Capitolul 5 [1]

FORMULA LUI TAYLOR. EXTREME

Breviar teoretic

1. Fie $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $p > 1$, de n ori derivabilă în punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in \overset{\circ}{A}$. Se numeşte *polinom Taylor* de grad n asociat funcţiei f în punctul a, funcţia $T_n : A \to \mathbf{R}$, dată prin formula:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{1}{1!} d_a f(x-a) + \frac{1}{2!} d_a^2 f(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!} d_a^n f(x-a),$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in A$.

2. Fie $f : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $p > 1$, de $n+1$ ori diferenţiabilă pe mulţimea deschisă D şi $a \in D$ un punct fixat. Dacă $r > 0$ este ales astfel încât sfera $S(a; r) \subset D$ atunci pentru orice $x \in S(a; r)$, există $\theta \in (0, 1)$ pentru care are loc **formula lui Taylor** de ordinul n asociată funcţiei f şi punctului a:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} d_a f(x-a) + \frac{1}{2!} d_a^2 f(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!} d_a^n f(x-a) + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}_{a+\theta(x-a)} f(x-a), \ \theta \in (0,1),$$

se numeşte *restul formulei lui Taylor* sub forma lui Lagrange şi reprezintă eroarea aproximării funcţiei $f(x)$ prin polinomul $T_n(x)$, într-o vecinătate a punctului a.

[1] Continutul acestui fişier este preluat din Cartea "Probleme de matematică - calcul diferenţial", autori P. Găvruţa, D. Dăianu, L. Cădariu, C. Lăzureanu, L. Ciurdariu, Editura Mirton 2004

Pentru $a = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^p$ formula lui Taylor se numeşte *formula MacLaurin.*

Fie $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R},\ p > 1$ şi $a \in A$.

3. Spunem că a este *punct de extrem local* pentru funcţia f dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât, pentru orice $x \in V \cap A$, expresia $E = f(x) - f(a)$ păstrează semn constant. Pentru $E > 0$, a este punct de minim local, iar pentru $E < 0$, a este punct de maxim local.

4. Dacă funcţia f este diferenţiabilă în $a \in \overset{\circ}{A}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0,\ k = \overline{1,p}$, spunem că a este *punct staţionar* pentru funcţia f.

5. Condiţii necesare de extrem (Teorema lui Fermat în $\mathbf{R}^p$). Dacă funcţia $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R},\ p > 1$, este diferenţiabilă în punctul de extrem local $a \in \overset{\circ}{A}$, atunci $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0,\ k = \overline{1,p}$.

Deci, pentru o funcţie diferenţiabilă, punctele de extrem local se găsesc printre punctele staţionare. Faptul că un punct staţionar este sau nu punct de extrem se testează prin:

6. Condiţii suficiente de extrem local. Fie a un punct staţionar pentru funcţia $f \in C^2(V)$, $V \in \mathcal{V}(a)$. Dacă diferenţiala a doua a funcţiei f în punctul a, $d_a^2 f$, este pozitiv definită, a este punct de minim local, dacă este negativ definită, a este maxim local, iar dacă este nedefinită atunci a nu este punct de extrem local pentru funcţia f.

Matricea formei pătratice $d_a^2 f(x-a)$ este chiar matricea hessiană a funcţiei f în punctul a, $H(a) = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(a)\right]_{k,l=\overline{1,p}}$. Obţinem atunci condiţii practice pentru testarea punctelor staţionare:

a) Dacă notăm cu $\Delta_{12\ldots k},\ k = \overline{1,p}$, minorii de ordinul k de pe diagonala principală a lui $H(a)$ având ca elemente, elementele comune liniilor $1, 2, \ldots, k$ şi coloanelor $1, 2, \ldots, k$, atunci:
(i) dacă $\Delta_1 > 0, \Delta_{12} > 0, \Delta_{123} > 0, \ldots$, a este minim local;
(ii) dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_{12} > 0, \Delta_{123} < 0, \ldots$, a este maxim local;
(iii) dacă $\Delta_1 \geq 0, \Delta_{12} \geq 0, \Delta_{123} \geq 0, \ldots$ sau $\Delta_1 \leq 0, \Delta_{12} \geq 0, \Delta_{123} \leq 0, \ldots$, cel puţin un determinant fiind nul, nu putem preciza natura punctului a (cu această metodă);

(iv) în rest, punctul a nu este extrem local al funcţiei f.

b) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{R}$ sunt valorile proprii ale matricei $H(a)$ atunci:

(i) dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p > 0$, punctul a este minim local;

(ii) dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p < 0$, punctul a este maxim local;

(iii) dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \geq 0$, sau $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \leq 0$, cel puţin o valoare proprie fiind nulă, nu putem preciza natura punctului a;

(iv) dacă există valori proprii de semne contrare, a nu este punct de extrem local al funcţiei f.

7. Un punct $x_0 \in \mathbf{R}$ este punct staţionar al funcţiei $y = y(x)$ definită implicit de ecuaţia $g(x, y) = 0$ dacă verifică sistemul $\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ g'_x(x,y) = 0 \end{cases}$.

Dacă $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ este o soluţie a sistemului de mai sus, cu condiţia ca $g'_y(x_0, y_0) \neq 0$, atunci semnul expresiei $E(x, y) =$
$= -g''_{x^2}(x, y) \cdot g'_y(x, y)$, calculată în (x_0, y_0), ne dă condiţii suficiente ca x_0 să fie punct de extrem local al funcţiei implicite $y = y(x)$. Mai precis, dacă $E(x_0, y_0) > 0$ atunci x_0 este punct de minim local, iar dacă $E(x_0, y_0) < 0$, x_0 este punct de maxim local. Dacă $E(x_0, y_0) = 0$, dar $y'''(x_0) \neq 0$ atunci x_0 nu este punct de extrem local al funcţiei implicite $y = y(x)$.

8. Fie mulţimea deschisă $D \subset \mathbf{R}^p$ şi funcţiile $f, g_1, g_2, \ldots, g_q : D \to \mathbf{R}$, $p > q \geq 1$, iar $A = \{x \in D \mid g_k(x) = 0,\ k = \overline{1, q}\}$.

Spunem că $a \in A$ este *punct de extrem local al funcţiei f condiţionat de mulţimea A* (*punct de extrem al funcţiei f cu legă-
turile* $g_k(x) = 0$, $k = \overline{1, q}$) dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in V \cap A$ expresia $E = f(x) - f(a)$ păstrează semn constant.

9. Determinarea extremelor condiţionate se face utilizând
Metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Punctele de extrem ale funcţiei f cu legăturile $g_k(x) = 0$, $k = \overline{1, q}$, unde $f, g_k \in C^2(D)$, se găsesc printre punctele staţionare ale funcţiei lui Lagrange:

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k g_k(x)\ , \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q).$$

Fie (a, λ^0), $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_q^0)$, un punct staţionar al funcţiei F. Dacă, înlocuind $\lambda_k = \lambda_k^0$, $k = \overline{1, q}$, diferenţiala a doua a funcţiei F, considerată în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_p$, în care ţinem cont că $d_a g_k = 0$, $k = \overline{1,q}$, este pozitiv definită, atunci a este punct de minim condiţionat, dacă este negativ definită, a este punct de maxim condiţionat, iar dacă este nedefinită atunci a nu este punct de extrem condiţionat al funcţiei f.

10. Fie $f : D \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$, $p > 1$, o funcţie de clasă C^1 pe mulţimea deschisă D şi $K \subset D$ o mulţime compactă.

Spunem că $a \in K$ este *punct de extrem absolut al funcţiei f pe mulţimea K* dacă pentru orice $x \in K$ expresia $E = f(x) - f(a)$ păstrează semn constant. Valorile extreme ale funcţiei f pe mulţimea compactă K se obţin comparând valorile funcţiei în punctele staţionare din interiorul lui K şi, respectiv, în punctele staţionare condiţionate de frontiera lui K.

Probleme rezolvate

1. Să se aproximeze funcţia f, $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, cu un polinom de gradul 2 într-o vecinătate a punctului $(1,1)$.

Rezolvare. Din formula lui Taylor de ordinul 2 rezultă că într-o vecinătate a punctului (a,b) funcţia f se poate aproxima cu polinomul Taylor de gradul 2, adică

$$\begin{aligned} f(x,y) &\simeq f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)\right] + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f''_{x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \right. \\ &+ \left. f''_{y^2}(a,b)(y-b)^2\right] \end{aligned}$$

În cazul nostru, $a = 1, b = 1$; $f(1,1) = \ln 2$; $f'_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}, f'_x(1,1) = 1$; $f'_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$, $f'_y = (1,1) = 1$; $f''_{x^2} = \dfrac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{x^2}(1,1) = 0$; $f''_{xy} = -\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}, f''_{xy}(1,1) = -1$; $f''_{y^2} = \dfrac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}, f''_{y^2}(1,1) = 0$.

Deci $\ln(x^2+y^2) \simeq \ln 2 + (x-1) + (y-1) - (x-1)(y-1) = -xy + 2x + 2y - 3 + \ln 2$.

2. Să se determine extremele locale ale funcţiei f,

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6x^2 - 6y^2.$$

Rezolvare. Punctele de extrem local ale funcţiei f se găsesc printre punctele ei staţionare, adică printre soluţiile sistemului

$$\begin{cases} f'_x(x,y) &= 0 \\ f'_y(x,y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x &= 0 \\ 3y^2 - 12y &= 0. \end{cases}$$

Rezultă $x = 0$ şi $x = 4$, respectiv $y = 0$ şi $y = 4$. Cum x nu depinde de y, obţinem punctele staţionare $M_1(0,0), M_2(0,4), M_3(4,0)$,
$M_4(4,4)$.

În continuare testăm care din punctele staţionare de mai sus este extrem local al lui f. Pentru aceasta vom folosi matricea hessiană a funcţiei f,

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x - 12 & 0 \\ 0 & 6y - 12 \end{bmatrix}.$$

Atunci $H(M_1) = H(0,0) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ are minorii după diagonala principală $\Delta_1 = -12 < 0$, $\Delta_{12} = 144 > 0$, deci M_1 este punct de maxim local.

$H(M_2) = H(0,4) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ cu $\Delta_1 = -12 < 0$, $\Delta_{12} = -144 < 0$, deci M_2 nu este extrem local.

$H(M_3) = H(4,0) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ cu $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_{12} = -144 < 0$, deci M_3 nu este extrem local.

$H(M_4) = H(4,4) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ cu $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_{12} = 144 > 0$, deci M_4 este punct de minim local.

3. Să se determine extremele locale ale funcţiei f,

$$f(x,y,z) = 3x^2 + y^3 + 2z^3 - 6xy + 3y^2 - 3z^2.$$

Rezolvare. Punctele staţionare ale lui f sunt date de soluţiile sistemului

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) &= 0 \\ f'_y(x,y,z) &= 0 \\ f'_z(x,y,z) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 6y &= 0 \\ 3y^2 - 6x + 6y &= 0 \\ 6z^2 - 6z &= 0. \end{cases}$$

Din ultima ecuaţie avem $z_1 = 0$ şi $z_2 = 1$. Din prima ecuaţie rezultă $x = y$, pentru care a doua ecuaţie devine $3y^2 = 0$, deci $y = 0$ şi atunci $x = 0$. Rezultă că funcţia f are două puncte staţionare, $M_1(0,0,0)$ şi $M_2(0,0,1)$.

Pentru testarea punctelor staţionare, construim matricea hessiană

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12z-6 \end{bmatrix}$$

Pentru M_1, $H(0,0,0) = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, deci $\Delta_1 = 6 > 0, \Delta_{12} = 0, \Delta_{123} = 0$ şi prin această metodă nu putem preciza natura punctului staţionar M_1. Să calculăm atunci valorile proprii ale matricei $H(0,0,0)$, adică soluţiile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -6 & 0 \\ -6 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+6)\left[(6-\lambda)^2 - 36\right] = 0.$$

Rezultă $\lambda_1 = -6 < 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 12 > 0$, deci M_1 nu este punct de extrem local al funcţiei f.

Pentru M_2, $H(0,0,1) = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, are minorii $\Delta_1 = 6 > 0, \Delta_{12} = 0, \Delta_{123} = 0$ care nu ne dau nici un răspuns. Valorile proprii ale matricei $H(0,0,1)$ sunt $\lambda_1 = 6 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 12 > 0$, deci nici cu metoda valorilor proprii nu putem preciza natura punctului M_2. Vom folosi atunci definiţia punctului de extrem local. Pentru aceasta calculăm expresia

$$E(x,y,z) = f(x,y,z) - f(0,0,1) = 3(x-y)^2 + y^3 + 2z^3 - 3z^2 + 1.$$

Atunci observăm că în orice vecinătate a punctului $(0,0,1)$, expresia $E(x,x,1) = x^3$ nu are semn constant ($E < 0$ pentru $x < 0$, $E > 0$ pentru $x > 0$), deci M_2 nu este punct de extrem local al funcţiei f.

4. Să se determine extremele locale ale funcţiei $y = y(x)$ definită implicit de ecuaţia $x^2 + y + x\sin y = 0$.

Rezolvare. Notăm $g(x,y) = x^2 + y + x\sin y$. Pentru determinarea punctelor staţionare ale funcţiei $y = y(x)$ rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ g'_x(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y + x\sin y = 0 \\ 2x + \sin y = 0. \end{cases}$$

Din a doua ecuaţie avem $x = -\dfrac{1}{2}\sin y$. Rezultă $\sin^2 y - 4y = 0$.

Considerăm funcţia $h(y) = \sin^2 y - 4y$ cu $h'(y) = 2\sin y\cos y - 4 = \sin 2y - 4 < 0$, deci h este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$ şi cum este şi continuă rezultă că ecuaţia $h(y) = 0$ are o soluţie unică, $y = 0$. Rezultă $x = 0$, care este singurul punct staţionar al funcţiei y, iar $y(0) = 0$.

Observăm că $g'_y = 1 + x\cos y$ este nenulă în $(0,0)$, deci funcţia $y = y(x)$ este corect definită, într-o vecinătate a punctului $x = 0$, de ecuaţia dată.

Pentru testarea punctului staţionar, avem că:

$$E(x,y) = -g''_{x^2} \cdot g'_y = -2(1 + x\cos y) \;\Rightarrow\; E(0,0) = -2 < 0$$

şi deci $x = 0$ este punct de maxim local, iar $y_{\max} = y(0) = 0$.

5. Să se determine extremele locale ale funcţiei $z = z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia $z^4 - z + x^2 + y^2 = 0$.

Rezolvare. Notăm $g(x,y,z) = z^4 - z + x^2 + y^2$. Punctele staţionare ale funcţiei z, de două variabile x şi y, ce verifică ecuaţia dată, se obţin rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} z'_x(x,y) &= 0 \\ z'_y(x,y) &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0. \end{cases}$$

Derivând parţial în raport cu x, respectiv y, ecuaţia dată, rezultă:

$$4z^3 z'_x - z'_x + 2x = 0\ , \quad \text{respectiv} \quad 4z^3 z'_y - z'_y + 2y = 0,$$

deci $z'_x = \dfrac{-2x}{4z^3 - 1}$, $z'_y = \dfrac{-2y}{4z^3 - 1}$.

Sistemul devine

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \\ z^4 - z = x^2 + y^2 = 0 \\ 4z^3 - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Rezultă $x = 0, y = 0$, $z^4 - z = 0$, adică $z_1 = 0, z_2 = 1$. Obţinem punctele staţionare $M_1(0,0)$, pentru funcţia implicită z cu $z(0,0) = 0$, şi $M_2(0,0)$, pentru funcţia z cu $z(0,0) = 1$.

Pentru testarea punctelor staţionare găsite construim matricea hessiană a funcţiei z:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} z''x^2 & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{y^2} \end{bmatrix}.$$

Avem

$$\begin{aligned} z''_{x^2} = (z'_x)'_x &= \frac{-2(4z^3-1) + 2x \cdot 12z^2 z'_x}{(4z^3-1)^2} \\ z''_{xy} = (z'_x)'_y &= \frac{2x \cdot 12z^2 z'_y}{(4z^3-1)^2} \\ z''_{y^2} = (z'_y)'_y &= \frac{-2(4z^3-1) + 2y \cdot 12z^2 z'_y}{(4z^3-1)^2} \end{aligned}$$

Pentru M_1, $x = 0, y = 0, z = 0, z'_x(0,0) = 0, z'_y(0,0) = 0$, avem $H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ cu $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_{12} = 4 > 0$, deci $(0,0)$ este punct de minim local al funcţiei $z = z(x,y)$, definită implicit de ecuaţia dată într-o vecinătate a punctului $(0,0)$ cu $z(0,0) = 0 = z_{\text{min}}$.

Pentru M_2, $x = 0, y = 0, z = 1, z'_x(0,0) = 0, z'_y(0,0) = 0$, avem $H(0,0) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ cu $\Delta_1 = -\frac{2}{3} < 0$, $\Delta_{12} = \frac{4}{9} > 0$, deci $(0,0)$ este punct de maxim local al funcţiei $z = z(x,y)$, definită implicit de ecuaţia dată într-o vecinătate a punctului $(0,0)$ cu $z(0,0) = 1 = z_{\text{max}}$.

6. Să se determine extremele funcţiei f, $f(x,y) = 2x + y$, cu legătura $x^2 - y^2 = 3$.

Rezolvare. Pentru funcţia f şi legătura $g(x,y) = 0$, unde $g(x,y) = x^2 - y^2 - 3$, construim funcţia lui Lagrange:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y) = 2x + y + \lambda(x^2 - y^2 - 3).$$

Determinăm punctele staţionare ale lui F rezolvând sistemul

$$\begin{cases} F'_x &= 0 \\ F'_y &= 0 \\ F'_\lambda &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Avem $x = -\dfrac{2}{2\lambda}, y = \dfrac{1}{2\lambda}$. A treia ecuaţie devine $\dfrac{4}{4\lambda^2} - \dfrac{1}{4\lambda^2} = 3$, deci $\lambda^2 = \dfrac{1}{4}$, adică $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$. Obţinem punctele staţionare
$M_1\left(x=-2, y=1, \lambda = \dfrac{1}{2}\right)$ şi $M_2\left(x=2, y=-1, \lambda=-\dfrac{1}{2}\right)$.

Pentru testarea punctelor staţionare calculăm, considerând λ constant,

$$\begin{aligned} d^2_{(x,y)}F &= F''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2F''_{xy}(x,y)dxdy + F''_{y^2}(x,y)dy^2, \\ d_{(x,y)}g &= g'_x(x,y)dx + g'_y(x,y)dy = 0 \end{aligned}$$

În cazul nostru $d^2F = 2\lambda dx^2 - 2\lambda dy^2$ şi $dg = 2xdx - 2ydy = 0$.

Pentru M_1, $d^2_{M_1}F = dx^2 - dy^2$ şi $d_{M_1}g = -4dx - 2dy = 0$, deci $dy = -2dx$. Atunci $d^2_{M_1}F = dx^2 - 4dx^2 = -3dx^2 < 0$ şi punctul $(-2,1)$ este maxim condiţionat pentru funcţia f.

Pentru M_2, $d^2_{M_2}F = -dx^2 + dy^2$ şi $d_{M_2}g = 4dx + 2dy = 0$, deci $dy = -2dx$. Atunci $d^2_{M_2}F = -dx^2 + 4dx^2 = 3dx^2 > 0$ şi punctul $(2,-1)$ este minim condiţionat pentru funcţia f.

7. Fie mulţimea compactă
$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$. Să se demonstreze că
$|2x+y-2z| \leq 6$ pentru orice $(x,y,z) \in K$.

Rezolvare. Considerăm funcţia $f(x,y,z) = 2x+y-2z$. Se pune problema determinării valorilor extreme ale funcţiei f pe mulţimea compactă K.

(i) Determinăm punctele staţionare ale funcţiei f situate în interiorul mulţimii K, rezolvând sistemul:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f'_x &=& 0 \\ f'_y &=& 0 \\ f'_z &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2 &=& 0 \\ 1 &=& 0 \\ -2 &=& 0 \end{array}\right.$$

Acest sistem nu admite soluţii, deci funcţia f nu are puncte staţionare în interiorul mulţimii K.

(ii) Determinăm punctele staţionare ale funcţiei f situate pe frontiera mulţimii compacte K. Frontiera lui K este dată de ecuaţia $x^2+y^2+z^2=4$, adică printr-o legătură $g(x,y,z)=0$, cu care construim funcţia lui Lagrange $F = f + \lambda g$. Deci

$$F(x,y,z,\lambda) = 2x+y-2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-4).$$

Punctele staţionare ale lui F se determină rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} F'_x & = & 0 \\ F'_y & = & 0 \\ F'_z & = & 0 \\ F'_\lambda & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2\lambda x & = & 0 \\ 1+2\lambda y & = & 0 \\ -2+2\lambda z & = & 0 \\ x^2+y^2+z^2 & = & 4 \end{cases}$$

Din primele trei ecuaţii rezultă $x = -\dfrac{2}{2\lambda}$, $y = -\dfrac{1}{2\lambda}$, $z = \dfrac{2}{2\lambda}$. Atunci a patra ecuaţie devine $\dfrac{9}{4\lambda^2} = 4$ şi deci $\lambda = \pm\dfrac{3}{4}$. Obţinem punctele staţionare $M_1\left(x = -\dfrac{4}{3}, y = -\dfrac{2}{3}, z = \dfrac{4}{3}, \lambda = \dfrac{3}{4}\right)$;
$M_2\left(x = \dfrac{4}{3}, y = \dfrac{2}{3}, z = -\dfrac{4}{3}, \lambda = -\dfrac{3}{4}\right)$, pentru care $f(M_1) = -6$ şi $f(M_2) = 6$. Rezultă că pe compactul K valorile extreme ale lui f sunt -6 şi 6, deci $-6 \leq f(x,y,z) \leq 6$, pentru orice $(x,y,z) \in K$, adică $|2x+y-2z| \leq 6$, pentru orice $(x,y,z) \in K$.

Probleme propuse

1.a) Să se scrie polinomul Taylor de gradul 2 în punctul $(1,0)$ pentru funcţia f, $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;

b) Să se scrie polinomul Taylor de gradul 2 în punctul $(1,-1)$ pentru funcţia implicită $z = z(x,y)$ definită de ecuaţia $xy - z^2 + \sin z + 1 = 0$, ştiind că $z(1,-1) = 0$.

Răspuns: a) $T_2(x,y) = -xy + 2y$; **b)** $T_2(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy - 4x + 4y + 3$.

2. a) Să se dezvolte după puterile lui $x-1$ şi $y+1$ polinomul dat prin formula $P(x,y) = x^2y + x^2 + 2y^2 - 2xy + 5y + 1$.

b) Să se dezvolte după puterile lui x, $y-1$ şi $z-2$ polinomul dat prin formula $P(x,y,z) = y^3 + xyz - 3y^2 - xz + 3y - 1$.

Răspuns: a) $T_3(x,y) = (x-1)^2(y+1) + 2(y+1)^2 + 2(x-1)$;
b) $T_3(x,y,z) = (y-1)^3 + x(y-1)(z+2) - 2x(y-1)$.

3. Folosind polinomul Taylor de gradul 2, să se calculeze cu aproximaţie expresiile $(0,98)^{2,008}$ şi $\ln(0,97^2 + 2,01^2 - 1,98^2)$.

Răspuns: $0,96024$ respectiv $0,0588$.

4. Să se determine extremele locale ale funcţiilor f definite prin:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$; **b)** $f(x,y) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} - 3xy$;

c) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 12x)\sqrt{xy}$, $x, y > 0$;

d) $f(x,y) = 1 - x^2 + y^2 + 4 \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$;

e) $f(x,y) = xy(ax + by + c)$, $a, b \neq 0$;

f) $f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

g) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \cos(x + y)$; **h)** $f(x,y) = xy^2 e^{x-y}$.

Răspuns: a) $(1,1)$ minim local; **b)** $(-1,-1)$ maxim local; **c)** $(7, \sqrt{7})$ minim local; **d)** nu are; **e)** $\left(-\dfrac{c}{3a}, -\dfrac{c}{3b}\right)$ minim local dacă $abc < 0$, respectiv maxim local dacă $abc > 0$; **f)** $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ maxim local; **g)** $(0,0)$ minim local; **h)** $(-1,2)$ minim local, $(a,0)$ minim local dacă $a > 0$ şi maxim local dacă $a < 0$.

5. Să se determine extremele locale ale funcţiilor f definite prin:

a) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^3 + 6xy + 3z^2$;

b) $f(x,y,z) = xyz(4 - x - y - z)$, $xyz \neq 0$;

c) $f(x,y,z) = x + y + z + \dfrac{1}{xyz}$, $xyz \neq 0$;

d) $f(x,y,z) = xy + yz + zx - \ln(xyz) - 3$, $x, y, z > 0$;

e) $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z + \sin(x + y + z)$, $x, y, z \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

f) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Răspuns: a) $(6, -18, 0)$ minim local; **b)** $(1,1,1)$ maxim local; **c)** $(-1,-1,-1)$ maxim local, (1,1,1) minim local; **d)** $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ minim local; **e)** $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ maxim local; **f)** (a,a,a) minim local dacă $a > 0$, respectiv maxim local dacă $a < 0$.

6. Să se determine extremele locale ale funcţiei $y = y(x)$ definită implicit de ecuaţia:

a) $x^3 + y^3 - 3x^2 y = 3$; **b)** $x^2 - 2xy + y^2 \ln y = 0$;

c) $x^4 + 3y^4 - 4xy = 0$.

Răspuns: a) $x = 0$ minim local, $y_{\text{min}} = \sqrt[3]{3}$; $x = -2$ maxim local, $y_{\text{max}} = -1$; **b)** $x = e$ maxim local, $y_{\text{max}} = e$; **c)** $x = -1$ minim local, $y_{\text{min}} = -1$; $x = 1$ maxim local, $y_{\text{max}} = 1$.

7. Să se determine extremele locale ale funcţiei $z = z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^3 + 2xz + 2yz = 0$; **c)** $e^z + x^2 - 2x + y^2 + z = 0$.

Răspuns: a)$(1, -2)$ minim local, $z_{\text{min}} = -2$; $(1, -2)$ maxim local, $z_{\text{max}} = 8$; **b)**$(-2, -2)$ maxim local, $z_{\text{max}} = 2$; **c)** $(1, 0)$ maxim local, $z_{\text{max}} = 0$.

8. Să se determine extremele următoarelor funcţii, cu legăturile specificate în dreptul lor:

a) $f(x, y) = xy$, $x^2 + y^2 = 2$;

b) $f(x, y) = 2x^2 - y^2$, $x - y = 1$;

c) $f(x, y) = 4x^3 + y^2$, $2x^2 + y^2 = 1$;

d) $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $xy = 1$.

Răspuns: a) $(1, 1); (-1, -1)$ maxime, $(1, -1); (-1, 1)$ minime; **b)** $(-1, -2)$ minim; **c)** $(0, \pm 1)$; $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ maxime, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$; $\left(\dfrac{1}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$ minime; **d)** $(1, 1)$ minim, $(-1, -1)$ maxim.

9. Să se determine extremele următoarelor funcţii, cu legăturile specificate în dreptul lor:

a) $f(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz$, $xyz = 32$;

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $xy - z^2 = 1$;

c) $f(x, y, z) = xyz$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3,\ x, y, z > 0$;

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x^2 + (y - 1)^2 = 1,\ y + z = 1$.

Răspuns: a) $(4, 4, 2)$ minim; **b)** $(1, 1, 0), (-1, -1, 0)$ minime; **c)** $(1, 1, 1)$ maxim; **d)** $(0, 0, 1)$ minim, $(0, 2, -1)$ maxim.

10. Să se determine punctul din planul $x + y - z + 3 = 0$ care este cel mai apropiat de origine. La ce distanţă de origine se află acest punct? Să se verifice geometric rezultatul găsit.

Răspuns: $(-1, -1, 1)$; $d = \sqrt{3}$.

11. Să se determine cea mai mică şi cea mai mare valoare a funcţiei f pe mulţimea compactă K, unde:

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $K = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1\right\}$;

b) $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy$,

$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y \leq x,\ y \leq -x,\ y \geq -1\}$;

c) $f(x, y) = xy^2$,

$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$;

d) $f(x,y,z) = x + 3y - 2z$,

$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 14\}$.

Răspuns: a) $f_{\text{min}} = f(\pm 2, 0) = 4,\ f_{\text{max}} = f(0, \pm 3) = 9;$

b) $f_{\text{min}} = f(1, -1) = -1,\ f_{\text{max}} = f(-1, -1) = 3;$

c) $f_{\text{min}} = f(\pm 1, 0) = 0,\ f_{\text{max}} = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9};$

d) $f_{\text{min}} = f(-1, -3, 2) = -14,\ f_{\text{max}} = f(1, 3, 2) = 14.$