Matematici speciale

(seminar 6 – S6)

27.03.2024

1. (Run-uri de biţi) Având un şir de n biţi rezultaţi din simularea de n ori a variabilei aleatoare X de mai sus, numim run de biţi o succesiune de biţi identici în şir. De exemplu în şirul de biţi $0, \underline{1,1}, 0, 0, 0, \underline{1}, 0, \underline{1,1,1}, 0$, avem următoarele run-uri de biţi 1:

$$11, \quad 1, \quad 111$$

În analiza şirurilor de biţi aleatori folosiţi în probleme de securitate (criptografie) este foarte util numărul mediu de run-uri de biţi conţinuţi în şir.

Notăm cu N variabila aleatoare ce dă numărul de run-uri de biţi 1, în şirul de n biţi

$$b_1, b_2, \ldots, b_n,$$

obţinuţi din simularea (observarea) variabilelor aleatoare independente $X_1, X_2, \ldots, X_n$, Bernoulli distribuite, adică: $X_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

Practic simulăm aceeaşi variabilă aleatoare X, doar că îi asociem indicele $1, 2, 3, \ldots, n$ care indică al câtelea bit generăm.

Prin urmare fiecare bit b_i din şir este o "observaţie" asupra variabilei X_i, $i = \overline{1,n}$

Y_i – v.a. ce ia val 1 dacă în poz i începe un run de 1

$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$ $\quad p = P(X_1 = 1)$

$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ pq & 1-pq \end{pmatrix}$ $\quad P(Y_2 = 1) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = q \cdot p$

$Y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ pq & 1-pq \end{pmatrix}$ $\quad P(Y_3 = 1) = P(X_2 = 0, X_3 = 1) = pq$

La fel după pt $i \geq 4$

$$N = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$M(N) = \sum_{i=1}^{n} M(Y_i) = 1 \cdot p + (n-1)\, p \cdot q$$

$$p(x) = \begin{cases} p, & \text{daca } x = 1 \\ 1-p, & \text{daca } x = 0 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

2. După ce un virus a pătruns în sistem, se verifică starea a 20 de fişiere. Ştiind că probabilitatea ca un fişier să fi fost afectat de virus este 0.2, independent de celelalte fişiere, să se determine probabilitatea ca cel mult cinci din cele 20 de fişiere să fi fost deteriorate ?

X - nr. fișiere infectate $\qquad p=0,2 \quad ; \quad n=20$

$$P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} C_{20}^{k} \cdot (0,2)^{k} \cdot (0,8)^{20-k}$$

$q = 1-p$

3. Presupunem că există 10 sateliţi GPS (Global Positioning System) pe orbită. O unitate GPS de la sol este activă, dacă cel puţin 4 sateliţi GPS funcţionează (pot fi contactaţi). Ştiind că încercările de contactare ale celor 10 sateliţi sunt independente şi că probabilitatea ca GPS-ul de la sol să eşueze în contactarea oricărui satelit din cei 10, este aceeaşi şi egală cu $p = 0.75$, să se calculeze probabilitatea ca unitatea GPS de la sol să fie activă.

$n=10, \quad p=0,75$ (prob. de eșuare) $\qquad X \sim bin(n,p)$

$$P(X \leq 6) = \sum_{k=0}^{6} C_{10}^{k} (0,75)^{k} (0,25)^{10-k}$$

$Y \sim bin(n, 1-p) \rightarrow$ succes

$$P(Y > 4) = \sum_{k=0}^{4} C_{10}^{k} (0,25)^{k} (0,75)^{10-k}$$

4. Un student participă la un examen grilă cu 20 de probleme. Fiecare problemă are 4 răspunsuri posibile. Studentul cunoaşte răspunsul la 10 întrebări, iar la restul răspunde aleatoriu. Daca X este variabila aleatoare ce înregistrează numărul de răspunsuri corecte la acest test grilă, să se determine distribuţia de probabilitate acestei variabile. Care este probabilitatea ca studentul să răspunda corect la mai mult de 15 întrebări, din cele 20?

$P(X \geq 15)$

10 știe

10 nu $\longrightarrow$ poate să mai răsp la minim 5 ?

$Y \sim bin(10, \frac{1}{4})$

$p = \frac{1}{4}$ (prob. de a răsp corect la o întrebare)

$$p_k = C_{10}^{k} \cdot (0,25)^{k} \cdot (0,75)^{10-k}$$

$$P(Y > 5) = \sum_{k=6}^{10} p_k$$

5. Se consideră jocul aruncării unui zar până când un număr mai mare decât 4 se obţine. → geom
Fie X variabila aleatoare ce înregistrează numărul de câte ori aruncăm zarul în acest caz.
Să se determine $P(X = k), k = 1, 2, \dots$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \xrightarrow{\text{vrem}} 5, 6 \Rightarrow p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(X = k) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

6. Aplicaţie Shazam identifică o melodie cu acurateţe de 95%.
Să se determine probabilitatea ca această aplicaţie să recunoască o melodie la a treia execuţie şi numărul mediu de încercări până la recunoaşterea melodiei (exclusiv)? $M(x)$ → geom

$p = 0{,}95 \qquad k = 3$

$P(x = 3) = 0{,}95 \cdot (0{,}05)^2$

! $M(X-1) = M(X) - 1 = \frac{1}{0{,}95} - 1$

succes

7. (Coupon collector problem) O firmă lansează următorul concurs: în cutiile de cereale produse de această firmă se găsesc n cupoane diferite, ce pot fi colectate si trimise pentru un premiu. Se presupune că fiecare cupon din cutie este ales independent si uniform din cele n posibile şi că nu se fac schimburi de cupoane între participanţii la acest joc.
Să se determine numărul mediu de cutii de cereale ce trebuie cumpărate pentru a avea cel puţin unul din fiecare cupon?

?? nu are sens ??

Rezolvare: Fie X variabila aleatoare ce înregistrează numărul de cutii ce sunt cumpărate pentru a avea cel puţin unul din fiecare cupon. Ne interesează $M(X)$. Notăm cu X_i variabila aleatoare ce indică numărul de cutii cumpărate în timp ce ai deja $i-1$ cupoane diferite. Evident, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Variabilele X_i sunt distribuite geometric: dacă ai $i-1$ cupoane diferite, atunci probabilitatea de succes (sa obţii unul nou) este $p = \frac{n-(i-1)}{n}$.
Deci, $M(X_i) = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$.
Din liniaritatea mediei, avem că $M(X) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.
Notăm $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ şi se numeşte *număr armonic*. Se ştie că $H(n) = ln(n) + O(n)$.
De exemplu, pentru $n = 50$, trebuie să cumpărăm în medie 225 cutii.
Această problema are diverse aplicaţii în CS, pentru informatii suplimentare, see Probabilty - Computing, M. Mitzenmacher, Eli Upfal.

8. Numărul de mesaje email ce este primit într-o săptămână poate fi modelat de o variabilă Poisson cu media $\lambda = 0.2$ mesaje/min.

a) Să se determine probabilitatea de a nu primi nicun mesaj într-un interval de 5 minute.

b) Care este probabilitatea de a primi mai mult de 3 mesaje într-un interval de 10 minute?

a) $X \sim Pois(\lambda')$

$\lambda' = 5 \cdot 0{,}2 = 1$

$$P(X=0) = \frac{e^{-\lambda'} \cdot \lambda'^0}{0!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

b) $Y \sim Pois(\lambda'')$

$\lambda'' = 10 \cdot 0{,}2 = 2$

$$P(Y > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \frac{e^{-\lambda''} \lambda^0}{0!} - \frac{e^{-\lambda''} \lambda^1}{1!} - \frac{e^{-\lambda} \lambda^2}{2!} - \frac{e^{-\lambda} \lambda^3}{3!}$$