MAC - Capitolul 6

Folosiți integrarea Romberg R_{33} pentru a aproxima următoarea integrală definită. Verificați rezultatul folosind funcția `integral`.

$$\int_1^3 x^2 \ln x\,dx.$$

Algoritmul 11 (Integrarea Romberg)

$R_{11} = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$
for $j = 2, 3, \ldots$
  $h_j = \frac{b-a}{2^{j-1}}$
  $R_{j1} = \frac{1}{2}R_{j-1,1} + h_j \sum_{i=1}^{2^{j-2}} f(a+(2i-1)h_j) \longrightarrow$ coloana 1
  for $k = 2, \ldots, j$
    $R_{jk} = \frac{4^{k-1}R_{j,k-1} - R_{j-1,k-1}}{4^{k-1}-1}$
  end
end

$$f(x) = x^2 \ln x \, dx$$

$$R_{11} = (3-1)\frac{f(1)+f(3)}{2} = f(1)+f(3) = 9\ln 3 = \ln 3^9 = 9{,}9$$

$\longrightarrow j=2$

$$h_2 = \frac{3-1}{2^{2-1}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$R_{21} = \frac{1}{2} R_{11} + h_2 \sum_{i=1}^{2^{j-2}=1} f(1+h_2) = \frac{9{,}9}{2} + f(2) = 4{,}95 + 4\ln 2 = 4{,}95 + 2{,}77 =$$

$$= 7{,}72$$

$\longrightarrow k = 2 \to 2$

$$R_{22} = \frac{4^{2-1}\cdot R_{21} - R_{11}}{4^{2-1}-1} = \frac{4\cdot 7{,}72 - 9{,}9}{3} = 7$$

$\longrightarrow j=3$

$$h_3 = \frac{3-1}{2^{3-1}} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

$$R_{31} = \frac{1}{2} R_{21} + h_3 \sum_{i=1}^{2^{3-2}=2} f(1+(2\cdot i-1)h_3) = \frac{7{,}72}{2} + 0{,}5\cdot\left[f(1{,}5)+f(2{,}5)\right] =$$

$$= 3{,}86 + 0{,}5\left[2{,}25 \ln 1{,}5 + 6{,}25\cdot \ln 2{,}5\right] = 7{,}18$$

$\longrightarrow k = 2 \longrightarrow 3$

$$R_{32} = \frac{4^{2-1}\cdot R_{31} - R_{21}}{4^{2-1}-1} = \frac{4\cdot 7{,}18 - 7{,}72}{3} = 7$$

$$R_{33} = \frac{4^{3-1} R_{32} - R_{22}}{4^{3-1}-1} = \frac{16\cdot 7 - 7}{15} = \frac{7(16-1)}{15} = 7$$

```
>> f = @(x) (x.^2.*log(x));
>> integral(f, 1, 3)

ans =

    6.9986
```

$\Rightarrow m = 2$

Aplicați regula lui Simpson compusă cu $2m = 4$ paneluri pentru a aproxima integrala (6p). Aflați eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei (2p).

$$\int_0^2 (x^2 - x)dx.$$

Algoritmul 8 (Regula lui Simpson compusă)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}\right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(iv)}(c), \tag{21}$$

unde c este între a şi b.

0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4

$f'(c) = 2c - 1 \Rightarrow f''(c) = 2 \Rightarrow f'''(c) = 0$

$$h = \frac{b-a}{2m} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\int_0^2 (x^2 - x)dx = \frac{1}{6}\left[f(x_0) + f(x_4) + 4\sum_{i=1}^{2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{1} f(x_{2i})\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[0 + 2 + 4\left(f(x_1) + f(x_3)\right) + 2 f(x_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[2 + 4\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + 2 \cdot 0\right] = \frac{1}{6}[2 + 2] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\longrightarrow$ val. exactă: $\int_0^2 (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

$$e = \frac{(2-0)\cdot\frac{1}{16}}{180}\cdot 0 = 0$$

$$e = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

Aplicați regula mijlocului compusă cu $m = 4$ paneluri pentru a aproxima integrala [illegible]. Aflați eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei (2p).

$$\int_{-2}^{0} x^2 dx$$

Algoritmul 10 (Regula mijlocului compusă)

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{m} f(w_i) + \frac{(b-a)h^2}{24} f''(c), \tag{23}$$

unde $h = (b-a)/m$ şi c este între a şi b. Valorile w_i sunt mijloacele celor m subintervale egale ale lui $[a, b]$.

$f(x) = x^2$

$$h = \frac{0+2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	w_4
-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$-1{,}75$	$-1{,}25$	$-0{,}75$	$-0{,}25$

$$\int_{-2}^{0} x^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} f(w_i) = \frac{1}{2}\left[(-1{,}75)^2 + (-1{,}25)^2 + (-0{,}75)^2 + (-0{,}25)^2\right] = 2{,}625$$

val. ex. $\longrightarrow I = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{0} = -\frac{-8}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}66$

$$e = \frac{2\cdot\frac{1}{4}}{24}(2x)' = \frac{1}{48}\cdot 2 = \frac{1}{24} = 0{,}042 \Rightarrow I = 2{,}625 + 0{,}042$$

Aplicaţi integrarea Romberg pentru a găsi aproximarea R_{22} a integralei (8p). Aflaţi eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei (2p).

$$\int_{-2}^{0} x^2 dx. = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{0} = -\frac{-8}{3} = \frac{8}{3}$$

Algoritmul 11 (Integrarea Romberg)

$R_{11} = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$
for $j = 2, 3, \ldots$
  $h_j = \frac{b-a}{2^{j-1}}$
  $R_{j1} = \frac{1}{2}R_{j-1,1} + h_j \sum_{i=1}^{2^{j-2}} f(a+(2i-1)h_j)$ $\longrightarrow$ coloana 1
  for $k = 2, \ldots, j$
    $R_{jk} = \frac{4^{k-1}R_{j,k-1} - R_{j-1,k-1}}{4^{k-1}-1}$
  end
end

$$R_{11} = (0+2)\cdot\frac{f(-2)+f(0)}{2} = 4$$

$\longrightarrow j=2$

$$h_2 = \frac{2}{2^{2-1}} = 1$$

$$R_{21} = \frac{1}{2}R_{11} + h_2\, f(\overbrace{-2+h_2}^{-1}) = 2+1 = 3$$

$\longrightarrow k=2 \rightarrow 2$

$$R_{22} = \frac{4^{2-1}\cdot R_{21} - R_{11}}{4^{2-1}-1} = \frac{4\cdot 3-4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$e = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0$$

Faceţi o schimbare de variabilă pentru a rescrie integrala pe $[-1, 1]$. Aproximaţi integrala, folosind cuadratura gaussiană cu $n = 3$ (8p). Aflaţi eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei (2p).

$$\int_0^1 x^2 dx. = 1$$

- deoarece cuadratura gaussiană este exactă pentru $R(x)$, trebuie să fie la fel şi pentru $P(x)$
- pentru a aproxima integrale pe un interval general $[a, b]$, problema trebuie să fie translatată înapoi pe intervalul $[-1, 1]$
- folosind substituţia $t = (2x-a-b)/(b-a)$, este uşor să verificăm că

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}dt. \quad (4)$$

- demonstrăm printr-un exemplu

- folosind formularea Lagrange, putem scrie

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x)f(x_i), \text{ unde } L_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdots\overline{(x-x_i)}\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots\overline{(x_i-x_i)}\cdots(x_i-x_n)}.$$

- integrând ambele părţi, obţinem următoarea aproximare a integralei:

Algoritmul 1 (Cuadratura gaussiană)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i), \quad (2)$$

unde

$$c_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)dx, \ i = 1, \ldots, n.$$

$\cdot\ n = 3$

$$\int_0^1 x^2 dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(1-0)t+1+0}{2}\right)\cdot\frac{1-0}{2}dt = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{t+1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}(t^2+2t+1)\,dt = \frac{1}{8}\left[\frac{t^3}{3}+t^2+t\right]\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cancel{1}-\cancel{1}+1+1\right] = \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\cancel{e = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}}$$

$$\cancel{\Rightarrow I = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}}$$

+ fără calcul

$$\text{pt } n=3 \longrightarrow \int_{-1}^{1}\frac{1}{8}(t+1)^2\,dt = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) =$$

$$= \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \ldots$$

Aplicaţi regula trapezului compusă cu $m = 4$ paneluri pentru a aproxima integrala (8p). Aflaţi eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei (2p).

$$\int_0^2 (x^2 - x)dx. = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

Algoritmul 7 (Regula trapezului compusă)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_m + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_i\right) - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(c), \qquad (20)$$

unde $h = (b-a)/m$ şi c este între a şi b.

$$h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x^2 - x$$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{1}{4}\left(f(0) + f(2) + 2\sum_{i=1}^{3} f(x_i)\right) = \frac{1}{4}\left[0 + 2 + 2\left(-\frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4}\right)\right] = \frac{3}{4}$$

$$e = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9-8}{12} = \frac{1}{12} = 0,083$$

er. maxt alg. $\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{12}\cdot\cancel{2} = \frac{1}{12} \Rightarrow I = \frac{3}{4} - \frac{1}{12}$

Aplicaţi regula lui Simpson compusă cu $2m = 4$ paneluri pentru a aproxima integrala (8p). Aflaţi eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei (2p).

$$\int_{-2}^{0} x^2 dx.$$

Faceţi o schimbare de variabilă pentru a rescrie integrala pe $[-1, 1]$. Aproximaţi integrala, folosind cuadratura gaussiană cu $n = 3$ (8p). Aflaţi eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei (2p).

$$\int_{0}^{1} (x^2 - x) dx.$$

Aplicaţi regula trapezului compusă cu $m = 4$ paneluri pentru a aproxima integrala (8p). Aflaţi eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei (2p).

$$\int_{-2}^{0} x^2 dx.$$

Faceţi o schimbare de variabilă pentru a rescrie integrala pe $[-1, 1]$. Aproximaţi integrala, folosind cuadratura gaussiană cu $n = 3$ (8p). Aflaţi eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei (2p).

$$\int_{0}^{1} (3x^2 + 2x) dx.$$

Aplicaţi regula lui Simpson compusă cu $2m = 4$ paneluri pentru a aproxima integrala (8p). Aflaţi eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei (2p).

$$\int_{-2}^{0} x^2 dx.$$