Seminar Nr. 3

Serii numerice

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Folosind definiţia să se studieze natura următoarelor serii, iar în caz de convergenţă să se determine suma lor:*
i) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$; **ii)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\frac{3}{2^{n+2}}\sin\frac{1}{2^{n+2}}$;
iii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$; **iv)** $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \arctan\frac{3}{n^2-n-1}$; v) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{9}\right)^n$.

Soluţie. Pentru fiecare dintre aceste serii, termenul general (a_n) conduce la expresia şirului sumelor parţiale,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

i) Termenul general al seriei poate fi scris sub forma

$$a_n = \ln\frac{n-1}{n} = \ln(n-1) - \ln n,$$

deci şirul sumelor parţiale este

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1) - \ln k) = -\ln n,$$

prin urmare se obţine $\displaystyle\lim_{n\to\infty} = -\infty$, deci seria $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$ este divergentă.

ii) Ţinând cont de formula $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$, termenul general al seriei poate fi scris

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{3-1}{2^{n+2}} - \cos\frac{3+1}{2^{n+2}}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{2^{n+1}} - \cos\frac{1}{2^n}\right].$$

Prin urmare, avem

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{1}{2^{n+1}} - \cos\frac{1}{2^n}\right] =$$
$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2^2} - \cos\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2^3} - \cos\frac{1}{2^2} + ... + \cos\frac{1}{2^{n+1}} - \cos\frac{1}{2^n}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2^{n+1}} - \cos\frac{1}{2}\right).$$

Prin trecere la limită rezultă

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2^{n+1}} - \cos\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{1}{2}\right),$$

deci seria dată este convergentă.

iii) Termenul general al seriei poate fi scris sub forma

$$a_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! - n!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!},$$

deoarece este cunoscută relaţia $(n+1)! - n! = n \cdot n!$. Rezultă

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!},$$

deci suma seriei este

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1.$$

iv) Se obţine

$$a_n = \arctan\frac{3}{n^2 - n - 1} = \arctan\frac{3}{1 + n^2 - n - 2} =$$
$$\arctan\frac{(n+1) - (n-2)}{1 + (n+1)(n-2)} = \arctan(n+1) - \arctan(n-2).$$

Şirul sumelor parţiale este

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=3}^{n}(\arctan(k+1) - \arctan(k-2)) =$$

$$\arctan(n+1) + \arctan n + \arctan(n-1) - \arctan 1 - \arctan 2 - \arctan 3,$$

deci suma seriei este dată de

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - (\arctan 2 + \arctan 3) = \frac{5\pi}{4} - (\pi + \arctan\frac{5}{-5}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

v) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{9}\right)^k = 1 + \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + ... + \left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{9}{7}\left(1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right).$
Rezultă

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{9}{7}.$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ *Studiaţi natura seriilor următoare folosind criteriul general de convergenţă al lui Cauchy:*

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; **ii)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. **i)** Pentru prima serie şirul sumelor parţiale este

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}},$$

iar

$$S_{n+p} - S_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+p}} > \frac{p}{\sqrt{n+p}}.$$

Rezultă inegalitatea $|S_{2n} - S_n| > \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} > \varepsilon$, care demonstrează că şirul sumelor parţiale (S_n) nu este fundamental, deci divergent, aşa că seria este divergentă.

ii) Pentru cea de-a doua serie şirul sumelor parţiale este

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k(k+1)}.$$

Arătăm că S_n este şir fundamental. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned}
|S_{n+p}-S_n| &= \left|\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)}+\frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)}+...+\frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}\right| \\
&\le \left|\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)}\right|+\left|\frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)}\right|+...+\left|\frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}\right| \\
&\le \frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \\
&= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1} \\
&= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,
\end{aligned}$$

pentru $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Alegând $n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, rezultă că şirul S_n este fundamental, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+n}$ este convergentă, potrivit criteriului fundamental al lui Cauchy.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ *Folosind condiţiile necesare de convergenţă ale unei serii să se arate că următoarele serii sunt divergente:*

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n+1}$; **ii)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{10}}$; **iii)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\arctan\frac{n^5+2n^4+3}{2n^4+n^3+7}$;

Soluţie. **i)** Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1}=\frac{1}{2}$, rezultă că seria este divergentă.

ii) Deoarece,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{10}}=\sqrt{e}$$

rezultă că nu este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă a seriei, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{10}}$ este divergentă.

iii) Se calculează limita termenului general al seriei şi se obţine

$$\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n^5+2n^4+3}{2n^4+n^3+7}=\frac{\pi}{2}\neq 0$$

deci seria este divergentă.

$\boxed{\textbf{4.}}$ *Să se studieze natura următoarelor serii:*

i) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^3\ln n}$ **ii)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+2023^n}$; **iii)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt[5]{n^2}+2\sqrt{n}}{3\sqrt[3]{n^2}+4n}$;

iv) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})...(2-\sqrt[n]{e})$.

Soluţie. i) Din criteriul de condensare al lui Cauchy rezultă

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^3\ln n}\sim\sum_{n\geq 2}2^n\frac{1}{(2^n)^3\ln 2^n}.$$

Deoarece $\displaystyle\sum_{n\geq 2}2^n\frac{1}{(2^n)^3\ln 2^n}=\frac{1}{\ln 2}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{2^{2n}n}$, iar $\displaystyle\frac{1}{2^{2n}n}<\frac{1}{n^2}$, din criteriul I de comparaţie cum $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2}$ este convergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha=2>1$) rezultă că $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{2^{2n}n}$ este convergentă.

ii) Fie $x_n=\dfrac{1}{n+2023^n}<\dfrac{1}{2023^n}=y_n$. Cum $\displaystyle\sum_{n\geq 1}y_n=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2023^n}$ este convergentă (seria geometrică cu raţia $\dfrac{1}{2023}<1$) rezultă din criteriul I de comparaţie că seria $\displaystyle\sum_{n\geq 1}x_n$ este de asemenea o serie convergentă.

iii) Fie $x_n=\dfrac{\sqrt[5]{n^2}+2\sqrt{n}}{3\sqrt[3]{n^2}+4n}=\dfrac{n^{-\frac{1}{10}}+2}{\sqrt{n}(3n^{-\frac{1}{3}}+4)}$ şi $y_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Deoarece, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{2}$ din criteriul comparaţiei la limită rezultă $\displaystyle\sum_{n\geq 1}x_n\sim\sum_{n\geq 1}y_n$. Seria $\displaystyle\sum_{n\geq 1}y_n$ este divergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha=\dfrac{1}{2}<1$), deci $\displaystyle\sum_{n\geq 1}x_n$ este divergentă.

iv) Fie $x_n=(2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})...(2-\sqrt[n]{e})$. Rezultă $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=2-\sqrt[n+1]{e}$ şi cum $e^{\frac{1}{n+1}}<\dfrac{n+1}{n}$ şi luând $y_n=\dfrac{1}{n-1}$ avem $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}>\dfrac{y_{n+1}}{y_n}$. Seria $\displaystyle\sum_{n\geq 1}y_n$ este divergentă (seria armonică), deci conform criteriului II de comparaţie rezultă $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

$\boxed{5.}$ *Folosind criterii de convergenţă adecvate, să se studieze natura următoarelor serii:*

i) $\sum\limits_{n\geq 1} 7^{-\sqrt{n^2-7}}$; **ii)** $\sum\limits_{n\geq 1} \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$, $a > 0$; **iii)** $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(a\cdot n)^n}{n!}$, $a > 0$;
iv) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$; **v)** $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2}$.

Soluţie. i) Din criteriul raportului (D'Alembert) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{7}$, unde $a_n = 7^{-\sqrt{n^2-7}}$, deci seria este convergentă.

i) Din criteriul rădăcinii (Cauchy) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, unde $a_n = \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$. Deosebim trei cazuri:

- dacă $a < 1$ atunci $\sum\limits_{n\geq 1} \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$ este convergentă;
- dacă $a > 1$ atunci $\sum\limits_{n\geq 1} \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$ este divergentă;
- dacă $a = 1$ atunci seria devine $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$. În acest caz limita termenului general al seriei este e, deci nu este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă a unei serii şi prin urmare, seria este divergentă.

iii) Din criteriul raportului (D'Alembert) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \cdot e$.

- dacă $a < \frac{1}{e}$ atunci seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(a\cdot n)^n}{n!}$ este convergentă;
- dacă $a > \frac{1}{e}$ atunci seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(a\cdot n)^n}{n!}$ este divergentă;

- dacă $a = \dfrac{1}{e}$ atunci seria devine $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n^n}{e^n n!}$. Fie $a_n = \dfrac{n^n}{e^n n!}$, atunci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{e} > \frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

unde $b_n = \dfrac{1}{n}$. Aplicând criteriul II de convergenţă, se obţine că seria $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n^n}{e^n n!}$ e divergentă.

[1]

iv) Fie $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. Din criteriul lui Raabe-Duhamel rezultă

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{1}{2} < 1$$

deci seria este divergentă.

v) Fie $a_n = \dfrac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2}$. Din criteriul lui Raabe-Duhamel rezultă

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{1}{2} < 1,$$

deci seria este divergentă.

[1] Jean-Marie Constant Duhamel (n. 5 februarie 1797 la Saint-Malo - d. 29 aprilie 1872 la Paris) a fost un matematician și fizician francez.

Joseph Ludwig Raabe (n. 15 mai 1801 la Brodî, Galiția - d. 22 ianuarie 1859 la Zürich) a fost un matematician elvețian. Este cunoscut pentru criteriul lui Raabe