori.
- (c) Este  $M_m$  unica submulțime de  $m$  vectori liniar independenți din  $M$ ?
- (d) Să se exprime vectorii din  $M \setminus M_m$  ca și combinații liniare ale vectorilor din  $M_m$ . Sunt unice aceste exprimări?

*Rezolvare.* Folosim criteriul practic. Pentru aceasta formăm matricea  $A$  prin concatenarea matricelor coloană corespunzătoare vectorilor dați, urmând să o aducem la forma scară redusă; pentru că urmărim să obținem o matrice superior triunghiulară, vom concatena vectorii dați într-o ordine care ne ușurează prelucrarea prin transformări elementare. De exemplu, formăm matricea

$$A = (v_3^T \mid v_4^T \mid v_5^T \mid v_1^T \mid v_2^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Deoarece rangul matricei  $A$  este mai mic decât 5 rezultă că  $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  este sistem de vectori liniar dependenți.
- (b) Pentru a determina numărul  $m$  aducem  $A$  la forma scară redusă; obținem

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Forma scară redusă are 4 pivoți, deci rangul matricei  $A$  este 4, iar  $m = 4$ . Pivoții se găsesc pe primele patru coloane, prin urmare am obținut submulțimea maximală de vectori liniar independenți  $M_4 = \{v_3, v_4, v_5, v_1\}$ .

- (c) De exemplu, matricea

$$(v_2^T \mid v_4^T \mid v_5^T \mid v_1^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

are, de asemenea, rangul egal cu 4; rezultă că și submulțimea  $\{v_1, v_2, v_4, v_5\} \neq M_4$  e formată din patru vectori liniar independenți.

- (d) Deoarece în forma scară redusă coloana a cincea se poate exprima în funcție de celelalte coloane:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obținem, corespunzător, exprimarea ultimei coloane din matricea  $A$  în funcție de primele patru coloane, deci  $v_2 = v_3 - 3v_4 + 2v_5$ . Exprimarea lui  $v_2$  este unică; într-adevăr dacă  $v_2 = \alpha v_3 + \beta v_4 + \gamma v_5 + \delta v_1$ , (cu  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ) urmează că  $\alpha v_3 + \beta v_4 + \gamma v_5 + \delta v_1 = v_3 - 3v_4 + 2v_5$ , sau echivalent,  $(\alpha - 1)v_3 + (\beta + 3)v_4 + (\gamma - 2)v_5 + \delta v_1 = 0$ ; dar vectorii  $v_1, v_3, v_4, v_5$  sunt liniar independenți și, în consecință, scalarii care intervin în combinație sunt toți nuli, adică  $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 2$  și  $\delta = 0$ .

**Observație.** Corpul scalarilor este esențial în stabilirea liniar independenței, după cum putem vedea din exemplul de mai jos.

**Exercițiul 5.** Studiați liniar independența vectorilor  $v_1 = 1$  și  $v_2 = i$  în spațiile vectoriale  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  și  $\mathbb{C}/\mathbb{C}$ .

*Rezolvare.* În  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  liniar independența revine la a studia dacă  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  implică  $\alpha = \beta = 0$ . Egalând părțile reale, apoi pe cele imaginare în egalitatea de numere complexe  $\alpha + i\beta = 0$  se obține  $\alpha = \beta = 0$ , deci  $1, i$  sunt liniar independenți.

În  $\mathbb{C}/\mathbb{C}$  liniar independența revine la a studia dacă  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  implică  $\alpha = \beta = 0$ . Acest lucru nu se întâmplă: de exemplu  $\alpha = -i, \beta = 1$  stabilesc relația de dependență liniară  $v_2 = i \cdot v_1$ . Prin urmare, în acest spațiu vectorial, vectorii  $v_1, v_2$  nu sunt liniar independenți.

## 7. Baze. Caracterizări.

**Definiția 2.7.1.** Spunem că sistemul ordonat de vectori

$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset V$  este **bază pentru spațiul**  $V/K$  dacă

- (a) sistemul  $B$  este liniar independent;
- (b)  $B$  este sistem de generatori (i.e.  $\text{span}(B) = V$ ).

**Exemple 2.7.1.**

- (a) În spațiul aritmetic  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$  mulțimea

$$\{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

este o bază numită *baza canonică*.

(b) Mai general, în spațiul  $K^n/K$  mulțimea

$$\{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

este o bază numită *baza canonică* (ca de obicei, 1 este elementul neutru al grupului abelian  $(K^* = K \setminus \{0\}, \cdot)$ ).

(c) În spațiul  $K^{m \times n}/K$  mulțimea  $B = \{e_{ij} \mid i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$  unde

$$\begin{aligned} e_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\ \dots, \quad e_{1n} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\ \dots, \quad e_{2n} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

este o bază numită *baza canonică*.

(d) În spațiul funcțiilor polinomiale de grad mai mic sau egal cu  $n$ ,  $\mathbb{R}_n[x]/\mathbb{R}$ , mulțimea

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

este o bază numită *baza canonică*.

**Exercițiul 5.** La Exercițiul 1 am văzut că

$$S = \left\{ A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a + 2b = c \right\}$$

este un subspațiu vectorial al spațiului  $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}$ ; la Exercițiul 2 am constatat (folosind tehnica parametrizării) că vectorii  $A(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(0, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  generează spațiul  $S$ . Deoarece

$$\text{span}(A(1, 0, 1)) \cap \text{span}(A(0, 1, 2)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

rezultă că cei doi vectori sunt liniar independenți. În consecință mulțimea  $\{A(1, 0, 1), A(0, 1, 2)\}$  este o bază pentru spațiul  $S$ .

**Propoziția 2.7.1.** Fie  $V/K$  un spațiu vectorial și  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset V$  o bază a sa.

- (a) Orice vector  $v \in V$  se exprimă în mod unic ca o combinație liniară a vectorilor (ordonați, după indicii  $1, 2, \dots$ ) din bază, i.e. există și sunt unici scalarii  $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$  astfel încât  $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ ; scalarii  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se numesc **coordonatele vectorului**  $v$  în baza  $B$ .
- (b) Orice altă bază a spațiului  $V/K$  are același număr de vectori.

**Definiția 2.7.2.** Numărul vectorilor dintr-o bază a spațiului  $V/K$  se numește **dimensiunea spațiului** vectorial  $V/K$ ; vom scrie  $\dim(V) = n$ . Dacă  $V$  este spațiul nul atunci  $\dim(V) = 0$ .

Există spații care conțin un număr infinit de vectori liniar independenți (i.e. există  $n$  vectori liniar independenți oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

De exemplu vectorii  $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$  sunt liniar independenți în spațiul real al tuturor polinoamelor cu coeficienți reali pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Obiectul Algebrei liniare este studiul spațiilor finit dimensionale.

**Exemple 2.7.2.** Ținând cont de bazele canonice prezentate mai sus rezultă că:

- (a) dimensiunea spațiului  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$  este  $n$ ;
- (b) dimensiunea spațiului  $K^n/K$  este  $n$ ;
- (c) dimensiunea spațiului  $K^{m \times n}/K$  este  $nm$ ;
- (d) dimensiunea spațiului  $\mathbb{R}_n[x]/\mathbb{R}$  este  $n + 1$ ;
- (e) în  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  baza canonică este  $\{1, i\}$ , deci  $\dim(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = 2$ ;
- (f) spațiul vectorilor din plan are baza canonică  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ , deci dimensiunea acestuia este 2.

La Exercițiul 5 am arătat de fapt că  $\dim(S) = 2$ .

**Teorema 2.7.1.** Fie  $V/K$  un spațiu vectorial și  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset V$  un sistem de vectori. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) sistemul  $B$  este o bază pentru spațiul  $V/K$ ;
- (b)  $B$  este un **sistem maximal de vectori liniar independenți**, adică sistemul  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, u\}$  este liniar dependent, oricare ar fi vectorul  $u \in V$ ;
- (c) orice vector  $v \in V$  se exprimă în mod unic ca o combinație liniară a vectorilor din sistemul  $B$ .

## 8. Schimbări de baze

Am văzut că într-un spațiu vectorial există, în general, mai multe baze (dintre exemplele date doar  $\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2$  are o singură bază). Răspundem aici la întrebarea: care este legătura dintre coordonatele unui vector relativ la două baze?



asfel ca  $e'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$  pentru orice  $j \in \{1, \dots, n\}$ , adică

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n \\ \vdots \\ e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{cases}$$

Prin urmare matricea de trecere este

$$T_{BB'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} = T_{BB'}^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = T_{B'B}^T \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = T_{B'B}^T T_{BB'}^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{Si}}{=} \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} = T_{BB'}^T T_{B'B}^T \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix}.$$
$$T_{B'B}T_{BB'} = T_{BB'}T_{B'B} = I_n.$$
$$T_{B'B}^{-1} = T_{BB'}.$$

Dacă  $B'' = \{e''_1, e''_2, \dots, e''_n\}$  este o altă bază în spațiul  $V/K$  atunci

$$\begin{pmatrix} e''_1 \\ e''_2 \\ \vdots \\ e''_n \end{pmatrix} = T_{B'B''}^T \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} = T_{B'B''}^T T_{BB'}^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

și

$$\begin{pmatrix} e''_1 \\ e''_2 \\ \vdots \\ e''_n \end{pmatrix} = T_{BB''}^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

deci  $T_{BB''}^T = T_{B'B''}^T T_{BB'}^T = (T_{BB'} T_{B'B''})^T$ . Prin urmare

$$T_{BB''} = T_{BB'} T_{B'B''}.$$

Fie acum  $v \in V$  un vector arbitrar. Conform teoremei precedente,  $v$  se exprimă în mod unic ca o combinație liniară a vectorilor din baza  $B$  și, de asemenea, ca o combinație liniară unică a vectorilor din  $B'$ . Prin urmare există și sunt unici scalarii  $x_1, \dots, x_n$  și  $x'_1, \dots, x'_n$  astfel ca

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n.$$

Deoarece  $e'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$  pentru orice  $j \in \{1, \dots, n\}$ , folosind cele două exprimări ale lui  $v$ , avem

$$v = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j \right) e_i = \left( \sum_{j=1}^n a_{1j} x'_j \right) e_1 + \dots + \left( \sum_{j=1}^n a_{nj} x'_j \right) e_n,$$

adică  $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Matriceal obținem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Să notăm cu  $v_B$  respectiv cu  $v_{B'}$  matricele coloană ale coordonatelor în cele două baze, adică

$$v_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ și } v_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Atunci relația obținută poate fi scrisă pe scurt

$$v_B = T_{BB'}v_{B'}, \text{ sau, echivalent } v_{B'} = T_{BB'}^{-1}v_B.$$

Am obținut următorul rezultat.

**Teorema 2.8.1.** *Fie  $B, B'$  și  $B''$  baze în spațiul  $V/K$ . Atunci matricea de trecere de la baza  $B$  la baza  $B'$  este inversabilă și inversa ei este matricea de trecere de la baza  $B'$  la baza  $B$ , adică*

$$T_{BB'}^{-1} = T_{B'B}.$$

Între matricele de trecere ale celor trei baze avem legătura următoare:

$$T_{BB''} = T_{BB'}T_{B'B''}.$$

Dacă  $v \in V$  iar  $v_B$  este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $v$  în baza  $B$  și  $v_{B'}$  este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $v$  în baza  $B'$  atunci

$$v_{B'} = T_{BB'}^{-1}v_B.$$

**Exemplul 2.8.1.** Să considerăm bazele  $B = \{1 + X, X + X^2, X^2 + 1\}$ ,  $B' = \{1, X - 1, X^2 - 1\}$  și  $B_c$  din spațiul  $\mathbb{R}_2[X]/\mathbb{R}$ , unde  $B_c$  este baza canonică (verificați că sunt într-adevăr baze!). Ne propunem să determinăm

- (a)  $T_{B_cB}$  și  $T_{BB_c}$ ;
- (b)  $T_{B_cB'}$  și  $T_{B'B_c}$ ;
- (c)  $T_{BB'}$ ;
- (d) coordonatele vectorului  $f = 1 + X + X^2$  în bazele  $B$  și  $B'$ .

*Rezolvare.* (a) Deoarece  $B_c = \{1, X, X^2\}$  urmează că, în baza canonică, vectorul  $1 + X$  are coordonatele  $1, 1, 0$ , vectorul  $X + X^2$  are coordonatele  $0, 1, 1$  iar vectorul  $X^2 + 1$  are coordonatele  $1, 0, 1$ . Prin urmare matricea de trecere de la baza canonică la baza  $B$  este

$$T_{B_cB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cum  $T_{BB_c} = T_{B_cB}^{-1}$  și

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right)$$

rezultă că  $T_{BB_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

(b) Analog  $T_{B_c B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $T_{B' B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(c) Folosim din nou teorema precedentă. Avem

$$T_{BB'} = T_{BB_c} T_{B_c B'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Cu notațiile din teorema precedentă avem

$$f_B = T_{BB_c} \cdot f_{B_c} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

deci coordonatele vectorului  $f$  în baza  $B$  sunt  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ . Similar

$$f_{B'} = T_{B' B_c} \cdot f_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

deci coordonatele vectorului  $f$  în baza  $B'$  sunt 3, 1, 1.

## B. PROBLEME REZOLVATE

1. Folosind definiția, să se arate că vectorii

$$u_1 = (1, 1, 2), \quad u_2 = (2, 1, 1), \quad u_3 = (-1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$$

sunt liniar independenți.

*Rezolvare.* Fie  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \theta$ . Înlocuind, avem că relația e echivalentă cu

$$\alpha_1(1, 1, 2) + \alpha_2(2, 1, 1) + \alpha_3(-1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

și făcând operațiile în membrul stâng, cu

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

ceea ce ne conduce la sistemul omogen

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases};$$

matricea sistemului are determinantul  $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$ , deci sistemul omogen admite doar soluția banală  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ , așadar vectorii  $u_1, u_2, u_3$  sunt liniar independenți.

2. Folosind criteriul practic, să se arate că

$$S = \{u_1 = (1, 2, 0), \quad u_2 = (1, 2, 3), \quad u_3 = (0, 1, 1)\}$$

este un sistem liniar independent de vectori din  $\mathbb{R}^3$ .

*Rezolvare.* Construim matricea

$$A = [u_1^T | u_2^T | u_3^T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculăm  $\det(A) = -3 \neq 0$ , deci conform criteriului practic, avem că  $S$  reprezintă un sistem liniar independent de vectori din  $\mathbb{R}^3$ .

### 3. Sistemul

$$A = \{u_1 = (1, -2, 1), u_2 = (-1, 2, -1), u_3 = (2, 1, 7), u_4 = (1, 1, 4), u_5 = (-1, 2, -1)\}$$

este un sistem liniar dependent de vectori din  $\mathbb{R}^3$ . Cum putem justifica acest lucru fără calcule? Să se extragă un subsistem  $S' \subset S$ , liniar independent.

*Rezolvare.* Concatenăm cei cinci vectori pentru a construi matricea  $A = [u_1^T | u_2^T | u_3^T | u_4^T | u_5^T]$ . Cum matricea  $A$  are numai trei linii,  $\text{rang}(A) \leq 3$ , deci vectorii din  $S$  nu pot fi liniar independenți.

Prin operații pe linie, avem

$$A \xrightarrow{2L_1+L_2 \rightarrow L_2; -L_1+L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_A.$$

În  $S_A$ , coloanele cu pivoți sunt prima și cea de-a treia, deci  $S' = \{u_1, u_3\}$  reprezintă subsistemul căutat.

### 4. Să se arate că

$$\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

reprezintă un sistem liniar independent de vectori din  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

*Rezolvare.* Fie  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = O_2$ , adică

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Făcând calculele în membrul stâng și identificând elementele vom avea că relația de mai sus e echivalentă cu sistemul omogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}.$$

Sistemul fiind superior triunghiular, admite soluție unică soluția banală  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , deci  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  reprezintă un sistem liniar independent de vectori din  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

5. Să se arate că sistemul de vectori liniar independent  $S$  din problema 2 reprezintă o bază în  $\mathbb{R}^3$  și să se calculeze coordonatele vectorului  $v = (-1, 1, 1)$  relative la baza  $S$ .

*Rezolvare.* Din problema a doua știm că vectorii sunt liniar independenți. Dar cum  $\text{Card}(S) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ , avem că formează un sistem liniar independent maximal, cu alte cuvinte formează o bază în  $\mathbb{R}^3$ .

Coordonatele pe care le căutăm sunt  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = v$ . Dar înlocuind vectorii, această combinație liniară ne conduce la sistemul compatibil determinat

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Rezolvându-l, găsim  $x_1 = -1/3$ ,  $x_2 = -2/3$ ,  $x_3 = 3$

Alternativ, am fi putut calcula coordonatele construind matricea  $A = [u_1^T | u_2^T | u_3^T]$ . Forma ei scară redusă  $S_A^0 = [c_1 | c_2 | c_3 | c_4]$  ar fi avut pivoți pe primele trei coloane, iar  $c_4$  s-ar fi scris combinație liniară de acestea  $c_4 = x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3$ . Apoi am fi folosit faptul că forma scară redusă păstrează combinațiile liniare de coloane ale unei matrice.

6. Să se arate că polinoamele Bernstein<sup>2</sup> de grad doi

$$B_2^k(t) = C_2^k t^k (1-t)^{2-k}, \quad k = 0, 1, 2$$

formează o bază în  $\mathbb{R}_2[t]$  și să se calculeze coordonatele polinomului  $p(t) = 3 + 2t + t^2$  relative la această bază.

*Rezolvare.* Explicităm cele trei polinoame și găsim

$$B_2^0(t) = 1 - 2t + t^2, \quad B_2^1(t) = 2t - 2t^2, \quad B_2^2(t) = t^2.$$

Fie  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\alpha_0 B_2^0(t) + \alpha_1 B_2^1(t) + \alpha_2 B_2^2(t) = \theta$ , sau explicitând,  $\alpha_0(1 - 2t + t^2) + \alpha_1(2t - 2t^2) + \alpha_2 t^2 = 0$ . După ce desfacem parantezele, grupăm monoamele de același grad și identificăm coeficienții în cei doi membri, relația va fi echivalentă cu

$$\begin{cases} \alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_0 + 2\alpha_1 = 0 \\ \alpha_0 = 0 \end{cases}.$$

Sistemul omogen fiind superior triunghiular va avea soluție unică, mai precis doar soluția banală  $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Astfel, cele trei polinoame sunt liniar independente.

Pe de altă parte, în spațiul vectorial  $\mathbb{R}_2[t]$  avem baza canonică

$\mathcal{B} = \{e_1(t) = 1, e_2(t) = t, e_3(t) = t^2\}$ , deci  $\mathbb{R}_2[t]$  are dimensiunea trei, valoare care coincide cu cardinalul mulțimii celor trei polinoame Bernstein. Adică acestea formează o bază.

<sup>2</sup> aceste polinoame se folosesc pentru a defini curbele Bezier. Toate fonturile sunt desenate din arce de curbe Bezier, mai mult, softurile de proiectare de tip CAD folosesc astfel de curbe.

Coordonatele pe care le căutăm sunt  $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x_0 B_2^0(t) + x_1 B_2^1(t) + x_2 B_2^2(t) = p(t)$ . După ce explicităm polinoamele și identificăm coeficienții ca înainte, ajungem la sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x_0 - 2x_1 + x_2 = 1 \\ -2x_0 + 2x_1 = 2 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

de unde găsim  $x_0 = 3, x_1 = 4, x_2 = 6$ .

7. Să se determine câte o bază în cele patru spații fundamentale ale lui  $\mathbb{R}^2$  definite de matricea:

(a)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

*Rezolvare.* a) Aducem la forma scară redusă matricea  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = S_A^0 = [c_1 | c_2]$$

și matricea  $A^T$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_1 + L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A^T}^0 = [c'_1 | c'_2].$$

Matricea  $S_A^0$  are pivot pe coloana  $c_1$ , deci prima coloană a matricei  $A$  reprezintă un sistem liniar independent, astfel  $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (0, 1)^T\}$  este o bază în  $Col(A)$ .

Matricea  $S_{A^T}^0$  are pivot pe coloana  $c'_2$ , deci a doua coloană a matricei  $A^T$  reprezintă un sistem liniar independent, astfel  $\mathcal{B}'_1 = \{u'_1 = (1, 2)^T\}$  este o bază în  $Lin(A) = Col(A^T)$ .

Pentru  $Null(A)$  observăm că un vector  $u = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $u \in Null(A^T) = Null(S_A^0)$  dacă și numai dacă

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

Relația de mai sus reprezintă un sistem de o ecuație cu două necunoscute cu matrice de rang 1.  $x_1$  va fi necunoscută principală și  $x_2 = \alpha$  necunoscută secundară. Obținem  $x_1 = -2\alpha$  și deci  $u \in Null(A) \iff u = (-2\alpha, \alpha)^T = \alpha(-2, 1)^T$ . Adică un vector  $u$  aparține spațiului  $Null(A)$  dacă și numai dacă se scrie ca o combinație liniară de vectorul  $v_1 = (-2, 1)^T$ . Deci  $Null(A) =$



$\text{span}(v_1)$ . Dar un sistem format dintr-un singur vector nenul este un sistem liniar independent și astfel  $\mathcal{B}_2 = \{v_1 = (-2, 1)^T\}$  reprezintă o bază în  $\text{Null}(A)$ . Pentru  $\text{Null}(A^T)$  observăm că un vector  $u = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $u \in \text{Null}(A^T) = \text{Null}(S_{A^T}^0)$  dacă și numai dacă

$$x_2 = 0$$

Adică  $u \in \text{Null}(A^T) \iff u = (\alpha, 0)^T = \alpha(1, 0)^T$ . Adică un vector  $u$  aparține spațiului  $\text{Null}(A^T)$  dacă și numai dacă se scrie combinație liniară de vectorul  $v'_1 = (1, 0)^T$ . Deci  $\text{Null}(A^T) = \text{span}(v'_1)$ . Dar un sistem format dintr-un singur vector nenul este un sistem liniar independent și astfel  $\mathcal{B}'_2 = \{v'_1 = (1, 0)^T\}$  reprezintă o bază în  $\text{Null}(A^T)$ .

8. Prin operații pe linie, matricea

$$A = [u_1|u_2|u_3|u_4|u_5] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

se transformă în matricea

$$B = [c_1|c_2|c_3|c_4|c_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

În ce spațiu vectorial este  $\text{Col}(A)$  subspațiu? Dar  $\text{Null}(A)$ ? Să se determine câte o bază în aceste subspații.

*Rezolvare.*  $\text{Col}(A)$  este generat de coloanele matricei  $A$  și cum fiecare coloană e vector din  $\mathbb{R}^{4 \times 1}$  înseamnă că  $\text{Col}(A)$  e un subspațiu vectorial al lui  $\mathbb{R}^{4 \times 1}$ . Pe de altă parte,  $\text{Null}(A)$  reprezintă mulțimea soluțiilor sistemului omogen scris matriceal  $Ax = 0$ . Matricea  $A$ , având cinci coloane, sistemul omogen va avea cinci necunoscute, deci va fi subspațiu vectorial al lui  $\mathbb{R}^{5 \times 1}$ .

Întrucât matricea  $B$  este o matrice scară redusă și a fost obținută din  $A$  prin operații elementare pe linie, înseamnă că este chiar forma scară redusă a matricei  $A$ . În  $B$  pivoții se găsesc pe coloanele  $c_1$  și  $c_2$ , deci în  $A$  coloanele  $u_1$  și  $u_2$  sunt liniar independente, celelalte putându-se scrie combinație liniară de ele. Astfel, o bază în  $\text{Col}(A) = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$  este  $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, -2, 1, 2)^T, u_2 = (2, -4, 1, 3)^T\}$ .

Pentru că  $B$  este forma scară redusă a matricei  $A$ , sistemul omogen  $Ax = 0$  are aceleași soluții cu sistemul  $Bx = 0$  dar al doilea e mai ușor de rezolvat. Deoarece în matricea  $B$  pivoții sunt pe coloanele  $c_1$  și  $c_2$ , vom lua  $x_1$  și  $x_2$  necunoscute principale, iar necunoscutele secundare le notăm cu parametri după cum urmează:  $x_3 = \alpha, x_4 = \beta, x_5 = \gamma$ . Înlocuind în sistem, avem

$$\begin{cases} x_1 + \alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ x_2 - \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

deci  $x_1 = -\alpha - 3\beta - 5\gamma$ ,  $x_2 = \beta + 3\gamma$ .

Astfel, un vector  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \in \text{Null}(B) = \text{Null}(A)$  dacă și numai dacă

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha - 3\beta - 5\gamma \\ \beta + 3\gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

iar notând  $v_1 = [-1, 0, 1, 0, 0]^T$ ,  $v_2 = [-3, 1, 0, 1, 0]^T$ ,  $v_3 = [-5, 3, 0, 0, 1]^T$ , relația de mai sus ne spune că  $\text{Null}(B) = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$ . În plus, acești vectori sunt liniar independenți și astfel  $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$  reprezintă o bază în  $\text{Null}(A)$ .

9. Construiți o matrice  $A$  pentru care  $u = (1, 2, 3)^T \in \text{Null}(A)$ .

*Rezolvare.*  $u \in \text{Null}(A) \iff Au = 0$  și înmulțirea se poate efectua doar dacă matricea  $A$  are trei coloane. Pentru simplitate, vom căuta o matrice linie,  $A = [x \ y \ z] \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ . Avem că

$$Au = 0 \iff x + 2y + 3z = 0$$

iar ultima relație este un sistem de o ecuație cu trei necunoscute. Rangul matricei sistemului e 1, deci luăm  $x$  necunoscută principală iar necunoscutele secundare le notăm  $y = \alpha$ ,  $z = \beta$ . Găsim  $x = -2\alpha - 3\beta$  și, de exemplu pentru  $\alpha = \beta = 1$ , vom avea  $x = -5$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$ , deci matricea  $A = [-5 \ 1 \ 1]$ .

Mai simplu, puteam lua  $A = [0 \ 0 \ 0]$  sau orice matrice nulă cu 3 coloane.

10. Construiți o matrice  $A$  pentru care  $\text{Col}(A) = \text{span}(u = (1, 1, 2)^T)$  și  $\text{Lin}(A) = \text{span}(v = (1, 5))$

*Rezolvare.* Evident, căutăm o matrice cu trei linii și două coloane  $c_1, c_2$ . Pentru că  $c_1, c_2 \in \text{span}(u = (1, 1, 2)^T)$ , cele două coloane sunt de forma  $c_1 = \alpha(1, 1, 2)^T$ ,  $c_2 = \beta(1, 1, 2)^T$ . Astfel

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \\ 2\alpha & 2\beta \end{bmatrix};$$

dar cele trei linii trebuie să fie elemente din  $\text{span}(v = (1, 5))$ , adică fiecare linie să fie multiplu de acest vector; atunci  $\beta = 5\alpha$ . Dacă, de exemplu, alegem  $\alpha = 1$ , obținem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

11. Să se găsească ecuațiile subspațiului  $S = \text{span}(u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (-1, 1, 2))$  al lui  $\mathbb{R}^3$ .

*Rezolvare.* Fie  $v = (x_1, x_2, x_3)$  un vector oarecare din  $\mathbb{R}^3$ . Construim matricea  $A = [u_1^T | u_2^T | v]$  și o aducem la forma scară:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 2 & x_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1+L_2 \rightarrow L_2; -2L_1+L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & x_1 \\ 0 & \boxed{2} & -x_1+x_2 \\ 0 & 4 & -2x_1+x_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_2+L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & x_1 \\ 0 & \boxed{2} & -x_1+x_2 \\ 0 & 0 & -2x_2+x_3 \end{bmatrix} = S_A.$$

Ultima coloană din  $S_A$  se poate scrie combinație liniară de primele două dacă și numai dacă nu conține pivot, adică dacă  $-2x_2 + x_3 = 0$ . Dar aceasta e și condiția ca ultima coloană din  $A$  să se poată scrie combinație liniară de primele două, deci condiția ca  $v \in \text{span}(u_1, u_2)$ .

Așadar  $S = \{v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_2 + x_3 = 0\}$ .

12. În  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , mulțimea  $S$  a matricelor de rang unu este subspațiu?

*Rezolvare.* Răspunsul este negativ.

Matricile  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  și  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  au  $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 1$ ; dar  $\text{rang}(A+B) = \text{rang}(I_2) = 2 \neq 1$ , deci există combinații liniare de elemente din  $S$  care nu dau un element din  $S$ , așadar  $S$  nu este subspațiu vectorial în  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

13. Să se determine dimensiunea subspațiului vectorial

$$S = \{v = [a, b + 2c, a + b + 2c]^T \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

al lui  $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ .

*Rezolvare.* Observăm că  $v = a[1, 0, 1]^T + b[0, 1, 1]^T + c[0, 2, 2]^T$  deci  $S = \text{span}(u_1 = [1, 0, 1]^T, u_2 = [0, 1, 1]^T, u_3 = [0, 2, 2]^T)$ .

Dar  $u_2$  și  $u_3$  nu sunt liniar independenți, pentru că  $u_3 = 2u_2$ . O bază în  $S$  va fi  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ , așadar  $\dim(S) = 2$ .

## C. PROBLEME PROPUSE

1. Arătați că într-un spațiu vectorial:

- (a) există un singur vector nul;
- (b) oricare vector are un unic vector opus.
2. Fie  $F$  un corp. Arătați că  $F$  este un spațiu vectorial peste  $F$ . Care este dimensiunea acestuia?
3. În spațiul vectorial  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$  se dau vectorii  $u = (1, 2, 1)$ ,  $v = (1, 1, 1)$ ,  $w = (0, 9, 8)$ .
- (a) Scrieți baza canonică a spațiului  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ .
- (b) Exprimați vectorii dați în baza canonică.
- (c) Determinați coordonatele vectorilor dați în baza canonică.
- (d) Determinați vectorul  $\tilde{v} = 3v + 5u - w$ ; stabiliți dacă următoarele sisteme de vectori sunt baze pentru spațiul  $V$  :
- i.  $\{u, v, w\}$  ;
- ii.  $\{u, v, w, \tilde{v}\}$  ;
- iii.  $\{u, v, \tilde{v}\}$  ;
- iv.  $\{\theta, w, \tilde{v}\}$  ;
- v.  $\{v, w, \tilde{v}\}$  .
4. Să se arate că mulțimea matricelor cu elemente din corpul  $K$ ,  $K^{m \times n}$ , este un spațiu vectorial peste corpul  $K$ , față de operația (internă) de adunare a matricelor, respectiv, față de operația (externă) de înmulțire a matricelor cu scalari.
5. Să se arate că următoarele mulțimi se pot înzestra cu o structură de spațiu liniar peste corpul numerelor reale:
- (a)  $\{(a, 0, b + c, a + b + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$
- (b)  $\{(a, -c, -b + c + d, a + b + c + d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$  .
6. În spațiul  $\mathbb{R}^{3 \times 1}/\mathbb{R}$  considerăm vectorii  $v_1 = (9, 0, 1)^T$ ,  $v_2 = (2, 2, 1)^T$ ,  $v_3 = (0, 2, 1)^T$ ,  $v_4 = (1, 1, 1)^T$ .
- (a) Să se scrie combinația liniară  $v = v_1 + 2(-13, 0, 1)^T + v_2 - v_3 + v_4$ .
- (b) Să se determine coordonatele vectorilor considerați în baza canonică.
- (c) Să se determine rangul matricei  $A = (v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4)$ .
- (d) Sunt vectorii considerați liniar independenți?
- (e) Să se determine cel mai mare  $n \leq 4$  pentru care mulțimea  $\{v_i : i = \overline{1, n}\}$  este liniar independentă.

(f) Să se determine mulțimea tuturor combinațiilor liniare ale vectorilor

- i.  $v_1, v_2, v_3, v_4$ .
- ii.  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

7. Să se arate că vectorii notați  $v_1, v_2, \dots$  formează o bază într-un spațiu aritmetic, apoi determinați coordonatele vectorului  $v$  în baza respectivă:

- (a)  $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (1, 2, 3); v = (6, 9, 14)$ .
- (b)  $v_1 = (2, 1, -3), v_2 = (3, 2, -5), v_3 = (1, -1, 1); v = (6, 2, -7)$ .
- (c)  $v_1 = (1, 2, -1, -2), v_2 = (2, 3, 0, -1), v_3 = (1, 2, 1, 4), v_4 = (1, 3, -1, 0); v = (7, 14, -1, 2)$ .

*Răspunsuri.* (a). 1, 2, 3; (b). 1, 1, 1; (c). 0, 2, 1, 2.

8. Să se arate că vectorii notați  $v_1, v_2, \dots$ , respectiv  $v'_1, v'_2, \dots$ , formează baze într-un spațiu aritmetic; exprimați vectorii  $v_1, v_2, \dots$  în cele două baze.

- (a)  $v_1 = (8, 3, 1), v_2 = (0, -1, 13), v_3 = (5, 2, 5); v'_1 = (3, 1, 4), v'_2 = (5, 2, 1), v'_3 = (1, 1, -6)$ .
- (b)  $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 1, 1), v_3 = (1, 1, 2, 1), v_4 = (1, 3, 2, 3); v'_1 = (1, 0, 3, 3), v'_2 = (-2, -3, -5, -4), v'_3 = (2, 2, 5, 4), v'_4 = (2, 2, 5, 5)$ .

*Răspunsuri.*

- (a)  $v_1 = -2v'_1 + 3v'_2 - v'_3, v_2 = 2v'_1 - v'_2 - v'_3, v_3 = 3v'_1 - v'_2 + v'_3;$
- (b)  $v_1 = -3v'_1 + 3v'_2 + 3v'_3 + 2v'_4, v_2 = -3v'_1 + 2v'_2 + 2v'_3 + 2v'_4, v_3 = -v'_1 + v'_2 + 2v'_3, v_4 = -v'_1 - v'_2 - 2v'_3 + 2v'_4.$

9. Să se determine  $\lambda \in \mathbb{R}$  astfel încât vectorul  $v$  să se poată exprima ca o combinație liniară a celorlalți vectori dați:

- (a)  $v = (7, -2, \lambda), v_1 = (2, 3, 5), v_2 = (3, 7, 8), v_3 = (1, -6, 1);$
- (b)  $v = (9, 12, \lambda), v_1 = (3, 4, 2), v_2 = (6, 8, 7).$
- (c)  $v = (9, 15, \lambda), v_1 = (3, 4, 2), v_2 = (6, 8, 7).$
- (d)  $v = (12, \lambda, 9), v_1 = (3, 4, 2), v_2 = (6, 8, 7).$

*Răspunsuri.* (a).  $\lambda = 15$ ; (b).  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; (c).  $\lambda \in \emptyset$ ; (d).  $\lambda = 16$ .

10. \* Fie  $V/K$  un spațiu liniar de dimensiune  $n \geq 0$ . Se știe că, în general, într-un asemenea spațiu există mai multe baze.

- (a) Să se arate că pentru  $K = \mathbb{R}$  sau  $K = \mathbb{C}$  și  $n \geq 1$  spațiul  $V$  are o infinitate de baze.
- (b) Să se dea câte un exemplu de spațiu vectorial care are exact 1, 2, 3, respectiv 4 baze.

11. Determinați dimensiunile următoarelor spații vectoriale:

- (a)  $\{(0, 0, 0)\}$
- (b)  $\{(a, a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
- (c)  $\{(a, 0, b+c, a+b+c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$
- (d)  $\{(a, -c, -b+c+d, a+b+c+d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ .
- (e)  $\{(0, a+c, c+d, a+b+c+d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ .

*Răspunsuri.* (a). 0; (b). 1; (c). 2; (d). 4; (e). 3.

12. Să se găsească câte o bază în fiecare din cele patru spații fundamentale ale matricei

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. Să se determine matricea de trecere de la baza  $B$  la baza  $B'$  și inversa ei unde:

- (a)  $B = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)\}$ ,  $B' = \{(3, 1, 4), (5, 2, 1), (1, 1, -6)\}$ ;
- (b)  $B' = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 3, 2, 3)\}$ ,  
 $B = \{(1, 0, 3, 3), (-2, -3, -5, -4), (2, 2, 5, 4), (2, 2, 5, 5)\}$ .

14. Să se stabilească dimensiunea spațiului  $\mathbb{R}_n[x]/\mathbb{R}$  (spațiul funcțiilor polinomiale de grad mai mic sau egal cu  $n$ ), să se determine coordonatele vectorilor  $1, (x-a), (x-a)^2, \dots, (x-a)^n$  în baza canonică, să se arate că vectorii  $1, (x-a), (x-a)^2, \dots, (x-a)^n$  formează o bază în  $\mathbb{R}_n[x]/\mathbb{R}$ , apoi să se scrie matricele de trecere dintre cele două baze.

15. Să se arate că în spațiul  $\mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$  sistemul de vectori

- (a)  $\mathcal{B} = \{1, 2x, 2x^2, 2x^3\}$  este o bază, iar coordonatele vectorului  $x + x^2$  sunt  $(0, 1/2, 1/2, 0)$ ;
- (b)  $\mathcal{B}' = \{1 + x, 1 - x, x + x^2, x + x^3\}$  este o bază, iar coordonatele vectorului  $x + x^2$  sunt  $(0, 0, 1, 0)$ .

(c)  $\mathcal{B}'' = \{B_3^k(x) = C_3^k x^k (1-x)^{3-k}, k = 0, 1, 2, 3\}$  este o bază, iar coordonatele vectorului  $x + x^2$  sunt  $(0, 1/3, 1, 2)$ .

16. \* Să se arate că următorul sistem de vectori (în ce spațiu poate fi considerat?) este liniar independent:

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx\}.$$

17. Stabiliți care dintre următoarele mulțimi de vectori este subspațiu al unui spațiu vectorial real adecvat:

- (a) vectorii unui spațiu liniar  $n$  dimensional care au coordonatele numere întregi;
- (b) vectorii legați cu același punct de aplicație, originea  $O$ , din spațiul fizic:
  - i. care au extremitățile pe axele de coordonate;
  - ii. care au extremitățile pe o dreaptă dată;
  - iii. ale căror extremități nu sunt pe o dreaptă dată;
  - iv. care au extremitățile în primul cadran;
- (c) vectorii din  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$  ale căror coordonate verifică ecuația  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ ;
- (d) vectorii din  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$  ale căror coordonate verifică ecuația  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ ;
- (e) vectorii din  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$  care sunt combinații liniare ale unor vectori dați.

*Răspunsuri.* (a). nu; (b).i. nu; ii. da, dacă și numai dacă dreapta trece prin origine; iii. nu; iv. nu; (c). da; (d). nu, (e). da.

18. Fie  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  un sistem de vectori din spațiul vectorial  $V/K$ . Arătați că  $\text{span}(S) \leq V$  și că  $\dim(\text{span}(S)) \leq \dim(V)$ .

19. Enumerați toate subspațiile spațiului vectorilor din spațiu.

*Răspuns.* Tot spațiul; mulțimea vectorilor dintr-un plan care trece prin origine; mulțimea vectorilor de pe o dreaptă care trece prin origine; mulțimea formată din vectorul nul.

20. Descrieți subspațiile generate de vectorii indicați precizând spațiul aritmetic în care se lucrează și stabiliți dimensiunea lor:

- (a) 1;
- (b)  $(1, 1), (2, 2)$ ;

- (c)  $(1, 2), (2, 1)$ ;  
 (d)  $(10, 0, -10), (21, 1, 1), (11, 1, 11)$ .

*Răspunsuri.* (a).  $\mathbb{R}, 1$  (b).  $\{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, 1$  (c).  $\mathbb{R}^2, 2$ ;  
 (d).  $\{(10\alpha + 21\beta, \beta, \beta - 10\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, 2$ .

21. Fie  $\mathcal{M}_{n,n}(K)/K$ . Arătați că mulțimea matricelor diagonală formează un subspațiu liniar; care este dimensiunea acestuia?

22. În spațiul funcțiilor reale peste corpul  $\mathbb{R}$  analizați dimensiunea subspațiului generat de vectorii

- (a)  $\sin x$ ;  
 (b)  $\sin x, \sin^2 x$ ;  
 (c)  $\sin x, \sin^2 x, \dots, \sin^n x$ .

23. Determinați câte o bază pentru:

- (a) subspațiul  $\{ax^2 + bx + c \mid a + b = c\}$  al spațiului  $\mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$  ;  
 (b) subspațiul matricelor de tip  $2 \times 2$  de forma  $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$  (verificați, în prealabil că este subspațiu);  
 (c) subspațiul matricelor din  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  care au primele două coloane nule.

24. Determinați câte o bază pentru subspațiile polinoamelor  $p \in \mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$  având proprietatea:

- (a)  $p(1) = 0$ ;  
 (b)  $p(1) = 0$  și  $p(2) = 0$ ;  
 (c)  $p(1) = 0, p(2) = 0$  și  $p(3) = 0$ ;  
 (d)  $p(0) = 0, p(1) = 0, p(2) = 0$  și  $p(3) = 0$ .

25. Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$ . Să se determine câte o bază pentru:

- (a) spațiul generat de liniile sale;  
 (b) spațiul  $Col(A)$  generat de coloanele sale;  
 (c)  $Null(A)$ .



*Răspusuri.* De exemplu:

$$(a) \{(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1), (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)\}$$

$$(b) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(c) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

26. Fie  $V$  mulțimea matricelor de tip  $4 \times 4$  a căror matrice scară redusă are ultima linie nulă. Este  $V$  un subspațiu în  $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ ?

27. Fie  $W/K$  un spațiu vectorial,  $U$  și  $V$  două subspații, iar  $B_U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ , respectiv  $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_\ell\}$  baze ale acestora.

- (a) Să se arate că mulțimea  $U \cap V$  este subspațiu al spațiului  $W$ .
- (b) Să se arate că mulțimea  $U + V := \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$  este subspațiu al spațiului  $W$ .
- (c) Să se arate că dacă  $U \subset V$  și  $k = \ell$ , atunci  $U = V$ .
- (d) \* Determinați dimensiunea subspațiului  $U + V$  și indicați o procedură concretă de obținere a unei baze.

*Indicație.* O bază pentru  $U + V$  este formată dintr-o submulțime maximală de vectori liniar independenți ai mulțimii  $\{u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_\ell\}$ .

28. \* Determinați câte o bază pentru suma, respectiv intersecția subspațiilor generate de mulțimile de vectori  $v_1, v_2, v_3$  și  $v'_1, v'_2, v'_3$ :

- (a)  $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, 1, -1), v_3 = (1, 3, 3);$   
 $v'_1 = (2, 3, -1), v'_2 = (1, 2, 2), v'_3 = (1, 1, -3).$
- (b)  $v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1, 1);$   
 $v'_1 = (1, 0, 1, 0), v'_2 = (0, 2, 1, 1), v'_3 = (1, 2, 1, 2).$

*Răspusuri.* (a). de exemplu, pentru sumă  $\{v_1, v_2, v'_1\}$ , iar pentru intersecție  $\{v\}$ , unde  $v = 2v_1 + v_2 = v'_1 + v'_3 = (3, 5, 1)$ . (b). de exemplu, pentru sumă  $\{v_1, v_2, v_3, v'_1\}$ , iar pentru intersecție  $\{v''_1, v''_2\}$ , unde  $v''_1 = v_1 + v_2 + v_3 = v'_1 + v'_2 = (1, 2, 2, 1)$  și  $v''_2 = 2v_1 + 2v_3 = v'_1 + v'_3 = (2, 2, 2, 2)$ .

29. Arătați că matricele  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  formează o bază în subspațiul  $\mathbb{R}_S^{2 \times 2}$  al matricelor simetrice din spațiul vectorial  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .  
Relația

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & \frac{2b}{2} \\ \frac{2c}{2} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{2b+c-c}{2} \\ \frac{2c+b-b}{2} & d \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a & \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2} \\ \frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ -\frac{b-c}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ne arată că orice matrice  $2 \times 2$  se poate descompune în suma dintre o matrice simetrică și una antisimetrică (adică o matrice  $A$  cu proprietatea că  $A^T = -A$ ). Fie  $\mathbb{R}_A^{2 \times 2}$  mulțimea matricelor antisimetrice de tip  $2 \times 2$ . Să se arate că:

- (a)  $\mathbb{R}_A^{2 \times 2}$  este subspațiu unidimensional al spațiului liniar  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ;
- (b)  $\mathbb{R}_S^{2 \times 2}$  este subspațiu tridimensional al spațiului liniar  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ;
- (c)  $\mathbb{R}^{2 \times 2} = \mathbb{R}_S^{2 \times 2} \oplus \mathbb{R}_A^{2 \times 2}$ .

Să se generalizeze propozițiile precedente pentru matrice pătratice de ordin  $n$  cu elemente reale. Dacă înlocuim corpul numerelor reale cu  $\mathbb{Z}_2$ , afirmațiile (a) - (c) rămân adevărate?

30. Care e subspațiul vectorial al lui  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  generat de matricele cu elemente pozitive?  
*Răspuns.*  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

31. \* Un vector  $v$  din spațiul  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$  are în baza  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  coordonatele  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Să se dea o condiție necesară și suficientă pentru ca să existe o bază  $B' \subset \mathbb{R}^n$  în care  $v$  să aibă coordonatele  $1, 0, 0, \dots, 0$  și să se indice o procedură de construcție a acestei baze.

## 3 APLICAȚII LINIARE

Morfismele - de grupuri, de inele, etc. - sunt funcții compatibile cu structura - de grup, inel, etc. Similar morfismelor de grupuri ori de inele, definim noțiunea de aplicație liniară ca funcție între două spații vectoriale peste același corp, compatibilă cu cele două operații: cea internă (adunarea vectorilor) și cea externă (înmulțirea vectorilor cu scalari).

### A. TEORIE

#### 3.1. Definiția aplicației liniare

*Peste tot în cele ce urmează  $V$  și  $W$  sunt două spații vectoriale peste același corp  $K$ .*

**Definiția 3.1.1. Definiția aplicației liniare.** *O funcție  $L : V \rightarrow W$  care satisface condițiile*

- i.  $L(u + v) = L(u) + L(v)$  pentru orice  $u, v \in V$  (adică  $L$  este **aditivă**)
- ii.  $L(\alpha u) = \alpha L(u)$  pentru orice  $u \in V$  și orice  $\alpha \in K$  (adică  $L$  este **omogenă**)

*se numește **aplicație liniară (sau transformare liniară)**. Notăm mulțimea aplicațiilor liniare definite pe  $V$  cu valori în  $W$  cu  $\mathcal{L}(V, W)$ .*

*Dacă  $V = W$ , atunci aplicația liniară  $L$  se numește **operator liniar** sau **endomorfism**. Notăm cu  $\mathcal{L}(V)$  mulțimea operatorilor liniari ai spațiului  $V$ .*

Axioma (i) din această definiție implică faptul că dacă  $L \in \mathcal{L}(V, W)$  atunci  $L$  este morfism între grupurile  $(V, +)$  și  $(W, +)$ . În consecință  $L$  transformă vectorul nul în vectorul nul și simetricul unui vector în simetricul imaginii acestuia, adică:

**Propoziția 3.1.1.** *Dacă  $L \in \mathcal{L}(V, W)$  atunci*

- $L(\theta_V) = \theta_W$
- $L(-v) = -L(v), \forall v \in V.$

**Exemplul 3.1.1.** Aplicația nulă  $\theta : V \rightarrow W$ ,  $\theta(v) := \theta_W$  este o aplicație liniară.

**Exemplul 3.1.2.** Aplicația identică  $id_V$  este o aplicație liniară. (Reamintim că  $id_V = 1_V : V \rightarrow V$ ,  $id_V(v) = v$ ).

**Exemplul 3.1.3.** Dacă  $L \in \mathcal{L}(V, W)$  atunci  $L'(v) := -L(v)$  definește o aplicație liniară, adică  $L' \in \mathcal{L}(V, W)$ .

**Exemplul 3.1.4.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

a. Dacă  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , notând  $a := f(1)$  avem  $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = ax$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

b. Dacă există  $a \in \mathbb{R}$  astfel ca  $f(x) = ax$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  atunci  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Prin urmare  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  dacă și numai dacă există  $a \in \mathbb{R}$  astfel ca  $f(x) = ax$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exemplul 3.1.5.** Funcția  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definită prin

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

este o aplicație liniară (aici  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $W = \mathbb{R}^2$  și  $K = \mathbb{R}$ ).

Într-adevăr, dacă  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (x'_1, x'_2, x'_3) \in \mathbb{R}^3$  și  $\alpha \in \mathbb{R}$  avem, ținând cont de expresia analitică a funcției  $L$  și de definiția operațiilor din  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$  și  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ :

$$L(x+y) = L(x_1+x'_1, x_2+x'_2, x_3+x'_3) = (x_1+x'_1-x_2-x'_2, x_2+x'_2-x_3-x'_3)$$

$$= (x_1-x_2, x_2-x_3) + (x'_1-x'_2, x'_2-x'_3) = L(x) + L(y) \text{ și}$$

$$L(\alpha x) = L(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (\alpha x_1 - \alpha x_2, \alpha x_2 - \alpha x_3) = \alpha(x_1 - x_2, x_2 - x_3) = \alpha L(x);$$

prin urmare  $L \in \mathcal{L}(V, W)$ .

O funcție  $L : V \rightarrow W$  este o aplicație liniară dacă și numai dacă ea conservă combinațiile liniare. Următoarea propoziție dă condiții necesare și suficiente de liniaritate folosind această echivalență și, în consecință, oferă definiții alternative pentru aplicațiile liniare.

**Propoziția 3.1.2.** Fie  $L : V \rightarrow W$  o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente.

(a)  $L \in \mathcal{L}(V, W)$

(b)  $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2)$ ,  $\forall v_1, v_2 \in V$ ,  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$

(c)  $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_n L(v_n)$   
 $\forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ ,  $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exemplul 3.1.6.** Fie  $L \in \mathcal{L}(V, W)$  și  $S \subset V$ . Să arătăm că  $L(\text{span}(S)) = \text{span}(L(S))$

1. Arătăm întâi că  $L(\text{span}(S)) \subset L(\text{span}(S))$ . Fie  $w \in L(\text{span}(S))$ . Atunci există  $v \in \text{span}(S)$  astfel încât  $L(v) = w$ . Dar  $v \in \text{span}(S)$ , deci există  $v_1, v_2, \dots, v_n \in S$  și  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$  astfel încât  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ . Prin urmare  $w = L(v) = L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_n L(v_n) \in \text{span}(L(S))$  și incluziunea este demonstrată.
2. Rămâne să arătăm incluziunea inversă. Fie, pentru aceasta,  $w \in \text{span}(L(S))$ . Atunci există  $w_1, w_2, \dots, w_n \in L(S)$  și  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$  astfel încât  $w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n$ . Cum  $w_1, w_2, \dots, w_n \in L(S)$  înseamnă că există  $v_1, v_2, \dots, v_n \in S$  astfel încât  $w_1 = L(v_1), \dots, w_n = L(v_n)$ , deci  $w = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \dots + \alpha_n L(v_n) = L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) \in L(\text{span}(S))$ . Prin urmare am dovedit că  $\text{span}(L(S)) \subset L(\text{span}(S))$  și egalitatea este demonstrată.

O aplicație liniară transformă subspații în subspații, după cum rezultă din următoarea propoziție.

**Propoziția 3.1.3.** *Fie  $L \in \mathcal{L}(V, W)$  și  $U \leq V$ . Atunci  $L(U) \leq W$ .*

Aplicațiile liniare din  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  au o expresie analitică simplă. Următoarea afirmație extinde modelul dat de Exemplul 3.1.4.

**Propoziția 3.1.4.** *Funcția  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este o aplicație liniară (a spațiului  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$  în spațiul  $\mathbb{R}/\mathbb{R}$ ) dacă și numai dacă există  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  astfel încât*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

*pentru orice  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .*

Între aplicațiile liniare și matrice există o strânsă legătură. Fie  $L$  aplicația liniară definită în Exemplul 3.1.5. Putem da expresia analitică a funcției  $L$  matriceal astfel:

notând  $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  avem  $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$ , sau, echivalent

$Ax^T = (L(x))^T$ . În general:

**Propoziția 3.1.5.** *Dacă  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  și  $x \in \mathbb{R}^n$ , atunci  $L(x) := (Ax^T)^T$  definește  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .*

**Exemplul 3.1.7.** Să răspundem la întrebarea: care dintre următoarele aplicații este liniară?

1.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) := (x + y, x - a - 1)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .
2.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) := (x + y, x - ay^2)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

### Soluție.

1. Să presupunem că  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . Cum  $f(0, 0) = (0, 0)$  rezultă că  $(0, -a - 1) = (0, 0)$ , deci o condiție necesară de liniaritate este  $a = -1$ .

Să verificăm dacă această condiție este și suficientă, adică să vedem dacă  $f(x, y) := (x + y, x)$  definește o aplicație liniară. Luând  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  avem  $A(x, y)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x \end{pmatrix} = (x + y, x)^T$ ; conform propoziției precedente rezultă că  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . În consecință  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  dacă și numai dacă  $a = -1$ . Arătați suficiența condiției găsite și direct, prin definiție.

2. Să presupunem iar că  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . Atunci  $f(-x, -y) = -f(x, y)$  pentru orice  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , de unde obținem că  $-x - ay^2 = -x + ay^2$  pentru orice  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Prin urmare o condiție necesară de liniaritate este  $a = 0$ . Suficiența condiției rezultă din punctul 1. În consecință  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  dacă și numai dacă  $a = 0$ .

**Exemplul 3.1.8.** Dacă  $n > 1$ , aplicația de derivare  $d : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x]$  definită prin  $d(f) := f'$  este liniară.

**Exemplul 3.1.9.** Fie  $C^0[a, b]$  spațiul (real) al funcțiilor continue pe intervalul  $[a, b]$  și  $I(f) := \int_a^b f(x) dx$ , pentru orice  $f \in C^0[a, b]$ . Atunci  $I \in \mathcal{L}(C^0[a, b], \mathbb{R})$ .

**Exemplul 3.1.10.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Aplicația  $dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - numită *proiecția de indice i* (sau *proiecția a i-a*) definită prin  $dx_i(x_1, x_2, \dots, x_n) := x_i$  este liniară.

**Exemplul 3.1.11.** O aplicație liniară este complet determinată de acțiunea sa asupra vectorilor dintr-o bază. Să verificăm această afirmație. Presupunem că  $f \in \mathcal{L}(V, W)$ , că  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  este o bază în  $V$  și că se cunosc imaginile vectorilor din această bază:  $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, \dots, f(v_n) = w_n$ . Fie acum  $v \in V$ . Atunci există scalarii (unici)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  astfel ca  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ . Dar  $f$  este liniară, deci  $f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n$ ; prin urmare vectorul imagine  $f(v)$  este și el cunoscut.

Compusa a două transformări liniare este o transformare liniară.

**Propoziția 3.1.6.** Fie  $f \in \mathcal{L}(U, V)$  și  $g \in \mathcal{L}(V, W)$ . Atunci  $g \circ f \in \mathcal{L}(U, W)$ .

Mulțimea transformărilor liniare dintre două spații vectoriale (peste același corp) poate fi dotată cu o structură naturală de spațiu liniar.

**Propoziția 3.1.7.** a. Dacă  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V, W)$  atunci  $L_1 + L_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ , unde  $(L_1 + L_2)(v) := L_1(v) + L_2(v)$ ;

b. Dacă  $L \in \mathcal{L}(V, W)$  și  $\alpha \in K$  atunci  $\alpha L \in \mathcal{L}(V, W)$ , unde  $(\alpha L)(v) := \alpha L(v)$ ;

c.  $\mathcal{L}(V, W)$  este un spațiu vectorial peste corpul  $K$  în raport cu operațiile definite mai sus.

d. Dacă  $\dim V = n$  și  $\dim W = m$  atunci  $\dim \mathcal{L}(V, W) = m \cdot n$ .

O aplicație liniară bijectivă stabilește, în esență, că spațiile vectoriale între care operează această transformare „coincid” structural.

**Definiția 3.1.2. Definiția izomorfismului.** O funcție  $f : V \rightarrow W$  se numește **izomorfism** dacă ea este liniară și bijectivă. Dacă o asemenea funcție există spunem că spațiile  $V$  și  $W$  sunt izomorfe și scriem  $V \cong W$ . Dacă  $f \in \mathcal{L}(V)$  este izomorfism spunem că operatorul  $f$  este un **automorfism** (al spațiului  $V$ ).

**Exemplul 3.1.12.** Să arătăm că spațiile reale  $\mathbb{R}_n[x]$  și  $\mathbb{R}^{n+1}$  sunt izomorfe. Este suficient să definim acțiunea unei aplicații liniare bijective între vectorii bazelor canonice:  $f(1) := e_1, f(x) := e_2, f(x^2) := e_3, \dots, f(x^n) := e_{n+1}$  (vezi Exemplul 3.1.11). Atunci  $f(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) := a_0e_1 + a_1e_2 + \dots + a_ne_{n+1}$  definește un izomorfism  $\mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Expresia analitică a inversei acestei transformări este definită prin  $f^{-1}(e_1) = 1, f^{-1}(e_2) = x, \dots, f^{-1}(e_{n+1}) = x^n$ .

**Exemplul 3.1.13.** Să arătăm că două spații vectoriale peste același corp sunt izomorfe dacă și numai dacă ele au aceeași dimensiune.

1. Fie  $f : V \rightarrow W$  este izomorfism și  $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  o bază în  $V$ . Pentru a arăta că  $\dim V = \dim W$  este suficient să arătăm că  $B_W := \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$  este bază în  $W$ .

1.1. Arătăm că  $B_W$  este un sistem de vectori liniar independent. Presupunem că avem o combinație liniară nula a vectorilor din  $B_W$  :

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n) = \theta_W.$$

Folosind liniaritatea aplicației  $f$  avem de aici:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = f(\theta_V).$$

Cum  $f$  este injectivă rezultă că

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \theta_V.$$

Dar  $B_V$  este bază în  $V$ , deci  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ . În consecință  $B_W$  este sistem de vectori liniar independent.

1.2. Arătăm că  $B_W$  este un sistem de generatori în  $B_W$ . Fie  $w \in W$ . Cum  $f$  este surjectivă, rezultă că există  $v \in V$  astfel ca  $f(v) = w$ . Atunci există scalarii  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  astfel ca  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ , deci

$$w = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n),$$

adică  $w$  este combinație liniară a vectorilor din  $B_W$ .

**2.** Să presupunem acum că  $\dim V = \dim W = n$ . Fie  $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  o bază în  $V$  și  $B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  o bază în  $W$ . Ca în exemplul precedent se arată că  $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, \dots, f(v_n) = w_n$  definesc un izomorfism între cele două spații. De aceea  $V \cong W$ .

**Exemplul 3.1.14.** Conform propoziției precedente, dacă  $V_n$  este un spațiu real (de dimensiune  $n$ ) atunci  $V \cong \mathbb{R}^n$ . Să construim un izomorfism între cele două spații. Fie  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  o bază în  $V_n$  și  $B_c = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  baza canonică din  $\mathbb{R}^n$ . Fie (vezi Exemplul 3.1.11)  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$  un vector din  $V_n$ . Definim

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) := \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Se verifică imediat că  $f \in \mathcal{L}(V_n, \mathbb{R}^n)$ . Analog, dacă  $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$  este un vector arbitrar din  $\mathbb{R}^n$  definim

$$g(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) := \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Deoarece  $f \circ g = id_{\mathbb{R}^n}$  iar  $g \circ f = id_{V_n}$  rezultă că  $f$  este bijectivă iar inversa sa este aplicația liniară  $g$ .

**Propoziția 3.1.8.** Dacă  $U \cong V$  și  $V \cong W$  atunci  $U \cong W$ .

## 3.2. Subspații asociate aplicațiilor liniare

Aplicației liniare de la Exemplul 3.1.5 îi putem asocia mulțimea tuturor vectorilor din domeniu a căror imagine este vectorul nul:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid L(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\} = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Acesta este un subspațiu important al domeniului de definiție: *nucleul aplicației  $L$* .

**Definiția 3.2.1. Definiția nucleului.** Fie  $L \in \mathcal{L}(V, W)$ . Mulțimea

$$\ker L := \{v \in V \mid L(v) = \theta_W\}$$

se numeste *nucleul aplicației liniare  $L$* .

Nucleul unei aplicații liniare este subspațiu al domeniului de definiție.

**Propoziția 3.2.1.** Dacă  $L \in \mathcal{L}(V, W)$  atunci  $\ker L \leq V$ .

Dimensiunea nucleului aplicației liniare  $L$  se numește **defectul** acestei aplicații.

**Exemplul 3.2.1.** Dacă  $L$  este aplicația definită la Exemplul 3.1.5, atunci  $\dim \ker L =$

1. Într-adevăr, cum  $L(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$ , avem succesiv:

$$L(x_1, x_2, x_3) = (0, 0) \Leftrightarrow (x_1 - x_2, x_2 - x_3) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3.$$



Deci

$\ker L = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 1, 1)\}$ ,  
iar  $\{(1, 1, 1)\}$  este o bază pentru  $\ker L$ . Prin urmare  $\dim \ker L = 1$ .

Reamintim că dacă  $f : A \rightarrow B$  este o funcție, atunci **imaginea** sa este  $\text{Im } f = f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\}$ . Imaginea unei aplicații liniare este un subspațiu al codomeniului său.

**Propoziția 3.2.2.** Dacă  $L \in \mathcal{L}(V, W)$  atunci  $\text{Im } L \leq W$ . Dimensiunea imaginii aplicației  $L$  se numește **rangul** acestei aplicații.

**Exemplul 3.2.2.** Dacă  $L$  este aplicația definită la Exemplul 3.1.5, atunci  $\dim \text{Im } L = 2$ . Într-adevăr, cum  $L(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - x_2, x_2 - x_3, )$ , imaginea este

$$\begin{aligned} \text{Im } L &= \{(x_1 - x_2, x_2 - x_3, ) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x_1(1, 0) + x_2(-1, 1) + x_3(0, -1)\} = \text{span}\{(1, 0), (-1, 1), (0, -1)\}. \end{aligned}$$

Prin urmare  $\{(1, 0), (-1, 1)\}$  este o bază a imaginii, deci  $\dim \text{Im } L = 2$ , și, în consecință,  $\text{Im } L = \mathbb{R}^2$ .

Din exemplele 3.2.1 și 3.2.2 observăm că dimensiunea domeniului de definiție al aplicației  $L$  este suma dintre defectul și rangul acestei transformări liniare. Proprietatea este valabilă pentru orice aplicație liniară.

**Teorema 3.2.1. Teorema dimensiunii.** Dacă  $L \in \mathcal{L}(V, W)$  atunci  $\dim \ker L + \dim \text{Im } L = \dim V$ .

**Exemplul 3.2.3.** Fie  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ,  $f(x, y, z) := (x + y + z, x - z)$ . Să determinăm  $\dim \ker f$  și  $\dim \text{Im } f$ .

Deoarece

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y + z, x - z) = (0, 0)\} = \\ &= \{(x, -2x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{span}((1, -1, 1)), \end{aligned}$$

rezultă că  $\dim \ker f = 1$ . Din teorema precedentă decurge imediat că  $\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2$ .

Mai mult, cum  $\text{Im } f \leq \mathbb{R}^2$  și  $\dim \text{Im } f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ , rezultă că  $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ , adică  $f$  este surjectivă.

**Propoziția 3.2.3.** Fie  $L \in \mathcal{L}(V, W)$ . Atunci

- a.  $L$  este injectivă dacă și numai dacă  $\ker L = \{\theta_V\}$ .
- b.  $V \cong W$  dacă și numai dacă  $\exists f \in \mathcal{L}(V, W)$  astfel încât  $\ker f = \{\theta_V\}$  și  $\text{Im } f = W$ .



$$\begin{aligned} f(e_2) &= (1, 0) = 1 \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2 \\ f(e_3) &= (1, -1) = (1, 0) - (0, 1) = 1 \cdot e'_1 - 1 \cdot e'_2 \end{aligned}$$

înseamnă că

$$f_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să verificăm expresia analitică matriceală dată în propoziția precedentă. Dacă  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  atunci  $v_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Deoarece  $f(v) = (x + y + z)e'_1 + (x - z)e'_2$ , avem

$$f(v)_{B'} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - z \end{pmatrix} = f_{BB'} \cdot v_B.$$

Să mai remarcăm faptul că rangul aplicației  $f$  coincide cu rangul matricei  $f_{BB'}$ :

$$\text{rang}(f_{BB'}) = \dim \text{Im } f.$$

De asemenea defectul aplicației coincide cu dimensiunea subspațiului nul al matricei aplicației  $f$ :

$$\dim \text{Null}(f_{BB'}) = \dim \ker f.$$

Aceste egalități sunt valabile pentru orice aplicație liniară.

**Propoziția 3.3.2.** Fie  $f \in \mathcal{L}(V, W)$  și  $f_{B_V B_W}$  matricea ei în perechea de baze  $B_V, B_W$ . Atunci rangul aplicației  $f$  coincide cu rangul matricei  $f_{B_V B_W}$ , iar defectul aplicației  $f$  coincide cu  $\dim \text{Null}(f_{B_V B_W})$ .

**Exemplul 3.3.2.** Să determinăm defectul și rangul aplicației

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^2), \quad f(c + bx + ax^2) := (a + b + c, c - a).$$

Deoarece matricea aplicației  $f$  în perechea de baze canonice  $B = \{1, x, x^2\}$   $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$  este  $f_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , din Exemplul 3.3.1 rezultă că rangul aplicației este egal cu 2, iar defectul ei este egal cu 1 (vezi și Exemplul 3.1.13).

Matricea compusei a două aplicații liniare coincide cu produsul matricelor celor două transformări liniare.

**Propoziția 3.3.3. Matricea compusei și matricea inversei.** Fie  $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$  și  $g \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$ ,  $B_1$  o bază în  $V_1$ ,  $B_2$  o bază în  $V_2$  și  $B_3$  o bază în  $V_3$ . Atunci

$$(g \circ f)_{B_1 B_3} = g_{B_2 B_3} \cdot f_{B_1 B_2}.$$

Dacă  $f$  este izomorfism, atunci matricea  $f_{B_1 B_2}$  este inversabilă și

$$f_{B_2 B_1}^{-1} = (f_{B_1 B_2})^{-1}.$$

**Propoziția 3.3.4. Schimbarea bazelor.** Fie  $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ ,  $B_1, B'_1$  două baze în  $V_1$  și  $B_2, B'_2$  două baze în  $V_2$ . Atunci

$$f_{B'_1 B'_2} = T_{B_2 B'_2}^{-1} \cdot f_{B_1 B_2} \cdot T_{B_1 B'_1}$$

unde  $T_{B_1 B'_1}$  este matricea de trecere de la baza  $B_1$  la baza  $B'_1$ , iar  $T_{B_2 B'_2}$  este matricea de trecere de la baza  $B_2$  la baza  $B'_2$ .

**Exemplul 3.3.3.** Să se determine matricea aplicației (de la Exemplul 3.3.1)  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ,  $f(x, y, z) := (x + y + z, x - z)$  în perechea de baze  $B_1 = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1), w_1 = (1, 1), w_2 = (1, -1)\}$ .

Vom folosi rezultatul de la Exemplul 3.3.1 și propoziția precedentă. Cum matricea de trecere de la baza canonică  $B$  din  $\mathbb{R}^3$  la baza  $B_1$  este

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

iar matricea de trecere de la baza canonică  $B'$  din  $\mathbb{R}^2$  la baza  $B_2$  este

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

rezultă că

$$f_{B_1 B_2} = T_2^{-1} f_{B B'} T_1 = T_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T_2^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru ultimul produs aplicăm tehnica transformărilor elementare pe linie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Prin urmare } f_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

## B. PROBLEME REZOLVATE

1. Stabiliți care din funcțiile de mai jos sunt aplicații liniare:

- (a)  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) = (x - y, 2x + 7y, 2x + 1)$   
 (b)  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = (2x, x^2)$   
 (c)  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) = (x - 2y, x + 3y + 2z, 0)$ .

*Soluție.*

- (a) O aplicație liniară  $f : V \longrightarrow W$  satisface relația  $f(\theta_V) = \theta_W$ . Deoarece  $f(0, 0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$ ,  $f$  nu este liniară.  
 (b)  $f(ax) = (2ax, a^2x^2)$ , pe când  $af(x) = (2ax, ax^2)$ ; așadar, pentru  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ,  $f(ax) \neq af(x)$ , deci  $f$  nu este liniară.  
 (c) Avem de verificat că  $f(x + x', y + y', z + z') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$  și  $f(ax, ay, az) = af(x, y, z)$ ,  $\forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}$ .  
 •  $f(x + x', y + y', z + z') = ((x + x') - 2(y + y'), (x + x') + 3(y + y') + 2(z + z'), 0) = (x - 2y + x' - 2y', x + 3y + 2z + x' + 3y' + 2z', 0) = (x - 2y, x + 3y + 2z, 0) + (x' - 2y', x' + 3y' + 2z', 0) = f(x, y, z) + f(x', y', z')$   
 •  $f(ax, ay, az) = (ax - 2ay, ax + 3ay + 2az, 0) = a(x - 2y, x + 3y + 2z, 0) = af(x, y, z)$ .

2. Determinați forma generală a unei aplicații liniare

- (a)  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , (b)  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , (c)  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ .

*Soluție.*

- (a) Notând  $f(1) = a$ , avem  $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = ax$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Reciproc, se verifică imediat că toate funcțiile de forma  $f(x) = ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , sunt liniare.  
 (b) Notând  $f(1, 0) = a$  și  $f(0, 1) = b$ , avem  $f(x, y) = f(x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)) = x \cdot f(1, 0) + y \cdot f(0, 1) = ax + by$ . Reciproc, se verifică imediat că toate funcțiile de forma  $f(x, y) = ax + by$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , sunt liniare.  
 (c) Notând  $f(1) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , avem  $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot (a, b) = (ax, bx)$ . Reciproc, se verifică imediat că toate funcțiile de forma  $f(x) = (ax, bx)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , sunt liniare.

3. Arătați că dacă  $f, g : V_1/K \longrightarrow V_2/K$  sunt aplicații liniare, iar dacă  $\alpha, \beta \in K$ , atunci și  $\alpha f + \beta g$  este aplicație liniară.

*Soluție.*

Fie  $x, y \in V_1$  și  $a, b \in K$ , arbitrare. Atunci  $(\alpha f + \beta g)(ax + by) = \alpha f(ax + by) + \beta g(ax + by) = \alpha(af(x) + bf(y)) + \beta(ag(x) + bg(y)) = a(\alpha f(x) + \beta g(x)) + b(\alpha f(y) + \beta g(y)) = a(\alpha f + \beta g)(x) + b(\alpha f + \beta g)(y)$ , ceea ce arată că  $\alpha f + \beta g$  este liniară.

4. Fie  $V_1/K$ ,  $V_2/K$  și  $V_3/K$  trei spații vectoriale și  $f : V_1 \longrightarrow V_2$  și  $g : V_2 \longrightarrow V_3$  două aplicații liniare. Arătați că  $g \circ f : V_1 \longrightarrow V_3$  este o aplicație liniară.

*Soluție.*

Fie  $x, y \in V_1$  și  $a, b \in K$ , arbitrare. Atunci  $(g \circ f)(ax + by) = g(f(ax + by)) = g(af(x) + bf(y)) = ag(f(x)) + bg(f(y)) = a(g \circ f)(x) + b(g \circ f)(y)$ , deci  $g \circ f$  este liniară.

5. Determinați expresia analitică a aplicației liniare  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  dacă

(a)  $f(1, 0) = (1, 2)$  și  $f(0, 1) = (-1, 2)$ ;

(b)  $f(1, 1) = (2, 3)$  și  $f(3, 1) = (4, 5)$ .

*Soluție.*

(a) Pentru a determina  $f(x, y)$  pornind de la valorile lui  $f$  pe vectorii bazei canonice, folosim scrierea lui  $(x, y)$  în baza canonică:  $(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)$ . Astfel,  $f(x, y) = f(x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)) = x \cdot f(1, 0) + y \cdot f(0, 1) = x \cdot (1, 2) + y \cdot (-1, 2) = (x - y, 2x + 2y)$ .

(b) Pentru a determina  $f(x, y)$  pornind de la valorile lui  $f$  pe vectorii bazei formate cu vectorii  $(1, 1)$  și  $(3, 1)$ , folosim scrierea lui  $(x, y)$  în această bază. Fie  $(x, y) = a(1, 1) + b(3, 1)$ , adică  $(x, y) = (a + 3b, a + b)$ . Rezolvând acest sistem (cu necunoscutele  $a, b$ ), obținem  $a = \frac{3y - x}{2}$  și  $b = \frac{x - y}{2}$ . Folosind această

$$\begin{aligned} \text{scriere, avem } f(x, y) &= f\left(\frac{3y - x}{2} \cdot (1, 1) + \frac{x - y}{2} \cdot (3, 1)\right) = \frac{3y - x}{2} \cdot f(1, 1) + \\ &\frac{x - y}{2} \cdot f(3, 1) = \frac{3y - x}{2} \cdot (2, 3) + \frac{x - y}{2} \cdot (4, 5) = \\ &\left(\frac{3y - x}{2} \cdot 2 + \frac{x - y}{2} \cdot 4, \frac{3y - x}{2} \cdot 3 + \frac{x - y}{2} \cdot 5\right) = (x + y, x + 2y). \end{aligned}$$

6. Scrieți matricea aplicației liniare  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = (x + 2y, x + y - z)$  relativ la bazele  $B_1$  și  $B_2$ , dacă:

(a)  $B_1 = \{(1, 2, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3)\}$ ,  $B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ ;

(b)  $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ,  $B_2 = \{(1, 2), (1, 0)\}$ .

*Soluție.*

(a) Calculăm valorile lui  $f$  pe vectorii bazei  $B_1$ :  $f(1, 2, 0) = (5, 3)$ ,  $f(1, 0, 0) = (1, 1)$ ,  $f(1, 2, 3) = (5, 0)$ . Apoi exprimăm acești vectori în baza  $B_2$ :  $(5, 3) = 5 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1)$ ,  $(1, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1)$ ,  $(5, 0) = 5 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1)$ .

Matricea lui  $f$  relativ la bazele  $B_1, B_2$  este  $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(b) Calculăm valorile lui  $f$  pe vectorii bazei  $B_1$ :  $f(1, 0, 0) = (1, 1)$ ,  $f(0, 1, 0) = (2, 1)$ ,  $f(0, 0, 1) = (0, -1)$ . Apoi exprimăm acești vectori în baza  $B_2$ :  $(1, 1) = a \cdot (1, 2) + b \cdot (1, 0)$  implică  $a = b = \frac{1}{2}$ ;  $(2, 1) = c \cdot (1, 2) + d \cdot (1, 0)$  implică  $c = \frac{1}{2}$ ,  $d = \frac{3}{2}$ ;  $(0, -1) = e \cdot (1, 2) + g \cdot (1, 0)$  implică  $e = -\frac{1}{2}$ ,  $g = \frac{1}{2}$ .

Matricea lui  $f$  relativ la bazele  $B_1, B_2$  este  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

7. Pentru fiecare din aplicațiile liniare de mai jos, calculați  $\ker f$  și deduceți dacă  $f$  este injectivă, apoi dacă  $f$  este surjectivă.

(a)  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$ ,  $f(a, b) = (a - b)X - (a + b)$

(b)  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(a, b) = (a + b, a + 2b, a + 3b)$

(c)  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(a, b, c) = (a + b, a + c)$

$$(d) f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(aX^2 + bX + c) = (a - b, b - c, c - a).$$

*Soluție.*

(a)  $\ker f = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a - b)X - (a + b) = 0\}$ . Atenție, este vorba de o egalitate de polinoame, nu de o ecuație. Două polinoame sunt egale dacă au aceiași coeficienți, deci  $\ker f = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a - b = 0, a + b = 0\}$ . Rezolvând acest (banal) sistem, obținem  $a = b = 0$ , deci  $\ker f = \{(0, 0)\}$  ceea ce arată că  $f$  este injectivă. Deoarece  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^2$ , deducem că  $\dim \operatorname{Im} f = 2$ . Cum  $\operatorname{Im} f$  este un subspațiu de dimensiune 2 al lui  $\mathbb{R}_1[X]$  care este un spațiu de dimensiune 2, rezultă că  $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_1[X]$ , deci  $f$  este și surjectivă, adică  $f$  este un izomorfism.

(b)  $\ker f = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid f(a, b) = (0, 0, 0)\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a + b, a + 2b, a + 3b) = (0, 0, 0)\}$ . Obținem, ca de obicei, un sistem liniar și omogen. De astă dată sistemul are 3 ecuații și două necunoscute,  $a$  și  $b$ . Găsim imediat că  $a = b = 0$  este unica soluție a acestui sistem, deci  $\ker f = \{(0, 0)\}$  ceea ce arată că  $f$  este injectivă. Deoarece  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^2$ , deducem că  $\dim \operatorname{Im} f = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ , deci  $f$  nu este surjectivă.

(c)  $\ker f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid f(a, b, c) = (0, 0)\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a + b, a + c) = (0, 0)\}$ . Ajungem din nou la un sistem liniar și omogen, de astă dată cu două ecuații și trei necunoscute:  $a + b = 0, a + c = 0$ . Mulțimea soluțiilor acestui sistem este  $\ker f = \{(m, -m, -m) \mid m \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}(1, -1, -1)$ , deci  $\dim \ker f = 1$ . Deducem mai întâi că  $f$  nu este injectivă. Apoi, deoarece  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$ , deducem că  $\dim \operatorname{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ , deci  $f$  este surjectivă.

(d)  $\ker f = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \mid f(aX^2 + bX + c) = (0, 0, 0)\} = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \mid (a - b, b - c, c - a) = (0, 0, 0)\} = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \mid a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0\} = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \mid a = b = c\} = \{mX^2 + mX + m \in \mathbb{R}_2[X] \mid m \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}(X^2 + X + 1)$ , deci  $\dim \ker f = 1$  (așadar  $f$  nu este injectivă). Din  $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_2[X]$  deducem că  $\dim \operatorname{Im} f = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ , deci  $f$  nu este nici injectivă și nici surjectivă.

8. Stabiliți dacă aplicațiile liniare definite mai jos sunt sau nu izomorfisme.

$$(a) f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], f(a, b) = (a + b)X^2 - aX - b;$$

$$(b) f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a - b & b - c \\ c - d & d - a \end{pmatrix};$$

$$(c) f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(aX^2 + bX + c) = (a, a + b, a + b + c).$$

*Soluție.*

(a) Faptul că  $f$  nu este izomorfism se poate demonstra în foarte multe feluri:  
-  $\dim \mathbb{R}^2 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ , deci între cele două spații nu poate exista niciun izomorfism

-  $f$  nu este surjectivă deoarece în imagine sunt numai polinoame care au suma coeficienților 0.

(b) Deoarece  $\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $f$  este injectivă dacă și numai dacă ea este surjectivă. Pentru a studia injectivitatea, sau surjectivitatea, putem

calcula  $\ker f$  (respectiv  $\operatorname{Im} f$ ). În cazul de față, ar fi mai simplu să observăm că  $f(1, 1, 1, 1) = O_2 = f(0, 0, 0, 0)$ , deci  $f$  nu este injectivă, prin urmare  $f$  nu este izomorfism. În lipsa unei asemenea observații putem calcula  $\ker f = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid f(a, b, c, d) = O_2\} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a - b = b - c = c - d = d - a = 0\} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = b = c = d\} = \{(t, t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$ , deci  $f$  nu este injectivă; alternativ, se poate determina  $\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \mid u + v + w + x = 0 \right\} \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , deci  $f$  nu este nici surjectivă.

(c) Deoarece  $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ , pentru a demonstra că  $f$  este izomorfism este suficient să arătăm că  $f$  este injectivă, adică  $\ker f = \{0\}$ . Avem  $f(aX^2 + bX + c) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (a, a + b, a + b + c) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a = b = c = 0 \Leftrightarrow aX^2 + bX + c \equiv 0$  adică  $\ker f = \{0\}$ . Așadar  $f$  este injectivă, deci bijectivă, adică izomorfism.

## C. PROBLEME PROPUSE

1. Dovediți că următoarele aplicații sunt liniare.

- (a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) := (x + y, x - y, 0)$ ;
- (b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) := (x + y + z, x - y)$ ;
- (c)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) := (x + y + z, x - y, x + z)$ .

2. Dovediți că următoarele aplicații nu sunt liniare.

- (a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) := (x^2 + y, x - y, 0)$ ;
- (b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) := (x + y + z, xy)$ ;
- (c)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) := (yz, xy, xz)$ .

3. Demonstrați Propoziția 3.1.1.

4. Care dintre următoarele funcții sunt aplicații liniare?

- (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ ;
- (d)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ ;
- (e)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x - y$ ;
- (f)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x - y^2$ ;
- (g)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x - y + 1$ ;



- (h)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = ax + by + c$ , unde,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ;  
 (i)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = (x, 2x)$ ;  
 (j)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = (ax + b, cx + d)$ , unde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ;  
 (k)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) = (x, y, a + y)$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .  
 (l)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) = (\sin x, \cos y, y)$ .

*Răspuns.* (a) da,  $\forall a \in \mathbb{R}$ ; (b) pentru  $a = 0$ ; (c) pentru  $a = 0$ ; (d) pentru  $b = 0$ ;  
 (e) da; (f) nu; (g) nu; (h) pentru  $c = 0$ ; (i) da; (j) pentru  $b = d = 0$ ; (k) pentru  
 $a = 0$ ; (l) nu.

5. Dovediți că următoarele aplicații sunt liniare.

- (a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ,  $f(x, y) := \begin{pmatrix} x & 3y \\ -x & 0 \\ 2y & x \end{pmatrix}$ ;  
 (b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x & x + z \\ z - 3y & x - y \end{pmatrix}$ ;  
 (c)  $f : \mathbb{R}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $f(A) := A^T$ ;  
 (d)  $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x]$ ,  $f(p) := q$ , unde  $q(x) := p(x^2)$ ;  
 (e)  $f : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ ,  $f(p) := p''$ .

6. Dovediți că următoarele aplicații nu sunt liniare.

- (a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ,  $f(x, y) := \begin{pmatrix} x & 3y \\ -x & 0 \\ 2y & xy \end{pmatrix}$ ;  
 (b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x & x + z \\ z - 3y & x - y + 1 \end{pmatrix}$ ;  
 (c)  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $f(A) := A^2$ .  
 (d)  $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x]$ ,  $f(p) := p^2$ ;  
 (e)  $f : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ ,  $f(p) := p''' \cdot p'''$ .

7. Să se determine expresia analitică a aplicației liniare  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  și numerele  $m, n$  cunoscând că matricea aplicației în perechea de baze canonice este:

- (a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;  
 (b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;  
 (c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ;  
 (d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ ;

$$(e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$(f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

8. Demonstrați Propoziția 3.1.6.

9. Să se determine matricea aplicației liniare  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  și numerele  $m, n$  cunoscând că expresia analitică în perechea de baze canonice este:

- (a)  $f(x) = 3x$ ;
- (b)  $f(x) = (3x, -x)$ ;
- (c)  $f(x, y) = 3x - y$ ;
- (d)  $f(x, y) = (3x - y, x)$ ;
- (e)  $f(x, y) = (3x - y, x, 2y)$ ;
- (f)  $f(x, y, z) = (3x - y, x + z)$ ;
- (g)  $f(x, y, z) = (3x - y, x + z, x + y + z)$ .

10. Fie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) = (x - y, y, 2x + y)$ . Să se arate că această funcție este aplicație liniară, apoi să se determine nucleul și imaginea sa.

*Răspuns.*  $\{(0, 0)\}; \{(a - b, b, 2a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ .

11. Fie  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$ . Să se arate că  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  și să se determine defectul și rangul aplicației  $f$ .

*Răspuns.* 1, respectiv 2.

12. Fie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) = (x - y, y, 2x + y)$ ,  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $g(x, y, z) = (x - y, 2x + y, y + z, x - z)$  și  $B_2, B_3, B_4$  bazele canonice ale spațiilor  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ , respectiv  $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}$ . Să se determine matricea

- (a) aplicației  $f$  în perechea de baze  $B_2, B_3$ ;
- (b) aplicației  $g$  în perechea de baze  $B_3, B_4$ ;
- (c) aplicației  $g \circ f$  în perechea de baze  $B_2, B_4$ ;
- (d) aplicației  $g \circ f$  în perechea de baze  $\{(1, 1), (1, -1)\}, \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$ .

13. Fie  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y) = (x + y, y + az, z + bx)$ . Să se arate că această funcție este aplicație liniară, apoi să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât defectul ei să fie 1.

*Răspuns.*  $ab + 1 = 0$

14. Fie  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ ,  $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & y & z \end{pmatrix}$ .

- (a) Să se arate că aplicația definită este liniară.
- (b) Să se determine o bază a imaginii aplicației  $f$ .
- (c) Să se calculeze defectul acestei aplicații.
- (d) Să se scrie matricea aplicației în bazele canonice.
- (e) În baza canonică din  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$  interschimbăm primii doi vectori, iar în baza canonică din  $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  înlocuim al doilea vector cu suma primilor doi. Care este matricea aplicației  $f$  în noile baze?

*Răspuns.* (b).  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$  (c). 0;

(d).  $[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$  (e).  $[f]_{B'_1 B'_2} = E_{21}(-1)[f]_{P(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

15. Fie  $f : V \rightarrow W$  o aplicație liniară. Să se arate că:

- (a)  $\ker f \leq V$ ;
- (b)  $\operatorname{Im} f \leq W$ ;
- (c)  $f(U) \leq \operatorname{Im} f$  pentru orice  $U \leq V$ .

16.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ . Să se determine constanta  $a$  astfel încât funcția  $f$  să fie izomorfism.

*Răspuns.*  $a \in \mathbb{R}^*$ .

17. Este aplicația  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - y, x + y)$  un automorfism al spațiului  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ ?

*Răspuns.* Da, deoarece defectul aplicației este nul.

18. Să se determine constantele  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  astfel încât aplicația liniară  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (ax + b, cx + d)$

- (a) să fie izomorfism;
- (b) să aibă, în bazele canonice, matricea  $\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}.$

*Răspuns.* (a)  $a, b, c, d \in \emptyset$ . (b)  $a = 1, b = 0, c = 13, d = 0$ .

19. Fie  $V_1/K$  și  $V_2/K$  două spații vectoriale. Arătați că  $\mathcal{L}(V_1, V_2) \simeq K^{n \times m}$ , unde  $n := \dim(V_1)$  și  $m := \dim(V_2)$ .

20. Să se determine constantele  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  astfel încât aplicația liniară  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}), f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} ax & by \\ cz & dt \end{pmatrix}$

(a) să fie izomorfism;

(b) să aibă, în bazele canonice, matricea  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

*Răspuns.* (a)  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ ; (b)  $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ .

21. Demonstrați Propoziția 3.1.7.

22. Să se determine constantele  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  astfel încât operatorul liniar  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$  să fie automorfism, apoi să se determine matricea acestuia în baza canonică.

*Răspuns.*  $ad \neq bc$ ;  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

23. Arătați că există un singur operator liniar al spațiului real tridimensional care asigură următoarele transformări (vectorii sunt dați prin coordonatele lor într-o anumită bază):

$(2, 3, 5) \mapsto (1, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 2) \mapsto (1, 1, -1)$ ,  $(1, 0, 0) \mapsto (2, 1, 2)$ ;

determinați matricea operatorului în baza în care sunt date coordonatele vectorilor.

*Răspuns.*  $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

24. Să se determine dimensiunea spațiului  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})/\mathbb{R}$ .

25. Să se dea un câte exemplu de aplicație liniară  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R})$

(a) care să fie izomorfism;

(b) care să nu fie izomorfism.

26. Demonstrați Propoziția 3.1.8.

27. Să se determine dimensiunea spațiului  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})/\mathbb{R}$ .

28. Să se dea un câte exemplu de aplicație liniară  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \mathbb{R}_1[x])$

(a) care să fie izomorfism;

(b) care să nu fie izomorfism.

29. Studiați dacă  $f(x, y, z) := \begin{cases} (x, y), & \text{dacă } z = 13x - y \\ (0, 0), & \text{dacă } z \neq 13x - y \end{cases}$  definește o aplicație liniară  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ .

30. Se știe că o aplicație liniară între spațiile vectoriale  $\mathbb{R}_2[x]/\mathbb{R}$  și  $\mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$  realizează transformările:  $1 \mapsto 1 + x$ ,  $x \mapsto 1 + 2x$ ,  $x^2 \mapsto 1 + x^3$ .

- (a) În ce se transformă vectorul  $1 - 13x + 23x^2$ ?
- (b) Care este matricea acestei aplicații în bazele canonice?
- (c) Determinați rangul acestei aplicații liniare.
31. Demonstrați Propoziția 3.3.2.
32. Fie  $B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  și  $B' = \left\{ e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  baze în  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ , respectiv  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ , iar  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  astfel încât  $f(e_1) = e'_1 - e'_2$ ,  $f(e_2) = e'_2$ ,  $f(e_3) = -e'_1 + e'_2$ .
- (a) Să se scrie matricea aplicației  $f$  în perechea de baze  $B, B'$ .
- (b) Să se determine  $f(e_1 - e_2 + e_3)$ .
- (c) Să se calculeze defectul aplicației  $f$ .
- (d) Să se scrie matricea aplicației în bazele canonice.
33. Fie  $W/K$  și  $V/K$  două spații vectoriale. Să se arate că spațiile date sunt izomorfe dacă și numai dacă ele au aceeași dimensiune.
34. \* Fie  $V_1, V_2, \dots, V_n$  și  $W$  spații vectoriale peste corpul  $K$ ,  $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  spațiul produs și  $f : V \rightarrow W$  o funcție. Arătați că  $f \in \mathcal{L}(V, W)$  dacă și numai dacă există  $f_1 \in \mathcal{L}(V_1, W), \dots, f_n \in \mathcal{L}(V_n, W)$  astfel încât  $f(v_1, v_2, \dots, v_n) = f_1(v_1) + f_2(v_2) + \dots + f_n(v_n)$ .
35. \* Fie  $m \in \mathbb{N}^*$ . Să se determine  $n \in \mathbb{N}$  pentru care există  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_n[x])$  a cărei matrice în bazele canonice este matricea unitate.
36. \* Fie  $f$  o aplicație liniară. Să se arate că funcția  $f$  este injectivă dacă și numai dacă nucleul său este subspațiul nul.
37. \* O aplicație liniară între două spații reale are matricea  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ . Să se determine numerele pozitive  $a, b, c$  astfel ca aplicația să nu fie surjectivă.  
*Răspuns.*  $a = b = c \in (0, \infty)$ .
38. \* Fie  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ ,  $f(x, y) = (x - ay, y - ax, y - x)$ . Să se determine  $a \in \mathbb{N}$  și  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  astfel încât  $g \circ f = 1_{\mathbb{R}^2}$  și  $g(1, 0, 0) = g(1, 1, 0) \in \mathbb{N}^2$ .  
*Răspuns.*  $a = 0$ ,  $g(x, y, z) := (x, x + z)$ .
39. \* Fie  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ ,  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  și  $f \circ g = h$ , unde  $g(x, y) = (x + y, x - y)$  și  $h(x, y) = (2x, 2y, 3x + y)$ . Să se determine matricea aplicației  $f$  în perechea de baze  $B = \{(-3, 7), (1, -2)\}$ ,  $B' = \{(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}$ .

## 4 VALORI PROPRII ȘI VECTORI PROPRII

Problematica pe care o abordăm în acest capitol are aplicații în cele mai diverse domenii. Folosim valori și vectori proprii pentru optimizarea sistemelor mari, în ierarhizarea paginilor web, în orice analiză de rețele (electrice, de calculatoare, sociale, neuronale, etc.), ori pentru determinarea pragului de infectare a unui sistem.

Dar, probabil, cele mai importante aplicații ale acestor concepte sunt în rezolvarea problemelor de echilibru pentru ecuații de forma  $Ax = y$ , unde  $A$  este o matrice pătratică, în conexiune cu problemele de dinamică pentru sisteme de ecuații diferențiale de forma  $\frac{dX}{dt} = AX$ ; soluția unui astfel de sistem - care de regulă nu poate fi determinată prin metoda eliminării -, oscilează în funcție de timpul  $t$ .

O bună soluționare a unor asemenea probleme se bazează pe *determinarea unor scalari  $\lambda$  și a unor matrice coloană nenule  $x$  astfel ca  $Ax = \lambda x$* . Aceasta este problema centrală pe care o abordăm în cele ce urmează, iar rezolvarea ei este esențial legată de depistarea de tehnici simple de calcul al puterilor  $A^2, A^3, A^4, \dots, A^m$  ale matricei  $A$ .

### A. TEORIE

#### 4.1. Operatori. Problema diagonalizării

Un răspuns parțial la problema calculului matricei  $A^m$  este dat de metoda diagonalizării.

*Peste tot în cele ce urmează  $V$  este un spațiu vectorial peste corpul  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , iar  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  și  $B' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$  sunt două baze în acest spațiu. Reamintim că o funcție liniară  $L: V \rightarrow V$  se numește **operator liniar** (al spațiului  $V$ ), iar mulțimea operatorilor liniari ai spațiului  $V$  o notăm cu  $\mathcal{L}(V)$  (în loc de  $\mathcal{L}(V, V)$ ). Numim **matrice a operatorului**  $L$  în baza  $B$  și o notăm  $L_B$  matricea pătratică a aplicației  $L$  în perechea de baze  $B, B$ , i.e.  $L_B := L_{BB}$ . Un operator liniar și bijectiv al spațiului  $V$  se numește **automorfism** (al spațiului  $V$ ).*

Un subspațiu  $W$  al spațiului vectorial  $V$  se numește **subspațiu invariant** al lui  $T$  (sau **subspațiu  $T$ -invariant**) dacă  $T(W) \subseteq W$ , adică dacă  $T(w) \in W, \forall w \in W$ . De exemplu,  $\{\theta_V\}$  și  $V$  sunt subspații invariante ale lui  $T$ .

Deoarece operatorii liniari sunt aplicații liniare, prin particularizare, obținem următoarele proprietăți.

**Propoziția 4.1.1.** Fie  $f \in \mathcal{L}(V)$ ,  $g \in \mathcal{L}(V)$  și  $T_{BB'}$  matricea de trecere de la baza  $B$  la baza  $B'$ .

1.  $f_B \in K^{n \times n}$ .
2.  $f \circ g, g \circ f \in \mathcal{L}(V)$  și  $(f \circ g)_B = f_B \cdot g_B$ .
3.  $f_{B'} = T_{BB'}^{-1} \cdot f_B \cdot T_{BB'}$ .
4. Orice matrice  $A \in K^{n \times n}$  definește în mod unic un operator  $h \in \mathcal{L}(V)$  pentru care  $A = h_B$ ; expresia sa analitică este  $h(v) = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n$ , unde

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \in V, \text{ iar } Av_B := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

5.  $f$  este automorfism dacă și numai dacă  $f_B$  este nesingulară; în acest caz matricea operatorului  $f^{-1}$  este inversa matricei operatorului  $f$ , adică  $(f^{-1})_B = (f_B)^{-1}$ .

**Definiția 4.1.1. Matrice diagonală.** O matrice de forma

$$D := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

în care cel puțin unul dintre scalarii  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  este nenul se numește **matrice diagonală**.

**Problema diagonalizării.** Ne punem problema depistării unui procedeu de calcul eficient al matricei  $A^m$ , unde  $A$  este o matrice pătratică, iar  $m$  este un număr întreg pozitiv. Dacă  $D$  este matricea diagonală din definiția de mai sus, atunci, prin inducție matematică obținem că  $D^m$  este de asemenea matrice diagonală și

$$D^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m).$$

Fie  $L \in \mathcal{L}(V)$  și  $L_B := A$  matricea sa în baza  $B$ . Presupunem că există o bază  $B'$  în care matricea operatorului  $L$  este matricea diagonală  $L_{B'} := D$ . Atunci  $D = T_{BB'}^{-1} \cdot A \cdot T_{BB'}$  și, de aici,

$$A = T_{BB'} \cdot D \cdot T_{BB'}^{-1}.$$

Ridicând la pătrat matricea  $A$  obținem

$$A^2 = T_{BB'} \cdot D \cdot T_{BB'}^{-1} \cdot T_{BB'} \cdot D \cdot T_{BB'}^{-1} = T_{BB'} \cdot D^2 \cdot T_{BB'}^{-1}.$$

Prin inducție completă deducem că

$$A^m = T_{BB'} \cdot D^m \cdot T_{BB'}^{-1}.$$

Prin urmare calculul matricei  $A^m$  este facil atunci când matricea  $A$  se poate **aduce la formă diagonală**.

*Ne punem problema existenței unei baze în care un operator (matrice pătratică) are forma diagonală și, în cazul existenței, găsirea acestei baze și a formei diagonale. Aceasta este **problema diagonalizării**.*

Vom folosi adesea expresiile de *operator diagonalizabil* sau *matrice diagonalizabilă*.

**Definiția 4.1.2. Matrice diagonalizabilă. Operator diagonalizabil.** Fie  $L \in \mathcal{L}(V)$  și  $A$  matricea sa într-o bază  $B$ . Dacă există o bază  $B'$  în care matricea  $L_{B'}$  este matrice diagonală spunem că  $L$  este un *operator diagonalizabil* și că matricea  $A$  este *matrice diagonalizabilă*.

**Observația 4.1.1.** Dacă  $L \in \mathcal{L}(V)$  are forma diagonală  $L_B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  în baza  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  atunci  $L_B v_{1B} = \lambda_1 v_{1B}$ ,  $L_B v_{2B} = \lambda_2 v_{2B}$ ,  $\dots$ ,  $L_B v_{nB} = \lambda_n v_{nB}$ , ori, echivalent

$$L(v_1) = \lambda_1 v_1, L(v_2) = \lambda_2 v_2, \dots, L(v_n) = \lambda_n v_n.$$

Prin urmare problema diagonalizării este strict legată de problema depistării unor scalari  $\lambda$  și a unor *vectori nenuli*  $v$  astfel încât  $L(v) = \lambda v$ .

**Exemplul 4.1.1.** Matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  este matricea operatorului  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ,  $f(x, y) = (x + y, x + y)$  în baza canonică. Dacă ea ar fi diagonalizabilă și  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  ar fi forma sa diagonală în baza  $B = \{v_1, v_2\}$  atunci, conform observației precedente, *trebuie să găsim*  $\lambda \in \mathbb{R}$  și doi vectori liniar independenți de forma  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  astfel încât  $L(v) = \lambda v$ . Matriceal

$$(A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru ca acest sistem să admită soluții netriviale trebuie ca  $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$ , deci  $\lambda \in \{0, 2\}$ . Dacă  $\lambda = 0$  sistemul se reduce la ecuația  $x + y = 0$ , deci un vector nenul  $v_1 = (x, y)$  pentru care  $L(v_1) = \lambda v_1$  trebuie să aparțină mulțimii  $\{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ; alegem de exemplu  $v_1 = (1, -1)$ . Analog,



dacă  $\lambda = 2$  sistemul se reduce la ecuația  $x - y = 0$ , deci un vector nenul  $v_2 = (x, y)$  pentru care  $L(v_2) = \lambda v_2$  trebuie să aparțină mulțimii  $\{x(1, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ; alegem de exemplu  $v_2 = (1, 1)$ . Am obținut baza  $B = \{v_1, v_2\}$ ; matricea de trecere de la baza canonică la baza  $B$  este  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , iar matricea operatorului în aceasta bază este matricea  $f_B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  adică o matrice diagonală.

Vom generaliza considerațiile făcute în acest exemplu, dând astfel răspuns problemei diagonalizării.

## 5.2. Valori proprii și vectori proprii

**Definiția 4.2.1.** Fie  $f \in \mathcal{L}(V)$  și  $A$  matricea sa în baza  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Un vector nenul  $v \in V \setminus \{\theta_V\}$  se numește **vector propriu** al operatorului liniar  $f$  (sau al matricei  $A$ ) dacă există un scalar  $\lambda \in K$  astfel încât

$$f(v) = \lambda v.$$

Numărul  $\lambda \in K$  se numește **valoare proprie** a operatorului liniar  $f$  (sau a matricei  $A$ ) asociată vectorului propriu  $v$ . Mulțimea valorilor proprii ale operatorului  $f$  (ale matricei  $A$ ) se notează cu  $\sigma(f)$  (respectiv  $\sigma(A)$ ) și se numește **spectrul** operatorului  $f$  (spectrul matricei  $A$ ).

Prin urmare  $\lambda \in \sigma(f)$  (atenție,  $\sigma(f) \subset K!$ ) dacă și numai dacă

$$\exists v \in V \setminus \{\theta_V\} : f(v) = \lambda v,$$

sau, echivalent,

$$\exists v \in \ker(f - \lambda \cdot id_V) \setminus \{\theta_V\}$$

sau, echivalent  $\exists v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \neq \theta_V$  astfel încât

$$v_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Null}(A - \lambda I_n) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

De aici obținem imediat că

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \text{ și } \lambda \in K.$$

**Observația 4.2.1.** Dacă  $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ , atunci pentru determinarea spectrului acestei matrice trebuie să rezolvăm ecuația polinomială de grad  $n$  cu coeficienți din  $K$  :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  sunt cele  $n$  rădăcini (complexe, unele, posibil, multiple) ale acestei ecuații și dacă  $m_1$  este ordinul de multiplicitate al rădăcinii  $\lambda_1$ ,  $m_2$  este ordinul de multiplicitate al rădăcinii  $\lambda_2$ , ...,  $m_k$  este ordinul de multiplicitate al rădăcinii  $\lambda_k$ , atunci  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ . În plus,  $\sigma(A) \subset \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ , iar dacă  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in K$  atunci  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ .

**Exemplul 4.2.1.** Pentru matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  studiată la Exemplul 4.1.1, spectrul este format din mulțimea soluțiilor ecuației  $\det(A - \lambda I_2) = 0$ , deci  $\sigma(A) =$

$\{0, 2\}$ .

**Definiția 4.2.2.** Fie  $A$  și  $f$  ca în Definiția 4.2.1. Funcția polinomială de grad  $n$  definită prin

$$p : K \rightarrow K, p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

se numește **polinomul caracteristic** al matricei  $A$  (al operatorului  $f$ ), iar ecuația de grad  $n$  cu coeficienți din  $K$

$$p(\lambda) = 0$$

se numește **ecuația caracteristică** a matricei  $A$  (a operatorului  $f$ ).

**Observația 4.2.2.** Cu aceste notații spectrul matricei  $A$  este

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \cap K,$$

unde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  sunt cele  $n$  rădăcini ale polinomului caracteristic.

Se verifică ușor că spectrul unui operator  $f$  nu depinde de baza  $B$ , i.e. dacă  $A'$  este matricea operatorului în baza  $B'$  atunci  $\sigma(A) = \sigma(A')$ .

S-a conturat următorul algoritm.

**Algoritm de calcul al vectorilor proprii.**

- Determinăm spectrul  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\} \subset K$  rezolvând ecuația caracteristică  $p(\lambda) = 0$  și alegând acele soluții care aparțin corpului  $K$ .
- Pentru fiecare  $\lambda \in \sigma(A)$  aflăm mulțimea

$$S_\lambda := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

știind că  $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \in S_\lambda$  dacă și numai dacă  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt soluțiile sistemului

$$(A - \lambda I_n) \cdot v_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_B \in \text{Null}(A - \lambda I_n).$$

- Mulțimea vectorilor proprii asociați valorii proprii  $\lambda \in \sigma(A)$  este  $S_\lambda \setminus \{\theta_V\}$ .

Mulțimea  $S_\lambda$  definită mai sus este un subspațiu vectorial al lui  $V$ . Mai mult:

**Propoziția 4.2.1.** Fie  $f \in \mathcal{L}(V)$  și  $\lambda \in \sigma(f)$ . Atunci

1.  $S_\lambda := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \leq V$ .
2.  $f(S_\lambda) \subset S_\lambda$ .

3. Dacă valorile proprii  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \sigma(f)$  sunt distincte (adică  $\lambda_i \neq \lambda_j$  dacă  $i \neq j$ ) și  $v_1, v_2, \dots, v_s$  sunt vectori proprii asociați acestor valori (adică  $f(v_i) = \lambda_i v_i$  pentru  $i \in \{1, \dots, s\}$ ) atunci  $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$  este un sistem de vectori liniar independent.
4. Dacă  $\lambda \in \sigma(f)$  este o rădăcină multiplă de ordinul  $m_\lambda$  a polinomului caracteristic atunci

$$\dim S_\lambda \leq m_\lambda.$$

Subspațiul  $S_\lambda$  se numește **subspațiul propriu** asociat valorii proprii  $\lambda$ . Din cauza proprietății 2, el se mai numește și **subspațiul invariant** asociat valorii proprii  $\lambda$ .

Din exemplele 4.1.1 și 4.2.1 rezultă că:

**Exemplul 4.2.2.** Dacă  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ,  $f(x, y) = (x + y, x + y)$  atunci  $\sigma(f) = \{0, 2\}$ , iar subspațiile proprii corespunzătoare sunt  $S_0 = \{x(1, -1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, -1)\}$ , respectiv  $S_2 = \{x(1, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 1)\}$ . Mulțimea vectorilor proprii asociați valorii proprii  $\lambda = 0$  este  $\{x(1, -1) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$ , iar mulțimea vectorilor proprii asociați valorii proprii  $\lambda = 2$  este  $\{x(1, 1) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$ .

Mulțimea vectorilor proprii ai unui operator poate fi vidă.

**Exemplul 4.2.3.** Fie  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ,  $f(x, y) = (x + y, -x + y)$ . Atunci matricea operatorului  $f$  (în baza canonică) este  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Ecuația caracteristică este

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 + 1 = 0.$$

Prin urmare rădăcinile (imaginare  $1 \pm i$ ) nu aparțin corpului  $K = \mathbb{R}$  și  $\sigma(f) = \emptyset$  adică  $f$  nu are vectori proprii.

**Teorema 4.2.1. Teorema diagonalizării.** Fie  $V$  un spațiu  $n$ -dimensional peste corpul  $K$  și  $f \in \mathcal{L}(V)$ . Operatorul  $f$  este diagonalizabil dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

1. toate rădăcinile ecuației caracteristice aparțin corpului  $K$ ;
2. dimensiunea subspațiului  $S_\lambda$  este egală cu ordinul de multiplicitate  $m_\lambda$  al valorii proprii  $\lambda$ , oricare ar fi  $\lambda \in \sigma(f)$ .

Din această teoremă și din proprietățile vectorilor proprii extragem următorul algoritm.

**Algoritm de rezolvare a problemei diagonalizării matricei  $A$ .**

1. Determinăm spectrul  $\sigma(A) := \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\} \subset K$  rezolvând ecuația caracteristică și stabilim ordinul de multiplicitate  $m_\lambda$  pentru orice  $\lambda \in \sigma(A)$ . Dacă spectrul  $\sigma(A)$  coincide cu mulțimea rădăcinilor polinomului caracteristic (adică  $m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \dots + m_{\lambda_l} = n$ ) trecem la pasul următor. În caz contrar,  $A$  nu este diagonalizabilă.
2. Determinăm subspațiile proprii (invariante)

$$S_{\lambda_i} = \{v = (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid v^T \in \text{Null}(A - \lambda_i I_n)\}$$

pentru  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ .

Dacă  $m_{\lambda_i} = \dim(S_{\lambda_i})$  pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ , atunci trecem la pasul următor. În caz contrar, matricea  $A$  nu este diagonalizabilă.

3. Pentru fiecare  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$  extragem o bază (de  $m_{\lambda_i}$  vectori!)  $B_{\lambda_i} := \{v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^{m_{\lambda_i}}\}$  a spațiului  $S_{\lambda_i}$ . Reuniunea acestor baze (atenție la ordinea vectorilor!) este o bază a spațiului  $K^n$  în care  $A$  are forma diagonală. Dacă, de exemplu, alegem

$$B := \{v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^{m_{\lambda_1}}, v_2^1, v_2^2, \dots, v_2^{m_{\lambda_2}}, \dots, v_l^1, v_l^2, \dots, v_l^{m_{\lambda_l}}\},$$

atunci forma diagonală corespunzătoare acestei baze este

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_l, \dots, \lambda_l),$$

unde numărul aparițiilor valorii proprii  $\lambda_i$  din această matrice este exact ordinul de multiplicitate  $m_{\lambda_i} = \dim(S_{\lambda_i})$ .

**Exemplul 4.2.4.** Fie operatorii  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiți prin  $f(x, y, z) = (3x + 2y + 2z, x + 4y + z, -2x - 4y - z)$ , respectiv  $g(x, y, z) = (4x + 9y, -2y + 8z, 7z)$ .

- a) Să se determine polinoamele caracteristice ale lui  $f$  și  $g$ .
- b) Să se determine subspațiile proprii și valorile proprii ale lui  $f$  și  $g$ .
- c) Să se studieze posibilitatea diagonalizării operatorilor dați.
- d) Să se determine  $f^m := f \circ f \circ \dots \circ f$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ .
- e) Să se calculeze  $A_g^m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ , unde  $A_g$  este matricea operatorului  $g$  în baza canonică.

*Rezolvare.*

- a) În baza canonică  $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$  matricea operatorului  $f$  este

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix},$$

iar matricea operatorului  $g$  este

$$A_g = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic al operatorului  $f$  este

$$p_f(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda),$$

iar polinomul caracteristic al operatorului  $g$  este

$$p_g(\lambda) = \det(A_g - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 9 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(4-\lambda)(7-\lambda)(2+\lambda).$$

b) Pentru a determina subspațiile proprii ale operatorului  $f$  aplicăm *algoritmul de calcul al vectorilor proprii*: constatăm întâi că spectrul său este  $\sigma(f) = \{1, 2, 3\}$ ; apoi aflăm subspațiile proprii  $S_1$ ,  $S_2$  și  $S_3$  știind că pentru orice  $\lambda \in \sigma(f)$

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in S_\lambda \Leftrightarrow (A_f - \lambda I_3)v_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b1) Pentru  $\lambda = 1$  avem ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

care este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases},$$

ori  $y = 0$  și  $z = -x$ ; deci  $S_1 = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 0, -1)\}$ .

b2) Pentru  $\lambda = 2$  avem ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

care este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases},$$

deci  $S_2 = \{(-2y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-2, 1, 0)\}$ .

b3) Pentru  $\lambda = 3$  avem ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

care este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases},$$

ori  $x = 0$  și  $y = -z$ ; deci  $S_3 = \{(0, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(0, -1, 1)\}$ .

Vectorii proprii ai operatorului  $f$  sunt, conform aceluiași algoritm

$$\{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}^*\} \cup \{(-2y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}^*\} \cup \{(0, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}^*\}.$$

Similar, pentru a determina subspațiile proprii ale operatorului  $g$  avem  $\sigma(g) = \{4, 7, -2\}$ , apoi  $S_4 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 0, 0)\}$ ,

$S_7 = \{(24y, 8y, 9y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(24, 8, 9)\}$ ,  $S_{-2} = \{(3x, -2x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(3, -2, 0)\}$ .

În sfârșit, vectorii proprii ai operatorului  $g$  sunt

$$\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}^*\} \cup \{(24y, 8y, 9y) \mid y \in \mathbb{R}^*\} \cup \{(3x, -2x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^*\}.$$

c) Deoarece

1.  $\sigma(f) = \{1, 2, 3\}$  conține toate soluțiile ecuației caracteristice și, conform punctului precedent
2.  $B_1 = \{v_1 = (1, 0, -1)\}$  este o bază pentru subspațiul propriu  $S_1$ , deci  $m_1 = \dim(S_1) = 1$ ,  $B_2 = \{v_2 = (-2, 1, 0)\}$  este o bază pentru subspațiul propriu  $S_2$ , deci  $m_2 = \dim(S_2) = 1$  și  $B_3 = \{v_3 = (0, -1, 1)\}$  este o bază pentru subspațiul propriu  $S_3$  deci  $m_3 = \dim(S_3) = 1$ ,

conform Teoremei diagonalizării, operatorul  $f$  este diagonalizabil.

Analog pentru operatorul  $g$ :  $\sigma(g) = \{4, 7, -2\}$  conține toate soluțiile ecuației caracteristice,  $B_4 = \{v'_1 = (1, 0, 0)\}$  este o bază pentru subspațiul propriu  $S_4$ , și  $m_4 = \dim(S_4) = 1$ ,  $B_7 = \{v'_2 = (24, 8, 9)\}$  este o bază pentru subspațiul propriu  $S_7$ , și  $m_7 = \dim(S_7) = 1$ , iar  $B_{-2} = \{v'_3 = (3, -2, 0)\}$  este o bază pentru subspațiul propriu  $S_{-2}$  și  $m_{-2} = \dim(S_{-2}) = 1$ ; conform Teoremei diagonalizării, operatorul  $g$  este diagonalizabil.

d) Diagonalizăm întâi matricea operatorului  $f$ . Conform algoritmului expus,

$$D = \text{diag}(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

este matricea operatorului  $f$  în baza  $B := \{v_1, v_2, v_3\}$  din spațiul real  $\mathbb{R}^3$ . În plus, conform Propoziției 4.1.1,

$$D = T^{-1}A_fT,$$

unde

$$T = T_{B_cB} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea de trecere de la baza canonică la baza de vectori proprii găsită. Cu transformări elementare pe linie asupra matricei  $(T|I_3)$  până la matricea scară redusă obținem inversa

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece  $A_f = TDT^{-1}$  obținem, pentru  $m \in \mathbb{N}^*$ ,

$$A_f^m = TD^mT^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{m+1} - 1 & 2^{m+1} - 2 & 2^{m+1} - 2 \\ 3^m - 2^m & 2 \cdot 3^m - 2^m & 3^m - 2^m \\ 1 - 3^m & 2 - 2 \cdot 3^m & 2 - 3^m \end{pmatrix}.$$

Din nou, folosind Propoziția 4.1.1, deducem că  $A_f^m$  este matricea operatorului  $f^m$ . Prin urmare, expresia analitică a operatorului  $f^m$  este dată de  $f^m(x, y, z) = ((2^{m+1} - 1)x + (2^{m+1} - 2)y + (2^{m+1} - 2)z, (3^m - 2^m)x + (2 \cdot 3^m - 2^m)y + (3^m - 2^m)z, (1 - 3^m)x + (2 - 2 \cdot 3^m)y + (2 - 3^m)z)$ .

e) Urmăm același procedeu ca la punctul precedent, dar pentru matricea  $A_g$ . De la punctele precedente aflăm că

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

este forma diagonală a matricei  $A_g$  în baza

$B' := \{(1, 0, 0), (24, 8, 9), (3, -2, 0)\}$ , iar legătura dintre  $A_g$  și  $D$  este dată de for-

mula  $D = T^{-1}A_gT$ , unde  $T = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$  este matricea de trecere de la

baza canonică la baza  $B'$ . Cum  $T^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & 27 & -72 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 8 \end{pmatrix}$  și  $A_g^m = TD^mT^{-1}$ ,

făcând înmulțirile obținem  $A_g^m =$

$$\begin{pmatrix} 4^m & 3 \cdot (2^{2m-1} + (-1)^{m+1} 2^{m-1}) & \frac{1}{3} (8 \cdot 7^m - 12 \cdot 4^m + (-1)^m 2^{m+2}) \\ 0 & (-1)^m 2^m & \frac{1}{9} (8 \cdot 7^m + (-1)^{m+1} 2^{m+3}) \\ 0 & 0 & 7^m \end{pmatrix}.$$

**Propoziția 4.2.2.** Dacă  $\lambda$  este o rădăcină a ecuației caracteristice asociate matricei  $A$ , atunci  $\lambda^2$  este o rădăcină a ecuației caracteristice asociate matricei  $A^2$ . În particular, dacă  $f \in L(V)$  și  $\lambda \in \sigma(f)$  atunci  $\lambda^2 \in \sigma(f^2)$ , unde  $f^2 := f \circ f$ .



**Demonstrație.** Într-adevăr, dacă  $\lambda \in \mathbb{C}$  astfel ca  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ , atunci

$$\det(A^2 - \lambda^2 I_n) = \det(A^2 - \lambda^2 I_n^2) = \det(A - \lambda I_n) \det(A + \lambda I_n) = 0.$$

Teorema următoare are diverse aplicații în calculul matriceal. Printre altele, poate fi utilizată la determinarea inversei unei matrice nesingulare și la calculul recursiv al puterilor unei matrice pătratică.

**Teorema 4.2.2. Teorema Cayley-Hamilton.** Fie  $A \in K^{n \times n}$  și  $p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = 0$  ecuația sa caracteristică. Atunci  $p(A) = 0$ , adică matricea  $A$  satisface propria sa ecuație caracteristică.

**Exemplul 4.2.5.** Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Să calculăm polinomul caracteristic al matricei  $A^{13}$  și matricea  $A^{-13}$ .

Ecuația caracteristică a matricei  $A$  este  $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ . Din teorema Cayley-Hamilton rezultă că

$$A^2 = 2A - 3I_2.$$

De aici obținem

$$A^4 = 4A^2 - 12A + 9I_2 = 4(2A - 3I_2) - 12A + 9I_2 = -4A - 3I_2,$$

de unde rezultă succesiv că

$$A^8 = 16A^2 + 24A + 9I_2 = 56A - 39I_2,$$

$$A^{12} = (56A - 39I_2)(-4A - 3I_2) = -460A + 789I_2,$$

deci

$$A^{13} = -460(2A - 3I_2) + 789A = -131A + 1380I_2.$$

Prin urmare  $A^{13} = \begin{pmatrix} 1249 & 131 \\ -262 & 1249 \end{pmatrix}$ , iar polinomul caracteristic al acestei matrice este  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2498\lambda + 1594323$ .

Dați o altă rezolvare folosind Propoziția 4.2.2!

Pentru calculul matricei  $A^{-13}$  folosim iar teorema Cayley-Hamilton. Dacă  $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$  este, pe scurt, polinomul caracteristic al matricei  $A^{13}$ , atunci  $A^{26} + aA^{13} + bI = 0$ . Înmulțind cu  $A^{-13}$  avem  $A^{13} + aI + bA^{-13} = 0$ , deci

$$A^{-13} = -b^{-1}(A^{13} + aI) = \begin{pmatrix} \frac{1249}{1594323} & -\frac{131}{1594323} \\ \frac{262}{1594323} & \frac{1249}{1594323} \end{pmatrix}.$$

## B. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine valorile proprii și câte o bază în subspațiile proprii ale operatorului  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

*Rezolvare.*

Matricea

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -2 & 1 \\ 2 & 1 - \lambda & 3 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

are determinantul  $\det(A - \lambda I_3) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)$ , deci valorile proprii, adică rădăcinile ecuației caracteristice  $\det(A - \lambda I_3) = 0$  sunt  $\lambda_1 = 1$ , de multiplicitate  $m_1 = 2$  (dublă) și  $\lambda_2 = 2$ , de multiplicitate  $m_2 = 1$  (simplă).

Pentru  $\lambda_1 = 1$  avem subspațiul invariant corespunzător  $S_{\lambda_1} = S_1 = \text{Null}(A - \lambda_1 I_3) = \text{Null}(A - I_3)$ .

Prin operații pe linie,

$$\begin{aligned} A - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_1 + L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{-L_2 + L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A-I_3} \end{aligned}$$

Dar  $u = [x_1, x_2, x_3]^T \in \text{Null}(A - I_3) \iff u \in \text{Null}(S_{A-I_3})$ , adică dacă și numai dacă

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Avem că  $x_1$  și  $x_2$  sunt necunoscute principale pentru că ele corespund poziției

pivoților iar  $x_3 = \alpha$  este necunoscută secundară. Astfel, sistemul devine  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\alpha \\ -2x_2 = -\alpha \end{cases}$

de unde, prin substituție inversă  $x_2 = \frac{\alpha}{2}$  și  $x_1 = -\frac{3\alpha}{2}$ . Deci  $u \in S_{\lambda_1} \iff u =$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} \\ \alpha \end{bmatrix}^T = \frac{\alpha}{2} [-3, 1, 2]^T;$$

cu alte cuvinte  $S_{\lambda_1} = \text{span}(u_1)$ , unde am notat  $u_1 = [-3, 1, 2]^T$ . Așadar  $B_1 = \{u_1\}$  e o bază în  $S_{\lambda_1}$ .

Pentru  $\lambda_2 = 2$  avem subspațiul invariant corespunzător  $S_{\lambda_2} = \text{Null}(A - \lambda_2 I_3) = \text{Null}(A - 2I_3)$ .

Prin operații pe linie,

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2L_1+L_2 \rightarrow L_2; L_1+L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A-2I_3}$$

Dar  $u = [x_1, x_2, x_3]^T \in \text{Null}(A - 2I_3) \iff u \in \text{Null}(S_{A-2I_3})$ , adică dacă și numai dacă

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Avem că  $x_1$  și  $x_2$  sunt necunoscute principale pentru că ele corespund poziției

pivoților iar  $x_3 = \alpha$  este necunoscută secundară. Astfel, sistemul devine  $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = -\alpha \\ -x_2 = -\alpha \end{cases}$

de unde, prin substituție inversă,  $x_2 = \alpha$  și  $x_1 = -\alpha$ . Deci  $u \in S_{\lambda_2} \iff u = [-\alpha, \alpha, \alpha]^T = \alpha[-1, 1, 1]^T$ .

Cu alte cuvinte  $S_{\lambda_2} = \text{span}(u_2)$  unde am notat  $u_2 = [-1, 1, 1]^T$ . Așadar  $B_2 = \{u_2\}$  e o bază în  $S_{\lambda_2}$ .

2. Fie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ . Fără a calcula polinomul caracteristic al lui  $f$ , să se găsească valorile proprii și vectorii proprii lui  $f$ .

*Rezolvare.*

Geometric vorbind,  $f$  asociază unui vector  $u = (x_1, x_2)$  simetricul său față de axa  $Ox$ . Un vector  $u$  din plan va fi vector propriu dacă și numai dacă este coliniar cu simetricul său față de  $Ox$ .

Observăm că dacă  $u$  e un vector de pe axa  $Ox$ , atunci simetricul lui  $u$  este el însuși, deci vectorii de pe axa  $Ox$  sunt vectori proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_1 = 1$ , pentru că în cazul lor  $f(u) = u$ . Dar cum subspațiul  $S_{\lambda_1}$  al acestor vectori e generat de  $e_1 = (1, 0)$ , avem că  $B_1 = \{e_1\}$  este bază în  $S_{\lambda_1}$ .

Pe de altă parte mai observăm că dacă  $u$  e un vector de pe axa  $Oy$ , atunci simetricul lui  $u$  este opusul său, deci vectorii de pe axa  $Oy$  sunt vectori proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_2 = -1$ , pentru că în cazul lor  $f(u) = -u$ . Deoarece subspațiul acestor vectori este generat de  $e_2 = (0, 1)$ , avem că  $B_2 = \{e_2\}$  este bază în  $S_{\lambda_2}$ .

Deoarece  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ ,  $f$  are cel mult două valori proprii, prin urmare  $f$  nu are alte valori proprii în afara lui 1 și -1.

3. Să se stabilească dacă operatorul de la problema 1 este diagonalizabil.

*Rezolvare.*

Toate valorile proprii  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  sunt reale, dar pentru  $\lambda_1 = 1$  avem că ordinul său algebric de multiplicare este  $m_{\lambda_1} = 2$ ; însă  $\dim(S_{\lambda_1}) = 1$ , deci operatorul  $f$  nu e diagonalizabil.

4. Să se stabilească dacă operatorul  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de matrice  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  este

diagonalizabil.

*Rezolvare.*

Matricea

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

are determinantul  $\det(A - \lambda I_3) = -(1 - \lambda)^2(1 + \lambda)$  deci valorile proprii, adică rădăcinile reale ale ecuației caracteristice  $\det(A - \lambda I_3) = 0$ , sunt  $\lambda_1 = 1$ , de multiplicare  $m_{\lambda_1} = 2$ , și  $\lambda_2 = -1$ , de multiplicare  $m_{\lambda_2} = 1$ .

Pentru  $\lambda_1 = 1$  avem subspațiul invariant corespunzător  $S_{\lambda_1} = \text{Null}(A - \lambda_1 I_3) = \text{Null}(A - I_3)$ .

Prin operații pe linie obținem

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A-I_3}.$$

Dar  $u = [x_1, x_2, x_3]^T \in \text{Null}(A - I_3) \iff u \in \text{Null}(S_{A-I_3})$ , adică dacă și numai dacă  $-x_1 + x_3 = 0$ . Avem că  $x_1$  este necunoscută principală pentru că ea corespunde poziției pivotului iar  $x_2 = \alpha$  și  $x_3 = \beta$  sunt necunoscute secundare. Astfel,  $x_1 = \beta$ . Deci  $u \in S_{\lambda_1} \iff u = [\beta, \alpha, \beta]^T = \alpha[0, 1, 0]^T + \beta[1, 0, 1]^T$  cu alte cuvinte  $S_{\lambda_1} = \text{span}(u_1, u_2)$  unde am notat  $u_1 = [0, 1, 0]^T$  și  $u_2 = [1, 0, 1]^T$ . În plus,  $u_1, u_2$  sunt liniar independenți. Așadar  $B_1 = \{u_1, u_2\}$  este o bază în  $S_{\lambda_1}$ .

Pentru  $\lambda_2 = -1$  avem subspațiul invariant corespunzător  $S_{\lambda_2} = \text{Null}(A - \lambda_2 I_3) = \text{Null}(A + I_3)$ .

Prin operații pe linie,

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1 + L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A+I_3}.$$

Dar  $u = [x_1, x_2, x_3]^T \in \text{Null}(A + I_3) \iff u \in \text{Null}(S_{A+I_3})$ , adică dacă și numai dacă

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Avem că  $x_1$  și  $x_2$  sunt necunoscute principale pentru că ele corespund poziției pivoților, iar  $x_3 = \alpha$  e necunoscută secundară. Astfel,  $x_2 = 0$  și  $x_1 = -\alpha$ . Deci  $u \in S_{\lambda_2} \iff u = [-\alpha, 0, \alpha]^T = \alpha[-1, 0, 1]^T$  cu alte cuvinte  $S_{\lambda_2} = \text{span}(u_3)$  unde am notat  $u_3 = [-1, 0, 1]^T$ . Așadar  $B_2 = \{u_3\}$  e o bază în  $S_{\lambda_2}$ .

Observăm că toate valorile proprii sunt reale; în plus  $m_{\lambda_1} = 2 = \dim(S_{\lambda_1})$  și  $m_{\lambda_2} = 1 = \dim(S_{\lambda_2})$ , deci, conform teoremei de diagonalizare, operatorul  $f$  este diagonalizabil.

5. Să se calculeze  $A^{2k}$  unde  $A$  este matricea operatorului din problema precedentă.  
*Rezolvare.*

Operatorul e diagonalizabil; mai precis matricea sa în baza

$$B = \{u_1 = [0, 1, 0]^T, u_2 = [1, 0, 1]^T, u_3 = [-1, 0, 1]^T\}$$

din  $\mathbb{R}^3$  formată din vectori proprii, este

$$D = f_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dacă notăm  $T = T_{B_c B} = [u_{1_{B_c}} | u_{2_{B_c}} | u_{3_{B_c}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , atunci avem că

$A = TDT^{-1}$  și ridicând această relație la puterea  $2k$  obținem

$$A^{2k} = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \cdots (TDT^{-1}),$$

deci  $A^{2k} = TD^{2k}T^{-1}$ . Dar cum  $D^{2k} = I_3$ , obținem că  $A^{2k} = TT^{-1} = I_3$ .

6. Fie  $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $T(A) = A^T$  operatorul de transpunere a matricelor. Să se scrie matricea operatorului în baza canonică

$$B = \left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

apoi să se determine spectrul său.

*Rezolvare.*

Avem  $T(E_1) = E_1 = 1E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 0E_4$ , deci  $T(E_1)_B = (1, 0, 0, 0)$ . Analog  $T(E_2) = E_3 = 0E_1 + 0E_2 + 1E_3 + 0E_4$ , astfel  $T(E_2)_B = (0, 0, 1, 0)$ , apoi  $T(E_3) = E_2 = 0E_1 + 1E_2 + 0E_3 + 0E_4$ , deci  $T(E_3)_B = (0, 1, 0, 0)$  și în final  $T(E_4) = E_4 = 0E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 1E_4$ , cu  $T(E_4)_B = (0, 0, 0, 1)$ . Așadar

$$A = T_B = [T(E_1)_B | T(E_2)_B | T(E_3)_B | T(E_4)_B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Polinomul caracteristic este

$$\begin{aligned}\det(T - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 1) = -(1-\lambda)^3(1+\lambda),\end{aligned}$$

deci spectrul lui  $T$  este  $\sigma(T) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1\}$

7. Să se găsească valorile proprii și subspațiile invariante corespunzătoare valorilor proprii ai operatorului din problema precedentă fără a mai calcula polinomul caracteristic.

*Rezolvare.*

Căutăm matricea  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  pentru care  $T(A) = A^T = \lambda A$ . Observăm că o matrice simetrică, adică o matrice cu proprietatea că  $A^T = A$  este vector propriu corespunzător valorii proprii  $\lambda_1 = 1$ . Dar o astfel de matrice simetrică are forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cu alte cuvinte dacă notăm  $\mathbb{R}_S^{2 \times 2}$  subspațiul matricelor simetrice, atunci  $\mathbb{R}_S^{2 \times 2} = \text{span}(E_1, M_1, E_4)$ , unde  $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Cum aceste matrice sunt liniar independente,  $B_1 = \{E_1, M_1, E_4\}$  este o bază în  $\mathbb{R}_S^{2 \times 2} = S_{\lambda_1}$ .

Pe de altă parte, o matrice antisimetrică este o matrice  $A$  cu proprietatea că  $A^T = -A$ , deci matricele antisimetrice vor fi vectori proprii pentru  $\lambda_2 = -1$ . O astfel de matrice are forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

deci dacă notăm  $\mathbb{R}_A^{2 \times 2}$  subspațiul matricelor antisimetrice, atunci  $\mathbb{R}_A^{2 \times 2} = \text{span}(M_2)$ ,

unde  $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  și deci  $B_2 = \{M_2\}$  este o bază în subspațiul invariant  $S_{\lambda_2} = \mathbb{R}_A^{2 \times 2}$ .

Deoarece  $\dim(S_{\lambda_1}) + \dim(S_{\lambda_2}) = 3 + 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}^{2 \times 2})$ , nu mai avem alte valori proprii în afara celor găsite.

8. Dacă  $\text{Null}(A + 5I_n)$  conține vectori nenuli, atunci ce informație avem despre spectrul matricei  $A$ ?

*Rezolvare.*

$\text{Null}(A + 5I_n)$  conține vectori nenuli dacă și numai dacă sistemul omogen de

matrice  $A + 5I_n$  admite și soluții nebanale, ceea ce întâmplă doar dacă  $\det(A + 5I_n) = \det(A - (-5)I_n) = 0$ , adică  $\lambda = -5$  este valoare proprie pentru matricea  $A$ .

## C. PROBLEME PROPUSE

1. Stabiliți care dintre funcțiile  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definite mai jos sunt operatori liniari; în caz de liniaritate, determinați matricele în baza canonică și rangul acestora.

- (a)  $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ ;
- (b)  $f(x, y, z) = (y + z, z - x, z)$ ;
- (c)  $f(x, y, z) = (y - z, z - x, z + 1)$ ;
- (d)  $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ ;
- (e)  $f(x, y, z) = (y^2 - z, z - x, z)$ ;

*Răspunsuri.* (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , 3; (b)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 3; (d)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ , 2.

2. Fie  $V/K$  un spațiu vectorial. Arătați că  $\mathcal{L}(V) \simeq K^{n \times n}$ .
3. Fie  $V/K$  un spațiu vectorial,  $W$  un subspațiu al său, iar  $B = \{w_1, \dots, w_m\}$  o bază în  $W$ . Dacă  $T \in \mathcal{L}(V)$  este un operator liniar, demonstrați că  $W$  este subspațiu invariant al lui  $T$  dacă și numai dacă  $T(w_i) \in W, \forall i = \overline{1, m}$ .

4. Operatorul  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  are, în baza canonică, matricea  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f$  să fie automorfism.

*Răspuns.*  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

5. Operatorul  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  are, în baza canonică, matricea  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Să se determine forma sa analitică, adică  $f(x, y, z)$ , pentru orice  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- (b) Să se arate că  $f$  este automorfism al spațiului  $\mathbb{R}^3$ , apoi să se afle matricea operatorului  $f^{-1}$  în baza  $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ .

6. Fie  $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  ale căror matrice în baza canonică sunt  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , respectiv  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Să se scrie matricea operatorilor  $f \circ g$  și  $g \circ f$  în baza  $\{(1, 1), (-1, 1)\}$ . Sunt operatorii  $f \circ g$  și  $g \circ f$  inversabili?

7. Demonstrați că operatorul de derivare  $d : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$ ,  $d(f) = f'$ , este liniar. Determinați matricea acestuia în:

- (a) baza canonică  $\{1, x, \dots, x^n\}$ ;  
 (b) baza  $\left\{1, \frac{x-a}{1!}, \frac{(x-a)^2}{2!}, \dots, \frac{(x-a)^n}{n!}\right\}$ , unde  $a$  este un număr real fixat.

Să se determine câte o bază pentru nucleul, respectiv imaginea sa și să se calculeze defectul și rangul operatorului  $d$ .

8. Operatorul liniar  $f$  are, în baza  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , matricea  $f_B$ . Ce transformări va suferi această matrice dacă interschimbăm vectorii  $e_i$  și  $e_j$  din baza  $B$ ?

9. Un operator liniar are matricea  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  în baza  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ . Să se determine matricea operatorului în baza:

- (a)  $\{e_1, e_3, e_2, e_4\}$ ;  
 (b)  $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$ .

*Răspunsuri.* (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ , (b)  $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ .

10. Matricea operatorului  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  în baza  $B = \{e_1 = (1, 2), e_2 = (2, 3)\}$  este  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ , iar matricea operatorului  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  în baza  $B' = \{e'_1 = (3, 1), e'_2 = (4, 2)\}$  este  $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ . Să se determine matricea operatorului  $f + g$  în baza  $B'$ .

*Răspuns.*  $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -\frac{59}{2} & -25 \end{pmatrix}$ .

11. Matricea operatorului  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  în baza  $B = \{e_1 = (-3, 7), e_2 = (1, -2)\}$  este  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ , iar matricea operatorului  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  în baza  $B' = \{e'_1 =$



$(6, -7), e'_2 = (-5, 6)\}$  este  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ . Să se determine matricea operatorului  $f \circ g$  în baza canonică.

*Răspuns.*  $\begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$ .

12. Determinați spectrul operatorului  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$  a cărui ecuație caracteristică are rădăcinile:

- (a)  $1, -1, 2, -2$ ;
- (b)  $1, 2, i, -i$ ;
- (c)  $1 + i, 1 - i, i, -i$ .

13. Arătați că 0 este valoare proprie pentru o matrice dacă și numai dacă determinantul acesteia este nul.

14. Fie  $\lambda$  o valoare proprie pentru matricea  $A$ . Arătați că pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda + a$  este valoare proprie pentru matricea  $A + aI$ . Implicația inversă este adevărată?

15. Determinați valorile proprii și subspațiile invariante corespunzătoare pentru matricele:

(a)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ;

(b)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

*Răspunsuri.* (a)  $\lambda_1 = -1$ ,  $(m_{\lambda_1} = 3)$ ,  $\{x(1, 1, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ; (b)  $\lambda_1 = 2$ ,  $(m_{\lambda_1} = 3)$ ,  $\{x(1, 2, 0) + y(0, 0, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ .

16. Arătați că dacă  $\lambda \in \sigma(L)$ , atunci  $\lambda^2 \in \sigma(L^2)$ , unde  $L^2 := L \circ L$ .

17. Determinați subspațiile care sunt invariante simultan pentru matricele  $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

și  $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ .

*Răspuns.*  $\{x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ .

18. Dacă într-o matrice pătratică schimbăm două linii între ele, spectrul se schimbă? Argumentați răspunsul.

19. Dacă într-o matrice pătratică înmulțim o linie cu un scalar nenul, spectrul se schimbă? Argumentați răspunsul.

20. Determinați valorile și vectorii proprii ale următoarelor matrice.

$$(a) \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix};$$

$$(c) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Răspunsuri.* (a). 1, cu mulțimea vectorilor proprii  $\{x(1, 1, 1) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$ , respectiv 0, cu vectorii proprii  $x(1, 2, 3)$ , unde  $x \neq 0$ ; (b). 1, cu mulțimea vectorilor proprii  $\{x(3, 1, 1) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$ ; (c). 2, cu vectorii proprii de forma  $(x + y, x + y, -x, y)$ , unde scalarii  $x$  și  $y$  nu sunt simultan nuli.

21. Fie  $\lambda$  o valoare proprie a inversei matricei  $(a_{ij}) \in K^{n \times n}$ . Arătați că  $\lambda^{-1}$  este valoare proprie a matricei  $(a_{ij})$ .

22. Fie  $(a_{ij}) \in K^{n \times n}$ . Arătați că suma rădăcinilor ecuației caracteristice  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  coincide cu urma matricei, i.e.  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ .

23. Să se determine  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel ca  $(1, -1, 1)$  să fie vector propriu pentru operatorul  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) = (ax + y + z, x + by + z, x + y + cz)$ .

*Răspuns.*  $(a, b, c) \in \{(t, t + 2, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .

24. Să se arate că spectrul unei matrice simetrice din  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  este nevid.

25. Arătați că produsul rădăcinilor ecuației caracteristice a unei matrice pătrate coincide cu determinantul acesteia.

26. Să se aducă la o formă diagonală și să se indice o bază în care are această formă fiecare din matricele

$$(a) \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(d) \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(e) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Răspunsuri.* (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, -3)\};$

(b) matricea nu admite formă diagonală;

$$(c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, -1, -1, -1)\};$$

(d) matricea nu admite formă diagonală;

$$(e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}.$$

27. Un operator liniar are matricea  $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$  în baza  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Să se găsească matricea operatorului în baza

$$\{2e_1 + 3e_2 + e_3, 3e_1 + 4e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3\}$$

și să se calculeze  $A^n$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

*Răspuns.*  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{n+2} + 3^n - 12 & 10 - 9 \cdot 2^n - 3^n & 3 \cdot 2^n + 3^n - 4 \\ 2^{n+4} + 2 \cdot 3^n - 18 & 15 - 3 \cdot 2^{n+2} - 2 \cdot 3^n & 2^{n+2} + 2 \cdot 3^n - 6 \\ 2^{n+2} + 2 \cdot 3^n - 6 & 5 - 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & 2^n + 2 \cdot 3^n - 2 \end{pmatrix}.$$

28. Operatorul  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  are, în baza canonică, matricea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

Să se arate că există un automorfism  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  astfel ca  $f^n = g \circ d \circ g^{-1}$  pentru orice întreg pozitiv  $n$ , unde  $d(x, y, z) := (3^n x, (-1)^n y, 5^n z)$ .

29. Să se arate că un operator liniar este automorfism dacă și numai dacă nucleul său este subspațiul nul.

30. Să se arate că există o matrice  $T$  astfel ca

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} T = T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

*Răspuns.* De exemplu  $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

31. Să se reducă la forma diagonală matricea  $\begin{pmatrix} 0 & \sin \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin \alpha & 0 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \sin \alpha & 0 \end{pmatrix}$ , unde  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

*Răspuns.*  $\begin{pmatrix} -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha + \sin 2\alpha \end{pmatrix}.$

32. Să se arate că există o matrice nesingulară  $T$  astfel încât

$$T \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} T.$$

33. \* Să se arate că un subspațiu  $S$  al unui spațiu  $V/K$  este invariant pentru automorfismul  $f$  dacă și numai dacă el este invariant pentru operatorul  $f^{-1}.$

34. Operatorul  $f$  are, într-o bază dată, matricea  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}.$  Să se determine numărul  $a$  pentru care  $f$  nu este automorfism.

*Răspuns.*  $a = \frac{9}{5}.$

35. Determinați toate subspațiile invariante ale spațiului funcțiilor polinomiale de grad mai mic sau egal cu  $n$ ,  $\mathbb{R}_n[x]$ , relativ la operatorul de derivare.

*Răspuns.* Subspațiul nul și subspațiile  $\mathbb{R}_m[x]$ , unde  $m \leq n.$

36. Fie  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$  Să se arate că înmulțirea matricelor din  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

(a) la stânga cu  $A;$

- (b) la dreapta cu  $A$   
 definește un operator liniar, apoi determinați matricea acestuia în baza  
 canonică  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

37. Folosind teorema Cayley-Hamilton să se arate că

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_3;$$

$$(b) \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{17}{3} & \frac{31}{6} & -\frac{13}{6} \\ -\frac{28}{3} & \frac{25}{3} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{10}{3} & \frac{17}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} = I_3;$$

- (c) există  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel ca  $A(A - aI_3)(A - bI_3) = 0$ , unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

38. \* Matricea operatorului  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  în baza canonică este

$$\begin{pmatrix} 1 + a^2 & ab & ac \\ ab & 1 + b^2 & bc \\ ac & bc & 1 + c^2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât să existe o bază în care matricea operatorului  $f$  să fie matricea unitate.

39. \* Dovediți că matricele unui operator liniar în două baze coincid dacă și numai dacă o matrice de trecere dintre cele două baze comută cu matricea operatorului relativă la una dintre baze.
40. \* Să se arate că un operator liniar de rang  $k$  (care acționează pe un spațiu finit dimensional) poate fi reprezentat ca o sumă de  $k$  operatori de rang unu.
41. \* Să se determine toate subspațiile invariante ale unui operator diagonal care are elementele diagonale distincte.
42. \* Matricea  $B$  este nesară și de același tip cu matricea  $A$ , ambele cu elemente din  $\mathbb{R}$ . Să se arate că matricea  $AB$  este diagonalizabilă dacă și numai dacă matricea  $BA$  este diagonalizabilă.
43. \* Fie  $A$  o matrice nesară cu elemente reale. Să se arate că ea este diagonalizabilă dacă și numai dacă matricea  $A^{-1}$  este diagonalizabilă.

44. \* Matricea  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  are valorile proprii 0, 1, 2, 3. Să se determine:

- (a)  $\text{rang}(A)$ ;
- (b)  $\det(A^T A)$ ;
- (c) valorile proprii ale matricei  $(A + I_4)^{-1}$ .

*Răspunsuri.* (a) 3; (b) 0; (c)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ .

45. \* Operatorii  $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  au aceleași valori proprii  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  și aceiași vectori proprii independenți  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Să se arate prin două metode că  $f = g$ .

46. \* Matricele  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  au aceiași vectori proprii independenți  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Arătați că  $AB = BA$ .

47. \* Arătați că dacă  $A$  este o matrice pătratică cu elemente reale iar suma elementelor de pe orice linie (coloană) este  $k$ , atunci  $k$  este o valoare proprie a acestei matrice.

48. Există o bază în care matricea  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  are forma diagonală? Justificați afirmațiile.

(Examen, Informatică, 2013)

49. Folosind diagonalizarea matricei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  determinați  $A^n$ .

(Examen, Ingineria sistemelor, 2013)

50. \* În  $\mathbb{R}^3$  se consideră transformarea liniară, pentru  $a$  real fixat,

$$T_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T_a(x, y, z) = \left( x, ax + y, \frac{a^2}{2}x + ay + z \right)$$

a) Se cere matricea  $M_a$  a lui  $T_a$  în baza canonică din  $\mathbb{R}^3$  și să se determine nucleul și imaginea transformării.

b) Să se afle valorile și vectorii proprii pentru  $M_a$ . Stabiliți dacă matricea este diagonalizabilă.

c) Arătați că  $M_a M_b = M_{a+b}$  și calculați  $M_a^n$  și  $M_a^{-1}$ .

d) Să se studieze convergența și să se afle (dacă există) limita șirului  $(S_n)$ , în care  $S_n = I_3 + \frac{1}{1!}M_a + \frac{1}{2!}M_a^2 + \dots + \frac{1}{n!}M_a^n$ .

(Concurs „Traian Lalescu”, profil neelectric, et. finală, Constanța, 2011)

51. \* Fie  $(a_i \cdot a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$  matricea operatorului  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , unde  $a_i > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

- (a) Să se determine defectul operatorului și imaginea sa.
- (b) Să se determine valorile și vectorii proprii ai operatorului  $f$ .

(Concurs „Traian Lalescu”, etapa locală, Timișoara, 2012)

52. \* Se consideră spațiul vectorial real  $V = C[0; 2]$  și endomorfismul

$$T : V \rightarrow V; T(f)(x) = \int_0^{2\pi} 4 \sin^3(x+y) f(y) dy, f \in C[0; 2]; x \in [0; 2].$$

- a) Dați exemplu de 2014 funcții liniar independente din  $\ker T$ .
- b) Determinați valorile proprii nenule și vectorii proprii corespunzători pentru  $T$ .

(Concurs „Traian Lalescu”, profil electric, etapa finală, Timișoara, 2014)

## 5      FORME LINIARE. FORME BILINIARE. FORME PĂTRATICE.

Formele (liniare, biliniare, pătratice) sunt aplicații definite pe spații vectoriale peste un corp  $K$  având codomeniul corpul  $K$ . Formele liniare sunt de fapt funcții polinomiale de gradul întâi omogene, iar formele biliniare și cele pătratice sunt funcții polinomiale omogene de gradul al doilea.

Pe lângă aplicațiile directe, aceste forme vor interveni esențial în construcția unor spații cu structură mai complexă, spații care vor fi analizate în capitolele următoare.

### A. TEORIE

Peste tot în această secțiune  $V$  este un spațiu vectorial peste corpul  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , iar  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  este o bază în acest spațiu.

#### 5.1. Forme liniare

Cele mai importante aplicații practice directe ale formelor liniare sunt în tehnicile de optimizare ale unor procese.

Reamintim că, deoarece  $(K, +)$  este un grup abelian,  $K$  este și el un spațiu vectorial peste corpul  $K$ , operația externă de înmulțire a scalarilor din  $K$  cu vectori din  $K$  fiind chiar operația (internă) de înmulțire din corpul  $K$ . Reamintim și faptul că mulțimea  $\mathcal{L}(V, K)$  este un spațiu vectorial peste corpul  $K$  (adunarea vectorilor  $f, g \in \mathcal{L}(V, K)$  fiind definită prin  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ , iar înmulțirea scalarului  $\alpha \in K$  cu vectorul  $f$  fiind definită prin  $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$ ).

**Definiția 5.1.1.** O aplicație liniară  $f : V \rightarrow K$  se numește **formă liniară** a spațiului  $V$  (sau **formă liniară pe spațiul  $V$** ). Notăm spațiul vectorial al formelor liniare (adică  $\mathcal{L}(V, K)$ ) cu  $V^*$  și îl numim **spațiul dual** al spațiului vectorial  $V$ .

Reamintim că forma  $f \in V^*$  este complet determinată dacă cunoaștem valorile  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \in K$ , deoarece atunci pentru orice  $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$  avem

$$f(v) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n).$$

Scalarii  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \in K$  se numesc **coeficienții formei  $f$  în baza  $B$** . Cum dimensiunea spațiului vectorial  $K/K$  este 1 (deoarece sistemul  $\{1\} \subset K$  este o bază pentru spațiul vectorial  $K/K$ ) rezultă că matricea unei forme relativ la o pereche de baze este o matrice linie cu  $n$  coloane și că

$$V^* \simeq K^{1 \times n}, \text{ iar } \dim V^* = n.$$



**Definiția 5.1.2. Baza duală a bazei  $B$ .** Construim, pornind de la baza  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  formele  $e_i^* \in V^*$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  prin

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases},$$

adică  $e_i^* \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) := x_i$ , pentru orice  $v = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in V$ . Să arătăm că  $B^* := \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$  este o bază pentru  $V^*$ . Dacă

$$x_1 e_1^* + x_2 e_2^* + \dots + x_n e_n^* = \theta_{V^*}$$

rezultă că  $(x_1 e_1^* + x_2 e_2^* + \dots + x_n e_n^*)(e_i) = \theta_{V^*}(e_i) = 0$ , deci  $x_i = 0$  pentru  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ; prin urmare  $B^*$  este un sistem de vectori liniar independent maximal, adică  $B^*$  este o bază.

Baza  $B^*$  se numește **baza duală** a bazei  $B$ .

Dacă  $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$  atunci  $e_j^*(v) = x_j$ , pentru  $j \in \{1, \dots, n\}$  iar dacă  $f \in$

$V^*$ ,  $f = \sum_{i=1}^n y_i e_i^*$  atunci  $f(e_j) = \sum_{i=1}^n y_i e_i^*(e_j) = y_j$ . Am obținut astfel formula de

reprezentare a unei forme din următoarea propoziție.

**Propoziția 5.1.1.** Dacă  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  este o bază în spațiul  $V$ , iar  $B^* := \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$  este baza duală a bazei  $B$ , atunci coordonatele vectorului  $f \in V^*$  în baza  $B^*$  sunt  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ , adică

$$f = f(e_1) e_1^* + f(e_2) e_2^* + \dots + f(e_n) e_n^*.$$

Se poate arăta următoarea formulă care stabilește legătura dintre matricea de trecere dintre două baze a spațiului  $V$  și matricea de trecere dintre bazele duale asociate.

**Propoziția 5.1.2.** Dacă  $B$  și  $B_1$  sunt două baze în  $V$  atunci

$$T_{B^* B_1^*} = T_{B_1 B}^T.$$

**Exemplul 5.1.1.** Fie  $V := \mathbb{R}^2$  spațiul aritmetic bidimensional,  $B_c = \{e_1, e_2\}$  baza canonică a acestuia și  $T_{B^* B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  matricea de trecere de la baza duală a unei baze  $B$  din  $\mathbb{R}^2$  la baza duală a bazei canonice. Să determinăm baza  $B$  și coordonatele formei  $f$  în baza  $B_c^*$  și baza  $B^*$ , știind că  $f(x, y) = 2x + 3y$ .

Din Propoziția 5.1.2 avem  $T_{B^* B_c^*} = T_{B_c B}^T$ . În plus  $T_{B_c B} = T_{B^* B_c^*}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Am obținut baza  $B = \{v_1 = (1, -1), v_2 = (0, 1)\}$ .

Din Propoziția 5.1.1 avem  $f = f(e_1)e_1^* + f(e_2)e_2^* = 2e_1^* + 3e_2^*$ , deci coordonatele vectorului  $f$  în baza  $B_c^*$  sunt 2, 3.

Deoarece

$$f_{B^*} = T_{B^*B_c^*} \cdot f_{B_c^*} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

rezultă că  $-1, 3$  sunt coordonatele vectorului  $f$  în baza  $B^*$ .

## 5.2. Forme biliniare

Formele biliniare sunt instrumente esențiale pentru definirea formelor pătratice și pentru construcția spațiilor euclidiene - subiecte care vor fi studiate în continuare.

**Definiția 5.2.1. Definiția formelor biliniare.** O aplicație

$$\varphi : V \times V \rightarrow K$$

se numește **formă biliniară** (a spațiului  $V$ ) dacă ea este liniară în ambele variabile, adică

$$(i) \quad \varphi(\alpha u + \beta v, w) = \alpha \varphi(u, w) + \beta \varphi(v, w)$$

$$(ii) \quad \varphi(u, \alpha v + \beta w) = \alpha \varphi(u, v) + \beta \varphi(u, w)$$

oricare ar fi  $u, v, w \in V$  și oricare ar fi  $\alpha, \beta \in K$ . Notăm cu  $\mathcal{B}(V)$  mulțimea formelor biliniare ale spațiului  $V$ .

Dacă  $\varphi \in \mathcal{B}(V)$  și

$$(iii) \quad \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$$

pentru orice  $u, v \in V$  spunem că  $\varphi$  este o **formă biliniară simetrică**. Notăm cu  $\mathcal{B}_s(V)$  mulțimea formelor biliniare simetrice ale spațiului  $V$ .

Se verifică imediat următoarea caracterizare a formelor biliniare.

**Propoziția 5.2.1. Caracterizarea formelor biliniare.**

O aplicație  $\varphi : V \times V \rightarrow K$  este formă biliniară a spațiului  $V/K$  dacă și numai dacă pentru orice  $m, p \in \mathbb{N}^*$ , pentru orice  $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_p \in V$  și pentru orice  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_p \in K$  avem

$$\varphi \left( \sum_{i=1}^m x_i v_i, \sum_{j=1}^p y_j w_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p x_i y_j \varphi(v_i, w_j).$$

**Observația 5.2.1.** Dacă  $\varphi \in \mathcal{B}(V)$  atunci

- $\varphi$  este complet determinată dacă cunoaştem scalarii  $a_{ij} := \varphi(e_i, e_j)$ , pentru  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  (înţelegând prin aceasta că expresia analitică a formei  $\varphi$  este determinată complet). Într-adevăr, dacă  $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i, w = \sum_{j=1}^n y_j e_j \in V$ , atunci

$$\text{folosind biliniaritatea aplicaţiei } \varphi \text{ avem } \varphi(v, w) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j.$$

Matriceal avem

$$(\varphi(v, w)) = v_B^T \varphi_B w_B,$$

unde  $\varphi_B := (\varphi(e_i, e_j))_{i,j=\overline{1,n}}$ .

- $\varphi$  este omogenă, cu gradul de omogenitate doi, deoarece  $\varphi(tv, tw) = t^2 \varphi(v, w)$  pentru orice  $v, w \in V$  şi pentru orice  $t \in K$ .

**Definiţia 5.2.2. Matricea unei forme biliniare.** Fie  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  o bază în  $V/K$  şi forma biliniară  $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ . Matricea

$$\varphi_B := (\varphi(e_i, e_j))_{i,j=\overline{1,n}} \in K^{n \times n}$$

se numeşte **matricea formei biliniare**  $\varphi$  în baza  $B$ .

**Observaţia 5.2.2.** Forma biliniară  $\varphi$  este simetrică dacă şi numai dacă matricea ei într-o bază oarecare este simetrică.

**Exemplul 5.2.1.** Fie  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Atunci  $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  dacă şi numai dacă există o constantă reală  $a$  astfel încât  $\varphi(x, y) = axy$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Într-adevăr, dacă  $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  şi  $a := \varphi(1, 1)$  atunci, cum  $\varphi$  este liniară în ambele variabile, avem  $\varphi(x, y) = x \varphi(1, y) = xy \varphi(1, 1) = axy$ .

Invers, dacă  $\varphi(x, y) := axy$  este imediată liniaritatea în ambele variabile pentru funcţia  $\varphi$ .

**Exemplul 5.2.2.** Fie  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi((x, y), (x', y')) := xx' + 2xy' - x'y + 3yy'$ . Atunci  $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  iar  $\varphi_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  unde  $B_c$  este baza canonică din  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ . Expresia analitică exprimată matriceal este

$$(\varphi((x, y), (x', y'))) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Având matricea unei forme într-o bază putem să construim matricea acestei forme într-o bază nouă folosind matricea de trecere.

**Propoziția 5.2.2. Schimbarea bazei.** Dacă  $B, B'$  sunt două baze în  $V/K$ ,  $\varphi \in \mathcal{B}(V)$  și  $T_{BB'}$  este matricea de trecere de la baza  $B$  la baza  $B'$  atunci

$$\varphi_{B'} = T_{BB'}^T \cdot \varphi_B \cdot T_{BB'}.$$

**Exemplul 5.2.3.** Fie  $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  astfel ca  $\varphi_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $B_c$  este baza canonică din  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ . Să determinăm

1.  $a \in \mathbb{R}$  astfel ca forma biliniară  $\varphi$  să fie simetrică;
2. expresia analitică a formei biliniare  $\varphi$ ;
3. matricea formei biliniare  $\varphi$  în baza  $B = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, 0)\}$ .

*Rezolvare.*

1. Conform Observației 5.2.2 este suficient să impunem ca  $\varphi_{B_c}$  să fie simetrică. Deci  $a = 1$ .

2. Folosind formula matriceală de la Observația 5.2.1, dacă  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ , avem

$$(\varphi((x, y), (x', y'))) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix} = (yy').$$

Prin urmare expresia analitică a formei biliniare  $\varphi$  este  $\varphi((x, y), (x', y')) := yy'$ .

3. Conform propoziției precedente avem  $\varphi_B = T_{B_c B}^T \cdot \varphi_{B_c} \cdot T_{B_c B} = T_{B_c B}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### 5.3. Forme pătratice

Formele pătratice sunt folosite într-o mulțime de tehnici statistice de analiză a unor fenomene concrete. De asemenea sunt utilizate în diverse probleme de optimizare, în special pentru a decide natura punctelor staționare ale funcțiilor de clasă  $C^2$ .

În esență, formele pătratice sunt funcții omogene de gradul al doilea provenite din forme biliniare simetrice.

**Definiția 5.3.1. Definiția formei pătratice și a polarei sale.**

O aplicație  $f : V \rightarrow K$  se numește **formă pătratică** (a spațiului vectorial  $V/K$ ) - scriem  $f \in \mathcal{Q}(V)$  - dacă există o formă biliniară simetrică

$$\varphi : V \times V \rightarrow K \text{ și } f(v) = \varphi(v, v)$$

oricare ar fi  $v \in V$ . În acest caz mai spunem că  $f$  este **forma pătratică asociată** formei biliniare simetrice  $\varphi$ , iar  $\varphi$  este **polara formei pătratice**  $f$ . Dacă  $B$  este o bază în spațiul  $V/K$  matricea  $\varphi_B$  se numește **matricea formei pătratice**  $f$  și se notează  $f_B$ .

**Exemplul 5.3.1.** Dacă  $\varphi$  este forma biliniară definită la Exemplul 5.2.3 atunci forma pătratică asociată ei este  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , cu expresia analitică dată de  $f(x, y) := \varphi((x, y), (x, y)) = y^2$ .

Expresia **polara formei pătratice**  $f$  își găsește justificarea logică în următoarea propoziție: unei forme pătratice îi corespunde o unică formă biliniară simetrică care este polara ei.

**Propoziția 5.3.1. Construcția polarei unei forme pătratice.** Fie  $f : V \rightarrow K$  o formă pătratică. Atunci  $\varphi : V \times V \rightarrow K$ ,

$$\varphi(v, w) := \frac{1}{2} [f(v + w) - f(v) - f(w)]$$

definește polara formei pătratice  $f$ .

**Observația 5.3.1. Expresia analitică a unei forme pătratice.** Din Observația 5.2.1 deducem că aplicația  $f : V \rightarrow K$  este o formă pătratică dacă și numai dacă există scalarii  $a_{ij} \in K$ , cu  $a_{ij} = a_{ji}$ , pentru orice  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  astfel încât dacă

$$v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V \text{ atunci } f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \text{ sau}$$

$$f(v) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n).$$

Cum  $f_B = \varphi_B$ , unde  $\varphi$  este polara formei pătratice  $f$ , avem  $(\varphi(v, v)) = v_B^T \varphi_B v_B$ , deci

$$(f(v)) = v_B^T f_B v_B,$$

$$\text{unde } f_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Observația 5.3.2. Tehnica dedublării.** Să presupunem că forma pătratică  $f \in \mathcal{Q}(V)$  are reprezentarea analitică  $f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  în baza  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Atunci  $f_B = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = \varphi_B$ , unde  $\varphi$  este polara formei  $f$ . Prin urmare, cum  $(\varphi(v, w)) = v_B^T \varphi_B w_B$ , oricare ar fi  $v, w \in V$ , rezultă imediat că expresia analitică a formei biliniare  $\varphi$  este dată de următoarea formulă

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j.$$

Această metodă de construcție a expresiei analitice a polarei din expresia analitică a formei pătratice se numește **dedublare**.

**Exemplul 5.3.2.** Fie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := x^2 - 2xy + 3y^2$ .

1. Să se determine polara formei pătratice  $f$ .
2. Să se determine matricea  $f_B$ , unde  $B = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (-1, 1)\}$ .
3. Fie  $g_1, g_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$ . Să se arate că  $h \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ , unde  $h(x, y) := f(g_1(x, y), g_2(x, y))$  și să se determine matricea  $h_{B_c}$  unde  $B_c$  este baza canonică din  $\mathbb{R}^2$ .

*Rezolvare.* 1. Folosim procedeul dedublării. Fie  $B_c = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$  baza canonică din  $\mathbb{R}^2$  și  $\varphi$  polara formei pătratice  $f$ . Atunci  $\varphi_{B_c} = f_{B_c}$  și  $a_{11} = \varphi(e_1, e_1) = 1$  (coeficientul lui  $x^2$ ),  $a_{12} = \varphi(e_1, e_2) = \varphi(e_2, e_1) = \frac{-2}{2} = -1$  (jumătate din coeficientul lui  $xy$ ), iar  $a_{22} = \varphi(e_2, e_2) = 3$ . Prin urmare  $\varphi_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Expresia analitică a formei biliniare simetrice  $\varphi$  se obține imediat din egalitatea matriceală  $(\varphi(v, w)) = v_B^T \varphi_B w_B$ : dacă  $v = (x, y)$ ,  $w = (x', y')$  atunci  $(\varphi(v, w)) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (xx' - xy' - x'y + 3yy')$ . De aceea  $\varphi((x, y), (x', y')) = xx' - xy' - x'y + 3yy'$ .

2. Din Propoziția 5.2.2 avem

$$\begin{aligned} f_B = \varphi_B &= T_{B_c B}^T \varphi_{B_c} T_{B_c B} = T_{B_c B}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Deoarece  $g_1, g_2$  sunt două forme liniare rezultă că există constantele  $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{R}$  astfel ca  $g_1(x, y) := b_{11}x + b_{12}y$  și  $g_2(x, y) := b_{21}x + b_{22}y$ .

Atunci

$$\begin{aligned} h(x, y) &= f(b_{11}x + b_{12}y, b_{21}x + b_{22}y) = (b_{11}x + b_{12}y)^2 - \\ &\quad - 2(b_{11}x + b_{12}y)(b_{21}x + b_{22}y) + 3(b_{21}x + b_{22}y)^2 = \\ &= (b_{11}^2 - 2b_{11}b_{21} + 3b_{21}^2)x^2 + 2(b_{11}b_{12} - b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} + 3b_{21}b_{22})xy + \\ &\quad + (b_{12}^2 - 2b_{12}b_{22} + 3b_{22}^2)y^2 \end{aligned}$$

este expresia analitică a unei forme pătratice iar matricea sa în baza canonică este

$$h_{B_c} = \begin{pmatrix} b_{11}^2 - 2b_{11}b_{21} + 3b_{21}^2 & b_{11}b_{12} - b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} + 3b_{21}b_{22} \\ b_{11}b_{12} - b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} + 3b_{21}b_{22} & b_{12}^2 - 2b_{12}b_{22} + 3b_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Am văzut că dacă  $f \in \mathcal{Q}(V)$  atunci  $f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n a_{ij} x_i x_j$ , pentru orice vector  $\sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$ . Cazul în care cea de-a doua sumă din această expresie analitică este nulă pentru orice vector din  $V$ , deci dacă  $a_{ij} = 0$  pentru  $i \neq j$ , este esențial în aplicații.

**Definiția 5.3.2.** Dacă matricea formei  $f \in \mathcal{Q}(V)$  în baza  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  are forma diagonală, atunci expresia analitică a formei  $f$  (adică

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2) \text{ se numește } \textbf{formă canonică} \text{ a formei pătratice } f.$$

Se pune problema existenței unei forme canonice pentru o formă pătratică dată  $f$  și a unei baze în care  $f$  are respectiva formă canonică. Răspunsul la această problemă este afirmativ: orice formă pătratică admite o formă canonică, iar metoda lui Gauss ne indică și o tehnică simplă de depistare a ei.

**Teorema 5.3.1. Determinarea formei canonice prin metoda Gauss.** Fie  $f \in \mathcal{Q}(V)$  o formă pătratică nenulă. Atunci există o bază în care  $f$  are forma canonică. Algoritmul de construcție este următorul. Presupunem că, dată fiind baza  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ,  $f$  are reprezentarea analitică

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n a_{ij} x_i x_j$$

și presupunem că există  $i \neq j$  astfel ca  $a_{ij} \neq 0$ . Avem două cazuri posibile:

1. dacă există  $i$  astfel ca  $a_{ii} \neq 0$  formăm **un pătrat perfect de forma**  $b_{ii} \cdot y_i^2$  grupând **toți termenii care conțin variabila**  $x_i$ , apoi repetăm procedeul pentru restul variabilelor rămase.
2. Dacă  $a_{ii} = 0$  pentru orice  $i$  atunci **reducem problema la cazul 1** astfel: deoarece există  $a_{ij} \neq 0$  cu  $i \neq j$  schimbăm variabilele punând

$$x_i = y_i + y_j \text{ și } x_j = y_i - y_j$$

(în acest caz  $x_i x_j = y_i^2 - y_j^2$  și se poate aplica mai departe cazul 1).

Aplicând succesiv algoritmul descris ajungem, după  $n - 1$  pași, la o sumă de pătrate de forma

$$f(v) = \sum_{i=1}^n c_{ii} z_i^2,$$

unde  $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , adică la forma canonică. Legătura dintre vechile coordonate și noile coordonate ale vectorului arbitrar  $v$  este dată de matricea de trecere de la baza

$B$  la baza  $B_o$  în care  $f$  are forma canonică, deoarece știm că  $v_B = T_{BB_o} v_{B_o}$ .

**Exemplul 5.3.3.** Fie  $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^3)$ ,  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ . Să se reducă la o forma canonică și să se indice o bază în care are forma găsită.

*Rezolvare.* Aplicăm metoda lui Gauss. Dacă  $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$  este baza canonică

din  $\mathbb{R}^3$  matricea formei în această bază este  $f_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ . Trebuie să

aplicăm cazul 2 (deoarece  $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ ). Cum  $a_{12} \neq 0$  luăm  $x = x_1 + y_1$ ,  $y = x_1 - y_1$ ,  $z = z_1$ . Atunci  $f(x, y, z) = x_1^2 - y_1^2 + 2x_1z_1$  și aplicăm cazul 1; formăm un pătrat perfect cu termenii care-l conțin pe  $x_1$  și obținem forma canonică

$$f(x, y, z) = (x_1 + z_1)^2 - y_1^2 - z_1^2 = x_2^2 - y_2^2 - z_2^2,$$

unde  $x_2 = x_1 + z_1$ ,  $y_2 = y_1$  și  $z_2 = z_1$ . Cum  $x_1 = \frac{x+y}{2}$ ,  $y_1 = \frac{x-y}{2}$ ,  $z_1 = z$ , obținem  $x_2 = \frac{x+y+2z}{2}$ ,  $y_2 = \frac{x-y}{2}$ ,  $z_2 = z$ . Matriceal, dacă  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  este baza în care  $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = x_2v_1 + y_2v_2 + z_2v_3$ , avem

$$v_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_{BB_c} \cdot v_{B_c}.$$

Deci matricea de trecere de la baza  $B$  la baza  $B_c$  este

$$T_{BB_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ iar } T_{B_cB} = T_{BB_c}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare baza în care  $f$  are forma canonică

$f(x, y, z) = f(x_2v_1 + y_2v_2 + z_2v_3) = x_2^2 - y_2^2 - z_2^2$  este

$$B = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (-1, -1, 1)\}.$$

Dacă dorim să verificăm rezultatul, ținem seama de faptul că, pe de o parte

$f_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  și, pe de altă parte,  $f_B = T_{BB_c}^T f_{B_c} T_{BB_c}$ . Dar



$$\begin{aligned}
T_{B_c B}^T f_{B_c} T_{B_c B} &= T_{B B_c}^T \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

O altă tehnică de aducere la forma canonică este furnizată de următoarea teoremă. Din păcate ea nu se poate aplica întotdeauna, dar este, de multe ori, avantajoasă din punct de vedere computațional.

**Teorema 5.3.2. Determinarea formei canonice prin metoda Jacobi.** Fie  $f \in \mathcal{Q}(V)$  o formă pătratică a cărei matrice în baza  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  este

$$f_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dacă minorii principali (i.e. determinanții construiți după regula nord-vest)

$$\Delta_1 := |a_{11}|, \Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sunt nenuli, atunci există o bază  $B_o = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  în care  $f$  are următoarea formă canonică:

$$f\left(\sum_{i=1}^n y_i v_i\right) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2.$$

În diferite aplicații este important de știut care este semnul unei forme pătratice definite pe un spațiu real - *signatura sa* - în sensul următoarei definiții.

**Definiția 5.3.3.** Fie  $f \in \mathcal{Q}(V)$ , unde  $V/\mathbb{R}$  este un spațiu  $n$ -dimensional. Dacă

1.  $f(v) > 0, \forall v \in V \setminus \{\theta\}$  spunem că  $f$  este **pozitiv definită**;
2.  $f(v) < 0, \forall v \in V \setminus \{\theta\}$  spunem că  $f$  este **negativ definită**;

3.  $f(v) \geq 0, \forall v \in V \setminus \{\theta\}$  și există  $w \in V \setminus \{\theta\}$  astfel ca  $f(w) = 0$  spunem că  $f$  este **semidefinită pozitiv (pozitiv semidefinită)**;
4.  $f(v) \leq 0, \forall v \in V \setminus \{\theta\}$  și există  $w \in V \setminus \{\theta\}$  astfel ca  $f(w) = 0$  spunem că  $f$  este **semidefinită negativ (negativ semidefinită)**;
5.  $\exists v, w \in V$  astfel ca  $f(v) < 0$  și  $f(w) > 0$  spunem că  $f$  este **nedefinită**.

Dacă într-o formă canonică matricea formei  $f$  este  $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , iar dintre numerele reale  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  există  $p \geq 0$  numere pozitive,  $q \geq 0$  numere negative și  $z \geq 0$  zerouri, vom numi tripletul  $(p, q, z)$  **signatura** formei  $f$ .

O formă pătratică își conservă signatura la schimbarea bazei.

**Teorema 5.3.3. Legea inerției formelor pătratice (Sylvester).** Fie  $V/\mathbb{R}$  un spațiu vectorial real și  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  o formă pătratică. Signatura este aceeași în orice bază în care forma  $f$  are forma canonică.

**Observația 5.3.2.** Folosind legea inerției și signatura putem stabili semnul unei forme pătratice definite pe un spațiu  $n$ -dimensional (în sensul Definiției 5.3.3):

- dacă signatura este  $(n, 0, 0)$ , atunci forma este pozitiv definită;
- dacă signatura este  $(0, n, 0)$ , atunci forma este negativ definită;
- dacă signatura este de forma  $(p, 0, z)$ , cu  $p, z$  numere pozitive atunci forma este pozitiv semidefinită;
- dacă signatura este de forma  $(0, q, z)$ , cu  $q, z$  numere pozitive atunci forma este negativ semidefinită;
- dacă signatura este de forma  $(p, q, z)$ , cu  $p, q$  numere pozitive atunci forma este nedefinită.

**Exemplul 5.3.4.** Forma pătratică  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$  de la Exemplul

$$5.3.2 \text{ are matricea } f_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \text{ iar } \Delta_1 = 0; \text{ prin urmare metoda Jacobi nu}$$

este aplicabilă. Signatura lui  $f$  este  $(1, -2, 0)$ , deci  $g$  este o formă pătratică nedefinită.

Fie  $g \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^3)$ ,  $g(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy - 2yz + 2zx$ . Matricea ei în baza canonică este  $g_{B_c} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Prin urmare minorii caracteris-

tici sunt  $\Delta_1 = 2$ ,  $\Delta_2 = 6$  și  $\Delta_3 = 9$ . Conform teoremei lui Jacobi există o bază  $B_o = \{v_1, v_2, v_3\}$  astfel încât  $g\left(\sum_{i=1}^3 y_i v_i\right) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{2}{3}y_3^2$ . În consecință, cum  $(3, 0, 0)$  este signatura lui  $g$ , urmează că  $g$  este pozitiv definită.

## B. PROBLEME REZOLVATE

1. Forma liniară  $f$  a spațiului  $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}$  are, în baza canonică, matricea  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ . Să se determine dimensiunea nucleului acestei forme.

*Rezolvarea 1.*

Din matrice știm că  $f(1, 0, 0, 0) = 1$ ,  $f(0, 1, 0, 0) = -2$ ,  $f(0, 0, 1, 0) = 3$  și  $f(0, 0, 0, 1) = -4$ , deci  $f(x, y, z, t) = x - 2y + 3z - 4t$ .  $(x, y, z, t) \in \ker f \Leftrightarrow x - 2y + 3z - 4t = 0$  care este un „sistem” cu o ecuație și 4 necunoscute. Rangul matricei sistemului este 1, deci vom avea 3 necunoscute secundare, prin urmare spațiul soluțiilor,  $\ker f$ , va avea dimensiunea 3.

*Rezolvarea 2.*

Cum  $f$  nu este aplicația nulă,  $\dim \operatorname{Im} f = 1$ , prin urmare  $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 4 - 1 = 3$ .

2. În spațiul  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$  considerăm forma liniară  $f \in (\mathbb{R}^2)^*$  a cărei matrice în baza  $B = \{v_1 = (1, -1), v_2 = (0, 2)\}$  este  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Se cere:

- (a) expresia analitică a formei  $f$ ;
- (b) dimensiunea nucleului formei  $f$ ;
- (c) duala bazei  $B$  și exprimarea formei  $f$  în această bază.

*Rezolvare.*

- (a) Din matrice știm că  $f(1, -1) = 2$  și  $f(0, 2) = 4$ . Atunci  $f(0, 1) = \frac{1}{2}f(0, 2) = 2$ , apoi  $f(1, 0) = f(1, -1) + f(0, 1) = 4$ . În fine,  $f(x, y) = xf(1, 0) + yf(0, 1) = 4x + 2y$ .
- (b) Avem că  $(x, y) \in \ker f \Leftrightarrow 4x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -2x \Leftrightarrow (x, y) \in \operatorname{span}\{(1, -2)\}$ , deci  $\dim \ker f = 1$ .
- (c) Fie  $B' = \{f_1, f_2\}$  baza duală a bazei  $B = \{v_1, v_2\}$ . Atunci  $f_1$  este forma liniară care satisface  $f_1(v_1) = 1$  și  $f_1(v_2) = 0$ , iar  $f_2$  este forma liniară care satisface  $f_2(v_1) = 0$  și  $f_2(v_2) = 1$ . Putem proceda ca mai sus, sau, echivalent, exprima vectorul arbitrar  $(x, y)$  în baza  $B$ :  $(x, y) = x \cdot (1, -1) + \frac{x+y}{2} \cdot (0, 2)$ , apoi  $f_1(x, y) = x \cdot f_1(1, -1) + \frac{x+y}{2} \cdot f_1(0, 2) = x$ , iar  $f_2(x, y) =$

$$x \cdot f_2(1, -1) + \frac{x+y}{2} \cdot f_2(0, 2) = \frac{x+y}{2}.$$

Este ușor de văzut că  $f(x, y) = 2f_1(x, y) + 4f_2(x, y)$ , deci matricea lui  $f$  în baza duală a lui  $B$  coincide cu matricea lui  $f$  în baza  $B$ .

3. Forma  $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$  este definită prin  $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 - 5x_3y_1 - 2x_2y_3$ . Să se determine matricea sa în
- (a) baza canonică;
  - (b) baza  $\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ .

*Rezolvare.*

Matricea formei biliniare  $\varphi$  în baza  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ , notată  $\varphi_B$ , are pe linia  $i$  coloana  $j$  elementul  $\varphi(v_i, v_j)$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .

- (a) Avem că:  $\varphi((1, 0, 0), (1, 0, 0)) = 1$ ,  $\varphi((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = 0$ ,  
 $\varphi((1, 0, 0), (0, 0, 1)) = 0$ ,  $\varphi((0, 1, 0), (1, 0, 0)) = 0$ ,  
 $\varphi((0, 1, 0), (0, 1, 0)) = 2$ ,  $\varphi((0, 1, 0), (0, 0, 1)) = -2$ ,  
 $\varphi((0, 0, 1), (1, 0, 0)) = -5$ ,  $\varphi((0, 0, 1), (0, 1, 0)) = 0$ ,

$$\varphi((0, 0, 1), (0, 0, 1)) = 4, \text{ deci } \varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observați că elementul  $a_{ij}$  al matricei lui  $\varphi$  în baza canonică este tocmai coeficientul lui  $x_i y_j$ , ceea ce permite scrierea directă a matricei lui  $\varphi$  în această bază.

- (b) Avem  $\varphi((0, 1, 1), (0, 1, 1)) = 4$ ,  $\varphi((0, 1, 1), (1, 0, 1)) = -3$ ,  
 $\varphi((0, 1, 1), (1, 1, 0)) = -3$ ,  $\varphi((1, 0, 1), (0, 1, 1)) = 4$ ,  
 $\varphi((1, 0, 1), (1, 0, 1)) = 0$ ,  $\varphi((1, 0, 1), (1, 1, 0)) = -4$ ,  
 $\varphi((1, 1, 0), (0, 1, 1)) = 0$ ,  $\varphi((1, 1, 0), (1, 0, 1)) = -1$ ,

$$\varphi((1, 1, 0), (1, 1, 0)) = 3, \text{ deci } \varphi_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Observație.* Odată calculată matricea lui  $\varphi$  într-o bază  $B$ , matricea ei într-o a doua bază,  $B'$ , poate fi determinată și cu formula  $\varphi_{B'} = T_{BB'}^T \cdot \varphi_B \cdot T_{BB'}$ .

În cazul nostru,

$$\varphi_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Forma biliniară  $\varphi$  a spațiului vectorial  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$  are matricea  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  în baza  $B$ .

Care este forma sa analitică dacă

- (a)  $B$  este baza canonică;
- (b)  $B = \{(1, 1), (2, 0)\}$ ?

*Rezolvare.*

- (a) Dacă notăm cu  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  vectorii din baza canonică, avem, din matrice, că  $\varphi(e_1, e_1) = 1$ ,  $\varphi(e_1, e_2) = 2$ ,  $\varphi(e_2, e_1) = 3$  și

$\varphi(e_2, e_2) = 4$ . Ca și la aplicațiile liniare unde valorile pe vectorii unei baze determinau în mod unic aplicația liniară, o aplicație biliniară poate fi determinată dacă se cunosc valorile ei pe perechile  $(e_i, e_j)$  de vectori dintr-o bază. Astfel, avem  $\varphi((x, y), (x', y')) = \varphi(xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2) = x\varphi(e_1, x'e_1 + y'e_2) + y\varphi(e_2, x'e_1 + y'e_2) = x(x'\varphi(e_1, e_1) + y'\varphi(e_1, e_2)) + y(x'\varphi(e_2, e_1) + y'\varphi(e_2, e_2)) = xx'\varphi(e_1, e_1) + xy'\varphi(e_1, e_2) + x'y\varphi(e_2, e_1) + x'y'\varphi(e_2, e_2)$ .

În cazul de față obținem  $\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + 2xy' + 3x'y + 4yy'$ .

*Observație.* Alternativ, se poate afla expresia analitică a formei biliniare  $\varphi$  cunoscând matricea să în baza  $B$  și aplicând direct formula:

$$\varphi((x, y), (x', y')) = (x \ y)_B \cdot \varphi_B \cdot (x' \ y')_B^T,$$

unde  $(x \ y)_B$  reprezintă matricea linie formată cu coordonatele lui  $(x, y)$  în baza  $B$ . Astfel, în baza canonică, avem  $(x \ y)_B = (x \ y)$  deci obținem imediat expresia analitică a lui  $\varphi$  calculând

$$\varphi((x, y), (x', y')) = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + 2xy' + 3x'y + 4yy'.$$

(b) Notând  $v_1 = (1, 1)$ ,  $v_2 = (2, 0)$ , avem, din matrice, că  $\varphi(v_1, v_1) = 1$ ,  $\varphi(v_1, v_2) = 2$ ,  $\varphi(v_2, v_1) = 3$ ,  $\varphi(v_2, v_2) = 4$ . Exprimăm vectorii arbitrari  $(x, y)$  și  $(x', y')$  în baza  $B$ :  $(x, y) = a(1, 1) + b(2, 0)$  conduce la sistemul  $\begin{cases} a + 2b = x \\ a = y \end{cases}$

cu soluția  $a = y$ ,  $b = \frac{y-x}{2}$ . Așadar, un vector arbitrar  $(x, y)$  are în baza  $B$  coordonatele  $(x \ y)_B = \begin{pmatrix} y & \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$ .

Procedând ca mai sus, obținem că

$$\begin{aligned} \varphi((x, y), (x', y')) &= \varphi\left(yv_1 + \frac{x-y}{2}v_2, y'v_1 + \frac{x'-y'}{2}v_2\right) = \\ &= yy'\varphi(v_1, v_1) + y \cdot \frac{x'-y'}{2} \varphi(v_1, v_2) + \frac{x-y}{2} \cdot y' \varphi(v_2, v_1) + \\ &+ \frac{x-y}{2} \cdot \frac{x'-y'}{2} \varphi(v_2, v_2) = yy' + 2y \cdot \frac{x'-y'}{2} + 3 \frac{x-y}{2} \cdot y' + \\ &+ 4 \frac{x-y}{2} \cdot \frac{x'-y'}{2} = xx' + \frac{1}{2}xy' - \frac{1}{2}yy'. \end{aligned}$$

*Observație.* După ce stabilim coordonatele unui vector arbitrar  $(x, y)$  în baza  $B$ , anume  $(x \ y)_B = \begin{pmatrix} y & \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$ , putem aplica direct formula  $\varphi((x, y), (x', y')) = (x \ y)_B \cdot \varphi_B \cdot (x' \ y')_B^T =$

$$\begin{pmatrix} y & \frac{x-y}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ \frac{x'-y'}{2} \end{pmatrix} = xx' + \frac{1}{2}xy' - \frac{1}{2}yy'.$$

5. Aflați expresia analitică a formei biliniare  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  dacă

$$\varphi((1, 0), (1, 1)) = 1, \varphi((1, 1), (1, 2)) = 2, \varphi((2, 1), (1, 0)) = 3,$$

$$\varphi((0, 1), (1, 0)) = 4.$$

Este întotdeauna posibilă determinarea expresiei analitice a unei forme biliniare  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  dacă se cunosc valorile acestora pe patru perechi de vectori din  $\mathbb{R}^2$ ?

*Rezolvare.*

Dacă notăm cu  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  matricea lui  $\varphi$  în baza canonică, avem

$$\varphi((1, 0), (1, 0)) = a, \varphi((1, 0), (0, 1)) = b, \varphi((0, 1), (1, 0)) = c,$$

$$\varphi((0, 1), (0, 1)) = d, \text{ iar valorile date ale lui } \varphi \text{ se traduc prin:}$$

$$1 = \varphi((1, 0), (1, 1)) = \varphi((1, 0), (1, 0)) + \varphi((1, 0), (0, 1)) = a + b,$$

$$2 = \varphi((1, 1), (1, 2)) = \varphi((1, 0), (1, 2)) + \varphi((0, 1), (1, 2)) = \varphi((1, 0), (1, 0)) + 2\varphi((1, 0), (0, 1)) + \varphi((0, 1), (1, 0)) + 2\varphi((0, 1), (0, 1)) = a + 2b + c + 2d,$$

$$3 = \varphi((2, 1), (1, 0)) = 2\varphi((1, 0), (1, 0)) + \varphi((0, 1), (1, 0)) = 2a + c,$$

$$4 = \varphi((0, 1), (1, 0)) = c.$$

$$\text{Rezolvând acest sistem, găsim } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = 4, d = -\frac{9}{4}.$$

Prin urmare, expresia analitică a lui  $\varphi$  este

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = -\frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 + 4x_2y_1 - \frac{9}{4}x_2y_2.$$

În general se obține un sistem liniar, cu patru ecuații și patru necunoscute. Se pot da ușor exemple în care acest sistem este incompatibil (caz în care nu există o asemenea formă biliniară) sau compatibil nedeterminat (caz în care există o infinitate de forme biliniare cu proprietățile date, prin urmare ea nu poate fi determinată).

6. Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât forma biliniară  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + ax_2y_1 + bx_2y_2$  să fie simetrică.

*Rezolvare.*

Trebuie ca  $\varphi((y_1, y_2), (x_1, x_2)) = \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ ,  $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , adică  $x_1y_1 + ax_1y_2 + 2x_2y_1 + bx_2y_2 = x_1y_1 + 2x_1y_2 + ax_2y_1 + bx_2y_2$ ,  $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ . Identificând coeficienții (egalitatea celor două polinoame din  $\mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2]$  revine la egalitatea coeficienților), deducem că  $a = 2$ ,  $b \in \mathbb{R}$  arbitrar.

La aceeași concluzie am fi putut ajunge rapid examinând matricea lui  $\varphi$  în baza canonică,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ .  $\varphi$  este simetrică dacă și numai dacă matricea ei, în orice bază este simetrică (adică este egală cu transpusa sa).

7. Scrieți forma pătratică  $f$  asociată formei biliniare simetrice  $\varphi$  dacă:

$$(a) \varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2;$$

$$(b) \varphi : \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi(aX + b, cX + d) = ac - 2ad - 2bc.$$

*Rezolvare.*

$$(a) f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2;$$

$$(b) f : \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}, f(aX + b) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(aX + b, aX + b) = a^2 - 4ab.$$

8. Determinați polara formei pătratice  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_2x_3 + 6x_3^2$ .

*Rezolvare.*

Pentru a determina expresia lui  $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$ , putem folosi una din formulele

$$\varphi(u, v) = \frac{f(u) + f(v) - f(u - v)}{2} = \frac{f(u + v) - f(u) - f(v)}{2}, \text{ în care termenii}$$

din membrul drept sunt cunoscuți, ceea ce permite determinarea, în principiu facilă, dar deseori laborioasă, a lui  $\varphi(u, v)$ .

În loc de aceasta, putem deduce expresia analitică a lui  $\varphi$  prin „dedublare”, adică gândindu-ne din ce provine fiecare termen. Astfel, fiind extrem de ușor de văzut cum se poate obține  $f$  pornind de la  $\varphi$ , să încercăm să facem demersul invers. Să analizăm fiecare termen din  $f$  și să vedem din ce termen(i) provine. Constatăm că, în general, termenii de forma  $ax_i^2$  provin dintr-un termen  $ax_iy_i$  din  $\varphi$ , în vreme ce un termen de forma  $ax_ix_j$  provine din adunarea unor termeni de forma  $bx_iy_j$  și  $cx_jy_i$ , cu  $b + c = a$ . Însă  $\varphi$  este simetrică, deci coeficienții lui  $x_iy_j$  și  $x_jy_i$  trebuie să fie egali. Prin urmare un termen de forma  $x_ix_j$  în expresia lui  $f$  provine din adunarea termenilor  $\frac{a}{2}x_iy_j$  și  $\frac{a}{2}x_jy_i$ . În concluzie, găsim:

$$\begin{aligned} \varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) &= x_1y_1 + \left(\frac{2}{2}x_1y_2 + \frac{2}{2}x_2y_1\right) + \\ &\left(\frac{3}{2}x_1y_3 + \frac{3}{2}x_3y_1\right) + 4x_2y_2 + \left(\frac{5}{2}x_2y_3 + \frac{5}{2}x_3y_2\right) + 6x_3y_3 = \\ &x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + \frac{3}{2}x_1y_3 + \frac{3}{2}x_3y_1 + 4x_2y_2 + \frac{5}{2}x_2y_3 + \frac{5}{2}x_3y_2 + 6x_3y_3. \end{aligned}$$

9. Reduceți la forma canonică formele pătratice de mai jos, precizând și câte o bază în care se obțin:

- (a)  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + 6xy$   
(b)  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4xz + 5z^2 + 6yz$   
(c)  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$   
(d)  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$   
(e)  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = 4x^2 - yz$ .

*Rezolvare.*

- (a) Completăm  $f(x, y) = x^2 + 6xy$  la un pătrat adunând  $9y^2$ ; obținem  $f(x, y) = x^2 + 6xy + 9y^2 - 9y^2 = (x + 3y)^2 - (3y)^2 = (x')^2 - (y')^2$  unde, de exemplu,
- $$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 3y. \end{cases} \quad (\text{Nu este singura alegere posibilă: am fi putut de pildă alege}$$

$y' = -3y$ , cu care am fi obținut o altă bază în care se realizează forma canonică.)

Obținem de aici imediat că  $\begin{cases} x = x' - y' \\ y = \frac{1}{3} y' \end{cases}$ , de unde vectorii din baza în care se realizează forma canonică se află citind coeficienții lui  $x'$ , respectiv  $y'$ :  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ .

Desigur, atunci când am explicitat  $x$  și  $y$  în funcție de  $x'$  și  $y'$  am inversat în fapt matricea sistemului:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

(b) Considerăm un „pătrat de pornire”, de exemplu  $x^2$ , și pornim grupările de la acesta (pornind gruparea de la  $3y^2$  sau de la  $5z^2$  s-ar fi obținut alte baze, dar o formă canonică de aceeași signatură). Considerăm **toți** termenii în care apare  $x$ :  $x^2 + 2xy + 4xz = x^2 + 2x(y + 2z)$  și îi completăm la un pătrat, anume adăugând  $(y + 2z)^2$ .

Avem  $f(x, y, z) = x^2 + 2x(y + 2z) + (y + 2z)^2 - (y + 2z)^2 + 3y^2 + 5z^2 + 6yz = (x + y + 2z)^2 - y^2 - 4yz - 4z^2 + 3y^2 + 5z^2 + 6yz = (x + y + 2z)^2 + 2y^2 + z^2 + 2yz$ . Scopul acestei manevre a fost să „scăpăm” de variabila  $x$ . De aici înainte avem de grupat la pătrate o formă pătratică de numai două variabile,  $y, z$ , anume  $g(y, z) = 2y^2 + z^2 + 2yz$ . Iarăși, alegem un pătrat, considerăm toți termenii în care apare respectiva variabilă, apoi completăm la un pătrat. Putem scrie fie

$$g(y, z) = 2y^2 + 2yz + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^2 = \left(\sqrt{2}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2 \quad (\text{dacă pornim}$$

cu gruparea de la termenul  $y^2$ ), fie, mai comod,  $g(y, z) = z^2 + 2yz + y^2 + y^2 = (z + y)^2 + y^2$  (dacă pornim gruparea de la termenul  $z^2$ ). Vom alege, desigur, cea de-a doua variantă pentru că ea duce la calcule mai frumoase. Am găsit așadar

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z)^2 + (z + y)^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2, \text{ unde}$$

$$\begin{cases} x' = x + y + 2z \\ y' = y + z \\ z' = y \end{cases}.$$

Inversând eventual matricea sistemului (sau, mai bine în cazul de față constatând succesiv că  $y = z'$ ,  $z = y' - z'$ , apoi  $x = x' - y - 2z = x' - z' - 2(y' - z') =$



$x' - 2y' + z'$ ) obținem

$$\begin{cases} x = x' - 2y' + z' \\ y = z' \\ z = y' - z'. \end{cases}$$

O bază în care se obține forma canonică este deci

$$B = \{(1, 0, 0), (-2, 0, 1), (1, 1, -1)\}.$$

(c) Probabil că unii dintre voi își amintesc de demonstrația inegalității  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$  în care se înmulțea cu 2, se trecea totul într-o parte și se folosea că  $f(x, y, z) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ , unde  $f$  este chiar forma pătratică din exercițiul de față. Dispunem, în aparență, de o foarte elegantă scriere a lui  $f$  ca sumă de pătrate, scriere pe care, dacă nu o știți din clasa a IX-a, o puteați descoperi acum. Notând  $x' = x - y$ ,  $y' = y - z$ ,  $z' = z - x$ , constatăm că nu putem scoate de aici  $x, y, z$  în funcție de  $x', y', z'$

pentru că matricea  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  nu este inversabilă. Care este explicația?

Ei bine, scrierea aceea elegantă a lui  $f$  ca sumă de pătrate nu respectă o condiție necesară, pe care tehnica „epuizării succesive a câte unei variabile” o asigură: cantitățile de sub pătrate trebuie să fie independente. Ori la noi  $x' + y' + z' = 0$ . Să lăsăm deoparte scrierea „elegantă” și să aplicăm algoritmul.

$$f(x, y, z) = 2x^2 - 2x(y + z) + 2y^2 - 2yz + 2z^2 =$$

$$2x^2 - 2x(y + z) + \frac{1}{2}(y + z)^2 - \frac{1}{2}(y + z)^2 + 2y^2 - 2yz + 2z^2 =$$

$$\left(\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2 + \frac{3}{2}y^2 - 3yz + \frac{3}{2}z^2 = \left(\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}y - \sqrt{\frac{3}{2}}z\right)^2.$$

Remarcați că forma canonică are signatura  $(2, 0, 1)$  și nu  $(3, 0, 0)$  cum părea să indice „scrierea elegantă”.

Vom alege  $x' = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z$ ,  $y' = \sqrt{\frac{3}{2}}y - \sqrt{\frac{3}{2}}z$  și  $z' = ax + by + cz$  cu

$a, b, c$  alese cu singura restricție ca matricea sistemului obținut să fie inversabilă. Pentru comoditate, alegem  $z' = z$ . (Alte alegeri conduc la alte baze, la fel de

bune.) Atunci obținem succesiv  $z = z'$ ,  $y = \sqrt{\frac{2}{3}}y' + z'$ ,  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + z'$ , deci o bază în care se obține forma canonică este

$$B = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0 \right), (1, 1, 1) \right\}.$$

(d)  $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ . Alegem  $x' = x + y + z$ , apoi  $y', z'$  aproape la întâmplare; trebuie doar ca matricea sistemului care îi exprimă pe  $x', y', z'$

în funcție de  $x, y, z$  să fie inversabilă. Dacă alegem  $y' = y$ ,  $z' = z$ , avem  $x = x' - y' - z'$ ,  $y = y'$ ,  $z = z'$ , deci o bază în care se obține forma canonică este  $B = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ .

(e)  $f(x, y, z) = 4x^2 - 2yz = (2x)^2 - 2yz$ , dar acum nu mai avem pătrat de la care să continuăm gruparea. (Această problemă poate apărea la început sau oricând pe parcursul aplicării algoritmului.) Vom face niște schimbări auxiliare care să producă pătrate: alegem un termen de forma  $x_i x_j$  (aici  $yz$ ), iar variabilele implicate le scriem  $x_i = y_i + y_j$ ,  $x_j = y_i - y_j$ , celelalte variabile rămânând neschimbate. În locul termenului  $x_i x_j$  vom avea acum  $y_i^2 - y_j^2$ , prin urmare vom avea acum pătrat de la care să continuăm aplicarea algoritmului. La sfârșit, revenim la variabilele inițiale.

Punând  $y = y_1 + z_1$ ,  $z = y_1 - z_1$ , avem  $f(x, y, z) = (2x)^2 + 2y_1^2 - 2z_1^2 = (2x)^2 + (\sqrt{2}y_1)^2 - (\sqrt{2}z_1)^2 = (2x)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2$ .

Notăm  $x' = 2x$ ,  $y' = \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z$ ,  $z' = \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z$ ; obținem  $x = \frac{1}{2}x'$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'$ ,  $z = \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'$ , deci o bază pentru forma canonică este

$$B = \left\{ \left( \frac{1}{2}, 0, 0 \right), \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

## C. PROBLEME PROPUSE

1. Fie  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x - y + 2z$ . Să se arate că  $f$  este o formă liniară a spațiului  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$  și să se determine dimensiunea imaginii sale.

*Răspuns.* 1.

2. Forma liniară  $f$  a spațiului  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$  are, în baza canonică, matricea  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Să se determine dimensiunea nucleului acestei forme.

*Răspuns.* 2.

3. În spațiul  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$  considerăm forma liniară  $f \in (\mathbb{R}^2)^*$  a carei matrice în baza  $B = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (0, 1)\}$  este  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Se cere:

- (a) expresia analitică a formei  $f$ ;
- (b) dimensiunea nucleului formei  $f$ ;
- (c) duala bazei  $B$  și exprimarea formei  $f$  în aceasta bază.

*Răspuns.* (a)  $f(x, y) = 3x - y$ ; (b) 1; (c)  $B^* = \{v_1^* = e_2^*, v_2^* = e_1^* - e_2^*\}$ ,  $f = 2v_1^* - v_2^*$  (unde cu  $\{e_1, e_2\}$  am notat baza canonică din  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ ).

4. Fie  $V/K$  un spațiu de dimensiune  $n$ . Să se determine dimensiunea spațiului dual  $V^*$ .

5. Să se determine  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(x, y, z) = (a-1)x^2 + (a+b)xy + (b+1)y^2 + ax + by + cz$  să fie o formă liniară a spațiului  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ , apoi să se determine matricea sa în baza canonică.

*Răspuns.*  $a = 1, b = -1, c \in \mathbb{R}; \quad f_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & c \end{pmatrix}.$

6. Fie  $f$  o formă liniară a spațiului  $\mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$ , care are matricea  $f_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  în baza canonică.

(a) Să se scrie expresia analitică a aplicației  $f$ .

(b) Să se determine nucleul formei  $f$  și dimensiunea sa.

(c) Să se afle matricea acestei forme în baza  $\{1, -2+x, -3+x^2, -4+x^3\}$  prin două metode.

*Răspuns.* (a)  $f(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + 2b + 3c + 4d;$

(b)  $\ker f = \{b(-2+x) + c(-3+x^2) + d(-4+x^3) \mid b, c, d \in \mathbb{R}\}, \quad 3;$

(c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

7. Fie  $V/K$  un spațiu,  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  o bază a sa și  $f : V \rightarrow K$  o funcție. Să se arate că  $f \in V^*$  dacă și numai dacă există  $n$  elemente  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$  astfel ca  $f(v) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ , pentru orice vector  $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n \in V$ .

8. Să se construiască baza duală a bazei  $B$  când:

(a)  $B = \{13\}$  din spațiul  $\mathbb{R}/\mathbb{R};$

(b)  $B = \{(1, 3), (-1, 1)\}$  din spațiul  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R};$

(c)  $B = \{1+x, 1-x\}$  din spațiul  $\mathbb{R}_1[x]/\mathbb{R}.$

9. Fie forma  $f \in \mathbb{R}_1[x]^*$  definită prin  $f(a + bx) = a - 2b$ . Să se exprime  $f$  în baza duală a bazei:

(a) canonice;

(b)  $\{1+x, 1-x\}.$

10. Forma liniară  $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  are matricea  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$  în baza  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Să se scrie:

(a) expresia analitică a formei  $f;$

(b) coordonatele formei  $f$  în baza duală  $B^*.$

*Răspuns.* (a)  $f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = 3a - b;$  (b)  $2, -1.$

11. Să se arate că  $\{f \in \mathbb{R}_2[X]^* \mid f(X + X^2) = 0 = f(-1 + X + X^2)\}$  este subspațiu vectorial al spațiului dual  $\mathbb{R}_2[X]^*$  și să se determine dimensiunea acestuia.

*Răspuns.* 1.

12. Fie  $I : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$  funcția definită prin  $I(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ . Să se arate că  $I \in \mathbb{R}_2[x]^*$  și să se scrie aceasta formă în duala bazei canonice.

$$\text{Răspuns. } I = (\beta - \alpha) e_1^* + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} e_2^* + \frac{(\beta - \alpha)^3}{3} e_3^*.$$

13. Să se arate că orice formă liniară este ori trivială ori surjectivă.

14. \* Fie  $I : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$  forma definită la Problema 12, și  $x_0, x_1, x_2, x_3 \in [\alpha, \beta]$  patru numere distincte. Să se arate că există  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  pentru care

$$I(f) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(x_3).$$

Generalizare. (Această reprezentare a formei  $I$  constituie fundamentul teoriei integrării numerice).

15. \* Fie  $f, g$  două forme netriviale ale spațiului  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ . Să se arate că există  $c \in \mathbb{R}^*$  astfel ca  $f = cg$  dacă și numai dacă cele două forme au același nucleu.

16. \* Fie  $V$  un spațiu real de dimensiune  $n$  și  $f$  o formă liniară nenulă a sa. Să se arate că există o bază  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  în  $V$  astfel încât  $f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1$ , oricare ar fi  $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \in V$ .

*Indicație.* Se alege baza astfel încât  $f(e_1) = 1, f(e_2) = 0, \dots, f(e_n) = 0$ .

17. Să se arate că funcția  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $\varphi((x, y), (x', y')) = 2xx' + xy' - yy'$  este o formă biliniară a spațiului  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$  și să se scrie matricea ei în baza canonică. Este aceasta formă simetrică?

$$\text{Răspuns. } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ nu este simetrică}$$

18. Forma biliniară  $\varphi$  a spațiului vectorial  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$  are matricea  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  în baza  $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ . Să se determine expresia sa analitică.

$$\text{Răspuns. } \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \frac{1}{2} x_1 y_1 + \frac{1}{2} x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

19. Fie  $V$  un spațiu real de dimensiune  $n$ . Să se arate că mulțimea formelor biliniare  $\mathcal{B}(V)$  se poate înzestra cu o structură canonică de spațiu vectorial real și că  $\mathcal{B}(V) \simeq \mathbb{R}^{n \times n}$ .

20. Fie  $V$  un spațiu real de dimensiune  $n$ . Să se arate că mulțimea formelor biliniare simetrice  $B_s(V)$  este un subspațiu liniar al spațiului  $\mathcal{B}(V)$ . Care este  $\dim B_s(V)$ ? Este adevărată afirmația  $B_s(V) \simeq \mathcal{Q}(V)$ ?

21. Forma biliniară  $\varphi$  a spațiului vectorial  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$  are matricea  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  în baza canonică.
- (a) Să se calculeze  $\varphi((x, 0), (1, 2))$  și  $\varphi((x, y), (x, y))$ .
- (b) Care este matricea formei  $\varphi$  în baza  $\{(1, 1), (-1, 2)\}$ ?
- Răspuns.* (a)  $\varphi((x, 0), (1, 2)) = 3x$ ,  $\varphi((x, y), (x, y)) = x^2 + 3xy + y^2$ . (b)  $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .
22. Fie  $V/K$  și  $V'/K$  două spații vectoriale de dimensiune  $n$ . Să se arate că  $\mathcal{B}(V) \simeq \mathcal{B}(V')$ .
23. Fie  $\varphi: \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $\varphi(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx$ .
- (a) Să se arate că  $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_2[x])$ .
- (b) Să se determine matricea formei  $\varphi$  în baza canonică din  $\mathbb{R}_2[x]$ .
- (c) Să se determine matricea formei  $\varphi$  în baza  $\{1, 1-x, x-x^2\}$ .
24. Considerăm forma  $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_1[x])$  a carei matrice în baza canonică  $\{1, x\}$  este  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
- (a) Să se găsească expresia analitică a funcției  $\varphi$ .
- (b) Să se arate că funcția  $f: \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(a+bx) = \varphi(a+bx, 1+x)$  este o formă liniară a spațiului  $\mathbb{R}_1[x]/\mathbb{R}$  și să se determine o bază a nucleului său.
- Răspuns.* (a)  $\varphi(a+bx, a'+b'x) = 2aa' + ab' - bb'$ . (b) e.g.  $\{1+3x\}$ .
25. Fie  $V/K$  un spațiu,  $\mathcal{B}(V)$  spațiul formelor biliniare,  $\varphi \in \mathcal{B}(V)$  și  $v \in V$ .
- (a) Să se arate că  $\varphi_{v1}, \varphi_{v2} \in V^*$ , unde  $\varphi_{v1}(u) = \varphi(u, v)$  și  $\varphi_{v2}(u) = \varphi(v, u)$  pentru orice  $u \in V$ .
- (b) Să se arate că matricea formei biliniare  $\varphi$  este simetrică dacă și numai dacă  $\varphi_{v1} = \varphi_{v2}$ , pentru orice vector  $v \in V$ .
26. Fie  $V/K$  un spațiu, iar  $\mathcal{B}(V)$  spațiul formelor biliniare.
- (a) Să se arate că  $\mathcal{B}_s(V) \leq \mathcal{B}(V)$ , unde  $\mathcal{B}_s(V)$  este spațiul formelor biliniare simetrice.
- (b) Să se arate că  $\mathcal{B}_a(V) \leq \mathcal{B}(V)$ , unde  $\varphi \in \mathcal{B}_a(V)$  dacă și numai dacă forma  $\varphi \in \mathcal{B}(V)$  este antisimetrică, i.e.  $\varphi(v, u) = -\varphi(u, v)$  pentru orice  $u, v \in V$ .

(c) Fie  $K = \mathbb{R}$ . Pentru orice  $\varphi \in \mathcal{B}(V)$  definim

$$\varphi_s(u, v) = \frac{1}{2}(\varphi(u, v) + \varphi(v, u)) \text{ și } \varphi_a(u, v) = \frac{1}{2}(\varphi(u, v) - \varphi(v, u))$$

pentru orice  $u, v \in V$ . Să se arate că  $\varphi_s \in \mathcal{B}_s(V)$  și că  $\varphi_a \in \mathcal{B}_a(V)$ .

(d) Să se arate că  $\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}_s(V) \oplus \mathcal{B}_a(V)$ , dacă  $V$  este un spațiu real.

27. Forma  $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$  este definită prin

$$\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_1 - 2x_2y_3.$$

Să se determine matricea sa în baza  $\{(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1)\}$ .

*Răspuns.*  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$

28. Să se determine numerele naturale  $n$  pentru care spațiile reale  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  și  $\mathbb{R}^{2^n}$  sunt izomorfe.

*Răspuns.*  $n \in \{2, 4\}$ .

29. Fie  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_1 - 2x_2y_3.$$

(a) Să se arate că funcția  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = \varphi(x, x)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}^3$  este o formă pătratică, i.e.  $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^3)$ .

(b) Să se scrie matricea formei pătratice  $f$  (în baza canonică).

(c) Să se construiască polara formei pătratice  $f$ .

*Răspuns.* (b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$ , (c)  $\chi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2 +$

$$2x_3y_3 - \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) - (x_2y_3 + x_3y_2).$$

30. Să se arate că următoarele funcții din  $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^3)$  admit formele canonice indicate și să se stabilească signaturile lor.

(a)  $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2;$

(b)  $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2;$

(c)  $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = y_1^2 + y_2^2;$

(d)  $-x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$

*Răspuns.* (a)  $(2, 1, 0)$ , nedefinită; (b)  $(1, 2, 0)$ , nedefinită; (c)  $(2, 0, 1)$ , pozitiv semidefinită; (d)  $(0, 3, 0)$ , negativ definită.

31. Folosind metoda Gauss să se stabilească semnatura formelor pătratice:

- (a)  $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ ;  
 (b)  $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$ .

*Răspuns.* (a)  $(2, 1, 0)$  (b)  $(2, 1, 0)$ .

32. Fie  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi((x, y), (1, 1)) = 0\}$ , unde  $\varphi$  este polara formei pătratice  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy$ . Să se arate că  $S \simeq \mathbb{R}$ .

33. Să se determine semnatura formei pătratice  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .

*Răspuns.*  $(3, 0, 0)$ , dacă  $a > 5$ ;  $(2, 0, 1)$  dacă  $a = 5$ ;  $(2, 1, 0)$  dacă  $a < 5$ .

34. Folosind metoda Jacobi să se scrie forma canonică a formei pătratice  $q : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $q(f) = \int_0^2 f^2(x) dx$ .

*Răspuns.*  $\frac{3}{8}\alpha^2 + 2\beta^2$ .

35. Să se indice o bază în care  $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^4)$  are forma canonică:

- (a)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ ;  
 (b)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$ .

*Răspuns.* De exemplu: (a)  $y_1^2 - y_2^2$ , cu transformările de coordonate  $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$ ,  $x_2 = y_1 + y_2 - y_4$ ,  $x_3 = y_3$ ,  $x_4 = y_4$ ; deci noua bază este  $\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$ . (b)  $3y_1^2 - y_2^2 + \frac{17}{3}y_3^2 - \frac{3}{17}y_4^2$ ;  
 $\left\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), \left(-\frac{1}{3}, 1, -2, 0\right), \left(\frac{1}{17}, -\frac{3}{17}, \frac{6}{17}, 1\right)\right\}$ .

36. Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât forma pătratică  $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^3)$ ,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2ax_2x_3 + 2x_3x_1$$

să fie pozitiv definită.

*Răspuns.*  $a \in (0, 1)$ .

37. Să se verifice legea de inerție a semnaturii prin metoda Gauss, respectiv, cu metoda Jacobi pentru forma pătratică  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  care are în baza canonică

$$\text{matricea } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

38. \* Fie  $V$  un spațiu vectorial real,  $V^*$  dualul sau și  $W := V \times V^*$  spațiul produs.

- (a) Care sunt operațiile - internă și externă - pe  $W$ ?

- (b) Care este dimensiunea spațiului  $W$ ?
- (c) Arătați că  $W \simeq \mathbb{R}^{n \times n}$ .
- (d) Fie  $\varphi : W \times W \rightarrow \mathbb{R}, \varphi((u, f), (v, g)) = g(u) + f(v)$ . Aătați că  $\varphi$  este o formă biliniară simetrică.
39. O formă biliniară a spațiului vectorial  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$  are matricea  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  în baza  $B = \{(1, 0), (-1, 1)\}$ . Se cere forma sa analitică.  
(Examen, Informatică, 2014)
40. Să se determine polara și signatura formei pătratice  $f(x, y, z) := xz + yz - 2zx$ .  
(Examen, Ingineria sistemelor, 2014)
41. Să se determine matricea și signatura formei pătratice  $f(x, y, z) := x^2 - 2yz - 2zx$ .  
(Examen, Ingineria sistemelor, 2014)
42. \* Fie  $V$  un spațiu finit dimensional peste corpul  $K$ , fie  $F : V \times V \rightarrow K$  o formă biliniară și fie subspațiile  $V_1 = \{x \in V \mid F(x, y) = 0, \forall y \in V\}$  și  $V_2 = \{y \in V \mid F(x, y) = 0, \forall x \in V\}$ . Arătați că  $\dim V_1 = \dim V_2$ .  
(Concurs „Traian Lalescu”, profil electric, etapa finală, Alba Iulia, 2013)



## 6 SPAȚII VECTORIALE EUCLIDIENE

Spațiile vectoriale euclidiene - generalizări ale planului euclidian - se constituie în cel mai firesc și cel mai uzitat suport matematic necesar descrierii, modelării și analizei fenomenelor cotidiene. Structura unui asemenea spațiu este, esențial, mai bogată (decât a unui spațiu care este doar liniar), acest fapt permițând diferite calcule care, într-un spațiu vectorial fără structură suplimentară, nu sunt posibile: într-un asemenea spațiu putem calcula lungimea unui vector, putem măsura unghiul dintre doi vectori, putem, de asemenea, să aflăm distanța dintre doi vectori.

Regăsirea informațiilor (information retrieval) este una din miile de aplicații ale acestor spații. Algoritmul transformatei Fourier rapide este probabil cel mai important algoritm numeric din zilele noastre, iar instrumentul esențial folosit în realizarea lui este ortogonalitatea vectorilor din spațiile euclidiene.

Pe tot parcursul capitolului spațiile vectoriale considerate sunt reale, adică aici  $K = \mathbb{R}$

### A. TEORIE

#### 6.1. Produse scalare

Într-un spațiu vectorial putem aduna vectori (operația internă) și putem înmulți scalari cu vectori (operația externă). În plus putem compara doi vectori din următorul punct de vedere.

**Definiția 6.1.1. Direcții și sensuri comune pentru doi vectori.** Fie  $V/\mathbb{R}$  un spațiu vectorial real. Spunem că vectorii  $u, v \in V$  sunt **coliniari** (sau **au aceeași direcție**) dacă există un scalar nenul  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  astfel ca  $v = \lambda u$ . Dacă, în plus,  $\lambda > 0$  spunem că cei doi vectori **au același sens**, iar dacă  $\lambda < 0$  spunem că  $u$  și  $v$  **au sens opus**.

**Exemplul 6.1.1.** În spațiul  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$  vectorii  $u = (1, 2, 0)$  și  $v = (13, 26, 0)$  au aceeași direcție și același sens deoarece  $v = 13u$  și  $\lambda = 13 > 0$ . În astfel de cazuri convenim să scriem rapoartele de proporționalitate ale coordonatelor în forma  $\frac{13}{1} = \frac{26}{2} = \frac{0}{0} = \lambda = 13$  chiar dacă raportul al treilea nu are sens; identificăm acest șir de egalități cu următoarele egalități care au sens:  $13 = 1 \times 13$ ,  $26 = 2 \times 13$ ,  $0 = 0 \times 13$ . Vectorii  $u$  și  $-v$  au aceeași direcție dar au sens opus.

În spațiile vectoriale euclidiene avem, în plus față de spațiile vectoriale, posibilitatea să „înmulțim” vectori. Produsul a doi vectori pe care îl definim în continuare va fi un număr real, de aceea acestei înmulțiri a vectorilor îi vom spune *produs scalar*.

**Definiția 6.1.2. Definiția produsului scalar.** Fie  $V/\mathbb{R}$  un spațiu vectorial  $n$ -dimensional și  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  o formă biliniară simetrică a cărei formă pătratică asociată este pozitiv definită. Atunci spunem că  $(V, \varphi)$  este un **spațiu (vectorial, liniar) euclidian** iar  $\varphi$  este un **produs scalar** pe  $V$ , iar dacă nu este pericol de confuzie, spunem (și scriem) că  $V$  este spațiu vectorial euclidian. Dacă  $u, v \in V$  scalarul  $\varphi(u, v)$  va fi notat cu  $uv$  (sau  $u \cdot v$  sau  $\langle u, v \rangle$ ); vom spune că  $uv$  este **produsul scalar al vectorilor**  $u$  și  $v$ . Uneori vom spune că  $(V, \cdot)$  este spațiu euclidian înțelegând prin aceasta că aplicația  $\varphi(u, v) := uv$  definește un produs scalar pe  $V$ .

Din definiția precedentă, din definiția formei biliniare simetrice și din definiția formei pătratice pozitiv definite rezultă următoarea caracterizare a produsului scalar.

**Observația 6.1.1.** Fie  $V$  un spațiu vectorial real și  $V \times V \ni (u, v) \mapsto uv := u \cdot v \in \mathbb{R}$  o funcție. Atunci  $(V, \cdot)$  este un spațiu vectorial euclidian dacă și numai dacă:

1.  $uv = vu$  pentru orice  $u, v \in V$  (**simetria formei biliniare**);
2.  $(\alpha u + \beta v)w = \alpha uw + \beta vw$  pentru orice  $u, v, w \in V$  și pentru orice  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . (**liniaritatea în prima componentă a funcției produs „ $\cdot$ ”**);
3.  $v \cdot v \geq 0$  pentru orice  $v \in V$  și  $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = \theta_V$  (forma pătratică asociată formei biliniare simetrice „ $\cdot$ ” **este pozitiv definită**).

**Exemplul 6.1.2.** Definim pe  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  aplicația  $\varphi((x, y)(x', y')) := xx' - xy' - x'y + 4yy'$ . Să arătăm că  $(\mathbb{R}^2, \varphi)$  este un spațiu euclidian. Deoarece  $\varphi$  este o formă biliniară simetrică având matricea  $\varphi_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  în baza canonică din  $\mathbb{R}^2$ , înseamnă că forma pătratică  $f$  care are drept polară forma  $\varphi$  are expresia analitică  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2$ . Dar  $f(x, y) = (x - y)^2 + 3y^2$ , daci semnatura formei noastre este  $(2, 0, 0)$ , și, prin urmare, forma este pozitiv definită. În consecință  $\varphi$  este un produs scalar pe  $\mathbb{R}^2$ , deci  $(\mathbb{R}^2, \varphi)$  este un spațiu euclidian.

**Definiția 6.1.3. Definiția normei. Versor (vector unitar).** Fie  $(V, \cdot)$  un spațiu euclidian. Numărul nenegativ

$$\|v\| := \sqrt{v \cdot v}$$

se numește **norma** sau **lungimea vectorului**  $v \in V$ . Funcția

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$$

se numește **normă** (pe  $V$ ), iar cuplul  $(V, \|\cdot\|)$  se numește **spațiu vectorial normat**. Mai spunem uneori că spațiul euclidian  $V$  este un **spațiu normat cu norma**

*indusă de produsul scalar „ $\cdot$ ”. Un vector de lungime 1 se numește **vector unitar** sau **versor**.*

**Exemplul 6.1.3.** În spațiul euclidian  $(\mathbb{R}^2, \varphi)$  definit la exemplul precedent norma indusă de produsul scalar  $\varphi$  are expresia analitică  $\|(x, y)\|_\varphi = \sqrt{\varphi((x, y), (x, y))} = \sqrt{x^2 - 2xy + 4y^2}$ . Deci, dacă  $e_1 = (1, 0)$  și  $e_2 = (0, 1)$  sunt vectorii din baza canonică, norma lui  $e_1$  este 1, iar norma (lungimea) lui  $e_2$  este 2. Să observăm că, definind  $(x, y) \cdot (x', y') := xx' + yy'$ , cuplul  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$  este de asemenea spațiu euclidian; în acest spațiu lungimile celor doi vectori sunt egale cu 1, adică cei doi vectori sunt unitari.

**Exemplul 6.1.4. Versorul unui vector.** Dacă  $(V, \cdot)$  este un spațiu vectorial euclidian și  $v$  este un vector nenul din acest spațiu atunci

$$v_0 := \frac{1}{\|v\|} v$$

este un vector care are aceeași direcție și același sens cu vectorul  $v$ . În plus  $\|v_0\| = \sqrt{\frac{1}{\|v\|} v \cdot \frac{1}{\|v\|} v} = \frac{1}{\|v\|} \sqrt{v \cdot v} = 1$ . Vectorul  $v_0$  se numește **versorul vectorului**  $v$ .

**Exemplul 6.1.5. Produsul scalar standard și spațiul euclidian canonic  $\mathbb{R}^n$ .** În spațiul  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$  definim produsul vectorilor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  prin

$$xy := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Să arătăm că această aplicație definește un produs scalar pe  $\mathbb{R}^n$ . Fie  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  și  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  vectori arbitrari din  $\mathbb{R}^n$  și  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Atunci

- $xy = yx$ ;
- $(\alpha x + \beta y)z = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n)(z_1, \dots, z_n) = (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n)z_n = \alpha(x_1z_1 + \dots + x_nz_n) + \beta(y_1z_1 + \dots + y_nz_n) = \alpha xz + \beta yz$ ;
- $x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$  și  $x \cdot x = 0$  dacă și numai dacă  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , adică  $x = \theta_{\mathbb{R}^n}$ .

Prin urmare, cu acest produs scalar - numit **produsul scalar standard** -  $\mathbb{R}^n$  devine un spațiu vectorial euclidian. Îl vom numi **spațiul euclidian canonic** ( $n$ -dimensional).

Norma vectorului  $x$  este  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  și versorul vectorului nenul  $x$  este

$$x^0 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} x.$$

Conform *inegalității Cauchy - Buniakowski - Schwarz* avem

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2},$$

de unde rezultă că

$$|xy| \leq \|x\| \|y\|.$$

Inegalitatea dovedită mai sus este valabilă în general: într-un spațiu euclidian produsul scalar al doi vectori este mai mic sau egal cu produsul normelor celor doi vectori, după cum rezultă din următoarea teoremă.

**Teorema 6.1.1. Inegalitatea lui Schwarz.** Fie  $V$  este un spațiu vectorial euclidian și  $u, v \in V$ . Atunci

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă cei doi vectori sunt coliniari.

Din definiția normei induse de un produs scalar rezultă imediat următoarele proprietăți ale normei.

**Observația 6.1.2. Proprietăți ale normei.** Fie  $V$  un spațiu vectorial euclidian și  $\|\cdot\|$  norma indusă de produsul scalar. Atunci

1.  $\|v\| \geq 0$  pentru orice  $v \in V$ , iar  $\|v\| = 0$  dacă și numai dacă  $v = \theta_V$ ;
2.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$  pentru orice  $v \in V$  și pentru orice  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
3.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  pentru orice  $u, v \in V$  - **inegalitatea triunghiului**.

Primele două afirmații sunt imediate. Deoarece

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow \|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 \Leftrightarrow (u + v) \cdot (u + v) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| \Leftrightarrow uv \leq \|u\| \|v\|,$$

iar ultima inegalitate este chiar inegalitatea lui Schwarz, rezultă că inegalitatea triunghiului este verificată.

Din inegalitatea lui Schwarz rezultă că dacă  $u$  și  $v$  sunt vectori nenuli, atunci

$$\left| \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \right| \leq 1.$$

Acest fapt permite definirea cosinusului unghiului dintre acești vectori. Reamintim că funcția  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  este inversa restricției funcției  $\cos$  la intervalul  $[0, \pi]$ .

**Definiția 6.1.4. Măsura unghiului dintre doi vectori.** Fie  $u$  și  $v$  doi vectori nenuli din spațiul vectorial euclidian  $V$ . Numărul  $\arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$  se numește **măsura unghiului** dintre vectorii  $u$  și  $v$ . Scriem

$$\cos \widehat{u, v} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

și, prin abuz de limbaj, spunem uneori că  $\arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$  este **unghiul vectorilor**  $u$  și  $v$ .

Dacă  $\arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{\pi}{2}$ , sau, echivalent,  $u \cdot v = 0$ , spunem că **vectorii**  $u$  și  $v$  sunt **ortogonali**, sau că  $u$  este **perpendicular (ortogonal)** pe  $v$  și scriem  $u \perp v$ .

**Exemplul 6.1.6.** Fie  $u = (1, 2, 3)$  și  $v = (3, 2, 1)$  doi vectori din spațiul euclidian canonic tridimensional. Atunci  $\|u\| = \|v\| = \sqrt{14}$  și  $uv = 10$ . Prin urmare măsura unghiului dintre cei doi vectori este  $\arccos \frac{5}{7}$ , iar măsura unghiului dintre vectorii  $u$  și  $-v$  este  $\arccos \frac{-5}{7} = \pi - \arccos \frac{5}{7}$ . Vectorul  $w = (x, y, z)$  este perpendicular pe  $u$  dacă și numai dacă  $x + 2y + 3z = 0$  și este perpendicular pe  $v$  dacă și numai dacă  $3x + 2y + z = 0$ ; prin urmare mulțimea vectorilor ortogonali pe  $u$  și  $v$  este  $\{(x, -2x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, -2, 1)\}$ , adică un subspațiu unidimensional al spațiului  $\mathbb{R}^3$ , iar  $\{u, v, (1, -2, 1)\}$  este o bază în  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplul 6.1.7. Regăsirea informației (I R).** Regăsirea informației (information retrieval, pe scurt I R) este un proces de selecție. Să presupunem că avem documentele  $D_1, D_2, \dots, D_n$ . Se pune problema *găsirii documentelor relevante pentru o cerere  $c$  a unui solicitant*. Grosso modo, partea algebrică a tehnicii de găsire a acestora este următoarea.

- Se face o selecție a termenilor din documente și se stabilesc  $m$  termeni  $t_1, t_2, \dots, t_m$ .
- Fiecărui document  $D_j$  i se asociază un vector  $d_j = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  unde  $d_{ij} \geq 0$  este ponderea termenului  $t_i$  în documentul  $D_j$ .
- Se construiește *matricea termenilor (document-term matrix)*  $D = (d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_n)$ , matrice care este folosită la orice solicitare a unui utilizator.
- În cazul în care un utilizator face cererea  $c$ , acestei cereri i se asociază de asemenea un vector  $\bar{c} = (c_i) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  unde  $c_i \geq 0$  este ponderea termenului  $t_i$  în cererea  $c$ .
- Se calculează cosinusurile unghiurilor  $\widehat{\bar{c}, d_1}, \widehat{\bar{c}, d_2}, \dots, \widehat{\bar{c}, d_n}$ , adică  $\frac{\bar{c} \cdot d_j}{\|\bar{c}\| \|d_j\|}$ ,  $j = \overline{1, n}$  și se ordonează descrescător. Se obține un șir de numere nenegative ordonat  $\delta_{k_1} \geq \delta_{k_2} \geq \delta_{k_3} \geq \dots$ .
- Se oferă utilizatorului documentele  $D_{k_1}, D_{k_2}, D_{k_3}, \dots$  în această ordine. (De exemplu dacă  $\frac{\bar{c} \cdot d_j}{\|\bar{c}\| \|d_j\|} = 1$ , atunci documentul  $D_j$  are cea mai mare relevanță în raport cu cererea  $c$ , deoarece vectorii  $\bar{c}, d_j$  sunt coliniari și au același sens; în acest caz  $k_1 = j$ .)

Lungimea vectorului  $u - v$  este, prin definiție, distanța dintre vectorii  $u$  și  $v$ .

**Definiția 6.1.5. Distanța dintre doi vectori.** Fie  $V$  un spațiu euclidian și  $\|\cdot\|$  norma indusă de produsul scalar. Dacă  $u, v \in V$  atunci numărul nenegativ

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

se numește **distanța dintre vectorii**  $u$  și  $v$ . Funcția  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$  definită prin

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

se numește **metrica** (sau **distanța**) **indusă de norma**  $\|\cdot\|$  pe  $V$ , iar cuplul  $(V, d)$  se numește **spațiu metric**.

Din proprietățile normei obținem imediat următoarele proprietăți ale metricii induse de normă.

**Observația 6.1.3. Proprietăți ale metricii.** Fie  $V$  este un spațiu vectorial euclidian și  $d$  metrica indusă de norma sa. Atunci

1.  $d(u, v) = 0$  dacă și numai dacă  $u = v$ ;
2.  $d(u, v) = d(v, u)$  pentru orice  $u, v \in V$ ;
3.  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$  pentru orice  $u, v, w \in V$  - *inegalitatea triunghiului*.

Ultima inegalitate rezultă imediat din inegalitatea triunghiului propriei normei:

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|u - w + w - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\| = d(u, w) + d(w, v).$$

**Exemplul 6.1.8.** Fie spațiul euclidian canonic  $\mathbb{R}^n$  și  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  doi vectori din acest spațiu. Distanța dintre ei este

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Observăm că dacă  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  este baza canonică, atunci  $d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$  dacă  $i \neq j$ , că lungimea fiecărui vector din bază este 1 (adică baza  $B$  este formată din vectori unitari) și că  $e_i e_j = \delta_{ij}$  pentru orice  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ; în particular  $e_i \perp e_j$  dacă  $i \neq j$ .

## 6.2. Baze ortonormate

Bazele ortonormate sunt generalizări ale bazei canonice din spațiul euclidian canonic. Ele permit reprezentări numerice simple, și, de aceea sunt larg utilizate în practică, în special în grafica pe calculator.

Fie  $V$  un spațiu euclidian  $n$ -dimensional,  $n > 1$ .

**Definiția 6.2.1. Sisteme ortogonale.** O mulțime de vectori nenuli  $M = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$ , unde  $m > 1$ , se numește **sistem ortogonal** dacă orice doi vectori diferiți din mulțime sunt ortogonali, i.e.  $v_i v_j = 0$  (sau  $v_i \perp v_j$ ) dacă  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Dacă, în plus, vectorii din  $M$  sunt și unitari spunem că  $M$  este un **sistem ortonormat**.

**Observația 6.2.1.** Dacă  $M = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$  este un sistem ortogonal atunci  $M$  este un sistem de vectori liniar independent. Într-adevăr, dacă luăm o combinație liniară nulă a acestor vectori

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_m v_m = \theta, \quad x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$$

și înmulțim scalar cu  $v_i \in M$  membrii acestei egalități, obținem  $x_i v_i v_i = x_i \|v_i\|^2 = 0$ , deci, cum  $v_i \neq \theta$ , urmează că  $x_i = 0$  pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

În particular, un sistem ortogonal de  $n$  vectori din spațiul  $n$ -dimensional  $V$  este bază în acest spațiu.

**Definiția 6.2.2. Baze ortonormate.** Un sistem ortogonal de  $n$  vectori din spațiul  $n$ -dimensional  $V$  se numește **bază ortogonală**. O bază ortogonală formată cu vectori unitari se numește **bază ortonormată**.

**Exemplul 6.2.1.** Baza canonică din spațiul euclidian canonic  $\mathbb{R}^n$  - vezi Exemplul 6.1.5 - este formată din vectori unitari, ortogonali doi câte doi, deci este o bază ortonormată. În schimb, dacă considerăm produsul scalar din  $\mathbb{R}^2$  definit la Exemplul 6.1.3, avem  $\varphi((1, 0)(0, 1)) := -2$ , deci baza canonică din  $\mathbb{R}^2$  nu este ortogonală în spațiul euclidian  $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ .

**Observația 6.2.2.** Dacă  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  este o bază oarecare a spațiului euclidian  $(V, \cdot)$ , iar  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ ,  $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n \in V$ , atunci, în acord cu expresia analitică cunoscută de la formele biliniare avem

$$uv = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (e_i e_j)$$

sau, matriceal,

$$(uv) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 e_1 & e_1 e_2 & \dots & e_1 e_n \\ e_1 e_2 & e_2 e_2 & \dots & e_2 e_n \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ e_1 e_n & e_2 e_n & \dots & e_n e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

În schimb, bazele ortonormate permit o reprezentare facilă (așa numita *reprezentare (exprimare) Fourier*) a unui vector și formule simple - similare celor din spațiul euclidian canonic - de calcul al produsului scalar al doi vectori, respectiv al normei unui vector.

**Observația 6.2.3. Coeficienții Fourier. Reprezentarea Fourier.** Dacă  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  este o bază ortonormată în spațiul euclidian  $(V, \cdot)$  atunci coordonatele unui vector  $v \in V$  în această bază sunt

$$e_1 v, e_2 v, \dots, e_n v.$$

Într-adevăr, dacă  $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$  și înmulțim scalar membrii egalității cu  $e_i \in B$ , rezultă imediat că  $e_i v = x_i$ , pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Prin urmare am obținut următoarea reprezentare - numită *reprezentarea (exprimarea) Fourier* - a vectorului  $v$  în baza  $B$ :

$$v = (e_1 v) e_1 + (e_2 v) e_2 + \dots + (e_n v) e_n.$$

Scalarii  $e_1 v, e_2 v, \dots, e_n v \in \mathbb{R}$  se numesc *coeficienții Fourier ai vectorului  $v$*  (în baza ortonormată  $B$ ). În plus, dacă  $u = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$  este un alt vector din  $V$ , produsul scalar al celor doi vectori este

$$uv = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

iar norma vectorului  $v$  este

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

**Exemplul 6.2.2.** Fie  $v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$  și  $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$  în spațiul euclidian canonic  $\mathbb{R}^3$ . Deoarece  $v_1 v_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ ,  $v_2 v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$  și  $v_3 v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$  rezultă că  $B := \{v_1, v_2, v_3\}$  este o bază ortogonală în  $\mathbb{R}^3$ . Cum  $\|v_1\| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1$ ,  $\|v_2\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$  și  $\|v_3\| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}} = 1$  urmează că  $B$  este o bază ortonormată în  $\mathbb{R}^3$ . Exprimarea (unică) a vectorului  $v = (1, 2, 3)$  în această bază se face cu ajutorul coeficienților Fourier:  $x_1 = v_1 v = \frac{-1 + 2 + 3}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ,  $x_2 = v_2 v = \frac{1 + 2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ,  $x_3 = v_3 v = \frac{1 - 2 + 6}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$ . prin urmare  $v = \frac{4}{\sqrt{3}} v_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} v_2 + \frac{5}{\sqrt{6}} v_3$ .

**Observația 6.2.4. Reprezentarea unui versor într-o bază ortonormată.** Să presupunem că  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  este o bază ortonormată în spațiul euclidian  $(V, \cdot)$  și  $v \in V$  este un versor. Coeficienții Fourier, i.e. coordonatele vectorului  $v$  sunt  $x_1 = v e_1, x_2 = v e_2, \dots, x_n = v e_n$ . Cum  $v$  este unitar, avem  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ . Pe de altă parte cosinusul unghiului dintre vectorii  $v$  și  $e_i$  este  $\cos \widehat{v, e_i} = \frac{v e_i}{\|v\| \|e_i\|} = x_i$ .

Prin urmare *coeficienții Fourier ai versorului  $v$  în baza ortonormată  $B$  sunt chiar*



cosinusurile unghiurilor dintre vectorul  $v$  și vectorii bazei  $B$ :

$$v = (\cos \widehat{v, e_1}) e_1 + (\cos \widehat{v, e_2}) e_2 + \cdots + (\cos \widehat{v, e_n}) e_n.$$

**Definiția 6.2.3.** Matrice ortogonală . O matrice  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pentru care  $T^T T = I_n$  se numește **matrice ortogonală**.

**Exemplul 6.2.3.** Matricea  $T := \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  este ortogonală pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$  deoarece

$$T^T T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Observația 6.2.5.** **Proprietăți ale matricelor ortogonale.** O matrice ortogonală  $T$  este inversabilă, iar inversa sa coincide cu transpusa ei. Într-adevăr, dacă  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  este ortogonală atunci  $T^T T = I_n$ ,  $\det(T^T T) = 1$ , deci  $\det T \in \{-1, 1\}$ ; prin urmare  $T$  este inversabilă, iar din  $T^T T = I_n$  rezultă că  $T^{-1} = T^T$ . Dacă  $B$  și  $B'$  sunt baze ortonormate și cunoaștem exprimarea vectorului  $v$  în baza  $B$ , atunci putem determina ușor coordonatele acestui vector în baza  $B'$  astfel:

$$v_{B'} = T_{B'B} v_B = T_{BB'}^{-1} v_B = T_{BB'}^T v_B.$$

Dacă  $T_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  este o matrice ortogonală atunci

$$(T T_1)^T T T_1 = T_1^T T^T T T_1 = I_n,$$

deci produsul a două matrice ortogonale este o matrice ortogonală.

Reamintim că matricea de trecere  $T_{BB'}$  de la baza  $B$  la baza  $B'$ , are pe coloane coordonatele vectorilor din baza  $B'$  exprimați în baza  $B$ . O asemenea matrice este inversabilă iar legătura dintre coordonatele unui vector  $v$  în cele două baze se exprimă matriceal prin formula  $v_B = T_{BB'} v_{B'}$  (și  $v_{B'} = T_{BB'}^{-1} v_B$ ). În cazul matricelor de trecere între două baze ortonormate formulele se simplifică semnificativ din cauza următoarelor proprietăți care se dovedește folosind Observația 6.2.2.

**Propoziția 6.2.1.** **Matricea de trecere între baze ortonormate.** Matricea de trecere dintre două baze ortonormate ale unui spațiu euclidian este ortogonală.

**Exemplul 6.2.4.** Fie baza  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  de la Exemplul 6.2.2. Să determinăm matricea de trecere  $T_{BB_c}$  de la baza  $B$  la baza canonică  $B_c$  din  $\mathbb{R}^3$ . Cum cele două baze sunt ortonormate, matricea  $T_{BB_c}$  este ortogonală și, prin urmare

$$T_{BB_c} = T_{B_c B}^{-1} = T_{B_c B}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

### 6.3. Subspații ortogonale

Fie  $(V, \cdot)$  un spațiu euclidian și  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  o bază a sa.

**Definiția 6.3.1. Complementul ortogonal al unui vector.** Fie  $v \in V$  un vector nenul. Mulțimea

$$v^\perp := \{u \in V \mid uv = 0\}$$

se numește **complementul ortogonal al vectorului  $v$** .

Prin urmare  $v^\perp$  conține totalitatea vectorilor ortogonali pe vectorul  $v$  și vectorul nul. Dacă  $u, w \in v^\perp$  și  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  atunci

$$(\alpha u + \beta w)v = \alpha(uv) + \beta(wv) = 0,$$

deci  $\alpha u + \beta w \in v^\perp$ . Prin urmare  $v^\perp$  este un subspațiu liniar al spațiului  $V$ . Dacă  $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$  atunci **ecuația subspațiului  $v^\perp$**  este

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0,$$

deci dacă  $A := (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n)$  atunci subspațiul  $v^\perp$  este izomorf cu  $\text{Null}(A)$ . În particular, dimensiunea complementului ortogonal al vectorului nenul  $v$  este  $n - 1$ .

**Propoziția 6.3.1.** Complementul ortogonal al unui vector nenul al spațiului euclidian  $n$ -dimensional  $V$  este un subspațiu vectorial de dimensiune  $n - 1$ .

**Exemplul 6.3.1.** Fie  $v = (1, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$ . Să determinăm o bază a complementului ortogonal al acestui vector. Avem

$$v^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1, -2, 1) \cdot (x, y, z) = x - 2y + z = 0\} = \{(x, y, -x + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}.$$

Rezultă imediat că  $\{(1, -1, 0), (0, 1, 2)\}$  este o bază a complementului ortogonal  $v^\perp$ .

Extindem definiția complementului ortogonal al unui vector la un sistem de vectori.

**Definiția 6.3.2. Complementul ortogonal al unui sistem de vectori.** Fie  $S \subset V$  o mulțime nevidă. Mulțimea

$$S^\perp := \{v \in V \mid uv = 0, \ \forall u \in S\}$$

se numește **complementul ortogonal al sistemului  $S$** .

Denumirea de *complement* este justificată de faptul că reuniunea dintre un subspațiu și complementul său ortogonal este întregul spațiu euclidian.

**Propoziția 6.3.2.** Fie  $S \subset V$ . Atunci  $S^\perp \leq V$ . Dacă  $S \leq V$  atunci

$$S \cap S^\perp = \{\theta_V\}, \ S \cup S^\perp = V \text{ și } \dim S + \dim S^\perp = n;$$

dacă, în plus,  $B_S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  este o bază în  $S$  și  $m < n$  atunci

$$S^\perp := \{v \in V \mid s_i v = 0, \ i = \overline{1, m}\}.$$

**Propoziția 6.3.3.** Dacă  $V$  este un spațiu euclidian, subspațiul vectorial  $S \leq V$  are dimensiunea  $m < n$  și  $B$  este o bază în  $S$ , atunci complementul său ortogonal,  $S^\perp$ , coincide cu mulțimea vectorilor din  $V$  care sunt ortogonali pe vectorii bazei  $B$ .

**Exemplul 6.3.2.** Să determinăm complementul ortogonal al subspațiului

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0, \ y + z - t = 0\}.$$

Deoarece  $S = \{(x, y, x + y, x + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1, 1) + y(0, 1, 1, 2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 2)\}$ , rezultă imediat că o bază în  $S$  este  $B := \{s_1 = (1, 0, 1, 1), \ s_2 = (0, 1, 1, 2)\}$ . Prin urmare  $S^\perp = \{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid v s_1 = 0, \ v s_2 = 0\}$ , adică

$$S^\perp = \{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z + t = 0, \ y + z + 2t = 0\}.$$

## 6.4. Proiecții ortogonale

Generalizarea proiecției unui vector pe alt vector din plan este dată în următoarea definiție.

**Definiția 6.4.1. Proiecția unui vector pe un subspațiu.** Să considerăm că  $S$  este un subspațiu al spațiului euclidian  $V$  și  $v \in V$  un vector nenul. Numim **proiecția ortogonală a vectorului  $v$  pe subspațiul  $S$**  un vector notat  $pr_S v \in S$  cu proprietatea că vectorul  $v - pr_S v$  este perpendicular pe toți vectorii subspațiului  $S$ , deci, pentru care

$$(v - pr_S v) \cdot s = 0, \ \forall s \in S.$$

Dacă  $w \in V$  un alt vector nenul vom spune că vectorul notat  $pr_w v$  este **proiecția vectorului  $v$  pe vectorul  $w$**  dacă vectorii  $w$  și  $pr_w v$  sunt coliniari iar  $v - pr_w v \perp w$ , adică

$$(v - pr_w v) \cdot w = 0.$$

**Observația 6.4.1.** Proiecția ortogonală a vectorului  $v$  pe vectorul  $w$  coincide cu proiecția ortogonală a vectorului  $v$  pe subspațiul generat de vectorul  $w$ , adică

$$pr_w v = pr_{\text{span}\{w\}} v.$$

Într-adevăr, din definiția proiecției  $pr_w v$ , dacă  $w' = \alpha w \in \text{span}\{w\}$  atunci  $w' \cdot (v - pr_w v) = \alpha(w \cdot (v - pr_w v)) = 0$ , deci  $v - pr_w v \perp w'$  pentru orice  $w' \in \text{span}\{w\}$ , adică  $pr_w v = pr_{\text{span}\{w\}} v$ .

De altfel, putem obține **expresia proiecției  $pr_w v$  astfel:**

- deoarece  $pr_w v \in \text{span}\{w\}$ , există  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel că  $pr_w v = \alpha w$ ;

- deoarece  $(v - pr_w v)w = 0$  rezultă că  $vw - \alpha \|w\|^2 = 0$ , deci  $\alpha = \frac{vw}{\|w\|^2}$  și

$$pr_w v = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w.$$

Reamintim că un vector din plan se poate scrie ca suma proiecțiilor sale pe două direcții ortogonale. Proprietatea este valabilă într-un spațiu euclidian arbitrar.

**Observația 6.4.2.** Dacă  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  este o bază ortonormată în spațiul euclidian  $V$  și  $v \in V$  atunci  $pr_{e_i} v = (v \cdot e_i) e_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Atunci, folosind exprimarea Fourier avem

$$v = pr_{e_1} v + pr_{e_2} v + \dots + pr_{e_n} v.$$

Analog se arată următoarea proprietate.

**Observația 6.4.3. Descompunerea proiecției ortogonale după vectorii unei baze ortonormate.** Fie  $B_S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  o bază ortonormată în subspațiul  $S \leq V$ , unde  $m < n = \dim V$  și  $v \in V$ . Atunci *proiecția ortogonală a vectorului  $v$  pe subspațiul  $S$  este suma proiecțiilor ortogonale ale lui  $v$  pe vectorii bazei  $B_S$ , adică*

$$pr_S v = pr_{s_1} v + pr_{s_2} v + \dots + pr_{s_m} v.$$

**Exemplul 6.4.1.** Fie  $v = (1, 2, 3)$ ,  $w = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$  și  $S = \{(x - y, y - z, z - x) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ . Să se determine  $pr_w v$  și  $pr_S v$ .

*Rezolvare.* Pentru prima proiecție avem

$$pr_w v = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w = \frac{6}{3} w = (2, 2, 2).$$

Pentru cea de a doua, remarcăm întâi că

$$S = \text{span} \{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (0, -1, 1)\}$$

și că  $v_1 + v_2 + v_3 = (0, 0, 0)$ . Deci  $B := \{v_1, v_2\}$  este o bază a subspațiului  $S$ . Fie  $pr_S v = av_1 + bv_2$ . Atunci  $v - pr_S v \perp v_1, v_2$ , sau, echivalent

$$(1, 2, 3) - av_1 - bv_2 \perp v_1, v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 2 \\ a - 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Deci  $pr_S v = (-1, 0, 1)$ .

## 6.5. Procedul de ortonormare Gram-Schmidt

După cum am văzut în paragrafele precedente, calculele într-o bază ortonormată sunt substanțial simplificate, deci determinarea unei asemenea baze este deseori extrem de profitabilă. Dăm, în final, procedeul de ortonormare Gram-Schmidt, procedeul care, pornind de la o bază a unui spațiu euclidian, permite construcția algoritmică a unei baze ortonormate.

**Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt.**

Fie  $(V, \cdot)$  un spațiu euclidian și  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  o bază a sa, unde  $n > 1$ .

1. *Recursiv, construim o bază ortogonală  $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , folosind vectorii bazei  $B$ :*

- *întâi alegem un vector din  $B$ ; fie  $v_1 := e_1$ ;*
- *construim vectorul*

$$v_2 = e_2 - \lambda v_1,$$

*determinând scalarul  $\lambda$  astfel ca  $v_2 \perp v_1$ , adică rezolvând ecuația de gradul întâi*

$$v_1 \cdot e_2 - \lambda \|v_1\|^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{v_1 \cdot e_2}{\|v_1\|^2};$$

*am obținut astfel doi vectori ortogonali (deci liniar independenți)  $v_1$  și  $v_2$ .*

- *repetăm procedeul: construim vectorul*

$$v_3 = e_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2,$$

*determinând scalarii  $\lambda_1, \lambda_2$  astfel ca  $v_3 \perp v_1, v_2$ , adică rezolvând sistemul liniar, compatibil determinat  $v_3 \cdot v_1 = 0, v_3 \cdot v_2 = 0$ ; obținem vectorii ortogonali (deci liniar independenți)  $v_1, v_2$  și  $v_3$ . Continuăm procedeul. În cele din urmă, având determinați vectorii ortogonali  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$*

- *în sfârșit, construim vectorul*

$$v_n = e_n - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_{n-1} v_{n-1},$$

*determinând scalarii  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$  astfel ca  $v_n \perp v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ , adică rezolvând sistemul liniar compatibil determinat de  $n-1$  ecuații și  $n-1$  necunoscute  $v_n \cdot v_i = 0, i = \overline{1, n-1}$ ; am obținut astfel baza ortogonală  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .*

2. *Luând versorii vectorilor  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , adică  $w_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i, i = \overline{1, n}$ , obținem baza ortonormată  $B_o = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  a spațiului  $V$ .*

**Exemplul 6.5.1.** Să se ortonormeze baza  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ , unde  $e_1 = (1, 1, 0), e_2 = (0, 1, 1), e_3 = (1, 0, 1)$ .

Construim întâi baza ortogonală  $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$  cu procedeul Gram-Schmidt. Fie

$$v_1 := e_1 = (1, 1, 0).$$

Determinăm  $\lambda \in \mathbb{R}$  astfel ca

$$v_2 := e_2 - \lambda v_1 = (0, 1, 1) - \lambda(1, 1, 0) = (-\lambda, 1 - \lambda, 1) \perp v_1.$$

Avem  $v_1 v_2 = 0 \Leftrightarrow -\lambda + 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ , iar

$$v_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}, 1\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

este acum un vector perpendicular pe  $v_1$ .

Determinăm în continuare  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  astfel ca pentru  $v_3 := e_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$  să avem  $v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3 = 0$ . Cum

$$\begin{aligned} v_3 &= e_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 = (1, 0, 1) - \lambda_1 (1, 1, 0) - \lambda_2 \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \\ &= \left(1 - \lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_2, -\lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_2, 1 - \lambda_2\right), \end{aligned}$$

din condițiile de ortogonalitate obținem

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_3 &= 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_2 - \lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} \text{ și} \\ v_2 \cdot v_3 &= 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_2\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_2\right) + 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \lambda_2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Prin urmare  $v_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

Deoarece  $\|v_1\| = \sqrt{2}$ ,  $\|v_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$  și  $\|v_3\| = \sqrt{\frac{4}{3}}$ , luând  $w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ,

$w_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \left(-\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$  și  $w_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ , am

determinat baza ortonormată  $B_o = \{w_1, w_2, w_3\}$ .

## B. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se stabilească dacă următoarele forme biliniare pe  $\mathbb{R}^2$  reprezintă produse scalare: a)  $q_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q_1(u, v) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$ ,  $\forall u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)$ ;  
b)  $q_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q_2(u, v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$ ,  $\forall u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)$ .

*Rezolvare.*

Forma biliniară  $q_1$  are matricea

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

care e o matrice simetrică, deci  $q_1$  e o formă biliniară simetrică. În plus, are valorile proprii  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$  pozitive, deci forma pătratică asociată e pozitiv definită. Așadar  $q_1$  este un produs scalar pe  $\mathbb{R}^2$ .

Pentru forma biliniară  $q_2$  de la b), observăm că ea are matricea

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

care e o matrice simetrică, deci  $q_2$  e și ea o formă biliniară simetrică. În plus, are valorile proprii  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$  iar  $\lambda_2$  nu e pozitivă, deci forma pătratică asociată nu e pozitiv definită. Deci  $q_2$  nu este un produs scalar pe  $\mathbb{R}^2$ .

2. Se consideră spațiul euclidian  $\mathbb{R}^3$  dotat cu produsul scalar standard. Calculați cosinusul unghiului  $\angle(u, v)$  și determinați versorul  $v_0$  al vectorului  $v$  pentru vectorii  $u = (1, 2, 3), v = (-1, 1, 2) \in (\mathbb{R}^3, \cdot)$ . Unghiul dintre cei doi vectori este unul ascuțit sau obtuz?

*Rezolvare.*

Calculăm produsul scalar  $u \cdot v = 1(-1) + 2 + 6 = 7$  și normele  $\|u\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$  și  $\|v\| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$ . Deci  $\cos(\widehat{u, v}) = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{7}{2\sqrt{21}}$ . Cosinusul fiind pozitiv, unghiul este ascuțit.

Versorul  $v_0$  al vectorului  $v$  îl calculăm prin

$$v_0 = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{1}{\sqrt{6}} v = \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

3. Arătați că

$$B = \left\{ q_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, q_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\}$$

este o bază ortonormată în  $(\mathbb{R}^{3 \times 1}, \cdot)$ .

*Rezolvare.*

Calculăm produsele scalare  $q_1 \cdot q_2 = q_1^T q_2 = [1/3 \quad -2/3 \quad 2/3] \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = 0$ ,

$q_1 \cdot q_3 = q_1^T q_3 = [1/3 \quad -2/3 \quad 2/3] \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 0$  și  $q_2 \cdot q_3 = q_2^T q_3 =$

$[2/3 \quad 2/3 \quad 1/3] \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 0$  și vedem că vectorii din  $B$  sunt doi câte doi

ortogonali. Dar orice sistem de vectori doi câte doi ortogonali este și un sistem liniar independent. Cum  $\text{card}(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}^{3 \times 1})$ , avem că vectorii

din  $B$  formează un sistem liniar independent maximal de vectori doi câte doi ortogonali, adică o bază ortogonală în  $(\mathbb{R}^{3 \times 1}, \cdot)$ .

În plus,  $\|q_1\| = \sqrt{1/9 + 4/9 + 4/9} = 1$ . Analog,  $\|q_2\| = \|q_3\| = 1$ , deci  $B$  este o bază ortonormată în  $(\mathbb{R}^{3 \times 1}, \cdot)$ .

4. Calculați coordonatele vectorului  $u = [1 \ 2 \ 3]^T$  în raport cu baza ortonormată  $B$  de la problema 3.

*Rezolvare.*

Vectorul  $u$  admite în raport cu baza ortonormată  $B$  reprezentarea Fourier

$$u = (q_1 \cdot u)q_1 + (q_2 \cdot u)q_2 + (q_3 \cdot u)q_3$$

Calculând produsele scalare din cele trei paranteze vom obține că  $u = q_1 + 3q_2 + 2q_3$ , deci  $u_B = [1 \ 3 \ 2]^T$ .

5. Scrieți matricele de trecere  $T_{B_c B}$  și  $T_{B B_c}$ , unde  $B$  este baza de la problema 3 iar  $B_c$  este baza canonică din  $\mathbb{R}^{3 \times 1}$  și folosiți una din aceste matrice pentru a calcula coordonatele în baza  $B$  ale vectorului  $v = [2 \ 1 \ -1]^T$ .

*Rezolvare.*

Întâi  $T_{B_c B} = [q_{1B} | q_{2B} | q_{3B}] = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ . Apoi,  $T_{B B_c} = T_{B_c B}^{-1} =$

$T_{B_c B}^T$  unde ultima egalitate rezultă din faptul că matricea de trecere între două

baze ortonormate este o matrice ortogonală. Așadar  $T_{B B_c} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ .

Pentru coordonate, avem  $v_B = T_{B B_c} v_{B_c} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 5/3 \\ -5/3 \end{bmatrix}$ .

6. Construiți două baze ortonormate în  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ ,  $B_1 = \{q_1, q'_2\}$  și  $B_2 = \{q_1, q''_2\}$  pentru care primul vector  $q_1$  face un unghi  $\theta$  de măsură  $\frac{\pi}{6}$  cu vectorul  $e_1$ .

*Rezolvare.*

$q_1$ , fiind versor, coordonatele sale sunt cosinusurile directoare, deci cosinusurile unghiurilor pe care acesta le face cu vectorii bazei canonice:

$q_1 = (\cos(\widehat{q_1, e_1}), \cos(\widehat{q_1, e_2})) = (\cos \theta, \cos(\pi/2 - \theta)) = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Pentru al doilea vector, avem două variante de a alege vectori ortogonali pe  $q_1$  și de aceeași normă, mai precis  $q'_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$  și  $q''_2 = (\sin \theta, -\cos \theta)$ . Așadar pentru  $\theta = \pi/6$ ,  $B_1 = \{q_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2), q'_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)\}$  și  $B_2 = \{q_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2), q''_2 = (1/2, -\sqrt{3}/2)\}$ .

7. Dacă  $A$  este o matrice pătratică nesingulară, să se determine care din liniile  $l_i$  ale lui  $A$  și coloanele  $c_j$  ale lui  $A^{-1}$  reprezintă vectori ortogonali.

*Rezolvare.*

Când calculăm produsul  $A \cdot B$  a două matrice, elementul  $c_{ij}$  din matricea produs este de fapt produsul scalar între linia  $i$  a matricei  $A$  și coloana  $j$  a matricei  $B$ .



La matricea din enunț,  $AA^{-1} = I_n$  deci  $l_i \cdot c_j = \delta_{ij}$ , unde  $\delta_{ij}$ , simbolul lui Kronecker, este elementul de pe poziția  $(i, j)$  din matricea unitate. Deci linia  $l_i$  a lui  $A$  și coloana  $c_j$  a lui  $A^{-1}$  reprezintă vectori ortogonali dacă și numai dacă  $i \neq j$ .

8. Fie  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Să se arate că subspațiile  $Null(A)$  și  $Lin(A) = Col(A^T)$  ale lui  $\mathbb{R}^m$  sunt ortogonale.

*Rezolvare.*

Fie  $u \in Null(A)$  și  $v \in Lin(A)$ , oarecare. Din definițiile celor două subspații, avem că  $Au = \theta$ , respectiv că există  $x \in \mathbb{R}^m$  astfel încât  $A^T x = v$  (scrierea matriceală a faptului că  $v$  se poate scrie combinație liniară de coloanele lui  $A^T$ ).

Calculăm produsul scalar  $v \cdot u = v^T u = (A^T x)^T u = x^T Au = x^T \theta = 0$ , deci cei doi vectori sunt ortogonali. Cum vectorii sunt arbitrar aleși, rezultă că cele două subspații sunt ortogonale.

9. Să se dea exemplu de o matrice  $A$  pentru care  $u = (1, 2, 1) \in Lin(A)$  și  $v = (1, -2, 1) \in Null(A)$ , sau în cazul în care nu există o astfel de matrice, să se argumenteze inexistența ei.

*Rezolvare.*

Din problema de mai sus,  $Null(A) \perp Lin(A)$ . Dar  $u \cdot v = -2 \neq 0$ , deci nu există matrice cu proprietatea cerută.

10. Să se arate că dacă  $Au \in Null(A^T)$ , atunci  $Au = \theta$ , pentru orice matrice  $A$ .

*Rezolvare.*

Scriind că  $Null(A) \perp Lin(A)$  pentru matricea transpusă, obținem că  $Null(A^T) \perp Col(A)$ .  $Au$  este un vector din  $Col(A)$  și  $Null(A^T)$ , dar intersecția a două subspații ortogonale este formată doar din vectorul nul, deci  $Au = \theta$ .

11. Să se construiască prin procedeul Gram-Schmidt o bază ortonormată în  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ , pornind de la baza  $B = \{u_1 = (1, -2, 2), u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (2, 1, 3)\}$ .

*Rezolvare.*

Construim întâi baza ortogonală  $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ . Fie

$$v_1 = u_1 = (1, -2, 2).$$

Determinăm  $\lambda \in \mathbb{R}$  astfel încât  $v_2 = u_2 - \lambda v_1 = (-1, 1, 0) - \lambda(1, -2, 2) = (-1 - \lambda, 1 + 2\lambda, -2\lambda) \perp v_1$ . Avem  $v_1 v_2 = 0 \Leftrightarrow -3 - 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$ , deci

$$v_2 = \left(-1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

este un vector ortogonal pe  $v_1$ . Determinăm în continuare  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  astfel ca pentru  $v_3 = u_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$  să avem  $v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3 = 0$ . Cum  $v_3 = u_3 - \lambda_1 v_1 -$

$$\lambda_2 v_2 = (2, 1, 3) - \lambda_1(1, -2, 2) - \lambda_2 \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(2 - \lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2, 1 + 2\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2, 3 - 2\lambda_1 - \frac{2}{3}\lambda_2\right),$$

din condițiile de ortogonalitate obținem

$$v_1 \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow -9\lambda_1 + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{2}{3} \text{ și}$$

$$v_2 \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 1.$$

Deci  $v_3 = (2, 2, 1)$ .

Împărțim fiecare vector la norma lui și obținem baza ortonormată

$$B_2 = \left\{ q_1 = \left( \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right), q_2 = \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), q_3 = \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}.$$

12. Să se determine o bază în complementul ortogonal  $u^\perp$  al vectorului  $u = (1, -1, 2) \in (\mathbb{R}^3, \cdot)$ .

*Rezolvare.*

Fie  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , oarecare.  $v \in u^\perp$  dacă și numai dacă  $v \cdot u = 0$ , adică  $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ . Rezolvând acest sistem de o ecuație cu trei necunoscute,  $x_1$  e necunoscută principală iar  $x_2 = \alpha$ ,  $x_3 = \beta$  sunt necunoscute secundare. Astfel  $x_1 = \alpha - 2\beta$  și deci  $v \in u^\perp \iff v = (\alpha - 2\beta, \alpha, \beta) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(-2, 0, 1)$ . Dacă notăm  $v_1 = (1, 1, 0)$  și  $v_2 = (-2, 0, 1)$ , am arătat că  $u^\perp = \text{span}(v_1, v_2)$ , iar cum acești vectori sunt liniar independenți,  $B_1 = \{v_1, v_2\}$  formează o bază în  $u^\perp$ .

13. Să se determine proiecția ortogonală a vectorului  $w = (1, 1, 1)$  pe subspațiul  $u^\perp$  din problema 12.

*Rezolvare.*

Proiecția ortogonală a lui  $w$  pe  $S$  o calculăm ca sumă a proiecțiilor pe vectorii unei baze ortonormate din  $S$ .

Pentru aceasta, aplicăm procedeul Gram-Schmidt bazei  $B_1$  din  $S$ , găsită în rezolvarea problemei precedente. Construim vectorii ortogonali  $o_1 = v_1 = (1, 1, 0)$ , iar  $o_2 = v_2 - \lambda v_1 = (-2, 0, 1) - \lambda(1, 1, 0) = (-2 - \lambda, -\lambda, 1)$ . Dar  $o_1 \cdot o_2 = 0$  dacă și numai dacă  $-2 - 2\lambda = 0 \iff \lambda = -1$  de unde  $o_2 = (-1, 1, 1)$ .

Normând acești vectori, găsim baza ortonormată  $B_2 = \left\{ q_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), q_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$ .

Astfel, proiecția cerută este  $s = pr_S w = pr_{q_1} w + pr_{q_2} w = (q_1 \cdot w)q_1 + (q_2 \cdot w)q_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} q_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} q_2 = \left( \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right)$ .

14. Să se descompună vectorul  $w = (1, 1, 1)$  în suma dintre un vector coliniar cu  $u$  din problema 12 și un vector ortogonal pe  $u$ .

*Rezolvare.*

Descompunerea este  $w = pr_u w + pr_{u^\perp} w$ . Proiecția lui  $w$  pe  $u^\perp$  e chiar proiecția  $s$  calculată în problema precedentă. Mai rămâne să calculăm  $s' = pr_u w$ .

Norma lui  $u$  este  $\|u\| = \sqrt{6}$  și deci acesta are versorul  $u_0 = \frac{1}{\|u\|} u = \frac{1}{\sqrt{6}} u =$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

Atunci  $pr_u w = pr_{u_0} w = (u_0 \cdot w)u_0 = \frac{2}{\sqrt{6}} u_0 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

## C. PROBLEME PROPUSE

1. Fie  $u = (1, -1, 2, 3)$  și  $v = (-2, 0, 3, 1)$  doi vectori din spațiul euclidian canonic  $\mathbb{R}^4$ .
  - (a) Să se determine versorii  $u_0$  și  $v_0$  ai vectorilor  $u$  și  $v$ .
  - (b) Să se calculeze măsura unghiului dintre vectorii  $u$  și  $v$ .
  - (c) Să se determine un vector  $u_1$  care are aceeași direcție și același sens ca  $u$ , de normă 13.
  - (d) Să se determine un vector unitar  $w$  ortogonal pe vectorii  $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $u$  și  $v$ .

*Răspuns.*

- (a)  $u_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}\right)$ ,  $v_0 = \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{0}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$ ;
- (b)  $\arccos \frac{7}{\sqrt{210}}$ ; (c)  $u_1 = \left(\frac{13}{\sqrt{15}}, \frac{-13}{\sqrt{15}}, \frac{26}{\sqrt{15}}, \frac{39}{\sqrt{15}}\right)$ ;
- (d)  $w \in \left\{\left(0, \mp \frac{7}{\sqrt{59}}, \pm \frac{1}{\sqrt{59}}, \mp \frac{3}{\sqrt{59}}\right)\right\}$ .

2. Dacă  $\varphi$  este o formă biliniară a spațiului  $n$ -dimensional  $V/K$ , în ce condiții cuplul  $(V, \varphi)$  este spațiu euclidian?
3. Forma  $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$  este definită prin  $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + a x_2 y_2 + 4 x_3 y_3 + b x_3 y_1 - c x_2 y_3 + b x_1 y_3$ . Să se determine  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel ca  $(\mathbb{R}^3, \varphi)$  să fie spațiu euclidian și mulțimea vectorilor care se află la distanța 1 de vectorul nul.

*Răspuns.*  $a \in (0, \infty)$ ,  $b \in (-2, 2)$ ,  $c = 0$ ;

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + a y^2 + 4 z^2 + 2 b x z = 1\}.$$

4. În spațiul euclidian canonic  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$  considerăm că  $S$  este mulțimea vectorilor care fac un unghi de măsură  $\frac{\pi}{4}$  cu vectorul  $u = (1, 1, 1)$ . Formează  $S$  un subspațiu vectorial al spațiului  $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ ?

*Răspuns.* Nu; de exemplu  $(0, 0, 0) \notin S$ .

5. Pe spațiul vectorial al funcțiilor polinomiale de grad mai mic sau egal cu doi definim forma  $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$  prin  $(f, g) = a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2$ , unde  $f = a_0 + a_1x + a_2x^2$  și  $g = b_0 + b_1x + b_2x^2$ .

- (a) Să se arate că  $(\mathbb{R}_2[x], (\cdot, \cdot))$  este un spațiu euclidian.  
 (b) Să se găsească un vector  $f_0$  aflat la distanța  $d$  față de vectorii  $f_1 = 2 + x + 5x^2$ ,  $f_2 = 2 + x - x^2$ ,  $f_3 = 4 + x + 5x^2$ ,  $f_4 = 3 + 3x + 5x^2$  și să se calculeze această distanță.

*Răspuns.* (b)  $f_0 = 3 + \frac{15}{8}x + 2x^2$ ;  $\frac{3\sqrt{82}}{8}$ .

6. Să se verifice dacă polara formei pătratice  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  este produs scalar pe  $\mathbb{R}^3$  și, în caz afirmativ, să se calculeze măsura unghiului dintre primii doi vectori ai bazei canonice relativ la acest produs scalar.

- (a)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ ;  
 (b)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ ;  
 (c)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

*Răspuns.* (a) forma  $f$  nu este pozitiv definită; (b) forma  $f$  nu este pozitiv definită; (c)  $\frac{\pi}{3}$ .

7. Considerăm aplicația  $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$(f, g) := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

- (a) Să se arate că  $(\mathbb{R}_2[x], (\cdot, \cdot))$  este un spațiu euclidian.  
 (b) Să se calculeze măsurile unghiurilor dintre vectorii  $f = 1$ ,  $g = x$  și  $h = 1 + x$ .  
 (c) \* Să se definească un izomorfism de spații vectoriale  $\tau : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$  și un produs scalar pe  $\mathbb{R}^3$  astfel încât unghiurile triunghiului  $\tau(f), \tau(g), \tau(h)$  să aibă măsurile  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{6}$ , respectiv 0.

*Răspuns.* (b)  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{6}$ , 0; (c) e.g.  $\tau(a + bx + cx^2) = (a, b, c)$ ;

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = (\tau^{-1}(x_1, x_2, x_3), \tau^{-1}(y_1, y_2, y_3)).$$

8. \* Fie  $(V, \cdot)$  un spațiu euclidian și doi vectori nenuli  $u, v \in V$ . Arătați că  $u \cdot v = \|u\| \|v\|$  dacă și numai dacă vectorii  $u$  și  $v$  au aceeași direcție și același sens.  
 9. Arătați că, într-un spațiu euclidian, un sistem de vectori ortogonali este un sistem liniar independent.

10. Fie spațiul euclidian canonic  $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ . Să se determine o bază ortonormată a subspațiului generat de vectorii  $(2, 1, 3, -1), (7, 4, 3, -3), (1, 1, -6, 0), (5, 7, 7, 8)$ .

*Răspuns.* e.g.  $\left\{ \left( \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}} \right), \left( \frac{3}{\sqrt{23}}, \frac{2}{\sqrt{23}}, \frac{-3}{\sqrt{23}}, \frac{-1}{\sqrt{23}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{127}}, \frac{5}{\sqrt{127}}, \frac{1}{\sqrt{127}}, \frac{10}{\sqrt{127}} \right) \right\}$ .

11. Determinați un sistem maximal de vectori ortonormați din  $\mathbb{R}^{3 \times 1}$  astfel încât primii doi vectori să genereze spațiul coloanelor matricei  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ .

*Răspuns.*  $\left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, v \right\}, v \in \left\{ \pm \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \right\}$ .

12. \* Fie  $(V, \cdot)$  un spațiu euclidian,  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  o bază ortonormată a sa și  $v \in V$  un vector nenul. Să se arate că  $v$  este versor dacă și numai dacă coordonatele sale în baza  $B$  sunt cosinusurile unghiurilor dintre  $v$  și vectorii bazei  $B$ .

13. Completați mulțimea  $\{u, v\}$  până la o bază ortonormată în spațiul euclidian canonic adecvat, unde

(a)  $u = \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), v = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right);$

(b)  $u = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), v = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right).$

*Răspuns.* (a) cu unul dintre vectorii  $\pm \left( \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right);$  (b) de exemplu cu  $\left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$  și  $\left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right).$

14. \* Fie  $(V, \cdot)$  un spațiu euclidian,  $V_1 \leq V$  și  $V_2 \leq V$  două subspații astfel încât  $\dim(V_1) < \dim(V_2)$ . Arătați că există  $v \in V_2$  ortogonal pe toți vectorii din  $V_1$ .

15. \* Fie  $(V, \cdot)$  un spațiu euclidian  $n$ -dimensional și  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  o bază a sa. Să se arate că

$$u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

$\forall u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n \in V$  dacă și numai dacă baza  $B$  este ortonormată.

16. Demonstrați Propoziția 6.2.2.

17. Fie  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  două matrice ortogonale (i.e.  $A^T A = I_n$  și  $B^T B = I_n$ ).

- (a) Să se arate că  $AA^T = I_n$ .
  - (b) Să se arate că determinantul matricei  $A$  este egal cu 1 sau  $-1$ .
  - (c) Să se arate că  $A^{-1} = A^T$ .
  - (d) Să se arate că matricea  $AB$  este ortogonală.
  - (e) Este adevărat că matricea  $A + B$  este ortogonală?
  - (f) Să se arate că mulțimea matricelor ortogonale din  $\mathbb{R}^{n \times n}$  formează un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor nesingulare.
  - (g) Formează mulțimea matricelor ortogonale din spațiul  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  un subspațiu vectorial?
18. Să se determine  $a, b \in (0, \infty)$  astfel încât matricea  $\begin{pmatrix} a & a & -b \\ a & -b & a \\ -b & a & a \end{pmatrix}$  să fie ortogonală .
- Răspuns.*  $a = \frac{2}{3}$ ,  $b = \frac{1}{3}$ .
19. Se știe că dacă  $T$  este o matrice ortogonală atunci  $(\det(T))^2 = 1$ . Reciproca acestei afirmații este adevărată?
20. Să se arate că dacă matricea  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  are coloanele unitare și ortogonale (în spațiul euclidian canonic  $\mathbb{R}^{2 \times 1}$ ) atunci ea este ortogonală. Generalizare.
21. Fie  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ . Să se demonstreze că  $B$  este o bază ortonormată în spațiul euclidian canonic  $\mathbb{R}^n$  dacă și numai dacă  $(v_1^T | v_2^T | \dots | v_n^T)$  este o matrice ortogonală.
22. Fie  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}^n$ . Arătați că matricea  $(t_1^T | t_2^T | \dots | t_n^T) = (t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  este ortogonală dacă și numai dacă  $t_i \cdot t_j = 0$  pentru orice  $i \neq j$  și  $t_i \cdot t_i = 1$  pentru orice  $i$ .
23. \* Să se arate că matricea de trecere dintre două baze ortonormate ale unui spațiu euclidian  $n$ -dimensional este o matrice ortogonală.
24. Fie  $(V, \cdot)$  un spațiu euclidian  $n$ -dimensional și  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  o matrice ortogonală. Să se arate că există două baze ortonormate  $B, B' \subset V$  astfel încât  $T$  să fie matricea de trecere de la baza  $B$  la baza  $B'$ .
25. Subspațiul  $V$  al spațiului euclidian canonic  $\mathbb{R}^4$  este definit de ecuațiile:  
 $2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$ ,  $3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0$ ,  $3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0$ .
- (a) Determinați un număr minimal de ecuații care să definească complementul ortogonal  $V^\perp$ .
  - (b) Descompuneți vectorul  $u = (1, 1, 1, 1)$  în suma  $v + v'$ , cu  $v \in V$  și  $v' \in V^\perp$ .

*Răspuns.* (a) E.g.  $6y_1 - 9y_2 - y_3 = 0$ ,  $y_2 + y_4 = 0$ .

(b)  $v = \left( \frac{12}{31}, \frac{22}{31}, -\frac{2}{31}, \frac{40}{31} \right)$ ,  $v' = \left( \frac{19}{31}, \frac{9}{31}, \frac{33}{31}, -\frac{9}{31} \right)$ .

26. Să se proiecteze ortogonal primul vector pe cel de al doilea (în spațiul euclidian canonic adecvat):

- (a)  $(2, 1), (3, -2)$ ;  
 (b)  $(2, 1), (3, 0)$ ;  
 (c)  $(1, 1, 4), (1, 2, -1)$ ;  
 (d)  $(1, 1, 4), (3, 3, 12)$ .

*Răspuns.* (a)  $\left( \frac{12}{13}, -\frac{8}{13} \right)$ ; (b)  $(2, 0)$ ; (c)  $\left( \frac{-1}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6} \right)$ ; (d)  $(1, 1, 4)$ .

27. Determinați doi vectori ortogonali din spațiul euclidian canonic, ortogonali la rândul lor pe vectorul  $(1, 1, 1)$ .

*Răspuns.* De exemplu  $u = (1, 0, -1) \perp (1, 1, 1)$  și  $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1)\}^\perp = \{(x, y, z) \mid x - z = 0 = x + y + z\} = \{(x, -2x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ , așadar  $u = (1, 0, -1)$  și  $v = (1, -2, 1)$  sunt doi asemenea vectori.

28. Să se determine complementul ortogonal al subspațiului generat de vectorii  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ,  $(2, 3, 4, 5, 6, 7)$ ,  $(3, 4, 5, 6, 7, 8)$  în spațiul euclidian canonic  $\mathbb{R}^6/\mathbb{R}$ .

29. \* Într-un spațiu euclidian subspațiul  $U$  este inclus în subspațiul  $V$ . Arătați că  $V^\perp \leq U^\perp$ .

30. Completați mulțimea  $\{u, v\}$  până la o bază ortogonală în spațiul euclidian canonic  $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ , unde

- (a)  $u = (1, -2, 2, -3)$ ,  $v = (2, -3, 2, 4)$ ;  
 (b)  $u = (1, 1, 1, 2)$ ,  $v = (1, 2, 3, -3)$ .

*Răspuns.* De exemplu cu vectorii: (a)  $(2, 2, 1, 0)$ ,  $(5, -2, -6, -1)$ ;  
 (b)  $(1, -2, 1, 0)$ ,  $(25, 4, -17, -6)$ .

31. Să se descompună vectorul  $v = (5, 2, -2, 2) \in \mathbb{R}^4$  în suma a doi vectori, unul din subspațiul  $S$  generat de vectorii  $(2, 1, 1, -1)$  și  $(1, 1, 3, 0)$ , iar celălalt din complementul ortogonal  $S^\perp$ .

*Răspuns.*  $v = (3, 1, -1, -2) + (2, 1, -1, 4)$ .

32. \* Să se arate că, în spațiul euclidian canonic  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ , pentru orice subspații  $U, V \leq \mathbb{R}^n$ ,

(a)  $(U^\perp)^\perp = U$ ;

$$(b) (U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp;$$

$$(c) (U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp;$$

$$(d) (\mathbb{R}^n)^\perp = \mathbf{0};$$

$$(e) \mathbf{0}^\perp = \mathbb{R}^n,$$

unde cu  $\mathbf{0}$  am notat subspațiul nul, iar cu  $U^\perp$  am notat complementul ortogonal al subspațiului  $U$ .

33. \* Să se demonstreze că  $U \cap U^\perp = \{\theta\}$ , unde  $U$  este un subspațiu netrivial al unui spațiu euclidian  $V$ .

34. În ce se transformă o bază ortonormată dacă aplicăm procedeul de ortonormare Gram-Schmidt?

35. Fie  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  matricea unui operator al spațiului euclidian canonic  $\mathbb{R}^3$ . Să se determine o bază ortonormată a unui subspațiu invariant de dimensiune 2 al acestui operator.

$$\text{Răspuns. e.g. } \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

36. Să se arate că dacă  $V$  este un spațiu euclidian  $n$ -dimensional și  $U$  este un subspațiu al său atunci  $\dim(U^\perp) = n - \dim(U)$ .

37. Construiți o bază ortogonală a subspațiului generat de vectorii din spațiul canonic  $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ :

$$(a) (1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7);$$

$$(b) (1, 1, -1, -2), (5, 8, -2, -3), (3, 9, 3, 8).$$

$$\text{Răspuns. (a) E.g. } (1, 2, 2, -1), (2, 3, -3, 2), (2, -1, -1, -2);$$

$$(b) (1, 1, -1, -2), (2, 5, 1, 3).$$

38. Arătați că ortogonalizând un sistem de vectori liniar independent  $S$  al spațiului euclidian canonic  $(\mathbb{R}^n, \cdot)$  obținem un sistem  $S'$  pentru care  $\text{span}(S) = \text{span}(S')$ .

39. În spațiul euclidian canonic  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$  considerăm vectorul  $u = (1, 1, 1)$ . Să se determine o bază ortonormată a subspațiului ortogonal  $u^\perp$ .

$$\text{Răspuns. E.g. } \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

40. Fie  $V$  un spațiu euclidian și  $S \leq V$  astfel ca  $m := \dim S < \dim V := n$  și  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  o bază în  $S$ . Arătați că

$$S^\perp = \{v \in V \mid v \cdot e_i = 0, \ i = \overline{1, m}\}.$$



41. În spațiul euclidian  $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$  distanța de la vectorul  $p = 1 + x + x^2$  la vectorul nul este 2, iar matricea produsului scalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  în baza canonică  $\{1, x, x^2\}$  este  $\begin{pmatrix} 1 & ab & ab \\ a & 1 & ab \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ . Să se determine subspațiul  $p^\perp$  și o bază ortonormată a acestuia.
- Răspuns.* Trebuie ca  $b = 1$ ,  $a = \frac{1}{3}$ ;  $\{\alpha(1 - x^2) + \beta(x - x^2) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ;  
de exemplu:  $\left\{ \frac{\sqrt{6}}{4}(1 - x^2), -\frac{1}{\sqrt{5}}(1 - x)^2 \right\}$ .
42. Folosiți procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt pentru a determina două baze ortonormate  $B^\circ$  și  $B^{\circ\circ}$  pornind de la baza  $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$  din spațiul euclidian canonic  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ ; care este matricea de trecere de la baza  $B^\circ$  la baza  $B^{\circ\circ}$ ?
- Răspuns.* De exemplu, pornind de la vectorul  $(1, 1, 0)$ , respectiv de la vectorul  $(0, 1, 1)$  obținem
- $$B^\circ = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\},$$
- $$B^{\circ\circ} = \left\{ \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right) \right\},$$
- iar  $T_{B^\circ B^{\circ\circ}} = T_{B_c B^\circ}^T \cdot T_{B_c B^{\circ\circ}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .
43. \* Fie  $V$  un spațiu euclidian și  $U \leq V$ . Să se arate că orice vector  $v \in V$  se exprimă în mod unic ca suma unui vector  $u \in U$  cu un vector  $u' \in U^\perp$ , adică  $U \oplus U^\perp = V$ .
44. Arătați că dacă  $v$  este un vector nenul dintr-un spațiu euclidian  $n$ -dimensional atunci există o matrice  $A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  astfel încât subspațiul  $v^\perp$  este izomorf cu  $\text{Null}(A)$ .
45. Fie  $V$  un spațiu euclidian și  $S \leq V$ . Arătați că
- orice vector  $v \in V$  se exprimă unic ca o sumă de forma  $v = s + s'$ , unde  $s \in S$  și  $s' \in S^\perp$ ;
  - dacă  $B$  este o bază în  $S$  iar  $B'$  este o bază  $S^\perp$  atunci  $B \cup B'$  - cu o ordine fixată a vectorilor din reuniune - este o bază în  $V$ .
46. Folosind procedeul Gram-Schmidt să se determine o bază ortonormată a subspațiului  $\text{span}((1, 1, 2), (-1, 1, 1))$ .  
(Examen, Informatică, 2014)

47. Să se verifice că  $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$  este bază în  $\mathbb{R}^3$  și să se ortonormeze.  
(Examen, Ingineria sistemelor, 2014)

## 7 TRANSFORMĂRI ORTOGONALE ȘI APLICAȚII

Unul dintre cele mai puternice instrumente de care dispunem în cadrul spațiilor euclidiene este dat de clasa transformărilor ortogonale în conexiune cu transformările liniare simetrice. Aceste transformări sunt utilizate intens în grafica pe calculator; folosirea transformărilor ortogonale în proiectarea sistemelor permite asigurarea fezabilității acestora; calculul matricei  $A^m$  - de importanță capitală în foarte multe aplicații - devine facil în cazul matricelor simetrice folosind transformările ortogonale; stabilirea naturii punctelor critice ale unei funcții  $f$  de clasă  $C^2$  utilizând transformări ortogonale pentru diferențiala a doua este necesară în probleme de optimizare; și, nu în ultimul rând, algoritmi de descompunere  $Q \cdot R$ , respectiv  $V^T \cdot \Sigma \cdot U$  pentru matrice nesingulare, respectiv matrice arbitrare (algoritmi aflați în „top 10” al descoperirilor matematice care au revoluționat ingineria secolului XX) - ca aplicații ale tehnicilor de ortogonalizare - permit rezolvarea sistemelor mari și furnizează baza matematică pentru cea mai performantă tehnică de comprimare a datelor.

### A. TEORIE

Peste tot în această secțiune  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  este un spațiu vectorial euclidian și  $B$  este o bază a sa.

#### 7.1. Izometrii

Transformările ortogonale, numite și izometrii, sunt operatori care invariază produsele scalare în sensul următoarei definiții.

**Definiția 7.1.1.** Operatorul  $f \in \mathcal{L}(V)$  se numește **transformare ortogonală** sau **izometrie** (a spațiului  $V$ ) dacă

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

pentru orice  $u, v \in V$ .

**Exemplul 7.1.1.** Funcția  $id_V$  este transformare ortogonală a spațiului euclidian  $V$ .

**Exemplul 7.1.2.** Să determinăm transformarea ortogonală  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  știind că matricea sa în baza canonică este

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ a & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Știm că vectorii  $f(1, 0) = \left(\frac{1}{2}, a\right)$ ,  $f(0, 1) = \left(b, -\frac{1}{2}\right)$  trebuie să formeze o bază ortonormată. Prin urmare  $a^2 + \frac{1}{4} = b^2 + \frac{1}{4} = 1$  și  $\frac{b}{2} - \frac{a}{2} = 0$ , deci  $a = b \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ . Am obținut două transformări ortogonale care satisfac cerințele și care au expresiile analitice

$$f_1(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$$

pentru  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , respectiv

$$f_2(x, y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$$

pentru  $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Să remarcăm că dacă  $f \in \mathcal{L}(V)$  este o transformare ortogonală și  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  este o bază ortonormată în  $V$ , atunci  $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  pentru orice  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ; prin urmare  $f(B) = \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$  este bază ortonormată în  $V$  și  $f$  este *automorfism* (adică izomorfism al spațiului  $V$ ). Invers, dacă  $f \in \mathcal{L}(V)$  are proprietatea că transformă o bază ortonormată într-o bază ortonormată, atunci  $f$  este izometrie. Într-adevăr, dacă  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  și  $f(B) = \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$  sunt baze ortonormate în  $V$ , iar  $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $v = \sum_{j=1}^n y_j e_j \in V$  atunci

$$\begin{aligned} \langle f(u), f(v) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \sum_{j=1}^n y_j f(e_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Am obținut următoarea caracterizare a transformărilor ortogonale:

**Propoziția 7.1.1.** Fie  $f \in \mathcal{L}(V)$ . Atunci  $f$  este transformare ortogonală dacă și numai dacă  $f$  transformă o bază ortonormată într-o bază ortonormată.

**Observația 7.1.2.** Dacă  $f, g \in \mathcal{L}(V)$  sunt două transformări ortogonale atunci  $f \circ g$  este transformare ortogonală. Într-adevăr, dacă  $u, v \in V$ , folosind faptul că  $f$  este transformare ortogonală, apoi că  $g$  este transformare ortogonală avem

$$\langle f \circ g(u), f \circ g(v) \rangle = \langle f(g(u)), f(g(v)) \rangle = \langle g(u), g(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Prin urmare mulțimea transformărilor ortogonale din  $\mathcal{L}(V)$  formează un grup (ne-abelian) față de operația de compunere numit **grupul ortogonal** al spațiului  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Notăm cu  $\mathcal{GO}(V)$  grupul transformărilor ortogonale ale spațiului  $V$ .

Din propoziția precedentă (vezi și problema 22 de la capitolul precedent) rezultă următoarea propoziție.

**Propoziția 7.1.2.** Fie  $f \in \mathcal{L}(V)$  și  $B$  o bază ortonormată în  $V$ . Atunci  $f \in \mathcal{GO}(V)$  dacă și numai dacă  $f_B$  este matrice ortogonală.

**Observația 7.1.3.** Fie  $f \in \mathcal{GO}(V)$ . Să arătăm că această aplicație *invariază unghiurile*, adică  $\cos \widehat{f(u), f(v)} = \cos \widehat{u, v}$ , pentru orice vectori nenuli. Fie, pentru aceasta, doi vectori nenuli  $u, v \in V$ . Atunci

$$\cos \widehat{f(u), f(v)} = \frac{\langle f(u), f(v) \rangle}{\sqrt{\langle f(u), f(u) \rangle} \sqrt{\langle f(v), f(v) \rangle}} = \frac{\langle u, v \rangle}{\sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}} = \cos \widehat{u, v}$$

și proprietatea este dovedită.

Nu orice aplicație liniară care invariază unghiurile este transformare ortogonală.

**Exemplul 7.1.3.** Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Atunci  $f(x, y) := (ax + by, -bx + ay)$  definește un automorfism al spațiului euclidian canonic  $\mathbb{R}^2$ . Dacă  $B = \{e_1, e_2\}$  este baza canonică, atunci

$$f(B) = \{f(e_1) = (a, -b), f(e_2) = (b, a)\}$$

este bază ortogonală (deoarece  $\langle f(e_1), f(e_2) \rangle = ab - ba = 0$ ), dar nu este întotdeauna ortonormată. Mai precis, dacă  $a^2 + b^2 \neq 1$  baza nu este ortonormată, deci  $f$  nu este transformare ortogonală. De fapt  $f \in \mathcal{GO}(\mathbb{R}^2)$  dacă și numai dacă  $a^2 + b^2 = 1$ ; în acest caz există  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  astfel încât  $a = \cos \varphi$  și  $b = \sin \varphi$  iar automorfismul  $f$  se numește **rotație de unghi  $\varphi$** .

## 7.2. Matrice simetrice și valorile lor proprii

**Definiția 7.2.1.** Operatorul  $f \in \mathcal{L}(V)$  se numește **transformare liniară simetrică** (a spațiului  $V$ ) dacă

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle$$

pentru orice  $u, v \in V$ .

Notăm cu  $\mathcal{L}_s(V)$  mulțimea transformărilor liniare simetrice ale spațiului  $V$ .

Reamintim că o matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  este simetrică dacă și numai dacă ea coincide cu transpusa sa, adică dacă  $A = A^T$ .

Dacă  $B$  este o bază în  $V$ ,  $f \in \mathcal{L}(V)$  și  $u, v \in V$  atunci, în convenția matriceală, avem

$$\langle f(u), v \rangle = (f_B \cdot u_B)^T \cdot v_B = u_B^T \cdot f_B^T \cdot v_B \text{ și } \langle u, f(v) \rangle = u_B^T \cdot f_B \cdot v_B.$$

Cu ajutorul acestei proprietăți deducem următoarea caracterizare a transformărilor liniare simetrice.

**Propoziția 7.2.1.** *Operatorul  $f \in \mathcal{L}(V)$  este transformare liniară simetrică dacă și numai dacă matricea sa într-o bază ortonormată este simetrică.*

*Cu alte cuvinte, dacă  $f \in \mathcal{L}(V)$  și  $B$  este o bază ortonormată în  $V$  atunci  $f \in \mathcal{L}_s(V)$  dacă și numai dacă  $f_B$  este simetrică.*

Spațiul vectorial  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  este spațiu euclidian față de produsul scalar canonic definit prin

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j,$$

unde  $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ ,  $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Cu acest produs scalar, Propoziția 7.2.1 are următoarea exprimare matriceală.

**Propoziția 7.2.2.** *Matricea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  este simetrică dacă și numai dacă*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

*pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ .*

Reamintim că o matrice pătratică  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  este diagonalizabilă (sau un operator  $f \in \mathcal{L}(V)$  este diagonalizabil) dacă și numai dacă toate valorile sale proprii sunt reale și ordinul de multiplicitate  $m_\lambda$  al fiecărei valori proprii  $\lambda$  coincide cu dimensiunea subspațiului invariant  $S_\lambda$ , adică  $m_\lambda = \dim S_\lambda$ , pentru orice valoare proprie  $\lambda$  a matricei  $A$  (a operatorului  $f$ ).

În cazul matricelor simetrice (transformărilor liniare simetrice), diagonalizarea este întotdeauna posibilă.

**Teorema 7.2.1. Diagonalizarea matricelor simetrice.**

*Dacă  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  este o matrice simetrică atunci ea este diagonalizabilă.*

*Mai mult, dacă  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  sunt valorile proprii distincte ale matricei simetrice  $A$  și  $m_{\lambda_1}, m_{\lambda_2}, \dots, m_{\lambda_k}$  sunt ordinele de multiplicitate corespunzătoare, atunci există o bază ortonormată  $B$  astfel ca*

$$T_{B_c B}^T \cdot A \cdot T_{B_c B} = D,$$

unde  $D$  este o matrice diagonală care are pe diagonala principală valorile proprii ale matricei  $A$  dispuse în următoarea ordine (de la nord-vest la sud-est):

$$\underbrace{\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_{\lambda_1} \text{ ori}}, \underbrace{\lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_{\lambda_2} \text{ ori}}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \lambda_k, \dots, \lambda_k}_{m_{\lambda_k} \text{ ori}}$$

În plus, baza ortonormată a spațiului  $V$  în care  $A$  are forma diagonală  $D$  este

$$B = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup \dots \cup B_{\lambda_k},$$

unde  $B_{\lambda_i}$  este o bază ortonormată a subspațiului invariant (propriu)  $S_{\lambda_i}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

**Observația 7.2.1.** Atenție la ordinea celor  $n$  vectori din baza  $B$ : dacă  $B_{\lambda_i} = \{v_{\lambda_i}^1, v_{\lambda_i}^2, \dots, v_{\lambda_i}^{m_{\lambda_i}}\}$ , atunci, pentru a obține

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k)$$

trebuie să alegem ordonarea în conformitate cu algoritmul rezultat din Teorema diagonalizării (Teorema 4.2.1), adică

$$B = \{v_{\lambda_1}^1, v_{\lambda_1}^2, \dots, v_{\lambda_1}^{m_{\lambda_1}}, v_{\lambda_2}^1, v_{\lambda_2}^2, \dots, v_{\lambda_2}^{m_{\lambda_2}}, \dots, v_{\lambda_k}^1, \dots, v_{\lambda_k}^{m_{\lambda_k}}\}.$$

Deoarece  $T_{B_c B}$  este o matrice ortogonală - deci este matricea unei transformări ortogonale - metoda de diagonalizare descrisă poartă numele de **reducere la forma diagonală printr-o transformare (liniară) ortogonală**.

**Observația 7.2.2.** Dacă dorim să determinăm **forma diagonală a unei matrice simetrice**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  **și o bază ortonormată în care are forma diagonală**, trebuie să parcurgem următorii pași:

1. Determinăm valorile proprii rezolvând ecuația caracteristică  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ ; obținem valorile proprii  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  (știm că suma ordinelor de multiplicitate este  $n$ , adică  $m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \dots + m_{\lambda_k} = n$ ); forma diagonală  $D$  a matricei  $A$  are pe diagonala principală valorile proprii, ca în teorema de mai sus. Baza în care are această formă se obține parcurgând cele ce urmează.
2. Pentru fiecare valoare proprie  $\lambda_i$  determinăm subspațiul invariant (propriu)  $S_{\lambda_i}$  și o bază a sa  $B_i$ .
3. Ortonormăm baza  $B_i$  prin procedeul de ortonormare Gram-Schmidt și obținem baza  $B_{\lambda_i}$ .
4. Construim  $B = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup \dots \cup B_{\lambda_k}$ . Aceasta este o bază ortonormată în care  $A$  are forma diagonală  $D$ .

Dacă, în plus, dorim să calculăm  $A^m$ , unde  $m \in \mathbb{N}^*$ , cum matricea  $T_{B_c B}$  este ortogonală, avem

$$A^m = T_{B_c B} \cdot D^m \cdot T_{B_c B}^T.$$

Deoarece spațiul vectorial al transformărilor liniare simetrice ale spațiului  $V$  este izomorf cu spațiul vectorial al matricelor de ordinul  $n$  reale și simetrice, afirmațiile teoremei precedente sunt valabile și pentru transformări liniare simetrice.

**Exemplul 7.2.1.** Fie  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x + \sqrt{2}y, \sqrt{2}x + y, 3z)$ . Ne propunem să determinăm compusa  $f^n, n \in \mathbb{N}^*$  cu ajutorul unei transformări ortogonale și să determinăm expresia analitică a acestei transformări.

**A.** Deoarece  $f$  este o transformare liniară simetrică, planul de lucru pentru determinarea aplicației  $f^n$  este următorul:

- determinăm  $f_{B_c}$  - matricea aplicației în baza canonică  $B_c$ ;
- determinăm valorile proprii  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  (care sunt obligatoriu reale) și bazele ortonormate din spațiile invariante corespondente;
- construim baza ortonormată  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  ca reuniune a bazelor determinate la punctul precedent;
- construim matricea ortogonală  $T_{B_c B}$ ; știm că matricea aplicației noastre în baza

$$B \text{ este matricea diagonală } f_B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ și că}$$

$$f_B = T_{B_c B}^T \cdot f_{B_c} \cdot T_{B_c B};$$

- calculăm matricea aplicației  $f^n$  știind că aceasta este matricea aplicației ridicată la puterea  $n$  și că  $f_B^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)$ :

$$f_{B_c}^n = (f_{B_c})^n = (T_{B_c B} \cdot f_B \cdot T_{B_c B}^T)^n = T_{B_c B} \cdot f_B^n \cdot T_{B_c B}^T;$$

- scriem expresia analitică a aplicației  $f^n$  (cunoscând matricea sa în baza canonică).

Matricea aplicației liniare  $f$  în baza canonică  $B_c$  este

$$f_{B_c} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ecuția caracteristică  $|f_{B_c} - \lambda I_3| = 0$  are rădăcinile  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$ . Subspațiul invariant corespunzător valorii proprii  $\lambda = 3$  este

$$S_{\lambda=3} = \left\{ \left( \sqrt{2}y, y, z \right) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \left( \sqrt{2}, 1, 0 \right), (0, 0, 1) \right\}$$

și o bază ortonormată a acestuia este

$$B_{\lambda_1} = \left\{ v_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), v_2 = (0, 0, 1) \right\}.$$



Subspațiul invariant corespunzător valorii proprii  $\lambda = 0$  este

$$S_{\lambda=0} = \left\{ (x, -\sqrt{2}x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ (1, -\sqrt{2}, 0) \right\}$$

și o bază ortonormată a acestuia este

$$B_{\lambda_3} = \left\{ v_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0 \right) \right\}.$$

Prin urmare  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  este o bază ortonormată în care  $f$  are forma diagonală și matricea sa este

$$f_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$f_{B_c}^n = T_{B_c B} \cdot f_B^n \cdot T_{B_c B}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_{B_c B}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} 3^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{n-1} & \sqrt{2} \cdot 3^{n-1} & 0 \\ \sqrt{2} \cdot 3^{n-1} & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Ținând seama că

$$f_{B_c}^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{n-1}x + \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}y \\ \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}x + 3^{n-1}y \\ 3^n z \end{pmatrix}$$

rezultă că expresia analitică a operatorului  $f^n$  este

$$f^n(x, y, z) = \left( 2 \cdot 3^{n-1}x + \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}y, \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}x + 3^{n-1}y, 3^n z \right).$$

**B.** Fie  $\tau \in \mathcal{GO}(\mathbb{R}^3)$  transformarea ortogonală folosită la pasul precedent, deci aplicația liniară  $\tau: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  care are drept matrice în perechea de baze  $B_c, B$  chiar matricea  $T_{B_c B}$ . Dacă  $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$  este baza canonică, avem

$$\tau(e_1) = v_1, \tau(e_2) = v_2, \tau(e_3) = v_3$$

și atunci expresia analitică este

$$\tau(x, y, z) = \tau(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x\tau(e_1) + y\tau(e_2) + z\tau(e_3) = x \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) + \\ y \left( 0, 0, 1 \right) + z \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0 \right) = \left( \frac{\sqrt{2}x + z}{\sqrt{3}}, \frac{x - \sqrt{2}z}{\sqrt{3}}, y \right).$$

### 7.3. Reducerea formelor pătratice la forma canonică prin transformări ortogonale

Pentru a simplifica notațiile, vom considera doar forme pătratice definite pe spațiul euclidian canonic  $\mathbb{R}^n$  (de fapt spațiul vectorial al matricelor simetrice din  $\mathbb{R}^{n \times n}$  este izomorf cu spațiul liniar  $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$  și, în plus, dacă  $V$  este un spațiu vectorial  $n$ -dimensional atunci  $\mathcal{Q}(V) \simeq \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{L}_s(V)$  - vezi problemele propuse 22 și 23) și vom nota cu  $B_c$  baza canonică din  $\mathbb{R}^n$ .

#### Tehnica de reducere a formelor pătratice la forma canonică.

Fie  $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ . Deoarece  $f_{B_c}$  este o matrice simetrică, din teorema de diagonalizare a matricelor simetrice rezultă că există o bază ortonormată  $B$  formată din vectori proprii ai matricei  $f_{B_c}$  în care matricea  $f_{B_c}$  are forma diagonală  $D = T_{B_c B}^T \cdot f_{B_c} \cdot T_{B_c B}$ . Din formula de schimbare a bazei pentru forme pătratice (vezi Propoziția 5.2.2) știm că matricea formei  $f$  în baza  $B$  este  $f_B = T_{B_c B}^T \cdot f_{B_c} \cdot T_{B_c B}$ . În consecință  $f_B = D$ , adică forma pătratică  $f$  are forma canonică în baza ortonormată  $B$ . Am obținut astfel o tehnică de reducere a formei  $f$  la forma canonică prin transformarea ortogonală de matrice  $T_{B_c B}$ .

**Exemplul 7.3.1.** Să se reducă la forma canonică printr-o transformare ortogonală forma pătratică definită prin

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

Matricea formei în baza canonică este

$$f_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuția caracteristică  $|f_{B_c} - \lambda I_4| = 0$  are rădăcinile  $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, -1, 1$ . Prin urmare, conform tehnicii de mai sus, există o bază ortonormată  $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  de vectori proprii ai matricei  $f_{B_c}$  în care forma  $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^4)$  are forma canonică

$$f(y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + y_4v_4) := \sqrt{5}y_1^2 - \sqrt{5}y_2^2 - y_3^2 + y_4^2.$$

Pentru a determina baza  $B$  trebuie să determinăm în prealabil subspațiile invariante  $S_{\sqrt{5}}, S_{-\sqrt{5}}, S_{-1}, S_1$  corespunzătoare valorilor proprii  $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, -1, 1$  și apoi să le determinăm câte o bază ortonormată  $B_{\sqrt{5}} = \{v_1\}, B_{-\sqrt{5}} = \{v_2\}, B_{-1} = \{v_3\}, B_1 = \{v_4\}$ . După calcule obținem

$$S_{\sqrt{5}} = \text{span} \left\{ \left( \frac{-\sqrt{5}-1}{2}, -1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1 \right) \right\}.$$

Putem lua  $v_1$  chiar versorul vectorului  $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, -1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1\right)$ , deci

$$v_1 = \frac{1}{2\sqrt[4]{5}} \left(-\sqrt{\sqrt{5}+1}, -\sqrt{\sqrt{5}-1}, \sqrt{\sqrt{5}+1}, \sqrt{\sqrt{5}-1}\right).$$

Apoi, cum  $S_{-\sqrt{5}} = \text{span} \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \right\}$  putem lua  $v_2$  versorul vectorului  $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ , deci

$$v_2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{5}} \left(\sqrt{\sqrt{5}-1}, -\sqrt{\sqrt{5}+1}, -\sqrt{\sqrt{5}-1}, \sqrt{\sqrt{5}+1}\right).$$

Analog, cum  $S_{-1} = \text{span} \{(1, 0, 1, 0)\}$  luăm

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1, 0),$$

iar pentru  $S_1 = \text{span} \{(0, 1, 0, 1)\}$  luăm

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 0, 1).$$

Baza ortonormată în care forma pătratică dată are forma canonică de mai sus este  $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ .

## 7.4. Descompunerea singulară a unei matrice

Fie  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Se pune problema descompunerii matricei  $A$  într-un produs de forma

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

unde  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  și  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sunt matrice ortogonale iar  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  este o matrice de forma

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

unde constantele  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$  se numesc **valorile singulare ale matricei**  $A$ . Această descompunere se numește **descompunerea valorilor singulare**, pe scurt **SVD**.

Tehnica pe care o descriem în continuare este bazată pe descompunerea  $QR$  a matricei  $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (vezi problemele 27-31).

**Algoritm de descompunere SVD a matricei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .**

- Construim matricea simetrică de tip  $n \times n$

$$B := A^T A.$$

- Determinăm valorile proprii ale matricei  $B$  (care sunt obligatoriu nenegative) și le ordonăm descrescător:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0; \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

- Determinăm baza ortonormată a spațiului  $\mathbb{R}^n$

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

în care matricea  $B$  are forma diagonală (folosind tehnica descrisă la Observația 7.2.2).

- Construim matricea ortogonală

$$V := (v_1^T \mid v_2^T \mid \dots \mid v_n^T).$$

- Calculăm valorile singulare ale matricei  $A$ :

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}.$$

- Determinăm vectorii ortonormați

$$u_1 := \frac{1}{\sigma_1} A v_1^T, u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2^T, \dots, u_r = \frac{1}{\sigma_r} A v_r^T.$$

din spațiul  $\mathbb{R}^{m \times 1}$ .

- Determinăm - doar dacă  $m - r > 0$  - o bază ortonormată

$$\{u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_m\}$$

a spațiului  $Null(A^T)$ .

- Construim matricea ortogonală  $U$ :

$$U := (u_1 \mid u_2 \mid \dots \mid u_m)$$

- Construim matricea  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a valorilor singulare și descompunerea SVD:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T.$$

**Exemplul 7.4.1.** Să determinăm descompunerea SVD a matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix} \text{ urmărind pașii algoritmului prezentat.}$$

1. Determinăm matricea simetrică de tip  $3 \times 3$

$$B := A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}.$$

2. Determinăm valorile proprii ale matricei  $B$  rezolvând ecuația caracteristică  $\det(B - \lambda I_3) = (40 - \lambda)(\lambda - 20)\lambda = 0$  și ordonăm descrescător valorile proprii. Obținem

$$\lambda_1 = 40, \lambda_2 = 20, \lambda_3 = 0.$$

3. Determinăm baza ortonormată  $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$  în care matricea  $B$  are forma diagonală. Avem spațiile invariante corespunzătoare valorilor proprii determinate:  $S_{\lambda_1} = \text{span}\{(0, 0, 1)\}$ ,  $S_{\lambda_2} = \text{span}\{(1, 1, 0)\}$ ,  $S_{\lambda_3} = \text{span}\{(-1, 1, 0)\}$ . Prin urmare

$$v_1 = (0, 0, 1), v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

4. Construim matricea ortogonală

$$V := (v_1^T \mid v_2^T \mid v_3^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Calculăm valorile singulare ale matricei  $A$ :

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2\sqrt{10}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 2\sqrt{5}.$$

6. Determinăm vectorii ortonormați

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 3 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

7. Deoarece  $r = 2 = m$ , spațiul  $\text{Null}(A^T)$  este spațiul trivial.

8. Construim matricea ortogonală  $U$ :

$$U = (u_1 \mid u_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 3 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

9. Construim matricea valorilor singulare  $\Sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Am obținut astfel descompunerea SVD:  $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$  :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Observația 7.4.1.** În exemplul precedent rangul  $r$  al matricei  $A$  coincide cu numărul liniilor  $m$ ; de aceea pasul 7 nu furnizează vectori suplimentari în construcția matricei ortogonale  $U$ .

Să analizăm și cazul  $m > n$ .

**Exemplul 7.4.2.** Să determinăm descompunerea SVD a matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinăm matricea simetrică de tip  $2 \times 2$

$$B := A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Determinăm valorile proprii ale matricei  $B$ . Obținem

$$\lambda_1 = 3 > \lambda_2 = 1.$$

3. Determinăm baza ortonormată  $\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$  în care matricea  $B$  are forma diagonală. Avem spațiile proprii  $S_{\lambda_1} = \text{span}\{(1, -1)\}$ ,  $S_{\lambda_2} = \text{span}\{(1, 1)\}$ . Prin urmare

$$v_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad v_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

4. Construim matricea ortogonală

$$V := (v_1^T \mid v_2^T) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

5. Calculăm valorile singulare ale matricei  $A$  :

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3} > \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1.$$

6. Determinăm vectorii ortonormați

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

7. Deoarece  $r = 2 < m = 3$  și spațiul  $Null(A^T) = span\{(1, 1, -1)\}$ , luăm  $u_3 =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

8. Construim matricea ortogonală  $U$  :

$$U = (u_1 \mid u_2 \mid u_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

9. Construim matricea valorilor singulare  $\Sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Am obținut astfel descompunerea SVD,  $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$  :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

## B. PROBLEME REZOLVATE

1. Fie  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un spațiu euclidian. Arătați că aplicația liniară  $f = 2 \cdot id_V$  invariază unghiurile. Este  $f$  o transformare ortogonală?

$$\text{Rezolvare. Fie } u, v \in V. \text{ Atunci } \cos(\widehat{f(u), f(v)}) = \frac{\langle f(u), f(v) \rangle}{\|f(u)\| \cdot \|f(v)\|} = \frac{\langle 2u, 2v \rangle}{\|2u\| \cdot \|2v\|} =$$

$$\frac{4 \cdot \langle u, v \rangle}{4\|u\| \cdot \|v\|} = \cos(\widehat{u, v}), \text{ deci } f \text{ invariază unghiurile.}$$

$f$  nu este transformare ortogonală pentru că  $\|f(u)\| = 2\|u\| \neq \|u\|$  pentru  $u \neq \theta$ .

2. Matricea unei transformări ortogonale într-o bază ortonormată este o matrice ortogonală, adică verifică  $A^{-1} = A^T$ .

*Demonstrație.* Dacă  $B$  este o bază în  $V$ ,  $f \in \mathcal{L}(V)$  și  $u, v \in V$  atunci, în convenția matriceală, avem  $\langle f(u), f(v) \rangle = (f_B \cdot u_B)^T \cdot f_B \cdot v_B = u_B^T \cdot f_B^T \cdot f_B \cdot v_B$  și  $\langle u, v \rangle = u_B^T \cdot v_B$ , de unde  $f_B^T \cdot f_B = I$ , adică  $f_B$  este inversabilă și  $f_B^{-1} = f_B^T$ .

3. Demonstrați că toate valorile proprii ale unei transformări ortogonale ale unui spațiu vectorial real (sau complex) au modulul 1.

*Rezolvare.* Dacă  $\lambda$  este o valoare proprie a unei transformări ortogonale  $f$  iar  $v$  este un vector propriu corespunzător lui  $\lambda$  atunci  $f(v) = \lambda v$  implică  $\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ . Cum  $\|v\| \neq 0$  rezultă de aici că  $|\lambda| = 1$ .

4. Mulțimea  $\mathcal{GO}(V)$  a transformărilor ortogonale din  $\mathcal{L}(V)$  formează grup în raport cu operația de compunere numit **grupul ortogonal** al spațiului  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

*Demonstrație.* Am văzut la Observația 7.1.2. că mulțimea  $\mathcal{GO}(V)$  este stabilă la compunere. Asociativitatea rezultă din asociativitatea compunerii funcțiilor în general. Am văzut la Exemplul 7.1.1. că funcția  $id_V$  este o transformare ortogonală, deci elementul neutru la compunerea aplicațiilor liniare aparține lui  $\mathcal{GO}(V)$ . Matricea unei transformări ortogonale într-o bază ortonormată fiind o matrice ortogonală, deci inversabilă, orice transformare ortogonală este un izomorfism. Inversa ei va fi tot o transformare ortogonală pentru că  $\langle f^{-1}(u), f^{-1}(v) \rangle = \langle f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v)) \rangle = \langle u, v \rangle$ , deci orice transformare din  $\mathcal{GO}(V)$  este inversabilă în  $\mathcal{GO}(V)$ .

5. Determinați  $f \in \mathcal{GO}(\mathbb{R}^2)$  astfel încât  $f(1, 2) = (2, 1)$ .

*Rezolvare.* Deoarece o transformare ortogonală păstrează măsurile unghiurilor și lungimile vectorilor, o idee ar fi să examinăm acțiunea lui  $f$  pe un vector ortogonal pe  $v = (1, 2)$ . Avem că  $(a, b) \perp (1, 2) \iff a + 2b = 0$ . Putem lua  $a = -2, b = 1$ , adică vectorul  $v' = (-2, 1)$ . Cum  $v' \perp v$  și  $\|v'\| = \sqrt{5}$ , trebuie ca  $f(v') \perp f(v)$  și  $\|f(v')\| = \sqrt{5}$ . Dacă  $f(v') = (c, d)$ , trebuie ca  $2c + d = 0$  și  $c^2 + d^2 = 5$ , de unde  $(c, d) = (1, -2)$  sau  $(c, d) = (-1, 2)$ . În primul caz se vede ușor că avem de a face cu aplicația  $f(x, y) = (y, x)$ . În cel de-al doilea caz,



căutând  $f$  de forma  $f(x, y) = (mx + ny, px + qy)$  găsim că  $m + 2n = 2$ ,  $p + 2q = 1$  (din  $f(1, 2) = (2, 1)$ ) și  $-2m + n = -1$ ,  $-2p + q = 2$  (din  $f(-2, 1) = (-1, 2)$ ). Obținem  $m = \frac{4}{5}$ ,  $n = \frac{3}{5}$ ,  $p = -\frac{3}{5}$ ,  $q = \frac{4}{5}$ , adică  $f(x, y) = \frac{1}{5}(4x + 3y, -3x + 4y)$ .

6. Determinați  $f \in \mathcal{GO}(\mathbb{R}^2)$  astfel încât  $f(1, 2) = (3, 1)$ .

*Rezolvare.* Deoarece  $\|f(1, 2)\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \neq \sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \|(1, 2)\|$ , nu există nicio aplicație liniară  $f \in \mathcal{GO}(\mathbb{R}^2)$  care să verifice condiția din enunț.

7. Arătați că  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y, x + y)$  definește o transformare ortogonală. Este ea simetrică?

*Rezolvare.* Există mai multe căi de a verifica dacă  $f$  este ortogonală:

1. cu definiția:

$$\langle f(x, y), f(x', y') \rangle = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y, x + y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y', x' + y') \right\rangle = \frac{1}{2}((x - y)(x' - y') + (x + y)(x' + y')) = xx' + yy' = \langle (x, y), (x', y') \rangle;$$

2. cu caracterizarea oferită de Propoziția 7.1.1:

considerăm baza canonică și verificăm dacă ea este transformată într-o bază ortonormată:  $f(1, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$ ,  $f(0, 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)$  formează o bază ortonormată deoarece

$$\left\| \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1) \right\|^2 = \frac{1}{2}(1^2 + 1^2) = 1,$$

$$\left\| \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1) \right\|^2 = \frac{1}{2}((-1)^2 + 1^2) = 1, \text{ iar } \left\langle \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left( \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0;$$

3. arătând că matricea în baza canonică este ortogonală, adică verifică  $A^{-1} =$

$$A^T: A = f_{B_c} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \text{ se verifică imediat, satisface egalitatea } AA^T =$$

$I_2$  deci  $A$  este matricea unei transformări ortogonale.

*Simetria:* Cum  $A$  nu este simetrică ( $A^T \neq A$ ), rezultă că  $f$  nu este simetrică.

8. Operatorul  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  are în baza  $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$  matricea  $f_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Este  $f$  simetrică?

*Rezolvare.* Pare tentant să spunem că „având în vedere că matricea ei în baza  $B$  este simetrică, operatorul  $f$  este simetric”. În realitate, vom vedea,  $f$  nu este simetric. Propoziția 7.2.1. cere ca matricea lui  $f$  într-o bază ortonormată să fie simetrică. Ori baza  $B$  nu este ortonormată, deci nu putem aplica propoziția. Pentru a afla matricea lui  $f$  într-o bază ortonormată, o vom alege pe cea canonică

și vom folosi formula  $f_{B_c} = T_{B_c B} \cdot f_B \cdot T_{B B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Această matrice nu este simetrică, deci  $f$  nu este simetric.

9. Să se determine o bază ortonormată în care transformarea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de

matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  are forma diagonală.

*Rezolvare.* Calculăm mai întâi polinomul caracteristic

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 12\lambda, \text{ apoi valorile proprii:}$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 12\lambda = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, -2, 6\}.$$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_1 = 0$  se află rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}.$$

Scăzând prima ecuație din cea de-a doua găsim că  $x = z$ , apoi că  $y = -2x$ , deci  $S_{\lambda_1=0} = \text{span}\{(1, -2, 1)\}$ . Ortonormăm baza  $B_1 = \{(1, -2, 1)\}$  obținând

$$\text{versorul } v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1).$$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_2 = -2$  se află rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + \quad + 2z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \end{cases}.$$

Obținem ușor că  $y = 0$ , apoi că  $z = -x$ , deci  $S_{\lambda_2=-2} = \text{span}\{(1, 0, -1)\}$ .

Ortonormăm baza  $B_2 = \{(1, 0, -1)\}$  obținând versorul  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ .

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii  $\lambda_3 = 6$  se află rezolvând sistemul

$$\begin{cases} -5x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \end{cases}.$$

Rangul matricei sistemului este 2, un minor principal fiind  $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 16$ .

Notând  $z = \alpha$ , sistemul devine  $\begin{cases} -5x + 2y = -3\alpha \\ 2x - 4y = -2\alpha \end{cases}$ , cu soluția  $x = y = \alpha$ , deci

$S_{\lambda_3=6} = \text{span}\{(1, 1, 1)\}$ . Ortonormăm baza  $B_3 = \{(1, 1, 1)\}$  obținând versorul  $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ .

Baza ortonormată căutată este  $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$  adică

$$B = \left\{ v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right\}.$$

În această bază matricea transformării din enunț este diagonală, și anume  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ .

10. Să se reducă la forma canonică prin transformări ortogonale forma pătratică  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + x_3^2$ .  
*Rezolvare.* Matricea formei în baza canonică este

$$f_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ecuția caracteristică  $\det(f_{B_c} - \lambda I_3) = 0$  este  $-\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 5 = 0$  și are rădăcinile  $5, -1, 1$ . Prin urmare există o bază ortonormată  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  de vectori proprii ai matricei  $f_{B_c}$  în care forma  $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^3)$  are forma canonică

$$f(y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3) = 5y_1^2 - y_2^2 + y_3^2.$$

Pentru a determina baza  $B$  trebuie să determinăm subspațiile invariante  $S_5, S_{-1}, S_1$  corespunzătoare valorilor proprii  $5, -1, 1$  și apoi să le determinăm câte o bază ortonormată  $B_5 = \{v_1\}$ ,  $B_{-1} = \{v_2\}$ ,  $B_1 = \{v_3\}$ . După calcule obținem

$$S_5 = \text{span}\{(1, -2, 1)\}$$

deci putem lua  $v_1$  chiar versorul vectorului  $(1, -2, 1)$ , deci

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1).$$

Apoi, cum  $S_{-1} = \text{span}\{(1, 1, 1)\}$  putem lua  $v_2$  versorul vectorului  $(1, 1, 1)$ , deci

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Analog, cum  $S_1 = \text{span}\{(-1, 0, 1)\}$  luăm

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1).$$

Baza ortonormată în care forma pătratică dată are forma canonică de mai sus este  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ . Așadar  $f = 5y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ , unde

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - 2x_2 + x_3), y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3), y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_3).$$

## C. PROBLEME PROPUSE

1. Arătați că  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) := \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y, y + \sqrt{3}x)$  definește o transformare ortogonală simetrică.
2. Dovediți afirmațiile de la Observația 7.1.1.
3. Să se determine  $f \in \mathcal{GO}(\mathbb{R}^2)$  astfel încât  $f(1, 1) = (1, -1)$ .
4. \*Fie  $(V, \cdot)$  un spațiu euclidian și  $\tau$  un automorfism al său. Să se arate că  $\tau$  este transformare ortogonală (adică  $\tau(u) \cdot \tau(v) = u \cdot v$ ,  $\forall u, v \in V$ ) dacă și numai dacă  $\tau$  conservă norma vectorilor, adică  $\|\tau(u)\| = \|u\|$  pentru orice  $u \in V$ .
5. Fie  $f \in \mathcal{GO}(\mathbb{R}^2)$ . Să se determine  $G := \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \mid g \circ f \in \mathcal{GO}(\mathbb{R}^2)\}$ .
6. \*Fie  $V$  un spațiu euclidian și  $\tau$  un automorfism al său. Să se arate că  $\tau$  este transformare ortogonală dacă și numai dacă imaginea unei baze ortonormate (prin  $\tau$ ) este o bază ortonormată.
7. Să se determine  $f \in \mathcal{GO}(\mathbb{R}^2)$  știind că  $f^2 = id_{\mathbb{R}^2}$  și  $f \neq id_{\mathbb{R}^2}$ .
8. Este adevărată implicația  $[f, g \in \mathcal{GO}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f + g \in \mathcal{GO}(\mathbb{R}^2)]$ ?
9. Fie  $f(x, y, z) = a(2x + 2y - bz, 2x - by + 2z, -bx + 2y + 2z)$ . Să se determine  $a, b \in (0, \infty)$  astfel ca  $f$  să devină o transformare ortogonală a spațiului euclidian canonic  $\mathbb{R}^3$  prin trei metode.  
*Răspuns.*  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = 1$ .
10. Arătați că grupul matricelor ortogonale din  $\mathbb{R}^{n \times n}$  este izomorf cu grupul  $\mathcal{GO}(V)$ , unde  $V$  este un spațiu euclidian  $n$ -dimensional.
11. Fie  $B = \{e_1, e_2\}$  baza canonică din  $\mathbb{R}^2$  și  $f \in \mathcal{GO}(\mathbb{R}^2)$  astfel ca  $f(e_1) = -e_2$ . Să se determine  $\mathcal{M} = \{f_B^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .
12. Demonstrați Propoziția 7.2.1.
13. Determinați mulțimea  $\mathcal{GO}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^2)$ .
14. Demonstrați Propoziția 7.2.2.

15. Să se determine o bază ortonormată în care transformarea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de

$$\text{matrice } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \text{ are forma diagonală.}$$

*Răspuns.* De exemplu, în baza

$$\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left( -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} \text{ are forma}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Fie  $f \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^2) \setminus \{\alpha \cdot id_{\mathbb{R}^2} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ . Să se arate că nu există o transformare liniară ortogonală  $t$  astfel încât  $t^{-1} \circ f \circ t \in \{\alpha \cdot id_{\mathbb{R}^2} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .

17. Aduceți matricea  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  la o formă diagonală  $D$  și determinați

matricea ortogonală  $T$  astfel ca  $A = TDT^T$ .

$$\text{Răspuns. De exemplu } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Transcrieți Teorema 7.2.1. de diagonalizare a matricelor simetrice pentru transformări liniare simetrice.

19. În spațiul euclidian canonic  $\mathbb{R}^3$  determinați o bază ortonormată  $B$  formată cu

$$\text{vectorii proprii ai unei transformări liniare de matrice } A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix} \text{ și}$$

matricea diagonală  $D$  a acestei transformări în baza  $B$ .

$$\text{Răspuns. De exemplu } \left\{ \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left( \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right), \left( \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\},$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

20. Determinați  $\dim \mathcal{L}_s(V)$  știind că  $\dim V = n$ .

21. Să se verifice ortogonalitatea operatorului  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  care are matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

în baza canonică și să se determine expresia analitică a operatorului  $f^{-1}$ .

22. Fie  $V$  un spațiu liniar real  $n$ -dimensional. Arătați că spațiul liniar al formelor pătratice  $\mathcal{Q}(V)$  are dimensiunea  $\frac{n(n+1)}{2}$ . (Dacă  $f, g \in \mathcal{Q}(V)$  atunci suma celor două forme este definită prin  $(f+g)(v) := f(v) + g(v)$  și produsul extern dintre scalarul  $\alpha$  și vectorul  $f$  este definit prin  $(\alpha f)(v) := \alpha f(v)$ .) Demonstrați că  $\mathcal{Q}(V) \simeq \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ .

23. Dovediți că spațiile vectoriale  $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$  și  $\mathcal{L}_s(\mathbb{R}^n)$  sunt izomorfe.

24. Să se reducă la forma canonică prin transformări ortogonale formele pătratice:

(a)  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ .

(b)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$ .

*Răspuns.* (a)  $f = 4y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$ ;  $y_1 = \frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3)$ ,

$y_2 = \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 - 2x_3)$ ,  $y_3 = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x_3)$ .

(b)  $f = y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2 + 5y_4^2$ ;  $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ ,

$y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$ ,  $y_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$ ,

$y_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$ .

25. \* Să se determine matricele  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  diagonalizabile pentru care

$$A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Răspuns.*  $A \in \left\{ \pm \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -5 & 5 \\ -5 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

26. Determinați  $A^{13}$ , unde  $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ .

*Răspuns.*  $A^{13} = 9^{12} \begin{pmatrix} 2^{15} + 3 & 6 - 2^{14} & -2^{15} \\ 6 - 2^{14} & 2^{13} & 6 + 2^{14} \\ -2^{15} & 6 + 2^{14} & 2^{15} - 3 \end{pmatrix}.$

27. \* **Algoritmul de descompunere  $QR$  a unei matrice nesingulare.**

Fie  $A = (v_1^T \mid v_2^T \mid \dots \mid v_n^T) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  o matrice nesingulară,  
 $B := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  și  $B' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$  baza ortonormată obținută prin  
 procedeul Gram-Schmidt din baza  $B$ , adică

$$v'_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1, \quad v'_k = \frac{1}{\left\| v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k \cdot v'_i) v'_i \right\|} \left( v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k \cdot v'_i) v'_i \right),$$

pentru  $k > 1$ , unde „ $\cdot$ ” reprezintă produsul scalar canonic din  $\mathbb{R}^n$ . Notăm

$$r_1 = \|v_1\|, \quad r_k = \left\| v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k \cdot v'_i) v'_i \right\|$$

pentru  $k > 1$  și  $Q := (v_1^T \mid v_2^T \mid \dots \mid v_n^T)$ . Să se arate că:

(a)  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  este bază în  $\mathbb{R}^n$

(b)  $v_1 = r_1 v'_1$  și  $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} (v_i \cdot v'_i) v'_i + r_k v'_k, \quad k = \overline{1, n};$

(c)  $v_1^T = Q \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^T = Q \begin{pmatrix} v'_1 \cdot v_2 \\ r_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n^T = Q \begin{pmatrix} v'_1 \cdot v_n \\ v'_2 \cdot v_n \\ \vdots \\ v'_{n-1} \cdot v_n \\ r_n \end{pmatrix}.$

(d)  $A = QR$ , unde  $R = \begin{pmatrix} r_1 & v'_1 \cdot v_2 & v'_1 \cdot v_3 & \dots & v'_1 \cdot v_n \\ 0 & r_2 & v'_2 \cdot v_3 & \dots & v'_2 \cdot v_n \\ 0 & 0 & r_3 & \dots & v'_3 \cdot v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & v'_{n-1} \cdot v_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}.$

(e) Folosind descompunerea  $A = QR$  indicați o procedură de rezolvare a sistemului  $Ax = b$ , unde  $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

28. \* Să se efectueze descompunerea  $QR$  a matricei  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

*Răspuns.*  $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

29. \* Să se determine descompunerea  $QR$  a unei matrice ortogonale.

30. \* Să se efectueze descompunerea  $QR$  a matricei  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Răspuns. } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

31. \* Să se arate că în descompunerea  $QR$  a matricei  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  avem

$$R = 2I_4.$$

32. Diagonalizați matricea  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  și determinați o bază în care are forma diagonală găsită.

(Examen, Informatică, 2014)

33. Fie  $M = \begin{pmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta & a \sin \theta + b \cos \theta \\ a \sin \theta + b \cos \theta & -a \cos \theta + b \sin \theta \end{pmatrix}$ , unde  $a, b, \theta$  sunt numere reale date.

(a) Să se scrie  $M$  sub forma  $M = aA + bB$  și să se calculeze  $A^2, B^2$  și  $AB + BA$ .

(b) Să se determine  $M^n$ , unde  $n$  este un număr natural.

(c) Dacă  $a^2 + b^2 < 1$  să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} M^k$ .

(Concurs „Traian Lalescu”, profil neelectric, faza finală, Alba Iulia, 2013)



## 8 SPAȚII AFINE EUCLIDIENE

Geometria afină are ca obiect studiul proprietăților geometrice care rămân neschimbate sub acțiunea transformărilor liniare nesusingulare și a translațiilor. Spațiile afine euclidiene - care sunt spații vectoriale euclidiene cărora li s-a atașat un sistem de coordonate, unificând astfel geometria și algebra liniară în geometria analitică - oferă cadrul natural de lucru în grafica 2D și 3D și în modelarea geometrică.

Următoarele capitole sunt dedicate celor mai uzitate noțiuni din spațiile afine euclidiene.

În ultimii ani au fost realizate aplicații valoroase ale spațiilor afine euclidiene în telecomunicații, în științele vieții și în computer science.

### A. TEORIE

#### 8.1. Spațiul afin euclidian $\mathbb{E}^n$

**Definiția 8.1.1. Spațiu afin.** Considerăm spațiul vectorial  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$  și o mulțime  $\mathcal{P}$  ale cărei elemente le numim **puncte** și le notăm cu litere mari:  $A, B, C$  etc. Dacă pentru orice pereche de puncte  $(A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$  există un unic vector notat  $\overline{AB} \in \mathbb{R}^n$ , (uneori  $\vec{AB}$ ) iar funcția

$$\alpha : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha(A, B) := \overline{AB}$$

verifică axiomele:

- (i)  $\forall A \in \mathcal{P}$  și  $\forall v \in \mathbb{R}^n$  există un unic punct  $B \in \mathcal{P}$  astfel ca  $v = \overline{AB}$  și
- (ii)  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ ,  $\forall A, B, C \in \mathcal{P}$  (relația lui Chasles)

spunem că mulțimea  $\mathcal{P}$  împreună cu aplicația  $\alpha$  (pe scurt, cuplul  $(\mathcal{P}, \alpha)$ ) este un **spațiu (punctual) afin  $n$ -dimensional**.

Să remarcăm faptul că, dacă  $A$  este un punct din  $\mathbb{R}^n$ , atunci, din cea de-a două axiomă avem  $\overline{AA} + \overline{AA} = \overline{AA}$ . Prin urmare  $\overline{AA}$  este vectorul nul, oricare ar fi punctul  $A$ . Am obținut:

**Proprietatea 8.1.1.** Dacă  $A$  este un punct din  $\mathcal{P}$ , atunci

$$\overline{AA} = \theta = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Deoarece  $\overline{BA} + \overline{AB} = \theta$  rezultă:

**Proprietatea 8.1.2.** Dacă  $A$  și  $B$  sunt două puncte din  $\mathcal{P}$ , atunci

$$\overline{BA} = -\overline{AB}.$$

**Proprietatea 8.1.3.** Dacă  $A_1, A_2, \dots, A_k$  sunt  $k$  puncte din  $\mathcal{P}$  și  $k \geq 3$  atunci

$$\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \dots + \overline{A_{k-1} A_k} = \overline{A_1 A_k}.$$

*Demonstrație.* Dovedim această generalizare a relației lui Chasles prin inducție matematică în raport cu  $k$ . Pentru  $k = 3$  egalitatea decurge imediat din (ii). Presupunem că egalitatea din propoziție are loc pentru  $k$  puncte. Trebuie să arătăm că  $\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \dots + \overline{A_{k-1} A_k} + \overline{A_k A_{k+1}} = \overline{A_1 A_{k+1}}$  pentru punctele arbitrare  $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$  din  $\mathcal{P}$ . Folosind consecutiv ipoteza de inducție și relația (ii) avem

$$\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \dots + \overline{A_{k-1} A_k} + \overline{A_k A_{k+1}} = \overline{A_1 A_k} + \overline{A_k A_{k+1}} = \overline{A_1 A_{k+1}}.$$

**Observații și convenții.** Fie  $(\mathcal{P}, \alpha)$  un spațiu afin  $n$ -dimensional.

1. Dacă  $O \in \mathcal{P}$  este un punct fixat, conform axiomei (i) funcția

$$\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ definită prin } A \mapsto \overline{OA}$$

este o bijecție; este motivul pentru care, în continuare, luăm

$$\mathcal{P} := \mathbb{R}^n,$$

adică **elementele din  $\mathbb{R}^n$  le considerăm fie vectori, fie puncte.**

2. Fie  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  și  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  două puncte (în  $\mathbb{R}^n$ ). **Definim vectorul  $\overline{AB}$  prin**

$$\overline{AB} := B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n).$$

Atunci  $\mathbb{R}^n$  împreună cu aplicația

$$\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha(A, B) := \overline{AB}$$

este **spațiu afin.**

Într-adevăr, dacă  $v$  este un vector și  $A$  este un punct, atunci unicul punct  $B$  pentru care  $v = \overline{AB} = B - A$  este  $B = v + A$  și prima axiomă este verificată; axioma (ii) este echivalentă cu egalitatea evidentă (din spațiul  $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ ):  $(B - A) + (C - B) = C - A$ .

3. Dacă pe  $\mathbb{R}^n$  considerăm un produs scalar „ $\cdot$ ”, **atunci  $(\mathbb{R}^n, \cdot)$  se numește spațiu (punctual) afin euclidian ( $n$  - dimensional) și se notează  $\mathbb{E}^n$ .** În lipsa altor precizări „ $\cdot$ ” este produsul scalar canonic.

4. **Baza canonică** din  $\mathbb{E}^3$  o notăm mai departe cu  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ . Vectorii din  $\mathbb{E}^2$  și cei din  $\mathbb{E}^3$  se notează uneori cu litere latine barate:  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$  (sau  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ ).

**Exemplul 8.1.1.** În spațiul afin  $\mathbb{E}^3$  fie punctele  $A = (1, 2, 3)$  și  $A' = (-1, -2, -3)$  și vectorul  $\bar{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ .

1. Să se determine unicul punct  $B$  pentru care  $\bar{a} = \overline{AB}$ .
2. Să se determine unicul punct  $B'$  pentru care  $\bar{a} = \overline{A'B'}$ .

*Rezolvare.*

1. Pentru a obține unicul punct  $B(x, y, z)$  pentru care  $\bar{a} = \overline{AB}$  remarcăm că  $\bar{a} = (1, 2, 3)$  și

$$\overline{AB} = B - A = (x, y, z) - (1, 2, 3) = (x - 1, y - 2, z - 3),$$

de unde rezultă că  $B(2, 4, 6)$ .

2. Unicul punct  $B'$  pentru care  $\bar{a} = \overline{A'B'} = B' - A'$  se poate obține direct din definiție:  $B' = A' + \bar{a} = (0, 0, 0)$ .

**Definiția 8.1.2. Distanța dintre două puncte.** *Distanța  $d(A, B)$  dintre punctele  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  și  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  din  $\mathbb{E}^n$  este lungimea vectorului  $\overline{AB}$ , deci*

$$d(A, B) = \|\overline{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}.$$

Noțiunea de segment de dreaptă se extinde în  $\mathbb{R}^n$  după cum urmează.

**Definiția 8.1.3. Segment.** *Fie  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  și  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  două puncte din  $\mathbb{R}^n$ . Mulțimea punctelor de forma  $A + t \cdot \overline{AB}$  pentru care scalarul  $t$  parcurge intervalul  $[0, 1]$  se numește **segment de extremități**  $A, B$  și se notează  $[AB]$ ; deci*

$$[AB] = \{(1 - t)A + tB \mid t \in [0, 1]\}$$

sau

$$[AB] := \{((1 - t)a_1 + tb_1, (1 - t)a_2 + tb_2, \dots, (1 - t)a_n + tb_n) \mid t \in [0, 1]\}.$$

**Mijlocul segmentului**  $[AB]$  este punctul  $M \in [AB]$  pentru care  $\overline{AM} = \overline{MB}$ . Dacă  $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  și  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  din  $\overline{AM} = \overline{MB}$  rezultă imediat că  $x_i - a_i = b_i - x_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , deci mijlocul segmentului  $[AB]$  este

$$M = \left( \frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2} \right).$$

**Definiția 8.1.4. Unghi.** Fie  $A, B, C$  trei puncte distincte din  $\mathbb{R}^n$ . **Unghiul**  $\widehat{BAC}$  este unghiul dintre vectorii  $\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{AC}$ . Prin urmare cosinusul unghiului  $\widehat{BAC}$  este

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|},$$

iar **măsura unghiului**  $\widehat{BAC}$  este  $\arccos \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|}$  (ca de obicei, prin abuz de limbaj, spunem uneori „unghiul  $\widehat{BAC}$ ” în loc de „măsura unghiului  $\widehat{BAC}$ ”).

**Exemplul 8.1.2.** În spațiul afin  $\mathbb{E}^3$  fie punctele  $A = (1, 2, 3)$ ,  $A' = (-1, -2, -3)$  și  $C = (1, 2, -3)$ .

1. Să se determine segmentul  $[AA']$  și totalitatea punctelor egal depărtate de mijlocul lui.
2. Să se determine punctele  $M$  pentru care unghiul  $\widehat{AMA'}$  este drept.
3. Să se determine punctele  $N$  aflate la distanța  $\sqrt{14}$  de punctul  $C$  și de punctul  $A$ , pentru care unghiul  $\widehat{NAA'}$  are măsura  $\arccos \frac{3}{7}$ .

*Rezolvare.*

1. Conform definiției,

$$[AA'] = \{(2t - 1, 4t - 2, 6t - 3) \mid t \in [0, 1]\}.$$

Mijlocul segmentului  $[AA']$  are drept coordonate mediile aritmetice ale coordonatelor punctelor  $A$  și  $A'$ . Deci mijlocul căutat este  $O = (0, 0, 0)$ . Punctul  $P(x, y, z)$  se află la distanța  $R > 0$  de  $O = (0, 0, 0)$  dacă și numai dacă  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$ . Prin urmare punctele egal depărtate de mijlocul  $O = (0, 0, 0)$  al segmentului  $[AA']$  descriu o suprafață (sfera de centru  $(0, 0, 0)$  și rază  $R$ ) de ecuație

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

2. Unghiul  $\widehat{AMA'}$  este drept dacă și numai dacă produsul scalar  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MA'}$  este nul. Fie  $M = (x, y, z)$ . Atunci

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0 \Leftrightarrow (x - 1, y - 2, z - 3) \cdot (-1 - x, -2 - y, -3 - z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 - 4 + z^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 14.$$

Prin urmare punctele căutate se caracterizează prin proprietatea că se găsesc la distanța  $\sqrt{14}$  de  $O$ .

3. Fie  $N = (x, y, z)$  punctul căutat. Deoarece  $N$  se află la distanța  $\sqrt{14}$  de punctul  $C$ , respectiv punctul  $A$  avem imediat

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 14 \text{ și } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14,$$

iar de aici urmează că

$$z = 0 \text{ și } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Pe de altă parte, cosinusul unghiului  $\widehat{NAA'}$  este  $\frac{3}{7}$ , deci  $\frac{\overline{AN} \cdot \overline{AA'}}{\|\overline{AN}\| \|\overline{AA'}\|} = \frac{3}{7}$ .

Cum  $N = (x, y, 0)$ , avem

$$\begin{aligned} \frac{3}{7} &= \frac{[(x-1)\bar{i} + (y-2)\bar{j} - 3\bar{k}] \cdot (-2\bar{i} - 4\bar{j} - 6\bar{k})}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 9} \cdot \sqrt{4 \cdot 14}} = \\ &= -\frac{(x-1) + 2(y-2) - 9}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{x+2y-14}{14} \iff x+2y=8. \end{aligned}$$

Prin urmare punctele căutate sunt  $N_1 = (0, 4, 0)$  și  $N_2 = \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}, 0\right)$ .

Spațiile euclidiene afine (în special  $\mathbb{E}^2$ ,  $\mathbb{E}^3$  și  $\mathbb{E}^4$ ) oferă cadrul natural de lucru în grafica 3D și în modelarea geometrică. În următoarele paragrafe introducem câteva dintre instrumentele folosite în aceste domenii.

## 8.2. Repere ortonormate în $\mathbb{E}^n$

**Definiția 8.2.1. Reper. Vector de poziție. Coordonate.** *Un reper (ortonormat) în  $\mathbb{E}^n$  este un cuplu  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$  unde  $O \in \mathbb{R}^n$  este un punct fixat, numit **originea reperului**, iar  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  este o bază ortonormată a spațiului euclidian  $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ . Asociem reperului  $\mathcal{R}$  un **sistem de semiaxe ortogonale**  $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n$ , unde semiaxa  $Ox_i$  este mulțimea punctelor  $M$  cu proprietatea că vectorul  $\overline{OM}$  are aceeași direcție și același sens cu vectorul  $e_i$ , adică*

$$Ox_i = \{M \in \mathbb{R}^n \mid \overline{OM} = \lambda e_i, \lambda \in [0, \infty)\}.$$

*Dacă  $A$  este un punct și  $\overline{OA} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$ , atunci  $a_i e_i = \text{pr}_{e_i} \overline{OA}$  (vezi Observația 6.4.1). Vectorul  $\overline{OA}$  se numește **vectorul de poziție al punctului  $A$** , iar coordonatele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ale vectorului  $\overline{OA}$  în baza  $\mathcal{B}$  sunt, prin definiție, **coordodatele punctului  $A$  relativ la reperul  $\mathcal{R}$**  (sau la sistemul de axe asociat). Vom scrie în continuare  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  și vom citi  $A$  **de coordonate**  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (în reperul  $\mathcal{R}$ ).*

*În plan, i.e. în  $\mathbb{E}^2$  (sau în spațiu, i.e. în  $\mathbb{E}^3$ ), axele unui reper ortonormat se notează de regulă cu  $Ox$ ,  $Oy$ , (respectiv  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ) iar coordonatele unui punct arbitrar cu  $(x, y)$  (respectiv  $(x, y, z)$ ).*

Reperul  $\mathcal{R}_c$  format din originea  $O(0, 0, \dots, 0)$  și din baza canonică  $\mathcal{B}_c$  se numește **reperul canonic**.

**Observația 8.2.1.** În lipsa unor precizări suplimentare, dacă vorbim de coordonatele unui punct ne referim la coordonatele acestuia în reperul canonic.

**Observația 8.2.2.** Dacă  $v \in \mathbb{R}^n$  este un vector iar  $A$  și  $B \in \mathbb{R}^n$  sunt două puncte astfel ca  $v = \overline{AB}$  spunem că segmentul orientat de extremități  $A$  și  $B$  este un **reprezentant al vectorului**  $v$ . Spunem că **vectorul**  $v \in \mathbb{R}^n$  **este aplicat în punctul**  $A \in \mathbb{R}^n$ , dacă  $v = \overline{AB}$ , unde  $B \in \mathbb{R}^n$  este unicul punct pentru care  $v = \overline{AB}$ .

**Observația 8.2.3.** Vectorii liberi studiați în liceu - priviți drept clase de echivalență relativ la relația de echipolență dintre segmentele orientate - sunt cazuri particulare ale vectorilor dintr-un spațiu vectorial euclidian bidimensional (vezi și Problema 2).

**Proprietăți 8.2.1.** Fie trei puncte  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $C(c_1, c_2, \dots, c_n)$  din spațiul euclidian canonic  $\mathbb{E}^n$  și  $\mathcal{R}_c$  reperul canonic. Atunci:

1. vectorul  $\overline{AB}$  se poate exprima cu ajutorul vectorilor de poziție ai punctelor  $A$  și  $B$  astfel:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA};$$

2. norma vectorului de poziție  $\overline{OA}$  (lungimea sa) este:

$$\|\overline{OA}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2};$$

3. distanța dintre punctele  $A$  și  $B$  este:

$$d(A, B) = \|\overline{AB}\| = \|\overline{OB} - \overline{OA}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2};$$

4. segmentul  $[AB]$  este mulțimea punctelor  $P \in \mathbb{R}^n$  pentru care  $\overline{OP} = (1 - t)\overline{OA} + t\overline{OB}$ , unde  $t \in [0, 1]$ ; deci

$$[AB] := \{P((1 - t)a_1 + tb_1, (1 - t)a_2 + tb_2, \dots, (1 - t)a_n + tb_n) \mid t \in [0, 1]\};$$

5. mijlocul segmentului  $[AB]$  este punctul

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2}\right).$$

**Exemplul 8.2.1. Centrul de greutate.** Fie  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3)$ ,  $C(c_1, c_2, c_3)$ . Să arătăm că centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  este

$$G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}, \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}\right).$$

În primul rând ne amintim că centrul de greutate  $G$  se găsește la intersecția medanelor. Deoarece  $A' \left( \frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2}, \frac{b_3 + c_3}{2} \right)$  este mijlocul segmentului  $[BC]$  și  $G \in [AA']$  se află la două treimi de vârful  $A$  urmează că

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow 3(G - A) = 2(A' - A) \Leftrightarrow G = \frac{1}{3}(A + 2A'),$$

de unde obținem imediat coordonatele căutate.

**Exemplul 8.2.2.** Fie triunghiul  $ABC$ , unde  $\overrightarrow{OA} = 14\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$ ,  $\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$ .

1. Să se arate că triunghiul  $AOB$  este dreptunghic.
2. Să se arate că triunghiul  $BOC$  este isoscel.
3. Să se calculeze perimetrul triunghiului  $ABC$ .
4. Să se calculeze măsura unghiului  $\widehat{BAC}$ .

*Rezolvare.*

1.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 28 - 14 - 14 = 0$ , deci  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$  și triunghiul  $AOB$  este dreptunghic.
2. Deoarece  $\|\overrightarrow{BO}\| = \|\overrightarrow{CO}\| = \sqrt{57}$ , rezultă că triunghiul  $BOC$  este isoscel.
3. Avem  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + 9\vec{k}$ ,  $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{122}$ ,  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = 16\vec{i} - 14\vec{j}$ ,  $\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{452}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -12\vec{i} + 9\vec{j} - 9\vec{k}$ ,  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{306}$ , deci perimetrul cerut este  $\sqrt{122} + \sqrt{452} + \sqrt{306}$ .
4. Trebuie să calculăm cosinusul unghiului  $\widehat{BAC}$ :

$$\begin{aligned} \cos \widehat{BAC} &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(-12\vec{i} + 9\vec{j} - 9\vec{k}) \cdot (-16\vec{i} + 14\vec{j})}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \\ &= \frac{6(4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (8\vec{i} - 7\vec{j})}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{6(32 + 21)}{\sqrt{306} \cdot \sqrt{452}} = \frac{159}{\sqrt{306} \cdot \sqrt{113}}. \end{aligned}$$

Prin urmare măsura unghiului  $\widehat{BAC}$  este  $\arccos \frac{159}{\sqrt{306} \cdot \sqrt{113}}$ .

### 8.3. Schimbări de repere

**Definiția 8.3.1. Orientarea bazelor și a reperelor.** Fie  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  două baze în  $\mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  două repere în  $\mathbb{E}^n$ .

- Bazele  $\mathcal{B}$  și  $\mathcal{B}'$  au **aceeași orientare (sunt la fel orientate)** dacă determinantul matricei de trecere  $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  este pozitiv. Baza  $\mathcal{B}$  este **dreaptă** dacă este la fel orientată ca baza canonică; în caz contrar spunem că este o **bază stângă**.
- Reperele  $\mathcal{R}$  și  $\mathcal{R}'$  au **aceeași orientare (sunt la fel orientate)** dacă bazele lor sunt la fel orientate.
- Spunem că reperul  $\mathcal{R}$  este **drept** dacă are aceeași orientare ca reperul canonic; în caz contrar spunem că este **reper stâng**.

**Exemplul 8.3.1.** Fie  $\bar{v} = \cos \theta \cdot \bar{i} + \sin \theta \cdot \bar{j}$ ,  $\theta \in (-\pi, \pi]$  un vector unitar din  $\mathbb{E}^2$ . Să determinăm o bază ortonormată dreaptă  $\mathcal{B}_d$  și una ortonormată stângă  $\mathcal{B}_s$  în care  $\bar{v}$  să fie pe prima poziție.

Fie  $\mathcal{B}_d := \{\bar{v}, \bar{w}\}$ , unde  $\bar{w}$  este un versor ortogonal pe  $\bar{v}$ . Faptul  $\bar{w}$  că este unitar implică existența unui unghi  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  astfel ca  $\bar{w} = \cos \alpha \cdot \bar{i} + \sin \alpha \cdot \bar{j}$ . Din ortogonalitatea  $\bar{v} \perp \bar{w}$  rezultă egalitatea  $\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta = 0$ , ori  $\cos(\alpha - \theta) = 0$ . De aici obținem soluțiile

$$\bar{w} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \bar{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \bar{j} = -\sin \theta \cdot \bar{i} + \cos \theta \cdot \bar{j},$$

și

$$\bar{w}_1 = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \bar{i} + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \bar{j} = \sin \theta \cdot \bar{i} - \cos \theta \cdot \bar{j} = -\bar{w}.$$

Deoarece matricea de trecere  $T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  de la baza canonică la baza  $\{\bar{v}, \bar{w}\}$  are determinantul egal cu 1, rezultă că această bază este dreaptă, iar transformarea ortogonală asociată este o rotație în sensul definiției date la Exemplul 7.1.3. Baza  $\{\bar{v}, -\bar{w}\}$  este bază stângă.

**Observația 8.3.1.** Prin urmare, un reper ortonormat din plan care are axele ortogonale asociate  $Ox$ ,  $Oy$ , iar  $Oy$  se obține prin rotirea în sens trigonometric cu  $\frac{\pi}{2}$  a axei  $Ox$  în jurul originii, este un **reper drept**. Dacă  $Oy$  se obține prin rotirea în sensul acelor de ceasornic cu  $\frac{\pi}{2}$  a axei  $Ox$  în jurul originii, atunci reperul este **stâng**.

**Definiția 8.3.2.** Schimbarea reperelor în  $\mathbb{E}^n$ .

Fie  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\})$  și  $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\})$  două repere în spațiul euclidian afin  $\mathbb{E}^n$ .

1. Dacă  $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B})$  (adică  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ ) și  $O' \neq O$  spunem că reperul  $\mathcal{R}'$  s-a obținut din reperul  $\mathcal{R}$  prin **translația  $\overline{OO'}$  (pe direcția vectorului  $\overline{OO'}$ , sau de-a lungul dreptei  $OO'$ )**. În acest caz axele ortogonale  $O'x'_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  asociate reperului  $\mathcal{R}'$  sunt paralele și au aceeași direcție cu axele  $Ox_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  ale reperului  $\mathcal{R}$ . Dacă punctul  $O'$  are coordonatele  $(o'_1, o'_2, \dots, o'_n)$  relativ la reperul  $\mathcal{R}$ , iar punctul  $A$  are coordonatele  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  relativ la reperul  $\mathcal{R}$  și coordonatele  $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$  relativ la reperul  $\mathcal{R}'$ , atunci

$$a'_i = a_i - o'_i, \quad i = \overline{1, n}.$$



2. Dacă  $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}')$  și  $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$  spunem că reperul  $\mathcal{R}'$  s-a obținut din reperul  $\mathcal{R}$  prin **rotații în jurul axelor**  $Ox_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  ale reperului  $\mathcal{R}$ . Dacă  $f \in \mathcal{GO}(V)$  este transformarea pentru care  $f(e_i) = e'_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , spunem că  $\mathcal{R}'$  s-a obținut din reperul  $\mathcal{R}$  prin **rotația**  $f$ .
3. Dacă  $O' \neq O$  și  $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$  spunem că reperul  $\mathcal{R}'$  s-a obținut din reperul  $\mathcal{R}$  printr-o **rototranslație**.

**Observația 8.3.2.** Reperul  $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2\})$  din  $\mathbb{E}^2$  este drept (vezi Exemplul 8.3.1) dacă și numai dacă matricea de trecere de la baza canonică  $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2\}$  la baza  $\mathcal{B}'$  este de forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

unde  $\theta$  este măsura unghiului  $\widehat{(e_1, e'_1)}$ , și este stâng dacă și numai dacă matricea de trecere de la baza canonică la baza  $\mathcal{B}'$  este de forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Prin urmare o bază ortonormată  $\{e'_1, e'_2\}$  are aceeași orientare ca baza canonică dacă și numai dacă unghiurile  $\widehat{(e_1, e'_1)}$  și  $\widehat{(e_2, e'_2)}$  au aceeași măsură.

**Observația 8.3.3.** Fie  $\theta \in (-\pi, \pi]$  și reperul

$$\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}' = \{e'_1 = (\cos \theta, \sin \theta), e'_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)\}).$$

Transformarea ortogonală  $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  care realizează legătura dintre bazele reperelor  $\mathcal{R}$  și  $\mathcal{R}'$  și are matricea

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

și se mai numește **rotație de unghi**  $\theta$ .

Dacă  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , atunci  $v = \|v\|(\cos \alpha, \sin \alpha)$ , unde  $\alpha$  este măsura unghiului dintre  $v$  și  $e_1$  iar  $R_\theta(v) = \|v\|(\cos(\alpha + \theta), \sin(\alpha + \theta))$ .

## 8.4. Produs vectorial. Produs mixt.

**Definiția 8.4.1. Produs vectorial în spațiul euclidian canonic  $\mathbb{E}^3$ .** Fie  $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  baza canonică și  $u = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$ ,  $v = y_1\bar{i} + y_2\bar{j} + y_3\bar{k}$  doi vectori. Vectorul notat  $u \times v$  care se obține prin dezvoltarea determinantului

$$u \times v := \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k}$$

după prima linie se numește *produsul vectorial al vectorilor  $u$  și  $v$* .

**Propoziția 8.4.1. Proprietăți ale produsului vectorial.** Fie  $u, v, w$  trei vectori din  $\mathbb{R}^3$ .

1. Dacă vectorii  $u, v$  sunt liniar independenți atunci produsul vectorial  $u \times v$  este ortogonal pe vectorii  $u$  și  $v$ , iar sistemul  $\{u, v, u \times v\}$  este o bază dreaptă, adică produsul vectorial  $u \times v$  este perpendicular pe planul determinat de vectorii  $u$  și  $v$  aplicați în același punct, iar sensul său este dat de regula burghiului.
2. Sistemul ortonormat  $\{u, v, w\}$  este o bază dreaptă dacă și numai dacă se verifică una dintre relațiile:

$$u \times v = w, \quad v \times w = u \text{ sau } w \times u = v.$$

3. **Norma produsului vectorial** are valoarea

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin(\widehat{u, v})$$

și reprezintă **aria paralelogramului construit pe vectorii  $u$  și  $v$  aplicați în același punct** (adică  $\|u\| \|v - pr_u v\|$ ).

4. Produsul vectorial este anticomutativ, i.e.  $u \times v = -v \times u$ .
5.  $u \times v = \theta$  dacă și numai dacă unul dintre vectori este nul, sau cei doi vectori sunt coliniari (i.e.  $u \parallel v$ ).

6. **Produsul mixt.** Fie  $u, v, w$  trei vectori din  $\mathbb{R}^3$ . Produsul mixt definit prin

$$(u, v, w) := (u \times v) \cdot w$$

este egal cu determinantul matricei coordonatelor celor trei vectori, i.e.

$$(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

unde  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ ,  $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$  și  $w = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3$ ; dacă  $A, B, C$  sunt trei puncte din  $\mathbb{R}^3$  atunci modulul produsului mixt  $(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})$  este **volumul paralelipipedului construit pe vectorii  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$** .

**Propoziția 8.4.2.** Fie  $u, u', v, w$  vectori din  $\mathbb{R}^3$  și  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Atunci:

1.  $(u, v, w) = (v, w, u) = (w, u, v)$ .
2.  $(u, v, w) = -(v, u, w)$ .
3.  $(\alpha u + \beta u', v, w) = \alpha (u, v, w) + \beta (u', v, w)$ .

4. Volumul  $V$  al tetraedrului  $ABCD$  este  $V = \frac{1}{6} |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|$ .
5.  $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$  (**dublu produs vectorial** (*Gibbs*)).

**Observația 8.4.1.** Dublul produs vectorial nu este asociativ. Prin urmare, în general  $(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$ . De altfel

$$u \times (v \times w) = \begin{vmatrix} v & w \\ u \cdot v & u \cdot w \end{vmatrix}$$

**Exemplul 8.4.1.** Calculați volumul unui paraleliped construit pe vectorii  $u = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ ,  $v = -3\bar{j} + \bar{k}$  și  $w = 2\bar{j} + 5\bar{k}$  având același punct de aplicație. Determinați orientarea bazei  $B := \{u, v, w\}$ . Este  $B' := \{u \times v, v, w\}$  bază în  $E^3$ ?

*Rezolvare.* Deoarece

$$(u, v, w) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -51$$

rezultă că volumul paralelipipedului este 51, iar  $\mathcal{B}$  este o bază stângă.

Deoarece

$$u \times v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4\bar{i} - 3\bar{j} - 9\bar{k},$$

avem

$$(u \times v, v, w) = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -9 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -68,$$

deci  $\mathcal{B}'$  este o bază stângă. Alternativ, folosind proprietăți ale produsului mixt și regula lui Gibbs, obținem

$$\begin{aligned} (u \times v, v, w) &= ((u \times v) \times v) \cdot w = \left( (u, v)v - \|v\|^2 u \right) \cdot w = \\ &= -12(v, w) - 10(u, w) = 12 - 80 = -68. \end{aligned}$$

## B. PROBLEME REZOLVATE

1. Construiți în  $\mathbb{R}^2$  o bază ortonormată dreaptă  $\mathcal{B} = \{q_1, q_2\}$  astfel încât  $m(\theta) = \frac{\pi}{6}$ , unde  $\theta = \angle(q_1, e_1)$ .

*Rezolvare.*

Vectorul  $q_1$  fiind versor, coordonatele sale în baza canonică (care e ortonormată)

sunt cosinusurile directoare, adică  $q_1 = \left( \cos \theta, \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right) = (\cos \theta, \sin \theta) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ .

Pentru ca baza să fie dreaptă, alegem  $q_2 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ . Într-adevăr,  $q_1 \cdot q_2 = 0$ ,

$\|q_1\| = \|q_2\| = 1$  și matricea de trecere  $T_{\mathcal{B}_c \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$  are  $\det(T_{\mathcal{B}_c \mathcal{B}}) = +1$ .

2. Considerăm în  $\mathbb{R}^2$  reperele ortonormate drepte  $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}_c = \{\bar{i}, \bar{j}\}\}$  de axe  $xOy$  și  $\mathcal{R}' = \{O', \mathcal{B} = \{q_1, q_2\}\}$  de axe  $x'O'y'$  unde  $\mathcal{B}$  e baza din problema precedentă iar  $O'(3, 2)_{\mathcal{R}}$ . Să se exprime coordonatele  $(x', y')$  în funcție de  $(x, y)$ .  
*Rezolvare.*

Considerăm un reper intermediar  $\mathcal{R}'' = \{O', \mathcal{B}_c = \{\bar{i}, \bar{j}\}\}$  de axe  $x''O'y''$ . Vom avea pentru un punct  $P$  oarecare:

$$P(x, y)_{\mathcal{R}} \iff \overline{OP} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}$$

$$P(x'', y'')_{\mathcal{R}''} \iff \overline{O'P} = x'' \cdot \bar{i} + y'' \cdot \bar{j}$$

$$O'(3, 2)_{\mathcal{R}} \iff \overline{OO'} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$$

Din regula lui Chasles,  $\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P}$ , deci  $x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + x'' \cdot \bar{i} + y'' \cdot \bar{j}$ . Identificând coeficienții lui  $\bar{i}$  și  $\bar{j}$ , găsim

$$\begin{cases} x'' = x - 3 \\ y'' = y - 2 \end{cases}$$

Trecem acum de la reperul intermediar la cel final de axe  $x'O'y'$ . Pentru un punct oarecare  $P$  avem:

$$P(x'', y'')_{\mathcal{R}''} \iff \overline{O'P} = x'' \cdot \bar{i} + y'' \cdot \bar{j}$$

$$P(x', y')_{\mathcal{R}'} \iff \overline{O'P} = x' \cdot q_1 + y' \cdot q_2$$

Avem deci vectorul  $\overline{O'P}$  exprimat în două baze ortonormate diferite. Legătura între coordonatele în cele două baze e dată de

$$\overline{O'P}_B^T = T_{BB_c} \overline{O'P}_{B_c}^T = T_{B_c B}^{-1} \overline{O'P}_{B_c}^T = T_{B_c B}^T \overline{O'P}_{B_c}^T$$

adică

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 3 \\ y - 2 \end{bmatrix}$$

de unde

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{-3\sqrt{3}-2}{2} \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3-2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

3. Să se calculeze  $Aria(\triangle ABC)$  cu  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(2, 1, 1)$  și  $C(3, -2, 1)$ .

*Rezolvare.*

Pentru vectorii  $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (1, 0, -1)$  și  $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (2, -3, -1)$  calculăm

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

Aria triunghiului va fi jumătate din aria paralelogramului construit pe cei doi vectori, deci  $Aria(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \times \overline{AC}\| = \frac{\sqrt{19}}{2}$ .

4. Să se decidă dacă punctele  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(5, 0, 3)$  și  $C(-1, 3, 0)$  sunt sau nu coliniare.

*Rezolvare.*

Construim vectorii  $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (4, -2, 2)$  și  $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (-2, 1, -1)$ . Cele trei puncte vor fi coliniare dacă paralelogramul construit pe cei doi vectori are aria nulă, ceea ce se întâmplă doar atunci când  $\overline{AB} \times \overline{AC} = \theta$ . Calculăm produsul vectorial

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

așadar cele trei puncte sunt coliniare.

5. Să se calculeze volumul tetraedrului  $OABC$  unde  $O$  este originea reperului iar punctele  $A, B, C$  sunt cele din problema 3.

*Rezolvare.*

Pentru vectorii  $\overline{OA} = (1, 1, 2)$ ,  $\overline{OB} = (2, 1, 1)$ ,  $\overline{OC} = (3, -2, 1)$  calculăm produsul mixt

$$(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

și atunci volumul  $Vol(OABC) = \frac{1}{6} |(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})| = \frac{5}{3}$ .

6. Să se arate că punctele  $A(2, 4, 0)$ ,  $B(4, 3, -1)$ ,  $C(3, 1, 2)$  și  $D(0, 5, 1)$  sunt coplanare.

*Rezolvare.*

Construim vectorii  $\overline{AB} = (2, -1, -1)$ ,  $\overline{AC} = (1, -3, 2)$ ,  $\overline{AD} = (-2, 1, 1)$ . Calculăm

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Așadar paralelipipedul construit pe cei trei vectori are volum nul, ceea ce implică faptul că punctele sunt coplanare.

7. Dacă  $\overline{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\overline{AC} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$  să se determine lungimea înălțimii din  $A$  în triunghiul  $\triangle ABC$ .

*Rezolvare.*

Calculăm

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k},$$

deci  $Aria(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \times \overline{AC}\| = \frac{\sqrt{18}}{2}$ . Dar totodată

$Aria(\triangle ABC) = \frac{\|\overline{CB}\| \cdot h}{2}$  unde  $h$  este lungimea înălțimii din  $A$  a triunghiului.

$\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC} = (1, -2, -2)$  și  $\|\overline{CB}\| = 3$ ; egalând cele două expresii pentru arie, găsim  $h = \sqrt{2}$ .

8. Dacă  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  reprezintă laturile unui triunghi, să se arate că  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}$ .

*Rezolvare.*

Cei trei vectori sunt laturile unui triunghi dacă și numai dacă

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Dacă aplicăm produsul vectorial cu  $\vec{u}$  la stânga în ambii membri ai relației, obținem  $\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$ , de unde  $\vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} = \vec{0}$  adică  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \times \vec{u}$ . Repetând procedeul aplicând acum produsul vectorial cu  $\vec{v}$ , găsim analog  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w}$ .

9. Să se demonstreze identitatea lui Lagrange:

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$$

*Rezolvare.*

Dacă notăm  $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ , atunci  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ . Înlocuind în relație expresiile pentru  $\sin$  și  $\cos$ , prima fiind dedusă din norma produsului vectorial, găsim

$$\left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right)^2 + \left( \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right)^2 = 1$$

dacă înmulțim relația de mai sus cu  $\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$  ajungem la identitatea cerută pe care dacă o scriem pe coordonate găsim relația pe care o știm din liceu sub numele de identitatea lui Lagrange:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

O consecință imediată a acestei identități este inegalitatea

Cauchy-Buniakowsky-Schwarz:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

## C. PROBLEME PROPUSE

1. Să se figureze axele de coordonate ale reperului canonic, apoi să se figureze reprezentanți ai vectorilor  $\bar{a}, \bar{b}$  și  $\bar{a} \times \bar{b}$  dacă:

- (a)  $\bar{a} = \bar{i}, \bar{b} = \bar{j}$ ;
- (b)  $\bar{a} = \bar{i} - \bar{k}, \bar{b} = \bar{j}$ ;
- (c)  $\bar{a} = \bar{i} - \bar{k}, \bar{b} = \bar{j} + \bar{k}$ ;
- (d)  $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}, \bar{b} = \bar{i} - \bar{j}$ .

2. Arătați că un vector  $\bar{a}$  este un vector din  $\mathbb{E}^2$  dacă și numai dacă  $\bar{a}$  este un vector liber din  $\mathbb{R}^2$ .

3. Pentru ce valori ale lui  $\alpha$  vectorii  $\bar{a} = 2\bar{i} - 6\bar{j} + 8\bar{k}$  și  $\bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j} + \alpha\bar{k}$  sunt paraleli?

*Răspuns.*  $\alpha = 4$ .

4. Să se arate că  $\bar{a} \times \bar{b} = 2\bar{i} + 6\bar{j} - 10\bar{k}$ , unde  $\bar{a} = -4\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$  și  $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ .

5. Determinați un vector perpendicular pe planul ce trece prin  $P(1, -1, 0), Q(2, 1, -1), R(-1, 1, 2)$ .

*Răspuns.* E.g.  $\bar{i} + \bar{k}$ .

6. Determinați aria triunghiului care are vârfurile  $P(1, -1, 0), Q(2, 1, -1)$  și  $R(-1, 1, 2)$ .

*Răspuns.*  $3\sqrt{2}$ .

7. Determinați aria triunghiului  $PQR$  și un versor perpendicular pe planul  $(PQR)$  când:

- (a)  $P(0, 0, 0), Q(1, 1, 1), R(1, 0, -1)$ ;
- (b)  $P(-2, 0, 2), Q(1, 1, 1), R(1, 0, -1)$ ;
- (c)  $P(1, 0, 0), Q(0, 1, 0), R(0, 0, 1)$ ;
- (d)  $P(1, 0, 0), Q(0, 1, 0), R(0, 0, -1)$ .

8. Fie punctele  $A(1, 1, -1), B(0, 1, 2), C(2, 0, -1)$ .

- (a) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a\overline{AB} + b\overline{BC} = \overline{AC}$ .
- (b) Să se calculeze măsura unghiului dintre vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{BC}$ .
- (c) Să se determine mijlocul segmentului  $[AB]$ .
- (d) Să se determine centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ .
- (e) Să se calculeze  $\overline{AB} \times \overline{BC}$ .

(f) Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ .

9. În  $\mathbb{E}^2$  reperul  $\mathcal{R}' = (O'(x_0, y_0), B' = \{e'_1, e'_2\})$  s-a obținut din reperul  $\mathcal{R} = (O, B = \{e_1, e_2\})$  printr-o translație de-a lungul dreptei  $OO'$  și o rotație de unghi  $\theta$ . Determinați coordonatele  $(x', y')$  ale unui punct  $P$  relativ la reperul  $\mathcal{R}$  în funcție de coordonatele sale  $(x, y)$  relativ la reperul  $\mathcal{R}'$ .

*Răspuns.*  $x' = x \cos \theta + y \sin \theta - x_0$ ,  $y' = -x \sin \theta + y \cos \theta - y_0$ .

10. Stabiliți dacă afirmațiile de mai jos sunt adevărate sau false:

- (a)  $\|\overline{AB}\| = \overline{AB} \cdot \overline{AB}$ ;
- (b)  $\|\overline{AB}\|^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB}$ ;
- (c)  $\overline{AB} \times \overline{AB} = \vec{0}$ ;
- (d)  $\overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{BC} \times \overline{AB}$ ;
- (e)  $\overline{AB} \times \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AB} + \overline{BC} \times \overline{CD}$ ;
- (f)  $(\overline{AB} \times \overline{BC}) \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot (\overline{BC} \times \overline{CD})$ ;
- (g)  $(\overline{AB} \times \overline{BC}) \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \times \overline{CD}$ ;
- (h)  $(\overline{AB} \times \overline{BC}) \cdot \overline{AC} = \overline{BD} \cdot (\overline{BC} \times \overline{CD})$ .

11. Determinați:

- $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{a} \times \vec{b}$ ,  $\|\vec{a}\|$ ,  $\|\vec{b}\|$ ;
- cosinusul unghiului dintre  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ ;
- proiecția vectorului  $\vec{b}$  pe vectorul  $\vec{a}$

în fiecare din următoarele cazuri:

- (a)  $\vec{a} = 2\vec{i} + 7\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{k}$ ;
- (b)  $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \sqrt{5}\vec{k}$ ,  $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - \sqrt{5}\vec{k}$ ;
- (c)  $\vec{a} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$ .

12. Scrieți  $\vec{a} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$  ca suma dintre un vector paralel cu  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$  și unul perpendicular pe  $\vec{b}$ .
13. Scrieți  $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$  ca suma dintre un vector paralel cu  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$  și unul perpendicular pe  $\vec{b}$ .
14. Vectorul  $\vec{a} = \vec{i} + (\vec{j} + \vec{k})$  este deja scris ca suma dintre un vector  $\vec{a}_1$  paralel cu  $\vec{i}$  și altul,  $\vec{a}_2$ , ortogonal pe  $\vec{i}$ . Aplicând tehnica de la exercițiul precedent pentru  $\vec{b} = \vec{i}$  obțineți  $\vec{a}_1 = \vec{i}$  și  $\vec{a}_2 = \vec{j} + \vec{k}$ ? Este aplicabilă această tehnică pentru orice vectori nenuli  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ ?

15. Verificați afirmațiile de la Propoziția 8.4.1.



16. Fie  $ABC$  un triunghi și  $M$  un punct arbitrar. Să se determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel ca  $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{CB}$ .
17. Fie  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  trei vectori nenuli. Folosind produse scalare și produse vectoriale potrivite descrieți:
- un vector ortogonal pe  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$ ;
  - un vector ortogonal pe  $\bar{a} \times \bar{b}$  și  $\bar{c}$ ;
  - un vector ortogonal pe  $\bar{a} \times \bar{b}$  și  $\bar{a} \times \bar{c}$ ;
  - un vector ortogonal pe  $\bar{a} \times \bar{b}$ .
18. Să se determine formulele de calcul ale coordonatelor centrului de greutate al unui triunghi dat.
19. Fie  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului  $ABCD$  și  $M$  un punct arbitrar. Să se determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel ca  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \alpha\overrightarrow{MO}$ .
20. Fie  $ABC$  un triunghi. Să se arate că  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  dacă și numai dacă  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .
21. Să se scrie toate bazele drepte care conțin vectorii  $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}$ ,  $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j}$ .
22. Este adevărat că  $(u \times v) \times w = u \times (v \times w)$ ?
23. Care este lungimea proiecției vectorului  $\bar{a} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$  pe vectorul  $\bar{b} = 3\vec{i} - \vec{j}$ ?
24. \* Este produsul vectorial invariant la schimbarea bazei canonice cu altă bază ortonormată?
25. Fie  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in \mathbb{E}^3$ . Să se arate că  $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) = \begin{vmatrix} \bar{a} \cdot \bar{c} & \bar{a} \cdot \bar{d} \\ \bar{b} \cdot \bar{c} & \bar{b} \cdot \bar{d} \end{vmatrix}$ .
26. **Determinantul Gram** al vectorilor  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{E}^3$  este scalarul

$$d = \begin{vmatrix} \bar{a} \cdot \bar{a} & \bar{a} \cdot \bar{b} & \bar{a} \cdot \bar{c} \\ \bar{b} \cdot \bar{a} & \bar{b} \cdot \bar{b} & \bar{b} \cdot \bar{c} \\ \bar{c} \cdot \bar{a} & \bar{c} \cdot \bar{b} & \bar{c} \cdot \bar{c} \end{vmatrix}.$$

Arătați că:

- $d = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})^2$ ;
  - vectorii  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  sunt coplanari dacă și numai dacă determinantul lor Gram este nul.
27. Dacă  $\|\bar{a}\| = 2$ ,  $\|\bar{b}\| = 3$  și unghiul dintre  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$  are măsura  $\frac{\pi}{3}$  calculați  $\|\bar{a} - 2\bar{b}\|$ .

28. Pentru ce valori ale lui  $\alpha$  aria paralelogramului determinat de vectorii  $\vec{a} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$  și  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$  este 1?
29. Determinați aria paralelogramului determinat de vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  și volumul paralelipipedului determinat de vectorii  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$ , unde  $\vec{a} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  și  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .
30. Calculați cosinusurile directoare ale vectorilor  $\vec{a} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  și  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .
31. Vectorii  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  sunt ortogonali doi câte doi, iar  $\vec{d} = 5\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{c}$ .
- (a) Dacă  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  sunt versori calculați norma vectorului  $\vec{d}$ .
- (b) Dacă  $\|\vec{a}\| = 2$ ,  $\|\vec{b}\| = 3$  și  $\|\vec{c}\| = 4$  calculați norma vectorului  $\vec{d}$ .
32. Versorii  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  sunt ortogonali doi câte doi, iar  $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ . Dovediți că  $\alpha = \vec{a} \cdot \vec{d}$ ,  $\beta = \vec{b} \cdot \vec{d}$  și  $\gamma = \vec{c} \cdot \vec{d}$  și stabiliți legătura cu exprimarea Fourier a unui vector.
33. Scrieți vectorul  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$  ca suma dintre un vector paralel cu  $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$  și unul perpendicular pe  $\vec{b}$ .
- (Examen, Ingineria sistemelor, 2014)
34. Fie  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{E}^3$  trei vectori necoplanari  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{b} + \vec{c}$ ,  $\vec{w} = \vec{c} + \vec{a}$  astfel încât  $\|\vec{u}\| = 2$ ,  $\|\vec{v}\| = 1$ ,  $\|\vec{w}\| = 3$ ,  $m(\widehat{\vec{v}}, \vec{w}) = \frac{\pi}{6}$ ,  $m(\widehat{\vec{u}}, \vec{v} \times \vec{w}) = \frac{\pi}{3}$ .
- (a) Să se afle volumul paralelipipedului construit pe suporturile cu origine comună ale vectorilor  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .
- (b) Se consideră  $T : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  un endomorfism astfel încât  $T(\vec{a}) = \vec{v}$ ,  $T(\vec{b}) = \vec{w}$ ,  $T(\vec{c}) = \vec{u}$ . Să se calculeze  $T^{2014}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ .
- (Concurs „Traian Lalescu”, profil neelectric, etapa finală, Timișoara, 2014)

## 9 PLANUL ȘI DREAPTA

Majoritatea tehnicilor de proiectare apelează la geometria analitică. În acest capitol tratăm câteva probleme privind dreapta și planul în spațiul  $\mathbb{E}^3$ .

O problemă de actualitate în care este folosită masiv geometria analitică este grafica pe calculator.

### A. TEORIE

#### 9.1. Planul

În cele ce urmează  $\mathcal{R}_c = (O, \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\})$  este reperul canonic din  $\mathbb{E}^3$ , iar  $Ox, Oy, Oz$  sunt axele ortogonale asociate.

1. **Normala la plan.** Un vector  $\bar{N}$  nenul din  $\mathbb{E}^3$  se numește **normală** la planul  $\pi$  dacă  $\bar{N} \perp \overline{PQ}$ , pentru orice două puncte distincte  $P, Q \in \pi$ . În acest caz vom mai spune că vectorul liber  $\bar{N}$  este un **vector normal** la planul  $\pi$  sau că  $\bar{N}$  este o **normală** (ori, prin abuz de limbaj,  $\bar{N}$  este **normala**) la planul  $\pi$ .
2. **Planul determinat de un punct și de normala sa.** Fie  $M_0(a, b, c)$  un punct fixat și  $\bar{N} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$  un vector nenul fixat. Planul ce trece prin  $M_0$  și are normala  $\bar{N}$  este locul geometric al punctelor  $M(x, y, z)$  din spațiu pentru care  $\bar{N} \cdot \overline{M_0M} = 0$  și are ecuația

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0.$$

Dacă  $\pi$  este planul care are ecuația  $A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$  convenim să scriem

$$\pi : A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$$

și să spunem, prin abuz de limbaj, că  $A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$  este normala sa.

**Exemplul 9.1.1.** Să determinăm ecuația planului  $\pi$  care este paralel cu planul

$$\alpha : 2x - 3y + z - 5 = 0$$

și care trece prin punctul  $M(1, 1, 1)$ . Remarcăm că  $\bar{N} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$  este o normală la planul  $\alpha$ , deci și la planul  $\pi$ . Prin urmare ecuația planului  $\pi$  este  $2(x - 1) - 3(y - 1) + 1(z - 1) = 0$ , deci

$$\pi : 2x - 3y + z = 0.$$

3. **Ecuatia generală a planului.** *Ecuatia*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$  se numește **ecuația generală a planului**; coeficienții  $A, B, C$  reprezintă tocmai coordonatele unei normale la acest plan.

**Exemplul 9.1.2.** Să determinăm  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât punctele  $M_1(\alpha, 0, 3)$ ,  $M_2(1, 3, -1)$ ,  $M_3(0, 3, \alpha)$ ,  $M_4(1, 1, 1)$  să fie coplanare. Pentru aceasta considerăm planul  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$  care conține cele patru puncte. Atunci sistemul

$$\begin{cases} \alpha A + 3C + D = 0 \\ A + 3B - C + D = 0 \\ 3B + \alpha C + D = 0 \\ A + B + C + D = 0 \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil nedeterminat (deoarece  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ ). Impunând tipul de compatibilitate rezultă imediat că  $\alpha = 0$ . Remarcăm și faptul că ecuația planului celor patru puncte este  $x + y + z - 3 = 0$ .

4. **Plane de coordonate.** *Planele*

$xOy : z = 0$  (care are normala  $\bar{k}$  și trece prin origine),

$yOz : x = 0$  și

$zOx : y = 0$

se numesc **plane de coordonate**.

5. **Ecuatia planului prin tăieturi.** *Ecuatia planului care taie axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  în punctele  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$ , respectiv în  $(0, 0, c)$ , cu  $abc \neq 0$  este*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

6. **Ecuatia planului care trece prin punctele necoliniare  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  este:**

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

7. **Planul determinat de un punct și două direcții.** *Planul ce trece prin punctul  $M_0(a, b, c)$  și este paralel cu vectorii nenuli și necoliniari  $\vec{l} + m\vec{j} + n\vec{k}$  și  $l'\vec{i} + m'\vec{j} + n'\vec{k}$  are ecuația*

$$\begin{vmatrix} x - a & y - b & z - c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0.$$

8. **Unghiul diedru** dintre planele  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$  și  $\pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0$  are măsura unghiului dintre normalele lor i.e.

$$\arccos \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

9. **Distanța de la punctul**  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  **la planul**  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$  este, prin definiție *minimul distanțelor de la punctul*  $M_0$  *la punctul arbitrar*  $M \in \pi$  și se poate calcula prin formula

$$d(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Distanța dintre planele**  $\pi$  **și**  $\alpha$  este, prin definiție, minimul distanțelor dintre punctele arbitrare  $M \in \pi$  și  $P \in \alpha$ .

**Exemplul 9.1.3.** Fie planele  $\alpha : 2x - 3y + z - 5 = 0$  și  $\pi : 3x - y - z + 2 = 0$  și punctul  $M_0(1, 0, 0)$ .

1. Să se determine punctul  $M$  aflat la intersecția dintre planele  $xOy$ ,  $\alpha$  și  $\pi$ .
2. Să se determine distanța  $d(M_0, \pi)$  de la  $M_0$  la  $\pi$ .
3. Să se determine măsura unghiului diedru dintre cele două plane.
4. Să se determine planul  $\beta$  care este perpendicular pe planele date și trece prin  $M_0$ .
5. Să se determine distanța dintre planele date.

*Soluție.* 1. Să determinăm coordonatele  $x, y, z$  ale lui  $M$ . Cum  $M \in xOy \cap \pi \cap \alpha$  rezultă că  $(x, y, z)$  verifică sistemul

$$\begin{cases} z = 0 \\ 3x - y - z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + z - 5 = 0 \end{cases}.$$

Obținem  $M\left(-\frac{11}{7}, -\frac{19}{7}, 0\right)$ .

2. Avem  $d(M_0, \pi) = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{11}}.$

3. Normala la planul  $\pi$  este  $\overline{N_\pi} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ , iar  $\overline{N_\alpha} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  este normală la planul  $\alpha$ . Prin urmare măsura unghiului diedru este

$$\arccos \frac{6 + 3 - 1}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14}} = \arccos 4\sqrt{\frac{2}{77}}.$$

4. O normală la planul  $\beta$  este

$$\overline{N}_\beta := \overline{N}_\alpha \times \overline{N}_\pi = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 5\bar{j} + 7\bar{k}.$$

Prin urmare ecuația planului căutat este  $4(x-1) + 5y + 7z = 0$ , deci

$$\beta : 4x + 5y + 7z - 4 = 0.$$

5. Deoarece planele date nu sunt paralele rezultă că distanța dintre ele este nulă.

**Exemplul 9.1.4.** Să determinăm distanța dintre planele  $\alpha : x + y + z = 1$  și  $\beta : 2x + 2y + 2z = 1$ .

Deoarece o normală la cele două plane este  $\overline{N} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$  și  $\alpha \neq \beta$  rezultă că planele sunt paralele. Să luăm un punct din planul  $\alpha$ . Atunci distanța dintre cele două plane este chiar distanța dintre punctul ales și planul  $\beta$ . Prin urmare luând  $P(1, 0, 0) \in \alpha$  obținem

$$d(\alpha, \beta) = d(P, \beta) = \frac{|2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

## 9.2. Dreapta în $\mathbb{E}^3$

1. **Dreapta  $d$  ce trece prin punctul  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  și are direcția  $\bar{d} = \bar{l}i + \bar{m}j + \bar{n}k \neq \bar{0}$  este locul geometric al punctelor  $M(x, y, z)$  pentru care vectorul  $\overline{M_0M}$  este coliniar cu vectorul  $\bar{d}$ , adică**

$$d = \{M \mid \overline{M_0M} = t\bar{d}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Vom spune că  $\bar{d} = \bar{l}i + \bar{m}j + \bar{n}k$  este **vector director** pentru dreapta  $d$ ; coeficienții  $l, m, n$  se numesc **parametri directori** ai dreptei  $d$ ; prin abuz de limbaj spunem uneori că  $l, m, n$  sunt **parametrii directori** ai dreptei  $d$ . Deoarece  $\overline{M_0M} = (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j} + (z - z_0)\bar{k} = t\bar{d}$  dacă și numai dacă

$$x - x_0 = lt, \quad y - y_0 = mt, \quad z - z_0 = nt,$$

de aici obținem imediat **ecuațiile parametrice ale dreptei  $d$  care trece prin punctul  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  și are direcția  $\bar{d} = \bar{l}i + \bar{m}j + \bar{n}k$ :**

$$d : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Exemplul 9.2.1.** Fie dreapta

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Să determinăm dreapta  $d'$  paralelă cu  $d$  care trece prin origine.

Deoarece  $d \parallel d'$  rezultă că un vector director pentru cele două drepte este  $\vec{d} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ . Cum  $O(0, 0, 0) \in d'$  rezultă că ecuațiile parametrice ale dreptei  $d'$  sunt

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. **Ecuațiile carteziane ale dreptei  $d$  care trece punctul  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  și are direcția  $\vec{d} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$  sunt**

$$d: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

3. **Dreapta care trece prin punctele  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  și  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  ( $M_0 \neq M_1$ ) are ecuația**

$$d: \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

4. **Ecuația generală a unei drepte determinată de două plane (neparalele) este**

$$d: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

unde  $A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \neq t(A'\vec{i} + B'\vec{j} + C'\vec{k})$ , oricare ar fi  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exemplul 9.2.2.** Axa  $Oz$  este intersecția planelor  $yOz$  (de ecuație  $x = 0$ ) și  $zOx$  (de ecuație  $y = 0$ ). Prin urmare **ecuațiile axelor de coordonate** sunt

$$Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad Ox: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad Oy: \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

**Exemplul 9.2.3.** Să determinăm un plan  $\pi$  care trece prin origine și este perpendicular pe dreapta

$$d: \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 3. \end{cases}$$

Deoarece  $d \perp \pi$ , un vector director al dreptei  $d$  este normală la planul  $\pi$ . Pe de altă parte planul de ecuație  $x - y + 2z = 0$  admite normala  $\vec{d}_1 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ , planul de ecuație  $2x + y - z = 3$  admite normala  $\vec{d}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ , iar  $\vec{d} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = -\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} \perp \pi$ . Prin urmare ecuația planului  $\pi$  este  $-x + 5y + 3z = 0$ .

5. **Ecuația fascicolului de plane care trec prin dreapta**

$$d: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{cases}$$

este

$$\pi_{\alpha,\beta} : \alpha (Ax + By + Cz + D) + \beta (A'x + B'y + C'z + D') = 0,$$

unde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

6. **Perpendiculara comună a două drepte.** Fie dreptele necoplanare  $d_1$  și  $d_2$  care trec prin  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , respectiv prin  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  de vectori directori  $\overline{d_1} = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$ , respectiv  $\overline{d_2} = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$  și produsul vectorial  $\overline{d_1} \times \overline{d_2} = \vec{l} + m\vec{j} + n\vec{k}$ . Ecuațiile **dreptei perpendiculare** pe dreptele  $d_1$  și  $d_2$  sunt:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

7. **Distanța dintre dreptele**  $d_1$  și  $d_2$  este, prin definiție, minimul distanțelor dintre punctele arbitrare  $P_1 \in d_1$  și  $P_2 \in d_2$  și se poate calcula cu ajutorul formulei

$$d(d_1, d_2) = \frac{|(\overline{M_1 M_2}, \overline{d_1}, \overline{d_2})|}{\|\overline{d_1} \times \overline{d_2}\|},$$

unde  $M_1, M_2, \overline{d_1}, \overline{d_2}$  au semnificațiile de la punctul 6.

**Exemplul 9.2.4.** Fie dreapta  $d : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$  și planul  $\pi : -x + y - z = 3$ .

Să se arate că dreapta dată este paralelă cu planul  $\pi$ , apoi să se determine cea mai apropiată dreaptă  $d'$  din planul  $\pi$  care este paralelă cu dreapta  $d$ .

*Rezolvare.* Deoarece dreapta  $d$  este inclusă în planul  $\alpha : x - y + z = 1$  și  $\alpha$  este paralel cu  $\pi$  rezultă că  $d \parallel \pi$ . Dreapta  $d'$  este chiar proiecția dreptei  $d$  pe planul  $\pi$ . O metodă de determinare a acestei proiecții este următoarea: din fascicolul de plane care trec prin  $d$  alegem planul perpendicular pe planul  $\pi$ ; intersecția acestuia cu  $\pi$  este dreapta căutată. Fie deci

$$a(x + y + z - 3) + b(x - y + z - 1) = 0$$

fascicolul de plane ce trec prin  $d$ . Normala  $(a + b)\vec{i} + (a - b)\vec{j} + (a + b)\vec{k}$  a unui plan din fascicol trebuie să fie ortogonală pe normala  $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  a planului  $\pi$ , deci  $(a + b) - (a - b) + (a + b) = 0$ , ori  $a = -3b$ . În consecință dreapta căutată este

$$d' : \begin{cases} -x + y - z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}.$$

Verificați corectitudinea rezultatului rezolvând problema prin altă metodă.

8. **Volumul tetraedrului**  $M_1 M_2 M_3 M_4$  este modulul numărului

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$



unde  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  sunt vârfurile acestuia.

**Exemplul 9.2.5.** Să determinăm distanța  $d(P, Oz)$ , unde  $P$  este punctul de coordonate  $(1, 2, 3)$ . Deoarece  $d(P, Oz) = d(P, P')$ , unde  $P'$  este proiecția punctului  $P$  pe axa  $Oz$ , o metodă de determinare a distanței căutate este următoarea:

- scriem ecuația planului  $\pi$  perpendicular pe  $Oz$  care trece prin  $P$ : cum  $\vec{k}$  este normală la acest plan obținem imediat că

$$\pi : z - 3 = 0;$$

- deoarece proiecția  $P' \in \pi \cap Oz$  obținem  $P'(0, 0, 3)$ ;
- distanța căutată este  $d(P, Oz) = d(P, P') = \sqrt{1 + 4 + 0} = \sqrt{5}$ .

Verificați rezultatul rezolvând problema prin altă metodă (de exemplu folosind proiecția punctului  $P$  în planul  $xOy$ ).

**Exemplul 9.2.6.** Să determinăm ecuația planului  $\pi$  care trece prin punctul  $P(1, 2, 3)$  și prin dreapta

$$d : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}.$$

Din fascicolul de plane care trec prin dreapta dată îl vom alege pe acela care conține punctul  $P$ . Fascicolul căutat este

$$\pi_{\alpha, \beta} : \alpha(x - y) + \beta(x + z - 1) = 0.$$

Cum  $P(1, 2, 3) \in \pi_{\alpha, \beta}$  avem  $-\alpha + 3\beta = 0$ . Planul care trece prin  $P$  și  $d$  are, așadar, ecuația  $3(x - y) + (x + z - 1) = 0$ , ori

$$\pi : 4x - 3y + z = 1.$$

## B. PROBLEME REZOLVATE

1. Fie  $\alpha : x + 2y - z + 1 = 0$ . Să se verifice dacă  $A \in \alpha$ , unde  $A(-1, 2, 2)$  și în caz contrar să se scrie ecuația unui plan  $\alpha' \parallel \alpha$  cu  $A \in \alpha'$

*Rezolvare.*

Verificăm dacă coordonatele lui  $A$  satisfac ecuația planului. Avem  $x_A + 2y_A - z_A + 1 = 2 \neq 0$ , deci  $A \notin \alpha$ .

Pentru că  $\alpha' \parallel \alpha$ , putem alege pentru  $\alpha'$  același vector normal ca cel al planului  $\alpha$ , adică  $\overline{N}_\alpha = (1, 2, -1)$ . Deci  $\alpha'$  este planul determinat de punctul  $A$  și vectorul normal  $\overline{N}_\alpha$ , astfel

$$\alpha' : 1(x + 1) + 2(y - 2) - 1(z - 2) = 0$$

sau echivalent,  $\alpha' : x + 2y - z - 1 = 0$ .

2. Să se verifice dacă planul  $\alpha_1 : -2x - 4y + 2z + 3 = 0$  este paralel cu planul  $\alpha$  din problema precedentă.

*Rezolvare.*

$\alpha \parallel \alpha_1$  dacă și numai dacă  $\overline{N}_\alpha$  și  $\overline{N}_{\alpha_1}$  sunt vectori coliniari, adică  $\overline{N}_\alpha = \lambda \overline{N}_{\alpha_1}$  ceea ce e echivalent cu faptul că cei doi vectori au coordonate proporționale.

Verificăm acest lucru:  $\frac{-2}{1} = \frac{-4}{2} = \frac{2}{-1}$  e adevărat, deci  $\alpha \parallel \alpha_1$ .

3. Să se verifice dacă  $\alpha_1 \perp \alpha_2$ , unde

$$\alpha_1 : x + y + z - 1 = 0; \quad \alpha_2 : 2x - 4y + 2z - 2 = 0.$$

*Rezolvare.*

Cele două plane au normalele  $\overline{N}_{\alpha_1} = (1, 1, 1)$  și  $\overline{N}_{\alpha_2} = (2, -4, 2)$ . Calculăm produsul scalar  $\overline{N}_{\alpha_1} \cdot \overline{N}_{\alpha_2} = 2 - 4 + 2 = 0$  și vedem că normalele sunt vectori ortogonali, deci planele sunt perpendiculare.

4. Să se scrie ecuația planului  $(ABC)$  cu  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(1, 2, 3)$  și  $C(2, 1, 1)$ .

*Rezolvare.*

Planul  $(ABC)$  este determinat de punctul  $A$  și vectorii directori

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (1 - 1, 2 - 2, 3 + 1) = (0, 0, 4)$$

și

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (1, -1, 2)$$

Atunci

$$(ABC) : \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

adică  $(ABC) : x + y - 3 = 0$ .

5. Fie  $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{0}$ ,  $A(1, 2, -1)$  și planul  $\alpha : 2x + y - z + 1 = 0$ .

Să se scrie ecuațiile unei drepte  $d_1 \parallel d$  cu  $A \in d_1$  precum și ale unei drepte  $d_2$  cu  $d_2 \perp \alpha$ ,  $A \in d_2$ .

*Rezolvare.*

$d_1 \parallel d$ , deci putem alege ca vector director al dreptei  $d_1$  același vector director ca cel al dreptei  $d$ , adică  $\bar{v} = (1, 1, 0)$ . Astfel  $d_1$  e dreapta determinată de punctul  $A$  și vectorul director  $\bar{v}$ , deci

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{0}.$$

Avem  $d_2 \perp \alpha$  deci putem alege ca vector director al dreptei  $d_2$ , vectorul  $\bar{N}_\alpha = (2, 1, -1)$  normal la planul  $\alpha$ . Astfel  $d_2$  e dreapta determinată de punctul  $A$  și vectorul director  $\bar{N}_\alpha$ , deci

$$d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

6. Fie  $A(1, 2, 3)$  și  $B(-1, 1, 2)$ . Să se scrie ecuațiile dreptei  $AB$ .

*Rezolvare.*

$AB$  este dreapta determinată de punctul  $A$  și de vectorul director  $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (-2, -1, -1)$ . Deci

$$AB : \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}.$$

7. Să se scrie ecuația unui plan  $\alpha$ , cu  $\alpha \parallel d_1$ ,  $\alpha \parallel d_2$  și  $A \in \alpha$ , unde  $A(1, 2, 3)$

$$d_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}, \quad d_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+1}{-1}$$

*Rezolvare.*

$\alpha \parallel d_1$  deci  $\bar{N}_\alpha$  va fi un vector ortogonal pe vectorul director  $\bar{u} = (2, 1, 3)$  al dreptei  $d_1$ . Analog  $\alpha \parallel d_2$  deci  $\bar{N}_\alpha$  va fi un vector ortogonal pe vectorul director  $\bar{v} = (1, -2, -1)$  al dreptei  $d_2$ . Așadar  $\bar{N}_\alpha$  este un vector simultan ortogonal pe  $\bar{u}$  și pe  $\bar{v}$ . Putem alege

$$\bar{N}_\alpha = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5\bar{i} + 5\bar{j} - 5\bar{k}$$

Astfel,  $\alpha$  este planul determinat de punctul  $A$  și de vectorul normal  $\bar{N}_\alpha = (5, 5, -5)$ . Deci

$$\alpha : 5(x-1) + 5(y-2) - 5(z-3) = 0$$

sau  $\alpha : x + y - z = 0$ . Alternativ, se putea scrie ecuația planului  $\alpha$  ca fiind determinat de punctul  $A$  și vectorii directori  $\bar{u}$  și  $\bar{v}$ .

8. Fie  $\alpha_1 : x + y - 2z - 1 = 0$ ,  $\alpha_2 : 2x + y + z - 2 = 0$  și  $A(1, 2, -1)$ . Să se scrie ecuațiile unei drepte  $d$ , cu  $A \in d$ ,  $d \parallel \alpha_1$ ,  $d \parallel \alpha_2$ .

*Rezolvare.*

METODA I:

Fie  $\bar{u}$  vectorul director al dreptei  $d$ . Pentru că  $d \parallel \alpha_1$  avem că  $\bar{u} \cdot \bar{N}_{\alpha_1} = 0$  și pentru că  $d \parallel \alpha_2$  avem că  $\bar{u} \cdot \bar{N}_{\alpha_2} = 0$ , deci  $\bar{u}$  este un vector simultan ortogonal pe  $\bar{N}_{\alpha_1}$  și pe  $\bar{N}_{\alpha_2}$ . Putem alege

$$\bar{u} = \bar{N}_{\alpha_1} \times \bar{N}_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\bar{i} - 5\bar{j} - \bar{k}.$$

Astfel,  $d$  e dreapta determinată de punctul  $A$  și de vectorul director  $\bar{u} = (3, -5, -1)$  și în final găsim

$$d : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{-1}.$$

METODA II:

Fie  $d'$  dreapta de intersecție a celor două plane,  $d' = \alpha_1 \cap \alpha_2$ , deci

$$d' : \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Rangul sistemului e 2 și notăm  $z = t$ , necunoscută secundară. Sistemul devine

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2t \\ 2x + y = 2 - t \end{cases}$$

de unde  $x = 1 - 3t$  și  $y = 5t$ . Am găsit astfel că ecuațiile parametrice ale dreptei  $d'$  sunt

$$d' : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases}$$

și  $d'$  are direcția dată de vectorul  $\bar{u} = (-3, 5, 1)$ . Dar  $d \parallel \alpha_1$ ,  $d \parallel \alpha_2$ , deci  $d \parallel d'$  și putem alege pentru  $d$  același vector director  $u$ . Astfel

$$d : \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+1}{1}$$

9. Să se determine proiecția dreptei  $AB$  pe planul  $\alpha : 2x + y - z + 1 = 0$ , unde  $A(1, 2, 3)$  și  $B(2, 1, -1)$ .

*Rezolvare.*

O dreaptă e determinată de două puncte. În particular, proiecția dreptei  $AB$  pe planul  $\alpha$  va fi determinată de proiecțiile  $A'$ ,  $B'$  ale punctelor  $A$  și respectiv  $B$  pe planul  $\alpha$ .

Proiecția  $A'$  a lui  $A$  pe  $\alpha$  este punctul de intersecție dintre  $\alpha$  și dreapta  $d_1$  ce conține punctul  $A$  și  $d_1 \perp \alpha$ . Dreapta va avea direcția dată de  $\overline{N}_\alpha = (2, 1, -1)$  și va avea ecuațiile parametrice:

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Punctul  $A'$  este obținut pentru acel  $t$  pentru care  $x, y, z$  din ecuațiile dreptei satisfac ecuația planului, adică pentru  $2(1+2t) + (2+t) - (3-t) + 1 = 0$ , mai precis pentru  $t = -1/3$ . Înlocuind în ecuațiile dreptei  $d_1$ , găsim  $A'(1/3, 5/3, 10/3)$ .

Analog, construim o dreaptă  $d_2$  cu  $B \in d_2$  și  $d_2 \perp \alpha$ . Astfel,  $\{B'\} = d_2 \cap \alpha$ . Repetând raționamentul de mai sus, găsim

$$d_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

și vom avea că punctul  $B'$  e obținut pentru  $t = -7/6$ , deci  $B'(-1/3, -1/6, 1/6)$ .

Dreapta  $A'B'$  e determinată de punctul  $A'$  și de vectorul director  $\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = (-2/3, -11/6, -19/6)$ , deci

$$A'B' : \frac{x - 1/3}{-2/3} = \frac{y - 5/3}{-11/6} = \frac{z - 10/3}{-19/6}.$$

10. Să se determine simetricul punctului  $A$  față de planul  $\alpha$ , unde  $A$  și  $\alpha$  sunt cele din problema precedentă.

*Rezolvare.*

Dacă notăm cu  $A''$  simetricul lui  $A$  în raport cu planul  $\alpha$ , avem că proiecția  $A'$  a lui  $A$  pe planul  $\alpha$  este mijlocul segmentului  $[AA'']$ , deci  $A' = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A''$ , adică

$$x_{A'} = \frac{x_A + x_{A''}}{2} \Rightarrow x_{A''} = 2x_{A'} - x_A = 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

apoi

$$y_{A'} = \frac{y_A + y_{A''}}{2} \Rightarrow y_{A''} = 2y_{A'} - y_A = 2 \cdot \frac{5}{3} - 2 = \frac{4}{3}$$

și

$$z_{A'} = \frac{z_A + z_{A''}}{2} \Rightarrow z_{A''} = 2z_{A'} - z_A = 2 \cdot \frac{10}{3} - 3 = \frac{11}{3}.$$

11. Să se determine proiecția punctului  $A(1, 2, 3)$  pe dreapta

$$d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1},$$

apoi să se calculeze distanța de la punct la dreaptă.

*Rezolvare.*

Fie  $\alpha$  planul  $\alpha \perp d$ ,  $A \in \alpha$ . Atunci, punctul  $A' = \alpha \cap d$  va fi proiecția lui  $A$  pe  $d$ . Planul  $\alpha$  este determinat de punctul  $A$  și de vectorul normal  $\vec{N}_\alpha = (2, 1, -1)$  care e vectorul director al drepte  $d$ . Găsim  $\alpha : 2x + y - z - 1 = 0$ . Scriem ecuațiile drepte  $d$  în formă parametrică:

$$d : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

și punctul  $A'$  se obține pentru acel  $t$  ce satisface  $2(-1+2t) + t - (-2-t) - 1 = 0$ , deci pentru  $t = 1/6$ . Astfel  $A'(-2/3, 1/6, -13/6)$ .

$$\text{Distanța } d(A, d) = \|\overline{AA'}\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - 2\right)^2 + \left(-\frac{13}{6} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{591}{18}}.$$

12. Fie  $d_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ ,  $d_2 : \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  și  $A(1, 2, 3)$ . Să se scrie ecuația unei drepte  $d$  astfel încât  $A \in d$  și  $d$  intersectează dreptele  $d_1$  și  $d_2$ .

*Rezolvare.*

Fie  $\alpha_1$  planul ce conține dreapta  $d_1$  și punctul  $A$ . Avem că  $A_1(-1, 0, 0)$  e un punct de pe dreapta  $d_1$ , care are direcția dată de  $u_1 = (1, -2, 1)$ . Atunci  $\alpha_1$  e determinat de punctul  $A_1$  și de vectorii directori liniar independenți  $u_1$  și  $\overline{A_1A} = \overline{OA} - \overline{OA_1} = (2, 2, 3)$ . Deci

$$\alpha_1 : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha_1 : -8x - y + 6z - 8 = 0.$$

Analog, fie  $\alpha_2$  planul ce conține dreapta  $d_2$  și punctul  $A$ . Avem că  $A_2(-2, 0, 0)$  este un punct de pe dreapta  $d_2$ , care are direcția dată de  $u_2 = (-1, 2, 3)$ . Atunci  $\alpha_2$  e determinat de punctul  $A_2$  și de vectorii directori liniar independenți  $u_2$  și  $\overline{A_2A} = \overline{OA} - \overline{OA_2} = (3, 2, 3)$ . Deci

$$\alpha_2 : \begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha_2 : 3y - 2z = 0.$$

Dar pentru că  $d_1 \subset \alpha_1$  și  $A \in \alpha_1$ , vom avea că  $d \subset \alpha_1$ , iar cum  $d_2 \subset \alpha_2$  și  $A \in \alpha_2$ , rezultă că  $d \subset \alpha_2$ . Deci  $d \subset \alpha_1 \cap \alpha_2$ , dar cum intersecția a două plane distincte nu poate fi mai mult decât o dreaptă, rezultă că:

$$d : \begin{cases} -8x - y + 6z - 8 = 0 \\ 3y - 2z = 0. \end{cases}$$

13. Să se scrie ecuațiile perpendicularei comune a dreptelor  $d_1$  și  $d_2$  de la problema precedentă.

*Rezolvare.*

Dacă  $d_1$  conține punctul  $A_1(-1, 0, 0)$  și are direcția dată de  $u_1 = (1, -2, 1)$  iar  $d_2$  conține punctul  $A_2(-2, 0, 0)$  și are direcția dată de  $u_2 = (-1, 2, 3)$ , atunci perpendiculara comună  $d$  va avea direcția dată de vectorul

$$w = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8\bar{i} - 4\bar{j}$$

și intersectează cele două drepte date.

În particular,  $d$  e conținută în planul  $\alpha_1$  determinat de punctul  $A_1$  și de vectorii directori  $u_1$  și  $w$ . Avem

$$\alpha_1 : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha_1 : x - 2y - 5z + 1 = 0.$$

Analog,  $d$  e conținută în planul  $\alpha_2$  determinat de punctul  $A_2$  și de vectorii directori  $u_2$  și  $w$  și avem

$$\alpha_2 : \begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ -1 & 2 & 3 \\ -8 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha_2 : 3x - 6y + 5z + 6 = 0.$$

Deci  $d = \alpha_1 \cap \alpha_2$ , adică

$$d : \begin{cases} x - 2y - 5z + 1 = 0 \\ 3x - 6y + 5z + 6 = 0. \end{cases}$$

Alternativ, se puteau folosi direct formulele corespunzătoare.

14. Să se scrie ecuațiile unei drepte  $d$  cu  $A(1, 2, 3) \in d$  și  $d$  taie dreptele  $d_1, d_2$ , unde

$$d_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \text{ și } d_2 : \begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ x + y + 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

*Rezolvare.*

Evident, se poate rezolva ca și problema 12. Dar cum ecuațiile dreptelor  $d_1, d_2$  sunt scrise ca intersecție de plane, ne e mai ușor să folosim fascicole.

Fie

$$\pi_{a,b} : a(x + 2y + z - 1) + b(2x + y + 2z - 4) = 0 \quad (1)$$

fascicolul de plane ce conțin dreapta  $d_1$ . Vrem să determinăm acel plan din fascicol care conține punctul  $A$ . Observăm că pentru  $b = 0$ , planul  $\pi_{a,0} : x + 2y + z - 1 = 0$  nu conține punctul  $A$ , deci planul pe care îl căutăm are  $b \neq 0$ . Împărțind ecuația (1) cu  $b$  și notând  $c = b/a$ , ecuația fascicolului devine  $c(x + 2y + z - 1) + (2x + y + 2z - 4) = 0$ , adică  $(c + 2)x + (2c + 1)y + (c + 2)z -$

$(c + 4) = 0$ .  $\alpha_1$ , planul din fascicol care conține punctul  $A$  este cel pentru care  $(c + 2) + 2(2c + 1) + 3(c + 2) - (c + 4) = 0$ , adică cel cu  $c = -6/7$ . Rezultă că

$$\alpha_1 : 8x - 5y + 8z - 22 = 0.$$

Repetăm raționamentul pentru fascicolul de plane ce conține dreapta  $d_2$  și găsim că planul ce conține dreapta  $d_2$  și punctul  $A$  este  $\alpha_2 : 3x + 3y - 13z + 30 = 0$ . Dar  $d = d_1 \cap d_2$ , deci

$$\begin{cases} 8x - 5y + 8z - 22 = 0 \\ 3x + 3y - 13z + 30 = 0. \end{cases}$$



## C. PROBLEME PROPUSE

1. Găsiți planul care trece prin  $P(-3, 0, 7)$  și este perpendicular pe  $\overline{N} = 5\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ .

*Răspuns.*  $5x + 2y - z + 22 = 0$ .

2. Determinați un set de ecuații parametrice ale dreptei ce trece prin punctul  $P(-2, 0, 4)$  și este paralelă cu  $\overline{a} = 2\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$ .

*Răspuns.* E.g.  $x = -2 + t, y = 2t, z = 4 - t$ .

3. Arătați că  $x = -3 + 4t, y = 2 - 3t, z = -3 + 7t$  sunt ecuații parametrice ale dreptei care trece prin  $P(-7, 5, -10)$  și  $Q(1, -1, 4)$ .

4. Determinați punctul în care dreapta  $x = \frac{8}{3} + 2t, y = -2t, z = 1 + t$  intersectează planul  $3x + 2y + 6z = 6$ .

*Răspuns.*  $\left(\frac{2}{3}, 2, 0\right)$ .

5. Se dau planele de ecuații:  $3x - 2y + z = 0$  și  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Să se determine constantele  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  astfel încât planele date să fie paralele, iar punctul  $M(1, 1, 1)$  să se găsească într-unul dintre ele.

*Răspuns.*  $A = 3, B = D = -2, C = 1$ .

6. Calculați distanța de la punctul  $P(1, 1, 3)$  la planul  $3x + 2y + 6z = 6$ .

*Răspuns.*  $\frac{17}{7}$ .

7. Arătați că măsura unghiului dintre planele de ecuații  $3x - 6y - 2z = 15$  și  $2x + y - 2z = 5$  este  $\arccos\left(\frac{4}{21}\right)$ .

8. Fie punctul  $P(1, -2, 2)$  și planul  $\pi: x + 2y + 2z + 5 = 0$ .

(a) Să se determine ecuația planului ce trece prin  $P$  și este paralel cu  $\pi$ .

(b) Să se calculeze distanța dintre cele două plane.

*Răspuns.* (a)  $\alpha: x + 2y + 2z = 1$ ; (b)  $d(\pi, \alpha) = 2$ .

9. Fie planele  $\alpha: x - y = 5$  și  $\beta: 2x - y + 2z = 0$ .

(a) Să se determine ecuația planului ce trece prin  $P(3, 4, -2)$  și este perpendicular pe cele două plane.

(b) Să se calculeze măsura unghiului diedru dintre planele  $\alpha$  și  $\beta$ .

*Răspuns.* (a)  $2x + 2y - z = 16$ ; (b)  $\frac{\pi}{4}$ .

10. Care este ecuația planului care trece prin mijlocul segmentului de capete  $P(2, 1, -3)$  și  $Q(0, -3, 3)$ , este paralel cu dreapta  $d: \frac{x-1}{2} = y-4 = \frac{z-1}{-3}$  și este perpendicular pe planul  $\pi: z = 5$ ?
- Răspuns.*  $x - 2y = 3$ .
11. Care este ecuația planului ce trece prin  $P(2, 1, -3)$  și este perpendicular pe vectorul  $\overrightarrow{OP}$ ?
- Răspuns.*  $2x + y - 3z = 14$ .
12. Determinați ecuații parametrice ale dreptei de intersecție a planelor  $3x - 6y - 2z = 15$  și  $2x + y - 2z = 5$ .
13. Calculați distanța de la punctul  $P$  la dreapta  $d$ , unde:
- (a)  $P(0, 0, 0)$ ,  $d: x = t, y = 2t, z = 3t$ ;  
 (b)  $P(1, 2, 3)$ ,  $d: x = t, y = 2t, z = 3t$ ;  
 (c)  $P(0, 0, 0)$ ,  $d: x = y = z - 3$ ;  
 (d)  $P(1, 2, 3)$ ,  $d: x + y - z - 3 = 0, x + 2y - z = 0$ .
- Răspunsuri.* (a) 0; (b) 0; (c)  $\sqrt{6}$ ; (d)  $\sqrt{57}$ .
14. Determinați distanța de la planul de ecuație  $x + 2y + 3z = 4$  la planul de ecuație  $2x + 4y + 6z = 13$ .
15. Determinați distanța de la planul de ecuație  $x + 2y + 6z = 10$  la dreapta de ecuații  $x = 2 + t, y = 1 + t, z = -\frac{1+t}{2}$ .
16. Să se determine care dintre cele trei drepte luate câte două sunt paralele, sunt concurente, sau oblice (i.e. nici concurente, nici paralele).
- (a)  $d_1: x = 3 + 2t, y = -1 + 4t, z = 2 - t$ ;  $d_2: x = 1 + 4s, y = 1 + 2s, z = -3 + 4s$ ;  $d_3: x = 3 + 2r, y = 2 + r, z = -2 + 2r$ .  
 (b)  $d_1: x = 1 + 2t, y = -1 - t, z = 3t$ ;  $d_2: x = 2 - s, y = 3s, z = 1 + s$ ;  $d_3: x = 5 + 2r, y = 1 - r, z = 8 + 3r$ .
17. Determinați punctele de intersecție ale dreptei  $d: x = 1 + 2t, y = -1 - t, z = 3t$  cu planele de coordonate.
18. Care sunt ecuațiile dreptei din planul  $z = 3$  care face un unghi de  $\frac{\pi}{6}$  radiani cu vectorul  $\vec{i}$  și un unghi de  $\frac{\pi}{3}$  radiani cu vectorul  $\vec{j}$ ?
19. Să se scrie ecuația planului care conține dreapta  $d: \frac{x-2}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$  și e paralel cu dreapta determinată de punctele  $P(0, 1, 1)$  și  $Q(-1, -2, -3)$ .
- Răspuns.*  $x + y - z = 1$ .

20. Să se scrie ecuația planului care conține dreapta  $d : 2x = y + z, y - z + 2 = 0$  și este perpendicular pe planul care trece prin punctele  $P(2, 0, 0)$ ,  $Q(0, -1, 0)$  și  $R(0, 0, -1)$ .  
*Răspuns.*  $y - z + 2 = 0$ .
21. Să se demonstreze că dreapta care trece prin simetricul punctului  $P(1, 1, 1)$  față de dreapta  $d : x - 2z + 4 = 0, y = z$  și este perpendiculară pe planul  $\pi : 2x + y + z = 4$  are ecuațiile  $y = z, 2x - y - z + 8 = 0$ .
22. Dreapta care trece prin proiecția punctului  $P(1, -1, 2)$  pe planul  $\pi : x + y + z = 5$  și este paralelă cu dreapta  $d : z = -3, x - y = 3$  are ecuațiile  $z = 3$  și  $x - y = 2$ ?
23. Dacă dreapta care se sprijină pe dreptele  $d_1 : x + y - z + 3 = 0, y + z = 5x + 9$ ,  $d_2 : y = 2x + 3, z = 3x + 5$  și este paralelă cu dreapta  $d : 2x - y + 2 = 0, 2x - z + 2 = 0$  are ecuațiile  $D : 2x - y + 3 = 0, y - z + 1 = 0$  să se afle distanța dintre punctele de intersecție dintre  $D$  și  $d_1$ , respectiv  $d_2$ .  
*Răspuns.* 3.
24. \* Justificați existența perpendicularei comune a două drepte disjuncte și neparalele.
25. \* Determinați perpendiculara comună a dreptelor  $d_1 : y - z = 7x - 7, y + z = x + 3$  și  $d_2 : y = -4x + 3, z = 3x - 5$  și distanța dintre ele.  
*Răspuns.*  $x = 1, 4y - 3z = 2; 5$ .
26. \* În *computer graphics* este nevoie să reprezentăm în plan obiectele din spațiu. Să presupunem că ochiul privitorului este în punctul  $Q(x_0, 0, 0)$  și vrem să reprezentăm punctul  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  ca un punct  $P(0, y, z)$  din planul  $yOz$ ; realizăm acest lucru proiectând  $P_1$  pe plan de-a lungul dreptei  $QP_1$ .
- (a) Determinați coordonatele punctului  $P$  în funcție de  $x_0, x_1, y_1, z_1$ .
- (b) Examinați comportarea coordonatelor găsite când  $x_1 = 0$ , când  $x_1 = x_0$  și când  $x_0 \rightarrow \infty$ .
27. \* O problemă în *computer graphics* este depistarea *liniilor ascunse*. Să presupunem că ochiul tău este în  $Q(4, 0, 0)$  și privești o placă triunghiulară de vârfuri  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$  și  $(-2, 2, 2)$ . Segmentul care unește  $(1, 0, 0)$  cu  $(0, 2, 2)$  trece prin placă. Ce porțiune din segment este ascunsă vederii tale de placă?
28. Să se determine proiecția punctului  $M(1, 2, 3)$  pe dreapta de ecuații  $x = y = z$ .  
(examen, Informatică, 2014)
29. Să se determine dreapta care trece prin simetricul punctului  $P(1, 1, -1)$  față de dreapta  $d : x = y = z$  și este perpendiculară pe planul  $z = 4$ .  
(examen, Ingineria sistemelor, 2014)

30. Să se determine ecuația planului ce trece prin  $P(1, -2, 0)$  și este paralel cu  $\pi : x + 2y + 2z + 5 = 0$ ; să se calculeze distanța dintre cele două plane.  
(examen, Informatică, 2014)
31. Să se determine planul care trece prin punctul  $P(1, 1, 1)$  și prin dreapta  $2x + y + z = 4$ ,  $x - y - 4 = 0$ .  
(examen, Ingineria sistemelor, 2014)
32. Fie  $\bar{a} = \bar{i} + \bar{k}$  și  $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j}$ . Determinați planul paralel cu  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$  ce trece prin  $P(1, -1, 1)$ .  
(examen, Ingineria sistemelor, 2014)
33. \* Se consideră dreapta  $d_1 : \frac{x-a}{1} = \frac{y+2}{b} = \frac{z-a+b}{3}$  și planele de ecuații  $(P_1) : x - 2y + z - 4 = 0$ ,  $(P_2) : x + 2y + 2z + 1 = 0$ ,  $(P_3) : x + 7y + 7z + m = 0$ , unde  $a, b, m \in \mathbb{R}$ .
- (a) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  știind că dreapta  $d_1$  este inclusă în planul  $(P_1)$ .
- (b) Să se găsească proiecția punctului  $A = (1, -2, 2)$  pe planul  $(P_2)$ .
- (c) Să se discute poziția relativă a celor trei plane în funcție de  $m$ .
- (concursul „Traian Lalescu”, profil neelectric, et. finală, Constanța, 2011)