

Cursul 11

Valori și vectori proprii ai unui operator liniar (matrice pătratică)

11.1 Valori și vectori proprii ai unui operator liniar (matrice pătratică)

Noțiunea de vector și valoare proprie pentru o matrice pătratică/operator liniar este una dintre cele mai importante din algebra liniară, constituind baza pentru numeroși algoritmi de calcul numeric și cu aplicații deosebite în *machine learning* (recunoașterea fețelor umane, designul sistemelor de recomandare produse și servicii online, etc), *data science*, problemele de analiză a rețelelor de calculatoare, a rețelelor sociale (Facebook, LinkedIn), respectiv în ierarhizarea paginilor WEB în funcție de autoritatea sau popularitatea acestora, etc. Pragul de infectare globală a unei rețele de calculatoare, de către un virus, este dat de o valoare proprie particulară a matricii de adiacență (conectivitate) a rețelei.

Considerăm spațiul vectorial \mathbb{R}^n peste corpul \mathbb{R} . O aplicație liniară $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se numește operator liniar. L "operează" asupra vectorilor din \mathbb{R}^n și îi transformă în vectori din același spațiu.

Definiția 11.1.1 Fie $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un operator liniar. Un **vector propriu** al lui L este un vector **nenul**, $v \in \mathbb{R}^n$, pentru care există un scalar $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât:

$$L(v) = \lambda v \quad (11.1)$$

Scalarul λ se numește **valoare proprie** a operatorului liniar, corespunzătoare vectorului propriu v .

Fixăm o bază \mathcal{B} în \mathbb{R}^n și notăm cu A matricea operatorului liniar L relativ la această bază. Condiția pe care trebuie să o satisfacă un vector propriu și valoarea proprie corespunzătoare se exprimă matricial astfel:

$$Av_{\mathcal{B}} = \lambda v_{\mathcal{B}}, \quad (11.2)$$

unde $v_{\mathcal{B}}$ este matricea coloană a coordonatelor lui v în baza \mathcal{B} , adică:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

Deoarece matricea unitate I_n , are efect ”neutru” într-o înmulțire, $I_n v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}}$, relația (11.2) este echivalentă cu:

$$Av_{\mathcal{B}} = \lambda I_n v_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)[v] = 0, \quad (11.4)$$

adică:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

Datorită șirului de echivalențe, rezultă că operatorul liniar L admite vectori proprii de coordonate x_1, x_2, \dots, x_n , dacă sistemul liniar și omogen (11.5) admite soluții nebanale (pentru că un vector propriu este un vector nenul!). Dar un sistem liniar și omogen de n ecuații cu n necunoscute admite și soluții nebanale, dacă determinantul matricii sistemului este 0, adică

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Acest determinant depinde de necunoscuta $\lambda \in \mathbb{R}$. Dezvoltând:

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0 \quad (11.6)$$

obținem un polinom de grad n în λ , cu coeficienți în corpul \mathbb{R} . Notăm acest polinom cu $P_n(\lambda)$ și îl numim **polinomul caracteristic** al operatorului liniar L .

Un polinom cu coeficienți reali poate avea rădăcini reale simple sau multiple sau rădăcini complex conjugate simple sau multiple. Rădăcinile polinomului caracteristic formează spectrul operatorului L .

În continuare vom numi valori proprii ale operatorului L , doar rădăcinile reale.

Dacă λ_0 este o rădăcină reală polinomului caracteristic, atunci ea anulează determinatul $\det(A - \lambda_0 I_n) = 0$ și deci sistemul liniar și omogen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.7)$$

admite și soluții nebanale. O soluție nebanală este constituită din coordonatele unui vector propriu $v \in \mathbb{R}^n$, corespunzător valorii proprii λ_0 : $L(v) = \lambda_0 v$.

Avem astfel următorul **algoritm de calcul (manual) a valorilor și vectorilor proprii**:

- Se determină matricea A a operatorului relativ la o bază fixată în \mathbb{R}^n ;
- Se calculează polinomul caracteristic $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.
- Se rezolvă ecuația $P_n(\lambda) = 0$. Rădăcinile reale sunt valori proprii ai operatorului L .

• Pentru fiecare valoare proprie λ_0 se determină vectorii proprii corespunzători. Și anume, coordonatele acestor vectori sunt soluțiile nebanale ale sistemului liniar și omogen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

Observația 11.1.1 *Deoarece un operator liniar este reprezentat de o matrice pătratică, iar vectorii proprii de coordonatele lor se obișnuiește să se formuleze aceeași problemă în limbaj de matrici, și anume $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \neq \theta \in \mathbb{R}^n$ este vector propriu al matricii $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dacă există un scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $Av = \lambda v$.*

În aplicațiile pe care le prezentăm folosim limbajul matricial.

Exemplul 1. Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Să determinăm valorile și vectorii proprii corespunzători.

• Polinomul caracteristic,

$$P_2(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$$

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - \lambda & -4 \\ 5 & -2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Deci $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$;

• Rădăcinile polinomului caracteristic sunt: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 \in \mathbb{R}$. Deci matricea A are două valori proprii.

• Să determinăm vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda = 2$, adică vectorii v cu proprietatea că $Av = 2v$. Coordonatele x_1, x_2 ale lui v sunt soluții ale sistemului liniar și omogen:

$$(A - 2I_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

adică

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rangul matricii acestui sistem este 1. Alegem drept determinant principal pe $\Delta_p = |5|$. x_1 este necunoscută principală și $x_2 = \alpha$ necunoscută secundară. Rezolvăm ecuația $5x_1 = 4\alpha$ și obținem familia de soluții $v = (4\alpha/5, \alpha)^T, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$;

• Vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda = 3$:

$$(A - 3I_2)v = 0, \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rezolvând acest sistem obținem vectorii proprii de forma $v = \beta(1, 1)^T$, $\beta \neq 0$.

Exemplul 2. Să se arate că operatorul liniar $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (x - y, 2x - y)$ nu admite vectori proprii.

• Determinăm matricea operatorului relativ la baza canonică din \mathbb{R}^2 , $\mathcal{B} = (e_1 = (1, 0)^T, e_2 = (0, 1)^T)$:

$$\begin{aligned} L(e_1) &= L(1, 0) = (1, 2) \\ L(e_2) &= L(0, 1) = (-1, -1) \end{aligned}$$

Astfel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

• Polinomul caracteristic este $P_2(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

• Rădăcinile polinomului caracteristic sunt: $\lambda_1, \lambda_2 = \pm i \in \mathbb{C}$. Deoarece polinomul caracteristic nu admite rădăcini în corpul \mathbb{R} , operatorul liniar nu are valori proprii, deci nici vectori proprii.

Din primul exemplu, observăm că pentru o valoare proprie avem o infinitate de vectori proprii corespunzători și această particularitate se datorează faptului că mulțimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, la care adăugăm vectorul nul este subspațiul Null al matricii $A - \lambda_0 I_n$. Notăm acest subspațiu cu $S_{\lambda_0} = \text{Null}(A - \lambda_0 I_n)$ și îl numim **subspațiul propriu, corespunzător valorii proprii λ_0** .

O problemă importantă în studiul valorilor și vectorilor proprii ai unui operator liniar $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (de matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) este să deducem dacă în \mathbb{R}^n există sau nu o bază formată din vectori proprii.

Dacă există o bază $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, astfel încât v_i este vector propriu corespunzător valorii λ_i , $i = \overline{1, n}$, atunci din:

$$\begin{aligned} L(v_1) &= \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ L(v_2) &= \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0v_n \\ &\vdots \\ L(v_n) &= \lambda_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

rezultă că matricea operatorului L în această bază este $A_{\mathcal{B}'} = [L(v_1) | L(v_2) | \dots | L(v_n)]$, adică:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

o matrice diagonală, cea mai simplă matrice, după matricea nulă.

Lucrând cu operatorul exprimat în această bază de vectori proprii, toate calculele sunt mai simple.

În cursul precedent am arătat că matricile $A_{\mathcal{B}}, A_{\mathcal{B}'}$, ale unui operator liniar $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ relativ la două baze distincte, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, sunt legate prin relația:

$$A_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} A_{\mathcal{B}'} T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}$$

Relația dintre cele două matrici $A_{\mathcal{B}}, A_{\mathcal{B}'}$ se numește relație de similaritate (asemănare).

Definiția 11.1.2 Două matrici pătratice cu elemente reale, $A, A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cu proprietatea că există o matrice inversabilă $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ astfel încât $A = T A' T^{-1}$ se numesc matrici similare.

În cazul în care există o bază formată din vectori proprii ai matricii A , rezultă de mai sus că matricea A este similară cu matricea diagonală, ce are pe diagonala principală valorile proprii:

$$A = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}$$

adică

$$A = \underbrace{[v_1 | v_2 | \dots | v_n]}_{T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) [v_1 | v_2 | \dots | v_n]^{-1}$$

11.2 Motivația studiului existenței unei baze formate din vectori proprii

În numeroși algoritmi ce implică matrici pătratice intervine adesea calculul puterii, A^m , a unei matrici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Atunci când atât dimensiunea n a matricii, cât și puterea m sunt foarte mari, trebuie găsită o modalitate simplă de calcul a puterii care să evite cumulara erorilor. Una din aceste modalități este factorizarea matricii A , adică exprimarea ei, dacă este posibil, ca un produs de matrici ce include și o matrice diagonală.

Un prim avantaj al similarității unei matrici A , cu o matrice diagonală D , constă în modalitatea simplă de calcul a unei puteri A^m a matricii A .

Propoziția 11.2.1 Dacă matricea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este similară cu o matrice diagonală $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, adică $A = T D T^{-1}$, atunci $A^m = T D^m T^{-1}$.

Demonstrație:

$$A^2 = A A = (T D T^{-1})(T D T^{-1}) = T D^2 T^{-1}$$

Prin inducție rezultă

$$A^m = T D^m T^{-1}$$

□

Dacă însă D este o matrice diagonală:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{atunci } D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{bmatrix}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

și deci:

$$A^m = T \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{bmatrix} T^{-1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

În continuare dăm condițiile care asigură similaritatea unei matrici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cu o matrice diagonală. Cum în aceste condiții intră și dimensiunea subspațiilor proprii $S_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \lambda v\} = \text{Null}(A - \lambda I_n)$, să precizăm ce se știe despre această dimensiune.

O valoare proprie $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ a matricii A , poate fi rădăcină reală simplă sau multiplă a polinomului caracteristic, adică polinomul caracteristic admite factorizarea:

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q_{n-k}(\lambda)$$

unde Q este un polinom nedivizibil cu $(\lambda - \lambda_0)$. Dacă $k = 1$, atunci λ_0 este rădăcină simplă, altfel, este rădăcină multiplă de ordin k .

De exemplu polinomul $P_4(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 5)(\lambda - 1)^2$ are rădăcinile simple $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 5$ și rădăcina dublă (multiplă de ordin 2), $\lambda_{3,4} = 1$. Relația dintre ordinul de multiplicitate al unei valori proprii λ_0 și dimensiunea subspațiului său propriu, S_{λ_0} , este următoarea:

Propoziția 11.2.2 Dacă λ_0 este o rădăcină reală de ordin k a polinomului caracteristic, atunci dimensiunea subspațiului propriu corespunzător, S_{λ_0} , este mai mică cel mult egală cu k :

$$\dim(S_{\lambda_0}) \leq k$$

Demonstrație: Fără demonstrație!!! □

Discuție:

- Dacă valoarea proprie λ_0 este rădăcină simplă a polinomului caracteristic, atunci conform propoziției precedente $\dim(S_{\lambda_0}) \leq 1$. Dar dimensiunea mai mică decât 1 este 0, care prin convenție este dimensiunea subspațiului vectorial format doar din vectorul nul $\{\theta_n\}$. Cum vectorul nul nu este vector propriu, rezultă că **dimensiunea subspațiului propriu corespunzător unei valori proprii simple nu poate fi decât 1**.

- Dacă λ_0 este rădăcină multiplă de ordin k atunci dimensiunea efectivă a subspațiului propriu corespunzător, S_{λ_0} , se deduce determinând o bază în acest subspațiu. adică rezolvăm sistemul liniar și omogen:

$$(A - \lambda_0 I_n)v = 0,$$

ce definește ecuațiile subspațiului propriu S_{λ_0} , determinăm o bază și apoi aflăm dimensiunea lui S_{λ_0} .

Exemplul 3. Să se determine valorile proprii, subspațiile proprii corespunzătoare și dimensiunea acestora pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Valorile sale proprii sunt (verificați!) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = -1$. Fără să determinăm subspațiul propriu $S_{\lambda=3}$, corespunzător valorii proprii 3, putem afirma că dimensiunea sa este 1, deoarece $\lambda = 3$ este rădăcină simplă a polinomului caracteristic. Rădăcina $\lambda = -1$ fiind rădăcină dublă, dimensiunea subspațiului propriu corespunzător este ≤ 2 . Pentru a stabili dacă dimensiunea exactă este 1 sau 2, determinăm o bază în subspațiul propriu $S_{\lambda=-1}$.

Determinăm mai întâi subspațiul

$$S_{\lambda=-1} = \{v(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid Av = -1v\}$$

Coordonatele vectorilor $v \in S_{\lambda=-1}$ sunt soluții nebanale ale sistemului liniar și omogen $(A - (-1)I_3)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rangul matricii sistemului este 1. Alegem determinantul principal $\Delta = |1|$, unde 1 este elementul din poziția $(1, 1)$. Deci x_1 este necunoscută principală, iar $\alpha := x_2, \beta := x_3$ necunoscute secundare. Rezolvând ecuația:

$$x_1 + \alpha + \beta = 0$$

obținem soluția:

$$x_1 = -\alpha - \beta, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Deci subspațiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = -1$ este:

$$S_{\lambda=-1} = \{v = (-\alpha - \beta, \alpha, \beta)^T = \alpha(-1, 1, 0)^T + \beta(-1, 0, 1)^T, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Acest subspațiu este generat de vectorii $(-1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T$. Vectorii fiind liniari independenți, ei formează o bază în acest subspațiu și deci subspațiul are dimensiunea 2.

Exemplul 4. Să se determine subspațiile proprii și dimensiunea acestora pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinomul caracteristic este $P_2(\lambda) = (1 - \lambda)^2$, deci valorile proprii sunt: $\lambda_{1,2} = 1$. Subspațiul propriu corespunzător poate avea dimensiunea 1 sau 2. Să determinăm o bază în acest subspațiu,

$S_{\lambda=1} = \text{Null}(A - I_2)$:

$$(A - I_2)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x_2 este necunoscută principală, iar x_1 , notat α , necunoscută secundară. Astfel avem ”de rezolvat” ecuația: $0\alpha + x_2 = 0$. Rezultă $x_2 = 0$ și deci:

$$S_{\lambda=1} = \{v = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha e_1\}$$

Prin urmare $\dim(S_{\lambda=1}) = 1 < \text{ordinul de multiplicitate al valorii proprii}$.

Suntem acum în măsură să arătăm că există un context mai general în care se poate construi în \mathbb{R}^n o bază formată din vectori proprii ai unei matrici sau operator liniar.

Propoziția 11.2.3 Fie A o matrice pătratică din $\mathbb{R}^{n \times n}$. În \mathbb{R}^n există o bază formată din vectori proprii ai matricii A dacă și numai dacă următoarele două condiții sunt îndeplinite:

- 1) Polinomul caracteristic $P_n(\lambda)$ are toate cele n rădăcini, reale;
- 2) Dimensiunea fiecărui subspațiu propriu, S_λ , coincide cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare λ .

Demonstrație: Presupunem că cele două condiții 1-2 sunt satisfăcute. Deoarece polinomul caracteristic are toate rădăcinile reale rezultă că el se descompune astfel:

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, s}, \text{ și } k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$$

O rădăcină arbitrară λ_i având ordinul de multiplicitate k_i , $i = \overline{1, s}$, rezultă conform ipotezei 2) că dimensiunea subspațiului propriu corespunzător este k_i , adică putem constitui o bază $\mathcal{B}_i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_{k_i}^i)$ în S_{λ_i} , $i = \overline{1, s}$. Sistemul de vectori \mathcal{B}' obținut din reuniunea bazelor $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_s$ din subspațiile proprii $S_{\lambda_1}, S_{\lambda_2}, \dots, S_{\lambda_s}$ conține $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_s$ vectori liniar independenți, deci constituie o bază formată din vectori proprii ai lui A . Sistemul de vectori \mathcal{B}' este liniar independent deoarece vectorii din fiecare bază, \mathcal{B}_i , sunt liniar independenți, și la valori proprii distincte corespund vectori proprii liniar independenți, deci reuniunea în ansamblu formează sistem liniar independent.

Reciproca propoziției este evidentă, adică dacă există o bază formată din vectori proprii atunci cele două condiții din enunț sunt satisfăcute. \square

Exemplul 5. Reluăm cazul matricii A din Exemplul 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Valorile sale proprii sunt $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = -1$. Rezultă că toate trei rădăcinile polinomului caracteristic $P_3(\lambda)$ aparțin lui \mathbb{R} . Să determinăm o bază în subspațiul propriu $S_{\lambda=3}$, rezolvând sistemul $(A - 3I_3)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notând x_3 cu α , rezolvăm sistemul:

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &= -\alpha \\ x_1 - 3x_2 &= -\alpha \end{aligned}$$

și obținem:

$$S_{\lambda=3} = \left\{ v = \begin{bmatrix} \alpha/2 \\ \alpha/2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Deci o bază în subspațiul propriu $S_{\lambda=3}$ este

$$\mathcal{B}_1 = (v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}),$$

adică dimensiunea subspațiului propriu coincide cu ordinul de multiplicitate al valorii $\lambda = 3$ (ceea ce se știa apriori, deoarece $\lambda = 3$ este rădăcină simplă).

În 3 am dedus că și subspațiul propriu $S_{\lambda=-1}$ are dimensiunea egală cu 2, ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\lambda = -1$, și o bază în $S_{\lambda=-1}$ este:

$$\mathcal{B}_2 = (v_2 = (-1, 1, 0)^T, v_3 = (-1, 0, 1)^T)$$

Reuniunea celor două baze este

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = (v_1 = (1, 1, 2)^T, v_2 = (-1, 1, 0)^T, v_3 = (-1, 0, 1)^T)$$

Astfel matricea A este similară cu matricea diagonală:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

adică

$$A = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} D T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}$$

unde

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [v_1 | v_2 | v_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11.3 Proprietăți ale matricilor similare

Unei matrici pătratice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i se asociază un număr real numit urma matricii și notat $tr(A)$ (tr vine de la trace=urmă în limba engleză). Urma matricii A este egală cu suma elementelor de pe diagonala principală.

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Numele de matrici similare sugerează că au ceva în comun.

Propoziția 11.3.1 *Două matrici similare au:*

- același rang;
- același determinant;
- aceeași urmă;
- același polinom caracteristic;
- aceleași valori proprii (dar NU și vectori proprii).

Demonstrație: (opțional)

Fie A, A' două matrici similare, adică $A = TA'T^{-1} \Leftrightarrow AT = TA'$. Pentru a arăta că A și A' au același rang se arată că $\text{Null}(A) = \text{Null}(A')$, prin dublă incluziune. Astfel avem $\dim(\text{Null}(A)) = \dim(\text{Null}(A'))$, adică $n - \text{rang}(A) = n - \text{rang}(A')$ și deci $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$.

$$\det(A) = \det(T)\det(A')\det(T^{-1}) = \det(T)\det(A')(1/\det(T)) = \det(A').$$

Egalitatea $tr(A) = tr(A')$ se verifică calculând conform formulei produsului $TA'T^{-1}$ și apoi suma elementelor de pe diagonala principală a produsului.

Să demonstrăm că două matrici similare au același polinom caracteristic. **(obligatoriu)**

Notăm cu $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, respectiv $Q_n(\lambda) = \det(A' - \lambda I_n)$, polinoamele caracteristice asociate celor două matrici similare, A și A' , unde $A = TA'T^{-1}$. Ținând seama că $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ și că $\det(T^{-1}) = 1/\det(T)$, rezultă că:

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det(TA'T^{-1} - \lambda T T^{-1}) = \det(T(A' - \lambda I_n)T^{-1}) =$$

$$\det(T)\det(A' - \lambda I_n)\det(T^{-1}) = \det(A' - \lambda I_n) = Q_n(\lambda).$$

□

Consecință,

- în forma utilizată în Computer Science: valorile proprii a două matrici similare coincid.
- în matematică: valorile proprii ale unui operator liniar nu depind de baza fixată în spațiul pe care acționează operatorul.

Din proprietățile matricilor similare extragem următoarele informații pentru matricile similare cu o matrice diagonală:

Dacă:

$$A = T_{BB'} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}}_D T_{BB'}^{-1}$$

atunci din $\text{tr}(A) = \text{tr}(D)$ rezultă că:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr}(D)$$

apoi

$$\det(A) = \det(D) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

.

11.4 Aplicații ale vectorilor proprii. Calculul coeficientului de popularitate/importanță a nodurilor unei rețele

Știința rețelelor (*network science*) este un domeniu activ în CS, ce dezvoltă tehnici de modelare, comparare și sumarizare a volumului imens de date, ce descriu interacțiunile complexe dintre entități conectate fizic sau virtual.

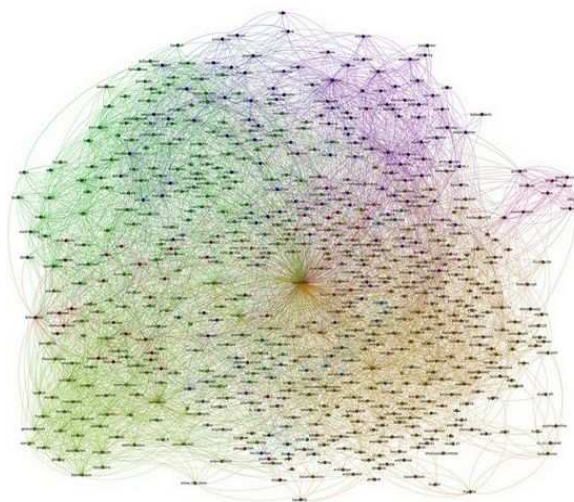


Fig.11.1: Rețea (statică) generată de Gephi <http://gephi.org>

Aici este o rețeaua interactivă a bolilor umane. Nodurile sunt bolile. Există link între două noduri (boli) dacă există procese intra-celulare ce favorizează ambele boli:

<https://plot.ly/~empet/12908/diseasome-network/>

În analiza rețelelor sociale (Facebook, Google +, Twitter) sau de business, a rețelei internet, a rețelelor colaborative profesionale (Linkedin), în ierarhizarea paginilor WEB, etc sunt implicate valorile proprii și vectorii proprii ale/ai matricii de adiacență grafului ce definește rețeaua sau a unei matrici dedusă din aceasta.

O problemă ce se abordează în studiul și analiza rețelelor este aceea a stabilirii nivelului de importanță/popularitate/autoritate a nodurilor sale. Una din metodele care a dat deja rezultate deosebite în stabilirea importanței/popularității nodurilor și ranking-ul lor în funcție de indicele/coeficientul de importanță, se bazează pe analiza structurii linkurilor.

Scopul unei astfel de analize este de a identifica în cazul rețelei WWW care sunt paginile care au cel mai ridicat indice de importanță (popularitate, autoritate), iar în cazul rețelelor sociale, profesionale, pentru a determina membrii sau "actorii" importanți ai unei comunități.

Modelul matematic al unei rețele este un graf.

Un graf, G , este definit de o pereche $G = (V, L)$, unde $V = \{1, 2, \dots, m\}$ este mulțimea nodurilor, iar L mulțimea arcelor (linkurilor, conexiunilor dintre noduri).

Un graf poate fi orientat sau nu, adică se indică direcția de conexiune sau nu. Rețeaua Facebook, de exemplu, este un graf neorientat, în timp ce rețeaua WEB este reprezentată de un graf orientat—nodurile sunt paginile WEB și conexiunile sunt link-urile dintr-o pagină i spre o pagină j .

Matricea de adiacență/conectivitate a grafului G este matricea $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, m}$, unde:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă nodurile } i \text{ și } j \text{ sunt conectate printr-un arc direct} \\ 0 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Matricea de adiacență a unui graf neorientat este simetrică, adică $a_{ij} = a_{ji}$, oricare ar fi $i, j = \overline{1, m}$, în timp ce matricea de adiacență a unui graf orientat nu este simetrică, pentru poate exista link de la i spre j dar nu și de la j spre i .

Pentru a capta și interacțiuni indirecte între noduri se definește noțiunea de drum între două noduri i, j : un drum este o succesiune de linkuri(arce) $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$ (orientate sau nu după cum graful model este orientat sau nu), astfel încât $i_1 = i$ și $i_k = j$. Un ciclu este un drum pentru care nodul inițial și final coincid.

Un graf neorientat/orientat este *conex*, dacă oricare ar fi i și j , două noduri distincte, există un drum de arce între i și j .

Nivelul de importanță al unui i nod într-o rețea modelată de un graf conex și neorientat este un număr pozitiv, $x_i > 0$, definit ca media ponderată a coeficienților de importanță a nodurilor j_1, j_2, \dots, j_k , cu care nodul i este conectat prin arc direct (drum de lungime 1):

$$x_i = \frac{1}{\lambda}(x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_k}), \quad \lambda > 0 \quad (11.9)$$

Intuitiv această relație ilustrează zicala românească, "spune-mi ce prieteni ai ca să-ți spun cine ești".

Parametrul λ determină cât de multă popularitate partajează nodurile între ele, prin conexiuni. Dacă λ este mic, atunci nodurile cu care i este conectat transmit un coeficient mai mare de influență/popularitate nodului i , iar dacă λ crește, atunci influența moștenită de nodul i de la nodurile cu care este conectat direct scade.

Remarcăm că relația (11.9) se poate rescrie astfel:

$$x_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \quad (11.10)$$

deoarece elementele matricii de adiacență, a_{ij} , din linia i , sunt nenule doar pentru $j = j_1, j_2, \dots, j_k$ (doar $a_{ij_1}, a_{ij_2}, \dots, a_{ij_k}$ sunt egale cu 1, restul a_{ij} sunt zero), adică doar pentru nodurile j cu care i este conectat direct.

Ne întrebăm dacă cunoscând doar matricea de adiacență (conectivitate) a unei rețele putem deduce indicatorii de importanță/popularitate a nodurilor sale. Răspunsul este afirmativ, deoarece relația (11.10) se mai poate scrie:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = \lambda x_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (11.11)$$

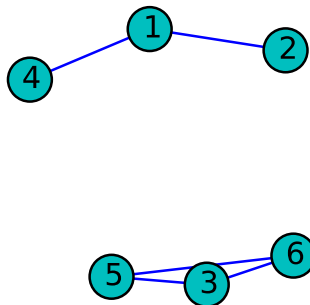
și notând cu x vectorul din \mathbb{R}^m ce are drept coordonate, indicatorii de importanță a nodurilor $1, 2, \dots, m$, adică $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, atunci relația (11.11) este echivalentă cu $Ax = \lambda x$, adică λ este valoare proprie a matricii de adiacență, corespunzătoare vectorului propriu al indicatorilor de importanță.

Problema care se ridică imediat, știind că o matrice poate să nu aibă nici o rădăcină reală a polinomului caracteristic sau poate să aibă mai multe rădăcini reale (deci valori proprii), este, care valoare proprie și vector propriu corespunzător o folosim în definiția indicatorului de importanță a nodurilor.

Faptul că matricea de adiacență a unui graf este o matrice nenegativă, adică are elementele $a_{ij} \geq 0$, oricare ar fi i și j , ajută foarte mult în a găsi un răspuns la această întrebare și deci pentru a putea determina coeficienții de importanță a nodurilor.

Dacă o matrice A este nenegativă, atunci indicăm (notăm) această proprietate prin $A \geq 0$.

Pentru a deduce modalitatea de calcul a coeficienților de popularitate a nodurilor, caracterizăm mai întâi matricea de adiacență a unui graf conex. Pentru aceasta observăm că dacă avem graful neconex din figura:



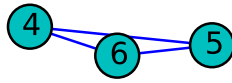
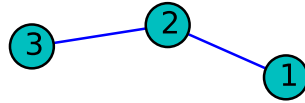
Matricea lui de adiacență este:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Reetichetând nodurile, adică aplicând permutarea:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

etichetelor nodurilor 1, 2, 3, 4, 5, 6, avem o rețea cu aceeași structură a linkurilor:



dar cu matricea de adiacență:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

În această matrice este imediat evident, din faptul că elementele de intersecție a liniilor 4, 5, 6 cu coloanele 1, 2, 3 sunt toate zero, ca graful este neconex, pentru că grupul de noduri 4, 5, 6 nu comunică cu grupul 1, 2, 3.

Relația dintre cele două matrici de adiacență este:

$$A' = P_{\pi} A P_{\pi}^T,$$

unde $P_{\pi} = (p_{ij})$ este matricea de permutare definită de π , $p_{ij} = \delta_{\pi_i j}$.

În general produsul la stânga cu o matrice de permutare, P_{π} , permută corespunzător liniile matricii A , iar produsul la dreapta cu P_{π}^T , permută la fel și coloanele. Astfel $A' = P_{\pi} A P_{\pi}^T$ este matricea de adiacență a grafului care are nodurile reetichetate. Adică în loc de etichetele $(1, 2, \dots, m)$ se folosesc etichetele $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ și există arc între nodul π_i și π_j , dacă și

numai dacă există arc între i și j în graful inițial. Deoarece $P_\pi^T = P_\pi^{-1}$ (vezi cursul 1), rezultă că relația:

$$A' = P_\pi A P_\pi^T$$

indică că cele două matrici de adiacență sunt similare (deci au aceleași valori proprii, dar nu și vectori proprii; deduceți cum dintr-un vector propriu v a lui A obțin un vector propriu al lui A').

După aceste precizări putem caracteriza matricile de adiacență a grafurilor conexe:

Definiția 11.4.1 *Matricea de adiacență a unui graf se numește matrice ireductibilă dacă nu există nici o permutare π a lui $(1, 2, \dots, m)$ astfel încât:*

$$P_\pi A P_\pi^T = \begin{pmatrix} X & Z \\ O & Y \end{pmatrix},$$

unde $P_\pi = (p_{ij})$ este matricea permutare definită de π , iar X, Y sunt matrici pătratice.

Cu alte cuvinte o matrice de adiacență este ireductibilă dacă nu este similară cu o matrice de forma:

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ O & Y \end{bmatrix},$$

adică printr-o reindexare (re-etichetare) a nodurilor nu există o submulțime de noduri care să nu comunice cu restul printr-un drum de noduri.

Matricea de adiacență a unui graf conex este evident ireductibilă, pentru că un astfel de graf nu conține niciun grup de noduri izolate (neconectate cu nodurile din complementul grupului).

În continuare evidențiem implicațiile proprietății de nenegativitate și ireductibilitate a unei matrici A asupra valorilor și vectorilor proprii.

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ toate rădăcinile (reale și complex conjugate) polinomului caracteristic, $P_m(\lambda) = \det(A - \lambda I_m)$.

Dacă $\lambda, \bar{\lambda}$ sunt două rădăcini complex conjugate, $a \pm ib$, atunci lor li se asociază două puncte în plan, de coordonate $P(a, b)$ și $P'(a, -b)$, ce sunt evident simetrice față de Ox. Ar trebui să știți de la liceu că modulul unui număr complex $\lambda = a + ib$ este $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ și că acest modul reprezintă distanța de la punctul $P(a, b)$ la origine.

Rădăcinile reale ale polinomului caracteristic sunt de forma $a + i0$, deci ele sunt reprezentate prin puncte de pe axa Ox, de coordonate $(a, 0)$.

Dacă λ_0 este rădăcina polinomului caracteristic a matricii nenegative A , ce are cea mai mare valoare absolută, atunci restul rădăcinilor au valoarea absolută $|\lambda| \leq |\lambda_0|$, adică punctele din plan, asociate, sunt incluse într-un disc cu centrul în origine și de rază $R = |\lambda_0|$.

Mai subliniem că:

Orice matrice pătratică $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ are același polinom caracteristic, deci aceleași valori proprii ca și matricea A^T .

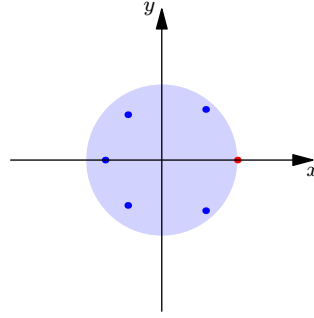


Fig.11.2: Poziția rădăcinilor polinomului caracteristic de grad 6, în planul complex, pentru o matrice nenegativă $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$.

Într-adevăr, notând cu Q polinomul caracteristic al matricii A^T și cu P polinomul matricii A , avem:

$$Q_n(\lambda) = \det(A^T - \lambda I_n) = \det(A^T - \lambda I_n^T) = \det(A - \lambda I_n)^T = \det(A - \lambda I_n) = P_n(\lambda)$$

Ultima egalitate are loc deoarece în general avem $\det(M^T) = \det(M)$

Un rezultat remarcabil relativ la matricile nenegative ireductibile este **Teorema lui Perron–Frobenius**:

Teorema 11.4.1 1) Dacă matricea A este o matrice nenegativă și ireductibilă, atunci printre rădăcinile polinomului său caracteristic există una reală, strict pozitivă și dominantă. Aceasta este deci o valoare proprie, λ_1 , a matricii A și este dominantă, în sensul că orice altă rădăcină, λ , a polinomului său caracteristic are modulul mai mic sau egal cu λ_1 , $|\lambda| \leq \lambda_1$.

2) Valoarea proprie dominantă este simplă și deci subspațiul propriu corespunzător are dimensiunea 1. Acest subspațiu este generat de un vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ având toate coordonatele strict pozitive, $x_i > 0$, $i = \overline{1, m}$. Cu excepția vectorilor coliniari și de același sens cu x , αx , $\alpha > 0$, nici un alt vector propriu al matricii A nu mai are toate coordonatele strict pozitive.

3) Matricea transpusă, A^T , având același polinom caracteristic are aceeași valoare proprie, pozitivă și dominantă, simplă și subspațiul propriu corespunzător este la fel generat de un vector de coordonate strict pozitive.

În figura 11.2 ilustrăm poziția rădăcinilor unui polinom caracteristic asociat unei matrici nenegative și ireductibile A . Punctul roșu corespunde valorii proprii dominante a matricii A :

Exemplul 6. Fie matricea nenegativă (evident A este arbitrară nu este matrice de adiacența):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 21 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 11 & 2 \\ 35 & 8 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Rădăcinile polinomului său caracteristic sunt:

$$-9.44, \quad 10.34 + 0.57i, \quad 10.34 - 0.57i, \quad 27.76$$

27.76 este valoarea proprie dominantă, deoarece $|-9.44| < 27.76$ și $|10.34 \pm 0.57i| = 10.35$.

Matricea de adiacență, A , a unui graf conex fiind nenegativă și ireductibilă i se poate aplica Teorema lui Perron–Frobenius: ea are o valoare proprie dominantă, strict pozitivă și un vector propriu de coordonate strict pozitive. Astfel pentru a defini coeficientul de popularitate al nodurilor se ia drept valoare proprie din relația (11.11) valoarea λ_1 , adică valoarea proprie dominantă, iar ca vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, un vector propriu corespunzător lui λ_1 , ce are toate coordonatele strict pozitive.

Pentru a avea coeficientul de popularitate al fiecărui nod din același interval normalizăm vectorul x adică îl împărțim la suma coordonatelor și obținem vectorul $r = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i} (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, numit vectorul rating, sau vectorul Perron, care este de asemenea un vector propriu corespunzător valorii proprii λ_1 (pentru că dacă $Ax = \lambda_1 x$, atunci și $A(\alpha x) = \lambda_1(\alpha x)$). La noi $\alpha = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i}$.

Astfel coeficientul de importanță a nodului i sau ratingul nodului i este $r_i = \frac{x_i}{x_1 + x_2 + \dots + x_m}$ și suma tuturor ratingurilor este 1, deci indicatorul de importanță se poate raporta și procentual. Adică dacă $r_i = 0.87$, atunci printre toate nodurile rețelei, nodul i are o popularitate de 87%.

Exemplul 7. Considerăm o rețea socială formată din 6 persoane, codificate 0, 1, 2, 3, 4, 5, și ilustrată în graful neorientat din Fig.11.3: Matricea de conectivitate/adiacență a rețelei este:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Valorile proprii ale matricii A , calculate numeric sunt:

$$2.796, 0.8531, -1.195, -2.454, 0, 0$$

Deci valoarea proprie dominantă este 2.796, iar un vector propriu corespunzător, de coordonate strict pozitive este:

$$x = (0.35349809, 0.33313061, 0.52899452, 0.45954077, 0.40258437, 0.33313061)$$

Suma coordonatelor lui x este 2.410, iar vectorul rating este:

$$r = x/2.41 = (0.14662623, 0.13817807, 0.21941978, 0.1906113, 0.16698655, 0.13817807)$$

Reordonând descrescător ratingurile nodurilor avem următorul ranking al acestora:

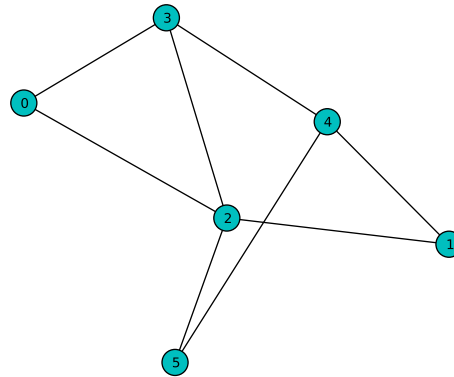


Fig.11.3: Graf neorientat.

Rating	0.21941978	0.1906113	0.16698655	0.14662623	0.13817807	0.13817807
Nod	2	3	4	0	5	1

Observăm că cea mai mare popularitate o are nodul 2 și anume, indicele său de importanță este 0.21941978. Se vede și din graf că nodul 2 are cele mai multe conexiuni de un pas(arc).

Să considerăm acum o rețea conexă în care conexiunile dintre noduri sunt orientate. O astfel de rețea este rețeaua WWW. Nodurile sunt paginile WEB, iar arcele orientate dintre acestea sunt hyperlinkurile. În figura 11.4 avem o rețea formată din 6 noduri și linkuri între ele (sensul linkului nu este ilustrat printr-o săgeată, ci printr-un segment pe arc, în format bold, modalitate specifică de vizualizarea grafurilor orientate în `networkx` (<http://networkx.lanl.gov>), un pachet în Python).

Matricea de adiacență a grafului, numită matricea hyperlink este:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rădăcinile polinomului său caracteristic ordonate, în ordinea descrescătoare a valorii absolute (modulului) sunt:

$$2.481, 0.688, 0, -1, -1, -1.170$$

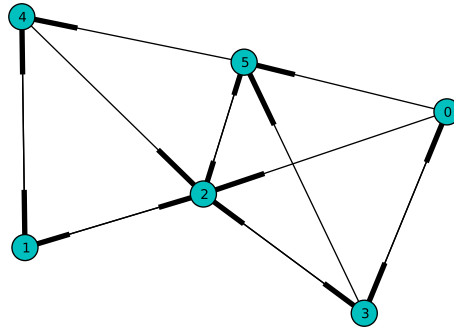


Fig.11.4: Graf orientat ce ilustrează linkurile dintre pagini într-o rețea WEB.

Valoarea proprie dominantă este $\lambda_1 = 2.481$, vectorul propriu corespunzător:

$$x = (0.50958306, 0.30420493, 0.45058661, 0.50958306, 0.30420493, 0.30420493)^T$$

iar vectorul rating al nodurilor:

$$r = x/2.382367 = (0.21389776, 0.12769018, 0.18913396, 0.21389776, 0.12769018, 0.12769018)^T$$

Deci cel mai mare rating are nodul 0 și 3 (la egalitate).

Popularitatea paginii 0, de exemplu, a fost calculată conform relației (11.9) adică ținând seama de numărul outlink-urilor ce pornesc din ea (adică în funcție de câte conexiuni, prieteni, ”declară” pagina 0 că are).

Larry Page și Serghei Brin, fondatorii Google, au realizat că indicatorul de popularitate calculat în acest fel poate fi influențat de proprietarii paginilor WEB prin adăugarea a cât mai multe outlinkuri. De aceea au modificat regula de calcul a popularității, considerând că ratingul (popularitatea) paginii j , x_j , trebuie să fie dat de media ponderată a popularității paginilor ce au linkuri spre pagina j (dacă o persoană importantă te indică, spune că îi ești prieten, înseamnă că ești tu important!!!):

$$x_j = \frac{1}{\lambda} (x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_\ell}), \quad (11.12)$$

unde i_1, i_2, \dots, i_ℓ sunt paginile ce au linkuri către pagina j , adică $a_{ij} = 1$, pentru $i = i_1, i_2, \dots, i_\ell$.

Astfel relația (11.12) se scrie cu ajutorul matricii de adiacență astfel:

$$x_j = \frac{1}{\lambda}(a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \cdots + a_{mj}x_m) = \sum_{k=1}^m a_{kj}x_k, \quad j = \overline{1, m} \quad (11.13)$$

Relațiile (11.13) sunt echivalente cu $A^T x = \lambda x$.

În acest caz vectorul indicatorilor de popularitate, nenormalizat, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, este un vector propriu al matricii hyperlink transpusă, A^T .

Dar matricea A^T este de asemenea o matrice nenegativă și ireductibilă și are același polinom caracteristic, $Q_m(\lambda)$, ca și matricea A : Vectorii proprii însă diferă.

Prin urmare pentru aflarea indicatorilor de popularitate pe baza inlink-urilor, nu a outlink-urilor, se alege λ în (11.13) ca fiind valoarea proprie dominantă a polinomului caracteristic al matricii A^T . Se alege un vector propriu pozitiv, x , corespunzător acestei valori și atunci vectorul rating este vectorul Perron, $r = x / \sum_{i=1}^m x_i$.

În cazul rețelei din figură, matricea hyperlink transpusă are valoarea proprie dominantă $\lambda_1 = 2.4811943$, Un vector propriu pozitiv, corespunzător este

$$x = (0.12600672, 0.39771818, 0.64973161, 0.31264715, 0.33708446, 0.4386538)^T$$

Suma coordonatelor lui x este $s = 2.26184$, iar vectorul rating al nodurilor este:

$$r = x/s = (0.05570978, 0.17583818, 0.28725774, 0.13822679, 0.14903095, 0.19393657)^T$$

În acest fel pagina cu cea mai mare popularitate este pagina 2, de indice de popularitate $r_2 = 0.28725774$, către ea existând 5 linkuri, din paginile 0, 1, 3, 4, 5.

În cazul real al rețelei WEB, graful asociat nu este conex. În semestrul 2 vom prezenta transformările la care este supusă matricea hyperlink pentru a obține o matrice ireductibilă și în plus să nu conțină cicluri, adică un surfer WEB să nu fie obligat să parcurgă din link în link un circuit închis (un ciclu infinit).

În concluzie pentru a determina indicele de popularitate al fiecărui nod dintr-o rețea de m noduri, se procedează astfel:

1. Dacă rețeaua este neorientată, se asociază matricea de adiacență, A ;
2. se calculează rădăcinile polinomului său caracteristic și se identifică rădăcina reală pozitivă, dominantă.
3. se calculează un vector propriu corespunzător $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ (acesta are fie toate coordonatele strict pozitive fie toate strict negative (dacă sunt toate strict negative, se ia $-x$ și atunci sunt toate strict pozitive).
4. se calculează suma s a coordonatelor vectorului x și apoi vectorul rating $r = x/s$, ale cărui coordonate r_i , reprezintă indicele de popularitate al nodului i , $i = \overline{1, m}$.
5. Se ordonează descrescător r_1, r_2, \dots, r_m și astfel avem ierarhizarea nodurilor în funcție de popularitatea lor.

• Dacă rețeaua are linkuri orientate, se asociază matricea de conectivitate A , se calculează A^T și apoi pentru această matrice se parcurg etapele 2-5 de mai sus.

Metode de generare a grafului asociat unei rețele și calculul valorii dominante și al vectorului rating sunt prezentate în Jupyter Notebook-ul inclus