Seminar Nr. 10-11

Derivate parţiale pentru funcţii de mai multe variabile

Derivate parţiale de ordinul întâi

1. *Fie* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4+y^4}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$. *Să se arate că funcţia* f *este continuă parţial în* $x_0=(0,0)$, *atât în raport cu variabila* x *cât şi în raport cu variabila* y, *dar nu are derivate parţiale în origine.*

Soluţie. Într-adevăr, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=1=f(0,0)$ şi $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=1=f(0,0)$, deci funcţia f este continuă parţial în raport cu x şi în raport cu y în punctul $x_0=(0,0)$. Însă derivatele parţiale,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y} \end{aligned}$$

nu există, ceea ce înseamnă că f este continuă parţial în origine, dar nu are derivate parţiale în origine.

2. i) *Fie funcţia* $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ în care $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|y\neq 0\}$ *şi punctul* $x_0\in D$, $x_0=(-1,1)$. *Să se calculeze:* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial h}(x_0)$, *dacă* $h=\overline{e_1}-2\overline{e_2}$.

ii) Să se scrie exprsia diferenţialei totale şi a diferenţialei în punctul $(1,-1)$ pentru funcţia de la **i).**

Soluţie. **i)** Conform definiţiei derivatelor parţiale avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x,1)-f(-1,1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{4}}{x+1}=$$
$$=\lim_{x\to-1}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{x}{x^2+1}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{\pi+2}{4};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)=\lim_{y\to1}\frac{f(-1,y)-f(-1,1)}{y-1}=\lim_{y\to1}\frac{\operatorname{arctg}(1/y)-\frac{\pi}{4}}{y-1}=-\frac{1}{2}.$$

Având în vedere că $x_0+th=(-1,1)+t\left(\overline{e_1}-2\overline{e_2}\right)=(-1+t,1-2t)$, rezultă că derivata lui f după direcţia vectorului h în punctul x_0 are expresia

$$\frac{\partial f}{\partial h}(-1,1)=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(-1+t,1-2t)-f(-1,1)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{(-1+t)\operatorname{arctg}\left(\frac{t-1}{1-2t}\right)-\frac{\pi}{4}}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t-1}{1-2t}\right)+\frac{1-t}{(1-2t)^2+(t-1)^2}\right]=\frac{2-\pi}{4}.$$

ii) Derivatele parţiale de ordinul întâi într-un punct curent sunt

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\arctan\frac{x}{y}+\frac{xy}{x^2+y^2};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x^2}{x^2+y^2};$$

deci diferenţiala totală a lui f este

$$df=\left(\arctan\frac{x}{y}+\frac{xy}{x^2+y^2}\right)dx-\frac{x^2}{x^2+y^2}dy.$$

În punctul $(1,-1)$ avem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1)=-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{1}{2}$, deci $d_{(1,-1)}f=\left(-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)dx-\dfrac{1}{2}dy.$

3. *Folosind definiţia diferenţiabilităţii, să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, definită prin*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

nu este diferenţiabilă în origine $(x_0 = (0,0))$.

Soluţie. Dacă f ar fi diferenţiabilă în $x_0 = (0,0)$, atunci conform Def.2.1 a diferenţiabilităţii unei funcţii într-un punct x_0, rezultă că ar exista o aplicaţie liniară unică $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ şi o funcţie $\omega_{x_0} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă şi nulă în punctul x_0, astfel încât oricare ar fi punctul $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ are loc egalitatea

$$f(x,y) = f(0,0) + \Phi(x-0, y-0) + \|(x,y)-(0,0)\| \, \omega_{x_0}(x,y).$$

Atunci ar rezulta că f este derivabilă parţial în x_0, deci $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0)$ există şi sunt finite. Calculând aceste derivate parţiale rezultă

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{|x|} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{|y|} = 0.
\end{aligned}$$

Conform reprezentării diferenţialei, funcţionala Φ este dată de egalitatea

$$\Phi(x,y) = d_{x_0} f(x-0, y-0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\, dy = 0.$$

Considerând acum funcţia $\omega_{x_0} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\omega_{x_0}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)-\Phi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

în cazul considerat se scrie sub forma

$$\omega_{x_0}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Ar trebui ca $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \omega_{x_0}(x,y) = 0$, însă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ nu există, aşa că funcţia considerată nu este diferenţiabilă în origine.

4. *Să se determine matricea jacobiană asociată funcţiilor vectoriale:*

i) $F : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z) = \left(x^2 + \ln y - 3z, \dfrac{xy}{z}\right)$;

ii) $F : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ F(x,y,z,t) = (xe^t, xyz, z\ln t)$.

Soluţie. **i)** Domeniul de definiţie este mulţimea A$= \{(x,y,z)\,|y>0, z\neq 0\}$. Matricea jacobiană este de tipul $(2,3)$ (două linii şi trei coloane),

$$J_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & \dfrac{1}{y} & -3 \\ \dfrac{y}{z} & \dfrac{x}{z} & -\dfrac{xy}{z^2} \end{pmatrix},$$

$F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$.

ii) Domeniul lui F este mulţimea A$= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\,|t>0\}$; matricea jacobiană este

$$J_F(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} & \dfrac{\partial f_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} & \dfrac{\partial f_2}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} & \dfrac{\partial f_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & xe^t \\ yz & xz & xy & 0 \\ 0 & 0 & \ln t & \dfrac{z}{t} \end{pmatrix}.$$

4. *Să se calculeze expresia* $E(x,y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *pentru următoarele funcţii:*

i) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4} - xy$; **ii)** $f(x,y) = \sin\dfrac{x}{y} - \ln\dfrac{y}{x}$.

Soluţie. **i)** Deoarece $f(tx,ty) = \sqrt{t^4x^4+t^4y^4} - t^2xy = t^2 f(x,y)$, rezultă că f este omogenă în sens Euler de grad doi. Conform formulei lui Euler avem $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2f(x,y)$.

ii) Deoarece $f(tx,ty) = \sin\dfrac{tx}{ty} - \ln\dfrac{ty}{tx} = t^0 f(x,y)$, rezultă că f este omogenă de grad zero. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

5. Fie $f(x,y,z) = x^2yz^3$ un câmp scalar, iar $\overline{v} = xz\overline{i} - y^2\overline{j} + 2x^2y\overline{k}$ un câmp vectorial în care $f, \overline{v} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Se cere:

i) grad$f$; **ii)** $\nabla \cdot \overline{v}$; **iii)** $\nabla \times \overline{v}$; **iv)** $\mathrm{div}(f\overline{v})$; **v)** $\mathrm{rot}(f\overline{v})$.

Soluţie. În fiecare caz se vor folosi definiţiile corespunzătoare:

i) $\nabla f(x,y,z) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right) f(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\overline{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\overline{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overline{k}$

$$= 2xyz^3\overline{i} + x^2z^3\overline{j} + 3x^2yz^2\overline{k}.$$

ii) $\nabla\cdot\overline{v} = \mathrm{div}\overline{v} = \dfrac{\partial}{\partial x}(xz) + \dfrac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \dfrac{\partial}{\partial z}(2x^2y) = z - 2y.$

iii) $\nabla\times\overline{v} = \mathrm{rot}\ \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix} = 2x^2\overline{i} + (x - 4xy)\overline{j}.$

iv) $\mathrm{div}(f\overline{v}) = \nabla\cdot(f\overline{v}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^3yz^4) + \dfrac{\partial}{\partial y}(-x^2y^3z^3) + \dfrac{\partial}{\partial z}(2x^4y^2z^3)$

$$= 3x^2yz^4 - 3x^2y^2z^3 + 6x^4y^2z^2.$$

v)

$$\mathrm{rot}(f\overline{v}) = \nabla\times(f\overline{v}) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3yz^4 & -x^2y^3z^3 & 2x^4y^2z^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (4x^4yz^3 + 3x^2y^3z^2)\overline{i} + (4x^3yz^3 - 8x^3y^2z^3)\overline{j} - (2xy^3z^3 + x^3z^4)\overline{k}.$$

Derivate parţiale de ordin superior

1. *Se consideră funcţia* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *definită prin* $f(x,y) = y\sin(x^2 - 2xy)$. *Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi şi se arate că derivatele parţiale mixte de ordinul doi coincid în orice punct din plan.*

Soluţie. Folosind formulele de derivare cunoscute se obţin derivatele parţiale de ordinul întâi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(2x - 2y)\cos\left(x^2 - 2xy\right); \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\left(x^2 - 2xy\right) - 2xy\cos\left(x^2 - 2xy\right).$$

Derivând încă o dată se obţin derivatele parţiale de ordinul doi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2y\cos\left(x^2-2xy\right) - y\left(2x-2y\right)^2 \sin\left(x^2-2xy\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -4x\cos\left(x^2-2xy\right) + 4x^2 y \sin\left(x^2-2xy\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (2x-2y)\cos\left(x^2-2xy\right) - 2y\cos\left(x^2-2xy\right) +\\
&\quad +2xy\left(2x-2y\right)\sin\left(x^2-2xy\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x-2y)\cos\left(x^2-2xy\right) - 2y\cos\left(x^2-2xy\right) +\\
&\quad +2xy\left(2x-2y\right)\sin\left(x^2-2xy\right),
\end{aligned}$$

aşa că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, oricare ar fi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. *Fie* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. *Să se arate că:*

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; **ii)** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

iii) *Din ce cauză nu are loc egalitatea de la punctul* **ii)**?

Soluţie. **i)** Conform definiţiei derivatelor parţiale se deduce că

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0;\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.
\end{aligned}$$

ii) Pentru orice $(x,y) \neq (0,0)$, derivatele parţiale de ordinul întâi sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'_x(x,y) = \frac{x^2 y\left(x^2+3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'_y(x,y) = \frac{x^3\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Din acestea se obţin derivatele parţiale de ordinul doi mixte:

$$\begin{aligned} f''_{xy}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0;\\ f''_{yx}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^5}=1. \end{aligned}$$

iii) Egalitatea $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$ nu are loc deoarece f''_{xy} şi f''_{yx} nu sunt continue în origine, neavând limită în origine.

3. *Să se demonstreze că derivatele parţiale mixte de ordinul doi ale funcţiei $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, definită prin egalitatea*

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ sunt diferite în origine.

Soluţie. Prin calcul direct se obţin derivatele parţiale de ordinul întâi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2};\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},\forall(x,y)\neq(0,0),$$

de unde se deduce că $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y$, iar $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x$; $x,y\neq 0$. Având în vedere definiţia derivatelor parţiale de ordinul întâi, rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-y,\forall y\neq 0;\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\lim_{y\to 0}x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=x,\forall x\neq 0 \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Din definiţia derivatelor parţiale de ordinul doi se obţin expresiile:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1, \end{aligned}$$

de unde se constată că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1 \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

4. *Calculaţi:*
$\dfrac{\partial^{67} f}{\partial y \partial x^{66}}$ pentru funcţia $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (2x+3y)\ln(3x+4y)$;

Soluţie. Reamintim că pentru orice două funcţii $g, h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă C_D^n, are loc formula lui Leibniz:

$$(g \cdot h)^{(n)}(x) = C_n^0 g(x) h^{(n)}(x) + C_n^1 g'(x) h^{(n-1)}(x) + C_n^2 g''(x) h^{(n-2)}(x) + ... + C_n^n g^{(n)}(x) h(x).$$

Considerând $g(x) = 2x+3y$ şi $h(x) = \ln(3x+4y)$ avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{66} f}{\partial x^{66}} &= C_{66}^0 (2x+3y) \cdot \ln(3x+4y)^{(66)} + C_{66}^1 (2x+3y)' \cdot \ln(3x+4y)^{(65)} + ... \\ &+ C_{66}^{66} (2x+3y)^{(66)} \cdot \ln(3x+4y) \\ &= (2x+3y) \cdot \ln(3x+4y)^{(66)} + 66 \cdot 2 \cdot \ln(3x+4y)^{(65)} \\ &= (2x+3y) \cdot \left(-\frac{65! \cdot 3^{66}}{(3x+46)^{66}} \right) + 132 \cdot \frac{64! \cdot 3^{65}}{(3x+4y)^{65}} \\ &= \frac{64! \cdot 3^{65}}{(3x+4y)^{65}} \left[-\frac{65(2x+3y) \cdot 3}{3x+4y} + 132 \right] = \frac{64! \cdot 3^{65}(6x-57y)}{(3x+4y)^{66}}. \end{aligned}$$

Dacă notăm cu $u(y) = \dfrac{64! \cdot 3^{65}(6x-57y)}{(3x+4y)^{66}}$, rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{67} f}{\partial y \partial x^{66}} &= \frac{\partial u}{\partial y} = 64! \cdot 3^{65} \cdot \frac{-57(3x+4y)^{66} - (6x-57y) \cdot 66(3x+4y)^{65} \cdot 4}{(3x+4y)^{132}} \\ &= -64! \cdot 3^{66} \frac{57x+76y+88}{(3x+4y)^{67}}. \end{aligned}$$

5. *Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi pentru următoarele funcţii compuse:* **i)** $f(x,y) = g\left(\dfrac{y}{x}; x^2 y\right)$, $\quad g \in C^2(D)$;
ii) $f(x,y) = g(x \sin y, x^2 - y^2)$.

Soluţie. **i)** Fie $u(x,y) = \dfrac{y}{x}$ şi $v(x,y) = x^2 y$ componentele funcţiei g. Conform teoremei de derivare a funcţiilor compuse obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + 2xy \frac{\partial g}{\partial v},$$

respectiv
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial xy}+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}+x^2\frac{\partial g}{\partial v}.$$
Considerăm operatorii de derivare notaţi prin $\delta_x\cdot$, respectiv $\delta_y\cdot$.
$$\delta_x\cdot=-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial\cdot}{\partial u}+2xy\frac{\partial\cdot}{\partial v},\ \ \delta_y\cdot=\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial\cdot}{\partial u}+x^2\frac{\partial\cdot}{\partial v}.$$
Se obţin derivatele parţiale de ordinul doi
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}+2xy\frac{\partial g}{\partial v}\right)=$$
$$=\frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\cdot\delta_x\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)+2y\frac{\partial g}{\partial v}+2xy\cdot\delta_x\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)=$$
$$=\frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\left[-\frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)+2xy\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right]+$$
$$+2y\frac{\partial g}{\partial v}+2xy\left[-\frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)+2xy\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\right]=$$
$$=\frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\frac{2y^2}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+2y\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{4y^2}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+2y\frac{\partial g}{\partial v}+4x^2y^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}+x^2\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\frac{1}{x}\delta_y\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)+x^2\delta_y\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)=$$
$$=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)+x^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right]+x^2\left[\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)+x^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2x\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+x^4\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u}+2xy\frac{\partial g}{\partial v}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\delta_y\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)+$$
$$+2x\frac{\partial g}{\partial v}+2xy\delta_y\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\left[\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)+x^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right]+$$
$$+2x\frac{\partial g}{\partial v}+2xy\left[\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)+x^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\right]=$$
$$=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+y\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+2x\frac{\partial g}{\partial v}+2x^3y\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

ii) Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei compuse sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \sin y \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + 2x\frac{\partial g}{\partial v},$$

respectiv

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial xy} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -x\cos y \cdot \frac{\partial g}{\partial u} - 2y\frac{\partial g}{\partial v}.$$

Considerând operatorii de derivare de forma $\delta_x \cdot = \sin y\frac{\partial \cdot}{\partial u} + 2x\frac{\partial \cdot}{\partial v}$ şi $\delta_y \cdot = -x\cos y\frac{\partial \cdot}{\partial u} - 2y\frac{\partial \cdot}{\partial v}$ rezultă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin y\frac{\partial g}{\partial u} + 2x\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \sin y \cdot \delta_x\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) + 2\frac{\partial g}{\partial v} +$$
$$+2x \cdot \delta_x\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \sin y\left[\sin y\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) + 2x\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right] + 2\frac{\partial g}{\partial v} +$$
$$+2x\left[\sin y\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) + 2x\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\right] = \sin^2 y\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 4x\sin y\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-x\cos y\frac{\partial g}{\partial u} - 2y\frac{\partial g}{\partial v}\right) =$$
$$= x\sin y\frac{\partial g}{\partial u} - x\cos y \cdot \delta_y\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) - 2\frac{\partial g}{\partial v} - 2y \cdot \delta_y\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = x\sin y\frac{\partial g}{\partial u} -$$
$$-x\cos y\left[-x\cos y\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) - 2y\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right] - 2\frac{\partial g}{\partial v} -$$
$$-2y\left[-x\cos y\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) - 2y\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\right] =$$
$$= x\sin y\frac{\partial g}{\partial u} + x^2\cos^2 y\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 4xy\cos y\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 4y^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - 2\frac{\partial g}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin y\frac{\partial g}{\partial u} + 2x\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \cos y\frac{\partial g}{\partial u} + \sin y\delta_y\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) +$$

$$+2x\delta_y\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \cos y\frac{\partial g}{\partial u} + \sin y\left[-x\cos y\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) - 2y\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right] +$$

$$+2x\left[-x\cos y\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) - 2y\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\right] =$$

$$= \cos y\frac{\partial g}{\partial u} - x\sin y\cos y\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - (2y\sin y + 2x^2\cos y)\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + 4xy\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

Probleme propuse

1. *Folosind definiţia să se calculeze derivatele parţiale în punctele indicate pentru următoarele funcţii:*

i) $f(x,y) = 4x^2 - x^2y$, $x_0 = (2,1)$; **ii)** $f(x,y) = \arctan\frac{x}{2y}$, $x_0 = \left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

iii) $f(x,y,z) = \ln(1+xyz)$, $x_0 = (1,2,3)$.

2. *Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi într-un punct curent, ale următoarelor funcţii* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

i) $f(x,y) = x^2y - y^3x^4 - 2xy + y - x^5 + 1$; **ii)** $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^3} - y^2\sqrt[3]{x^2}$;

iii) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; **iv)** $f(x,y) = xye^{\frac{x}{y}} + y^2 2^{xy}$;

v) $f(x,y,z) = \ln(xy+yz+zx)$;

vi) $f(x,y,z) = \arctan\dfrac{yz}{x}$; **vii)** $f(x,y,z) = z\arcsin\dfrac{x}{y}$.

3. *Demonstraţi că funcţiile următoare verifică relaţiile indicate:*

i) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}\ln y$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{f}{\ln y}$;

ii) $T(l,g) = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, $l\dfrac{\partial T}{\partial l} + g\dfrac{\partial T}{\partial g} = 0$;

iii) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = 1$;

iv) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$.

4. *Să se scrie matricea Jacobi asociată funcţiilor vectoriale:*
i) $F: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $F(x,y)=(5^{x-y}-y;\sqrt[5]{x^2y-3xy^3};\cos\frac{2y}{3x})$;
ii) $F: D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=\left(\frac{x^2z-y}{z^3};\ln\dfrac{xy^z}{z^{xy}}\right)$.
iii) $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $F(x,y)=(2x\cos(x^3+y);\sqrt[3]{2x+5y};4^{xy^4}\ln y)$.

5. *Să se demonstreze că funcţiile:* $f(x,y)=x^3+y^3\ln\dfrac{x^2+y^2}{x^2}$ *şi* $g(x,y,z)=x^2+yz+xye^{\frac{y}{z}}$, *verifică relaţiile* $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=3f(x,y)$ *şi* $\dfrac{\partial g}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial z}=2g(x,y,z)$.

6. *Folosind definiţia diferenţiabilităţii, să se arate că funcţia* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, *definită prin*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

este diferenţiabilă în origine.

7. i) Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi pentru următoarele funcţii într-un punct curent din domeniul de definiţie: $f_1(x,y)=x^3y^2-2xy^2+xy-y^3+5x-1$, $f_2(x,y,z)=z\ln(y^2-xz)$, $f_3(x,y,z)=(x^2-z)e^{yz-x}$.

ii) Să se scrie expresiile diferenţialei de ordinul doi pentru funcţiile de la **i)** în punctele $(1,-1)$ pentru f_1, $(1,3,2)$ pentru f_2 şi $(-1,2,-2)$ pentru f_3.

iii) Scrieţi matricea Hesse asociată funcţiilor f_i, $i=\overline{1,3}$ în punctele indicate la **ii)**.

8. *Să se demonstreze că funcţia* $f(x,y)=\ln\dfrac{x^2}{y^2}$, $y\neq0$ *verifică egalitatea*

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

9. *Să se demonstreze că funcţia* $f(x,y)=\sqrt[13]{x^2y^{24}+y^{17}x^9}$, $y\neq0$ *verifică* *egalitatea*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 2\sqrt[13]{2}.$$

10. *Să se calculeze*

i) $\dfrac{\partial^9 f}{\partial x^4 \partial y^5}$, dacă $f(x,y) = (x+y)\ln(x+y)$.

ii) $\dfrac{\partial^{2010} f}{\partial x^{1010} \partial y^{1000}}$, unde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (2y-3x)e^{x-5y}$;

iii) $\dfrac{\partial^{218} f}{\partial x^{108} \partial y^{110}}$, unde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x+4y)\cos(x+y)$;

iv) $\dfrac{\partial^{50} f}{\partial y \partial x^{49}}$, unde $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (y - x^2 + xy)\sin(x+y)$.

11. *Demonstraţi că funcţia* $f(x,y) = x \arcsin \dfrac{y}{x}$, *verifică ecuaţia*

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (x+y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

12. *Să se arate că următoarele funcţii sunt armonice:*

i) $f(x,y) = e^x \cos y$, **ii)** $g(x,y) = \arctan \dfrac{x}{y}, y \neq 0$.