TEORIE - CAPITOLE MAC.

D1.

1. Evaluarea unui polinom
2. Numere binare:
   - Conversie zecimal- binar
   - Conversie binar - zecimal
3. Reprezentare în virgulă flotantă a nr. reale

NU INTRĂ

4. Rezolvarea ecuațiilor:
   - Metoda bisecției
   - iterația de punct fix (IPF)
   - Metoda lui Newton
   - Metoda secantei
   - Metoda falsei poziții
5. Sisteme de ecuații:
   - Eliminare gaussiană
   - Factorizarea LU
   - Factorizarea PA = LU.
   - Metoda lui Jacobi. Matrici strict diagonal dominante
   - Metoda Gauss- Seidel.
   - Metoda supra- relaxărilor succesive (SRS)
6. Matrici simetrice și pozitiv definite. Metode:
   - Factorizarea Cholesky
   - Metoda gradienților conjugați
7. interpolarea:
   - interpolarea Lagrange
   - Metoda diferențelor divizate a lui Newton
   - Eroarea de interpolare.
   - interpolarea Cebîșev.

- Curbe spline cubice
- Curbe Bézier.

8. Cele mai mici pătrate:
   - Sistem inconsistent. Rezolvarea ec. normale. REMP
   - interpolarea unor modele (dreaptă, parabolă, periodic)
   - Liniarizarea datelor (model exponențial)
   - Factorizarea QR – Ortogonalizarea Gram–Schmidt
   - C.m.m.p. neliniare – Metoda Gauss – Newton

MAC – D1

TEORIE

CURS I

1) Evaluarea unui polinom:

$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.
$x = 1/2$

- Metoda 1 : Calculăm $P(1/2)$
- Metoda 2 (mai eficientă) : calculăm $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$P(1/2) = 2\cdot(1/2)^4 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 \ldots$$

- Metoda 3 : ÎNMULȚIREA IMBRICATĂ / METODA LUI HORNER;
  - rescriem polinomul (să poată fi evaluat din int spre ext):

$$P(x) = -1 + x(5 - 3x + 3x^2 + 2x^3)$$
$$= -1 + x(5 + x(-3 + 3x + 2x^2))$$
$$= -1 + x(5 + x(-3 + x(3 + 2x))) \Rightarrow \text{evaluarea din int. spre ext.}$$

$P(1/2)$: $\frac{1}{2}\cdot 2$, $+3 \rightarrow 4$

$\frac{1}{2}\cdot 4$, $-3 \rightarrow -1$

$\frac{1}{2}\cdot(-1)$, $+5 \rightarrow 9/2$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}$, $-1 \rightarrow 5/4$

$gr(P(x)) = 4 \Rightarrow$ 4 înmulțiri și 4 adunări

! $c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 \rightarrow c_1 + x(c_2 + x(c_3 + x(c_4 + xc_5)))$

2) Numere binare:

$(\ldots b_2 b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \ldots)_2 \Leftrightarrow \ldots b_2\cdot 2^2 + b_1\cdot 2^1 + b_0\cdot 2^0 + b_{-1}\cdot 2^{-1} + b_{-2}\cdot 2^{-2} \ldots$

a) Conversia din zecimal în binar

Ex: $(53.7)_{10} = (53)_{10} + (0.7)_{10}$

- $(53)_{10}$:

$53 : 2 = 26$ r 1 (LSB)
$26 : 2 = 13$ r 0
$13 : 2 = 6$ r 1
$6 : 2 = 3$ r 0
$3 : 2 = 1$ r 1.
$1 : 2 = 0$ r 1 (MSB)

$\Rightarrow (53)_{10} = (110101)_2$

(verificare: $110101 = 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 53$)

$-(0{,}7)_{10}.$

$0{,}7 \cdot 2 = 1{,}4 \quad , [1{,}4] = 1, \{1{,}4\} = 0{,}4.$ -MSB

$0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8 \quad , [0{,}8] = 0, \{0{,}8\} = 0{,}8.$

$0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6 \quad , [1{,}6] = 1, \{1{,}6\} = 0{,}6.$

$0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2 \quad , [1{,}2] = 1, \{1{,}2\} = 0{,}2$

$0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4 \quad , [0{,}4] = 0, \{0{,}4\} = 0{,}4.$

$0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8 \quad , [0{,}8] = 0, \{0{,}8\} = 0{,}8$

⋮ merge până la infinit

periodicitate !!

$(0.7)_{10} = (0.101100101100\ldots)_2 = (0.\overline{10110})_2$

$\Rightarrow (57.7)_{10} = (110101.\overline{10110})_2$

b) Conversia din binar în zecimal

→ parte întreagă: $(10101)_2$

$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (21)_{10}.$

→ parte fracționară: $(0.1011)_2$

- finită: $1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \left(\frac{11}{16}\right)_{10}$

- infinită (cu perioadă): ex:

Ex: $x = (0.\overline{1011})_2$:

- îl înmulțim pe x cu 2^4 $\Rightarrow$ $2^4 x = 1011.\overline{1011}$

$x = 0000.\overline{1011}$

- apoi scădem: $2^4 x - x = (2^4-1)x = (1011)_2 = (11)_{10}.$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \left(\frac{11}{2^4-1}\right)_{10} \Rightarrow x = \left(\frac{11}{15}\right)_{10}$

Ex: $x = (0.\underline{10}\overline{101})_2$

- îl înmulțim pe x cu 2^2 $\Rightarrow y = 10.\overline{101} = 2^2 \cdot x$ $\qquad 10 + 0.\overline{101}$

- notăm $\{10.\overline{101}\} \Rightarrow z = 0.\overline{101}$

$2^3 z = 101.\overline{101}$ $\quad \Rightarrow (2^3-1)z = (101)_2 = 5 \Rightarrow \boxed{z = \left(\frac{5}{7}\right)_{10}.}$

$z = 000.\overline{101}$

$[10.\overline{101}] = (10)_2 = (2)_{10} \Rightarrow \boxed{y = 2 + \frac{5}{7}}$

$x = \left(2 + \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x = \left(\frac{19}{28}\right)_{10}}$

$(F)_{16} = (1111)_2 = (15)_{10}$

③ Repr. în virgulă flotantă a nr. reale : IEEE 754

- semn
- exponent
- mantisă

- precizie simplă - 32 biți (bias exp: 127)
- precizie dublă - 64 biți (bias exp: 1023)
- precizie dublă lungă - 80 biți (bias exp: 16383)

! p. simplă: semn: 1, exp: 8, mantisa: 23 biți
p. dublă: semn: 1, exp: 11, mantisa: 52 biți
p. dublă lungă: semn: 1, exp: 15, mantisa: 64 biți

- forma unui nr în virgulă flotantă normalizat IEEE: $\pm 1.bb..b \cdot 2^p$

Ex: $(9)_{10} = (1001)_2 \longrightarrow +1.001 \cdot 2^3$

- SE LUCREAZĂ CU DUBLĂ PRECIZIE:

Ex: 1 este $+1.\underbrace{000...000}_{52 \text{ biți}} \cdot 2^0$

! urm nr. în virgulă flotantă este $+1.\underbrace{0..0}_{51}1 \cdot 2^0 = 1 + 2^{-52}$
(>1)

1. Def: $\varepsilon_{mach} = 2^{-52}$ ← distanța dintre 1 și cel mai mic nr în virgulă flotantă > 1.

Ex: $(9.4)_{10} = (1001.\overline{0110})_2$ în virgulă flotantă:

$+1.\underbrace{001\ 0110\ 0110 \ldots 0110\ 0}_{52 \text{ biți}}\overset{53}{1}10 \ldots \cdot 2^3$

- ignorarea biților care se află după bitul 52 → Trunchiere
- rotunjirea: $fl(x)$
  - bitul 53 e 1 ⇒ se adună 1 la bitul 52 (rot. în sus)
  - bitul 53 e 0 ⇒ nu facem nimic (rot. în jos)
  - dacă, de la bitul 53 încolo, avem 1000... ⇒ EXCEPȚIE ⇒ ⇒ se adună 1 la bitul 52 ⇔ bitul 52 este 1.

Ex: $(9.4)_{10} \longrightarrow +1.\underbrace{001\ 0110\ 0110 \ldots 011\boxed{1}}_{52} \cdot 2^3$

$2^3 \cdot 0.\overline{1100} \cdot 2^{-52} = 0.\overline{0110} \cdot 2^{-51} \cdot 2^3 = 0.4 \cdot 2^{-48}$

$fl(x) = 9.4 + 2^{-52} \cdot 2^3 - 0.4 \cdot 2^{-48}$
$= 9.4 + 2^{-49} - 0.4 \cdot 2^{-48}$
$= 9.4 + (1 - 0.8) \cdot 2^{-49}$
$= 9.4 + \boxed{0.2 \cdot 2^{-49}}$ eroarea de rotunjire

Def: x_c - versiune calculată a val. exacte x $(x \neq 0)$

eroarea absolută $= |x_c - x|$

eroarea relativă $= \frac{|x_c - x|}{|x|}$

Eroare relativă de rotunjire: $\frac{|fl(x) - x|}{|x|} \leq \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{mach}$ (2^{-52})

pt 9.4 - eroarea este:

$$\frac{|fl(9.4) - 9.4)|}{9.4} = \frac{0.2 \cdot 2^{-49}}{9.4} = \frac{8}{47} \cdot 2^{-52} < \frac{1}{2}\varepsilon_{mach}.$$

---

format: $s\, e_1 e_2 \ldots e_{11}\, b_1 b_2 \ldots b_{52}$ (semn, exp, mantisă) — $s = 0$ pt nr poz, $s = 1$ pt nr neg.

- dublă precizie: $\boxed{\text{bias exponent} = 1023}$ $\quad (1023)_{10} = (\underbrace{1111111111}_{10})_2$

Ex: $1 = +1.\underbrace{000\ldots00}_{52} \cdot 2^0$ are repr în dublă precizie în virgulă flotantă:

$$\begin{array}{ccc} S & E & M \\ 0 & 01111111111 & \underbrace{000\ldots00}_{52} \\ & \uparrow & \\ & 0 + 1023 = 1023 & \end{array}$$

$E = 01111111111 = 0011\ 1111\ 1111 = 3FF$ în hexa

$\Rightarrow$ repr. în format hexa a nr cu virgulă flotantă 1 va fi

$\underbrace{3FF}_{\substack{\text{semn} \\ + \text{exp} \\ (3 \text{ mereu})}}\ \underbrace{0000000000000}_{\text{mantisa (13 mereu)}}$

→ DE AICI ÎNCEPE ←

① **Rezolvarea ecuațiilor**

a) **Metoda bisecției**

Th valorilor intermediare:

Fie f continuă pe $[a,b]$. Dacă $y \in (f(a), f(b))$, atunci $(\exists)$ c, $a \leq c \leq b$ a.î. $f(c) = y$.

Th $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow (\exists)\ r \in (a,b)$ a.î. $f(r) = 0$.

Exemplu: $f(x) = x^3 + x - 1$; $[0,1]$.

- $f(a_0) \cdot f(b_0) = (-1) \cdot 1 < 0 \Rightarrow (\exists)$ rădăcină în acest interval.
- mijlocul int $[0,1]$ este $c_0 = \frac{1}{2}$.
- $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8} < 0 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow$ noul interval $[\underset{a_1}{\frac{1}{2}}, \underset{b_1}{1}]$
- mij. $[\frac{1}{2}, 1]$ este $c_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow f(c_1) = f(\frac{3}{4}) = \frac{11}{64} > 0 \Rightarrow$ noul interval $[a_2, b_2] = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ și tot așa...

Eroarea soluției este ~~b-a~~ $|x_c - r| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$ (n pași de calcul pt e)

Def: O soluție este corectă cu p zecimale dacă eroarea este mai mică decât $0.5 \cdot 10^{-p}$.

~~Exemplu:~~

CURS 2

b) Iterația de punct fix:

Def: r este punct fix al funcției f dacă $f(r) = r$.

Alg: Se ia x_0 = val. inițială

$$x_1 = f(x_0)$$
$$x_2 = f(x_1)$$
$$\vdots$$

Ex: $x^3 + x - 1 = 0$ – poate fi rescrisă ca: $x = \sqrt[3]{1-x}$, iar $g(x) = \sqrt[3]{1-x}$

dacă mi se dă g: $g(x) = x^2 + x + 1$; atunci rez. $x^2 + x + 1 = x$

Algoritm: $x_0 = 0.5 = 1/2$

$$x_1 = g(1/2)$$
$$x_2 = g(x_1) \dots$$

– convergența liniară: scriem $f(x)$ în fct. de $x - r$

Ex: dacă $g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$, $r = 1$ $\Rightarrow g(x) = -\frac{3}{2}(x-1) + 1 \quad | -1$

$$-\frac{3}{2}(x-1) = -\frac{3}{2}x + \underbrace{\frac{3}{2} + \frac{2}{2}}_{5/2}$$

$$g(x) - 1 = -\frac{3}{2}(x-1)$$

$$\boxed{x_{i+1} - 1 = -\frac{3}{2}(x_i - 1)}$$

$x_{i+1}-1=-\frac{3}{2}(x_i-1)$; $e_{i+1}=\frac{3e_i}{2}$ => eroarea crește cu $\frac{3}{2}$ la fiecare pas

Def: e_i = eroarea la pasul i.
Dacă $\lim_{i\to\infty}\frac{e_{i+1}}{e_i}=S<1$ => liniar convergentă cu rata S

Th: g - fct derivabilă ; $g(r)=r$; $S=|g'(r)|<1$. Atunci iterația de punct fix converge liniar cu rata S la pct fix r pt o valoare inițială suficient de apropiată de r.

Th de medie: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, $c\in(a,b)$

Th: iterația de pct fix este local convergentă dacă $|g'(r)|<1$.

e) Metoda lui Newton (~~rata S=0~~ ??) ← n-am idee :)

luăm un x_0 = val. inițială

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$
iar $y=0$ => ~~x~~
=> $x-x_0=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

~~e_i (eroarea) $=|x_i$~~

Th: $f(r)=0$. Dacă $f'(r)\neq 0$ => m. Newton este local și pătratic convergentă. Eroarea e_i la pasul i:

$$\frac{e_{i+1}}{e_i^2}=M ; \quad M=\left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right| \text{ - rata de convergență}$$

Def: iterația e pătratic conv. dacă $M<\infty$

! iPF: $S=|g'(r)|$
Bisecție: $S=1/2$

$f'(x_i)=0$ => Metoda nu mai continuă

$f'(r)\neq 0$ => r - rădăcină

d) Metoda secantei (se aplică, când $f'(x_i)=0$ la Newton)

x_0, x_1 - val. inițiale

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

$$e_{i+1} \approx \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right| e_i e_{i-1}$$

! Convergența metodei către rădăcină este numită superliniară

e) Metoda falsei poziții - se aseamănă cu metoda bisecției

$[a,b]$, $f(a)f(b)<0$.

$$c = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{f(a) - f(b)}$$

dacă $f(c)=0$ STOP.

dacă $f(a) \cdot f(c) < 0$

$b = c$

altfel

$a = c$

CURS III

⑤ Sisteme de ecuații : METODE

a) Eliminarea gaussiană : - formă tabulară

- Operații:
  - interschimbarea ecuațiilor
  - adunarea / scăderea unui multiplu al unei ec. dintr-o altă ec.
  - înmulțirea unei ec cu o constantă nenulă

Ex E.6 - forma tabulară + substituție înapoi

$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+y-2z=3 \\ -3x+y+z=-6 \end{cases}$$

Rezolvare: ! după prelucrare, matricea trebuie să fie superior triangulară

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2' \to L_2' - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \Rightarrow 3L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 + \frac{7}{3}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

3 f.c

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -3y = -3 \\ -2z = -4 \end{cases}$$

SUBSTITUȚIA ÎNAPOI:

$z = 2$, $y = 1$

$x = 3 + z - 2y = 2 - 2 + 3 \Rightarrow x = 3$

b) Factorizarea LU.

~ forma matricială a eliminării gaussiene

$Ax = b$.

- factorizarea LU: scrierea lui A ca un produs dintre o matrice inferior triangulară L și o matrice superior triangulară U.

Ex de U: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ← sup. Δ

L: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ← inf Δ.

Ex: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ - factorizarea LU.

U: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = U.$! Reținem multiplicatorul.

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$! Mereu 1-uri pe d. p.

! La matrice 3x3: L: 1 pe diag pr, iar multiplicatorii se pun în locul unde au fost folosiți! (ex: 2 se află în poz (2,1) a matricii L pt că 2 a fost folosit pt eliminarea elementului a_{21} din matricea A).

- Substituția înapoi pt factorizarea LU. (găsim x)

$Ax=b \Rightarrow LUx=b.$

$A=LU$

• Definim un nou vector auxiliar $c=Ux$.

- Rez: $Lc=b$ ⇒ găsim c
- Rez: $Ux=c$ ⇒ găsim x

c) Factorizarea PA = LU (când A nu are factorizare LU).

→ Pivotare parțială: Ex. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ comparăm a_{11} cu a_{21}.

dacă $|a_{21}| > |a_{11}|$ ⇒ interschimbarea liniilor: $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$,

iar multiplicatorul va fi: $\boxed{m = \frac{a_{11}}{a_{21}}}$

• dacă avem mai multe linii, verificăm pivoții după fiecare operație de adunare/scădere + multiplicare.

! dacă nu există val. 0 pe sau sub d.p ⇒ MATRICE SINGULARĂ ⇒ NU elim. gaussiană

→ Matrici de permutare: $(n \times n)$ un singur 1 pe fiecare rând și pe fiecare coloană, în rest 0.

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ etc.

! Pașii fact. PA = LU (A este matricea dată în enunț)

→ folosim pivotarea parțială, iar P inițial este I_n

(dacă spre ex interschimbăm liniile 1 și 2 ale unei matrici 3x3, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ devine $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

→ facem operații de obținere a zero-urilor, doar că în locul lor punem multiplicatorii respectivi.

→ la următoarele interschimbări, procedăm la fel ca anterior, modificând și matricea P., până când SUB D.P. SE AFLĂ DOAR MULTIPLICATORII!!

Vom obține o matrice, spre ex: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, iar

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P \cdot A = L \cdot U.$

- folosirea $PA=LU$ pt rez. sist de ec $Ax=b$.

Pași: $P\,/\,Ax=b$

$$PAx=Pb \Rightarrow LUx=Pb.$$

Rezolvăm: (la fel ca la $A=LU$)

- $Lc=Pb$ și găsim c
- $Ux=c$ și găsim x

$\boxed{\text{CURS 4}}$

d) Metoda lui Jacobi (UN FEL DE IPF)

! Nu merge mereu ⇒ (*) Dacă A este strict diagonal dominantă, atunci A este o matrice nesingulară și (∀) b vector și (u_0, v_0) valoare inițială, METODA LUI JACOBI aplicată ec. $Ax=b$ converge către soluția unică!!

Idee 1: $\begin{cases}3u+v=5\\ u+2v=5\end{cases}$, scoatem u și v, cu $\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5-v_0}{3}\\ \frac{5-u_0}{2}\end{pmatrix}=\dots$ șamd

Obs! Metoda Jacobi poate să conveargă chiar și în absența condiției (*)

→ Algoritm!! (idee 2)

$$\boxed{\begin{aligned}&x_0=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \text{ - vect. inițial}\\ &x_{k+1}=D^{-1}(b-(L+U)x_k)\end{aligned}}\text{, unde}$$

→ D - diag pr. al lui A (în rest 0), $D^{-1}=\begin{pmatrix}1/a_{11} & 0\\ 0 & 1/a_{22}\end{pmatrix}$

→ L și U diferă de factorizări (d.p. e 0)

$\begin{cases}\text{L - triunghiul inferior (intrările de sub d.p)}\\ \text{U - triunghiul superior (intrările de deasupra d.p)}\end{cases}$

diagonala principală are DOAR VALORI NULE!!

! Matrice strict diagonal dominantă:

ex $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ el de pe d.p. sunt cele mai mari de pe linia respectivă (ÎN MODUL)

e) Metoda Gauss-Seidel.

- La fel ca Jacobi, doar că:

→ JACOBI

- $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - v_0}{3} \\ \frac{5 - u_0}{2} \end{bmatrix} = \dots$

- $\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - v_1}{3} \\ \frac{5 - u_1}{2} \end{bmatrix} = \dots$

→ GAUSS-SEIDEL (1)

- $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - v_0}{3} \\ \frac{5 - 2u_1}{2} \end{bmatrix} = \dots$

- $\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - v_1}{3} \\ \frac{5 - 2u_2}{2} \end{bmatrix} = \dots$

- Gauss-Seidel converge ⇔ matricea e strict diagonal dominantă

SAU

→ Algoritm:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 - \text{vect. inițial} \\ x_{k+1} = D^{-1}(b - Ux_k - Lx_{k+1}) \end{array}}$$

f) Metoda supra-relaxărilor succesive (SRS)

- w = parametru de relaxare

$w < 1 \Rightarrow$ sub-relaxare

$w > 1 \Rightarrow$ supra-relaxare

$w = 1 \Rightarrow$ GAUSS-SEIDEL.

PE EX (1): $u_{k+1} = (1-w)u_k + w \cdot \frac{5 - v_k}{3}$

$v_{k+1} = (1-w) \cdot v_k + w \cdot \frac{5 - 2u_{k+1}}{2}$

SAU

→ Algoritm:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 - \text{vect inițial} \\ x_{k+1} = (wL + D)^{-1}[(1-w)Dx_k - wUx_k] + w(D + wL)^{-1} \end{array}}$$

→ METODE PT MATRICI SIMETRICE și POZITIV DEFINITE

- A $(m \times m)$ simetrică ⇔ $A^T = A$.
- A $(m \times m)$ poz. definită ⇔ $x^T \cdot A \cdot x > 0$, $(\forall)$ x - vector menul. } ⇒ NESINGULARĂ

val proprii ale lui $A > 0$.

- Def !! O submatrice ~~pătratică~~ principală a matricii pătratice A este o submatrice pătratică ale cărei intrări diagonale sunt intrări diagonale ale lui A. (Dacă A = sim și poz. def ⇒ submatricea este sim. și poz. def).

- Ex: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ submatrice principală $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

f) Factorizarea Cholesky

$A = R^T R$, unde R - matrice superior triangulară

pe ex de 2x2: $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ u & v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{a} & u \\ 0 & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & u\sqrt{a} \\ u\sqrt{a} & u^2+v^2 \end{bmatrix}$

$\quad A \quad = \quad R^T \quad \cdot \quad R$

$\Rightarrow u\sqrt{a} = b \Rightarrow u = \frac{b}{\sqrt{a}}$

∇ det $A = ac - b^2 > 0$ (POZ. DEF)

$u^2 + v^2 = c \Rightarrow v^2 = c - u^2 = c - \frac{b^2}{a} > 0$

$\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = R^T \cdot R = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ b/\sqrt{a} & \boxed{\sqrt{c - b^2/a}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{a} & b/\sqrt{a} \\ 0 & \sqrt{c - b^2/a} \end{bmatrix}$

pe ex de 3x3:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$- R_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1 = \sqrt{1}.$

$- R_{1,2:3} = \frac{[1, 1]}{R_{11}} = [1, 1] = u^T$

$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

$- u \cdot u^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \ 1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$- \begin{bmatrix} & & \\ & 2 & 2 \\ & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & 1 \\ & 1 & 2 \end{bmatrix}$ → reportăm pașii pt matricea obținută

$- R_{22} = 1.$

$- R_{23} = \frac{1}{R_{22}} = 1.$

$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix}$, ne rămâne de

calculat R_{33}: calculăm det: $2 - 1 = 1 \Rightarrow R_{33} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_{final} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Verificare: $R^T \cdot R = A$.

- pt sistem $Ax=b$.

$$R^T \cdot R \cdot x = b.$$

- rez. $R^T \cdot c = b \Rightarrow$ găsim $\underline{c}$ — c - vector ; $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$
- rez. $R x = c \Rightarrow$ găsim $\underline{x}$ — x - vector , $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

g) Metoda gradienților conjugați

- Direct pe ex: $\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}} \cdot \underset{x}{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}}$

$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad r_0 = d_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = b - A \cdot \underbrace{x_0}_{0}$

$$\alpha_0 = \frac{d_0^T \cdot r_0}{d_0^T \cdot A \cdot d_0} = \frac{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}} = \frac{5}{21}.$$

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 \cdot d_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{5}{21} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/7 \\ 5/7 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = r_0 - \alpha_0 \cdot A \cdot d_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{5}{21} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/7 \\ -24/7 \end{bmatrix}$$

$$\beta_0 = \frac{r_1^T \cdot r_1}{r_0^T \cdot r_0} = \frac{\begin{bmatrix} 12/7 \\ -24/7 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 12/7 \\ -24/7 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}} = \frac{16}{45}$$

$$d_1 = r_1 + \beta_0 d_0 = \begin{bmatrix} 12/7 \\ -24/7 \end{bmatrix} + \frac{16}{49} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \dots$$

(nu cont. calculele)

$\alpha_1 = \dots$, $\quad x_2 = \dots$, $\quad \underline{r_2 = [0 \; 0]} \Rightarrow x_2 =$ soluție

Verificare: $A \cdot x_2 = b$

→ ALGORITM

x_0 - vect inițial

1. $\boxed{r_0 = b - A \cdot x_0}$

do {

2. $\boxed{\alpha_k = \dfrac{r_k^T \, r_k}{d_k^T \cdot A \cdot d_k}}$

3. $\boxed{x_{k+1} = x_k + \alpha_k \cdot d_k}$

4. $\boxed{r_{k+1} = r_k - \alpha_k \cdot A \cdot d_k}$

5. $\boxed{\beta_k = \dfrac{r_{k+1}^T \cdot r_{k+1}}{r_k^T \cdot r_k}}$

6. $\boxed{d_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k d_k}$

} while (r != 0);

până când r devine = 0 ⇒ soluția va fi ultimul x calculat.

6. SISTEME DE EC. NELINIARE - METODE.

a) Metoda lui Newton pt mai multe variabile.

→ **Algoritm**

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 \text{ - vector inițial} \\ DF(x_K)\cdot s = -F(x_K) \\ x_{K+1} = x_K + s. \end{array}}$$

DF - matricea Jacobiană

→ pe ex: $x_0 = (1,2)$. $\begin{cases} v - u^3 = 0 \\ u^2 + v^2 - 1 = 0 \end{cases}$

Fie $f_1(u,v) = -u^3 + v$

$f_2(u,v) = u^2 + v^2 - 1$.

$F(u,v) = (f_1, f_2)$

$F(x) = 0$.

$$DF(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3u^2 & 1 \\ 2u & 2v \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{\substack{u=1 \\ v=2}}{DF(x_0)} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ cu soluția } s = (0,-1). \quad \begin{cases} v - u^3 = 2 - 1 = 1 \\ u^2 + v^2 - 1 = 1 + 4 - 1 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 = x_0 + s = (1,1) \Rightarrow x_1 = (1,1)$$

$$DF(x_1) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ cu } s = \ldots \quad ; \quad \begin{cases} v - u^3 = 1 - 1 = 0 \\ u^2 + v^2 - 1 = 1 + 1 - 1 = 1. \end{cases}$$

. . . . . .

$\forall (u,v)$ - soluție $\Rightarrow (-u,-v)$ - soluție

b) Metoda lui Broyden I și II - pauză (Nu are exemple)

CURS 5

7 interpolarea

Tot $y = P(x)$ interpolează pct (x, y) $\Leftrightarrow$ $P(x) = y$

a) interpolarea Lagrange (polinom unic)

- pt 3 puncte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) $\Rightarrow$ $n-1 = 2$ – gradul polinomului ($n=3$)

$\Rightarrow$ polinomul de interpolare al lui Lagrange: $\boxed{P_2(x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}}$

+ verificare

b) Metoda diferențelor divizate a lui Newton

Def: $f[x_1\ x_2 \dots x_n]$ – coef. termenului x^{n-1} în polinom

Ex: pct $(0,1)$, $(2,2)$, $(3,4)$

$f[0] = 1$, $f[2] = 2$, $f[3] = 4$ $\qquad f[0\ 2\ 3] = \frac{1}{2}$

$$P(x) = f[x_1] + f[x_1\ x_2](x-x_1) + f[x_1\ x_2\ x_3](x-x_1)(x-x_2) + \dots + f[x_1 \dots x_n](x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

$$f[x_k] = f(x_k)$$

$$f[x_k\ x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}$$

$$f[x_k\ x_{k+1}\ x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}\ x_{k+2}] - f[x_k\ x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

$$f[x_k\ x_{k+1}\ x_{k+2}\ x_{k+3}] = \frac{f[x_{k+1}\ x_{k+2}\ x_{k+3}] - f[x_k\ x_{k+1}\ x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k}.$$

⋮

etc

Facem tabel:

$$\begin{array}{c|l}
x_1 & f[x_1] \searrow \\
 & \quad f[x_1\ x_2] \searrow \\
x_2 & f[x_2] \quad\quad\quad f[x_1\ x_2\ x_3]. \\
 & \quad f[x_2\ x_3] \nearrow \\
x_3 & f[x_3] \nearrow
\end{array}$$

- pe ex anterior: $x_1 = (0,1)$, $x_2 = (2,2)$, $x_3 = (3,4)$

$$\begin{array}{c|c}
0 & 1 \\
2 & 2 \\
3 & 4
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
f[0\ 2] = \frac{1}{2} \\
f[2\ 3] = 2
\end{array}
\quad f[0\ 2\ 3] = \frac{1}{2}.$$

$f[0] = 1$, $f[2] = 2$, $f[3] = 4$.

$$f[0\ 2] = \frac{f[2] - f[0]}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

$$f[2\ 3] = \frac{f[3] - f[2]}{3-2} = \frac{2}{1}$$

$$f[\boxed{0}\ 2\ \boxed{3}] = \frac{f[2\ 3] - f[0\ 2]}{3-0} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{3} = \frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{3}} = \frac{1}{2}$$

$$P(x) = f[0] + f[0\ 2](x-0) + f[0\ 2\ 3]\,(x-0)(x-2)$$

$$P(x) = 1 + \frac{1}{2}\cdot(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-2)$$ (cu pct de bază $x_1 = 0$, $x_2 = 2$)

$\xrightarrow{\text{forma}}$ imbricată $$P(x) = 1 + (x-0)\left(\frac{1}{2} + (x-2)\cdot\frac{1}{2}\right)$$

SAU $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x^2 - 2x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$. (la fel ca pol dat de metoda Lagrange)

$\longrightarrow$ Repr. fct. prin polinoame de aproximare

Ex: interpolați fct $f(x) = \sin x$ în 4 pct egal depărtate din $[0, \pi/2]$

punctele sunt $0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}$. , $f(0) = 0$, $f(\pi/6) = \frac{1}{2}$, $f(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

$$\begin{array}{c|c}
0 & 0.0000 \\
\pi/6 & 0.5000 \\
\pi/3 & 0.8660 \\
\pi/2 & 1.0000
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
f[0\ \pi/6] = 0.9549 \\
f[\pi/6\ \pi/3] = 0.6990 \\
f[\pi/3\ \pi/2] = 0.2559
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
f[0\ \frac{\pi}{6}\ \frac{\pi}{3}] = -0.2443 \\
f[\pi/6\ \pi/3\ \pi/2] = -0.4232
\end{array}
\quad f[0\ \tfrac{\pi}{6}\ \tfrac{\pi}{3}\ \tfrac{\pi}{2}] = \dots$$

$$f[0\ \pi/6] = \frac{0.5000 - 0.0000}{\pi/6} = \frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot\frac{\cancel{6}^3}{\pi} = \frac{3}{\pi} = 0.9549$$

$$f[\pi/3\ \pi/2] = \frac{1.0000 - 0.8660}{\pi/6} \simeq 0.2559$$

$$f[0\ \tfrac{\pi}{6}\ \tfrac{\pi}{3}] = \frac{f[\pi/6\ \pi/3] - f[0\ \pi/6]}{\pi/3 - 0} = \dots$$

$$f[\tfrac{\pi}{6}\ \tfrac{\pi}{3}\ \tfrac{\pi}{2}] = \frac{f[\frac{\pi}{3}\ \frac{\pi}{2}] - f[\frac{\pi}{6}\ \frac{\pi}{3}]}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}}$$

$$f[0\ \tfrac{\pi}{6}\ \tfrac{\pi}{3}\ \tfrac{\pi}{2}] = \frac{f[\frac{\pi}{6}\ \frac{\pi}{3}\ \frac{\pi}{2}] - f[0\ \frac{\pi}{6}\ \frac{\pi}{3}]}{\frac{\pi}{2} - 0}.$$

etc... polinomul

→ **Eroarea de interpolare**

- în x: $f(x) - P(x)$ (dif. dintre fct principală și polinomul de interpolare)

$$\boxed{f(x) - P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{m!} f^{(m)}(c),}$$

unde $P(x)$ - polinom. de grad cel mult $m-1$, pentru m puncte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, iar c se află între cel mai mic și cel mai mare dintre nr. $x, x_1, \dots, x_m$.

→ limita superioară (inferioară) a erorii de interpolare:

$$|f(x) - P(x)| \le \left|\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{m!}\right| \cdot |f^{(m)}(c)|$$

c) **Interpolarea Cebîșev**

→ Polinomul Cebîșev: $\boxed{T_m(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_j) \cdot \frac{1}{2^{m-1}}}$

! (NODURILE DE INTERPOLARE CEBÎȘEV)

- rădăcinile polinomului Cebîșev: $\boxed{x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2m}}$ $\boxed{i = 1, \dots, m}$

! $\boxed{x_i \in [-1; 1]}$; $\boxed{|T_m(x)| \le \frac{1}{2^{m-1}}}$ ← limita superioară

Ex: găsiți lim. inferioară a erorii pe $[-1,1]$ dintre $f(x) = e^x$ și pol de interpolare Cebîșev de gr. 4.

$$\to f(x) - P_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{5!} f^{(5)}(c).$$

$\to x_1 = \cos\frac{\pi}{10}$, $x_2 = \cos\frac{3\pi}{10}$, $x_3 = \cos\frac{5\pi}{10}$, $x_4 = \cos\frac{7\pi}{10}$, $x_5 = \cos\frac{9\pi}{10}$.

$\to c \in (-1, 1)$

$\to |f^{(5)}(c)| = |e^c| \le e^1$ pe $[-1, 1]$.

→ conform th. Cebîșev: $|(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_5)| \le \frac{1}{2^4}$

$$|e^x - P_4(x)| \le \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{5!} \cdot e = \frac{e}{5! \cdot 2^4}$$

→ Rel de recurență: $T_{m+1}(x) = 2x\,T_m(x) - T_{m-1}(x)$

→ ! Schimbarea intervalului $\boxed{[-1, 1]}$ în $\boxed{[a, b]}$

→ rădăcinile, din $\boxed{x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2m}}$, devin $\boxed{x_i = \frac{b-a}{2} \cdot \cos\frac{(2i-1)\pi}{2m} + \frac{b+a}{2}.}$

→ **Algoritm !!**

PE ÎNT $[a,b]$: - nodurile de interpolare Cebîșev sunt:

$$\boxed{x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i=\overline{1,n}}$$

- inegalitatea pt limita superioară (val max a pol. Cebîșev):

$$\boxed{|(x-x_1)\dots(x-x_n)| \le \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}}}$$

grad cel mult $n-1$

CURS 6

d) Curbe spline cubice

- Pp că avem n puncte $(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)$ în care val. x_i sunt distincte și crescătoare. O curbă spline cubică $\boxed{S(x)}$ care trece prin punctele $(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)$ este o mulțime de polinoame cubice:

$$\begin{cases} S_1(x) = y_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3 \text{ pe } [x_1,x_2] \\ S_2(x) = y_2 + b_2(x-x_2) + c_2(x-x_2)^2 + d_2(x-x_2)^3 \text{ pe } [x_2,x_3] \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) = y_{n-1} + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x-x_{n-1})^3 \text{ pe } [x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

→ Proprietăți: (care verifică dacă este curbă spline cubică)

1. $S_i(x_i) = y_i$ și $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ pt $i=\overline{1,n-1}$
2. $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ pt $i=\overline{2,n-1}$
3. $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ pt $i=\overline{2,n-1}$

! Curbă spline naturală: $S''_1(x_1)=0$ și $S''_{n-1}(x_n)=0$

→ Aflarea coeficienților b_i, c_i, d_i: Algoritm:

$a_i = y_i$

$\boxed{\delta_i = x_{i+1} - x_i}$ $\quad i=\overline{1,n-1}$

$\boxed{\Delta_i = y_{i+1} - y_i}$

• Apoi calculăm matricea (⇔) Ecuație matricială tridiagonală:

pt 3 pct:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta_1 & 2\delta_1+2\delta_2 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\left(\frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\Delta_1}{\delta_1}\right) \\ 3\left(\frac{\Delta_3}{\delta_3} - \frac{\Delta_2}{\delta_2}\right) \end{bmatrix}$$

pt 4 pct:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & 2\delta_1+2\delta_2 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 2\delta_2+2\delta_3 & \delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\left(\frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\Delta_1}{\delta_1}\right) \\ 3\left(\frac{\Delta_3}{\delta_3} - \frac{\Delta_2}{\delta_2}\right) \\ 3\left(\frac{\Delta_4}{\delta_4} - \frac{\Delta_3}{\delta_3}\right) \end{bmatrix}$$

• Aflăm valorile $c_1, c_2, c_3, (c_4)$.

• Apoi calculăm coeficienții b și c:

$$\boxed{d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3 \cdot \delta_i}}$$

$$\boxed{b_i = \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3}(2c_i + c_{i+1})}$$

• Curba splină cubică naturală va fi:

$$\to S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3 \text{ pe } [x_i, x_{i+1}]$$

$$i = \overline{1, m-1}.$$

! m puncte ⇒ $m-1$ curbe ⇒ m c-uri din matrice

Curbă continuă: $S_1(x_i) = S_2(x_i)$ oricare x_i ; derivabilă: $S_1'(x_i) = S_2'(x_i)$ oricare x_i

e) Curbe Bézier

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)

(x_1, y_1); (x_4, y_4) - capete

(x_2, y_2); (x_3, y_3) - pct de control

→ Algoritm:

$$\begin{cases} b_x = 3(x_2 - x_1) \\ c_x = 3(x_3 - x_2) - b_x \\ d_x = x_4 - x_1 - b_x - c_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_y = 3(y_2 - y_1) \\ c_y = 3(y_3 - y_2) - b_y \\ d_y = y_4 - y_1 - b_y - c_y. \end{cases}$$

⇒ Curba Bézier pt $0 \le t \le 1$:

$$(*) \begin{cases} x(t) = x_1 + b_x t + c_x t^2 + d_x t^3 \\ y(t) = y_1 + b_y t + c_y t^2 + d_y t^3 \end{cases}$$

(8) Cele mai mici pătrate.

→ **Sistem inconsistent** = sistem incompatibil (fără soluții)

⇒ găsim soluție în sensul c.m.m.p:

ex: Rez. ec. normale (EXAMEN)

rezolvăm $\boxed{A^T \cdot A \cdot \overline{x} = A^T \cdot b}$.

(cum știm sau prin elim. gaussiană, pivotare parțială etc..)

• $\boxed{r = b - A\overline{x}}$ s.n. reziduul în sensul c.m.m.p. (vector)

- lg euclidiană

$$\boxed{\|r\|_2 = \sqrt{r_1^2 + \dots + r_m^2}}$$ s.n. 2-normă

- eroare pătratică: $\boxed{EP = r_1^2 + \dots + r_m^2}$
- răd. erorii medii pătratice REMP: $\boxed{REMP = \sqrt{EP/m} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + \dots + r_m}{m}}}$

$$REMP = \frac{\sqrt{EP}}{\sqrt{m}} = \frac{\|r\|_2}{\sqrt{m}}$$

→ Interpolarea unor modele pt mulțimi de date.

* - Dreapta care interpolează cel mai bine pct. $(t, y) = (..), (..$

→ MODELUL $\boxed{y = c_1 + c_2 t}$

(înlocuim t-ul, sistem inconsistent ⇒ soluția în sensul c.m.m.p) + REMP-ul.

* - Parabola care interpolează cel mai bine pct $(t, y) = \dots$

⇒ MODELUL $\boxed{y = c_1 + c_2 t + c_3 t^2}$

(înlocuim t-ul, rez în sensul c.m.m.p + REMP)

(sau orice model dat de prof)

* În plus, avem MODELUL PERIODIC: (tabel)

ex: $\boxed{y = c_1 + c_2 \cos 2\pi t + c_3 \sin 2\pi t}$

(din tabel, luăm t-ul (coloana 2) și y-ul pt fiecare t (col. 3))

+ calculăm sist inconsistent cu c.m.m.p + REMP)

CURS 7

→ Liniarizarea datelor.

- modelul exponențial $\boxed{y = c_1 e^{c_2 t}} \,|\ln$

$$\ln y = \ln(c_1 e^{c_2 t})$$

⇒ $\ln y = \ln c_1 + c_2 t$, unde $\ln c_1 = k$.

$\boxed{\ln y = k + c_2 t}$

+ ec. matriceală $Ax = b$, $x = [k, c_2]^T$ → ec. normale $A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$

- modelul lege de putere $\boxed{y = c_1 \cdot t^{c_2}} \,|\ln$

$\ln y = \ln c_1 + c_2 \ln t$ ⇒ $\boxed{\ln y = k + c_2 \ln t}$

+ $Ax = b$ în sensul c.m.m.p, $x = [k, c_2]^T$

→ Factorizarea QR

- Ortogonalizarea G-S:

Ex: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$\quad\quad\ \ A_1 \quad A_2 \quad A_3$

→ Pași:

- $\boxed{y_1 = A_1}$
- $\boxed{q_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|_2}}$, $\|y_1\|_2$ = norma vect y_1.
- $\boxed{y_2 = A_2 - q_1 \cdot (q_1^T \cdot A_2)}$ și $\boxed{q_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|_2}}$

- pasul j: $y_j = A_j - q_1(q_1^T A_j) - q_2(q_2^T \cdot A_j) - \dots - q_{j-1}(q_{j-1}^T \cdot A_j)$

$$q_j = \frac{y_j}{\|y_j\|_2}$$

- definim: $\boxed{r_{jj} = \|y_j\|_2}$

$\boxed{r_{ij} = q_i^T \cdot A_j}$

$$\Rightarrow \underset{A}{(A_1 | \dots | A_m)} = \underset{Q}{(q_1 | \dots | q_m)} \cdot \underset{R}{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \dots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & \dots r_{2m} \\ 0 & 0 & \dots \vdots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots r_{mm} \end{bmatrix}}$$

$\Rightarrow A = Q \cdot R$

$\Rightarrow$ Aceasta s.n. factorizarea QR redusă.

- Factorizarea QR completă: când Q este matrice ortogonală
($Q^T \cdot Q = I_n$)

Q-ortog. $\Leftrightarrow$ coloanele ei repr. vectori ortogonali

$\Leftrightarrow$ $\boxed{A = Q \cdot R}$; $\boxed{Q}$ - matrice pătratică ortogonală
$\boxed{R}$ - matrice superior triunghiulară de aceeași dim. ca A.

! Pe scurt, dacă A nu e pătratică, adăugăm în A un vector la alegere, liniar independent cu restul coloanelor!!

+ VERIFICARE:

- Sistemul $Ax = b$. $\Rightarrow \underbrace{\cancel{Q^T} \cancel{Q}}_{I_n} \cdot R \cdot x = b \Rightarrow \boxed{R \cdot x = Q^T \cdot b}$ și calculăm x

- în sensul c.m.m.p.: $Ax = b$ sistem inconsistent $\Rightarrow$ găsim fact QR completă $A = QR$ și luăm:

NU ȘTIU CE LUĂM ȘI
NU MAI ~~VREAU~~ POT :(

VEZI EXEMPLE

$\rightarrow$ Pt rez sist:
din $Q^T b$ omitem linia în plus, iar din R linia de zero-uri.
$\Rightarrow \|e\|_2 = \|(0, 0 \dots, m)\|_2 = \dots$ $\leftarrow$ eroarea în sensul c.m.m.p

OPȚIONAL :)

Cele mai mici pătrate neliniare:

- **Metoda Gauss-Newton**: ceva cercuri lmao :)))
  ceva cu suma pătratelor distanțelor minimizată

Ex: $(x_1, y_1) = (-1, 0)$ $\quad R_1 = 1$
$(x_2, y_2) = (1, 1/2)$ $\quad R_2 = 1/2$ } raze
$(x_3, y_3) = (1, -1/2)$. $\quad R_3 = 1/2$

$r_1(x,y) = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} - R_1$ ← dist. de la pct (x,y) la un cerc cu centrul (x_1, y_1) și raza R_1

$r_2(x,y) = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} - R_2$

$r_3(x,y) = \sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2} - R_3$

$S_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$, $S_2 = \dots$, $S_3 = \dots$

$\Rightarrow$ jacobianul $Dr(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{x-x_1}{S_1} & \frac{y-y_1}{S_1} \\ \frac{x-x_2}{S_2} & \frac{y-y_2}{S_2} \\ \frac{x-x_3}{S_3} & \frac{y-y_3}{S_3} \end{bmatrix}$.

un K în plus, adăugăm o coloană de val. -1.