Material Suplimentar Curs sap 11: Algoritmul PageRank. Lanţuri Markov absorbante.

0.1 Construcţia lanţului Markov pe graful WEB. Algoritmul PageRank

Succesul extraordinar şi dominaţia motorului Google se datorează în principal algoritmului PageRank, care exploatează structura linkurilor din WWW pentru a determina un indice de popularitate al fiecărei pagini, independent de interogarea formulată de utilizator.

Documentele de pe WEB (paginile WEB) sunt identificate de aplicaţiile software ale motorului, numite roboţi sau *crawlere*. Documentele sunt apoi indexate. Modulul de indexare extrage cuvintele cheie, constituind aşa numitul sac de cuvinte. Un alt modul, numit *query module* (modulul de interogare), converteşte cererea formulată de utilizator, în limbaj natural, într-un vector cerere, cu care consultă indexul de conţinut şi extrage paginile relevante cererii. Modulul de ierarhizare ordonează descrescător aceste pagini în funcţie de coeficienţii de popularitate. PageRank-ul este un vector ale cărui coordonate sunt coeficienţii de popularitate ai paginilor WEB identificate de crawler. Acest vector este distribuţia de echilibru a unui lanţ Markov definit pe graful WEB.

Să definim mai întâi lanţul Markov ce stă la baza algoritmului `PageRank`. Considerăm $W = \{1, 2, \ldots, m\}$ mulţimea tuturor paginilor WEB, $H = (h_{ij})$ matricea de conectivitate a lui W sau matricea hyperlink:

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă există link în pagina i către pagina j,} \\ 0, & \text{dacă nu există link în pagina i către pagina j.} \end{cases}$$

Se spune că H este o matrice rară, căci are foarte multe zerouri (în medie, 3-10 elemente sunt nenule pe o linie). Suma elementelor de pe linia i a matricei H indică numărul de out-linkuri, adică numărul de linkuri din pagina i către alte pagini sau ea însăşi. Notăm această sumă cu $r_i = \sum_{j=1}^{m} h_{ij}$. r_i se numeşte ordinul ieşirilor din pagina i. Suma elementelor de pe coloana i a matricei hyperlink indică numărul de in-linkuri ale paginii i, adică numărul de linkuri către pagina i.

Larry Page şi Serghei Brin au definit un mers aleator pe graful WEB considerând că un surfer ajuns în pagina i alege cu aceeaşi probabilitate oricare din paginile către care aceasta are linkuri, prin urmare probabilitatea de a trece din pagina i în pagina j este:

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{r_i}, & \text{dacă există link în pagina i către pagina j,} \\ 0, & \text{dacă nu există link în pagina i către pagina j.} \end{cases}$$

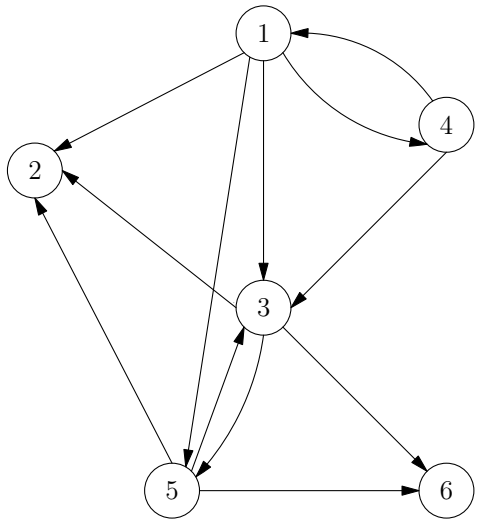

Fig.1: Graf orientat ilustrând linkurile între 6 pagini WEB.

De exemplu, dacă

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

atunci ordinul de ieşire din pagina 5 este $r_5 = 3$, deci probabilitatea de a trece din pagina 5 în oricare din paginile $\{1, 2, \ldots, 6\}$ este $p_{5j} = h_{5j}/3$. Altfel spus, cu aceeaşi probabilitate de 1/3 un surfer poate trece din pagina 5 în pagina 2, 3 sau 6.

Vom exemplifica construcţia propusă de L. Page şi S. Brin prin modelul simplu de reţea izolată de pagini WEB (reţea intranet) din Fig. 1.

Notăm cu $Q = (p_{ij})_{i,j=\overline{1,6}}$, matricea probabilităţilor de tranziţie definite mai sus. Se observă din structura grafului de conectivitate că paginile 2 şi 6 sunt pagini ce nu conţin linkuri către alte pagini. Acestea se numesc *dangling pages*. De exemplu, fişierele `pdf`, `ps` sau fişierele imagine sunt pagini dangling. Prin urmare, liniile 2 şi 6 din matricea de tranziţie au toate elementele nule şi, astfel, Q nu este o matrice stochastică, deci nu poate fi interpretată ca matricea de tranziţie a unui lanţ Markov cu spaţiul stărilor $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Q=

	1	2	3	4	5	6
1	0	1/4	1/4	1/4	1/4	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	1/3	0	0	1/3	1/3
4	1/2	0	1/2	0	0	0
5	0	1/3	1/3	0	0	1/3
6	0	0	0	0	0	0

Pentru a remedia această problemă, Page şi Brin au propus ca vector de probabilitate dintr-o pagină dangling i distribuţia uniformă, considerând

$$p_{ij} = 1/m,\ j = \overline{1,m}.$$

Adică, în mod artificial, se adaugă linkuri dintr-o pagină dangling către toate paginile WEB sau, echivalent, ajuns într-o pagină dangling, un navigator poate apoi alege cu o probabilitate uniformă orice pagină din WWW. Astfel, matricea stochastică obţinută din matricea Q este:

$\tilde{Q}$=

	1	2	3	4	5	6
1	0	1/4	1/4	1/4	1/4	0
2	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**
3	0	1/3	0	0	1/3	1/3
4	1/2	0	1/2	0	0	0
5	0	1/3	1/3	0	0	1/3
6	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**

Lanţul Markov definit de matricea stochastică $\tilde{Q}$ nu este în general ireductibil (adică nu există drum de linkuri între orice două pagini sau, echivalent, graful WEB nu este tare conex) şi pot exista traiectorii periodice, adică surferul, navigând conform matricei de tranziţie $\tilde{Q}$, ar putea fi prins, ca într-o capcană, într-o mişcare aleatoare ciclică. Din acest motiv, dar şi pentru că la un moment dat, şi în realitate, orice surfer renunţă să navigheze urmând linkurile din pagini, L. Page şi S. Brin au introdus ipoteza că doar cu probabilitatea $\alpha \in (0,1)$ surferul navighează conform matricei $\tilde{Q}$ şi cu probabilitatea $1-\alpha$ ignoră linkurile şi alege cu probabilitate uniformă oricare din paginile de pe WEB, introducând adresa URL în linia de comandă a browser-ului. Probabilitatea α se numeşte *factor de damping*. În lucrarea iniţială a fondatorilor Google, α era menţionat ca având valoarea 0.85. Cu această modificare matricea de tranziţie este:

$$G = \alpha\tilde{Q} + (1-\alpha)\underbrace{\begin{bmatrix} 1/m & 1/m & \dots & 1/m \\ 1/m & 1/m & \dots & 1/m \\ & & \vdots & \\ 1/m & 1/m & \dots & 1/m \end{bmatrix}}_{E}.$$

Matricea G se numeşte matricea Google, iar matricea E, de elemente identice $1/m$, se numeşte *matricea de teleportare*, deoarece surferul se teleportează din navigarea aleatoare urmând linkuri într-o "navigare artificială". Evident că şi matricea E este o matrice stochastică, iar G fiind o combinaţie convexă de astfel de două matrice este o matrice stochastică (vezi proprietăţile matricelor stochastice). Mai mult, $G(i,j) > 0, \forall\ i,j = \overline{1,m}$, deci matricea Google este ireductibilă şi aperiodică.

Se presupune că matricea Google este cea mai "uriaşă" matrice cu care se lucrează în vreo aplicaţie la ora actuală.

Lanţul Markov având:

• spaţiul stărilor constituit din mulţimea paginilor WEB, de cardinal m

• matricea de tranziţie de tipul G, cu α fixat

• distribuţia iniţială de probabilitate π_0 (distribuţia uniformă sau oricare alta)

este un lanţ ireductibil şi aperiodic, deci are o unică distribuţie de echilibru π, numită vectorul PageRank.

PageRank–ul, π, este limita şirului (π_n), definit prin $\pi_n^T = \pi_0^T G^n$. Limita este aceeaşi indiferent de distribuţia iniţială de probabilitate π_0, adică indiferent cu ce probabilitate surferul alege pagina din care începe navigarea. $\pi(j)$ se numeşte PageRank-ul paginii j şi reprezintă şansa asimptotică pe care o are pagina j de a fi vizitată de navigatorul aleator sau proporţia din timpul de navigare pe care surferul ar petrece-o vizitând pagina j. Deci, $\pi(j)$ este un indice de popularitate al paginii.

Când un utilizator introduce cuvinte cheie în bara de căutare, motorul Google caută paginile ce conţin cuvintele cheie şi le afişează în ordinea descrescătoare a PageRank-ului lor.

Remarcăm că PageRank-ul unei pagini este independent de interogarea formulată de utilizator. Ea depinde doar de structura grafului WEB şi se poate calcula offline. PageRank-ul se calculează la intervale regulate de timp. Până în 2008 se calcula lunar, dar acum se actualizează la intervale mai scurte de timp.

Vectorul PageRank se calculează numeric, folosind aşa numita metodă a puterii, adică se calculează recursiv. Pornind de la π_0 şi G, se determină distribuţiile (sau PageRank-ul la n paşi de navigare) $\pi_n^T = \pi_{n-1}^T G$. Se consideră că metoda a atins stadiul de convergenţă (adică s-a ajuns la echilibru) într-o etapă n în care $\|\pi_n - \pi_{n-1}\| < \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv foarte mic, prescris.

Pseudocodul algoritmului de calcul al PageRank-ului este:

```
1: function PageRank(G, m);
2:     π = [1/m, 1/m, ..., 1/m]; //Distributia initiala de probabilitate
3:     eps = 10^-7;
4:     do
5:         π' = π;
6:         π = π' * G;
7:     while (||π − π'|| >= eps);
8:     return π;
9: end function
```

S-a demonstrat că viteza de convergenţă a metodei puterii este aceeaşi cu rata de convergenţă a lui α^n, unde α este factorul de damping.

Implicaţii asupra PageRank-ului. Din punctul de vedere al vitezei de convergenţă ar fi preferabil un factor α cât mai apropiat de zero. În acest caz, ţinând seama că matricea Google este $G = \alpha\tilde{Q} + (1-\alpha)E$, ar rezulta că se acordă o pondere redusă, α, navigării conform linkurilor din graful WEB (cu modificarea pentru pagini dangling) şi o pondere mai mare navigării artificiale, conform matricei de teleportare E. Cu alte cuvinte, în acest caz PageRank-ul asociat nu ar reflecta popularitatea reală a paginilor WEB. De aceea o valoare rezonabilă, aşa cum a fost ea aleasă iniţial de Larry Page şi Serghei Brin, $\alpha = 0.85$, conduce la rezultate mai apropiate de realitate şi la o viteză de convergenţă suficient de bună (un reprezentant Google a declarat că metoda puterii converge după 100-200 de iteraţii). Dacă vreti să aflaţi PageRank-ul unor pagini WEB intraţi aici:

`http://www.prchecker.info/check_page_rank.php`

0.1.1 Pagerank-ul personalizat

Pentru o ierarhizare personalizată a paginilor WEB, matricea E se calculează luând în considerare vectorul personalizat w, care este un vector probabilist $w = [a_1, a_2, \ldots, a_m]^T$ ale cărui coordonate reprezintă probabilitatea ca surferul, ce iese din navigarea conform linkurilor, să aleagă pagina $1, 2, \ldots, m$ din WEB. Cu alte cuvinte, el nu alege o pagină în mod uniform, ci are anumite preferinţe, identificate de motor în decursul timpului. Astfel, matricea de teleportare va fi $E = ew^T$, unde $e = [1, 1, \ldots, 1]^T$, iar matricea Google corespunzătoare este

$$G = \alpha\tilde{Q} + (1-\alpha)ew^T.$$

Distribuţia de echilibru corespunzătoare este PageRank-ul personalizat.

0.2 Lanţuri Markov absorbante

Procesele într-un sistem de operare, arhitectura unui sistem software, protocoalele reţelelor wirelles (WLAN), execuţia protocoalelor de reţele (LAN), overflow-ul în traficul printr-un sistem de comunicaţie se modelează prin lanţuri Markov cu stări absorbante, al căror comportament asimptotic (la limită, când $n \to \infty$) este diferit de cel al lanţurilor Markov ireductibile şi aperiodice.

Pentru a caracteriza un lanţ Markov absorbant clasificăm mai întâi stările unui lanţ Markov general.

Considerăm un lanţ Markov omogen ce are spaţiul stărilor $S = \{1, 2, \ldots, m\}$, iar matricea de tranziţie este Q.

Definim pe mulţimea S relaţia: starea i intercomunică cu starea j, şi notăm $i \rightleftharpoons j$, dacă probabilitatea de tranziţie de la i la j într-un număr de paşi este pozitivă, la fel ca şi probabilitatea de tranziţie de la j la i, adică există $n, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $Q^n(i,j) > 0$ şi $Q^k(j,i) > 0$.

Relaţia $\rightleftharpoons$ definită mai sus este tranzitivă şi simetrică, dar nu este reflexivă, căci pot exista stări care nu intercomunică cu ele însele. De exemplu, pentru lanţul Markov ce are spaţiul stărilor $S = \{1, 2, 3\}$ şi matricea de tranziţie

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

starea 1 nu este reflexivă, adică nu intercomunică cu ea însăşi.

În continuare, vom presupune că toate stările unui lanţ Markov sunt reflexive, adică intercomunică cu ele însele, caz în care relaţia $\rightleftharpoons$ este o relaţie de echivalenţă pe spaţiul stărilor.

• Clasa de comunicare a unei stări i, notată cu $C(i)$, este mulţimea stărilor cu care i intercomunică, adică $C(i) = \{j \in S : i \rightleftharpoons j\}$. Dacă există $i \in S$ astfel încât $C(i) = S$, atunci lanţul Markov este ireductibil (oricare două stări intercomunică).

• O clasă C se numeşte *clasă închisă* dacă pentru orice stare $i \in C$ şi j în complementul său, notat cu $\overline{C}$, probabilitatea de tranziţie de la i la j este 0, adică $Q^n(i, j) = 0, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

• Dacă o clasă închisă conţine o singură stare i, starea i se numeşte *stare absorbantă*. În acest caz $p_{ij} = 0$, pentru orice $j \neq i$, deci $p_{ii} = 1$. Cu alte cuvinte, dacă lanţul Markov ajunge în starea i, atunci rămâne în acea stare veşnic (cu probabilitatea 1). Pe linia stării absorbante i a matricei de tranziţie Q, $Q(i, i) = 1$, iar restul elementelor sunt nule.

• O clasă de comunicare C în care există o stare i ce comunică într-un singur pas cu complementul clasei se numeşte *clasă tranzitorie*, adică există $i \in C$ şi $j \in \overline{C}$ astfel încât $Q(i, j) > 0$. Stările unei clase tranzitorii se numesc stări tranzitorii, deoarece cu o probabilitate pozitivă un lanţ ce porneşte dintr-o astfel de stare eventual părăseşte clasa.

Vom studia în continuare un lanţ Markov cu un număr finit de stări, ce poate conţine una sau mai multe stări absorbante şi o clasă tranzitorie.

Un lanţ Markov cu număr finit de stări, în care fiecare stare este fie stare absorbantă, fie stare tranzitorie, se numeşte *lanţ Markov absorbant*.

În Fig. 2 este ilustrat graful unui lanţ Markov cu două stări absorbante, 0 şi 5, iar clasa $C = \{1, 2, 3, 4\}$ constă din stări tranzitorii.

Un exemplu de lanţ Markov absorbant, ce a inspirat folosirea acestui tip de lanţuri Markov în ştiinţa şi ingineria calculatoarelor, este mersul beţivului (Fig.3). Între bar (starea 0) şi casă (starea 4) există 3 colţuri, $1, 2, 3$. Când beţivul ajunge la un colţ i, $i \in \{1, 2, 3\}$, cu probabilitatea $1/2$ o ia spre stânga, adică trece în $i-1$ şi cu probabilitatea $1/2$ o ia spre dreapta, deci trece în starea $i + 1$. Barul şi casa sunt stări absorbante. O dată ajuns în una din aceste stări, rămâne sigur acolo.

• Lanţ Markov absorbant este şi lanţul definit de graful reţelei WWW, fără modificările efectuate de Larry Page şi Serghei Brin. Şi anume, considerăm matricea hyperlink asociată reţelei intranet considerate în prezentarea algoritmului PageRank, în care pagina 2 şi pagina 6 sunt pagini dangling. În loc să luăm 0 pe liniile 2 şi 6, considerăm $Q(2, 2) = 1$ şi $Q(6, 6) = 1$, adică odată ajuns în pagina 2, respectiv 6, un surfer rămâne blocat sigur (cu probabilitatea 1) în aceste pagini:

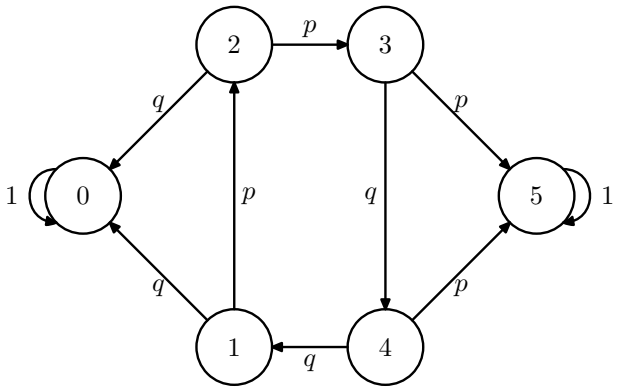

Fig.2: Graf al unui lanţ Markov absorbant.

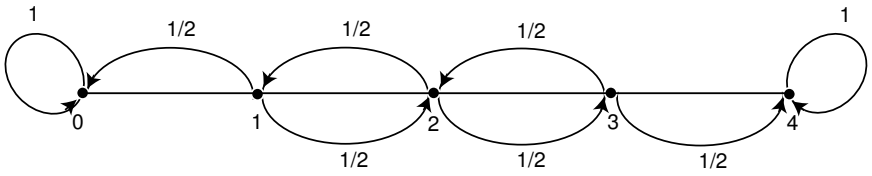

Fig.3: Graful lanţului Markov ce modelează mersul beţivului.

Q=

	1	2	3	4	5	6
1	0	1/4	1/4	1/4	1/4	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1/3	0	0	1/3	1/3
4	1/2	0	1/2	0	0	0
5	0	1/3	1/3	0	0	1/3
6	0	0	0	0	0	1

- Reţelele P2P (*peer–to–peer networks*)

`http://en.wikipedia.org/wiki/Peer-to-peer`

sunt modelate prin lanţuri Markov absorbante. O astfel de reţea este constituită dintr-un număr de routere, indexate prin $1, 2, \ldots, n-1$. Un pachet de informaţie este forwardat de către un router către altul conform unui anumit protocol, în scopul de a fi direcţionat către destinaţie. Destinaţia, indexată prin n, este o stare absorbantă. Acesteia i se mai adaugă o stare absorbantă, numită în limbaj de specialitate *drop state*. Ajunse în această stare pachetele fie sunt eronate iremediabil, fie sunt detectate ca având conţinut sau scop distructiv.

Problemele uzuale care se pun relativ la un lanţ Markov absorbant sunt:

1) Care este probabilitatea ca lanţul Markov ce porneşte dintr-o stare tranzitorie i să fie absorbit de starea absorbantă j?

2) În medie, în câţi paşi este absorbit lanţul Markov?

3) Care este timpul mediu pe care lanţul Markov îl petrece într-o stare tranzitorie?

Răspunsurile la aceste întrebări depind în general de starea din care porneşte lanţul Markov, precum şi de probabilităţile de tranziţie.

Pentru a răspunde acestor întrebări, formulate relativ la lanţuri Markov absorbante, se descompune spaţiul stărilor S, cu $|S| = m$, în două submulţimi disjuncte $S = S_a \cup S_t$, unde S_a este submulţimea stărilor absorbante, de cardinal n_a, iar S_t este submulţimea stărilor tranzitorii, de cardinal n_t, $n_a + n_t = m$. Printr-o reordonare (renumerotare) a mulţimii stărilor, considerăm că stările $1, 2, \ldots, n_a$ sunt absorbante, iar stările $n_a + 1, \ldots, m$ sunt tranzitorii. Astfel, matricea de tranziţie a lanţului Markov absorbant conţine 4 blocuri de forma

$$Q = \begin{pmatrix} I & O \\ R & T \end{pmatrix}, \tag{1}$$

unde:

• I este matricea unitate de tip $n_a \times n_a$;

• O este o matrice nulă de tip $n_a \times n_t$;

Justificarea pentru blocurile I şi O vine din faptul că stările $1, 2, \ldots, n_a$ sunt absorbante şi deci $p_{ii} = 1$, $p_{ij} = 0$, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n_a\}$, $j \in S$, $j \neq i$.

• Matricea R este matricea de tranziţie de la stările tranzitorii la cele absorbante. Ea este de tip $n_t \times n_a$. Cu alte cuvinte, $R(i, j) = P(X_{n+1} = j \in S_a | X_n = i \in S_t)$, $n \in \mathbb{N}$;

• Matricea T dă probabilităţile de trecere între stările tranzitorii. Ea este de tip $n_t \times n_t$ şi $T(i, j) = P(X_{n+1} = j \in S_t | X_n = i \in S_t)$, $n \in \mathbb{N}$.

Matricea de tranziţie a unui lanţ Markov absorbant scrisă în forma (1) se numeşte *matrice de tranziţie în forma standard*.

Matricea de tranziţie a modelului pentru mersul la întâmplare al beţivului este

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În figura Fig. 4 sunt ilustrate câteva traiectorii simulate ale beţivului. Folosim acest exemplu pentru a ilustra aspectele teoretice ce le discutăm.

Permutând vectorul $(0, 1, 2, 3, 4)$ în $(0, 4, 1, 2, 3)$, obţinem matricea de tranziţie în forma standard, notată cu $Q' = P_\pi Q P_\pi^T$, unde $\pi \in S_5$ este permutarea descrisă mai sus, adică $\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, iar P_π este matricea permutare corespunzătoare,

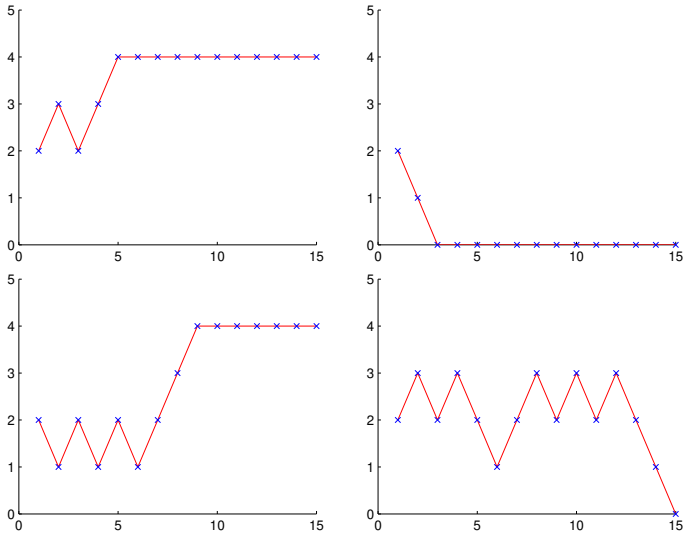

Fig.4: Traiectorii ale beţivului în 15 paşi, ce pornesc din colţul 2. El este "absorbit" fie de bar (cod 0), fie de casă (cod 4). Stările sunt marcate pe axa ordonatelor, iar timpul pe axa absciselor.

$$Q' = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 3 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{array}.$$

Să calculăm puterea n a matricei de tranziţie (1) a unui lanţ Markov absorbant. Produsul a două matrice de blocuri se efectuează ca produsul matricelor în general:

$$Q^2 = \begin{pmatrix} I & O \\ R & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ R & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ R+TR & T^2 \end{pmatrix},$$

$$Q^3 = Q^2 Q = \begin{pmatrix} I & O \\ R+TR & T^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ R & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ R+TR+T^2R & T^3 \end{pmatrix}.$$

Prin inducţie se arată că

$$Q^n = \begin{pmatrix} I & O \\ R+TR+T^2R+\cdots T^{n-1}R & T^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ (I+T+T^2+\cdots T^{n-1})R & T^n \end{pmatrix}.$$

Scopul nostru este să determinăm $\lim_{n\to\infty} Q^n$ şi să interpretăm semnificaţia blocurilor din matricea limită.

Proprietatea 1. Matricea T^n tinde la matricea nulă când $n \to \infty$.

Interpretare: $T^n(i,j) = P(X_n = j \in S_t | X_0 = i \in S_t)$ reprezintă probabilitatea ca la momentul n lanţul să fie în starea tranzitorie j ştiind că la momentul iniţial era în starea tranzitorie i. Deoarece $T^n \to O$, rezultă că fiecare element al matricei tinde la zero, deci pentru n foarte mare probabilitatea ca lanţul să mai fie într-o stare tranzitorie, ştiind că a pornit dintr-una tranzitorie, este foarte mică, adică, aproape sigur (cu probabilitatea 1) o traiectorie ce porneşte dintr-o stare tranzitorie este absorbită de o stare din S_a.

Proprietatea 2. Matricea $I - T$ este inversabilă şi

$$\lim_{n\to\infty}(I + T + \cdots + T^{n-1}) = (I - T)^{-1}. \tag{2}$$

Demonstraţie: Presupunem că matricea $I - T$ nu este inversabilă, deci sistemul liniar şi omogen $(I - T)\mathbf{x} = 0$ admite şi soluţii nebanale $\mathbf{x} \neq 0$. Prin urmare, avem

$$\mathbf{x} - T\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow T\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Succesiv, se obţine:

$$T\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad T^2\mathbf{x} = T(T\mathbf{x}) = T\mathbf{x} = \mathbf{x}, \ldots, T^n\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Trecând la limită când $n \to \infty$ în relaţia $T^n\mathbf{x} = \mathbf{x}$ şi ţinând seama că $T^n \to O$, obţinem $0 = \mathbf{x}$, ceea ce este imposibil, deci presupunerea făcută, că matricea $I - T$ nu este inversabilă, este falsă. Se poate verifica relaţia:

$$(I - T)(I + T + \cdots + T^{n-1}) = I - T^n.$$

Înmulţind la stânga cu $(I - T)^{-1}$, obţinem

$$I + T + \cdots + T^{n-1} = (I - T)^{-1}(I - T^n).$$

Trecând la limită când n tinde la infinit, avem

$$\lim_{n\to\infty}(I + T + \cdots + T^{n-1}) = (I - T)^{-1}(I - \lim_{n\to\infty} T^n) = (I - T)^{-1}(I - O) = (I - T)^{-1}.$$

□

Notăm cu $N = (I - T)^{-1}$. Matricea N se numeşte *matricea fundamentală* a lanţului Markov absorbant.

Distribuţia staţionară a stărilor: Din consideraţiile de mai sus rezultă că matricea Q^n a unui lanţ Markov absorbant este convergentă şi limita sa este:

$$\Pi = \begin{pmatrix} I & O \\ NR & O \end{pmatrix}.$$

Linia i din matricea Π se numeşte distribuţia staţionară a stării i. Remarcăm că spre deosebire de lanţurile Markov ireductibile şi aperiodice, unde fiecare stare avea aceeaşi

distribuţie staţionară π (vezi cursul precedent), în cazul lanţurilor Markov absorbante fiecare stare are altă distribuţie staţionară (de echilibru).

Interpretarea elementelor matricei fundamentale N: Elementul $n_{ij} = N(i,j)$, $i,j \in S_t$, reprezintă numărul mediu de vizite pe care lanţul Markov ce porneşte din starea $i \in S_t$ îl face stării tranzitorii $j \in S_t$ înainte de a fi absorbit.

Exemplul 1. Să se detemine numărul mediu de treceri ale beţivului prin colţul 2 înainte de ajunge acasă sau la bar, ştiind că a pornit din colţul 1.

Rezolvare: Din analiza matricei de tranziţie, scrisă în forma standard, deducem că matricea T este

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricea fundamentală a lanţului este

$$N = (I_3 - T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

Cum stările tranzitorii ale lanţului Markov sunt $1, 2, 3$ (în indexarea iniţială), rezultă că numărul mediu de treceri prin colţul 2 înainte de a ajunge acasă sau la bar, ştiind că a pornit din colţul 1, este $n_{12} = 1$.

Proprietatea 3. Numărul mediu de paşi ai lanţului Markov absorbant ce pleacă din starea tranzitorie i înainte de a fi absorbit este:

$$t_i = n_{i,n_a+1} + n_{i,n_a+2} + \cdots + n_{i,n_a+n_t},$$

unde $\{n_a + 1, n_a + 2, \ldots, n_a + n_t\}$ este mulţimea stărilor tranzitorii.

Explicaţie: Dacă stările tranzitorii ale unui lanţ Markov absorbant sunt $3, 4, 5$, iar 1, 2 sunt stări absorbante, atunci o traiectorie ce porneşte din $i = 3$ poate fi, de exemplu, de forma $3, 5, 5, 4, 3, 5, 4, 1$. Numărul de paşi parcurşi până ce lanţul Markov este absorbit de starea 1 este dat de suma numărului de vizite ale stării 3, ale stării 4 şi ale stării 5.

Numărul t_i se numeşte *timpul mediu până la absorbţia lanţului Markov* ce pleacă din starea i.

Observăm că vectorul coloană $\mathbf{t}$, de coordonate t_i, se poate obţine înmulţind matricea N cu vectorul coloană $\mathbf{e}$, ce are toate elementele 1, adică $\mathbf{t} = N\,\mathbf{e}$.

Exemplul 2. Numărul mediu de paşi (treceri de la un colţ la altul) ai beţivului înainte de a ajunge fie acasă, fie la bar, ştiind că a pornit din colţul 3, este $t_3 = n_{31} + n_{32} + n_{33} = 3$.

Proprietatea 4. Probabilitatea ca lanţul Markov ce porneşte din starea tranzitorie i să fie absorbit de starea $j \in S_a$ este

$$b_{ij} = (NR)(i,j) = \sum_{k \in S_t} N(i,k)R(k,j).$$

Demonstraţie: Înainte de a fi absorbit, lanţul Markov ce porneşte din $i \in S_t$ parcurge 0 paşi, 1 pas, 2 paşi, $\ldots, n$ paşi în mulţimea stărilor tranzitorii S_t, şi apoi într-un pas trece într-o stare absorbantă j. Notăm cu $A_n(i,j)$, $n \in \mathbb{N}$, evenimentul ca lanţul ce porneşte din starea tranzitorie i să facă n paşi în S_t înainte de a fi absorbit de starea absorbantă j. Evident că pentru $n \neq n'$, evenimentele $A_n(i,j)$, $A_{n'}(i,j)$ sunt mutual exclusive. Probabilitatea evenimentului $A_n(i,j)$ este

$$p_{i,j}(n) = P(A_n(i,j)) = \sum_{k \in S_t} T^n(i,k) R(k,j).$$

Probabilitatea ca lanţul ce porneşte din starea tranzitorie i să fie absorbit de starea absorbantă j este

$$\begin{aligned} b_{ij} &= P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n(i,j)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n(i,j)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in S_t} T^n(i,k) R(k,j) = \sum_{k\in S_t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n(i,k)\right) R(k,j) \\ &= \sum_{k\in S_t} \lim_{n\to\infty} \left(T^0(i,k) + T^1(i,k) + \cdots + T^{n-1}(i,k)\right) R(k,j) \\ &= \sum_{k\in S_t} N(i,k) R(k,j). \end{aligned}$$

□

Notând cu B matricea de elemente (b_{ij}), avem $B = NR$.

Exemplul 3. Probabilitatea ca beţivul ce porneşte din colţul 2 să ajungă la bar (să fie absorbit de bar, codificat cu starea 0) este

$$b_{2\,0} = \sum_{k=1}^{3} N(2,k) R(k,0) = N(2,1)R(1,0) + N(2,2)R(2,0) + N(2,3)R(3,0).$$

Ţinând seama că matricea R este

$$R = \begin{pmatrix} R(1,0) & R(1,4) \\ R(2,0) & R(2,4) \\ R(3,0) & R(3,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

avem că

$$b_{2\,0} = 1 \times 0.5 + 2 \times 0 + 1 \times 0 = 0.5.$$

Atenţie la indexarea elementelor matricei R: $R(i,j)$, $i \in S_t$, iar $j \in S_a$. În cazul lanţului analizat mulţimea stărilor tranzitorii este $S_t = \{1,2,3\}$, iar cea a stărilor absorbante $S_a = \{0,4\}$.