Seminar Nr. 1

Şiruri numerice (recapitulare)

Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

0.1 Şiruri numerice

$\boxed{1.}$ a) Să se arate că şirul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $n \in \mathbb{N}*$ verifică relaţia de recurenţă

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n \geq 2;$$

b) Să se demonstreze folosind criteriul cleştelui formula lui Wallis

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Indicaţie. a) Folosim formula de integrare prin părţi

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)' dx = ...$$

b) Reamintim semnificaţia simbolului dublu factorial !!:

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n)$$

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1)$$

Din a) rezultă $\frac{I_n}{I_{n-2}} = \frac{n-1}{n}, n \geq 2$ şi făcând succesiv pe $n = 2m$, respectiv $n = 2m+1$ se arată că $I_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$, respectiv $I_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$.

Se aratu a că şirul (I_n) este descrescător

$$I_{2m+1} \leq I_{2m} \leq I_{2m-1}$$

Se obţine dubla inegalitate

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \leq \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}$$

care înmulţită cu $\frac{(2m+1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{2}{\pi}$ prin trecere la limită pentru $m \to \infty$ rezultă egalitatea din enunţul problemei.

$\boxed{2.}$ a) Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$.

b) Folosind rezultatul anterior, arătaţi că $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}) = \dfrac{1}{e}$.

Indicaţie. a) Fie $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Se foloseşte rezultatul

Dacă (a_n) este un şir de numere pozitive şi $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$ atunci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

b) Se foloseşte lema lui Cesaro-Stolz pentru $a_n = \sqrt[n]{n!}$, $b_n = n$.

$\boxed{3.}$ Să se studieze convergenţa şirului

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n, n \in \mathbb{N}, n > 1.$$

Indicaţie. Se arată că şirul e monoton şi mărginit.

$\boxed{4.}$ Se consideră şirul $(x_n)_n$ dat de relaţia de recurenţă

$$x_n = \frac{1}{12}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

unde $x_0 = 1$ şi $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

i) Determinaţi termenul general al şirului;

ii) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluţie. **i)** Ecuaţia caracteristică asociată şirului este: $r^2 - \dfrac{1}{12}r - \dfrac{1}{2} = 0$, echivalentă cu $12r^2 - r - 6 = 0$. Soluţiile ecuaţiei sunt $\dfrac{3}{4}$ şi $-\dfrac{2}{3}$. Prin urmare, forma generală a şirului x_n este dată de

$$x_n = a \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + b \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

Din condiţiile $x_0 = 1$ şi $x_1 = \dfrac{1}{2}$ obţinem sistemul algebric $\begin{cases} a + b = 1 \\ \dfrac{3}{4}a - \dfrac{2}{3}b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ cu soluţia $a = \dfrac{14}{17}$, $b = \dfrac{3}{17}$. Prin urmare, şirul x_n este de forma

$$x_n = \frac{14}{17}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{3}{17}\left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

ii) Cum $\left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right| < \left(\frac{3}{4}\right)^n$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

$\boxed{5.}$ Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit astfel: $x_1 = 3$, $x_2 = 10$, iar pentru $n \geq 1$ avem relaţia de recurenţă

$$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 6n + 1.$$

i) Să se determine termenul general al şirului;

ii) Calculaţi limita acestui şir.

Soluţie. **i)** Ecuaţia caracteristică asociată şirului este: $r^2 - 7r + 12 = 0$ cu soluţiile $r_1 = 3$ şi $r_2 = 4$. Prin urmare $x_n^0 = a\cdot 3^n + b\cdot 4^n$. Determinăm termenul general de forma

$$x_n' = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_k$$

care satisface relaţia

$$x_{n+2}' - 7x_{n+1}' + 12x_n' = 6n + 1.$$

Se observă că $a_0 = a_1 = ... = a_{k-2} = 0$, deci $x_n' = \alpha n + \beta$, deci prin în;ocuire se obţine

$$[\alpha(n+2) + \beta] - 7[\alpha(n+1) + \beta] + 12(\alpha n) + \beta) = 6n + 1,$$

adică $6\alpha n - 5\alpha + 6\beta = 6n + 1$ de unde prin identificarea coeficienţilor se obţine $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Prin urmare forma şirului este

$$x_n = a\cdot 3^n + b\cdot 4^n + n + 1.$$

Cum $x_1 = 3$ şi $x_2 = 10$ avem $\begin{cases} 3a + 4b = 1 \\ 9a + 16b = 7 \end{cases}$, de unde rezultă $a = -1$, $b = 1$. Şirul căutat are forma

$$x_n = 4^n - 3^n + n + 1.$$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(4^n - 3^n + n + 1) = \lim\limits_{n\to\infty} 4^n\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{n}{4^n} + \frac{1}{4^n}\right] = \infty.$