MS

(seminar 13 - S13)

1. Numărul clienţilor ce sosesc la un magazin este modelat de un proces Poisson cu rata $\lambda = 10$ clienti/ ora. Să se determine:

a) Să se determine probabilitatea sa nu existe niciun client sosit în intervalul $(8, 10]$.

b) Să se determine probabilitatea sa existe exact un client în fiecare din intervalele $(8, 9]$, $(9, 10]$, $(10, 11]$ şi $(11, 12]$.

a) N_t - nr clienți în intervalul $(0, t]$

$N_{t+s} - N_s$ - nr clienți în intervalul $(s, s+t]$

$Y = N_{t+s} - N_s$ - distribuită Poisson de parametru λt

$Y = N_{10} - N_8 \sim Pois(10 \cdot 2 = 20)$ → 2 ore (10-8), → 10 clienți/oră

$$P(Y=0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \frac{e^{-20} \cdot 20^0}{0!} = e^{-20} = \frac{1}{e^{20}}$$

b) $Y_1 = N_9 - N_8$

$Y_2 = N_{10} - N_9$

$Y_3 = N_{11} - N_{10}$

$Y_4 = N_{12} - N_{11}$

$\Big\}$ $Y_i \sim Pois(\lambda \cdot 1)$ - independente

$$P(Y_1 = 1 \cap Y_2 = 1 \cap Y_3 = 1 \cap Y_4 = 1) = P(Y_1 = 1) \cdot P(Y_2 = 1) \cdot P(Y_3 = 1) \cdot P(Y_4 = 1) =$$

$$= \left[\frac{e^{-10} \cdot 10^1}{1!}\right]^4 = \left[\frac{10}{e^{10}}\right]^4$$

2. Fie un proces Poisson $\{N_t\}$ de rată λ. Să se determine probabilitatea să existe 2 sosiri în intervalul $(0, 2]$ şi 3 sosiri în intervalul $(1, 4]$.

$P(N_2 = 2,\ N_4 - N_1 = 3)$

variabilele nu sunt independente

$(0,1]$, $(1,2]$, $(2,4]$

$X \to Pois(\lambda \cdot 1)$

$Y \to Pois(\lambda \cdot 1)$

$Z \to Pois(\lambda \cdot 2)$

$$P(X+Y=2, Y+Z=3) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X+Y=2, Y+Z=3 / Y=k) \cdot P(Y=k) =$$

$$P(X=2, Z=3 / Y=0) \cdot P(Y=0) + P(X=1, Z=2 / Y=1) \cdot P(Y=1) + P(X=0, Z=1 / Y=2) P(Y=2) =$$

$$= P(X=2) P(Z=3) P(Y=0) + P(X=1) \cdot P(Z=2) P(Y=1) + P(X=0) \cdot P(Z=1) P(Y=2)$$

3. Fie $\{N_t\}$ un proces Poisson de rată $\lambda = 2$. Notăm cu $X_1, X_2, \ldots$ variabilele aleatoare ce dau lungimea intervalelor dintre două sosiri consecutive (inter-sosiri).

a) Să se determine probabilitatea ca prima sosire să aibă loc după momentul $t = 1$.

b) Dacă nu au existat sosiri înainte de $t = 1$, să se determine probabilitatea ca prima sosire să aibă loc după momentul $t = 3$, adică $P(X_1 > 3 / X_1 > 1)$.

c) Dacă a doua sosire a avut loc la $t = 2$, să se determine probabilitatea ca a treia sosire să aiba loc după $t = 4$.

$X_k \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ - lungimea intervalului de timp dintre sosirea clientului k - 1 si a clientului k

$T_n = X_1 + \ldots + X_n$ - da momentul sosirii clientului n in sistem

a) $P(X_1 > 1) = P(N_1 = 0) = \dfrac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} = \dfrac{1}{e^2}$

a) Vom calcula $P(X_1 > 1)$, unde $X_1 \sim Exp(\frac{1}{2})$. In consecinţă, avem $P(X_1 > 1) = 1 - F_{X_1}(1) = 1 - (1 - e^{-2 \cdot 1}) = \frac{1}{e^2}$, unde $F_{X_1}(x)$ este funcţia de repartiţie a variabilei X_1 distribuită exponenţial de parametru $\frac{1}{2}$.

Funcția de repartiție: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 - e^{-x/\theta} & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$,

b) $P(X_1 > 3 \mid X_1 > 1) = \dfrac{P(X_1 > 3 \cap X_1 > 1)}{P(X_1 > 1)} = \dfrac{P(X_1 > 3)}{P(X_1 > 1)} = \dfrac{1 - F_{X_1}(3)}{1 - F_{X_1}(1)}$

c) $P(T_3 > 4 \mid T_2 = 2) = P(X_3 + X_2 + X_1 > 4 \mid X_1 + X_2 = 2) = P(X_3 > 2 \mid X_1 + X_2 = 2) =$

$= P(X_3 > 2) = 1 - F_{X_3}(2)$

4. Se consideră $\{N_t^a\}, \{N_t^b\})\}$ două procese Poisson independente de rate $\lambda_a = 1, \lambda_b = 2$. Fie $N_t = N_t^a + N_t^b$ procesul Poisson suprapus.

a) Să se determine $P(N_1 = 2, N_2 = 5)$.

b) Dacă $N_1 = 2$, să se determine $P(N_1^a = 1)$.

proces Poisson suprapus $\longrightarrow \lambda_t = \lambda_a + \lambda_b = 1 + 2 = 3$

a) $P(N_1 = 2, N_2 = 5)$

$(0,1], (0,2] \longrightarrow (0,1], (1,2]$

$\qquad\qquad\qquad\quad X \qquad Y \quad \sim Pois(\lambda_t \cdot 1)$

$\Rightarrow P(X=2, X+Y=5) = P(X=2, Y=3) = \dfrac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!} \cdot \dfrac{e^{-3} \cdot 3^3}{3!}$

b) $P(N_1^a = 1 \mid N_1 = 2) = \dfrac{P(N_1^a = 1, N_1 = 2)}{P(N_1 = 2)} = \dfrac{P(N_1^a = 1, N_1^a + N_1^b = 2)}{P(N_1 = 2)} =$

$$= \frac{P(N_1^a = 1, N_1^b = 1)}{P(N_1 = 2)} = \frac{\frac{e^{-1} \cdot 1^1}{1!} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!}}{\frac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!}}$$