Matematici speciale

(tema 6 - S6)

27.03.2024

9. Pe un site de cumpărături au intrat 10 vizitatori. Probabilitatea ca un vizitator să cumpere este 0.2.

a) Să se determine probabilitatea ca exact doi clienţi să cumpere de pe acest site.

b) Care este probabilitatea ca cel mult 4 clienţi să facă cumpărături?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

a) $Y \sim bin(n=10,\ p=0{,}2)$

$P(Y=2) = C_{10}^{2}(0{,}2)^2(0{,}8)^8$

b) $P(Y \le 4) = \sum_{k=0}^{4} C_{10}^{k}(0{,}2)^k(0{,}8)^{10-k}$

10. Fie $X \sim Geom(p)$. Să se determine $M(X)$ şi $M(\frac{1}{2^X})$.

$\longrightarrow$ Dem. pt. parțial

$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} =$

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ $\quad |q|<1 \xrightarrow{deriv} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$

$\Rightarrow M(X) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$

$M\left(\frac{1}{2^X}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} p(1-p)^{k-1}$

DE TERMINAT PT PARȚIAL

11. Probabilitatea ca un bit transmis printr-un canal de comunicaţie să fie primit cu eroare este 0.1. Se presupune că transmiterea bitilor se produce independent.

a) Să se determine probabilitatea ca primul bit transmis corect sa se produca la a cincea transmisie. $\longrightarrow$ geom

b) Care este numărul de biti transmisi pâna la primirea unui bit corect (inclusiv)? $\longrightarrow$ geom

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$p \cdot q^{k-1}$

a) $Y \sim geom(0,9)$

$$P(Y=5) = 0,9 \cdot (0,1)^4$$

$M(X) = \frac{1}{p}$

$\sigma^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$

b) $M(Y) = \frac{1}{0,9}$

12. Presupunem că apelurile telefonice la o staţie radio au probabilitate 0.02 de conectare. Se presupune că apelurile sunt independente.

a) Să se determine probabilitatea ca primul apel preluat să aibe loc la a zecea apelare. $\to$ geom

b) Care este probabilitatea sa fie nevoie de mai mult de 5 apeluri pentru a te conecta?

c) Care este numărul mediu de apeluri necesare pentru a te putea conecta? $M(X)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,02 & 0,98 \end{pmatrix}$$

a) $Y \sim geom(0,02)$

$$P(Y=10) = 0,02 \cdot (0,98)^9$$

b) $P(Y>5) = 1 - P(Y=5) - P(Y=4) - P(Y=3) - P(Y=2) - P(Y=1)$

c) $M(Y) = \frac{1}{0,02} = \frac{100}{2} = 50$

13. Pachetele de infomaţii ce se transmit între nodurile unei reţele pot interacţiona (intra in coliziune) cu probabilitate $p = 0.2$, indiferent de transmiterile precente.

a) Care este probabilitatea ca prima coliziune să aibă loc la a doua transmitere? $\to$ geom

b) Care este probabilitatea ca la primele două transmiteri să nu se producă nici coliziune?

c) Să se determine numărul mediu de transmiteri $\boxed{\text{fără}}$ coliziuni.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

a) $Y \sim geom(0{,}2)$

$$P(Y=2) = 0{,}2 \cdot (0{,}8)^{2-1} = 0{,}16$$

b) $1 - P(Y=2) - P(Y=1) = P(Y>2)$

c) $M(Y) - 1 = \frac{1}{0{,}2} - 1 = 5 - 1 = 4$

14. Fie $X \sim Pois(\lambda)$. Să se determine $M(X)$.

$\longrightarrow$ Pt parțial

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

15. Numărul erorilor de tipar într-o carte urmează o distribuţie Poisson cu media $\lambda = 0.01$ erori/pag. Să se determine probabilitatea ca sa fie cel mult trei erori in 100 pagini.

$\lambda' = 0{,}01 \cdot 100 = 1$ eroare / 100 pag

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

$X \sim Pois(1)$

$$P(X \le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

16. Numărul mediu de cereri la o bază de date într-o perioadă de 15 minute este 10. Să se determine probabilitatea să se înregistreze exact 2 cereri în 3 minute.

10c/15m $\longrightarrow$ Pois

2 c/3m

10 c ... 15m

λ c ... 1 m

$\Rightarrow \lambda = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ c/m

$\lambda' = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ c/3m

$\Rightarrow X \sim Pois(2) \Rightarrow P(X=2) = \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} = \frac{2}{e^2}$