SEMINAR 1 15.03.2024

1.1. SUME, PRODUSE DE MIN-TERMI, MAX-TERMI, DON'T CARE CU AJUTORUL HĂRȚILOR KARNAUGH

1.1.1. NOȚIUNI TEORETICE

• FORMA CANONICĂ NORMALĂ DISJUNCTIVĂ aka SUM OF PRODUCTS:

→ aici, căutăm toate cazurile ADEVĂRATE care satisfac condițiile

→ $\boxed{\sum m_i}$, unde m_i este un produs (AND) între termeni

• FORMA CANONICĂ NORMALĂ CONJUNCTIVĂ aka PRODUCT OF SUMS:

→ aici, căutăm toate cazurile FALSE care satisfac condițiile

→ $\boxed{\prod M_i}$, unde M_i este o sumă (OR) de termeni

ex:

index i	A	B	C	$F=\overline{A}\cdot\overline{B}+A\cdot B\cdot C$	Coeficienţi	Minterm	Maxterm
0	0	0	0	1	$d_0=1$	$m_0=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$M_0=A+B+C$
1	0	0	1	1	$d_1=1$	$m_1=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$	$M_1=A+B+\overline{C}$
2	0	1	0	0	$d_2=0$	$m_2=\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$	$M_2=A+\overline{B}+C$
3	0	1	1	0	$d_3=0$	$m_3=\overline{A}\cdot B\cdot C$	$M_3=A+\overline{B}+\overline{C}$
4	1	0	0	0	$d_4=0$	$m_4=A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$M_4=\overline{A}+B+C$
5	1	0	1	0	$d_5=0$	$m_5=A\cdot\overline{B}\cdot C$	$M_5=\overline{A}+B+\overline{C}$
6	1	1	0	0	$d_6=0$	$m_6=A\cdot B\cdot\overline{C}$	$M_6=\overline{A}+\overline{B}+C$
7	1	1	1	1	$d_7=1$	$m_7=A\cdot B\cdot C$	$M_7=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

SOP: $F_{SOP}=\sum(d_i\cdot m_i)=1\cdot m_0+1\cdot m_1+0\cdot m_2+0\cdot m_3+0\cdot m_4+0\cdot m_5+0\cdot m_6+1\cdot m_7=m_0+m_1+m_7=\sum(0,1,7)$

POS: $F_{POS}=\prod(d_i+M_i)=(1+M_0)\cdot(1+M_1)\cdot(0+M_2)\cdot(0+M_3)\cdot(0+M_4)\cdot(0+M_5)\cdot(0+M_6)\cdot(1+M_7)=$
$=M_2\cdot M_3\cdot M_4\cdot M_5\cdot M_6=\prod(2,3,4,5,6)$

SOP: $F_{SOP}=m_0+m_1+$ ———— $+m_7=\sum(0,1,7)$

POS: $F_{POS}=$ ———— $M_2\cdot M_3\cdot M_4\cdot M_5\cdot M_6=\prod(2,3,4,5,6)$

Obs: indecșii min-termilor care se găsesc în SOP nu se vor regăsi prin indecșii max-termilor

Relații între min-termi și max-termi:

- $M_i = \overline{m_i}$

- **METODA DE MINIMIZARE KARNAUGH**

- simplifică ecuațiile logice
- se poate aplica și pentru SOP, și pentru POS
- DIAGRAMELE KARNAUGH: matrice, cu proprietatea că 2 celule vecine corespund unor mintermi adiacenți

  |||

  diferă printr-un singur bit

  : facem grupări MAXIMALE de 2^k elemente

  : ne folosim și de DON'T CARE, dacă există

$\Rightarrow$ o formă simplificată, cu mai puține porți $\rightarrow$ DELAY ↓; COST ↓;

Ex) Realizați tabelul de adevăr, formele canonice normale (Σ și Π) harta Karnaugh și designul hardware pentru următoarele exemple:

a) $F_1 = \Sigma(0,1,5,6,7)$

b) $F_2 = \Pi(1,2,3,12,13)$

c) majority voter pe 4 biți, cu 3 cazuri (PASSED | FAILED | EQ)

Rezolvare:

a) • avem sumă de mintermi de la 0 la 7 $\Rightarrow$ 8 poziții cel puțin

• $\log_2(8) = 3 \Rightarrow$ 3 biți variabile de intrare, pe care le botezăm a, b, c

• Știm că F_1 e scrisă ca sumă de mintermi => punem 1 în tabelul de adevăr la indecșii precizați

A	B	C	F1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

• din $F_1 = \sum(0,1,5,6,7)$ =>

$\Rightarrow F_1 = \prod(2,3,4)$

• facem harta Karnaugh:

3 biți, îi separăm 1 cu 2:

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1

• grupăm:

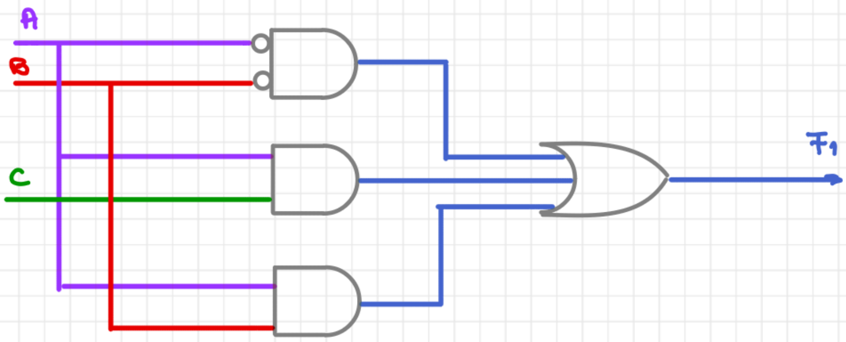
A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1

$\bar{A}\bar{B}$

$A \cdot C$

$A \cdot B$

$\Rightarrow F_1 = \bar{A}\bar{B} + A \cdot C + A \cdot B$



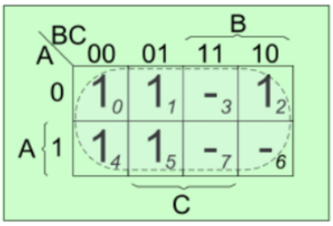
b)

c) La intrare, vom avea 4 biți, iar la ieșire vor fi 2 biți, unul pentru PASSED/FAILED, iar unul pentru cazul de egalitate ex Să se simplifice funcţiile incomplet definite, utilizând diagrame V-K.

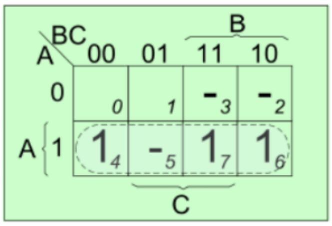
a) $F_a(A,B,C) = \sum(0,1,2,4,5) + d(3,6,7)$
b) $F_b(A,B,C) = \sum(4,6,7) + d(2,3,5)$
c) $F_c(A,B,C,D) = \sum(0,6,8,13,14) + d(2,4,10)$
d) $F_d(A,B,C,D) = \sum(0,2,4,5,8,14,15) + d(7,10,13)$
e) $F_e(A,B,C,D) = \sum(4,6,7,8,12,15) + d(2,3,5,10,11,14)$
f) $F_f(A,B,C,D) = \sum(1,2,4,5,6,9,10,13,14) + d(7)$

Rezolvare:

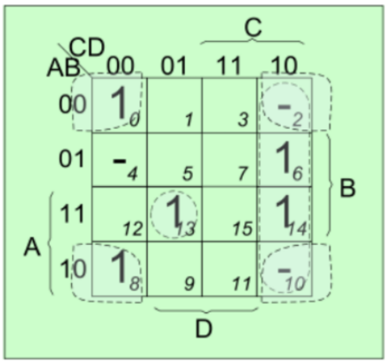
a) $F_a(A,B,C) = 1$
b) $F_b(A,B,C) = A$
c) $F_c(A,B,C,D) = \overline{B}\cdot\overline{D} + C\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$



a)



b)



c)

ex Implementaţi următoarea funcţie exclusiv cu porţi NAND cu două intrări: $(A\cdot B + \overline{A}\cdot\overline{B})\cdot(C\cdot\overline{D} + \overline{C}\cdot D)$

• prima variantă, directă: $\overline{\overline{\overline{\overline{A\cdot B}\cdot\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}}\cdot\overline{\overline{C\cdot\overline{D}}\cdot\overline{\overline{C}\cdot D}}}}$

• a doua variantă, eficientă:

→ desfacem parantezele:

→ VK ⇒ minimizare

→ sinteză cu porţi NAND

1.2. APLICAȚII ALE HĂRȚILOR KARNAUGH. DISPOZITIVE COMBINAȚIONALE SIMPLE

1.2.1. COMPLEMENTATOR ÎN C2 PE 4 BIȚI

- intrare: 4 biți, număr cu semn în SM
- ieșire: 4 biți, număr cu semn în C2

IN				OUT			
i_3	i_2	i_1	i_0	o_3	o_2	o_1	o_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1

→ 4 hărți Karnaugh

→ combinațional

1.2.2. 9's COMPLEMENTER IN BCD PE 4 BIŢI ÎN SCĂZĂTOARELE BCD

$X = X_{n-1} X_{n-2} \dots X_1 X_0$, X_i - BCD , X - număr de k cifre BCD

$Y = Y_{n-1} Y_{n-2} \dots Y_1 Y_0$, Y_i - BCD , Y - număr de k cifre BCD

$Y - X$:

• complementul de 9 al lui X_i : $\overline{X_i^*} = 9 - X_i$

$$\Rightarrow \overline{X^*} = \overline{X_{n-1}^*}\ \overline{X_{n-2}^*} \dots \overline{X_1^*}\ \overline{X_0^*} = \begin{array}{cccccc} 9 & 9 & 9 & \dots & 9 & 9 \\ X_{n-1} & X_{n-2} & X_{n-3} & \dots & X_1 & X_0 \end{array} -$$

$$\Rightarrow \overline{X^*} = 10^k - 1 - X$$

$$\Rightarrow (Y - X) \bmod 10^k = \big(Y + \underbrace{10^k - 1 - X}_{\overline{X^*}} + 1\big) \bmod 10^k = Y + \overline{X^*} + 1$$

• pentru $\overline{X^*}$: $X_i = x_3 x_2 x_1 x_0$ (input)

$\overline{X_i^*} = x_3^* x_2^* x_1^* x_0^*$ (output)

$\overline{X_i^*} = 9 - X_i$

Inputs				Outputs			
x_3	x_2	x_1	x_0	x_3^*	x_2^*	x_1^*	x_0^*
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0

x_3^* :

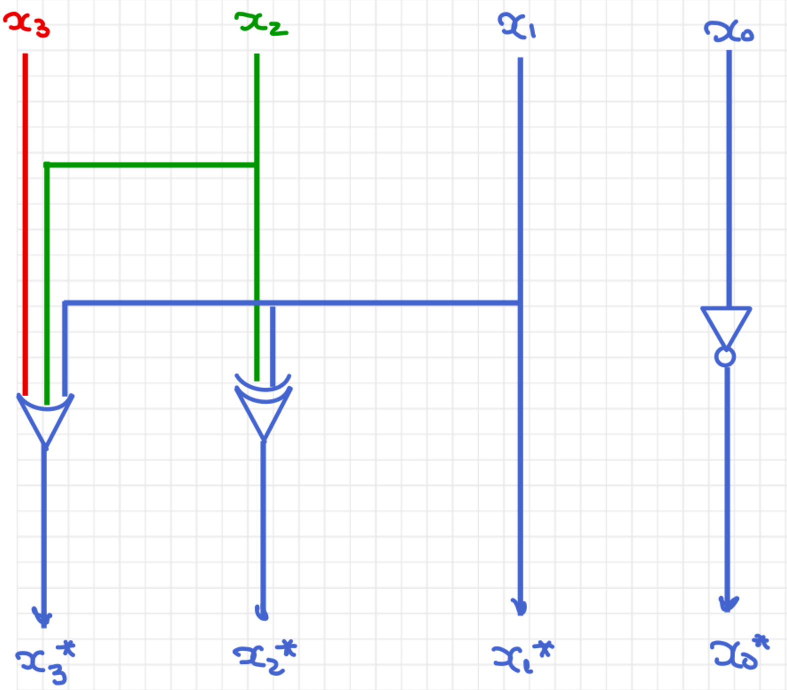
$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	$\boxed{1_{0}\ \ 1_{1}}$		0_{3}	0_{2}
01	0_{4}	0_{5}	0_{7}	0_{6}
11	d_{12}	d_{13}	d_{5}	d_{14}
10	0_{8}	0_{9}	d_{11}	d_{10}

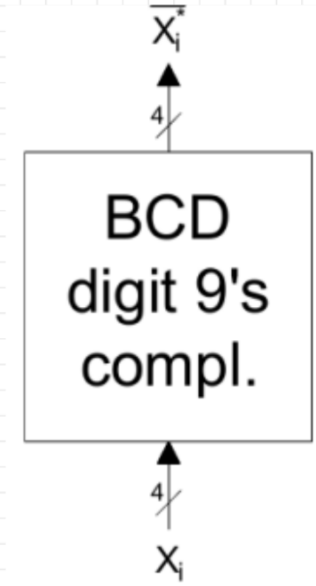
$x_1^* = x_1$

x_2^* :

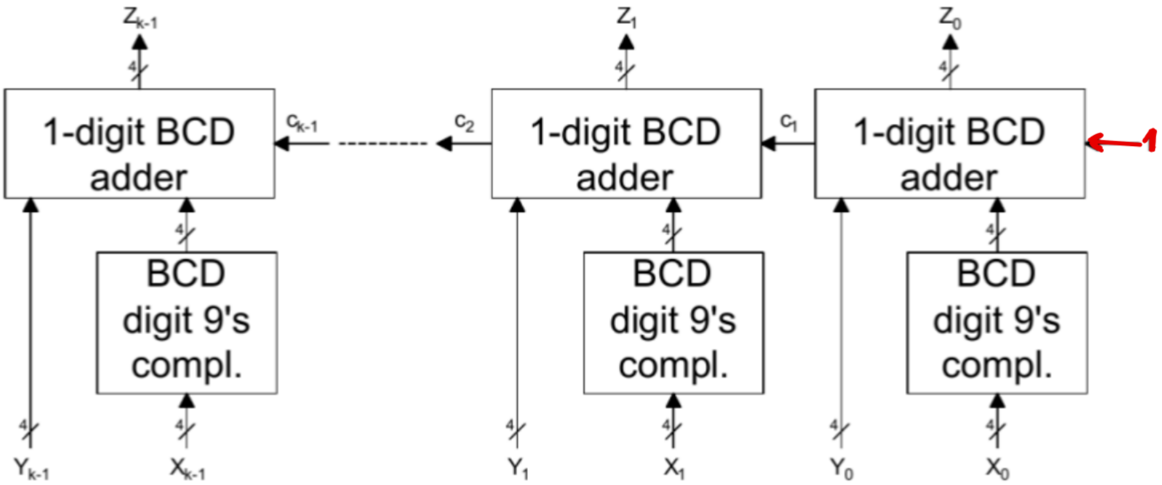
$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	0_{0}	0_{1}	1_{3}	1_{2}
01	1_{4}	1_{5}	0_{7}	0_{6}
11	d_{12}	d_{13}	d_{5}	d_{14}
10	0_{8}	0_{9}	d_{11}	d_{10}

$x_0^* = \overline{x_0}$





Arhitectura unui scăzător pentru numere BCD pe *k*-cifre:



Ex: Se dau numerele: $Y = 493$ și $X = 197$, în BCD. Scădeți-le!

$Y = 493$

$X = 197 \Rightarrow \overline{X^*} = 999 - 197 = 802 \Rightarrow$

$\Rightarrow (Y - X) \bmod 10^3 = (Y + \overline{X^*} + 1) \bmod 10^3 = (493 + 802 + 1) \bmod 10^3 = 296.$

1.2.3. 9'S COMPLEMENTER ÎN E3 PE 4 BIȚI LA SCĂDEREA E3:

- tot e same, cu excepția E3 complementer-ului: $X_i \Rightarrow \overline{X_i^*}$: $\overline{x_i^*} = \overline{x_i}$ (negarea biților lui X)