Tema 7 MS

6. Fie X o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^3, & \text{pentru } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

Să se determine:

a) constanta c astfel încât f_X este densitate de probabilitate;

b) funcţia de repartiţie $F_X(x)$;

c) $P(X \leq 2/3 | X > 1/3)$, $P(X = 0.4)$ şi $P(X > 1/2)$.

d) $M(X)$ şi $\sigma^2(X)$.

a) f_x - pozitivă

$\int_{-\infty}^{\infty} cx^3 = c\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4$

$$f_x(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \in (0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

b) $F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt$

pt $x \leq 0$, $f_x(t) = 0$, $\forall\, t < x \Rightarrow F_x(x) = 0$

pt $x > 1$, $f_x(t) = 0$, $\forall\, t > x \Rightarrow F_x(x) = \int_0^1 f_x(t)\,dt + \int_1^x f_x(t)\,dt = 1 + 0 = 1$

pt $x \in (0,1] \Rightarrow \int_0^x f_x(t)\,dt = 4 \cdot \frac{t^4}{4}\Big|_0^x = x^4$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^4, & x \in (0,1] \\ 1, & x \in (1,\infty) \end{cases}$$

c) $P\left(X \leq \frac{2}{3} \,\middle|\, X > \frac{1}{3}\right) = \frac{P\left(X \leq \frac{2}{3} \cap X > \frac{1}{3}\right)}{P\left(X > \frac{1}{3}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{3} < X \leq \frac{2}{3}\right)}{P\left(X > \frac{1}{3}\right)} = \frac{F_x\left(\frac{2}{3}\right) - F_x\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - P\left(X \leq \frac{1}{3}\right)} =$

$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f_x(t)\,dt$

$= \frac{\frac{2^4 - 1}{3^4}}{1 - F_x\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{16} = 0,19$

$P(X = 0,4) = 0$ v.a. cont.

$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - F_x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16} = 0,94$

d) $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 4x^3\,dx = 4\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{4}{5}$

$\sigma^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{50-48}{75} = \frac{2}{75}$

$M(X^2) = \int_0^1 x^2 4 \cdot x^3\,dx = 4\frac{x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

7. Fie X o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2(2x + \frac{3}{2}), & \text{pentru } 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

Dacă $Y = \frac{2}{X} + 3$, să se determine $\sigma^2(Y)$.

$\sigma^2(aX+b) = a^2\sigma^2(X)$

$\sigma^2(Y) = \sigma^2\left(\frac{2}{X}+3\right) = 4\sigma^2\left(\frac{1}{X}\right)$

$M\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x} x^2\left(2x+\frac{3}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(2x^2+\frac{3}{2}x\right)dx = \frac{17}{12}$

$M\left(\frac{1}{X^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} x^2\left(2x+\frac{3}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(2x+\frac{3}{2}\right)dx = \frac{5}{2}$

$\sigma^2(Y) = 4\cdot\left(\frac{5}{2} - \left[\frac{17}{12}\right]^2\right) = \frac{71}{36}$

8. Fie X o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Dacă $Y = X^2$, să se determine $F_Y(y)$.

$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|t|}\,dt$

$x < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^t\,dt = \frac{1}{2}e^x$

$x \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^t\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^x = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{2} =$

$= 1 - \frac{e^{-x}}{2}$

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{x}}{2}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{e^{x} \cdot 2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) =$$

$$= 1 - \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2} - \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2} = 1 - e^{-\sqrt{y}}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{y}}, & y \geq 0 \end{cases}$$

9. Fie X o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x < 0 \\ 2xe^{-x^2}, & \text{ipentru } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Să se verifice că f_X este densitate de probabilitate;

b) Să se determine funcţia de repartiţie $F_X(x)$;

c) Să se calculeze $P(-0.5 \leq X \leq 3)$.

d) Să se determine mediana variabilei aleatoare X.

a)

$f_X > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} 2x \cdot \frac{1}{e^{x^2}}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^{\infty} = 0 + 1 = 1$$

$x^2 = t$

$2x\,dx = dt$

b) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

pt. $x < 0 \Rightarrow F_X(x) = 0$

pt $x \geq 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_0^{x} f_X(t)\,dx = e^{-t^2}\Big|_0^{x} = -e^{-x^2} + 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

c) $P(-0{,}5 \le X \le 3) = F_X(3) - F_X(-0{,}5) = 1 - e^{-9}$

d) Mediana este acea val x pt. care $P(X \ge x) = 1 - P(X < x) = \frac{1}{2}$

$$P(X < x) = F_X(x) \Rightarrow 1 - F_X(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow F_X(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \left(-e^{-t}\right)\Big|_0^x = 1 - e^{-x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln 2$$

10. Fie $U \sim Unif(0,1)$ şi $X = -ln(1-U)$. Să se arate că $X \sim Exp(1)$.

$$0 < U < 1 \quad | \cdot (-1)$$
$$0 > -U > -1 \quad | +1$$
$$1 > 1-U > 0 \quad | \ln$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

$$0 > \ln(1-U) > -\infty$$
$$0 < -\ln(1-U) < \infty$$

X

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(-\ln(1-U) \le x) = P\left(\frac{1}{1-U} \le e^x\right) =$$

$$= P(1 \le e^x(1-U)) = P(1 \le e^x - ue^x) = P\left(u \le \frac{e^x - 1}{e^x}\right) =$$

$$= F_U\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right) = \frac{\frac{e^x-1}{e^x} - 0}{1 - 0} = \frac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x} = F_X(x)$$

11. Timpul în minute între sosirea a doi clienţi la o bancă este o v.a. $X \sim Exp(0.4)$. Să se calculeze probabilitatea ca timpul între două sosiri consecutive să fie mai mare de 7 minute.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{0{,}4} e^{-\frac{x}{0{,}4}}, & x \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{pt. } x \ge 0 \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^x \frac{5}{2} e^{-\frac{5t}{2}}\,dt = \frac{5}{2}\left(-\frac{2}{5} e^{-\frac{5}{2}t}\right)\Big|_0^x =$$

$$= 1 - e^{-\frac{5x}{2}}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{5x}{2}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - F_X(7) = e^{-\frac{35}{2}}$$

12. Fie $X \sim N(2,4)$ şi $Y = 3 - 2X$.

a) Să se determine $P(X > 1)$;

b) Să se determine $P(-2 \leq Y \leq 1)$;

c) Să se calculeze $P(X > 2 | Y \leq 1)$.

$m = 2$

$\sigma = 2$

$Z = \dfrac{X - m}{\sigma}, \quad Z \sim N(0,1)$

a) $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P\left(\frac{X-2}{2} \leq \frac{1-2}{2}\right) = 1 - P(Z \leq -0{,}5) =$
$= 1 - \phi(-0{,}5) = 1 - 1 + \phi(0{,}5) = \phi(0{,}5) = 0{,}69$

b) $P(-2 \leq Y \leq 1) = P(-2 \leq 3 - 2X \leq 1) = P(-5 \leq -2X \leq -2) =$
$= P(2 \leq 2X \leq 5) = P\left(1 \leq X \leq \frac{5}{2}\right) = P\left(-\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{1}{4}\right) =$
$= \phi(0{,}25) - \phi(-0{,}5) = \phi(0{,}25) - 1 + \phi(0{,}5) = 0{,}29$

c) $P(X > 2 | Y \leq 1) = \dfrac{P(X > 2 \cap 3 - 2X \leq 1)}{P(3 - 2X \leq 1)} = \dfrac{P(X > 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \dfrac{P(X > 2)}{P(X \geq 1)} =$

$= \dfrac{P\left(\frac{X-2}{2} > \frac{2-2}{2}\right)}{P\left(\frac{X-2}{2} > \frac{1-2}{2}\right)} = \dfrac{1 - \phi(0)}{1 - \phi(-0{,}5)} = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{\phi(0{,}5)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{0{,}69} = 0{,}72$

$\rightarrow = 1 - P\left(\frac{X-2}{2} \leq -0{,}5\right)$

13. Intr-un sistem de comunicaţie se transmite un semnal X cu valorile $X = \pm 1$ şi se recepţionează un semnal cu zogomot, descris prin variabila $Y = X + N$, unde N este o variabilă aleatoare normal distribuită de parametrii $m = 0, \sigma^2 = 0.25$. Ştiind că $X = 1$, să se determine funcţia de repartiţie a semnalului recepţionat şi să se calculeze $P(Y > 0.5)$.

$N(0, 0{,}25) \Rightarrow \sigma = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

$Y = 1 + N$

$P(Y > 0{,}5) = 1 - P(Y \le 0{,}5) = 1 - P(1+N \le 0{,}5) = 1 - P(N \le -0{,}5)$

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(1+N \le y)$

$P(N \le -0{,}5) = P\left(\frac{N-0}{0{,}5} \le \frac{-0{,}5}{0{,}5}\right) = P(\underbrace{2N}_{Z} \le -1) = \phi(-1) = 1 - \phi(1) = 0{,}16$

$\Rightarrow P(Y > 0{,}5) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$