# REGIMUL TRANZITORIU

**Pierre Simon Laplace (1749–1827), a French astronomer and mathematician, first presented the transform that bears his name and its applications to differential equations in 1779. Born of humble origins in Beaumont-en-Auge, Normandy, France, Laplace became a professor of mathematics at the age of 20. His mathematical abilities inspired the famous mathematician Simeon Poisson, who called Laplace the Isaac Newton of France. He made important contributions in potential theory, probability theory, astronomy, and celestial mechanics. He was widely known for his work, *Traite de Mecanique Celeste (Celestial Mechanics)*, which supplemented the work of Newton on astronomy. The Laplace transform, the subject of this chapter, is named after him.**

# Introducere

- Regimul tranzitoriu este un regim la fel de important ca și regimul permanent.
- Deosebirea dintre regimul tranzitoriu și regimul permanent constă în aceea că în regimul tranzitoriu toate mărimile (curent, tensiune, putere, energie) se modifică în timp aperiodic, în timp ce în regimul permanent rămân invariante, adică constante in curent continuu sau periodice cu aceiași amplitudine și defazaj în regim sinusoidal.
- Regimul tranzitoriu apare atunci când în circuit apar modificări ale parametrilor elementelor de circuit și/sau modificări ale configurației circuitului.
- Modificarea curenților sau a tensiunilor de-a lungul regimului tranzitoriu nu se face instantaneu. Durata regimului tranzitoriu poate fi extrem de scurtă, de ordinul milisecundelor sau chiar microsecunde, timp în care energia electromagnetică din circuit se redistribuie.
- Energia din circuit nu se poate redistribui instantaneu în urma apariției unei perturbații.

- Componenta datorată regimului tranzitoriu, numite și *componenta tranzitorie* *sau* *componenta de regim liber*, se anulează în timp, iar după ce aceasta s-a stins, un nou regim permanent este atins.
- In acest sens, putem spune că regimul tranzitoriu descrie comportarea circuitului între două regimuri permanente: cel inițial, anterior apariției perturbației și respectiv cel final care apare după stabilizare mărimilor.
- De regulă, studiul regimului tranzitoriu se face prin două metode: *metoda directă (metoda clasică)* și respectiv *metoda transformatei Laplace*.
- Comparând cele două metode, este de remarcat că metoda transformatei Laplace necesită mai multe cunoștințe de matematică în timp ce metoda directă este mai mult legată de procesele fizice din circuit.
- In continuare se va studia metoda directă de rezolvare a regimului tranzitoriu pentru circuite ce satisfac ecuații diferențiale ordinare, liniare de ordinul 1; mai mult se va genera o metodă care permite calculul regimului tranzitoriu pe baza analizei celor două regimuri staționare (cel inițial și cel final regimului tranzitoriu).

- Parametrii *L* și *C* ai inductivităților respectiv capacităților caracterizează abilitatea acestor elemente de a înmagazina energie. Inductivitatea înmagazinează energie magnetică $W_m=Li^2/2$ iar capacitatea înmagazinează energie electrică $W_e=Cu^2/2$.
- În regim staționar avem o distribuție stabilă a energiei în circuit, respectiv energia luată de la surse este înmagazinată în inductivități și capacități.
- Când apare o perturbație în circuit, se face o redistribuire a energiei între inductivitățile și capacitățile din circuit, și o modificare a energiei furnizate de surse corespunzător noilor condiții de circuit apărute după perturbație.
- Redistribuirea energiei în circuit după apariția perturbației nu se poate face instantaneu. Acest proces se desfășoară într-un anumit interval de timp, perioadă care corespunde regimului tranzitoriu.
- O modificare instantanee a energiei inductivităților sau a capacitaților ar presupune o putere infinita, ceea ce contravine principiului conservării energiei.

- Pentru a modifica energia magnetică avem nevoie de o modificare a curentului prin inductivitate.
- Ca urmare, curentul printr-o inductivitate nu poate varia brusc. Variația curentului in inductivitate generează tensiunea pe inductivitate (tensiunea indusă) *L(di/dt).*
- O schimbare instantanee a curentului (a fluxului magnetic) prin bobină ar presupune o tensiune infinită pe inductivitate, ceea ce este imposibil de realizat (contravine principiului conservării energiei).
- Din acest motiv, principiul continuității curentului prin inductivitate poate fi formulat astfel: *in inductivitate curentul nu poate varia instantaneu (este o funcție continuă în timp).*

$$i_L(0-) = i_L(0+)$$

$$\Psi(0-) = \Psi(0+)$$

unde simbolul *i(0-)* indică curentul la momentul imediat anterior perturbației iar simbolul *i(0+)* indică curentul la momentul imediat după apariția perturbației.

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

- Pentru a modifica energia electrică avem nevoie de o modificare a tensiunii la bornele condensatorului, care este dată de *u=q/C*, unde *q* este sarcina electrică.
- Ca urmare, nici tensiunea condensatorului și nici sarcina sa nu pot varia brusc. Variația tensiunii pe condensator este *du/dt=(1/C)dq/dt=i/C*, și ca urmare o variație instantanee a tensiunii ar genera un curent infinit, imposibil de realizat (contravine principiului conservării energiei).
- Din acest motiv, principiul continuității tensiunii la bornele condensatorului poate fi formulat astfel: *tensunea la bornele condensatorului nu poate varia instantaneu (este o funcție continuă în timp).*

$$u_C(0-)=u_C(0+) \qquad q(0-)=q(0+)$$

$$i_C=\frac{dq}{dt}=C\frac{du_C}{dt}$$

- Rezumând, putem concluziona că orice schimbare intr-un circuit electric, care determină o modificare a distribuției de energie, va genera un regim tranzitoriu.

- We can summarize that any change in an electrical circuit (switching, interrupting, short-circuiting, rapid changes in the structure of the electric circuit), which brings about a change in energy distribution, will result in a transient-state.

- Every change of state leads to a temporary deviation from one regular steady-state performance of the circuit to another one.

- In circuits, which consist of only resistances, and neither inductances and capacitances, the transient-state will not occur at all and the change from one steady-state to another will take place instantaneously.

# Metoda directă de rezolvare a regimului tranzitoriu pentru ecuații liniare de ordinul 1

- Metoda directă se bazează pe rezolvarea ecuațiilor diferențiale. Solă din două componente: *soluția de regim liber și soluția de regim forțat*.

- Vom rezolva ecuația diferențială prin găsirea separată a soluției de regim liber și respectiv a soluției de regim forțat, după care le vom combina pentru a obține soluția finală.

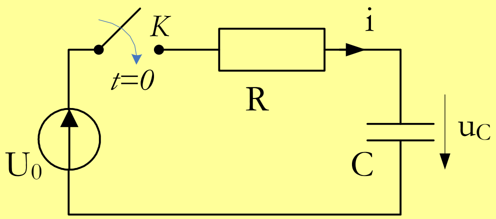
- Pentru a determina modul de variație a curenților și a tensiunilor de-a lungul procesului tranzitoriu, vom aplica cele două teoreme a lui Kirchhoff.

# Încărcarea condensatorului intr-un circuit RC:

$$u_C(0_-)=0$$

$$iR+u_C=U_0$$

$$i=C\frac{du_C}{dt}$$




$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_0$$

**Ecuația de încărcare a condensatorului în circuitul RC pentru t≥0**

$$u_C(0_-)=u_C(0_+)=0$$

$$u_C(t)=u_{Cl}(t)+u_{Cf}(t)$$

**$u_{Cl}$ – soluția de regim liber**
**$u_{Cf}$ – soluția de regim forțat**

- Ecuația de rezolvat este o ecuație diferențială ordinară, liniară de ordinul 1 (ec. diferențială deoarece $u_C$ apare sub derivată; ordinul 1 deoarece avem doar prima derivată; ecuație ordinară deoarece nu apar derivate parțiale; liniară deoarece variabila $u_C$ apare în termeni liniari și nu ca argument a altei funcții).
- **Ecuația este valabilă doar pentru t>0.**
- Soluția completă se compune din două soluții parțiale: *soluția de regim liber (soluția de regim tranzitoriu)* care face trecerea dintre cele două regimuri permanente, și *soluția de regim forțat (soluția de regim permanent)* care reprezintă comportarea circuitului la excitațiile specifice din circuit (în cazul nostru sursa de curent continuu).

- Soluția de regim liber $u_{Cl}$ este soluția ecuației omogene asociată ecuației inițiale:

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

- Ecuația omogenă se numește ecuația caracteristică a circuitului.

- Forma generală a soluției de regim liber este: $u_{Cl}(t) = Ke^{st}$

- Înlocuind această formă a soluției in ecuația diferențială omogenă, avem:

$RCKse^{st} + Ke^{st} = 0$ sau $Ke^{st}(RCs + 1) = 0$ ,

din care $s = -\frac{1}{RC}$ , iar soluția de regim liber devine:

$$u_{Cn}(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

- În general, soluția de regim liber nu depinde de sursele din circuit, ci doar de parametrii circuitului și de condițiile inițiale, fapt pentru care această componentă este o caracteristică a circuitului.
- Soluția de regim liber reprezintă soluția ecuației (determinantului) caracteristic al ecuației (sistemului de ecuații) omogene, care nu includ sursele din circuit (în cazul nostru sursa de curent continuu).

- Soluția de regim forțat se mai numește soluția de regim permanent, sau soluția particulară a ecuației diferențiale.
- Este determinată de membrul drept al ecuației diferențiale (în cazul nostru $U_0$ ), și reprezintă reacția circuitului la excitația specifică (alimentarea cu surse specifice).

$$u_{Cf}(t)=U_0=u_C(\infty)=u_{C\infty}$$

- Soluția totală a tensiunii pe condensator este:

$$u_C(t)=u_{Cl}(t)+u_{Cf}(t)=Ke^{-\frac{t}{RC}}+U_0$$

în care constanta *K* va fi determinată din condițiile inițiale.

- Constanta *K* se determină astfel încât să fie satisfăcută condiția inițială $u_{C(0+)}=0$, care dă valoarea inițială a tensiunii pe condensator. Astfel, soluția ecuației $u_C(t)$ la momentul $t=0$ devine $u_C(t)=0$, sau $K+u_{C(\infty)}=u_{C(0+)}$, de unde :

$$K=u_{C(0+)}-u_{C(\infty)}=-U_0.$$

- Cu această valoare a lui *K*, se obține soluția finală a tensiunii pe condensator în forma:

$$u_C(t)=U_0-U_0e^{-\frac{t}{RC}}=U_0\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

sau într-o formă generală: $$u_C(t)=U_C(\infty)-[U_C(\infty)-U_C(0)]\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- $\tau=RC$ reprezintă *constanta de timp* a regimului tranzitoriu.

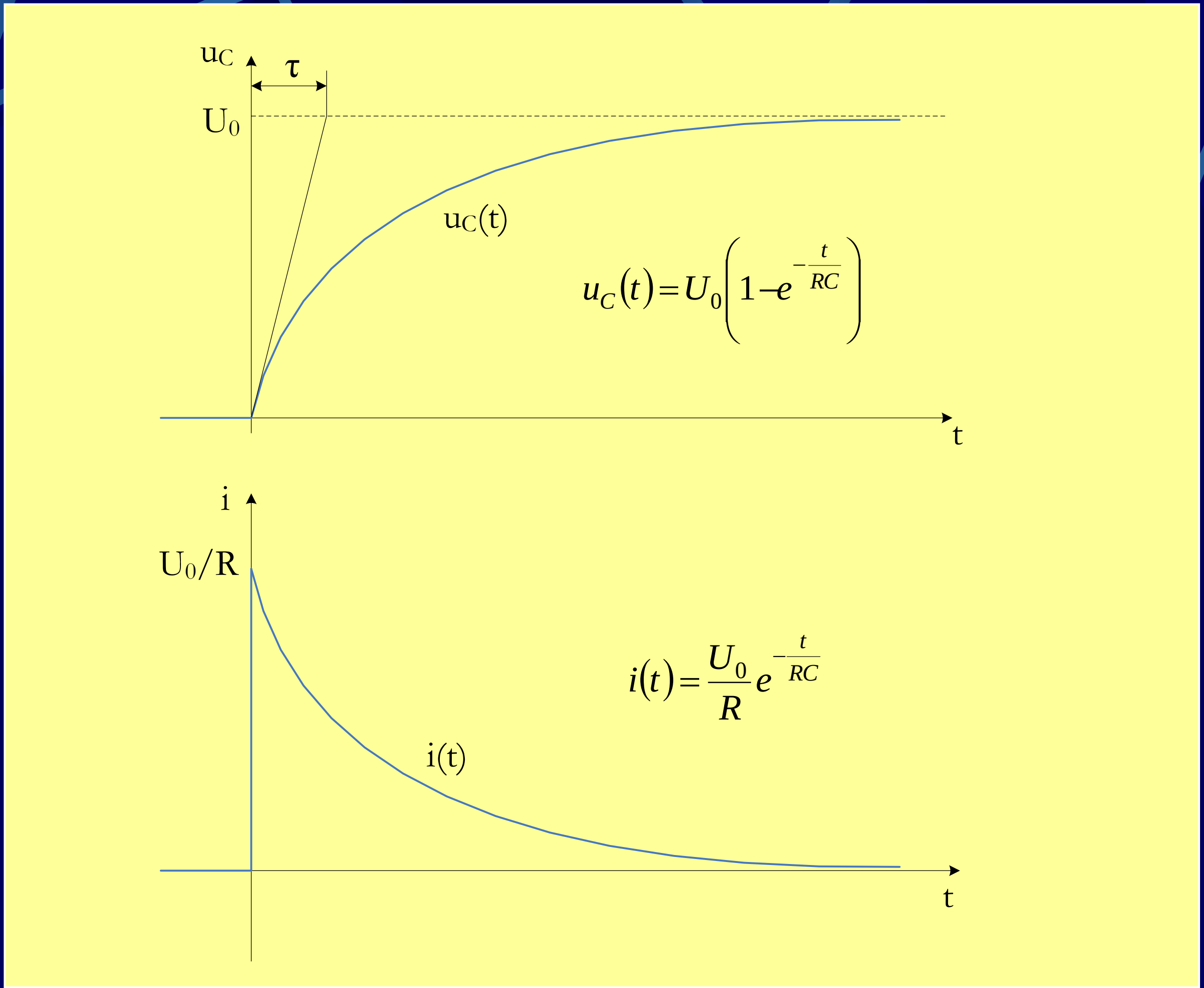
- Constanta de timp $\tau$ ne arată cât de rapid se desfășoară procesul tranzitoriu de încărcare a condensatorului, $u_C(t)$. Un $\tau$ mare presupune o încărcare lentă a condensatorului, în timp ce un $\tau$ mic presupune o încărcare rapidă.
- Unitatea de timp pentru $\tau$ este secunda (dimensiune de timp) *($[\tau]=[R][C]=\Omega F$),* astfel că argumentul exponențialei $t/\tau$ cum era de așteptat, este adimensional.
- Într-un timp de aproximativ $5\tau$, tensiunea pe condensator este de peste 99% din tensiunea de alimentare $U_0$. Astfel, se poate considera că procesul tranzitoriu ia sfârșit după aproximativ $(3\text{-}5)\tau$ (în loc de un timp infinit rezultat din ecuația tensiunii pe condensator).
- Componenta tranzitorie a soluției găsite se stinge practic după un timp infinit de mare, adică $e^{-t}\to 0$, când $t\to\infty$.
- Forma generală a răspunsului total se compune din cele două componente: un termen care reprezintă *răspunsul de regim permanent la alimentarea cu tensiune continuă* ( în acest caz egal cu tensiunea de alimentare $U_0$); un termen care depinde de timp $t$ numit *soluția de regim tranzitoriu*.
- Soluția de regim permanent se obține întotdeauna din soluția generală când:

$$\lim_{t\to\infty}\left[u_C(t)\right]$$

- Imediat după apariția perturbației la t=0, dominantă este componenta de regim tranzitoriu.
- Componenta de regim tranzitoriu, pentru circuite liniare este întotdeauna o funcție exponențială cu exponent negativ (care se stinge în timp).

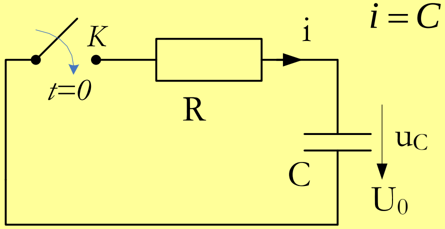
- Curentul prin condensator de-a lungul procesului tranzitoriu, este:

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = -CU_0\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$



# Descărcarea condensatorului într-un circuit RC

- Avem de rezolvat o ecuație omogenă.
- Soluția de regim forțat va fi zero, deci, soluția finală va fi formată doar de soluția de regim liber.




$$i = C\frac{du_C}{dt}$$

$$iR + u_C = 0$$

$$u_C(0_-) = U_0$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

**ecuația de descărcare a condensatorului pentru t≥0**

$$u_{Cf}(t) = u_C(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_C(t) = u_{Cl}(t) + u_{Cf}(t) = u_{Cl}(t)$$

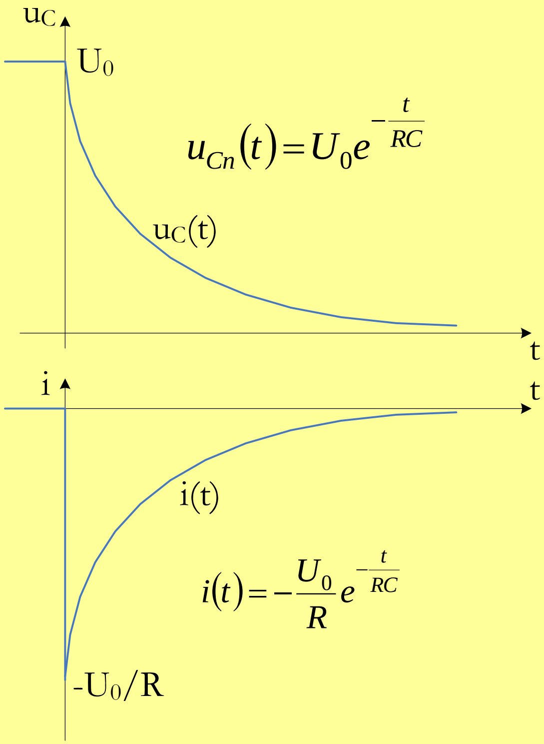
$$RCs + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad u_{Cl}(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

$$t = 0: \quad u_C(0+) = U_0 \quad \Rightarrow \quad K = U_0$$

$$u_{Cl}(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

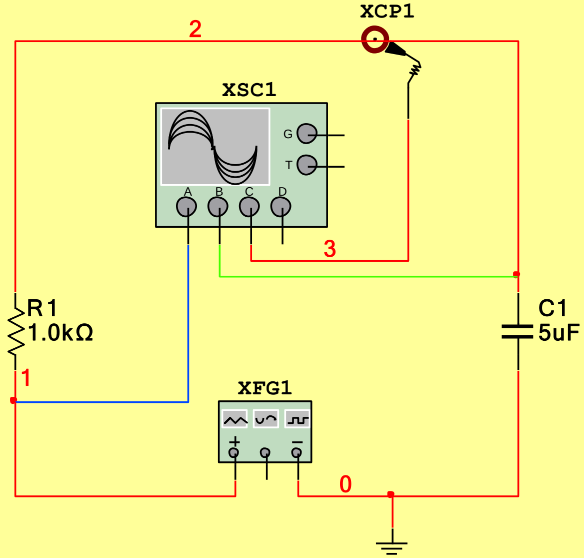
$$u_C(t) = U_C(\infty) - \left[U_C(\infty) - U_C(0)\right] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

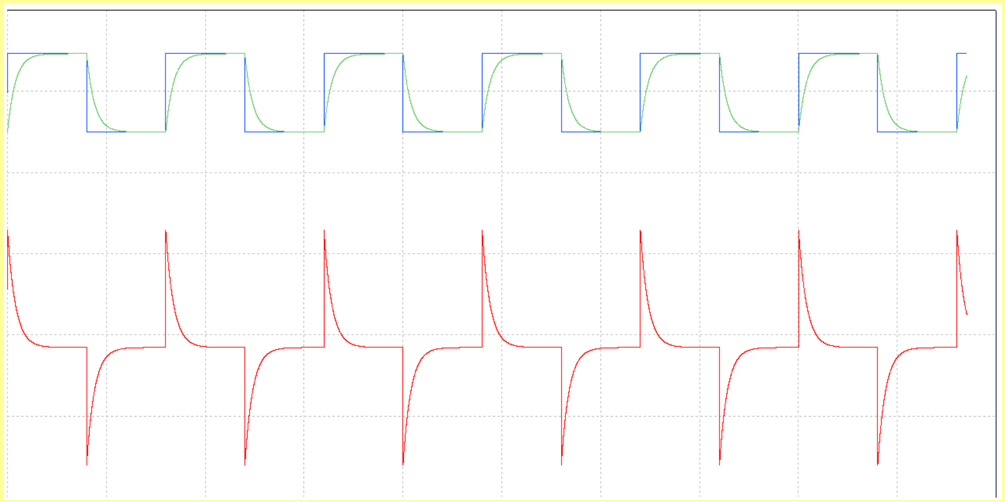
$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = CU_0\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

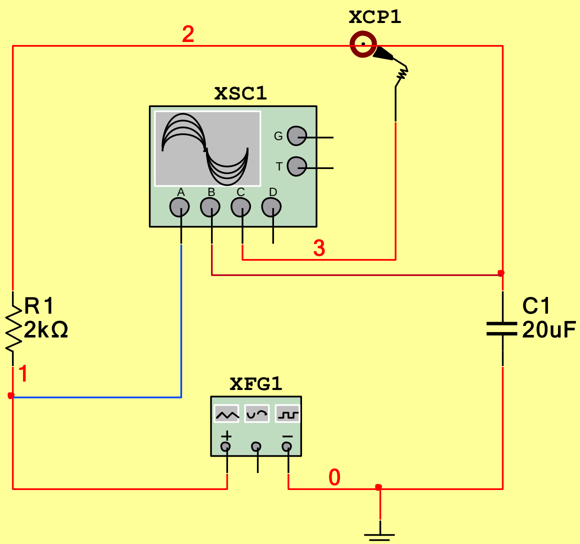


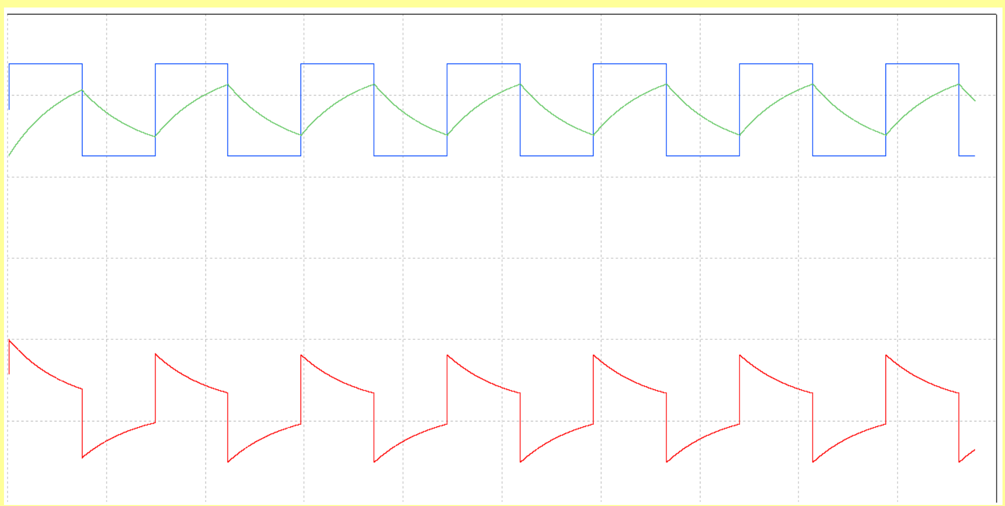

$$u_{Cn}(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

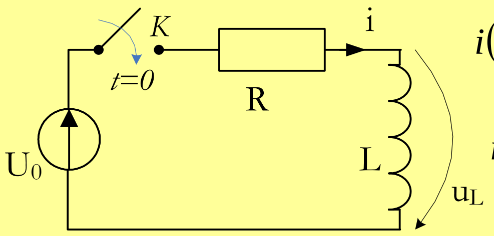

XCP1
2
XSC1
G
T
A B C D
3
R1
1.0kΩ
1
C1
5uF
XFG1
+
−
0




XCP1
2
XSC1
G
T
A B C D
3
R1
2kΩ
1
C1
20uF
XFG1
+
−
0



# Încărcarea unei bobine intr-un circuit RL.




$$i(0_-)=0$$

$$\boxed{iR+L\frac{di}{dt}=U_0}$$

**ecuația ce descrie încărcarea bobinei pentru t≥0**

$$i(0_-)=i(0_+)=0$$

$$i(t)=i_l(t)+i_f(t)$$

$$\tau=\frac{L}{R}\,[s]\quad \text{constanta de timp}$$

$$iR+L\frac{di}{dt}=0 \qquad R+Ls=0 \;\Rightarrow\; s=-\frac{R}{L} \qquad i_l(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

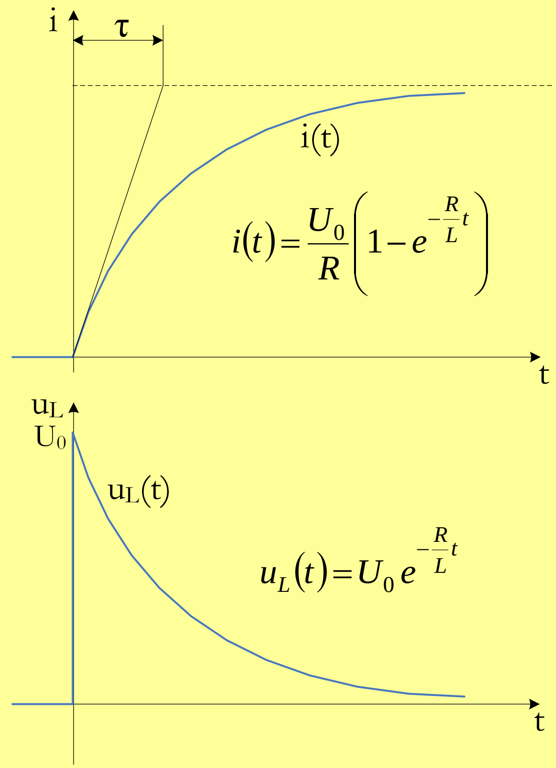
$$i_f(t)=\frac{U_0}{R}=i(\infty) \qquad i(t)=i_l(t)+i_f(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}+\frac{U_0}{R}$$

$$t=0:\quad i(0+)=0 \;\Rightarrow\; i(0+)=K+\frac{U_0}{R} \;\Rightarrow\; K=-\frac{U_0}{R}$$

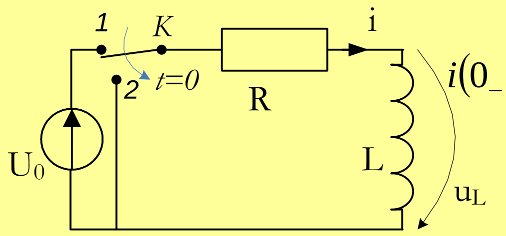
$$\boxed{i(t)=\frac{U_0}{R}-\frac{U_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{U_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

$$\boxed{i(t)=i(\infty)-[i(\infty)-i(0)]\,e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$u_L(t)=L\frac{di}{dt}=-L\frac{U_0}{R}\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}=U_0e^{-\frac{R}{L}t}$$



# Descărcarea unei bobine într-un circuit RL.




$$i(0_-)=\frac{U_0}{R}$$

$$i(0_+)=i(0_-)=\frac{U_0}{R}$$

$$iR+L\frac{di}{dt}=0$$

**ecuația ce descrie descărcarea bobinei pentru t≥0**

$$i_f(t)=i(\infty)=0 \;\Rightarrow\; i(t)=i_l(t)+i_f(t)=i_l(t)$$

$$\tau=\frac{L}{R}\,[s] \quad \text{constanta de timp}$$

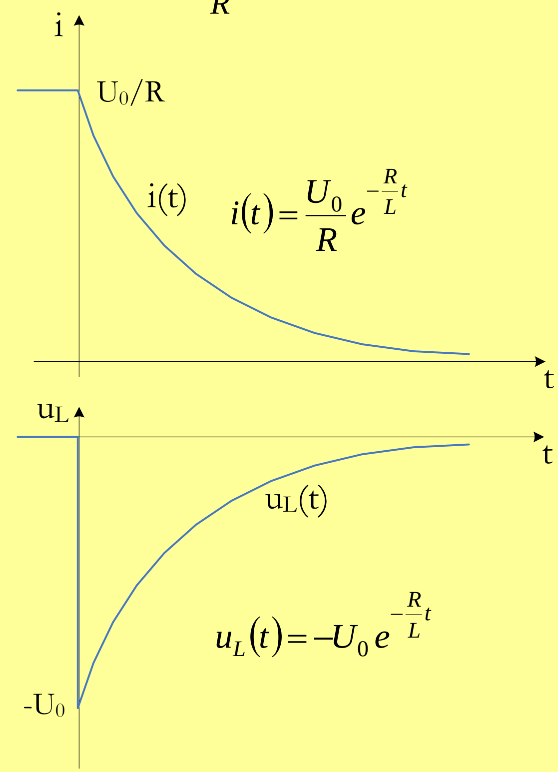
$$iR+L\frac{di}{dt}=0 \qquad R+Ls=0 \;\Rightarrow\; s=-\frac{R}{L} \qquad i_l(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

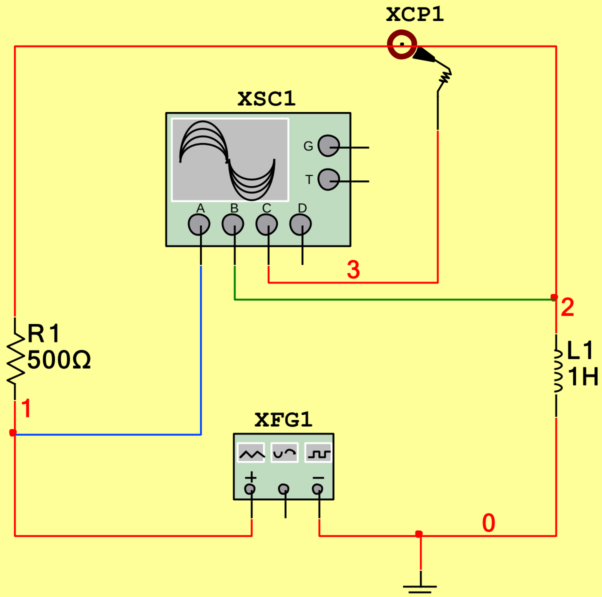
$$i(t)=i_l(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

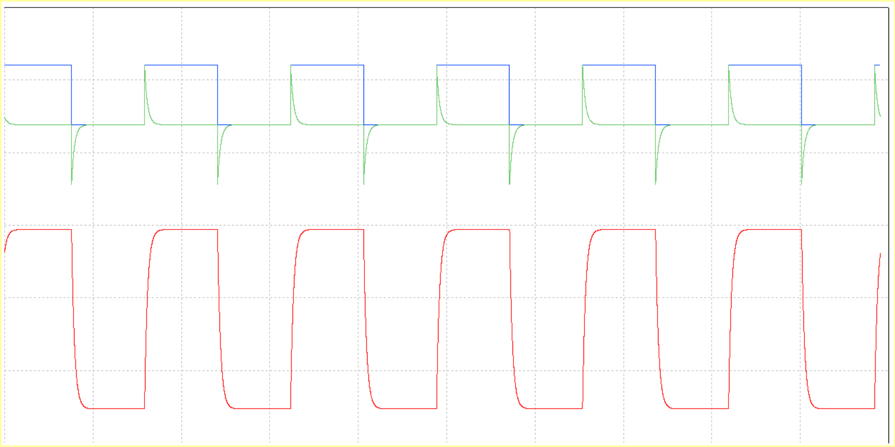
$$t=0:\quad i(0+)=\frac{U_0}{R} \;\Rightarrow\; K=\frac{U_0}{R} \qquad i(t)=\frac{U_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

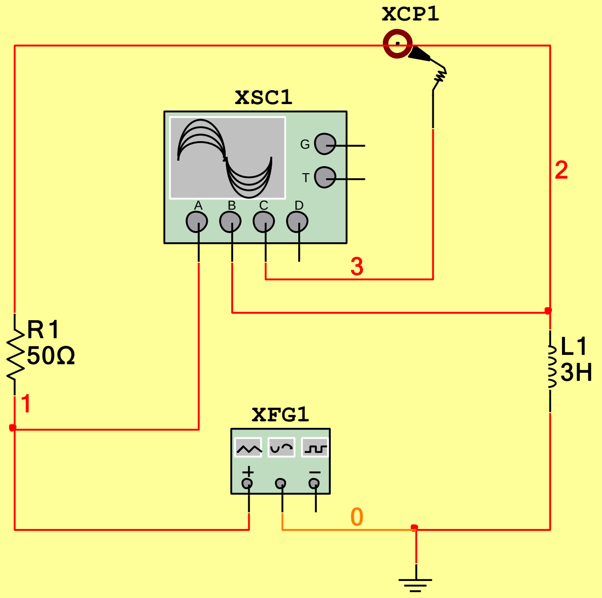
$$i(t)=i(\infty)-[i(\infty)-i(0)]\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

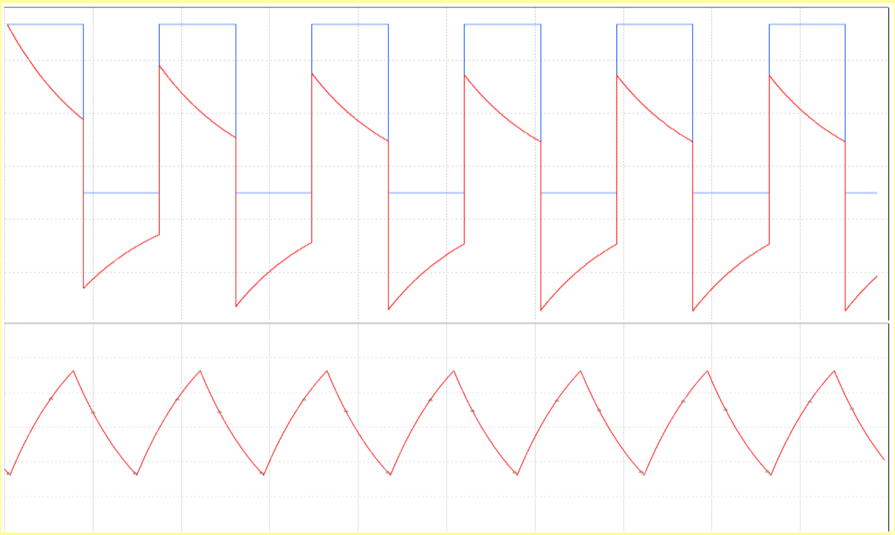
$$u_L(t)=L\frac{di}{dt}=L\frac{U_0}{R}\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}=-U_0\,e^{-\frac{R}{L}t}$$




XCP1
XSC1
G
T
A
B
C
D
3
2
R1
500Ω
L1
1H
1
XFG1
0




XCP1
XSC1
G
T
A
B
C
D
2
3
R1
50Ω
L1
3H
1
XFG1
0



# Generalizarea ecuațiilor de ordinul 1 ale circuitelor RC și RL

- Pentru conectarea/deconectarea circuitelor RC și RL au fost determinate expresiile pentru tensiunea pe condensator:

$$u_C(t)=U_C(\infty)-[U_C(\infty)-U_C(0)]\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

respectiv curentul prin inductivitate:

$$i(t)=i(\infty)-[i(\infty)-i(0)]\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Expresia tensiunii pe condensator respectiv curentul prin bobină pot fi generalizate pentru circuite descrise de ecuații diferențiale de ordinul 1 (circuite numai cu condensatoare sau numai cu bobine). Într-o formă generală, avem:

$$X(t)=X(\infty)-[X(\infty)-X(0)]\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

unde *X* reprezintă tensiunea laturii sau curentul prin latură.

- Odată stabilit *X*, soluția de regim tranzitoriu poate fi determinată direct determinând valoarea lui *X* la *t=0* și pentru *t→∞* (valori determinate din regimurile permanente inițial și final) și determinând constanta de timp *τ.*

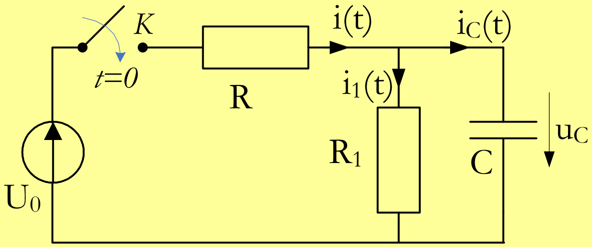
# Circuite cu mai multe rezistențe, capacități și inductivități

- Pentru ca un circuit RC sau RL să fie descris de ecuație diferențială de ordinul 1, trebuie ca rezistențele, condensatoarele și inductivitățile să fie combinate într-un singur element (rezistor, condensator sau inductor), folosind relațiile pentru grupările serie sau paralel corespunzătoare. Rezultă astfel constantele de timp în forma: $\tau = R_{eq} C_{eq}$ sau $\tau = L_{eq} / R_{eq}$ .

- Trebuie doar să determinăm valorile $u_C(0)$, $u_C(\infty)$ din regimurile permanente corespunzătoare, și constanta de timp $\tau_C$ pentru circuite de ordinul 1 cu condensatoare, respectiv valorile $i_L(0)$, $i_L(\infty)$ din regimurile permanente corespunzătoare, și constanta de timp $\tau_L$ pentru circuite de ordinul 1 cu inductivități, care apoi se înlocuiesc în relația generală:

$$X(t) = X(\infty) - [X(\infty) - X(0)] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

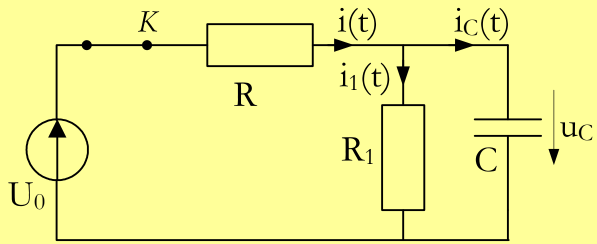
# Exemplu



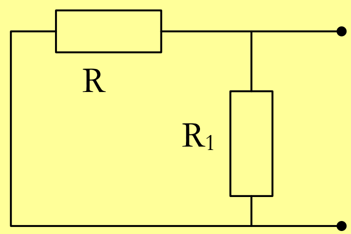

$$u_C(t)=U_C(\infty)-[U_C(\infty)-U_C(0)]\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_C(0_-)=0 \qquad U_C(0_+)=U_C(0_-)=0$$

$t \geq 0$




$$i(\infty)=i_1(\infty)=\frac{U_0}{R+R_1} \qquad U_C(\infty)=i_1(\infty)R_1=\frac{R_1}{R+R_1}U_0$$




$$R_{eq}=\frac{R\,R_1}{R+R_1}$$

$$\tau=R_{eq}\,C=\frac{R\,R_1\,C}{R+R_1}$$

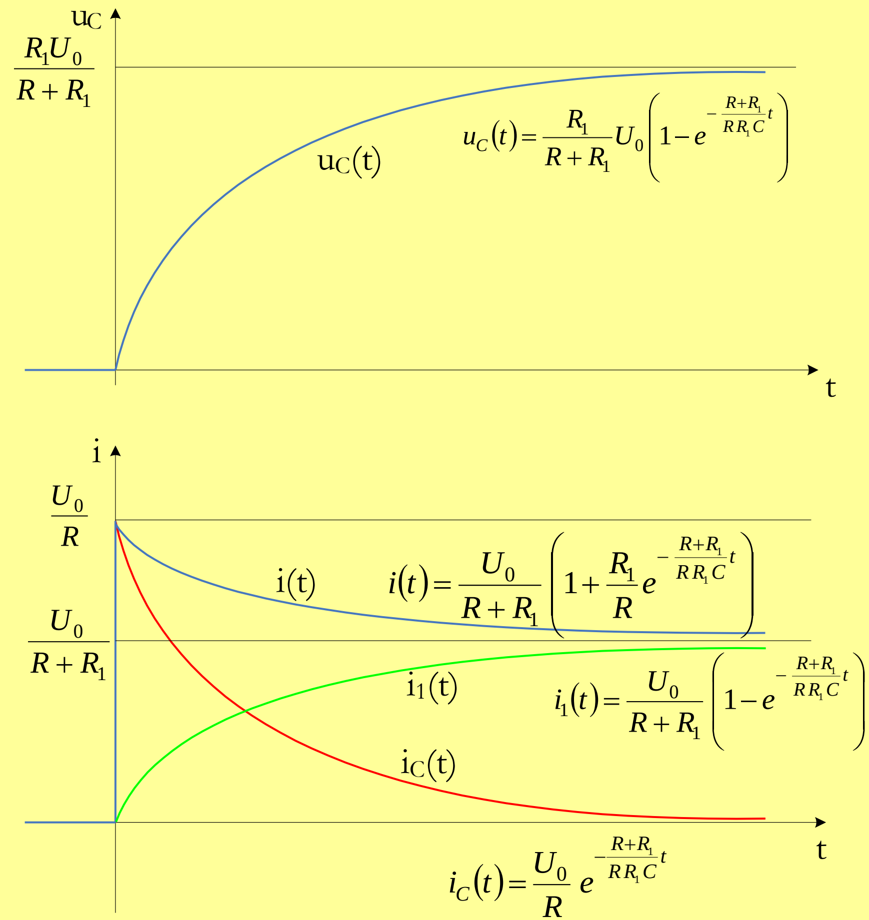
$$u_C(t)=\frac{R_1}{R+R_1}U_0-\left[\frac{R_1}{R+R_1}U_0-U_C(0)\right]e^{-\frac{R+R_1}{R\,R_1\,C}t}=\frac{R_1}{R+R_1}U_0\left(1-e^{-\frac{R+R_1}{R\,R_1\,C}t}\right)$$

$$u_C(t)=\frac{R_1}{R+R_1}U_0\left(1-e^{-\frac{R+R_1}{R\,R_1\,C}t}\right)$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=-C\frac{R_1}{R+R_1}U_0\left(-\frac{R+R_1}{R\,R_1\,C}\right)e^{-\frac{R+R_1}{R\,R_1\,C}t}=\frac{U_0}{R}\,e^{-\frac{R+R_1}{R\,R_1\,C}t}$$

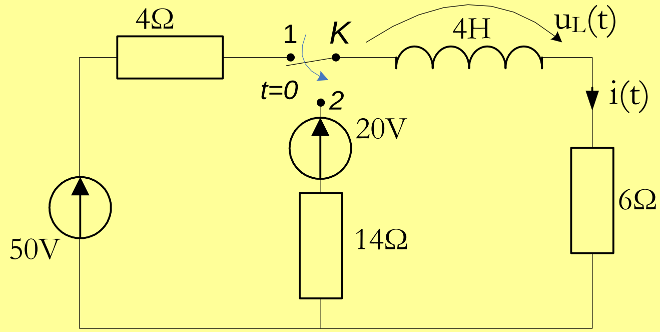
$$i_1(t)=\frac{u_C(t)}{R_1}=\frac{U_0}{R+R_1}\left(1-e^{-\frac{R+R_1}{R\,R_1\,C}t}\right)$$

$$i(t)=i_1(t)+i_C(t)=\frac{U_0}{R+R_1}\left(1+\frac{R_1}{R}e^{-\frac{R+R_1}{R\,R_1\,C}t}\right)$$



$u_C$
$\frac{R_1 U_0}{R+R_1}$
$u_C(t)$
$u_C(t)=\frac{R_1}{R+R_1}U_0\left(1-e^{-\frac{R+R_1}{RR_1C}t}\right)$
t
i
$\frac{U_0}{R}$
$i(t)$
$i(t)=\frac{U_0}{R+R_1}\left(1+\frac{R_1}{R}e^{-\frac{R+R_1}{RR_1C}t}\right)$
$\frac{U_0}{R+R_1}$
$i_1(t)$
$i_1(t)=\frac{U_0}{R+R_1}\left(1-e^{-\frac{R+R_1}{RR_1C}t}\right)$
$i_C(t)$
t
$i_C(t)=\frac{U_0}{R}\,e^{-\frac{R+R_1}{RR_1C}t}$

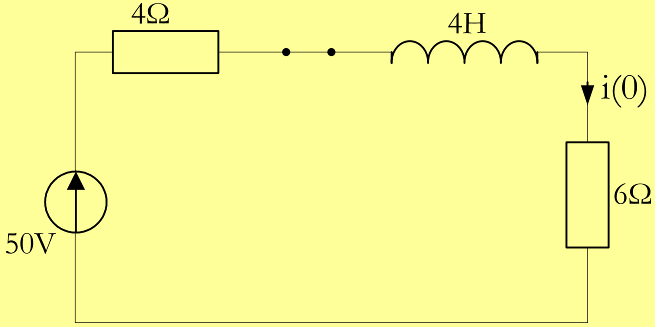
$$i(t)=i(\infty)-[i(\infty)-i(0)]\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$




$i(t)=?$

$u_L(t)=?$

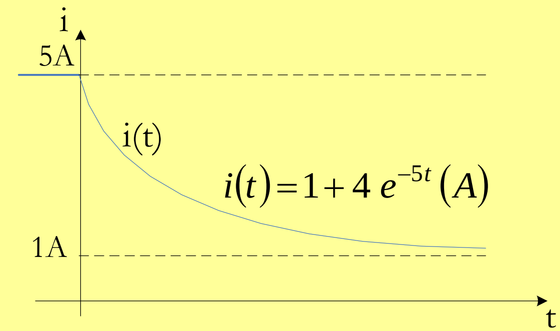
## Regimul permanent inițial



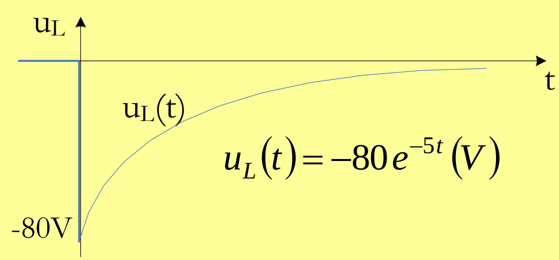

$$i(0)=\frac{50V}{4\Omega+6\Omega}=5A$$

$$i(t)=1-(1-5)e^{-5t}=1+4\,e^{-5t}\,(A)$$

$$u_L(t)=L\frac{di}{dt}=-80\,e^{-5t}\,(V)$$

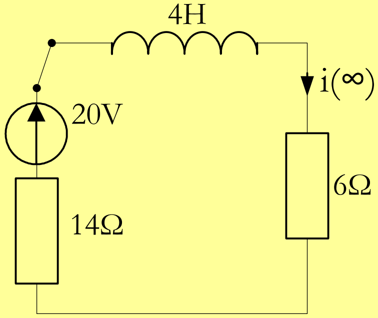



$$i(t)=1+4\,e^{-5t}\,(A)$$

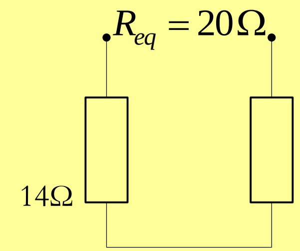



$$u_L(t)=-80\,e^{-5t}\,(V)$$

## Regimul permanent final




$$i(\infty)=\frac{20V}{14\Omega+6\Omega}=1A$$




$$\tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{1}{5}=0.2(s)$$

***"For tomorrow belongs to the people who prepare for it today"***
***(African Proverb quotes)***

***"Engineering is the practice of making good on the promise of technology"***