Seminar nr. 12

Extremele locale ale funcţiilor de mai multe variabile

1. Să se determine punctele de extrem ale funcţiilor:

i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$,

ii) $f(x,y) = 6x^2y + 2y^3 - 45x - 51y + 7$,

iii) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 8\ln x - 14\ln y + 5,\ x > 0,\ y > 0$;

iv) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,

v) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\ x, y \neq 0$;

vi) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$,

vii) $f(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 4)$,

viii) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}\right)$,

ix) $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y},\ x > 0,\ y > 0$;

x) $f(x,y) = -x^2 - xy - y^2 + x + y$,

xi) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$,

xii) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$,

xiii) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z},\ x, y, z > 0$;

xiv) $f(x,y,z) = x^2y + yz + 32x - z^2$,

xv) $f\left(x,y,z\right) = 16x + 12y + 20z - x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 2xz - 25$.

Indicaţii şi răspunsuri. **i)** Din sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 12 = 0 \end{cases},$$

se obţin soluţiile $x_{1,2} = \pm 1$, $y_{1,2} = \pm 2$, deci avem patru puncte staţionare $M_1(1,2)$, $M_2(1,-2)$, $M_3(-1,2)$, $M_4(-1,-2)$. Matricea Hesse asocită funcţiei f este

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Calculând valorile matricei hessiene în fiecare din punctele M_i, $i = \overline{1,4}$ din criteriul lui Sylvester obţinem că M_1 este punct de minim, M_4 este punct de maxim, iar M_2 şi M_3 sunt puncte şa.

ii) Punctele staţionare sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12xy - 45 = 0 \\ 6x^2 + 6y^2 - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{15}{4} \\ x^2 + y^2 = \dfrac{17}{2} \end{cases}.$$

Notând $p = xy$, $s = x + y$ obţinem $p = \dfrac{15}{4}$ şi $s^2 - 2p = \dfrac{17}{2}$. Prin urmare, $s = \pm 4$, $p = \dfrac{15}{4}$.

Cazul I. Dacă $s = 4$, $p = \dfrac{15}{4}$ avem ecuaţia $t^2 - 4t + \dfrac{15}{4} = 0$ cu soluţia $t_1 = \dfrac{3}{2}$, $t_2 = \dfrac{5}{2}$, Rezultă $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $y_1 = \dfrac{5}{2}$ sau $x_2 = \dfrac{5}{2}$, $y_2 = \dfrac{3}{2}$.

Cazul II. Dacă $s = -4$, $p = \dfrac{15}{4}$ avem ecuaţia $t^2 + 4t + \dfrac{15}{4} = 0$ cu soluţia $t_1 = -\dfrac{3}{2}$, $t_2 = -\dfrac{5}{2}$, Rezultă $x_3 = -\dfrac{3}{2}$, $y_3 = -\dfrac{5}{2}$ sau $x_2 = -\dfrac{5}{2}$, $y_2 = -\dfrac{3}{2}$.

Punctele critice sunt $P_1\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$, $P_2\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, $P_3\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$, $P_4\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$.

Matricea Hesse asociată acestei funcţii este

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12y & 12x \\ 12x & 12y \end{pmatrix}.$$

Din criteriul lui Sylvester se obţine că P_1 este punct de minim, P_3 este punct de maxim, P_2 şi P_3 sunt puncte şa.

iii) Punctele staţionare sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3xy = 8 \\ 2y^2 + 3xy = 14 \end{cases}.$$

Înmulţind prima ecuaţie cu 14, a doua cu -8 şi adunând relaţiile obţinute avem

$$28x^2 - 16y^2 + 18xy = 0 \Leftrightarrow 14\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 9\frac{x}{y} - 8 = 0.$$

Dacă notăm $\dfrac{x}{y}$ cu t se obţine ecuaţia $14t^2 + 9t - 8 = 0$ care admite soluţiile $t_1 = -\dfrac{8}{7}$, $t_2 = \dfrac{1}{2}$. Deoarece din ipoteză $x, y > 0$ soluţia t_1 fiind negativă, nu convine. Pentru $t_2 = \dfrac{1}{2}$ rezultă $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$, adică $y = 2x$. Înlocuind în prima ecuaţie din sistem avem $2x^2 + 6x^2 = 8$, adică $x = \pm 1$, dar singura soluţie care convine este $x = 1$. Astfel singurul punct critic al funcţiei f este $M(1,2)$.

Matricea Hesse asociată acestei funcţii este

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \dfrac{8}{x^2} & 3 \\ 3 & 2 + \dfrac{14}{y^2} \end{pmatrix},$$

care în punctul staţionar are forma

$$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & \dfrac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

Din criteriul lui Sylvester avem $\Delta_1 = 10 > 0$, $\Delta_2 = 46 > 0$ deci $P(1,2)$ este punct de minim.

iv) $M_1(2,1)$ este punct de minim, $f_{min} = -28$, $M_2(-2,-1)$ este punct de maxim, $f_{max} = 28$.

v) $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ este punct de minim local al funcţiei f.

vi) Punctul $M(0,3)$ este punct de minim local al funcţiei f.

vii) Punctele staţionare sunt $P_1(0,0)$, $P_2(2,0)$, $P_3(-2,0)$, $P_4(0,-2)$, $P_5(0,2)$, $P_6(-1,-1)$, $P_7(-1,1)$, $P_8(1,-1)$, $P_9(1,1)$. Studiind natura acestor puncte se obţine P_6 şi P_9 sunt puncte de minim, P_7 şi P_8 sunt puncte de maxim.

viii) Avem un singur punct staţionar, $M(21,20)$ care este punct de maxim local al lui f, iar $f_{max} = 282$.

ix) $M(5,2)$ este punct de minim local, iar $f_{min} = 30$.

x) $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, este punct de maxim, iar $f_{max} = \frac{1}{3}$.

xi) Punctul $M(-1,-2,3)$ este punct staţionar. Diferenţiala de ordinul doi asociată funcţiei f în punctul $M(-1,-2,3)$ este

$$d^2f(-1,-2,3) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

care reprezintă o formă pătratică pozitiv definită. Prin urmare punctul $M(-1,-2,3)$ este punct de minim local al funcţiei f, iar $f_{min} = -14$.

Observaţie. Acelaşi lucru se obţine şi folosind criteriul lui Sylvester.

xii) Punctele staţionare sunt $M_1(0,0,-1)$, $M_2(24,-144,-1)$. Diferenţiala de ordinul doi a funcţiei f are forma

$$d^2f = 6xdx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 24dxdy.$$

În punctul M_1 avem

$$d^2f(0,0,-1) = 2dy^2 + 2dz^2 + 24dxdy = 2(dy + 6dx)^2 - 72dx^2 + 2dz^2$$

care e o formă pătratică nedefinită. Prin urmare punctul M_1 nu este punct de extrem. În punctul M_2 avem

$$d^2f(24,-144,-1) = (12dx + dy)^2 + dx^2 + 2dz^2$$

care e o formă pătratică pozitiv definită, deci $M_2(24, -144, -1)$ este punct de minim local, iar $f_{min} = -6913$.

xiii) Punctele staţionare ale funcţiei date se determină din sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} = 0 \\ \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} = 0 \\ \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} = 0 \end{cases}.$$

Rezolvând acest sistem se obţine punctul staţionar $M(\frac{1}{2}, 1, 1)$. Hessiana într-un punct curent este

$$H_f = \begin{pmatrix} \dfrac{y^3}{2x^3} & -\dfrac{y}{2x^2} & 0 \\ -\dfrac{y}{2x^2} & \dfrac{1}{2x} + \dfrac{2z^2}{y^3} & -\dfrac{2z}{y^2} \\ 0 & -\dfrac{2z}{y^2} & \dfrac{2}{y} + \dfrac{4}{z^3} \end{pmatrix},$$

iar în punctul critic M are forma

$$H_f(M) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 8 > 0$, $\Delta_3 = 32 > 0$ deducem că punctul M este punct de minim local al funcţiei f.

xiv) Punctele critice se obţin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + 32 = 0 \\ x^2 + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases},$$

care admite soluţia $x = 2, y = -8, z = -4$, deci $\mathrm{M}_0\,(2,-8,-4)$ este punct staţionar. Hessiana funcţiei f în punctul M_0 este:

$$H_f\,(\mathrm{M}_0) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} (\mathrm{M}_0) = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Conform criteriului lui Sylvester, deoarece $\Delta_1 = -16 < 0, \Delta_2 = -16 < 0$, rezultă că M_0 nu este punct de extrem.

xv) Pentru aceasta determinăm punctele staţionare rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 = 16 - 2x - 2z = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 = 12 - 4y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 = 20 - 6z - 2x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 2x - 2z = 0 \\ 12 - 4y = 0 \\ 20 - 6z - 2x = 0. \end{cases}.$$

Sistemul fiind compatibil determinat singurul punct staţionar este $M\,(7,3,1)$.

Cu criteriul lui Sylvester testăm dacă $M(7,3,1)$ este punct de extrem. Calculăm hessiana în $M\,(7,3,1)$

$$H_f\,(7,3,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Minorii principali sunt $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 8 > 0$, $\Delta_3 = -32 < 0$, de unde rezultă că $M\,(7,3,1)$ este punct de maxim.

2. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiilor:

i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 18$,

ii) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$,

iii) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 2$,

iv) $f(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 - 2xy + 3yz - xz + 4x - 5y + 10z$,

v) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{1}{z}$, $x,y,z \neq 0$.

vi) $f(x,y,z) = x^4 + y^3 + z^2 + 4xz - 3y + 2$.

Răspuns. **i)** $M_1(0,0)$ nu este punct de extrem, $M_2(3,3)$ este punct de minim local.

ii) $M_1(0,0)$ nu este punct de extrem, $M_2(-1,-1)$ este punct de minim local.

iii) $M_1(0,0)$ este punct de maxim local, $M_2(2,0)$ este punct de minim local, $M_3(1,-1)$, $M_4(1,1)$ nu sunt puncte de extrem.

iv) $M(\frac{69}{26},-\frac{37}{26},\frac{20}{13})$ este punct şa.

v) $M_1(2,2\sqrt{2},\sqrt{2})$ este punct de minim local, $M_2(2,-2\sqrt{2},-\sqrt{2})$ este punct de maxim local al funcţiei f.