Model examen P1 (CV)

4.

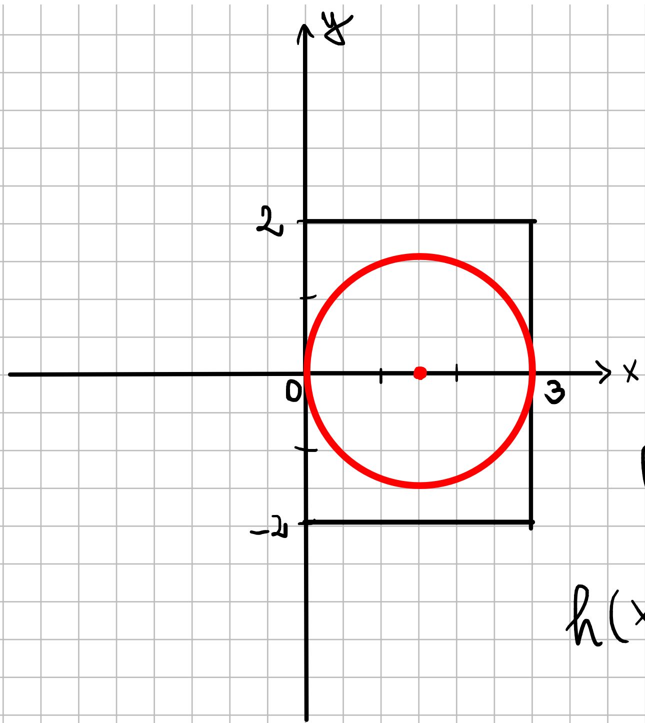
Vectorul aleator (X, Y) este uniform distribuit pe un dreptunghi $D = [0,3] \times [-2,2]$.

a) Să se determine densitatea sa de probabilitate şi să se calculeze $P(X > 0.5 / Y = 1)$.

b) Scrieţi algoritmul optim ce generează puncte aleatoare uniform distribuite în D.

c) Simulând un punct uniform distribuit în dreptunghiul $D = [0,3] \times [-2,2]$, să se determine probabilitatea ca acest punct să fie în G, unde G este discul cu centrul în $(1.5, 0)$ şi înscris în dreptunghiul D.

3.00 pct



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}, & x \in [0,3],\ y \in [-2,2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$P(X > 0,5 \mid Y = 1)$$

$$h(x,1) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)} = \frac{1}{12} \cdot 4 = \frac{1}{3}, & y \in [-2,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^3 \frac{1}{12}\,dx = \frac{1}{12} x \Big|_0^3 = \frac{1}{4}$$

$$P(X > 0,5 \mid Y = 1) = \int_{0,5}^3 \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3} x \Big|_{0,5}^3 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

c) $r = 1,5$

$$A(G) = \pi r^2 = \pi \cdot 1,5^2 = \frac{9\pi}{4}$$

$$P = \frac{A(G)}{A(D)} = \frac{\frac{9\pi}{4}}{12} = \frac{3\pi}{16}$$

5. Să se definească distribuţia de echilibru a unui lanţ Markov şi să se precizeze ce reprezinta coordonatele acestei distribuţii. In ce condiţii este asigurată existenţa acestei distribuţii?
Un lanţ Markov are matricea de tranziţie:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Să se calculeze $P(X_5 = 1|X_3 = 4)$ şi $P(X_2 = 1, X_3 = 4/X_0 = 1)$. Arătaţi că lanţul Markov este ireductibil şi aperiodic. Stiind că matricea Q are vectorul propriu $v = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)^T$ corespunzător valorii proprii 1, iar Q^T are vectorul propriu $w = (0.4, 0.6, 0.5, 0.5)^T$ corespunzător aceleiaşi valori proprii 1, să se determine coordonatele distribuţiei de echilibru π.

3.00 pct

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^T$$ -> distribuția inițială de probabilitate

Distribuția de echilibru

$$\pi^T = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} \cdot Q =$$

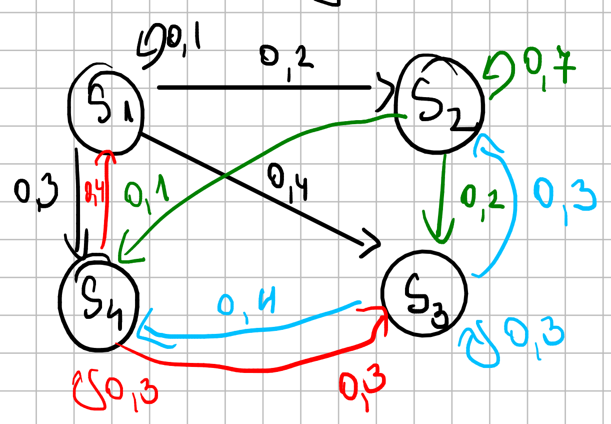
- Dacă există distribuția de echilibru $\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(m)]^T$ (ca limită a șirului π_n), atunci $\pi(j)$ reprezintă șansa asimptotică de a fi vizitat nodul j.
- Dacă șirul (π_n) al distribuțiilor de stare la momentul n converge la π, atunci are loc:

$$\pi^T = \pi^T Q.$$

$$P(X_5 = 1 \mid X_3 = 4) = Q^2(4,1)$$

$$P(X_2=1, X_3=4 \mid X_0=1) = \frac{P(X_2=1 \cap X_3=4 \cap X_0=1)}{P(X_0=1)} = \frac{\cancel{\frac{1}{4}}\, Q^2(1,1) \cdot Q(1,4)}{\cancel{\frac{1}{4}}}$$

ireductibil
$\exists\, m \in \mathbb{N}^*$ a.î. $Q^m(i,j) > 0$
aperiodic



S1: $S_1 \to S_4 \to S_1$ (2)

$S_1 \to S_2 \to S_3 \to S_4 \to S_1$ (4)

$S_1 \to S_3 \to S_4 \to S_1$ (3)

$\Rightarrow$ c.m.m.d.c = 1 ired.

$\to$ aperiodic

Q are v.p.p. $v = [\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^T$ pt $\lambda = 1$

Q^T are v.p.p. $w = [0,4; 0,6; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^T$ pt $\lambda_m = 1$

π - vector probabilist adică $\sum_{i=1} \pi_i = 1$

w trb. normalizat

$\pi = [\frac{0,4}{2}; \frac{0,6}{2}; \frac{0,5}{2}; \frac{0,5}{2}] = [0,2; 0,3; 0,25; 0,25]^T$

6. a) Romtel oferă discount la fiecare al 4-lea client ce solicită conectare la internet. Cererile clienţilor sosesc ca un proces Poisson de rată 5/zi. Să se calculeze probabilitatea ca în primele 3 zile ale săptămânii să fie depuse 18 cereri, şi în următoarele 2 zile 8 cereri. Să se calculeze media şi dispersia momentului primei oferte de discount a săptămânii.

1.00 pct

b) Există ipoteza că timpul de aşteptare T, pentru a primi acces la un server internet, are densitatea de probabilitate

$$f_\theta(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{în rest,} \end{cases}$$

unde θ este un parametru pozitiv necunoscut. Pentru a estima parametrul θ s-au făcut 5 observaţii asupra variabilei T care au condus la următorii timpi de aşteptare (în secunde):

$$0.34, 0.75, 0.26, 0.65, 0.1. \quad \bar{x} = 0,42$$

Să se calculeze media teoretică a timpului de aşteptare şi apoi estimatorul parametrului θ. Să se determine estimatorul verosimilităţii maxime pentru parametrul θ.

2.00 pct

a) $\lambda = 5$ / zi

$P(N_3 = 18) = \frac{e^{-5\cdot 3}(5\cdot 3)^{18}}{18!}$

$\to Y = N_5 - N_3 \sim Pois(2\cdot\lambda)$

$P(N_5 - N_3 = 8) = \frac{e^{-2\cdot 5}(2\cdot 5)^8}{8!}$

$\Rightarrow \lambda_{nou} = \frac{5}{4} \Rightarrow X \sim Exp(\frac{4}{5})$

$M(X) = \theta = \frac{4}{5}$

$\sigma^2(X) = \theta^2 = \frac{16}{25}$

b) $f_\theta(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\theta(x)\,dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1}\,dx = (\theta+1)\frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

$$\frac{\hat\theta+1}{\hat\theta+2} = \overline{x} \Rightarrow \hat\theta + 1 = \hat\theta\,\overline{x} + 2\overline{x} \Rightarrow \hat\theta = \frac{2\overline{x}-1}{\overline{x}+1}$$

$$\overline{x} = 0{,}42 \Rightarrow \hat\theta = \frac{0{,}84-1}{1{,}42} = -0{,}11$$

$$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod (\theta+1)x_i^\theta = (\theta+1)^n \prod x_i^\theta$$

$$\ell(\theta) = n\ln(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\ell'(\theta) = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$$

$$n + (\theta+1)\sum \ln x_i = 0$$

$$\theta = \frac{-n - \sum \ln x_i}{\sum \ln x_i}$$

$$\ell''(\theta) = -\frac{n}{(\theta+1)^2} < 0 \quad ✓$$

Rândul 1

Examen-Partea 2-MS (PS)– CTI—Rândul 1

4. Vectorul aleator continuu (X, Y) este uniform distribuit pe mulţimea

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\right\}.$$

$\rightarrow x^2 = (1-y^2)\cdot 4$

$x = 2\sqrt{1-y^2}$

a) Determinaţi densitatea de probabilitate a vectorului (X, Y).

b) Scrieţi algoritmul optim ce generează o valoare de observaţie asupra vectorului (X, Y) în mulţimea G.

c) Dacă N este variabila aleatoare ce dă numărul de execuţii ale buclei do-while din codul de la b), să se explice ce probabilitate are această variabilă, ce reprezintă parametrul p al acestei distribuţii şi cum se calculează acesta.

3.00 pct

$a = 2 \quad b = 1 \qquad \text{Arie} = \pi a b$

a) $f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{\pi \cdot 2 \cdot 1}{2}}, & y \in [0,1],\ x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

b)
```
do{
    x = -2 + 4 * urand();
    y = 0 + urand();
}while(x^2/4 + y^2 > 1);
```

c) $p = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ $\rightarrow$ prob. ca să generăm un punct în jum de elipsă

5. Scrieţi şi demonstraţi formula ca un lanţ Markov să evolueze pe traiectoria $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n$. Considerăm un lanţ Markov pentru parcurgerea automată a unui document ce conţine litere L, cifre C şi alte caractere S (semne de punctuaţie, blank etc). Matricea de tranziţie de la un tip de simbol la altul este:

	L	C	S
L	0.2	0.15	0.65
C	0.25	0.5	0.25
S	0.5	0.15	0.35

Cât este probabilitatea $P(X_2 = C | X_1 = L)$? Ştiind că distribuţia iniţială de probabilitate este cea uniformă pe mulţimea stărilor, să se calculeze probabilitatea ca lanţul Markov să evolueze pe traiectoria L, L, C, S. Să se arate că lanţul Markov este ireductibil şi aperiodic.

3.00 pct

Evolutia pe o traiectorie

Universitatea Politehnica Timişoara

Probabilitatea ca lanţul să evolueze pe traiectoria $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n$ este:

$$P(X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_n = s_n) = \pi_0(s_0)Q(s_0, s_1)Q(s_1, s_2)\cdots Q(s_{n-1}, s_n).$$

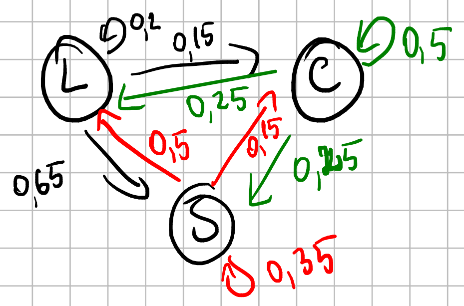
Demo:

$$\begin{aligned} &P(X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}, X_n = s_n) \\ &= P(X_0 = s_0)P(X_1 = s_1|X_0 = s_0)P(X_2 = s_2|X_0 = s_0, X_1 = s_1)\cdots \\ &\cdots P(X_n = s_n|X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}) \\ &= \pi_0(s_0)P(X_1 = s_1|X_0 = s_0)P(X_2 = s_2|X_1 = s_1)\cdots P(X_n = s_n|X_{n-1} = s_{n-1}) \\ &= \pi_0(s_0)Q(s_0, s_1)Q(s_1, s_2)\cdots Q(s_{n-1}, s_n). \end{aligned}$$

Conf.dr. Maria Jivulescu — Curs 11: Lanturi Markov — 9

$$P(X_2 = C | X_1 = L) = Q(L, C) = 0{,}15$$

$$P = \frac{1}{3} Q(L,L) \cdot Q(L,C) \cdot Q(C,S)$$



ired.

$\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $Q^n(i,j) > 0$

ap.

(L) $L \to C \to L$ 2; $L \to S \to C \to L$ 3 $\Big\} \to$ c.m.m.d.c $= 1 \Big\} \Rightarrow$ ap.

ired.

6. a) Numărul de cereri către baza de date a unui computer este un Proces Poisson cu rata $\lambda = 2$ cereri pe minut. Care este probabilitatea ca în primele 3 minute să se transmită 4 cereri şi în următorul minut să se transmită o singură cerere?

1.00 pct

b) Simulând o variabilă $X \sim Bernoulli(p)$, s-a generat stringul de biţi: 1010101111. Să se estimeze din datele simulate care este probabilitatea p a generării bitului 1. Să se determine un estimator al parametrului p. Să se determine estimatorul verosimilităţii maxime pentru p.

2.00 pct

a) 2 c/min.

$$P(N_3 = 4) = \frac{e^{-6}\, 6^4}{4!}$$

$Z = N_4 - N_3 \quad \lambda = 2$

$$P(Z=1, N_3=4) = \frac{e^{-2}\, 2^1}{1!} \cdot \frac{e^{-6}\, 6^4}{4!}$$

b) $p = \frac{7}{10}$

Distrib. clasică	Exp. aleator	Tabel de repartiție	Media, Dispersia
$X \sim$ Bernoulli (p) p-prob. succesului	Aruncarea unei monede Succesul $\overset{not}{=} 1$ Eșecul $\overset{not}{=} 0$	X - înregistrează rezultatul $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$	$M(X) = p$ $\sigma^2(X) = p \cdot q$ $q = 1-p$

$$\boxed{\overline{X} = \frac{7}{10} = p}$$

$$f = \begin{cases} p, & b = 1 \\ 1-p, & b = 0 \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \overline{X} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

$$L(p; x_1, \dots, x_n) = p^7 \cdot (1-p)^3$$

$$\ell(p) = 7 \ln p + 3 \ln(1-p)$$

$$\ell'(p) = \frac{7}{\hat{p}} - \frac{3}{1-\hat{p}} = 0 \qquad \ell''(p) = -\frac{7}{p^2} - \frac{3}{(1-p)^2} < 0$$

$$7 - 7\hat{p} - 3\hat{p} = 0$$

$$\hat{p} = \frac{7}{10}$$