Matematici speciale
(curs 4 - S4)

14.03.2024

Recapitulare

Fie v. a. $X = \#$ puncte de la aruncarea unui zar.
X are distribuția de probabilitate

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

- valorile lui X sunt $x_i \in D_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- X ia aceste valori cu prob $\frac{1}{6}$;
  $p_i = P(X = i) = \frac{1}{6}$;
- Avem $0 \leq p_i \leq 1$ și $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$;
- X are distribuție uniformă;
- Media varb X: $M(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = 3.5$
- Dispersia varb X: $\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{6}(i - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} = 2.91$

Funcția de repartiție $F_X(x) := P(X \leq x)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 1 \\ 1/6 & \text{pentru } 1 \leq x < 2 \\ 2/6 & \text{pentru } 2 \leq x < 3 \\ 3/6 & \text{pentru } 3 \leq x < 4 \\ 4/6 & \text{pentru } 4 \leq x < 5 \\ 5/6 & 5 \leq x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

! Dacă avem o distribuție X și dorim $Y = X^2$

$D_{X^2} = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$

$P(X^2 = 1) = \frac{1}{6}$ și tot așa (nu se ridică la pătrat)

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$P(X^2 = 1) = P(X = -1 \cup X = 1) =$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Regula celor 3σ

$$\begin{cases} [m - \sigma, m + \sigma] & 67\% \\ [m - 2\sigma, m + 2\sigma] & 95\% \\ [m - 3\sigma, m + 3\sigma] & 99\% \end{cases}$$

$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Vectori aleatori discreți

(X,Y) = vector aleator discret $\Rightarrow$ distribuția comună de probabilitate

$P_X = \{x_i\}_{i=\overline{1,m}}$ $\qquad (X,Y) = (x_i, y_j)$

$P_Y = \{y_i\}_{i=\overline{1,m}}$ $\qquad p_{ij} = P((X,Y) = (x_i, y_j))$

Definiție: O distribuție comună de probab. a vect. (X, Y) satisface:

- $0 \le p(x_i, y_j) \le 1$
- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) = 1$

Exemplu: probabilitatea unor evenimente de forma $P(D = Y - X \ge 2)$.
Un astfel de eveniment este descris de obținerea perechilor:

$$B = \{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,6)\}$$

					Y		
		1	2	3	4	5	6
	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
X	3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Avem $P(B) = 10/36$.

$p_{ij} = P((X,Y) = (x_i, y_j)) = P(X = x_i, Y = y_j)$

„,” = intersecție

obs: $X = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$

$$p_i = P(X = x_i) = P[(X = x_i, Y = y_1) \cup (X = x_i, Y = y_2) \cup \dots \cup (X = x_i, Y = y_m)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_j)$$

				Y				
		y_1	y_2	...	y_j	...	y_n	
	x_1	$\mathbf{p_{11}}$	$\mathbf{p_{12}}$	...	$\mathbf{p_{1j}}$	...	$\mathbf{p_{1n}}$	
	x_2	$\mathbf{p_{21}}$	$\mathbf{p_{22}}$	...	$\mathbf{p_{2j}}$	...	$\mathbf{p_{2n}}$	
X	$\vdots$							
	x_i	$\mathbf{p_{i1}}$	$\mathbf{p_{i2}}$	...	$\mathbf{p_{ij}}$	...	$\mathbf{p_{in}}$	$p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$
	$\vdots$							
	x_m	$\mathbf{p_{m1}}$	$\mathbf{p_{m2}}$	...	$\mathbf{p_{mj}}$	...	$\mathbf{p_{mn}}$	

Definiție

Funcția de repartiție a unui vector aleator este

$$F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

In cazul discret, $F_{(X,Y)}(x,y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p(x,y)$

De exemplu, $F(3.5, 4) = P(X \leq 3.5, Y \leq 4) = 12/36$

					Y		
		1	2	3	4	5	6
	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
X	3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

ex: pg 4/7 notițe curs

Exemplul 3. Un blogger realizează 0, 1 sau 2 postări, sâmbăta şi 0 sau 1 duminica. Notăm cu S, respectiv D variabilele aleatoare ce dau numărul de postări făcute sâmbăta, respectiv, duminica. Vectorul aleator (S, D) are distribuţia de probabilitate:

		D		
		0	1	
	0	0.1	0.1	0,2 = P(S=0)
S	1	0.3	0.2	0,5
	2	0.1	0.2	0,3
		0,5	0,5	

Distribuții marginale:

$P(S=0) = 0,1+0,1 = 0,2$ $\qquad P(D=0) = 0,1+0,3+0,1 = 0,5$

$P(S=1) = 0,3+0,2 = 0,5$ $\qquad P(D=1) = 0,1+0,2+0,2 = 0,5$

$P(S=2) = 0,1+0,2 = 0,3$

$P(S=0) = P[(S=0, D=0) \cup (S=0, D=1)]$ etc ....

Distribuții de probabilitate

$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix} = 1$ ✓ $\qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = 1$ ✓

if $\neq 1 \Rightarrow$ AI GREȘIT !!

Independența variabilelor aleatoare

$\exists$ legătură între nr. postări sâmbătă și nr. postări duminică?

Independența: $P(A \cap B) = P(A)P(B) \leftrightarrow$ **evenimente condiționate:**
P(B|A)=P(B)

$P(S=i, D=j) = P(S=i) \cdot P(D=j)$

$P(S=0, D=0) = P(S=0)\, P(D=0) \iff 0,1 = 0,2 \cdot 0,5$ ✓

dist. com. de prob. $\qquad$ distr. marginale

$$P(S=0, B=1) = P(S=0)P(B=1) \Leftrightarrow \quad 0,1 = 0,2 \cdot 0,5 \quad \checkmark$$

$$P(S=1, B=1) = P(S=1)P(B=0) \Leftrightarrow \quad 0,3 \neq 0,5 \cdot 0,5 \quad \times$$

$\Rightarrow$ nr. de postări de sâmbătă influențează nr. de postări de duminică

Variabile aleatoare condiționate

$$\underbrace{X \mid Y = y_i}_{\text{cond. fixată}} \qquad X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$$

Dorim să obținem tabelul de distribuție pt. v.a. Z

1. $\mathcal{S}_Z = ?$ $\quad \mathcal{S}_Z = \mathcal{S}_X = \{x_1, \dots, x_n\}$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} P(Z = x_i) = P(X = x_i \mid Y = y_j) \\ P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{array}\right\} \Rightarrow P(Z = x_i) = \dfrac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}}$$

În mod asemănător definim $W = (Y \mid X = x_i)$

$Z_1 = S \mid B = 0$

$Z_2 = S \mid B = 1$

$W_0 = B \mid S = 0$

$W_1 = B \mid S = 1$

$W_2 = B \mid S = 2$

$Z_1 = S \mid B = 0 \Rightarrow \mathcal{S}_{Z_1} = \{0, 1, 2\}$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$P(Z_1 = 0) = P(S = 0 \mid B = 0) = \frac{P(S=0, B=0)}{P(B=0)} = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5}$$

Analog pt. restul

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Pentru evenimente independente A, B:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A|B) = P(A)$

$P(B|A) = P(B)$

Independența v.a. X și Y $\Leftrightarrow$ distrib. condiționale coincid cu cele marginale

$P(X = x_i \mid Y = y_j) = P(X = x_i)$

$\underbrace{P(S=1 \mid B=0)}_{\frac{3}{5}} = P(S=1) = 0,5$

Funcții de două variabile aleatoare

$T = X + Y \Rightarrow B_T = \{ x_i + y_j,\ x_i \in B_X, y_j \in B_Y \}$

$P(T = x_i + y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$

$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

$P(T=0) = P(S=0, B=0) = \cancel{P(S=0) \cdot P(B=0)} = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$

$P(T=1) = P[(S=1, B=0) \cup (S=0, B=1)] = P(S=1, B=0) + P(S=0, B=1) =$

$= \cancel{P(S=1) \cdot P(B=0) + P(S=0) \cdot P(B=1)} = 0,3 + 0,1 = 0,4$

Analog pt. restu

Se ia direct din tabel