Cele mai mici pătrate

Algoritmul 3 (Ecuaţiile normale pentru cele mai mici pătrate)

Dându-se sistemul inconsistent

$$Ax = b,$$

rezolvăm

$$A^T A\overline{x} = A^T b$$

pentru a găsi soluţia în sensul celor mai mici pătrate $\overline{x}$ care minimizează lungimea euclidiană a vectorului rezidual $r = b - Ax$.

Exemplul 5

- folosiţi ecuaţiile normale pentru a găsi soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului inconsistent (12)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned} \tag{12}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ecuaţiile normale sunt

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se face eliminare gaussiană

$$\Rightarrow \overline{x} = [\overline{x_1}, \overline{x_2}]^T = \left[\tfrac{7}{4}, \tfrac{3}{4}\right]^T$$

- înlocuind soluţia în sensul celor mai mici pătrate în problema iniţială ne dă

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 2.5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- pentru a măsura succesul cu care am interpolat datele, calculăm rezidualul soluţiei în sensul celor mai mici pătrate $\overline{x}$ ca fiind

$$r = b - A\overline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

- dacă rezidualul este vectorul zero, atunci am rezolvat sistemul iniţial $Ax = b$ exact
- dacă nu, lungimea euclidiană a vectorului rezidual este o măsură a cât de departe este $\overline{x}$ de a fi o soluţie
- există cel puţin trei moduri de a exprima mărimea rezidualului

- lungimea euclidiană a unui vector,

$$||r||_2 = \sqrt{r_1^2 + \cdots + r_m^2}, \tag{18}$$

este o normă, numită **2-normă**
- **eroarea pătratică**

$$\text{EP} = r_1^2 + \cdots + r_m^2,$$

şi **rădăcina erorii medii pătratice** (rădăcina pătrată a mediei erorii pătratice)

$$\text{REMP} = \sqrt{\text{EP}/m} = \sqrt{(r_1^2 + \cdots + r_m^2)/m}, \tag{19}$$

sunt de asemenea folosite pentru a măsura eroarea soluţiei în sensul celor mai mici pătrate
- cele trei expresii sunt strâns legate între ele; şi anume

$$\text{REMP} = \frac{\sqrt{\text{EP}}}{\sqrt{m}} = \frac{||r||_2}{\sqrt{m}},$$

astfel că acel $\overline{x}$ care minimizează una dintre ele, le minimizează pe toate

Exemplul 6

- rezolvaţi următoarea problemă de tip cele mai mici pătrate:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Se fac $A^T \cdot A$ şi $A^T \cdot b$

- ecuaţiile normale $A^T A x = A^T b$ sunt

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 75 \end{bmatrix}.$$

- soluţia ecuaţiilor normale este $\overline{x_1} = 3.8$ şi $\overline{x_2} = 1.8$

- vectorul rezidual este

$$\begin{aligned} r &= b - A\overline{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.8 \\ 1.8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.4 \\ 13 \\ 11.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 2 \\ -2.2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

care are norma euclidiană $||r||_2 = \sqrt{(0.4)^2 + 2^2 + (-2.2)^2} = 3$

11. Rezolvaţi ecuaţiile normale şi găsiţi REMP-ul pt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

Rezolvaţi ecuaţiile normale (6p) şi găsiţi REMP-ul (4p) pentru sistemul:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Interpolarea unor modele pentru mulțimi de date

Algoritmul 4 (Interpolarea datelor folosind cele mai mici pătrate)

Dându-se o mulţime de m puncte $(t_1, y_1), \dots, (t_m, y_m)$.

PASUL 1. Alegem un model. Identificăm un model parametrizat, de exemplu $y = c_1 + c_2 t$, care va fi folosit pentru a interpola datele.

PASUL 2. Forţăm modelul să interpoleze datele. Înlocuim punctele în model. Fiecare punct dă naştere unei ecuaţii ale cărei necunoscute sunt parametri, de exemplu c_1 şi c_2 în modelul cu dreapta. Aceasta rezultă într-un sistem $Ax = b$, în care necunoscuta x reprezintă parametrii necunoscuţi.

PASUL 3. Rezolvăm ecuaţiile normale. Soluţia în sensul celor mai mici pătrate pentru parametri va fi găsită ca soluţia sistemului de ecuaţii normale $A^T Ax = A^T b$.

Exemplul 7

- găsiţi dreapta care interpolează cel mai bine punctele $(t, y) = (1, 2)$, $(-1, 1)$, şi $(1, 3)$ din Figura 5

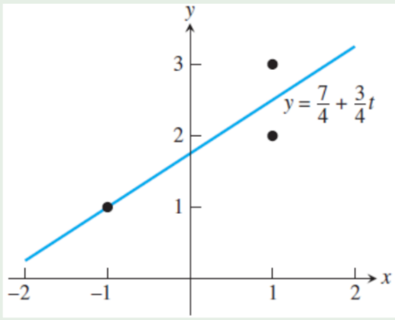

Figura 5: **Cea mai bună dreaptă în Exemplul 7.** Fiecare dintre punctele date se află deasupra, pe, sau dedesubtul celei mai bune drepte.

- Modelul este $y = c_1 + c_2 \cdot t$
- Înlocuim
$$\begin{cases} c_1 + c_2 \cdot (1) = 2 \\ c_1 + c_2(-1) = 1 \\ c_1 + c_2(1) = 3 \end{cases}$$

sau, în formă matricială,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

ştim că acest sistem nu are o soluţie (c_1, c_2) din două motive diferite

primul, dacă ar avea o soluţie, atunci $y = c_1 + c_2 t$ ar fi o dreaptă care conţine punctele date

-> se observă că punctele nu sunt coliniare

- al doilea, acesta este sistemul corespunzător ecuaţiei (13) pe care am discutat-o la începutul acestui capitol
- am observat atunci că prima şi a treia ecuaţie sunt inconsistente, şi am găsit că cea mai bună soluţie în sensul celor mai mici pătrate este $(c_1, c_2) = (7/4, 3/4)$ -> exemplul 5
- prin urmare, cea mai bună dreaptă este $y = 7/4 + 3/4t$

- putem evalua interpolarea folosind statistica definită anterior
- rezidualii punctelor date sunt

t	y	dreapta	eroarea
1	2	2.5	−0.5
−1	1	1.0	0.0
1	3	2.5	0.5

- REMP-ul este $1/\sqrt{6}$, după cum am văzut mai sus
- exemplul anterior sugerează o metodă în trei paşi pentru rezolvarea problemelor de interpolare de date în sensul celor mai mici pătrate

Exemplul 8

- găsiţi cea mai bună dreaptă şi cea mai bună parabolă pentru cele patru puncte $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,-2)$ din Figura 6

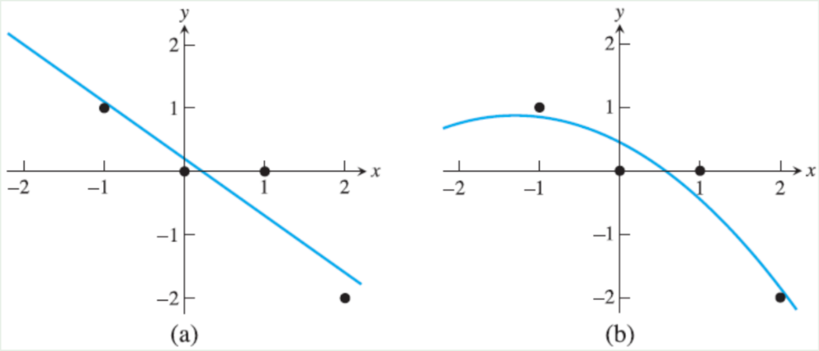

Figura 6: **Interpolări de tip cele mai mici pătrate pentru punctele din Exemplul 8.** (a) Cea mai bună dreaptă $y = 0.2 - 0.9t$. REMP-ul este 0.418. (b) Cea mai bună parabolă $y = 0.45 - 0.65t - 0.25t^2$. REMP-ul este 0.335.

$$y = c_1 + c_2 t$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2(-1) = 1 \\ c_1 + c_2(0) = 0 \\ c_1 + c_2(1) = 0 \\ c_1 + c_2(2) = -2 \end{cases}$$

sau

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{b}$$

Facem $A^T A$ şi $A^T \cdot b$

- (3) ecuaţiile normale sunt

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

- rezolvând pentru a găsi coeficienţii c_1 şi c_2 rezultă în găsirea celei mai bune drepte ca fiind $y = c_1 + c_2 t = 0.2 - 0.9t$
- rezidualii sunt

$r = b - A \cdot \overline{x}$

t	y	dreapta	eroarea
−1	1	1.1	−0.1
0	0	0.2	−0.2
1	0	−0.7	0.7
2	−2	−1.6	−0.4

m -> nr. puncte?

- statisticile de eroare sunt eroarea pătratică
  $EP = (-0.1)^2 + (-0.2)^2 + (0.7)^2 + (-0.4)^2 = 0.7$ şi
  $REMP = \sqrt{0.7}/\sqrt{4} = 0.418$

- în continuare, extindem acest exemplu păstrând aceleaşi patru puncte, dar schimbând modelul
- luăm $y = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$ şi înlocuim punctele date, obţinând

$$\begin{aligned} c_1 + c_2(-1) + c_3(-1)^2 &= 1 \\ c_1 + c_2(0) + c_3(0)^2 &= 0 \\ c_1 + c_2(1) + c_3(1)^2 &= 0 \\ c_1 + c_2(2) + c_3(2)^2 &= -2, \end{aligned}$$

sau, în formă matricială,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- de data aceasta, ecuaţiile normale sunt trei ecuaţii în trei necunoscute:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

- rezolvând pentru a găsi coeficienţii rezultă în găsirea celei mai bune parabole $y = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 = 0.45 - 0.65t - 0.25t^2$
- erorile reziduale sunt date în tabelul următor:

t	y	parabola	eroarea
-1	1	0.85	-0.15
0	0	0.45	-0.45
1	0	-0.45	0.45
2	-2	-1.85	-0.15

- statisticile de eroare sunt eroarea pătratică $\text{EP} = (0.15)^2 + (-0.45)^2 + (0.45)^2 + (-0.15)^2 = 0.45$ şi $\text{REMP} = \sqrt{0.45}/\sqrt{4} \approx 0.335$

15. Găsiţi cea mai bună dreaptă care interpolează punctele $(-3,3), (-1,2), (0,1), (+1,-1)$ şi găsiţi REMP-ul

Găsiţi cea mai bună dreaptă care interpolează punctele $(-3,3), (-1,2), (0,1), (1,-1)$ (6p) şi găsiţi REMP-ul (4p).

$$y = c_1 + c_2 t$$

$$\begin{cases} c_1 + (-3)c_2 = 3 \\ c_1 + (-1)c_2 = 2 \\ c_1 + 0\,c_2 = 1 \\ c_1 + 1\,c_2 = -1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{5+3c_2}{4}$$

$$-15 - 9c_2 + 44c_2 = -48$$

$$35\,c_2 = -33 \Rightarrow c_2 = -\frac{33}{35} \Rightarrow c_1 = \ldots$$

$$\text{dreapta} = c_1 - \frac{33}{35} t$$

t	y	dreapta	eroare
−3	3		
−1	2		
0	1		
1	−1		

$\Rightarrow$ se fac calcule

3. Găsiți cea mai bună parabolă care interpolează $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(2,3)$ și găsiți REMP-ul ei.

Găsiți coeficienții celei mai bune parabole care interpolează punctele $(0,0), (1,3), (2,3), (5,6)$, folosind ecuațiile normale, și găsiți REMP-ul. Verificați rezultatul folosind funcțiile `polyfit` și `polyval`.

Găsiți cea mai bună parabolă care interpolează punctele $(-3,3), (-1,2), (0,1), (1,-1)$ (6p) și găsiți REMP-ul (4p).

- datele periodice necesită modele periodice
- temperatura aerului de afară, de exemplu, respectă cicluri pe numeroase scale de timp, incluzând cicluri zilnice şi anuale guvernate de rotaţia pământului şi de revoluţia pământului în jurul soarelui
- ca un prim exemplu, datele de temperatură orare sunt interpolate folosind sinuşi şi cosinuşi

Exemplul 9

- interpolaţi temperaturile înregistrate în Washington, D.C., pe 1 ianuarie 2001, listate în următorul tabel, folosind un model periodic:

ora	t	temperatura (°C)
0	0	−2.2
3	$\frac{1}{8}$	−2.8
6	$\frac{1}{4}$	−6.1
9	$\frac{3}{8}$	−3.9
12	$\frac{1}{2}$	0.0
15	$\frac{5}{8}$	1.1
18	$\frac{3}{4}$	−0.6
21	$\frac{7}{8}$	−1.1

Alegem modelul $y = c_1 + c_2 \cos 2\pi t + c_3 \sin 2\pi t$

- alegem modelul $y = c_1 + c_2 \cos 2\pi t + c_3 \sin 2\pi t$ pentru a se potrivi cu faptul că temperatura este aproximativ periodică cu o perioadă de 24 de ore, cel puţin în absenţa unor modificări de temperatură pe termen mai lung
- modelul foloseşte această informaţie fixând perioada pentru a fi exact o zi, unde folosim zilele ca unităţi pentru t
- variabila t este listată în aceste unităţi în tabelul de mai sus
- înlocuind datele în model, rezultă următorul sistem supradeterminat de ecuaţii liniare:

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 \cos 2\pi(0) + c_3 \sin 2\pi(0) &= -2.2\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{8}\right) &= -2.8\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) &= -6.1\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{3}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{3}{8}\right) &= -3.9\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) &= 0.0\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{5}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{5}{8}\right) &= 1.1\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) &= -0.6\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{7}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{7}{8}\right) &= -1.1.
\end{aligned}
$$

- ecuaţia matricială inconsistentă corespunzătoare este $Ax = b$, unde

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & \cos 0 & \sin 0\\ 1 & \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4}\\ 1 & \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2}\\ 1 & \cos\frac{3\pi}{4} & \sin\frac{3\pi}{4}\\ 1 & \cos\pi & \sin\pi\\ 1 & \cos\frac{5\pi}{4} & \sin\frac{5\pi}{4}\\ 1 & \cos\frac{3\pi}{2} & \sin\frac{3\pi}{2}\\ 1 & \cos\frac{7\pi}{4} & \sin\frac{7\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2.2\\ -2.8\\ -6.1\\ -3.9\\ 0.0\\ 1.1\\ -0.6\\ -1.1 \end{bmatrix}.
$$

- ecuaţiile normale $A^T Ac = A^T b$ sunt

$$
\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.6\\ -2.9778\\ -10.2376 \end{bmatrix},
$$

  a căror soluţie este $c_1 = -1.95$, $c_2 = -0.7445$, şi $c_3 = -2.5594$
- cea mai bună versiune a modelului, în sensul celor mai mici pătrate, este $y = -1.9500 - 0.7445 \cos 2\pi t - 2.5594 \sin 2\pi t$, care are REMP ≈ 1.063

- Figura 7(a) compară modelul de interpolare de tip cele mai mici pătrate cu temperaturile care au fost înregistrate în realitate

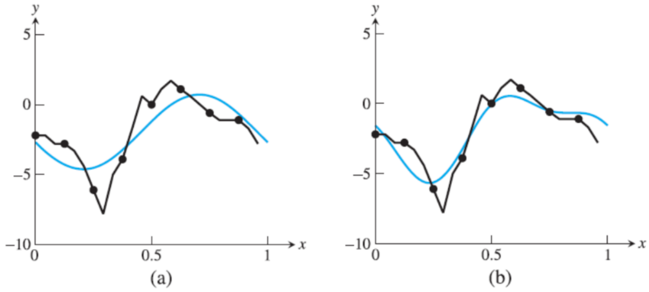

Figura 7: **Interpolări de tip cele mai mici pătrate pentru datele periodice din Exemplele 9 şi 10.** (a) Modelul sinusoidal $y = -1.95 - 0.7445\cos 2\pi t - 2.5594\sin 2\pi t$ prezentat îngroşat, împreună cu temperaturile înregistrate în 1 ianuarie 2001. (b) Sinusoida îmbunătăţită $y = -1.95 - 0.7445\cos 2\pi t - 2.5594\sin 2\pi t + 1.125\cos 4\pi t$ interpolează datele mai exact.

Exemplul 10

- interpolaţi datele de temperatură folosind modelul îmbunătăţit

$$y = c_1 + c_2\cos 2\pi t + c_3\sin 2\pi t + c_4\cos 4\pi t. \tag{20}$$

- sistemul de ecuaţii este acum

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2\cos 2\pi(0) + c_3\sin 2\pi(0) + c_4\cos 4\pi(0) &= -2.2\\
c_1 + c_2\cos 2\pi\left(\frac{1}{8}\right) + c_3\sin 2\pi\left(\frac{1}{8}\right) + c_4\cos 4\pi\left(\frac{1}{8}\right) &= -2.8\\
c_1 + c_2\cos 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) + c_3\sin 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) + c_4\cos 4\pi\left(\frac{1}{4}\right) &= -6.1\\
c_1 + c_2\cos 2\pi\left(\frac{3}{8}\right) + c_3\sin 2\pi\left(\frac{3}{8}\right) + c_4\cos 4\pi\left(\frac{3}{8}\right) &= -3.9\\
c_1 + c_2\cos 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) + c_3\sin 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) + c_4\cos 4\pi\left(\frac{1}{2}\right) &= 0.0\\
c_1 + c_2\cos 2\pi\left(\frac{5}{8}\right) + c_3\sin 2\pi\left(\frac{5}{8}\right) + c_4\cos 4\pi\left(\frac{5}{8}\right) &= 1.1\\
c_1 + c_2\cos 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) + c_3\sin 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) + c_4\cos 4\pi\left(\frac{3}{4}\right) &= -0.6\\
c_1 + c_2\cos 2\pi\left(\frac{7}{8}\right) + c_3\sin 2\pi\left(\frac{7}{8}\right) + c_4\cos 4\pi\left(\frac{7}{8}\right) &= -1.1,
\end{aligned}$$

12. Interpolaţi datele din tabel folosind modelul periodic $y = F_3(t) = c_1 + c_2\cos 2\pi t + c_3\sin 2\pi t$

t	y
0	1
1/4	3
1/2	2
3/4	0

Interpolaţi datele din tabel folosind modelul periodic $y = F_3(t) = c_1 + c_2\cos 2\pi t + c_3\sin 2\pi t$ (10p).

t	y
0	1
1/4	3
1/2	2
3/4	0

Interpolaţi datele din tabel folosind modelul periodic $y = F_4(t) = c_1 + c_2\cos 2\pi t + c_3\sin 2\pi t + c_4\cos 4\pi t$, şi găsiţi REMP-ul.

t	y
0	0
1/6	2
1/3	0
1/2	−1
2/3	1
5/6	1

Liniarizarea datelor

→ $y = c_1 e^{c_2 t}$ model exponential

$$\ln y = \ln c_1 + c_2 t$$

putem nota $\ln c_1 = h$

$$\ln y = h + c_2 t$$

rezidual $= (c_1 e^{c_2 t} - y_1)$

în sp. log: $(\ln c_1 + c_2 t_1 - \ln y_1)$

→ $y = c_1 t^{c_2}$ model putere

$$\ln y = \underbrace{\ln c_1}_{= h} \; c_2 \ln t$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \ln t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln t_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} \ln y_1 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{bmatrix}$$

→ $y = c_1 t e^{c_2 t}$

$$\ln y = \ln c_1 + \ln t + c_2 t$$

$$h + c_2 t = \ln y - \ln t$$

Interpolați datele din tabel folosind modelul lege de putere $y = c_1 t^{c_2}$, folosind liniarizarea, și găsiți REMP-ul.

t	y
1	2
2	4
3	3
4	2

$c_1 \cdot 1^{c_2} = 2 \Rightarrow \ln c_1 + c_2 \ln 1 = \ln 2$

$$\ln y = \overbrace{\ln c_1}^{h} + c_2 \ln t$$

t = [1; 2; 3; 4];

b = ln y = [ln 2; ln 4; ln 3; ln 2];

A = [ones(4,1), t];

$$\begin{bmatrix} 1 & \ln 1 \\ 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \\ 1 & \ln 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \ln 2 \\ \ln 4 \\ \ln 3 \\ \ln 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \ln 2 & \ln 3 & \ln 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \ln 1 \\ 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \\ 1 & \ln 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \ln 24 \\ \ln 24 & \underbrace{\ln^2 2 + \ln^2 3 + \ln^2 4}_{= 5\ln^2 2 + \ln^2 3} \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \ln 2 & \ln 3 & \ln 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln 2 \\ \ln 4 \\ \ln 3 \\ \ln 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 48 \\ \underbrace{2\ln^2 2 + \ln^2 3 + 2\ln^2 2}_{4\ln^2 2 + \ln^2 3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & \ln 24 \\ \ln 24 & \underbrace{\ln^2 2 + \ln^2 3 + \ln^2 4}_{= 5\ln^2 2 + \ln^2 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 48 \\ \underbrace{2\ln^2 2 + \ln^2 3 + 2\ln^2 2}_{4\ln^2 2 + \ln^2 3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4h + \ln 24\, c_2 = \ln 48 \\ \ln 24 \cdot h + (5\ln^2 2 + \ln^2 3)\, c_2 = 4\ln^2 2 + \ln^2 3 \end{cases}$$

$$r = b - A \cdot X$$

$$REMP = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \ldots} \,/\, \sqrt{4}$$

t	y
-2	1
0	2
1	2
2	5

$$y = c_1 e^{c_2 t}$$

$$\ln y = \ln c_1 + c_2 t$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \ln 2 \\ \ln 2 \\ \ln 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot b = \begin{bmatrix} \ln 20 \\ \ln 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 20 \\ \ln 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4h + c_2 = \ln 20 \\ h + 9c_2 = \ln 50 \quad | \cdot 4 \end{cases}$$

$$35 c_2 = 4 \ln 50 - \ln 20 = \ln \frac{50^3 \cdot 5\cancel{0}}{2\cancel{0}} = \ln 312\,500$$

$$c_2 = \frac{\ln 312\,500}{35}$$

$$h = \ln 50 - \frac{9 \ln 312\,500}{35} \qquad c_1 = e^{h};$$

$$r = b - A \cdot X, \quad X = \begin{bmatrix} h \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{REMP} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2} \Big/ \sqrt{4}$$