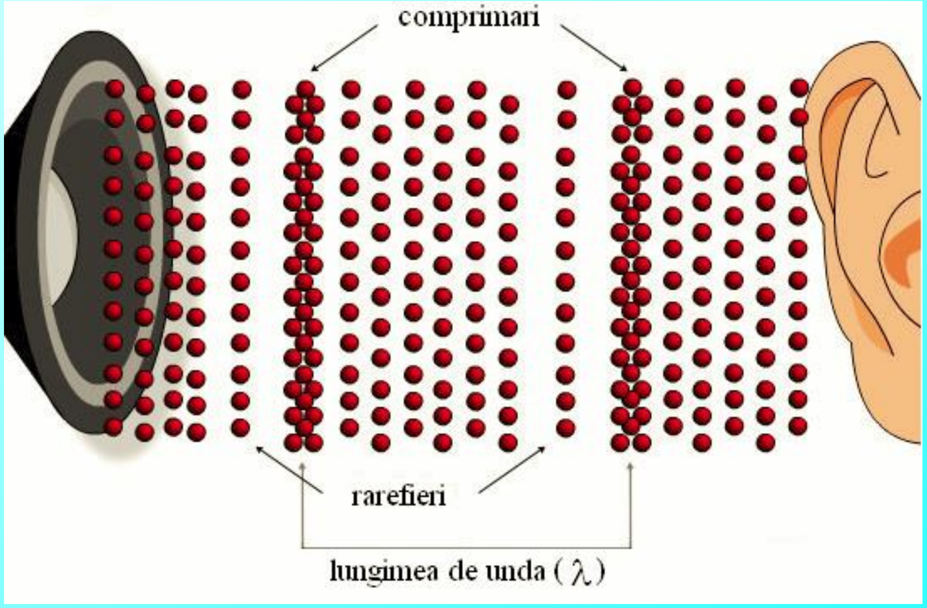
FIZICĂ PENTRU INGINERI

Prezentat de

Trif Delia



Universitatea Politehnica Timişoara, România

CURSUL 8&9

2020-2021

4. Unde elastice

4.1. Noţiuni generale

4.2. Unde armonice unidimensionale

4.3. Ecuaţia de propagare a undelor

4.4. Vitezele de propagare ale undelor elastice

4.5. Consideraţii energetice asupra propagării undei

4.6. Absorbţia undelor

4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

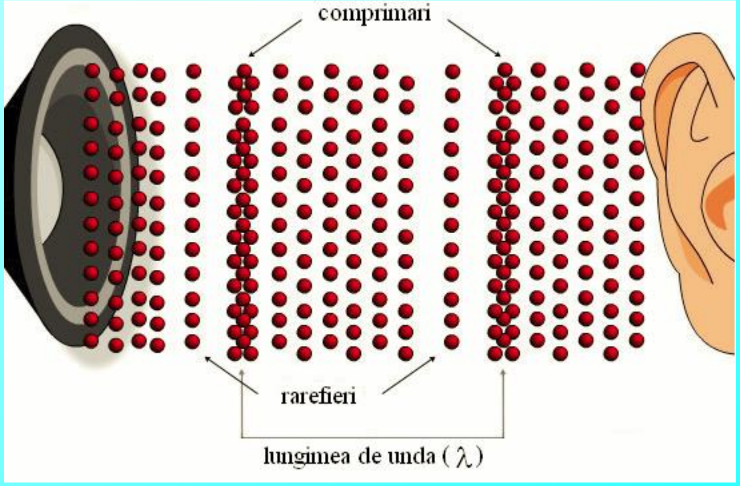
4. Unde elastice

4.1. Noţiuni generale

- *Unda* reprezintă fenomenul de extindere şi propagare din aproape în aproape a unei perturbaţii periodice produse într-un anumit punct din mediul de propagare.

- Propagarea undei se face cu o viteză finită, numită *viteza undei*.

- Unda nu reprezintă transport de materie, ci numai transport de energie.



4. Unde elastice

4.1. Noţiuni generale

Clasificarea undelor:

a) După tipul de energie pe care-l transportă unda:

- *Unde elastice* - transportă energie mecanică;
- *Unde electromagnetice* - transportă energie electromagnetică;
- *Unde magneto-hidrodinamice* - sunt generate prin perturbaţii electromagnetice şi elastice ale mediului de propagare.

b) După natura perturbaţiei şi modul de propagare

- *Unde longitudinale* - direcţia de propagare a undei coincide cu direcţia de oscilaţie
- *Unde transversale* - direcţia de propagare a undei este perpendiculară pe direcţia de oscilaţie

4. Unde elastice

4.1. Noţiuni generale

c) După forma suprafeţelor de undă:

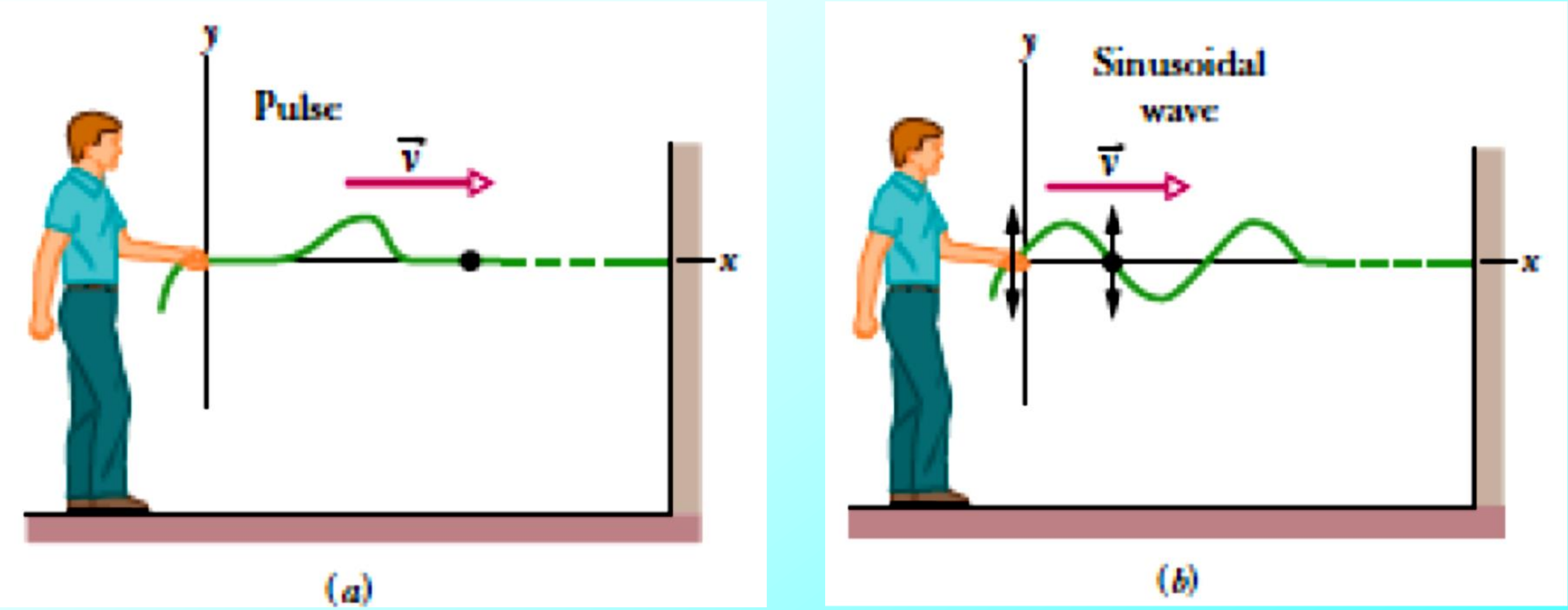
- *unde plane*
- *unde sferice*
- *unde cilindrice*, etc.

Unda este caracterizartă de:

- *Funcţia de undă* $\Psi\left(\vec{r},t\right)$ = *descrie matematic mărimea perturbată*
- *Suprafaţa de undă = mulţimea punctelor din spaţiu ce oscilează având la un moment dat aceeaşi valoare a funcţiei de undă*
- *Frontul de undă* = suprafaţa de undă cea mai avansată la un moment dat

4. Unde elastice

4.1. Noţiuni generale

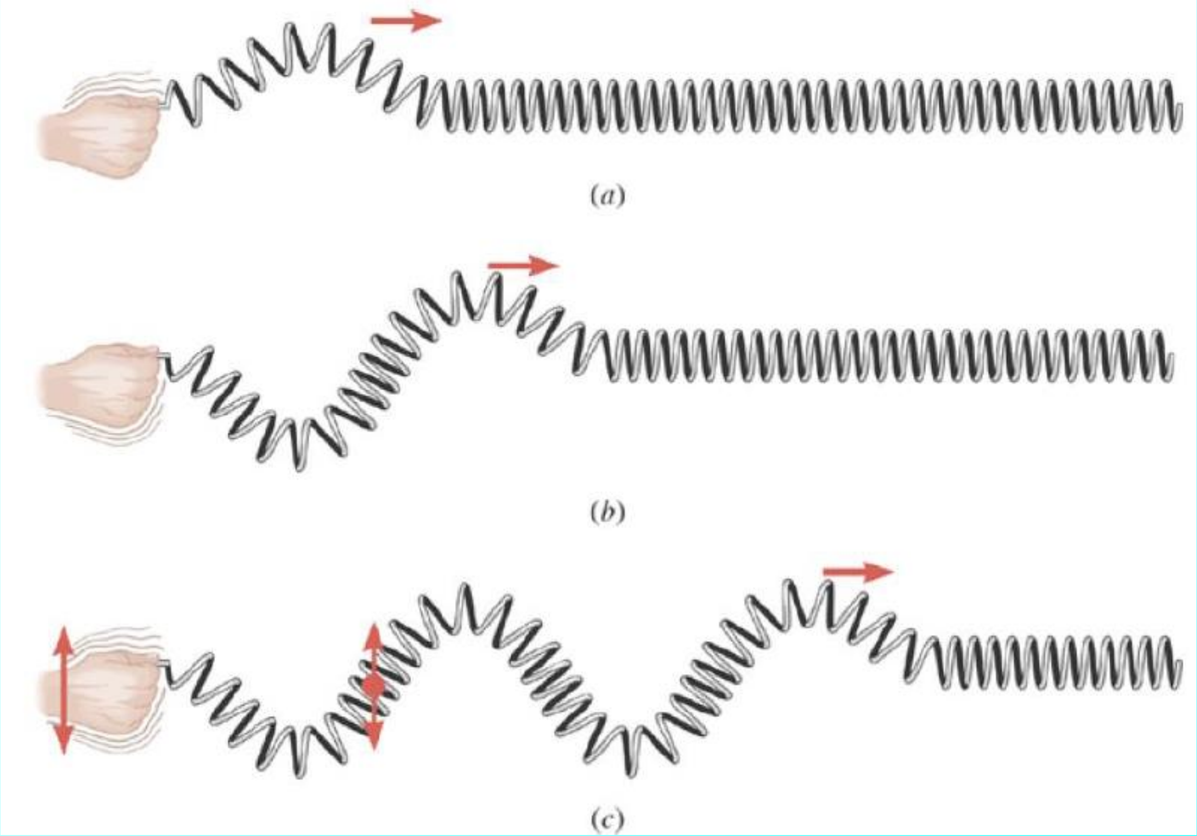


4. Unde elastice

4.1. Noţiuni generale

Unde transversale

Dacă oscilaţii au o direcţie perpendiculară pe direcţia de propagare a undei, atunci este vorba despre o unda transversala.

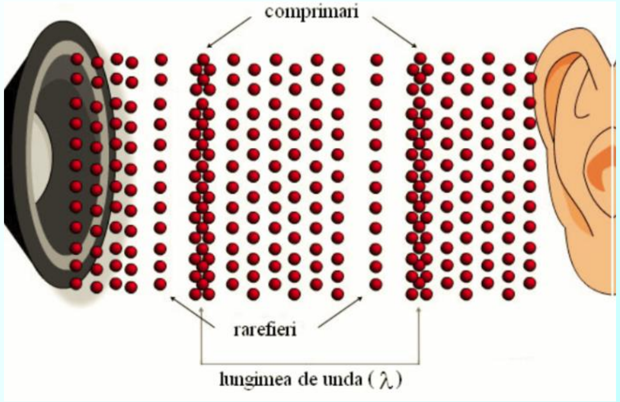


Exemple: undele dintr-o coardă, undele electromagnetice (lumina)

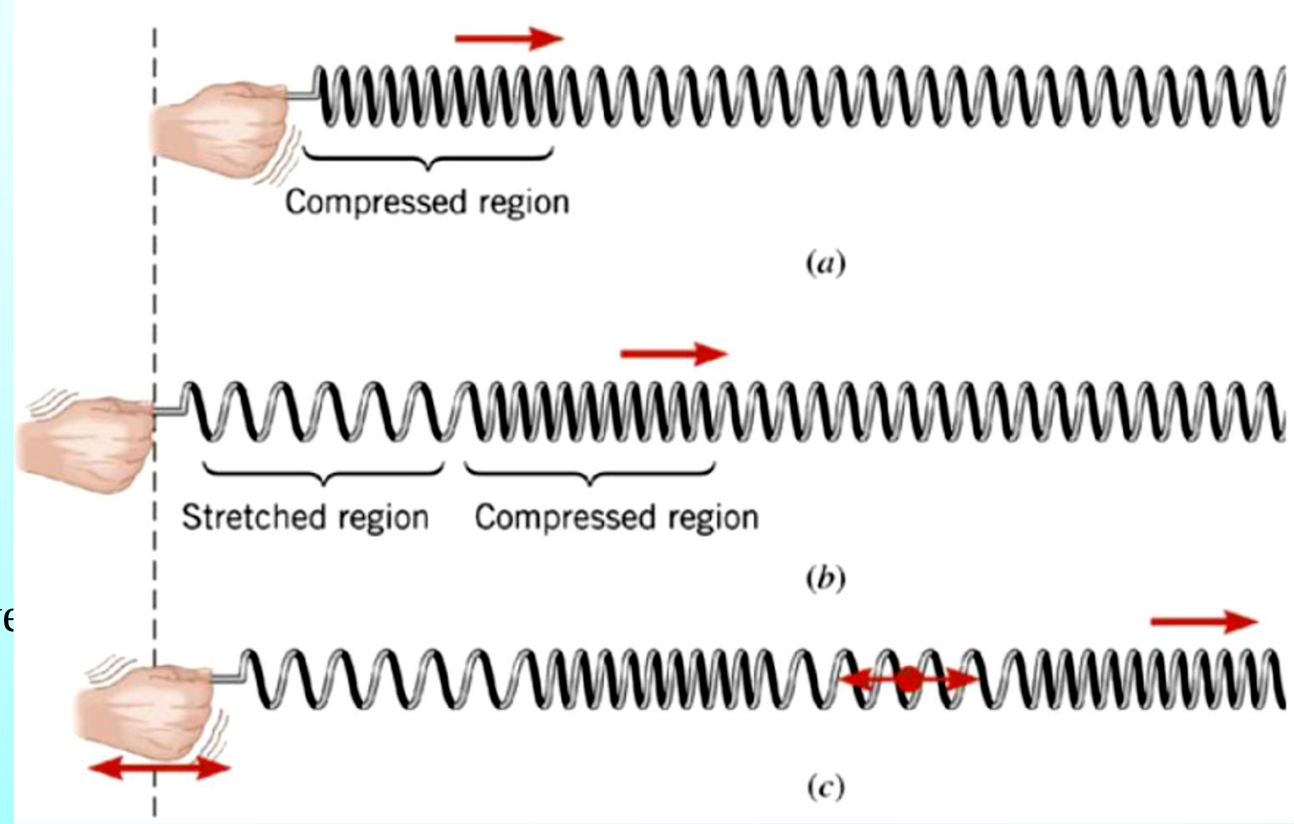
4. Unde elastice

4.1. Noţiuni generale

Unde longitudinale - direcţia de propagare coincide (paralelă) cu direcţia de oscilaţie



Undele sonore se propagă prin comprimări şi rarefieri succesive ale mediului elastic



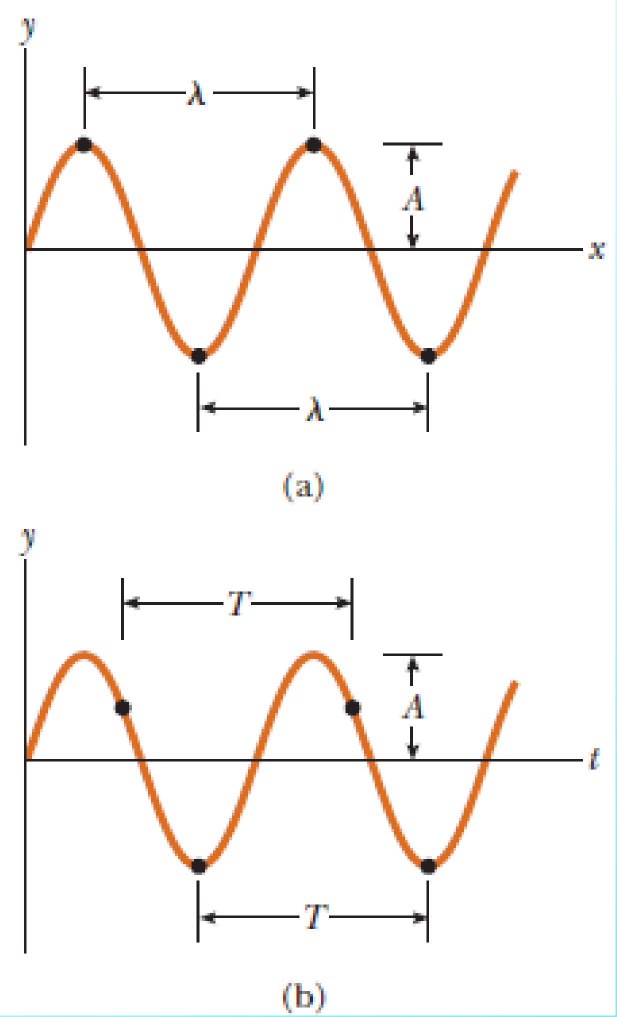
Exemple: undele sonore, undele de compresiune dintr-un resort

4. Unde elastice

4.1. Noţiuni generale

Mărimi specifice undelor

- Viteza undei: u = *constant*
- Amplitudinea undei: **A**
- Lungimea de undă: **λ**
- Perioada undei: **T**
- Frecvenţa undei: $\nu = 1/T$
- Lungimea de undă: $\lambda = u\,T$

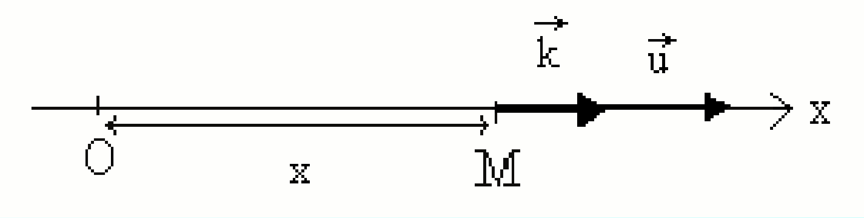


Într-o perioadă unda avansează cu o lungime de undă (λ)

4. Unde elastice

4.2. Unde armonice unidimensionale

- Sursa *oscilează* cu amplitudinea A şi pulsaţia ω: $y_o(t) = A \sin \omega t$



oscilaţia produsă în O se propagă numai pe o direcţie

- Viteza undei este finită şi constantă, *u*

- Oscilaţia din punctul M se produce la momentul: $t - \dfrac{x}{u}$

4. Unde elastice

4.2. Unde armonice unidimensionale

Punctul M are, în orice moment de timp, elongaţia:

$$y_M(x, t) = A \sin \omega (t - \frac{x}{u})$$

Punctul M începe să oscileze ***mai tîrziu*** faţă de punctul O

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\lambda = u\,T = u\frac{2\pi}{\omega}$$

$$y_M(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{T}(t - \frac{x}{u})$$

$$y_M(x, t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

4. Unde elastice

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

4.2. Unde armonice unidimensionale.

Amplitudinea (m)

Faza (rad)

Elongaţia mişcării (m)

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

Poziţia (m)

Pulsaţia (rad/s)

Timp (s)

Vector de undă (m^{-1})

Ecuaţia undei plane

4. Unde elastice

4.2. Unde armonice unidimensionale

Vectorul de undă $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

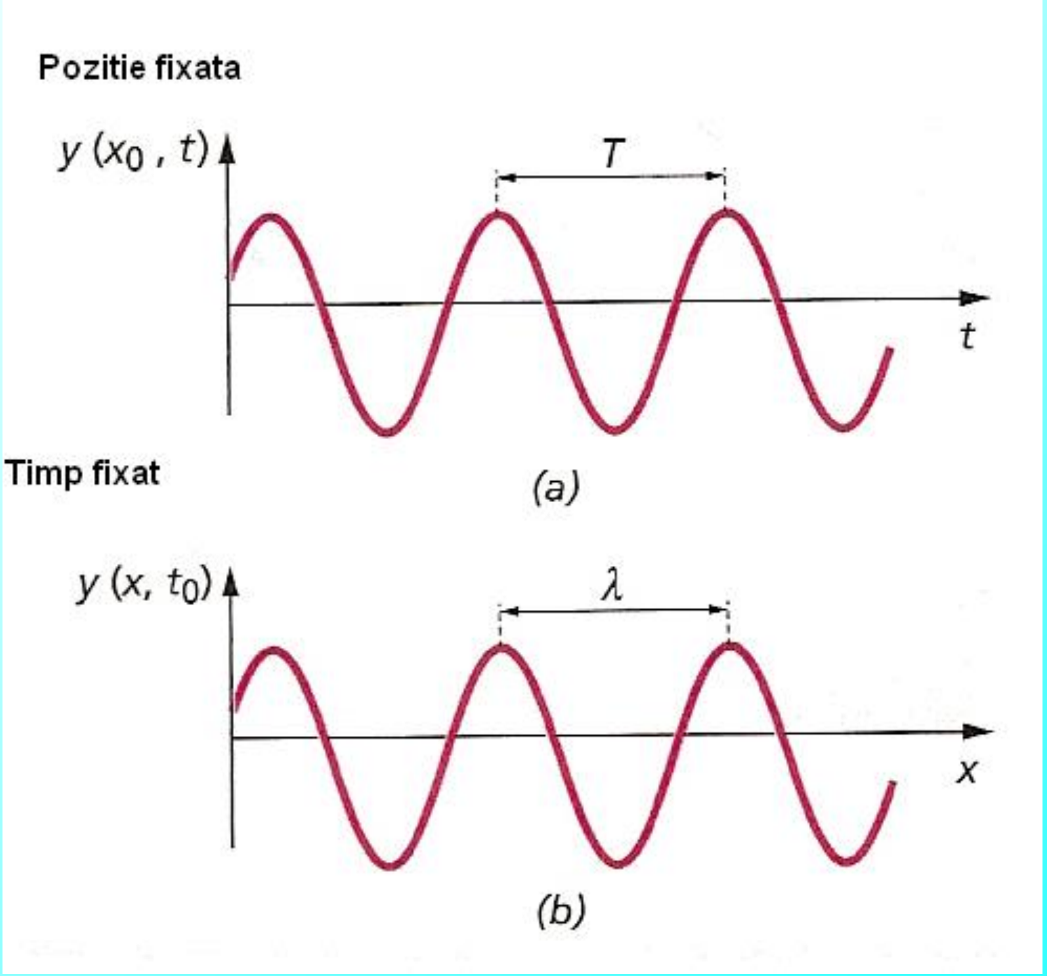
$$y_M(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

a) $x = x_0$ *fixat*

$$y(x_0,t) = A\sin(\omega t - \varphi)$$

b) $t = t_0$ *fixat*

Periodicitate spaţială



4. Unde elastice

4.2. Unde armonice unidimensionale

- $v(x,t)$ = Viteza de oscilaţie a unui punct din mediul de propagare

$$v(x,t) = \frac{dy}{dt} = A\,\omega\cos(\omega t - kx)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{\omega}{u}$$

- u = viteza de propagare a undei

  u= constant şi depinde de caracteristicile mediului de propagare

<u>Exemple</u>: viteza undei sonore în aer, $u = 340$ m/s

viteza luminii în vid, $u = c = 3 \cdot 10^8$ m/s

4. Unde elastice

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{\omega}{u}$$

4.3. Ecuaţia de propagare a undelor

Derivata de ordinul doi a funcţiei de undă în raport cu t este:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t - kx) = -Au^2k^2 \sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

Derivata de ordinul doi a funcţiei de undă în raport cu x este:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -Ak^2 \sin(\omega t - kx) \quad (2)$$

Combinând cele două ec. (1) si (2): $\Rightarrow \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$

Daca unda se deplaseaza dupa o directie oarecare: $\Delta \Psi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$

Def.: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Operatorul Laplace

Def.: $\Box = \Delta - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ Operatorul d' Alembert

Ecuaţia de propagare a undei după o direcţie oarecare: $\Box \Psi = 0$

4. Unde elastice

4.3. Ecuaţia de propagare a undelor

- *Undă progresivă* – dacă unda se propagă în direcţia Ox (se propagă de la sursă spre mediu)

- *Undă regresivă* – dacă unda se propaga dinspre mediu spre sursă

4. Unde elastice

4.4. Vitezele de propagare ale undelor elastice

Vitezele de propagare ale undelor în diferite medii continue:

1. Unde transversale în coarde elastice: $u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$
2. Unde longitudinale în fluide sau gaze: $u = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$
3. Unde longitudinale în solide: $u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

unde:

T - tensiunea din coardă, μ - masa unităţii de lungime

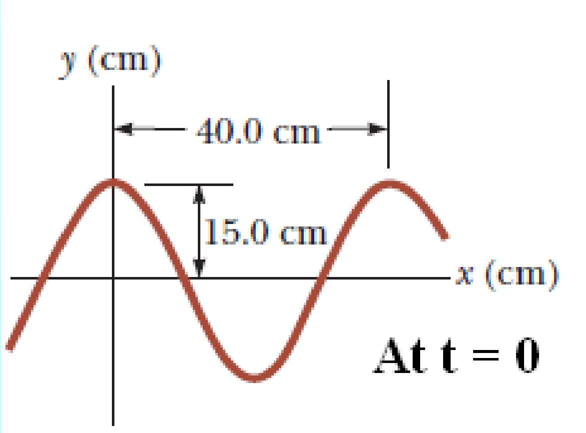
β - modulul de compresibilitate al mediului, ρ - densitatea mediului

E - modulul de elasticitate al mediului

4. Unde elastice

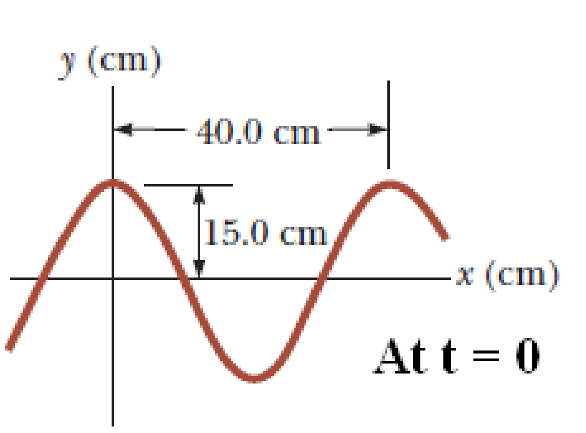
Aplicaţie:

O undă sinusoidală se propagă în direcţia Ox cu: amplitudinea de 15 cm, lungimea de undă de 40 cm şi frecvenţă de 8 Hz. Poziţia verticală a unui punct la momentul t = 0 şi x= 0 este tot de 15 cm. Să se determine vectorul de undă *k*, perioada *T*, pulsaţia *ω* şi viteza undei *u*. De asemenea, să se găsească ecuaţia undei.



4. Unde elastice

Aplicaţie:



$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\, rad}{40\ cm} = 15.7\ \mathrm{rad/m}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8\ Hz} = 0.125\ \mathrm{s} \qquad \omega = 2\pi f = 50.3\ \mathrm{rad/s}$$

$$u = \lambda f = 3.2\ \mathrm{m/s}$$

Faza iniţială a undei : $15 = 15\, sin\varphi \;\Rightarrow\; sin\varphi = 1 \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad}$

Ecuaţia undei: $y = Asin\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right) = Acos(\omega t - kx)$

$y = 0.15\cos(50.3t - 15.7x)$

4. Unde elastice

4.5. Consideraţii energetice asupra propagării undei

În timpul propagării, punctele materiale ale mediului oscilează în jurul poziţiei de echilibru.

Energia mecanică a particulelor din volumul ΔV: $\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 \\ &v(x,t) = \frac{dy}{dt} = A\,\omega \cos(\omega t - kx) \\ &m = \rho\,\Delta V \end{aligned}\right\} \quad \Delta E_c = \frac{1}{2}\rho \Delta V A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

4. Unde elastice

4.5. Consideraţii energetice asupra propagării undei

Energia mecanică a particulelor din volumul ΔV : $\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} k_e x^2$$

$$F_e = E\,S\,\frac{x}{l_0}$$

$$F_e = -\,k_e\,x$$

$$k_e = \frac{E\,S}{l_0}$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}\frac{E\,S}{l_0}x^2 = \frac{1}{2}E\,\Delta V\frac{x^2}{l_0^2} = \frac{1}{2}E\,\Delta V\varepsilon^2$$

$$\varepsilon = \frac{x}{l_0} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA\cos(\omega t - kx)$$

$$u^2 = \frac{E}{\rho}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{\omega}{u}$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 A^2 \Delta V \cos^2(\omega t - kx)$$

4. Unde elastice

4.5. Consideraţii energetice asupra propagării undei

Energia mecanică a particulelor din volumul ΔV : $\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p$

$$\Delta E = \rho\, \omega^2 A^2 \Delta V \cos^2(\omega t - kx)$$

Constatăm că energiile cinetică şi potenţială sunt:

i) egale;

ii) funcţii periodice de timp;

iii) oscilează în fază.

Energia undei nu se stochează în unitatea de volum!!!

4. Unde elastice

4.5. Consideraţii energetice asupra propagării undei

Densitatea volumică de energie mecanică: $w = \frac{dE}{dV}$ $[w] = \frac{J}{m^3}$

$$\Rightarrow \quad w = \rho\,\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Densitatea volumică medie de energie mecanică = media pe o perioadă a densităţii de energie w:

$$w_m = \frac{1}{T}\int_0^T w\,dt \quad \Rightarrow \quad w_m = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 A^2$$

Fluxul de energie = cantitatea de energie transmisă, printr-o suprafaţă, în unitatea de timp $\Phi = \frac{dE}{dt}$ $[\Phi]_{SI} = 1\ W = 1J/\ 1s$

4. Unde elastice

4.5. Consideraţii energetice asupra propagării undei

Densitatea fluxului de energie = fluxul de energie transportat prin unitatea de suprafaţă, în direcţie perpendiculară pe suprafaţă

$$\vec{j} = \frac{d\Phi}{d\vec{S}} = \frac{d}{d\vec{S}}\left(\frac{dE}{dt}\right) = w\,\vec{u}$$

$$[\,j\,]_{SI} = 1\,\frac{W}{m^2}$$

Intensitatea undei = valoarea medie pe o perioadă a densităţii fluxului de energie

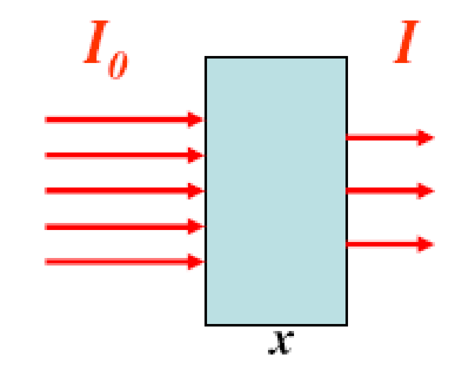
$$I = <\vec{j}> = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 A^2\,u \quad \Rightarrow \quad I \approx A^2$$

$$[\,I\,]_{SI} = 1\,\frac{W}{m^2}$$

4. Unde elastice

4.6. Absorbţia undelor

Legea lui Beer $$\boxed{I = I_0 e^{-\alpha \cdot x}}$$



$$A = A_0\ e^{-\frac{1}{2}\alpha x}$$

$$y(x,t) = A_0\ e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \sin(\omega t - kx)$$

Ecuaţia undei intr-un mediu disipativ

4. Unde elastice

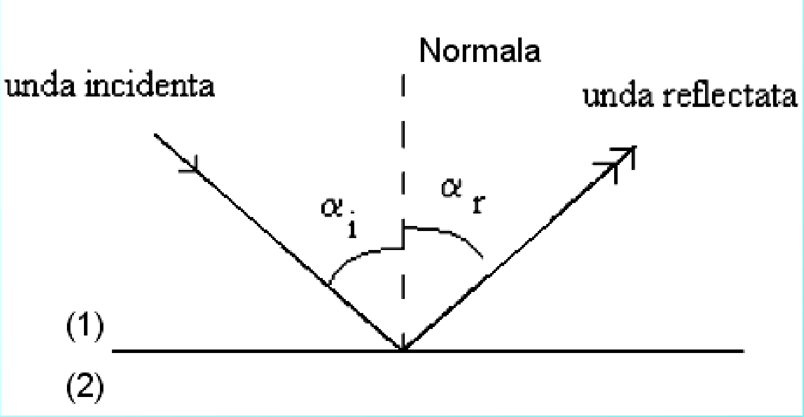
4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

Reflexia undelor = fenomenul de întoarcere a undei în mediul din care a venit, atunci când întâlneste suprafata de separatie a doua medii diferite

<u>Legile reflexiei</u>:

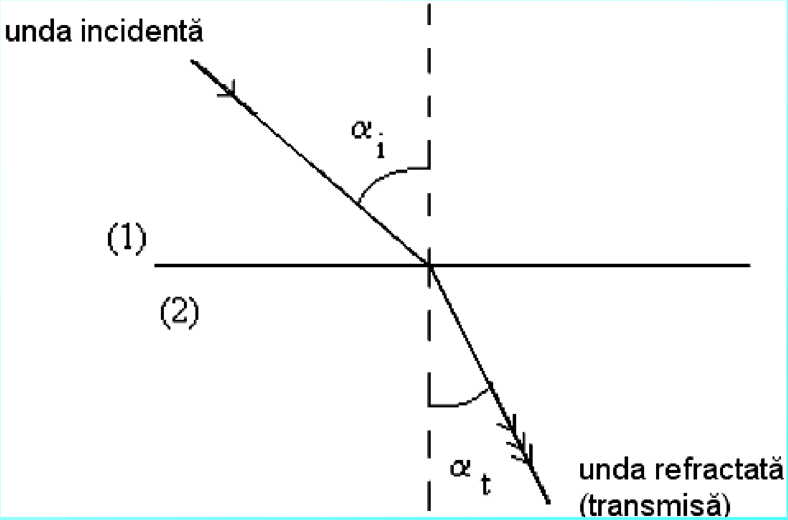
1) $\alpha_i = \alpha_r$

2) raza incidentă, normala la suprafață și raza reflectată sunt în același plan



4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

Refracţia undelor = fenomenul de schimbare a direcţiei de propagare a undei la trecerea dintr-un mediu în alt mediu diferit



Legile refracţiei:

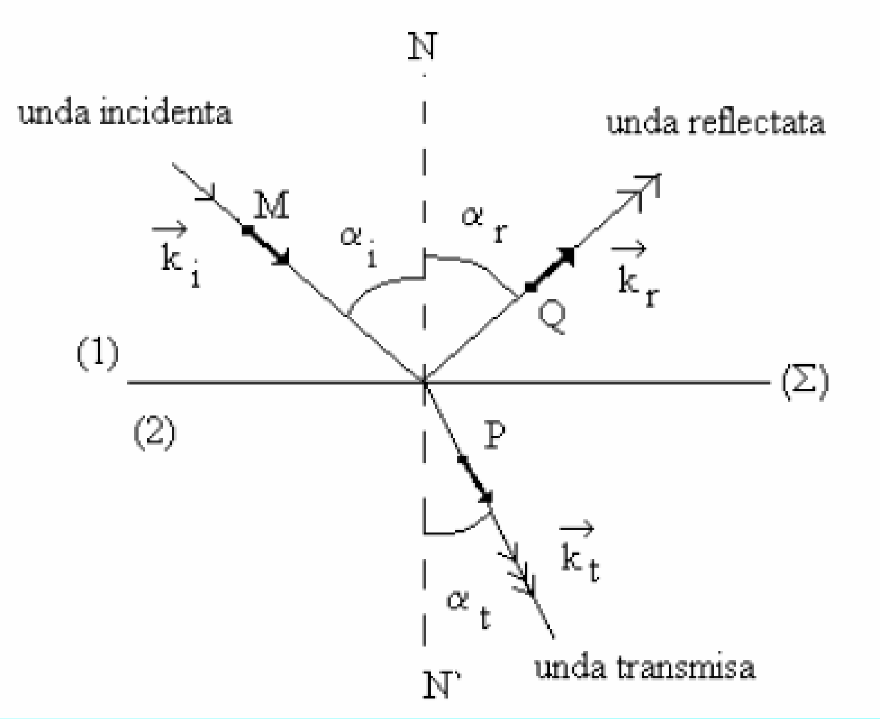
1. $$\frac{\sin\alpha_i}{u_1} = \frac{\sin\alpha_t}{u_2}$$ Legea lui Snellius

2. raza incidenta, normala la suprafaţă şi raza transmisă sunt în acelaşi plan

4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

Vitezele de propagare:

$$u_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}} \qquad u_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$$



Funcţia de undă:

$$y(\vec{r},t) = A\sin\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$

Def.

Impedanţa mediului de propagare: $\boldsymbol{Z = \rho\, u}$

4. Unde elastice

4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

Condiţia de continuitate a funcţiilor de undă pe suprafaţa de separare: $$y_i + y_r = y_t$$

Condiţia de conservare a energiei undei: $$I_i = I_r + I_t$$

intensităţile undelor: incidentă, reflectată şi transmisă $$I = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 A^2\, u$$

$$A_i + A_r = A_t$$

$$A_r = A_i\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)$$

$$A_t = A_i\left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)$$

4. Unde elastice

4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

În ceea ce priveşte amplitudinea undei reflectate se pot întâlni două cazuri:

a). Mediul (1) mai dens decât mediul (2), $Z_1>Z_2$.

Amplitudinea undei reflectate, A_r, are acelaşi semn cu amplitudinea undei incidente, A_i. Cele două unde sunt în fază.

b). Mediul (1) mai puţin dens decât mediul (2), $Z_1<Z_2$.

Amplitudinea undei reflectate, A_r, are semn opus faţă de amplitudinea undei incidente, A_i. Cele două unde sunt în opoziţie de fază.

Unda reflectată este defazată cu π radiani în urma undei incidente.

4. Unde elastice

4.7. Reflexia şi refracţia undelor elastice

Coeficientul de reflexie = cu raportul dintre intensitatea undei reflectate si intensitatea undei incidente

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{A_r}{A_i}\right)^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

Coeficientul de transmisie = raportul dintre intensitatea undei transmise si intensitatea undei incidente

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_2}{Z_1}\left(\frac{A_t}{A_i}\right)^2 = \frac{Z_2}{Z_1}\left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Suma coeficienţilor de reflexie şi transmisie este unitară: $R + T = 1$

(consecinţa a legii conservării energiei elastice)

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- Definească unda elastică şi să facă clasificarea acestora;
- Cunoască diferenţa dintre unda transversală şi cea longitudinală;
- Definească unda armonică unidimensinală;
- Definească vectorul de undă;
- Definească vitezele de propagare ale undelor elastice;
- Cunoască consideraţiile energetice asupra propagării undelor;
- Definească reflexia şi refracţia undelor elastice;
- Cunoască legile reflexiei şi refracţiei .
- Determine coeficientul de reflexie şi pe cel de transmisiei;

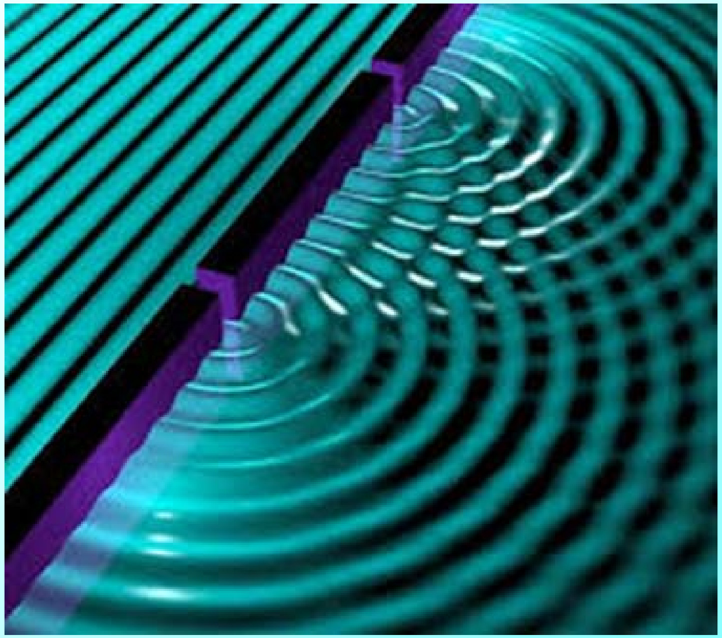
BIBLIOGRAFIE

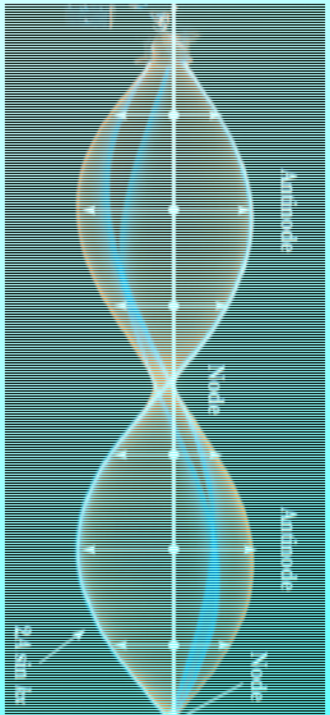
- **Fizica,** F. W.Sears, Zemansky , H. D.Young, Ed. Didactica si Pedagogica, 1983;
- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, F. Barvinschi, Ed. Orizonturi Universitare, 2016;
- **Elemente de fizică generală,** D. Popov, I. Damian, Ed. Politehnica, 2014;
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Ed. Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008
- **PHYSICS for Scientist and Engineers with Modern Physics** – Seventh Edition, R. Serway, J. Jewett, ed. Thomson Brooks/Cole, 2008.
- **Sears & Zemansky's University Physics: with Modern Physics**, 13th Edition, H. Young, R. Freedman, ed. Pearson, 2012

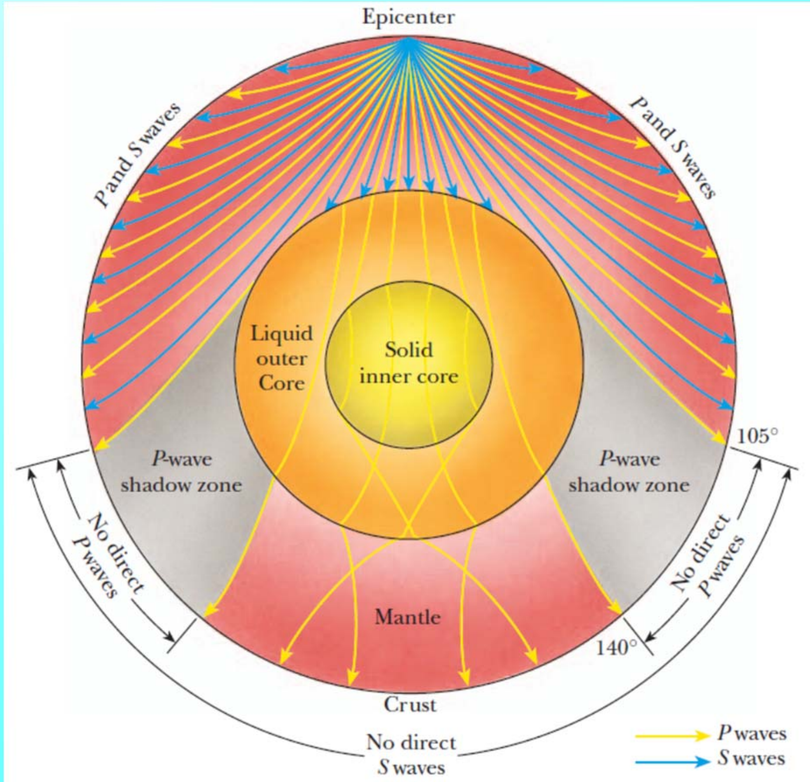
FIZICĂ PENTRU INGINERI

Prezentat de

Trif Delia







Universitatea Politehnica Timişoara, România

CURSUL 9

2020-2021

4. Unde elastice

4.7. Unde staţionare
4.8. Interferenţa undelor
4.9. Difracţia undelor
4.10. Polarizarea undelor elastice
4.11. Undele seismice

4. Unde elastice

Remember:

- *Unda* reprezintă fenomenul de extindere şi propagare din aproape în aproape a unei perturbaţii periodice produse într-un anumit punct din mediul de propagare.

- Propagarea undei se face cu o viteză finită, numită *viteza undei*.

- Unda nu reprezintă transport de materie, ci numai transport de energie.

- Lungimea de undă reprezintă distanța parcursă de undă într-un interval de timp egal cu o perioadă.

4. Unde elastice

Remember: Ecuaţia undei armonice unidimensionale

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Amplitudinea (m)

Faza (rad)

Elongaţia mişcării (m)

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

Poziţia (m)

Pulsaţia (rad/s)

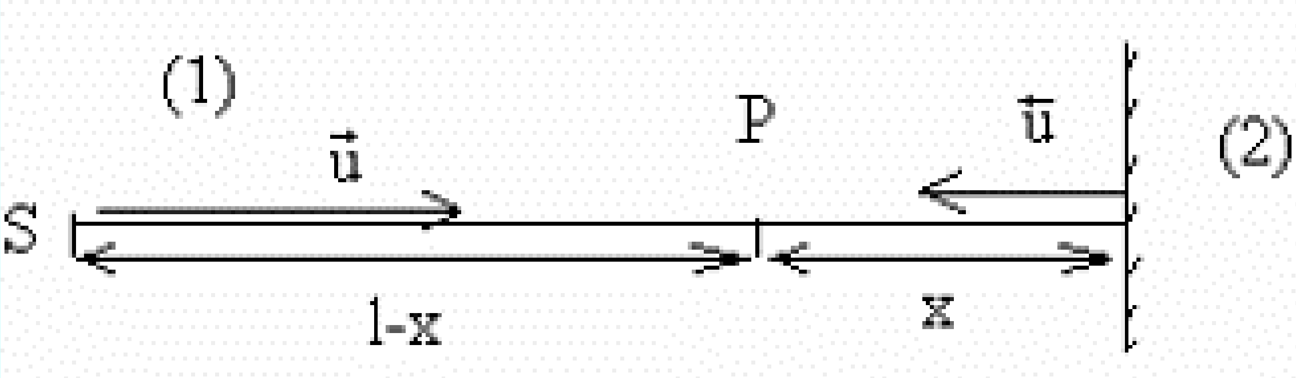
Timp (s)

Vector de undă (m^{-1})

4. Unde elastice

4.7. Unde staţionare

- ❑ Dacă în mediul de propagare al undei se suprapun unda incidentă şi unda reflectată, atunci se obţin *unde staţionare*.
- ❑ Fenomenul de compunere a două unde coerente se numeşte *interferenţă*.
- I. Dacă mediul al doilea este mai puţin dens decât primul $Z_2<Z_1$, atunci unda reflectată este în fază cu unda incidentă.



$$y_i = A\sin[\omega t - k(l - x)]$$

$$y_r = A\sin[\omega t - k(l + x)]$$

4. Unde elastice

4.7. Unde staţionare

Rezultatul suprapunerii celor două unde este tot o undă, de ecuaţie:

$$y = y_i + y_r = A\sin[\omega t - k(l - x)] + A\sin[\omega t - k(l + x)]$$

Folosind formula trigonometrică:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

Se obtine:

$$y = A[\sin(\omega t - kl)\cos kx + \sin kx\cos(\omega t - kl) +$$

$$+ \sin(\omega t - kl)\cos kx - \sin kx\cos(\omega t - kl)]$$

Ecuația undei rezultante din punctul P este descrisă de funcția de undă:

$$y = 2A\cos(kx)\sin(\omega t - kl)$$

4. Unde elastice

4.7. Unde staţionare

Unde amplitudinea undei este: $$A(x) = 2A\cos kx$$

Ecuaţia undei devine: $$y = A(x)\sin(\omega t - kl)$$

Amplitudinea rezultantă A(x) va avea valori diferite în diferite puncte, după cum urmează.

Cazuri particulare:

a) Amplitudine maximă: $$A = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = \pm 2A$$

Deci $$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = \pm 1 \qquad \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi$$ $$\Rightarrow x_v = n\frac{\lambda}{2}$$

Se obţin maxime de amplitudine în puncte numite ventre ale undei, aflate la distanța x_v unul de altul.

4. Unde elastice

4.7. Unde staţionare

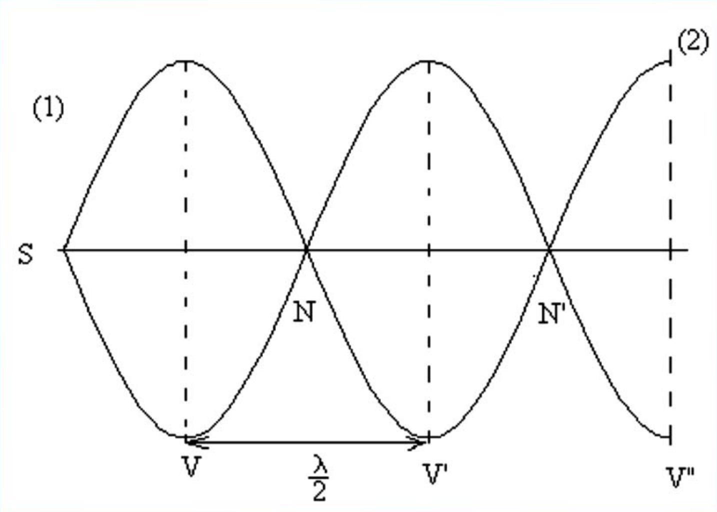
Cazuri particulare:

b) Amplitudine minimă: $A = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = (n+\frac{1}{2})\pi$$

$$\Rightarrow x_n = (n+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$$

Aceste puncte în care nu se produce nici o perturbaţie, se numesc *noduri* ale undei staţionare. Distanţa dintre două noduri vecine este x_n.



$Z_2<Z_1$

V- ventre

N- noduri

În lungimea *l* se cuprind un anumit număr de lungimi de undă, şi anume: $l = \frac{5}{4}\lambda$

4. Unde elastice

4.7. Unde staţionare

- II. Dacă mediul al doilea este mai dens decât primul, $Z_2>Z_1$, atunci unda reflectată este în opoziţie de fază cu unda incidentă.

Cele două funcţii de undă ce se întâlnesc în punctul P sunt de forma:

$$y_i = A\sin[\omega t - k(l - x)] \qquad y_r = -A\sin[\omega t - k(l + x)]$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b.$$

Unda staționară este descrisă de funcția de undă:

$$\boldsymbol{y = 2A\sin kx[\cos(\omega t - kl)]}$$

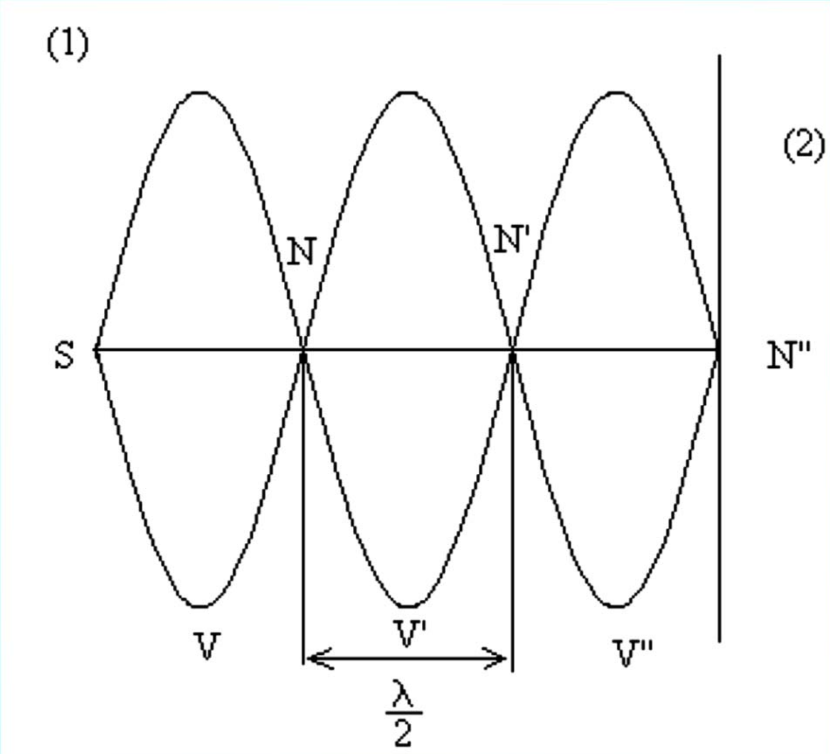
- Ventrele se obţin în punctele situate la distanţa: $x_v = (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$
- Nodurile se obţin la distanţa: $x_n = n\frac{\lambda}{2}$

4. Unde elastice

4.7. Unde staţionare

Unda staţionară obţinută în cazul $Z_2>Z_1$

Deşi distanţa dintre sursa undei elstice şi suprafaţa de separare este aceeaşi, observăm în fig de mai jos că distribuţia nodurilor şi ventrelor este diferită. La suprafaţa de contact cu mediul mai dens se formează un nod al undei staţionare. Acest lucru se datorează schimbării fazei undei reflectate cu π radiani. În esenţă, rezultă că un alt număr de lungimi de undă se cuprind în lungimea l:



$$l = \frac{3}{2}\lambda$$

4. Unde elastice

4.8. Interferenţa undelor

- Interferenţa undelor este fenomenul de suprapunere şi compunere a undelor, cu accentuarea sau slăbirea reciprocă a oscilaţiilor.

Sau

- Fenomenul general de compunere a undelor coerente se numeşte interferenţă

Obs.: Intensitatea undei reprezintă cantitatea de energie ce trece prin unitatea de suprafaţă în unitatea de timp.

$$I = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 A^2\,u$$

4. Unde elastice

4.8. Interferenţa undelor

Să considerăm două unde ce se întâlnesc într-un punct, având funcţiile de undă:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

unde φ_1 si φ_2 sunt funcţii de timp

Amplitudinea undei rezultante se calculează din:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)$$

unde $\Delta\varphi$ este diferenţa de fază dintre cele două unde şi, în general, depinde de timp:

$$\Delta\varphi = (\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)$$

4. Unde elastice

4.8. Interferenţa undelor

Media amplitudinii rezultante pe o perioadă este:

$$< A^2 > = < A_1^2 > + < A_2^2 > + 2\frac{A_1 A_2}{T}\int_0^T \cos(\Delta\varphi)dt$$

a) Dacă integrala pe o perioadă este nulă $\Rightarrow \int_0^T \cos(\Delta\varphi)dt = 0 \quad \Rightarrow \quad I = I_1 + I_2$

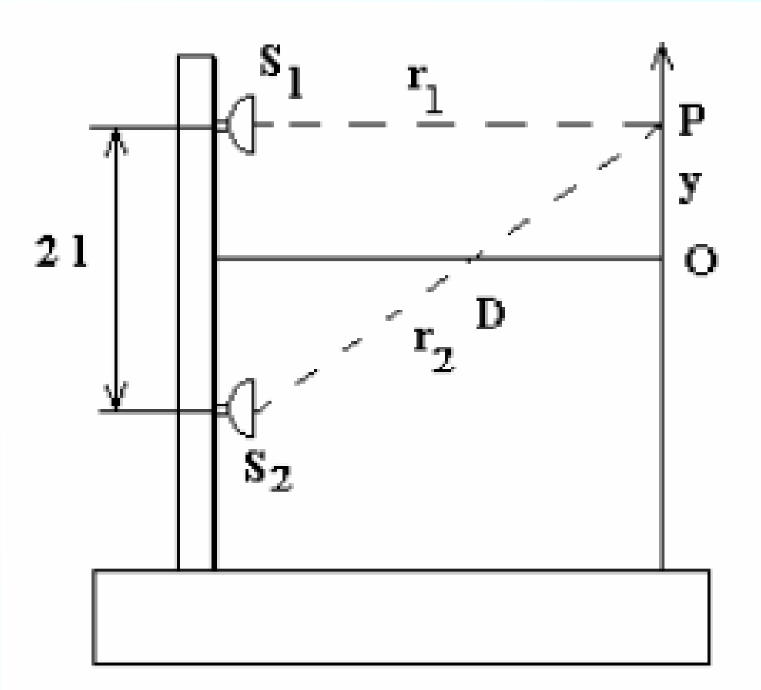
b) Dacă $\Delta\varphi$ este independentă de timp $\Rightarrow \int_0^T \cos(\Delta\varphi)dt \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$$

Este cazul în care se produce interferenţă, deoarece undele ce se întâlnesc sunt unde coerente. *Condiţia de coerenţă* este ca diferenţa de fază dintre cele două unde, $\Delta\varphi$, să fie independentă de timp.

4. Unde elastice

4.8. Interferenţa undelor longitudinale



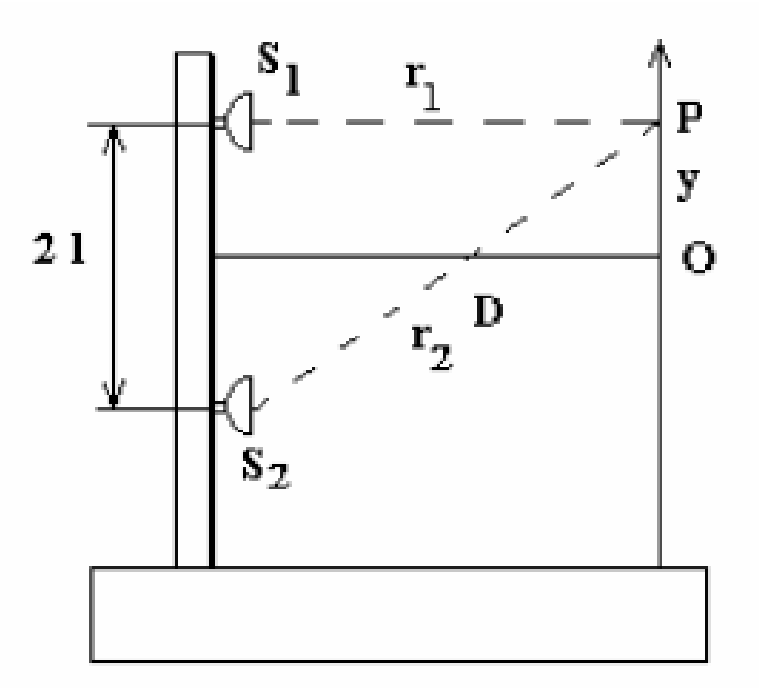
Funcţiile de undă pentru sursele S_1 si S_2:

în S_1: $$y_1 = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

în S_2: $$y_1 = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

4. Unde elastice

4.8. Interferenţa undelor longitudinale



În P cele 2 unde au funcţiile de undă:

$$y_1 = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)\right]$$

$$y_2 = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)\right]$$

4. Unde elastice

4.8. Interferenţa undelor longitudinale

Unda din punctul P este rezultatul adunării celor două unde:

$$y = y_1 + y_2 = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)\right] + A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)\right]$$

Folosind formula trigonometrică: $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$$y = 2A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)\right]\cos\left[2\pi\left(\frac{r_2 - r_1}{2\lambda}\right)\right]$$

Distanţa D este suficient de mare în raport cu r_1 şi r_2, se face aproximarea $r_1 + r_2 = 2D$

4. Unde elastice

4.8. Interferenţa undelor longitudinale

Ecuaţia undei rezultate prin interferenţă în punctul P devine:

$$y = 2A\cos\left(\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right)\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{D}{\lambda}\right)\right]$$

Amplitudinea rezultantă din punctul P depinde de poziţia punctului pe ecran:

$$A_p = 2A\cos\left(\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right)$$

Se pot întâlni două cazuri, în funcţie de valorile diferenţei de drum $\Delta r = r_2 - r_1$

4. Unde elastice

4.8. Interferenţa undelor longitudinale

a) *dacă funcţia cosinus atinge valoarea maximă*, înseamnă că diferenţa de drum este de forma: $\cos\left(\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = n\pi \quad \Rightarrow \quad \Delta r = r_2 - r_1 = n\lambda \quad \Rightarrow$

maxim de interferenţă, adică $A_p = 2\,A$

Distanţele se pot exprima ca multipli de semilungimi de undă $\Delta r = r_2 - r_1 = 2n\frac{\lambda}{2}$

Numărul natural **n** se numeşte *ordinul maximului de interferenţă.*

Intensitatea undei rezultante este de 4 ori mai mare decât a undelor incidente:

$$I_p = < A_p^2 > = 4\,I$$

4. Unde elastice

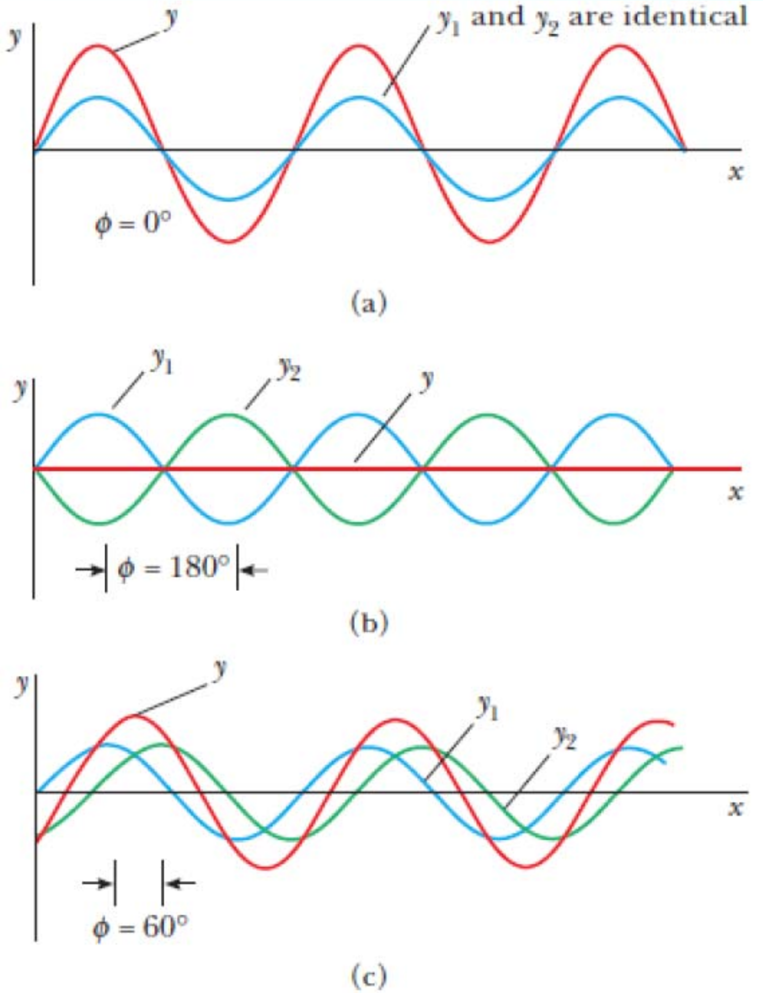
4.7. Interferenţa undelor longitudinale

b) Dacă funcţia *cosinus este nulă*, rezultă că diferenţa de drum:

$$\cos\left(\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \Delta r = r_2 - r_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

În aceste puncte amplitudinea undei rezultante este nulă, ca şi intensitatea ei. Acestea sunt puncte de *minim de inteferenţă*.

4. Unde elastice



4.7. Interferenţa undelor

Suprapunerea a doua unde identice y_1 şi y_2

a) Când cele 2 unde sunt în fază, rezultă o *interferenţă constructivă* ($\Delta r = 0, \lambda, 2\lambda, \ldots.$)

b) Când cele 2 unde sunt defazate cu π rad, rezultă o *interferenţă destructivă* ($\Delta r = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2} \ldots.$)

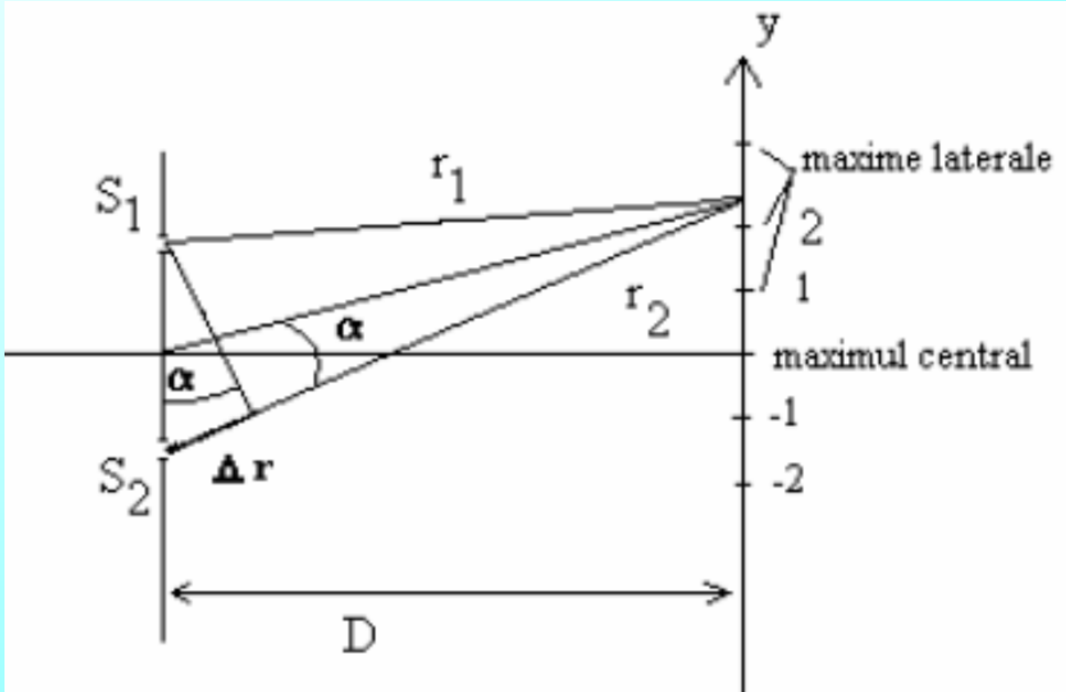
c) Când faza are alte valori, în afara de 0 sau π rad, rezultă că unda y va fi între undeva între cele două unde.

4. Unde elastice

4.7. Interferenţa undelor longitudinale

Distanţa dintre două maxime succesive se numeşte *interfranjă*.

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 2n\frac{\lambda}{2}$$



- Determinăm distanţa y_n faţă de centrul ecranului la care se află maximul de ordinul n.

$$y_n = D\ \text{tg}\alpha \qquad \sin\alpha = \frac{\Delta r}{2l}$$

$$\alpha = \sin\ \alpha = \text{tg}\ \alpha.$$

$$y_n = D\alpha = D\left(2n\frac{\lambda}{2}\right)\frac{1}{2l} = D\,n\,\frac{\lambda}{2}$$

4. Unde elastice

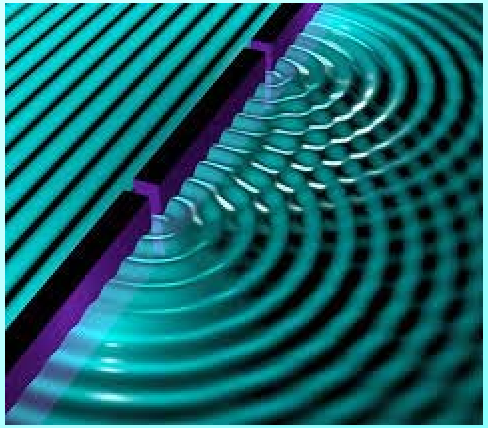
4.8. Interferenţa undelor longitudinale

Diferenţa de drum dintre cele două unde este: $\Delta r = r_2 - r_1 = 2n\frac{\lambda}{2}$

Distanţa pe ecran până la maximul de ordinul n+1 este: $y_{n+1} = D\,(n+1)\,\frac{\lambda}{2}$

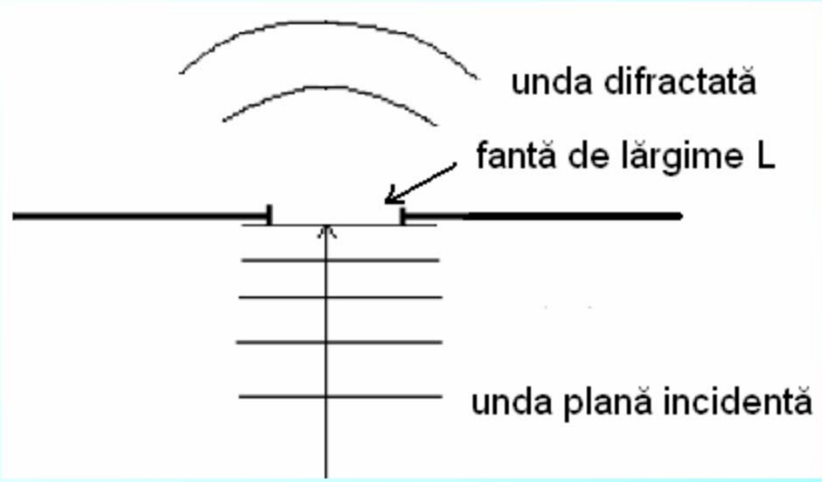
Distanţa dintre două maxime succesive, adică interfranja, este: $i = y_{n+1} - y_n = \frac{\lambda\,D}{2\,l}$

4. Unde elastice



4.9. Difracţia undelor

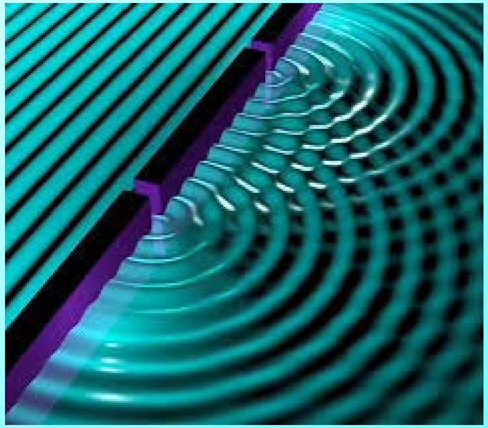
Def. fenomenul de ocolire a obstacolelor de către unde.



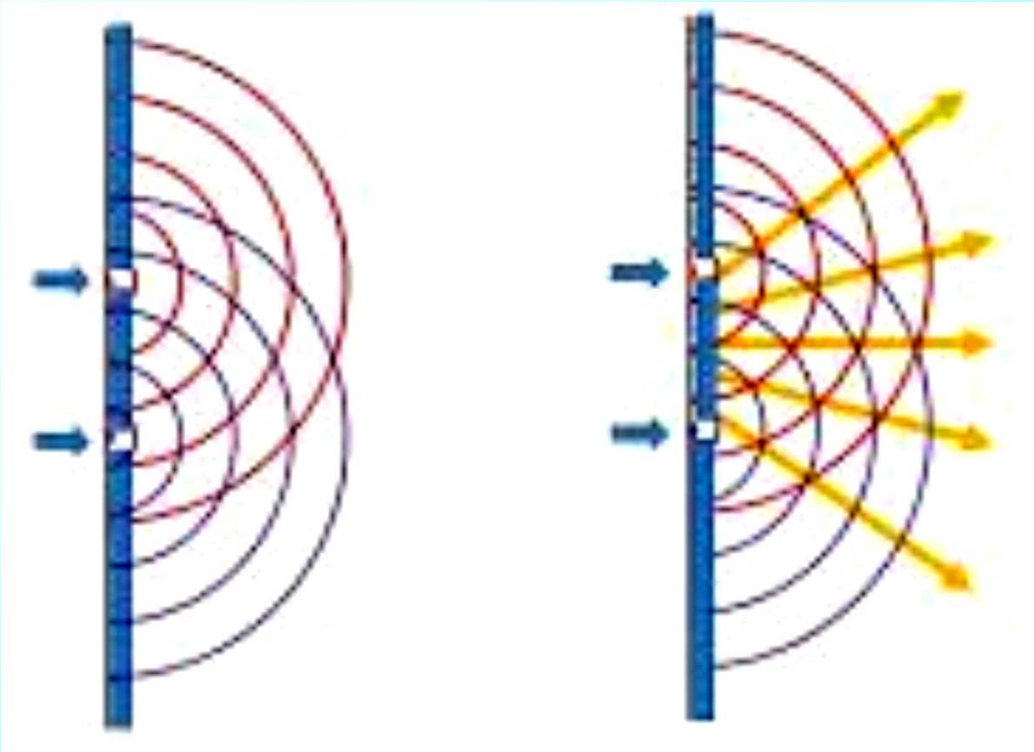
Obs.: Difracția se produce atunci când dimensiunea fantei (L) este de ordinul de mărime al lungimii de unda a undei incidente. $L \approx \lambda$

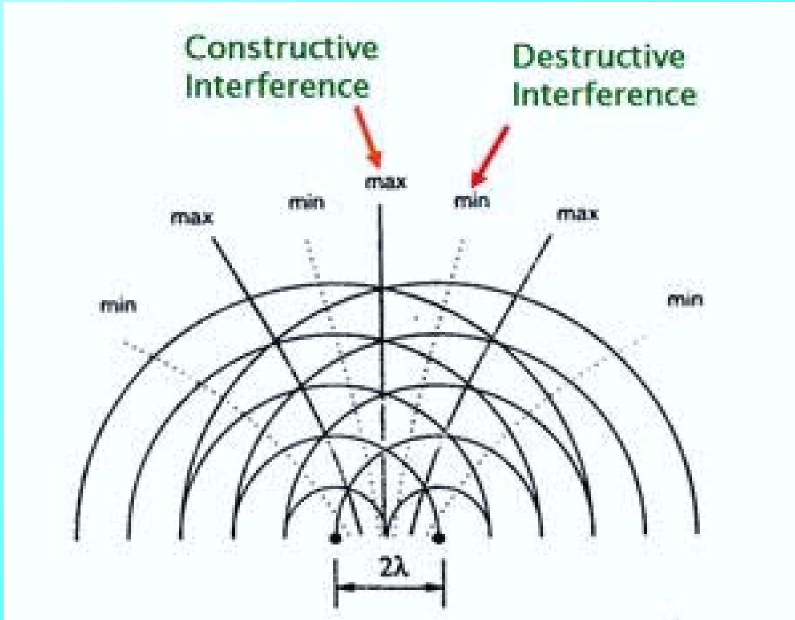
4. Unde elastice

4.9. Difracţia undelor



<u>**Principiul lui Huygens**</u>: Oricare punct al mediului până la care a ajuns frontul de undă poate fi considerat ca o nouă sursă de oscilaţie de la care se propaga în continuare unde secundare. Înfăşurătoarea undelor secundare devine noul front de undă la un moment dat.

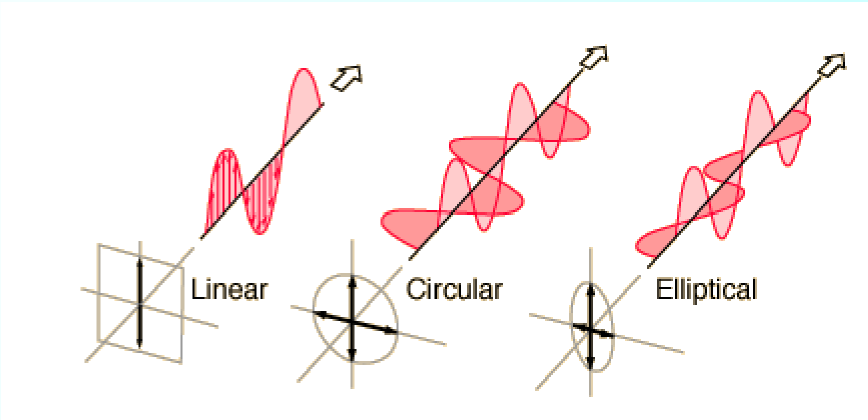


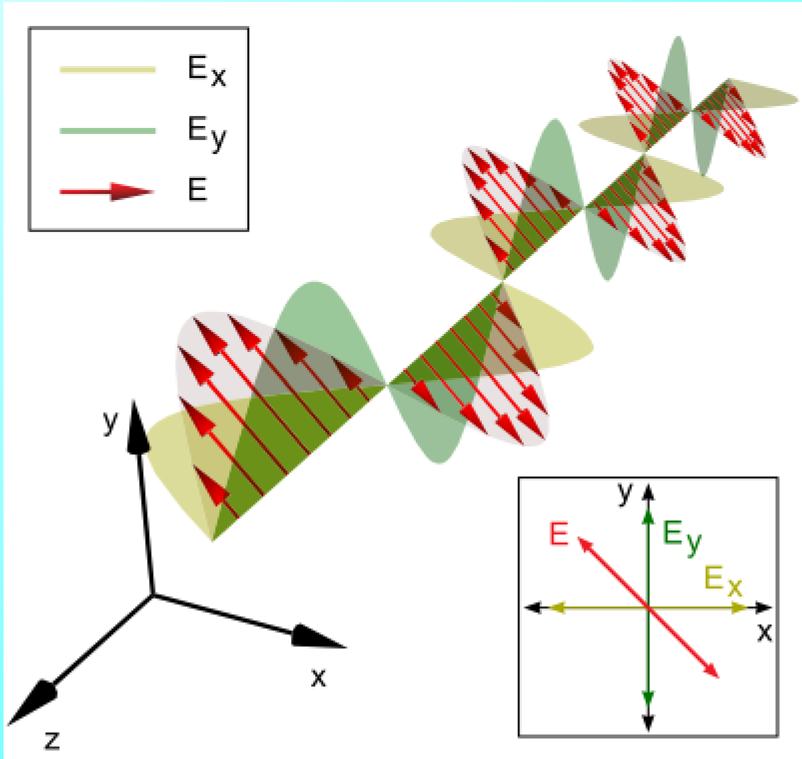


4. Unde elastice

4.10. Polarizarea undelor elastice

Polarizarea este fenomenul prin care se poate filtra dintr-o undă transversală numai componenta într-un anumit plan a vectorului de vibraţie caracteristic undei.





Dacă direcţia de vibraţie a sursei este constantă, unda vibrează într-un plan: liniar polarizată.

Dacă direcţia de vibraţie a sursei se modifică în mod predictiv, de ex. rotindu-se progresiv: circular polarizată.

4. Unde elastice

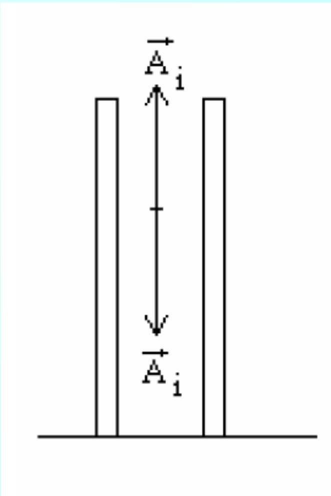
4.10. Polarizarea undelor elastice

Trecera unei unde tarnsversale printr-o fantă:

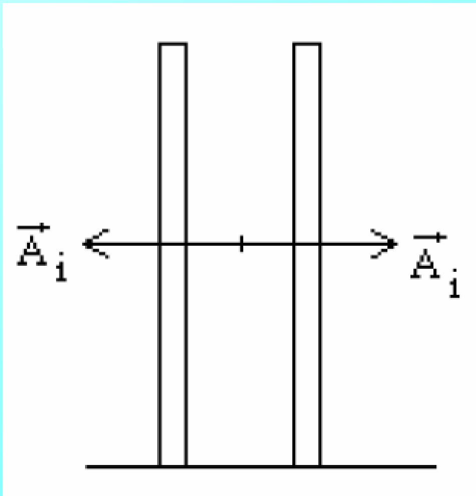
a) Dacă amplitudinea undei este paralelă cu fanta, unda se transmite prin fantă, iar unda transmisă are aceeaşi amplitudine ca cea incidentă.

b) Dacă direcţia de vibraţie din unda incidentă este perpendiculară pe direcția fantei, dincolo de fantă nu se mai propagă nici un fel de vibrație.

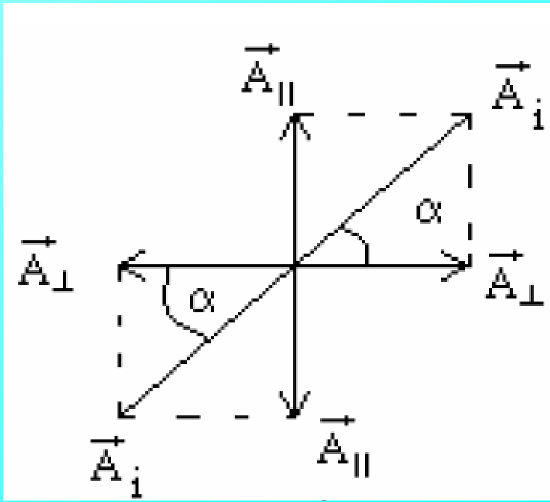
c) Dacă direcţia de vibraţie face un anumit unghi cu fanta, atunci vectorul caracteristic al undei se descompune după două direcții perpendiculare. Dintre cele două componente ale vectorului numai componenta paralelă cu fanta, se transmite mai departe, cealaltă fiind absorbită.



a)



b)

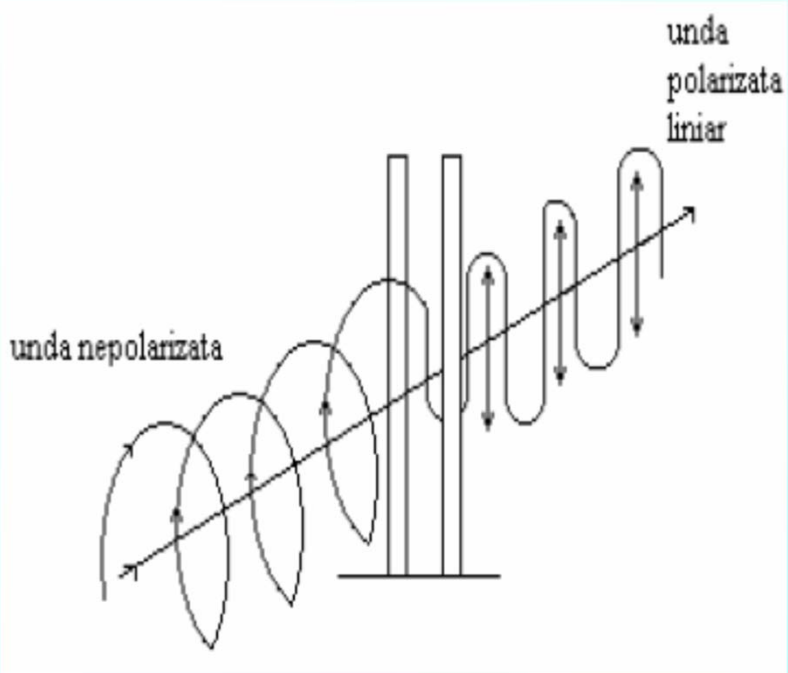


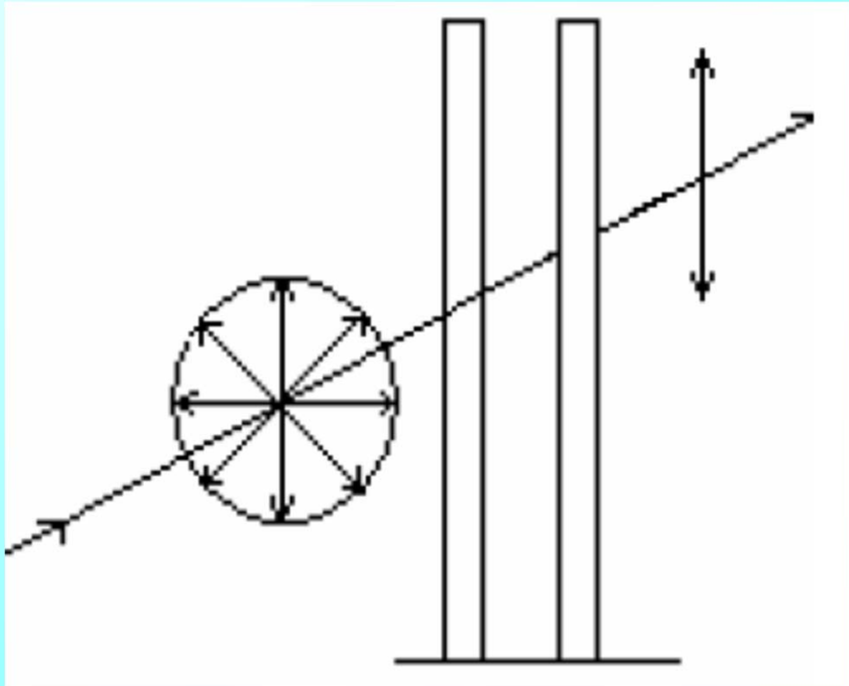
c)

4. Unde elastice

4.10. Polarizarea undelor elastice

Polarizor : dispozitivul prin care se realizează polarizarea.

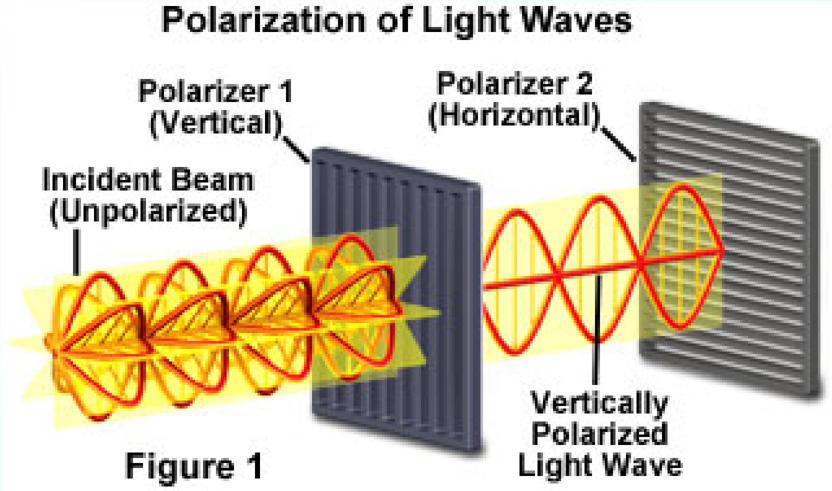


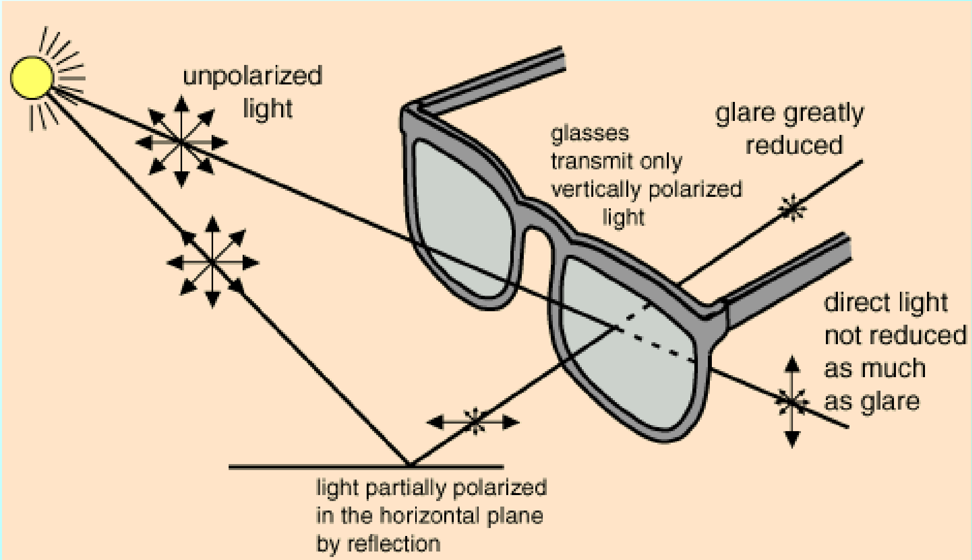


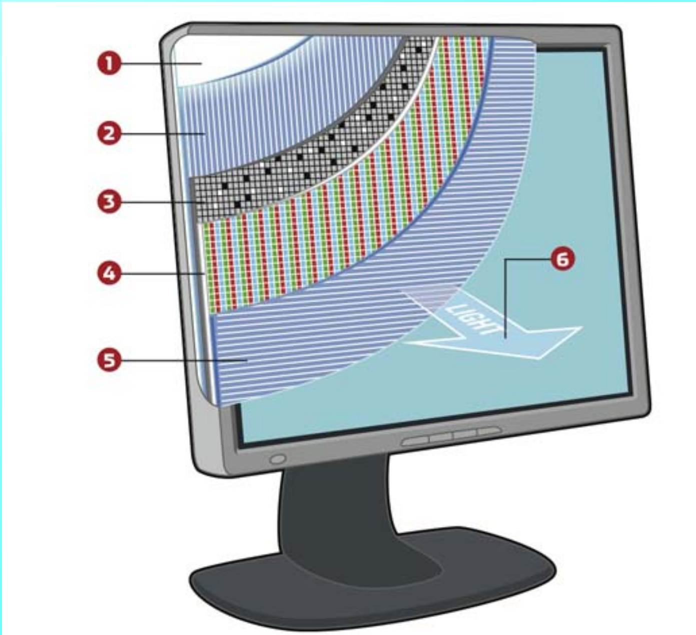
Analizor: dispozitivul care analizează starea de polarizare a undei

4. Unde elastice

4.10. Polarizarea undelor elastice



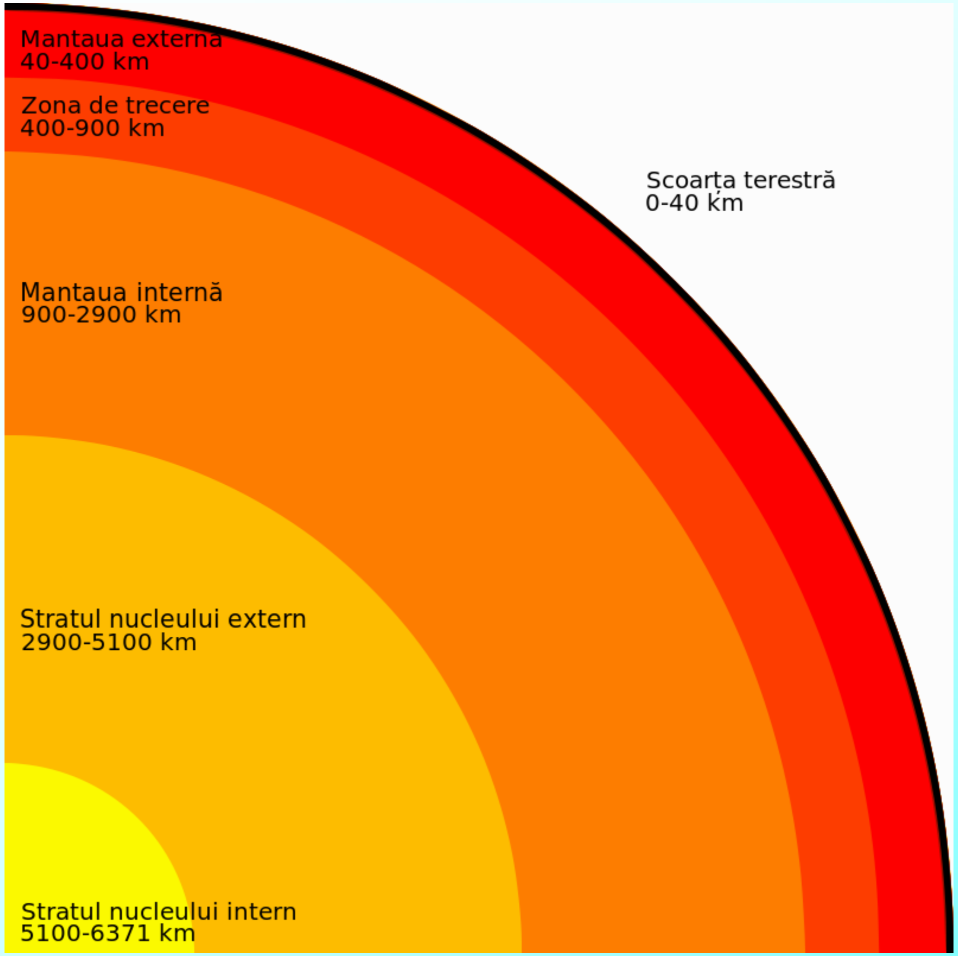


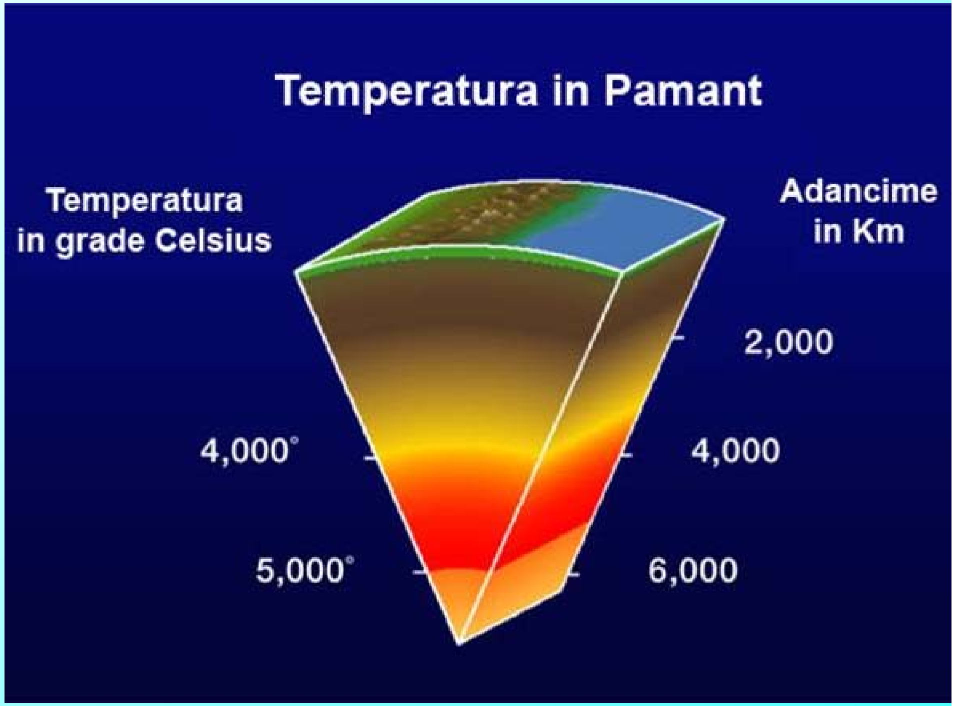


1 – sursă de lumină fluorescentă (backlight)
2,5 – filtre de polarizare
3 – cristale lichide
4 – placă cu tranzistori
6 – lumina

4. Unde elastice

4.11. Undele seismice. Straturile Pământului





Compoziție: 34,6 % Fier; 29,5 % Oxigen; 15,2 % Siliciu; 12,7 % Magneziu; 2,4 % Nichel; 1,9 % Sulf; 0,05 % Titan

4. Unde elastice

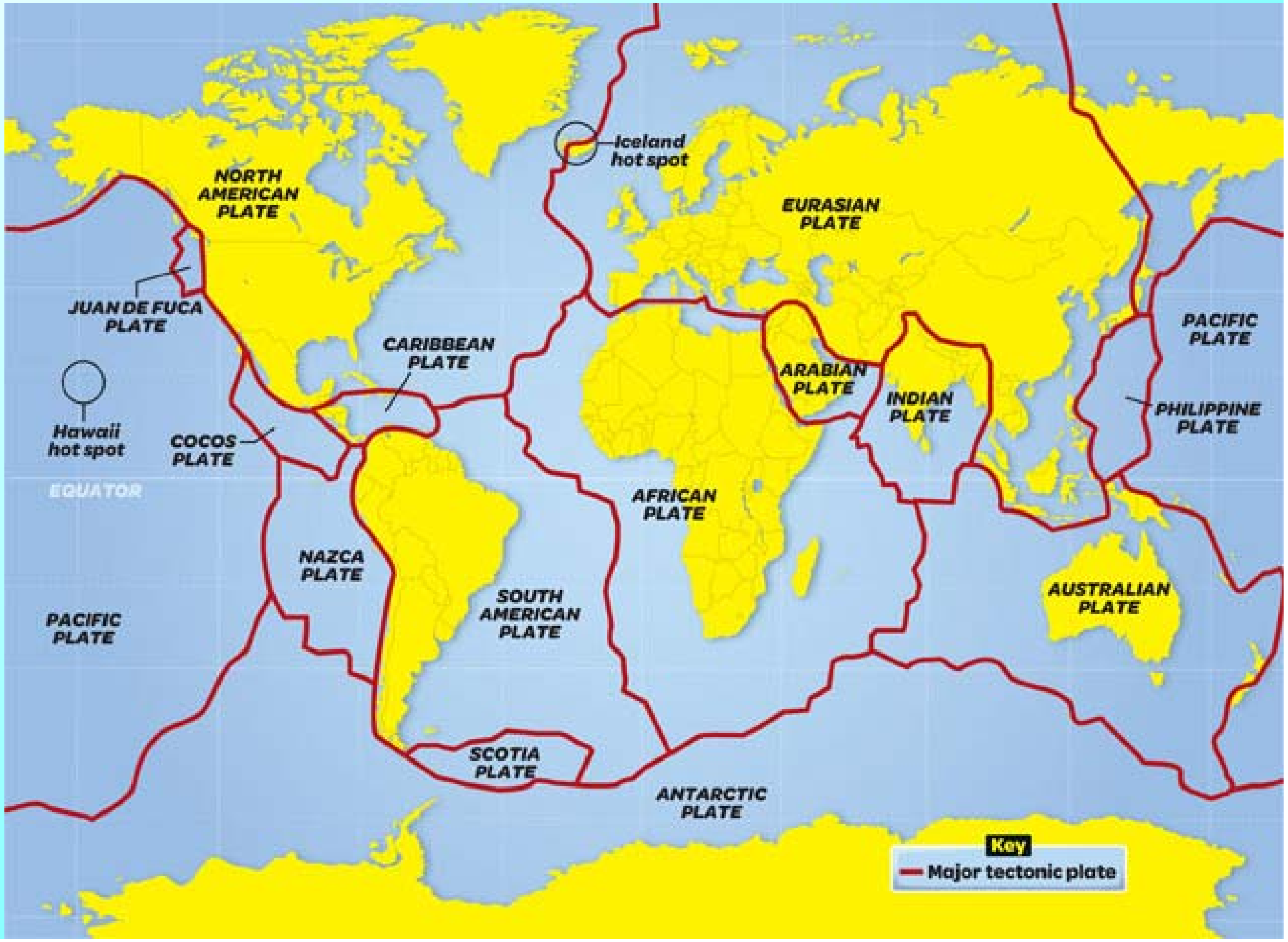
4.11. Undele seismice.Pământul

Scoarța este împărțită în 7 plăci tectonice principale.

Plăci tectonice - o bucată foarte mare a scoarței terestre, totalitatea acestora formând suprafața Terrei

Plăci principale:

- nord-americană,
- sud- americană,
- antarctică,
- eurasica,
- africană,
- indiano-australiană,
- Pacificului.

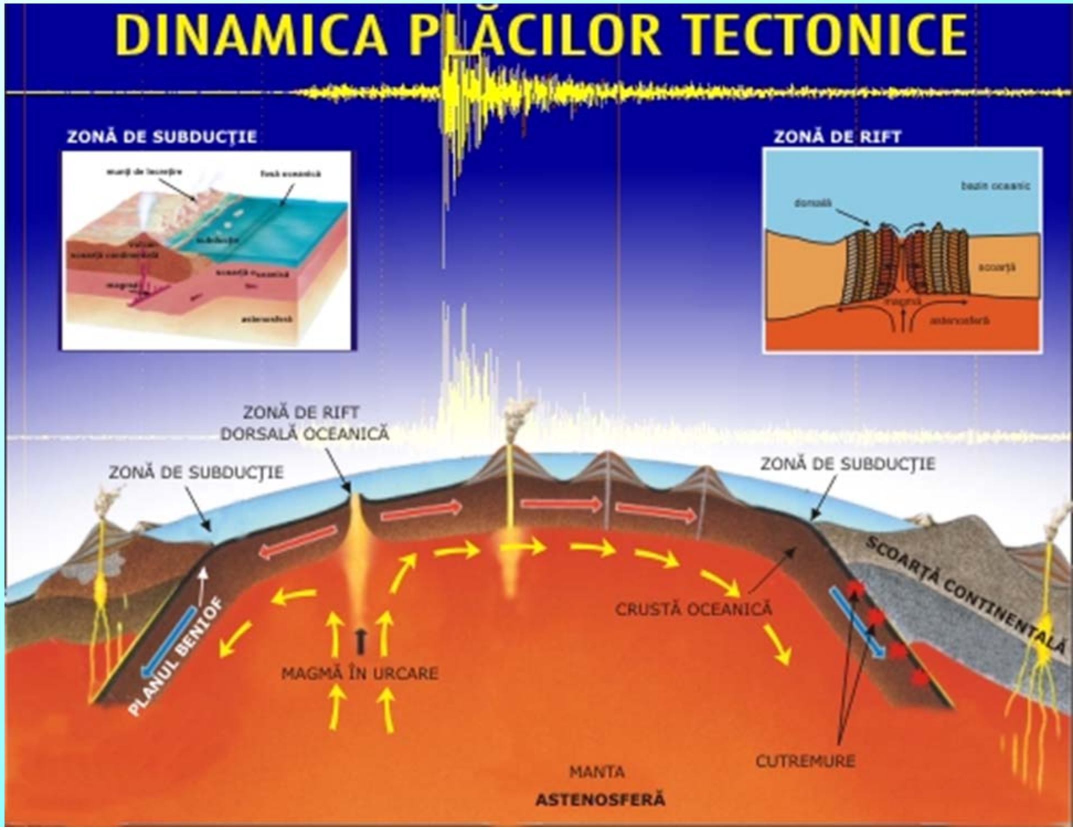


4. Unde elastice

4.11. Undele seismice.Pământul

Procese:

- *extindere (expansiune, rift)*– 2 plăci se îndepărtează una de alta și se creează o nouă scoarță din magma de dedesubt ieșită la suprafață;
- *Încălecare (subducție)* – 2 plăci se ciocnesc și marginea uneia se cufundă sub cealaltă, topindu-se în interiorul mantalei.



4. Unde elastice

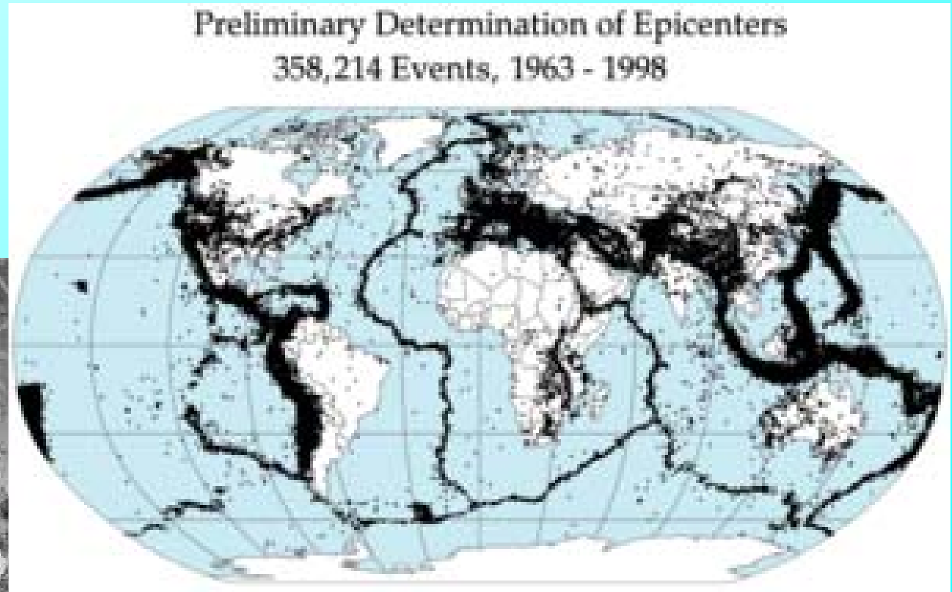
4.11. Undele seismice.Pământul

Cutremur: mișcarea bruscă a scoarței prin care se degajă energia acumulată în plăcile tectonice.

Focar (hipocentru): locul în care se produce cutremurul

Epicentru: punct pe suprafața Pământului, situat deasupra focarului unui cutremur de pământ, unde intensitatea zguduirii este maximă

Falie: ruptura care desparte două blocuri ale Scoarței Pământului

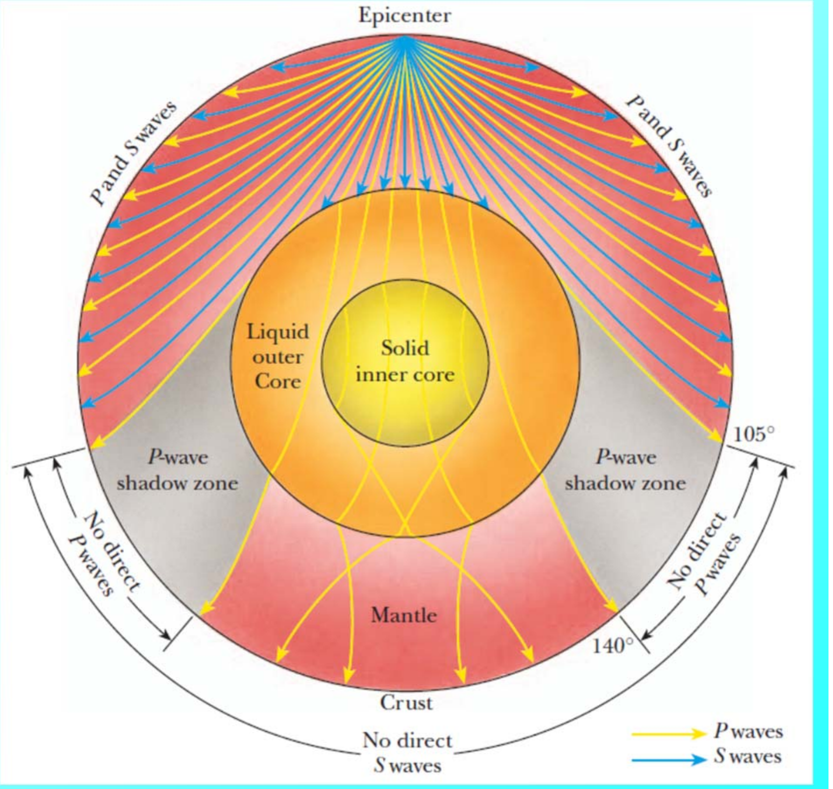


4. Unde elastice

4.11. Undele seismice

Undele seismice sunt unde elastice care pot traversa un mediu fără a se modifica. Unda elastică pune în mişcare particulele mediului, prin care se propagă, acestea intrând pe rând în oscilaţie, adică devin oscilatori. Cu alte cuvinte, unda transmite energia de la un oscilator la altul.

- Frecvenţa este cuprinsă între 15-25 Hz.
- Amplitudinea: între 10^{-6} şi câţiva metri.
- Energia totală poate ajunge până la 10^{18} J.



Vibrațiile unui seism se propagă în toate direcțiile. Se disting două tipuri de unde, *undele de volum* care traversează Pământul și *undele de suprafață* care se propagă la suprafața Pământului.

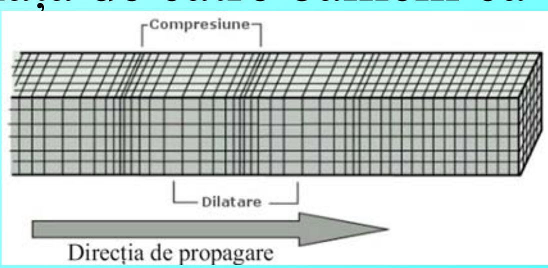
4. Unde elastice

4.11. Undele seismice

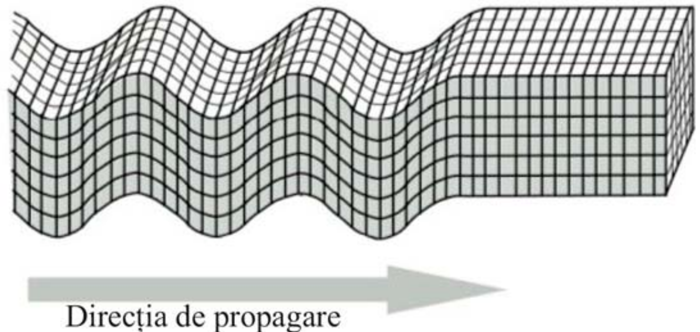
Undele de volum se clasifică în:

<u>Undele P</u> sau undele primare numite și unde de compresie sau longitudinale.

- Deplasarea pământului care acompaniază trecerea undelor P se face prin dilatații și compresii succesive.
- Se deplasează paralel cu direcția de propagare a undei.
- Sunt cele mai rapide (7,4 km/s) și sunt primele înregistrate de seismografe.
- Sunt responsabile de zgomotul pe care îl putem auzi la începutul unui cutremur.
- Nu sunt periculoase pentru clădiri deoarece transportă aproximativ 20% din energia cutremurului.
- amplitudinea acestei unde este direct proporțională cu magnitudinea (energia cutremurului.
- Sunt percepute la suprafață de către oameni ca un mic șoc în plan vertical



4. Unde elastice



4.11. Undele seismice

Undele de volum se clasifică în:

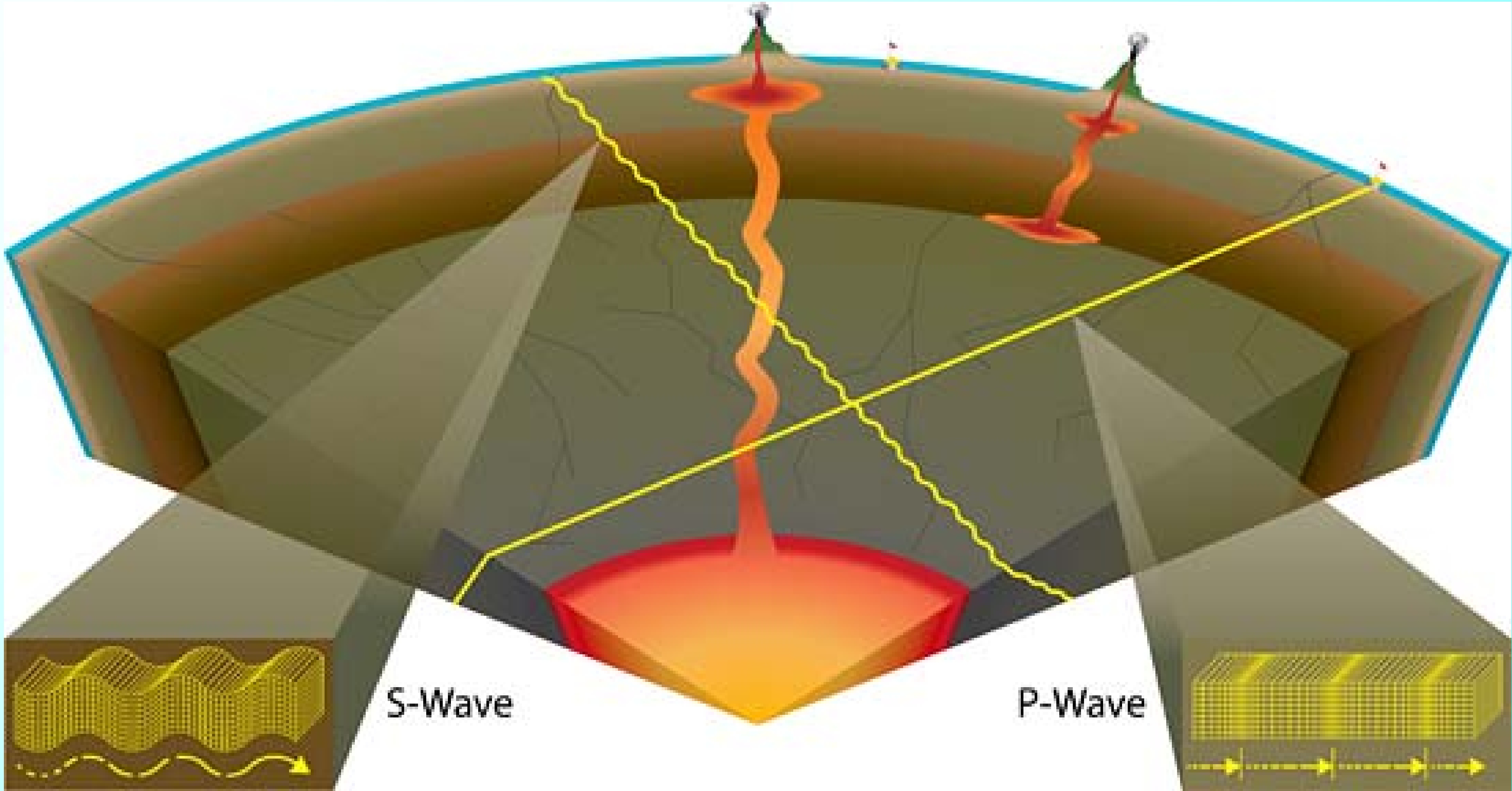
Undele S sau undele secundare numite și undele de tăiere sau transversale.

- Determină mișcarea particulelor solului perpendicular pe direcţia de propagare.
- Sunt resimțite la suprafață sub forma unei mișcări de forfecare, de balans în plan orizontal.
- Sunt periculoase, deoarece transportă aproximativ 80% din energia totală a cutremurului.
- Determină distrugeri proporționale cu magnitudinea cutremurului și cu durata de oscilaţie.
- Clădirile cad datorită intrării în rezonanță a frecvenței proprii de oscilație a structurii clădirii cu frecvența undei incidente, în acest caz efectul distructiv fiind puternic amplificat
- Nu se propagă în medii lichide, ele sunt de obicei oprite de nucleul extern al Pământului. Viteza lor este de 6,3 km/s. Pe seismograf apar după undele P.

4. Unde elastice

4.11. Undele seismice

Undele de volum se clasifică în: Unde S şi unde P



4. Unde elastice

4.11. Undele seismice

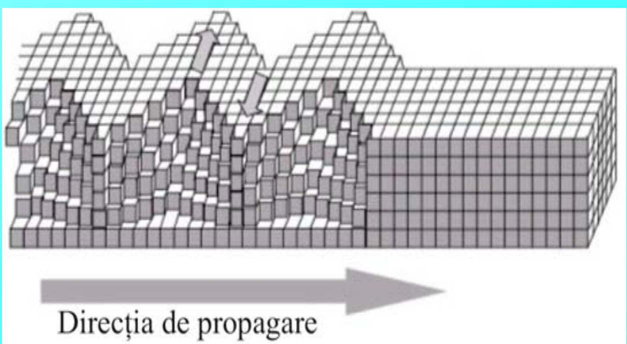
Undele de suprafaţă - se propagă de-a lungul suprafeţei Pământului (u=3,7 km/s).

Ele sunt mai puțin rapide ca undele de volum, dar amplitudinea lor este de obicei mai mare.

Se clasifică:

Unda Love (L):

- descoperită în 1911 de A.E.H. Love, care a elaborat un model matematic pentru undă.
- provoacă o mişcare pe orizontală, determinând distrugerea fundaţiei clădirilor.
- este cea mai rapidă undă de suprafaţă , v ≈ 4 km/s
- este o undă transversală



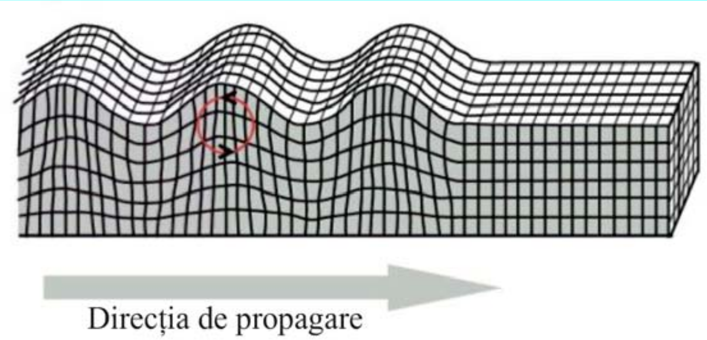
4. Unde elastice

4.11. Undele seismice

Undele de suprafaţă - se propagă de-a lungul suprafeţei Pământului

Unda Rayleigh (R):

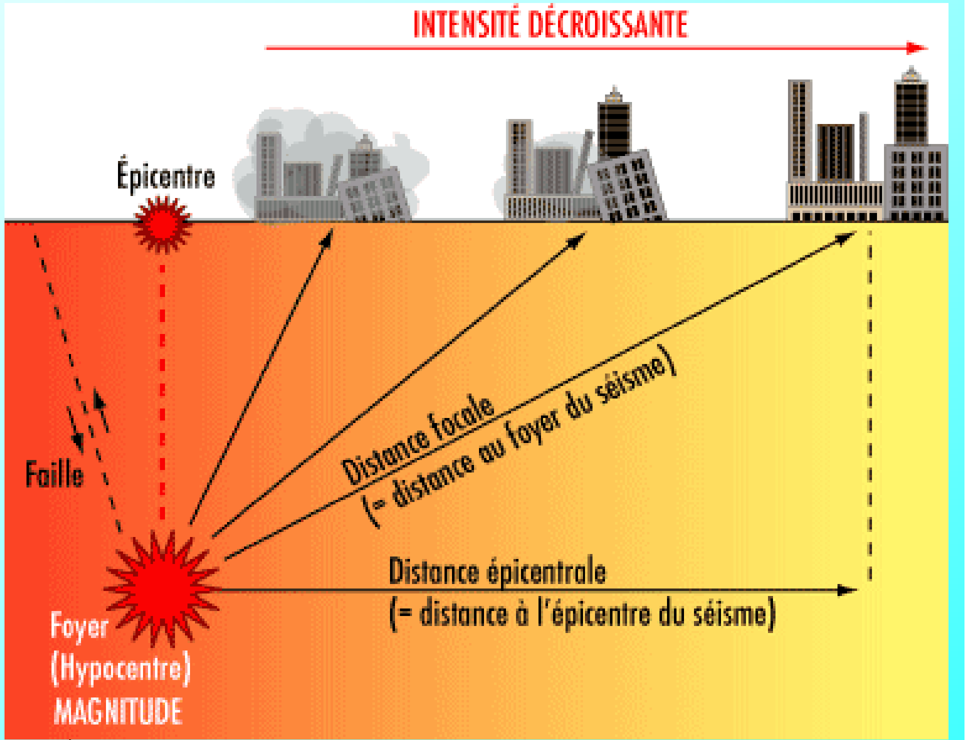
- descoperită matematic în 1885 de J.S.Rayleigh.
- are o mişcare atât pe orizontală cât şi pe verticală.
- este generată de interacţiunea dintre unda P şi unda S la suprafaţa pămâtului
- amplitudinea undei scade exponenţial cu adâncimea.
- este o undă de joasă frecvenţă.



4. Unde elastice

4.11. Undele seismice. Tipuri de cutremure:

Cutremur: mişcarea bruscă a scoarţei prin care se degajă energia acumulată în plăcile tectonice.



- ❑ *După distanţa faţă de epicentru*
  - ➢ apropiate
  - ➢ îndepărtate
  - ➢ foarte îndepărtate

- ❑ *După adâncimea focarului*
  - ➢ cutremure de suprafaţă ($0 \le h < 70$ km)
  - ➢ cutremure de adâncime intermediară ($70 \text{ km} \le h < 300$ km)
  - ➢ cutremure de adâncime ($300 \text{ km} \le h \le 700$ km)

4. Unde elastice

4.11. Undele seismice

Scări seismice

- *Scara Mercalli*
  - măsoară intensitatea seismelor prin examinarea efectelor produse de acestea asupra oamenilor şi a scoarţei terestre.
  - intensitatea seismului variază între 1 – 12 grade
- *Scara Richter*
  - măsoară magnitudinea seismului
  - magnitudinea este dată de energia eliberată în focar şi transmisă sub formă de unde seismice
  - magnitudinea (m) variază între 1 – 9 grade

$$\mathbf{m = 1{,}3 + 0{,}6\, I_0}$$

I_0 – intensitatea măsurată pe scara Mercalli

4. Unde elastice

4.11. Undele seismice

Scări seismice

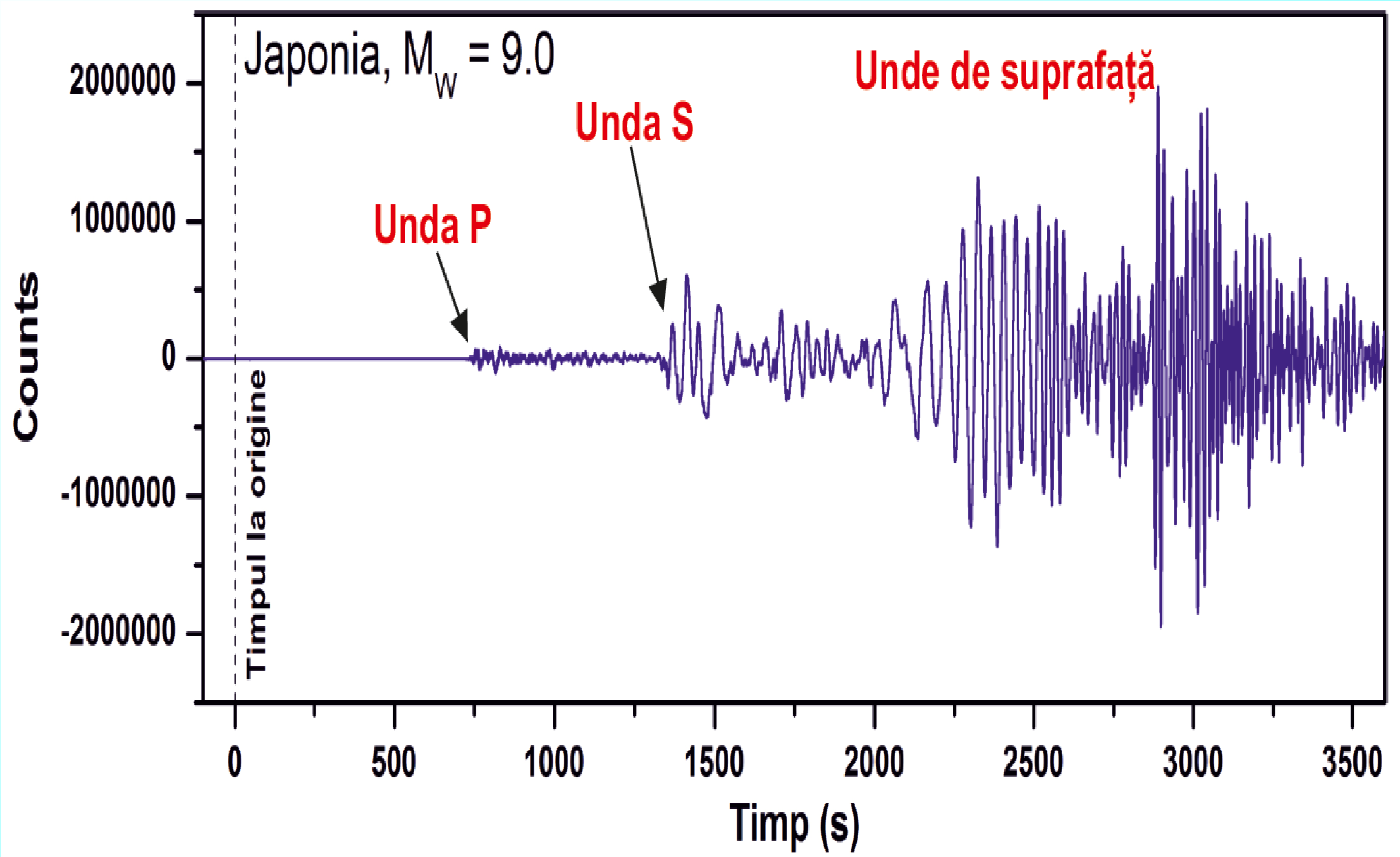
Legătura dintre scara Mercalli şi scara Richter:

Scara Richter	2	3	4	5	6	7	8	9
Scara Mercalli	I-II	III	IV-V	VI-VII	VII-VIII	IX-X	XI	XII
Grad	Nu se simte- slab	Perceptibil	Moderat	Puternic	Destructiv	Violent – Intens	Extrem	Catastrofic

4. Unde elastice

4.11. Undele seismice

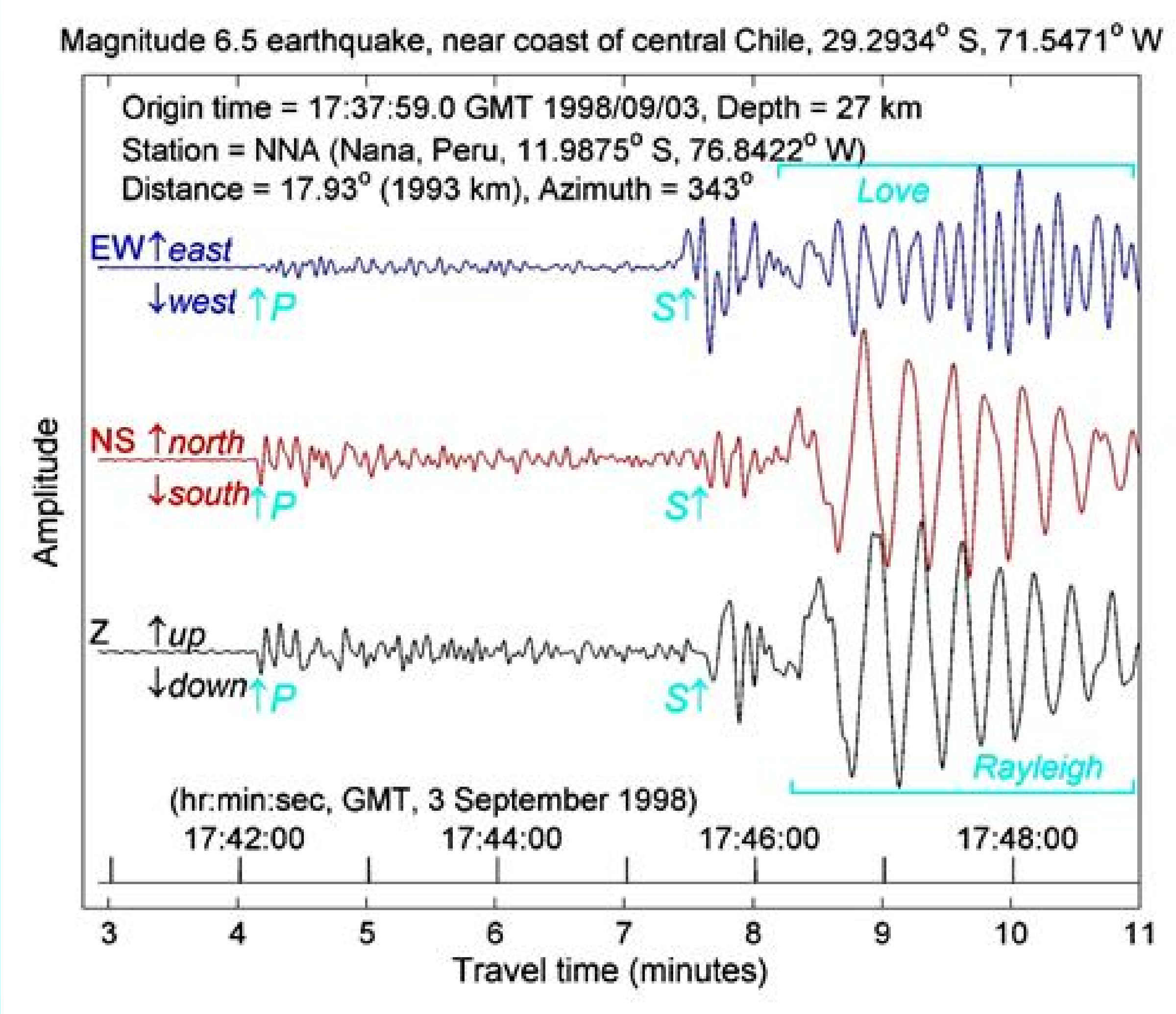
Înregistrarea unui cutremur din Japonia, cu magnitudinea de 9 grade



4. Unde elastice

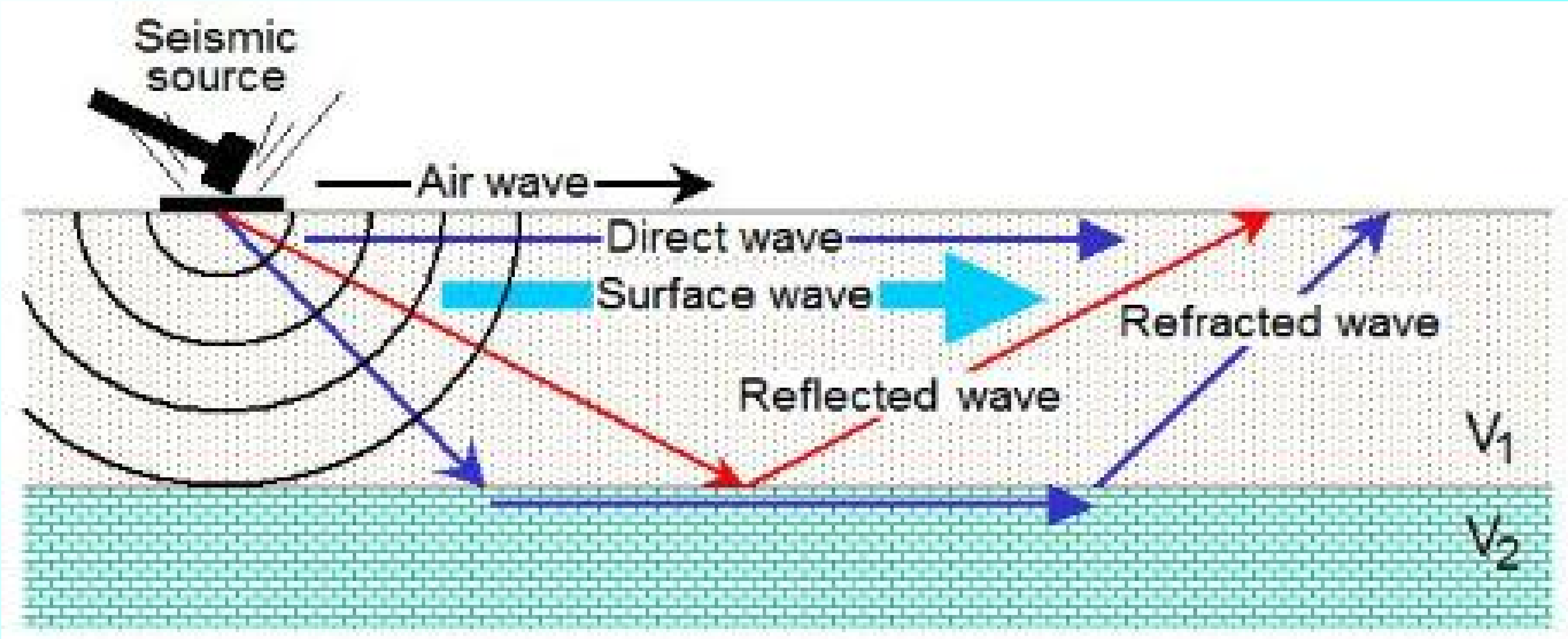
4.11. Undele seismice

Înregistrarea unui cutremur din Chile, cu magnitudinea de 6.5 grade



4. Unde elastice

4.11. Undele seismice



După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- Definească unda staționară şi să scrie ecuaţia;
- Definească ventrele şi nodurile pentru cele două cazuri studiate când $Z_2<Z_1$ si $Z_2>Z_1$.
- Definească interferenta undelor.
- Definească interfranja.
- Definească difracţia undelor.
- Definească principiul lui Huygens.
- Definească undele seismice
- Clasifice undele seismice

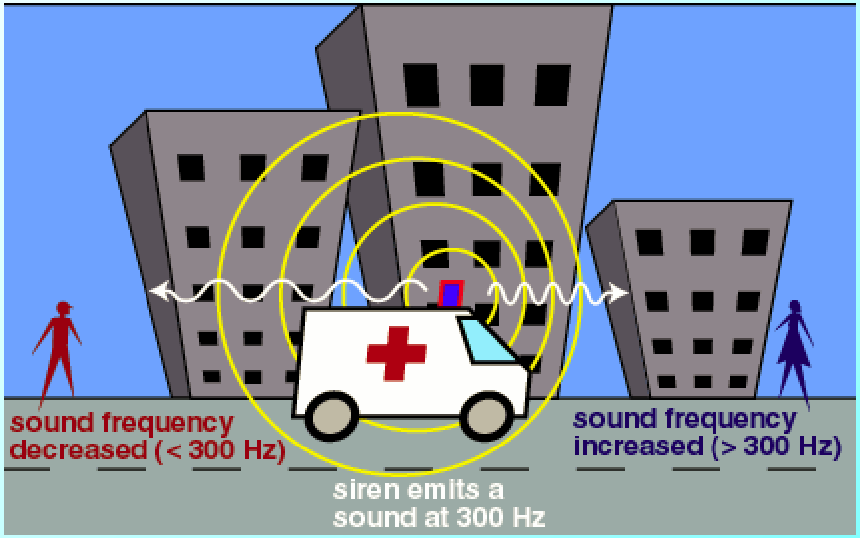
BIBLIOGRAFIE

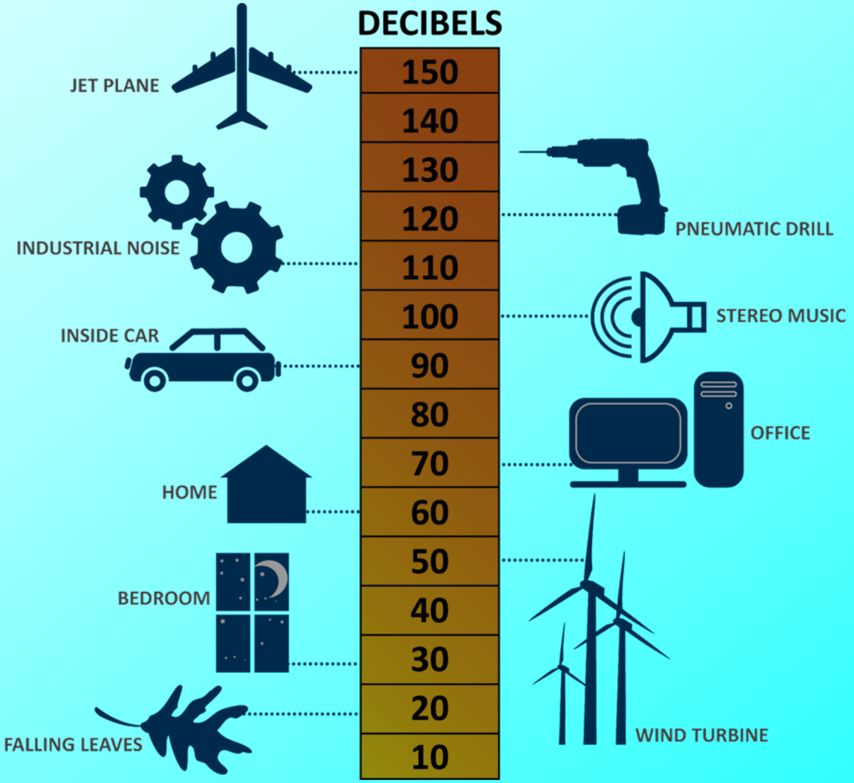
- **Fizica,** F. W.Sears, Zemansky , H. D.Young, Ed. Didactica si Pedagogica, 1983;
- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, F. Barvinschi, Ed. Orizonturi Universitare, 2016;
- **Elemente de fizică generală,** D. Popov, I. Damian, Ed. Politehnica, 2014;
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Ed. Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008
- **PHYSICS for Scientist and Engineers with Modern Physics** – Seventh Edition, R. Serway, J. Jewett, ed. Thomson Brooks/Cole, 2008.
- **Sears & Zemansky's University Physics: with Modern Physics**, 13th Edition, H. Young, R. Freedman, ed. Pearson, 2012

FIZICĂ PENTRU INGINERI

Prezentat de

Trif-Tordai Delia





Universitatea Politehnica Timişoara, România

CURSUL 10&11

2020-2021

4. Unde elastice

4.11. Viteza de faza si de grup. Dispersia undelor

5. Acustică

5.1. Noţiuni generale

5.2. Legea Weber-Fechner

5.3. Intensitatea sonoră

5.4. Intensitatea auditivă

5.5. Efectul Doppler

4. Unde elastice

4.11. Viteza de faza si viteza de grup. Dispersia undelor

Viteza undei monocromatice plane coincide cu viteza de deplasare a fazei si de aceea se numește *viteza de fază*.

$$\varphi(\vec{r},t) = \omega t - \vec{k}\vec{r} = const \Rightarrow d\varphi = \omega \cdot \mathrm{d}t - \vec{k} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\Rightarrow viteza\ de\ fază:\ \vec{v}_f = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\omega}{k}\vec{n}$$

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = u$$

Undele reale nu sunt monocromatice, ci prezintă un spectru oarecare de frecvențe (mai multe frecvente apropiate ca valoare).

O suprapunere de mai multe unde monocromatice plane cu frecvențe foarte apropiate se numește *grup de unde* sau *pachet de unde*, iar viteza cu care se propagă grupul de unde se numește *viteza de grup*.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(uk)}{dk} = u + k\frac{du}{dk} = u - \lambda\frac{du}{d\lambda}$$

4. Unde elastice

4.11. Viteza de faza si viteza de grup. Dispersia undelor

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(uk)}{dk} = u + k\frac{du}{dk} = u - \lambda\frac{du}{d\lambda}$$

- Daca $\frac{du}{d\lambda} > \lambda$, adica undele mai lungi se propagă cu viteză mai mare decât undele mai scurte, *dispersia* se numește *normală* și $v_g < u$

- Daca $\frac{du}{d\lambda} < \lambda$, adică dacă undele cu λ mai mare se propagă mai încet decât cele mai scurte, atunci *dispersia* se numește *anormală* și $v_g > u$

5. Acustică. Unde sonore

5.1. Noţiuni generale

Acustica - ramura fizicii care se ocupa cu studiul producerii, propagării si recepționarii undelor acustice, precum si cu studiul efectelor produse în urma interacțiunilor acestora cu mediul prin care se propaga .

Daca undele elastice, care se propaga printr-un mediu solid, lichid sau gazos au frecvente cuprinse între limitele 16 Hz si 20 kHz, ele produc o senzație auditiva si se numesc **unde sonore** sau **sunete**.

Undele elastice cu frecvente sub 16 Hz se numesc **unde infrasonore** sau **infrasunete**, iar undele elastice cu frecventa peste 20 kHz se numesc **unde ultrasonore** sau **ultrasunete**.

Fiecare sunet real este o suprapunere de oscilații armonice (conform cu teoremele Fourier) cu un set determinat de frecvente, set numit **spectru acustic**.

- sunet pur sau sunet tonal sau ton muzical.
- sunet atonal sau zgomot.

5. Acustică. Unde sonore

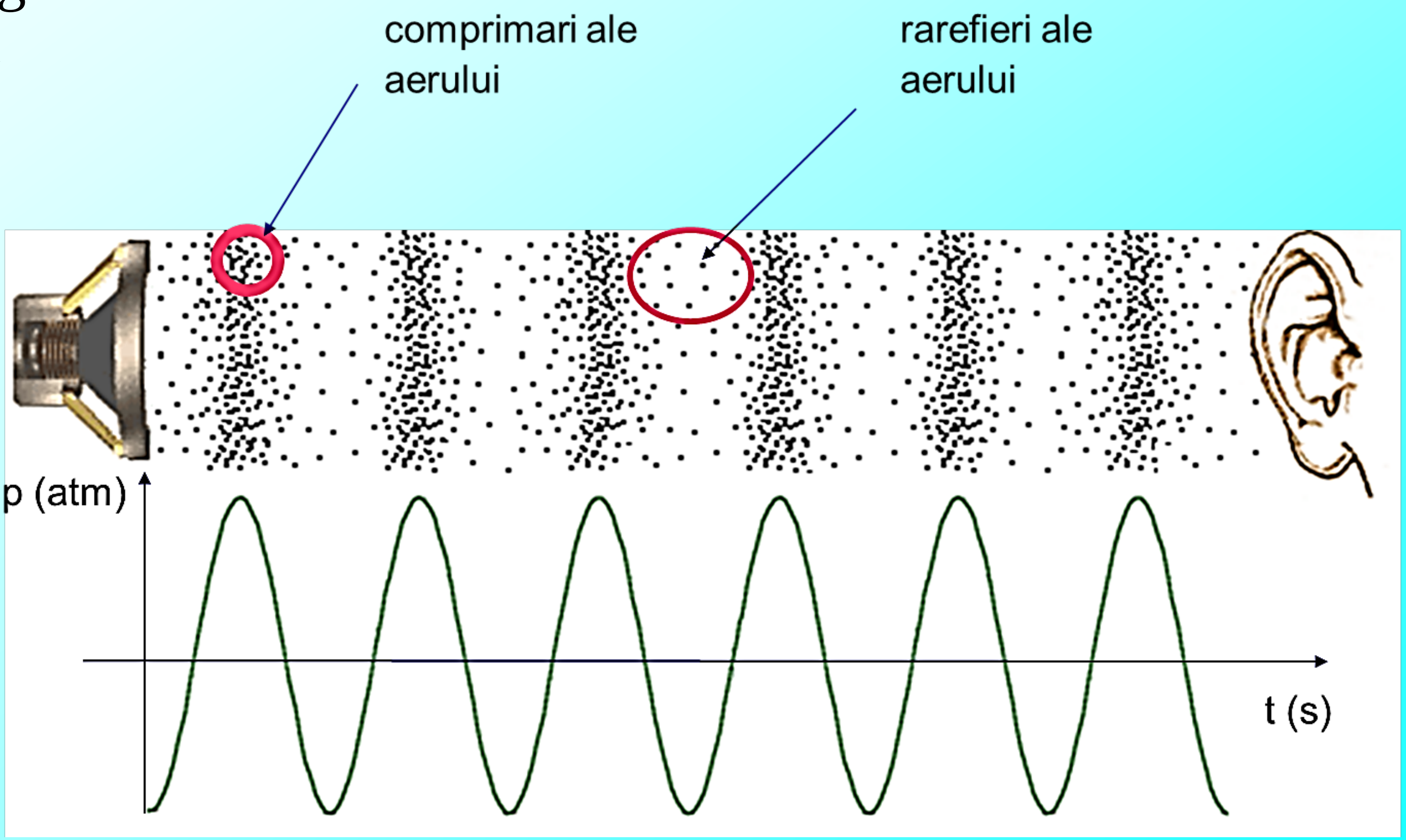
5.1. Noţiuni generale

Aceste vibrații pot fi descrise ca variații ale presiunii aerului.

$p_s = p - p_0 = E\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda} AE \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$ presiunea sonora instantanee

$\varepsilon = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ alungirea relativa

$p_{max} = \frac{2\pi}{\lambda} AE$



5. Acustică. Unde sonore

5.1. Noţiuni generale

Viteza de propagare a undelor sonore în aer depinde de temperatură.

Pentru un domeniu mic de temperatură, ex.: temperatura dintr-o cameră, viteza sunetului este descrisă de ecuația:

$$u = (331\ \text{m/s})\sqrt{1 + \frac{T_C}{273°\text{C}}}$$

Sau

$$u = (331\ \text{m/s}) + 0.6\ \text{m/(s·°C)} \cdot T_C$$

unde 331 m/s este viteza sunetului în aer la 0°C,

T_C este temperatura aerului in °C

Ex: la 20 °C, viteza sunetului este de 343 m/s.

Sunetul are nevoie de 3 secunde pentru a “călători” 1 km.

5. Acustică. Unde sonore

5.1. Noţiuni generale

Viteza de propagare a undelor sonore în diferite materiale

	Material	Densitate material (kg/m^3)	Viteza sunetului (m/s)
Gaz	Aer (20 °C)	1.204	343
	Heliu (20 °C)	0.178	999
	Hidrogen (20 °C)	0,089	1330
Lichid	Mercur (20 °C)	13690	1451
	Apă (0 °C)	999.84	1402
	Apă (20 °C)	997.05	1482
	Apă(100 °C)	961.89	1543
Solid	Aluminiu	2700	6420
	Plumb	11360	1960
	Otel	7750	5941

$$u = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

5. Acustică. Unde sonore

5.1. Noţiuni generale

Sunetul poate fi analizat:

- ***fizic:*** fenomen obiectiv prin care se intelege vibratia mecanica a particulelor de aer, capabila sa produca senzatii auditive;
- ***fiziologic***: fenomen subiectiv prin care se intelege senzatia receptionata si localizata de organul auditiv, produsa de anumite oscilatii mecanice.

În functie de senzatia auditiva produsa, sunetele se deosebesc dupa: **înaltime, timbru si intensitate** (tărie).

a) Înaltimea este calitatea sunetelor de a fi mai "înalte" (mai ascutite) sau mai "joase" (mai "grave"), dupa cum frecventa lor este mai înalta sau mai joasa.

b) Timbrul este proprietatea sunetelor prin care pot fi deosebite doua sunete de aceeasi intensitate si înaltime, dar produse de surse sonore diferite. Timbrul se datoreaza faptului ca majoritatea sunetelor reprezinta superpozitii de tonuri pure, cu amplitudini diferite si cu frecvente care sunt multiplii întregi ai unei frecvente minime si care, de obicei are intensitatea cea mai mare, numita frecventa fundamentala υ.

5. Acustică. Unde sonore

5.1. Noţiuni generale

Frecventele care sunt multiplii frecventei fundamentale se numesc armonice. Sunetul compus are ecuația: $y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$

Timbrul sunetelor se datorează tocmai prezentei sau absentei anumitor armonice din spectrul sunetelor provenind de la surse sonore diferite.

c) Intensitatea sau tăria: urechea poate percepe un sunet de o anumita frecventa numai dacă acesta are o intensitate cuprinsa între o valoare minima, numita **prag de audibilitate** (P.A.) si o intensitate maxima, numita **pragul senzatiei dureroase** (P.S.D.).

În afara acestor limite, care depind de frecventa, sunetul nu poate fi perceput ca atare, fie pentru ca este prea slab, fie pentru ca este prea puternic.

Se deosebesc doua tipuri de intensitati:

- **Intensitatea sonora**
- **Intensitatea auditiva**

5. Acustică. Unde sonore

5.2. Legea Weber-Fechner

Exprimă relația de legătură dintre senzația de audibilitate S și intensitatea I a sunetului.

Dacă notăm cu dS variația senzației de audibilitate, iar cu dI variația intensității undei, atunci legea se scrie sub forma:

$$\mathrm{d}S = K\frac{\mathrm{d}I}{I}$$

Unde k – coeficient de proporționalitate

Așadar, pentru două unde cu intensitatea I_1 și I_2 vom avea senzațiile auditive:

$$S_1 = K\ln I_1 \qquad \text{și} \qquad S_2 = K\ln I_2$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = K\ln\frac{I_2}{I_1}$$

5. Acustică. Unde sonore

5.3. Intensitatea sunetului. **Intensitatea sonoră**

Intensitatea sonoră (I_S) = energia transportată în unitatea de timp pe unitatea de suprafaţă de către unda sonoră.

$$I_S = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 \rho u = \frac{1}{2}\frac{p_{max}^2}{\rho u}$$

Prag de audibilitate = valoare minimă a intensității unui sunet de o anumită frecvență, care poate fi percepută de om; este legată de energia minimă pe care unda trebuie să o transporte până la ureche şi să o cedeze acesteia pentru a putea activa mecanismul său. Valoarea intensității sonore la pragul de audibilitate $\mathbf{I_{s0}=10^{-12}\ W/m^2}$.

Prag de durere = valoare maximă a intensităţii unui sunet de o anumită frecvenţă, care, dacă este depăşită, va produce senzaţia de durere la nivelul urechii. Valoarea intensităţii sonore la pragul de durere este $I_{s,max}=100\ W/m^2$

Nivel sonor (datorită faptului că există un domeniu extrem de larg al intensităţii sonore între pragul de durere şi cel de audibilitate, s-a convenit definirea si utilizarea nivelului sonor) este definit

$$N_s = log\frac{I_s}{I_{s0}}$$

5. Acustică. Unde sonore

5.3. Intensitatea sunetului. **Intensitatea sonoră**

I_s - *intensitatea sonoră a sunetului considerat*
I_{s0}- *intensitatea sonoră a sunetului de referință*

Frecventa de1000 Hz a fost luată drept frecventa standard.

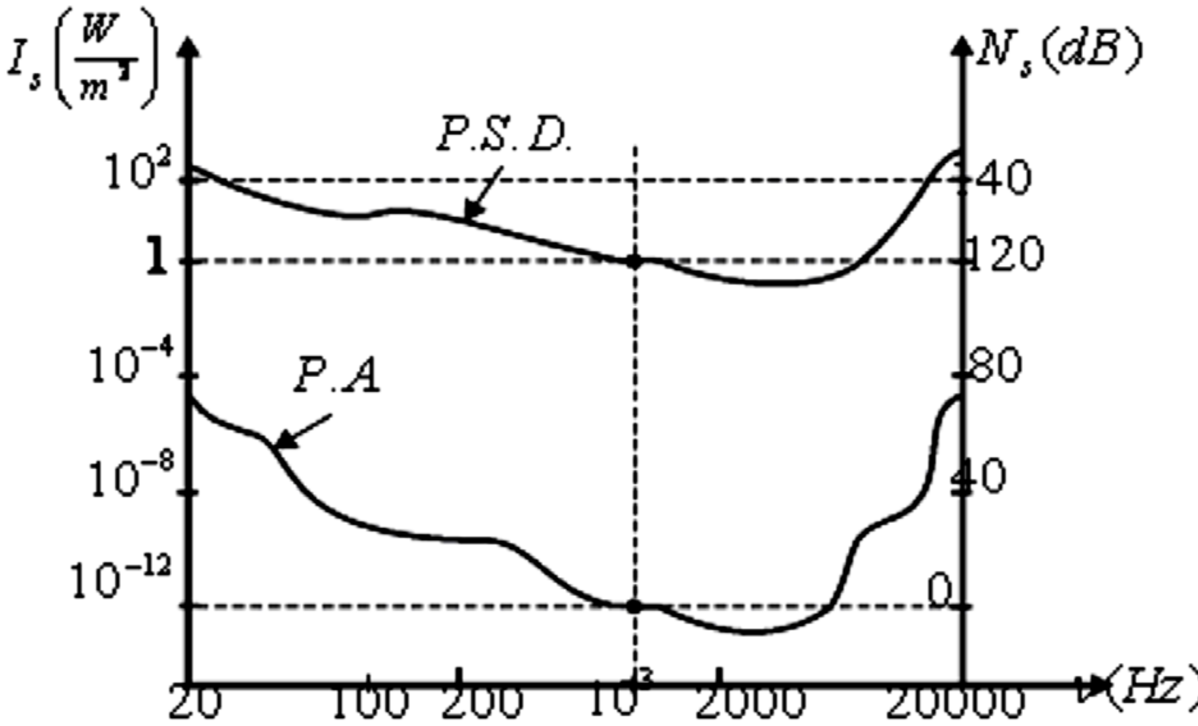
Unitatea de măsură a nivelului sonor este **Belul (B)**, în practică folosindu-se însă un submultiplu al său şi anume **decibelul (dB)**

$$N_s(dB) = 10lg\,\frac{I_s}{I_{s0}}$$

Intervalul nivelului sonor al sunetelor percepute de urechea umana se întinde între valorile de la 0 la 140 dB

5. Acustică. Unde sonore

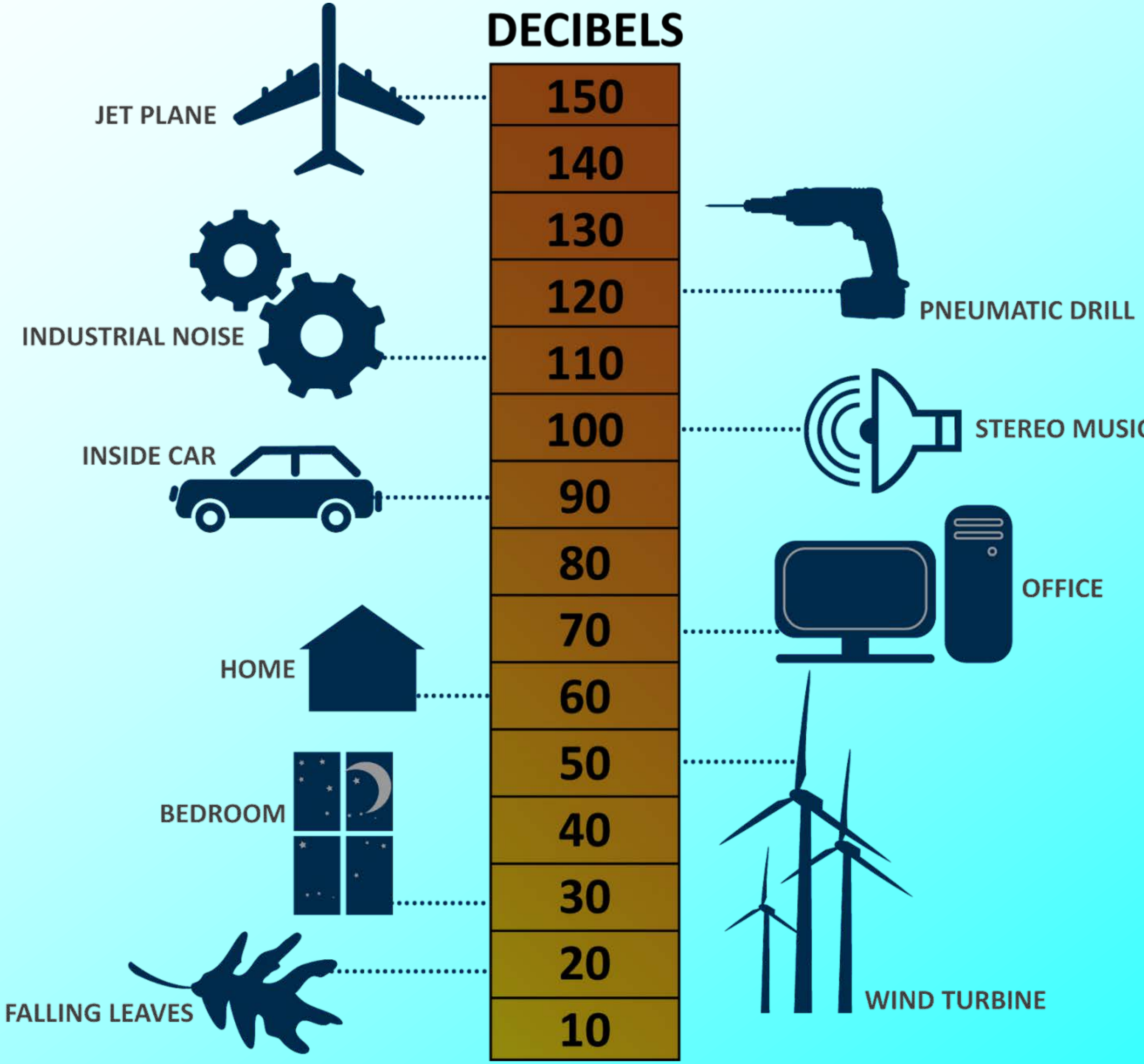
5.3. Intensitatea sunetului. Intensitatea sonora



Sursa de unde sonore	Nivelul sonor, dB
Foşnetul produs de căderea unei frunze	10
Tic-tacul unui ceasornic, la distanţa de 1 m	20
Şoapte într-o cameră liniştită	30
Paşi sau vorbire înceată, la distanţa de 1 m	40
Vorbire obişnuită, la distanţa de 1 m	60
Vorbire tare, la distanţa de 5 m	70
Stradă cu trafic automobilistic intens	90
Orchestră mare sau zgomotul unei motociclete	100
Zgomotul produs de un ciocan de nituire	110
Zgomotul motorului de avion, la distanţa de 5 m	120
Zgomotul motorului de avion, la distanţa de 3m	130

5. Acustică. Unde sonore

5.3. Intensitatea sunetului. Intensitatea sonora



5. Acustică. Unde sonore

5.4. Intensitatea sunetului. Intensitatea auditivă

Intensitatea auditiva caracterizează senzaţia auditivă percepută de om. Intensitatea auditivă = intensitatea sonoră a unui sunet care produce aceeași senzație auditivă ca şi sunetul de referință (1000 Hz).

Excitație

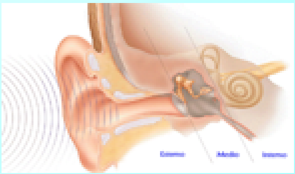
Percepție

Ureche

Intensitate sonoră

(fenomen obiectiv)

I_s



I_a

Intensitate auditivă

(fenomen subiectiv)

Nivelul intensitatii auditive: $N_a = 10 lg \frac{I_a}{I_{a0}}$

Unitatea de măsură: **fon**

Introducerea acestei mărimi a fost necesară din motive fiziologice (urechea umană percepe două sunete care au aceeași intensitate sonoră, dar au frecvențe diferite, ca pe două sunete de tării diferite).

5. Acustică. Unde sonore

5.4. Intensitatea sunetului. Intensitatea auditivă

Nivelul auditiv al unui sunet este de un fon, dacă intensitatea auditivă este de 1,26 ori mai mare decât intensitatea auditivă de referință.

Reverberatia este fenomenul de persistență a unui sunet într-un spatiu închis, după ce sursa încetează să mai emită, datorita reflexiilor multiple pe peretii încaperii, înainte de absorbtia sa totala.

Timpul de reverberatie: determinat de volumul si suprafata încaperii si de coeficientul de absorbtie mediu al acesteia.

5. Acustică. Unde sonore

5.4. Intensitatea sunetului. Intensitatea auditivă. <u>Aplicație</u>

Dacă o sursă este caracterizată de nivelul de intensitate auditivă Na_1=40 foni, atunci 10 surse identice vor avea nivelul auditiv:

$$N_a = 10\lg\frac{I_a}{I_0}$$

1 sursă: $N_{a1} = 10\lg\frac{I_{a1}}{I_0}$

10 surse: $N_{a2} = 10\lg\frac{I_{a2}}{I_0}$

dar $I_{a2} = 10 I_{a1}$

$$\Rightarrow N_{a2} - N_{a1} = 10\lg\frac{I_{a2}}{I_0} - 10\lg\frac{I_{a1}}{I_0}$$

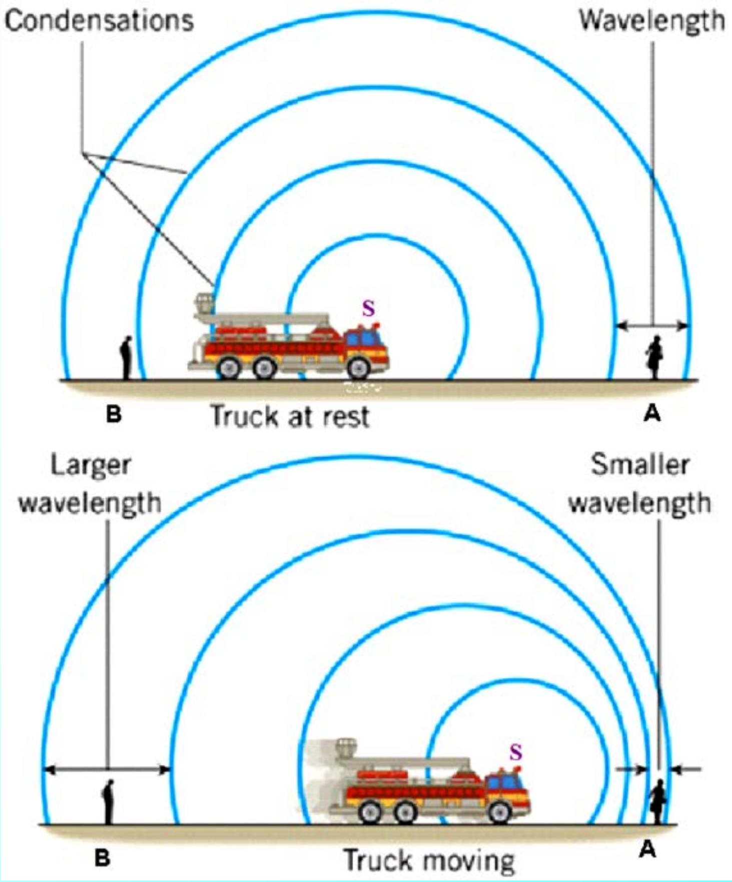
$$N_{a2} = 50 \text{ foni}$$

Se observă că la o creștere de 10 ori a intensității undei sonore, nivelul de intensitate auditiv crește numai cu 25%.

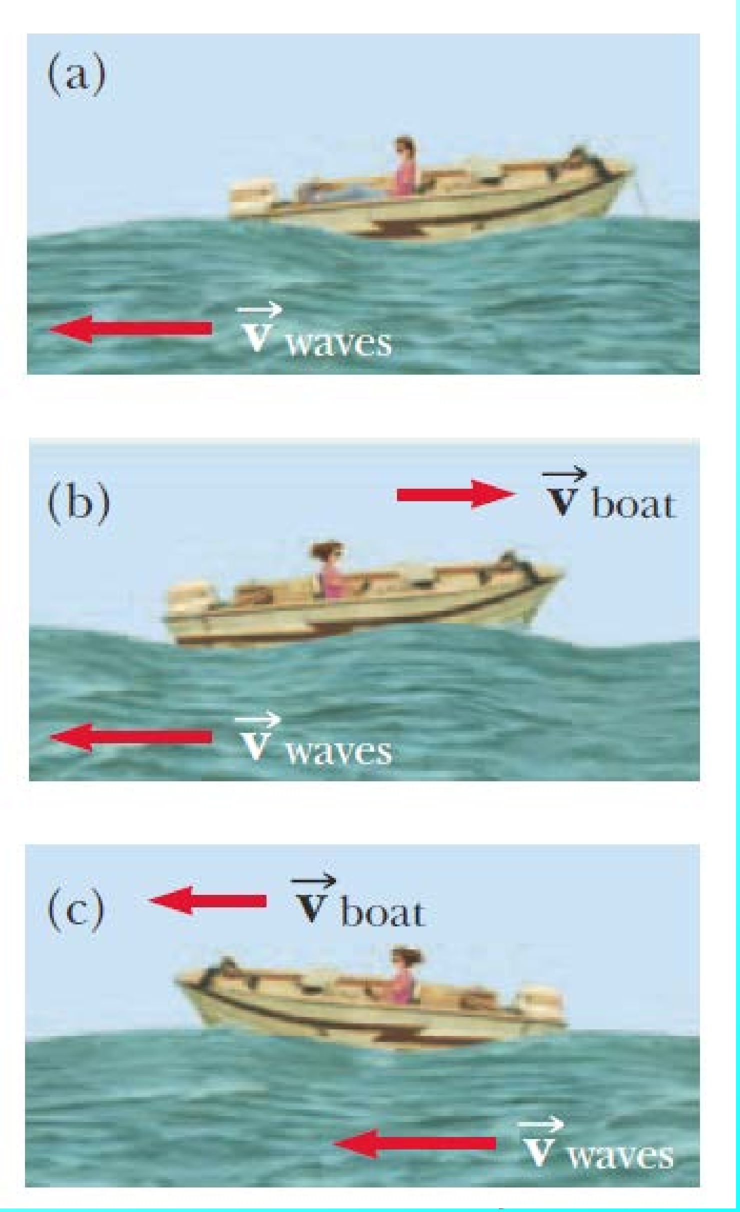
5. Acustică. Unde sonore

5.5. Efectul Doppler

Fenomenul de modificare a frecvenței undei recepționate fată de unda emisă, atunci când sursa și receptorul se afla în mișcare relativă unul fața de celalalt.

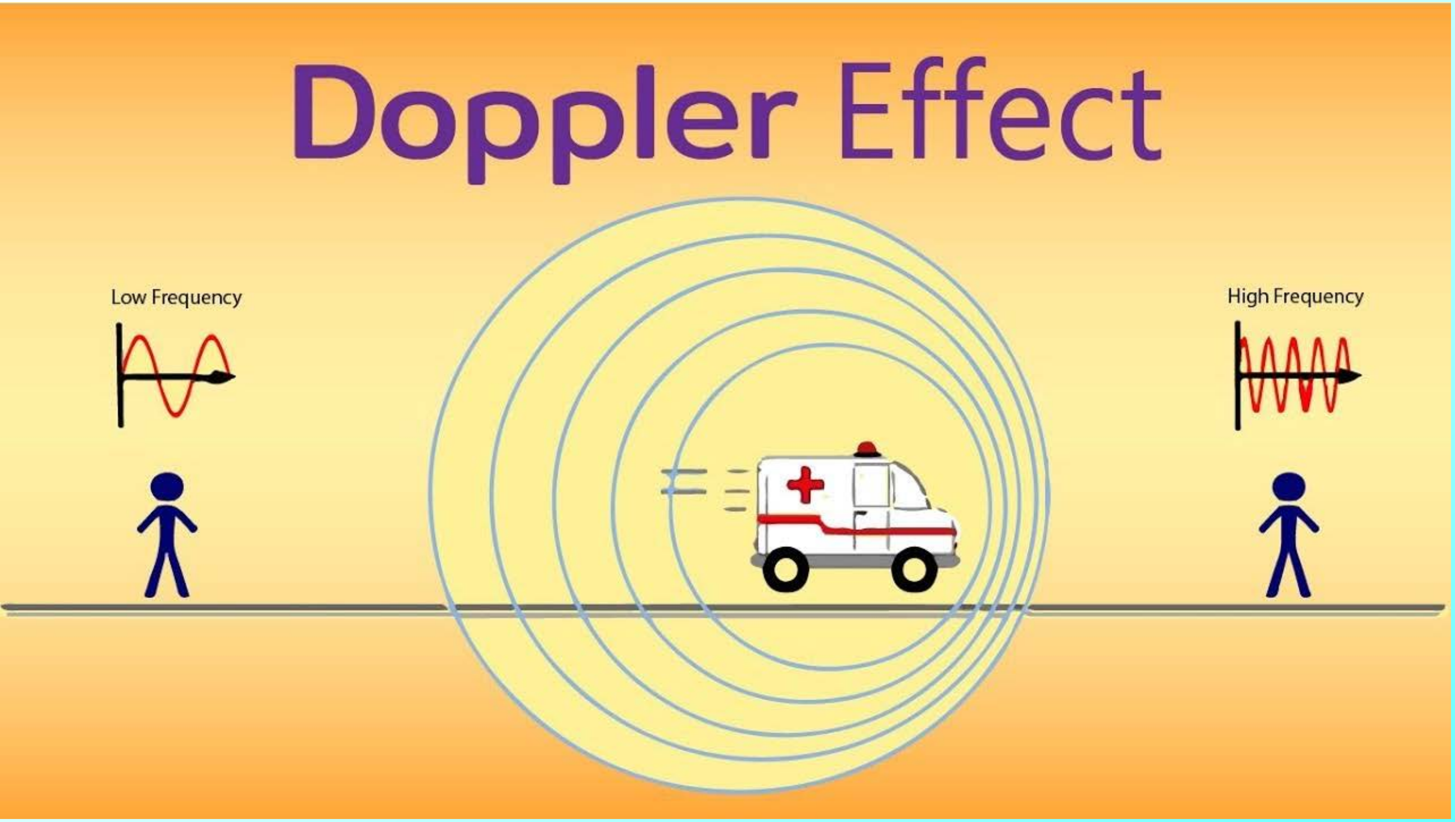


T= 3 s



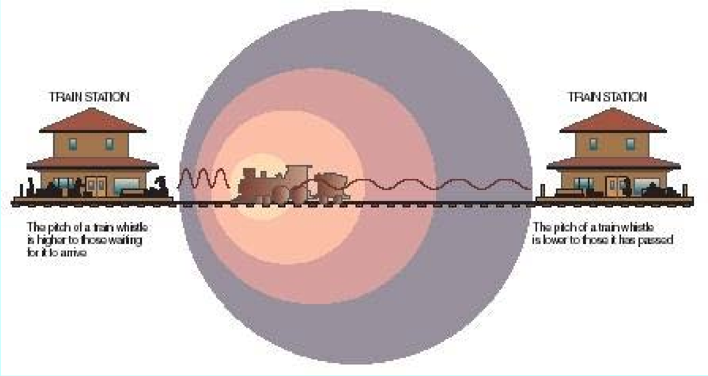
5. Acustică. Unde sonore

5.5. Efectul Doppler



https://www.youtube.com/watch?v=VcwZ3N9anzc
http://www.walter-fendt.de/ph14ro/

5. Acustică. Unde sonore



5.5. Efectul Doppler

a)Receptor fix și sursă mobilă:

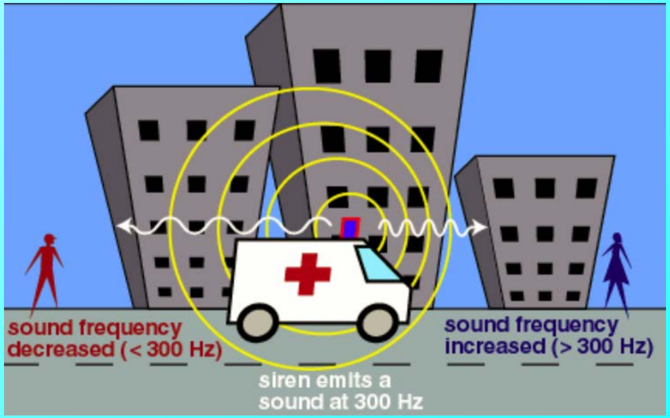
- Apropiere relativă: $\omega = \omega_0 \frac{u}{u - \mathrm{V}_s} \Rightarrow f_R > f_S$
- Depărtare relativă: $\omega = \omega_0 \frac{u}{u + \mathrm{V}_s} \Rightarrow f_R < f_S$

b) Sursă fixă și receptor mobil:

- Apropiere relativă: $\omega = \omega_0 \frac{u + \mathrm{V}_R}{u} \Rightarrow f_R > f_S$
- Depărtare relativă: $\omega = \omega_0 \frac{u - \mathrm{V}_R}{u} \Rightarrow f_R < f_S$

c)Receptor și sursă mobile pe direcția comună:

- Apropiere relativă: $\omega = \omega_0 \frac{u + \mathrm{V}_R}{u - \mathrm{V}_s}$
- Depărtare relativă: $\omega = \omega_0 \frac{u - \mathrm{V}_R}{u + \mathrm{V}_s}$



unde u – viteza de propagare a undelor

v_S si v_R- viteza de deplasare a sursei, respectiv a receptorului

5. Acustică. Unde sonore

5.5. Efectul Doppler .

Formula generala a efectului Doppler care descrie toate situaţiile legate de deplasarea relativă sursă - observator

$$\omega = \omega_0 \frac{u \pm \mathrm{v}_R}{u \mp \mathrm{v}_s}$$

Aplicație:

1. Sirena unui tren care se apropie de o gara emite un sunet cu frecventa de 100 Hz. Care va fi frecventa sunetului receptionat de un calator aflat in gara cunoscand ca viteza trenului este de 5 m/s iar viteza sunetului in aer este de 330 m/s?

5. Acustică. Unde sonore

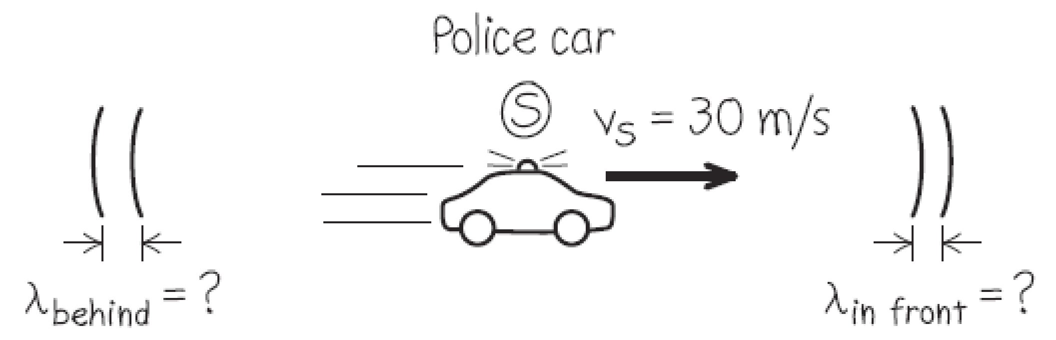
5.5. Efectul Doppler .

Aplicație:

2. Sirena unei mașini de politie emite o undă sinusoidală de frecvența 300 Hz. Viteza sunetului este 340 m/s. a) să se determine lungimea de undă dacă mașina de politie este in repaus. b) dacă mașina se deplasează cu viteza de 30 m/s, atunci să se determine lungimea de undă, în fața și în spatele sirenei.

(a) When the source is at rest,

$$\lambda = \frac{v}{f_S} = \frac{340\ \mathrm{m/s}}{300\ \mathrm{Hz}} = 1.13\ \mathrm{m}$$



b) Când mașina se deplasează

$$\lambda_{\text{behind}} = \frac{v + v_S}{f_S} = \frac{340\ \mathrm{m/s} + 30\ \mathrm{m/s}}{300\ \mathrm{Hz}} = 1.23\ \mathrm{m}$$

$$\lambda_{\text{in front}} = \frac{v - v_S}{f_S} = \frac{340\ \mathrm{m/s} - 30\ \mathrm{m/s}}{300\ \mathrm{Hz}} = 1.03\ \mathrm{m}$$

5. Acustică. Unde sonore

5.6. Aplicaţiile undelor sonore

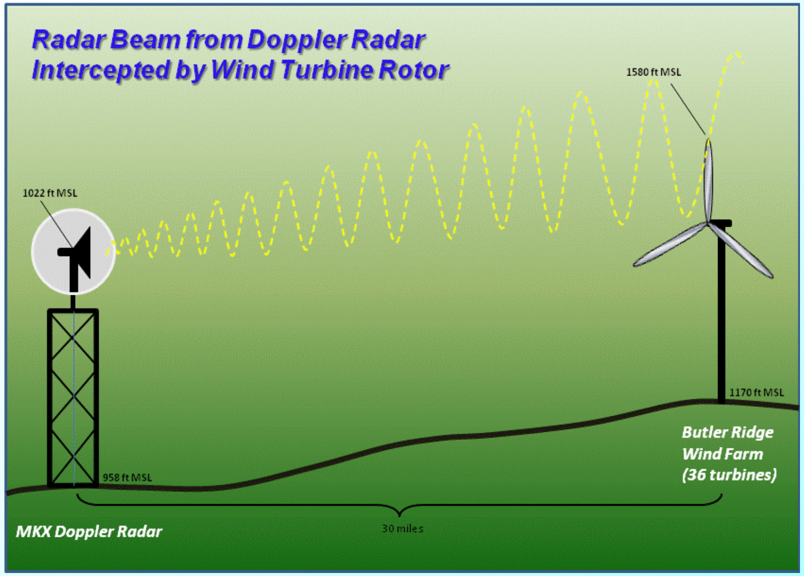
Sonarul

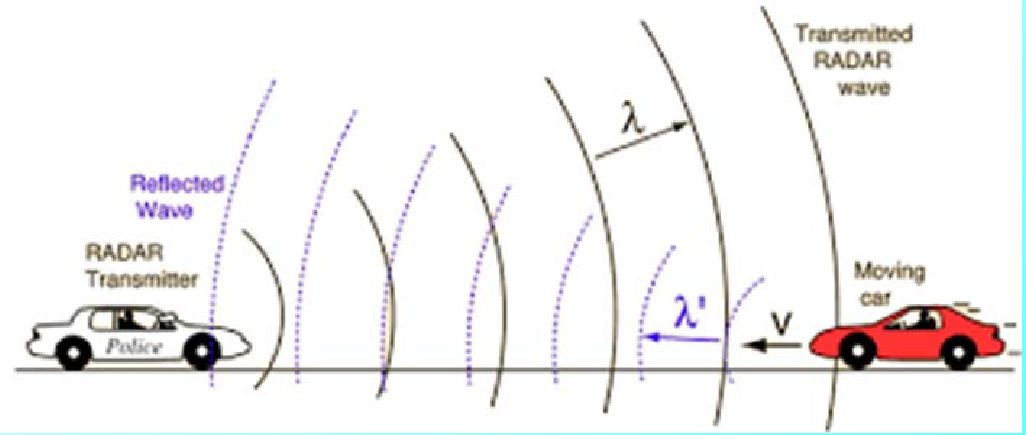
Ecograful

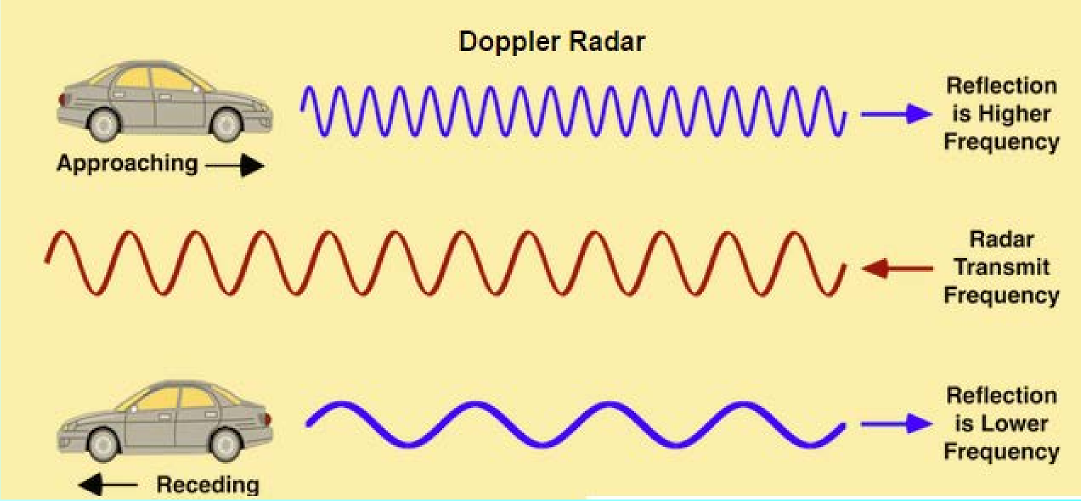
Senzor cu ultrasunete de recunoaşterea amprentelor

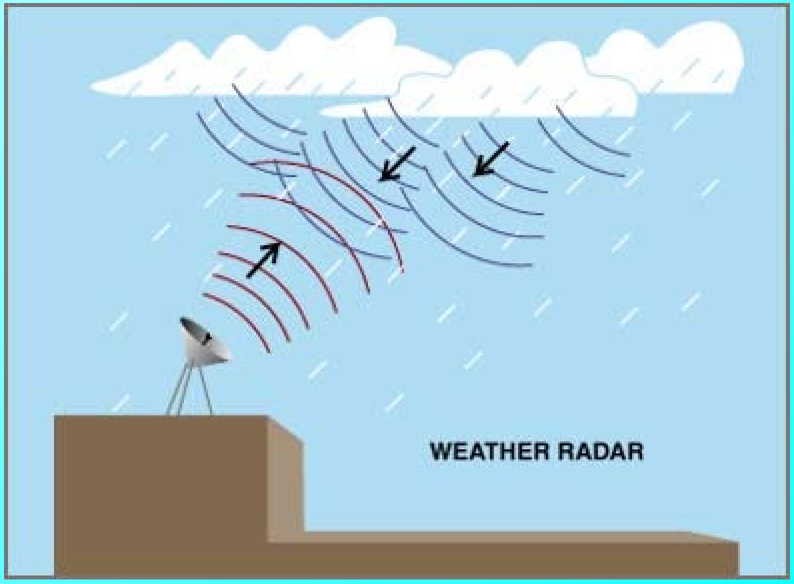
5. Acustică. Unde sonore

5.6. Aplicaţiile undelor sonore. Radare Doppler









După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- ✓ Defineasca viteza de faza si viteza de grup
- ✓ Sa defineasca dispersia undelor
- ✓ Sa defineasca presiunea sonora instantanee
- ✓ Defineasca nivelul de intensitate sonora
- ✓ Defineasca nivelul de intensitate auditiva
- ✓ Definesca pragul de audibilitate
- ✓ Definesca pragul senzatie dureroase
- ✓ Defineasca reverberatia
- ✓ Defineasca efectul Doppler si demonstatia

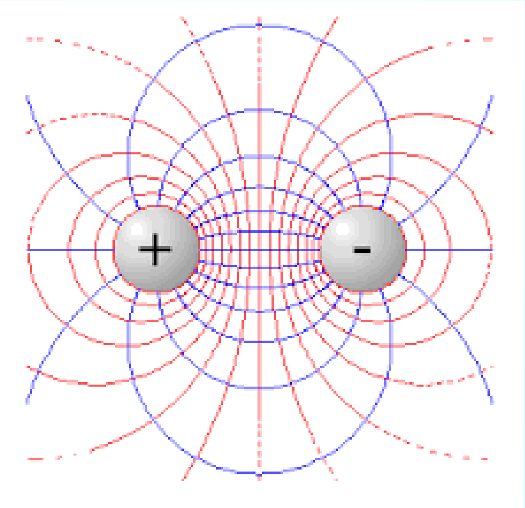
BIBLIOGRAFIE

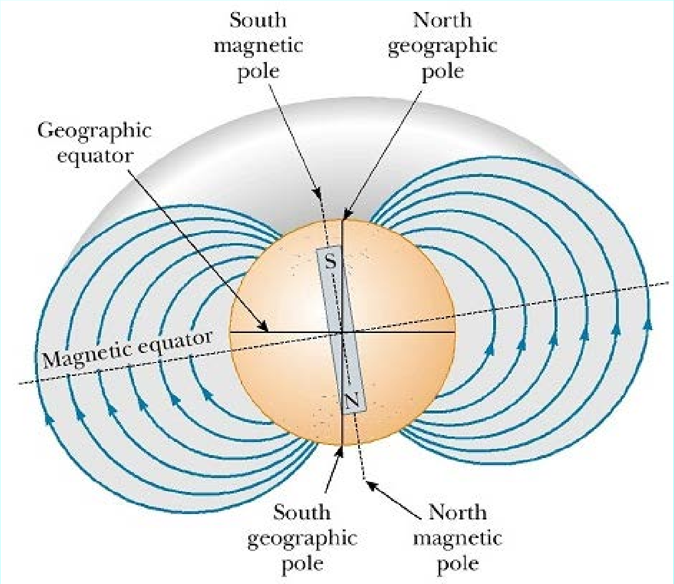
- **Fizica,** F. W.Sears, Zemansky , H. D.Young, Ed. Didactica si Pedagogica, 1983;
- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, F. Barvinschi, Ed. Orizonturi Universitare, 2016;
- **Elemente de fizică generală,** D. Popov, I. Damian, Ed. Politehnica, 2014;
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Ed. Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers -** Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008
- **PHYSICS for Scientist and Engineers with Modern Physics** – Seventh Edition, R. Serway, J. Jewett, ed. Thomson Brooks/Cole, 2008.
- **Sears & Zemansky's University Physics: with Modern Physics**, 13th Edition, H. Young, R. Freedman, ed. Pearson, 2012

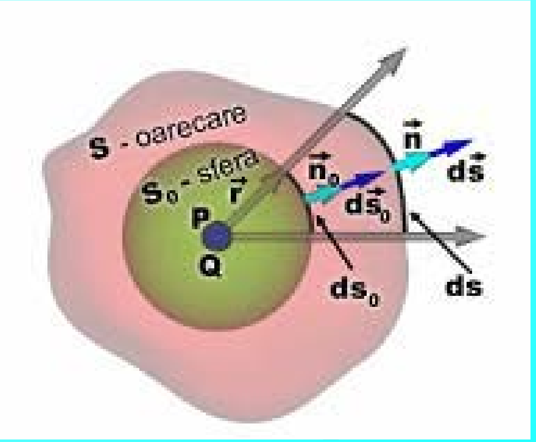
FIZICĂ PENTRU INGINERI

Prezentat de

Trif-Tordai Delia







Universitatea Politehnica Timişoara, România

CURSUL 11&12

2020-2021

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

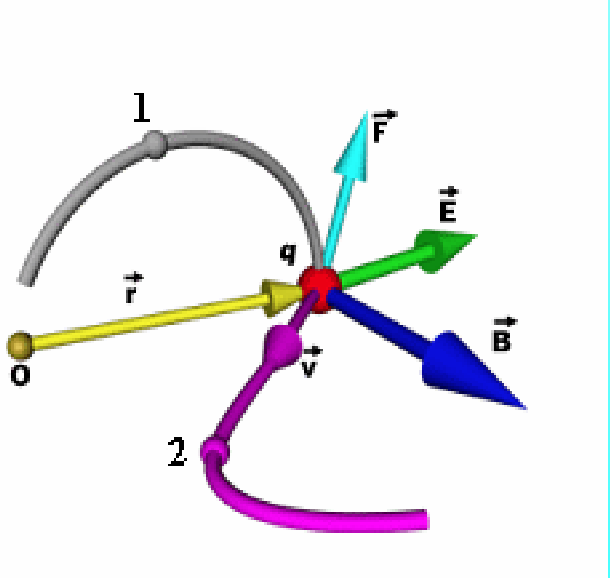
7.2. Curentul electric

7.3. Câmpul magnetic

7. Câmpul electromagnetic

Câmpul electromagnetic = ansamblu de câmpuri electrice și magnetice variabile în timp, care se generează reciproc.

- Intensitatea câmpului electric: $\vec{E}(\vec{r},t)$
- Inducția electrică: $\vec{D}(\vec{r},t)$
- Intensitatea câmpului magnetic: $\vec{H}(\vec{r},t)$
- Inducția magnetică: $\vec{B}(\vec{r},t)$



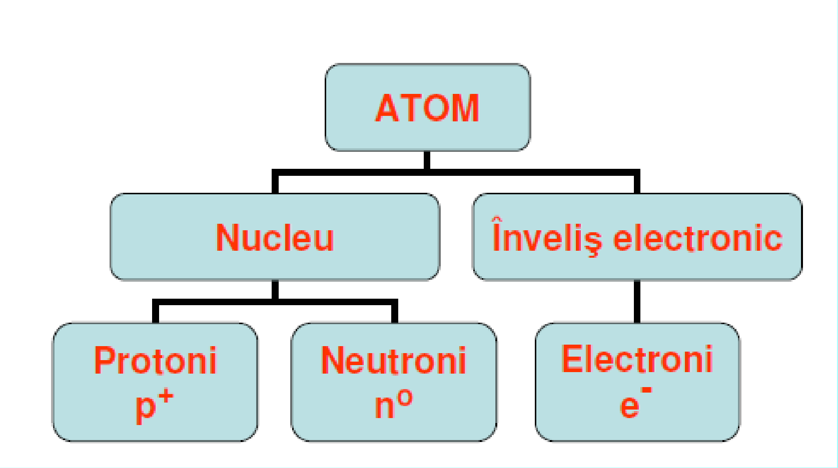
$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

Considerăm o sarcină electrică, q, ce se deplasează cu viteza $\vec{v}$ într-un spaţiu ocupat de un camp electric, de intensitate $\vec{E}$ şi de un câmp magnetic, de inducţie magnetica $\vec{B}$. Asupra sarcinii electrice acţionează o forţă din partea celor două câmpuri:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric. <u>Sarcina electrică</u>. Legea lui Coulomb



Sarcina electrică este o mărime fizică scalară care măsoară starea de electrizare a unui corp.

$$q_{p+} = -q_{e-} = 1.6 \cdot 10^{-19}\, C = e = sarcina\ el.\ elementara$$

Sarcina electrică macroscopică a unui corp, se notează cu *q sau Q*, este suma algebrică a sarcinilor pozitive și negative:

$$q = N_+ e + (-e) N_- = e(N_+ - N_-) = N \cdot e$$

Unde *N* este un număr întreg

[q] = 1 C (Coulomb)

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Sarcina electrică. Legea lui Coulomb

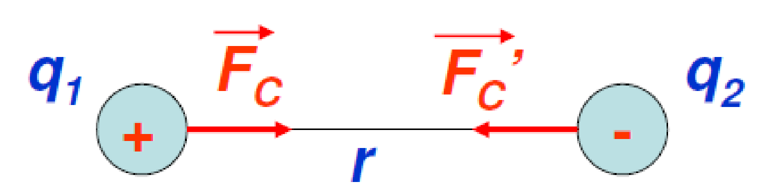
Legea conservării sarcinii electrice: într-un sistem izolat, suma algebrică a sarcinilor electrice rămâne constantă.

Sarcinile de același semn se resping; cele de semne contrare se atrag.

Legea lui Coulomb

Forța de interacțiune dintre două sarcini punctiforme acționează de-a lungul dreptei ce unește cele două sarcini este direct proporțională cu produsul sarcinilor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



ε- permitivitatea absolută a mediului, exprimată in F/m

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

ε_0- permitivitatea vidului

ε_r- permitivitatea relativă a mediului

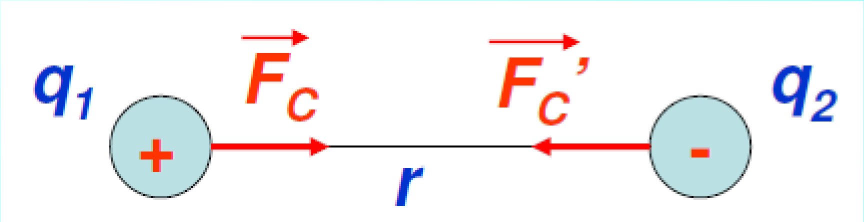
$$\varepsilon_0 = 8{,}85\,10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$$

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Sarcina electrică. __Legea lui Coulomb__

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$



Dacă sarcinile electrice se află în vid, atunci $\varepsilon_r = 1$, notăm:

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\ \frac{N\,m^2}{C^2}$$

unde K este o constantă de proporționalitate.

- Interacțiunea dintre corpurile încărcate cu sarcini electrice se realizează prin intermediul câmpului electric.
- Pentru descrierea câmpului electric se utilizează două mărimi fizice: intensitatea câmpului electric și potențialul câmpului electric.

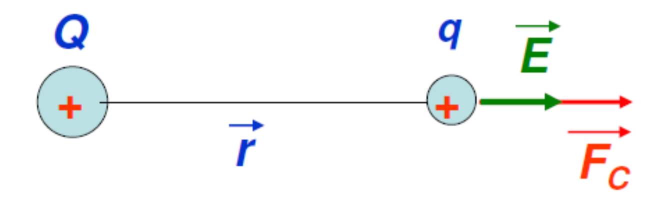
7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

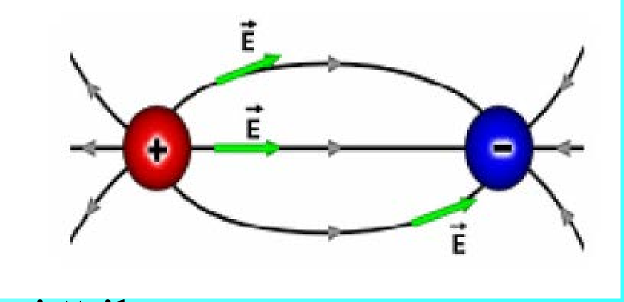
<u>Intensitatea câmpului electric</u>

➢ *<u>Intensitatea câmpului electric</u>* într-un punct al câmpului este egală cu raportul dintre forţa cu care acţionează câmpul asupra unui corp de probă, aflat în acel punct, şi sarcina electrică a corpului de probă.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_C}{q} \;;\; [\vec{E}] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}$$



$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



Într-un punct în care sunt prezente mai multe câmpuri, câmpul rezultant se obține calculând suma vectorială a intensităților.

Prin convenţie:

- ✓ Sensul liniilor de câmp electric este de la sarcinile pozitive către cele negative;
- ✓ Intensitatea câmpului electric este orientată de la sarcinile pozitive către cele negative.

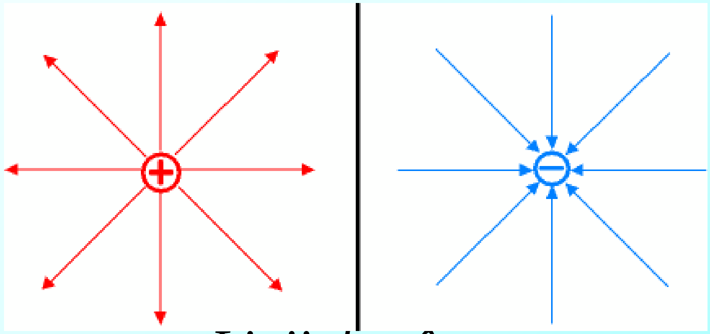
7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

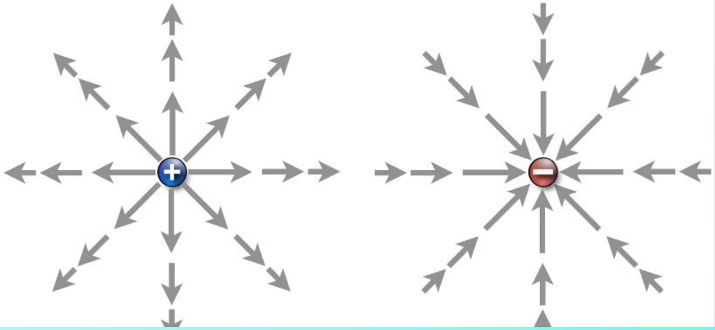
<u>Intensitatea câmpului electric</u>

Câmpurile vectoriale se pot reprezenta atât prin vectorii de câmp cât şi prin liniile de câmp.

Liniile de câmp sunt curbe continue care au proprietatea că în orice punct al lor vectorii de câmp corespunzători sunt tangenţi la curbă. Liniile de câmp nu se intersectează între ele.



Linii de câmp



Vectori de câmp

Într-un *câmp electrostatic* fiecare linie de câmp este o linie continuă care începe pe o sarcină pozitivă şi se sfârşeşte pe o sarcină negativă.

<u>Principiul superpoziţiei:</u> Dacă într-un punct din spațiu câmpul electric este generat de un ansamblu de sarcini electrice punctiforme $Q_{1,}$ Q_2,…Q_n, atunci:

$$\vec{E}_{rez} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots\vec{E}_n$$

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Intensitatea câmpului electric

<u>Aplicaţie 1</u>:

Când bornele unei baterii de acumulatori de 100 V sunt conectate la două plăci paralele de dimensiuni mari, aflate la distanţa de 1 cm una de alta, în spaţiul dintre plăci câmpul este aproape uniform, iar intensitatea câmpului electric E este de 10^4 N·C^{-1}, orientată vertical, în sus. Să se calculeze forţa care acţionează asupra electronului în acest câmp şi să se compare cu greutatea electronului.

<u>*Raspuns:*</u>

Masa electronului: m=9,1·10^{-31} kg; sarcina electronului: q=e=1,6·10^{-19} C

$$F_C = eE = (1{,}6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}) \cdot (10^4\mathrm{N{\cdot}C}^{-1}) = 1{,}6 \cdot 10^{-15}\mathrm{N}$$

$$F_g = mg = (9{,}1 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}) \cdot \left(9{,}8\mathrm{m{\cdot}s}^{-2}\right) = 8{,}9 \cdot 10^{-30}\mathrm{N}$$

Raportul dintre cele două forţe este: $\frac{1{,}6\cdot10^{-15}\mathrm{N}}{8{,}9\cdot10^{-30}\mathrm{N}} = 1{,}8 \cdot 10^{14}$

Obs.: Forta gravitaţională este neglijabilă

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Intensitatea câmpului electric

Aplicaţie 2:

Ce viteză va avea electronul din aplicaţia 1, după ce parcurge distanţa de 1 cm, dacă a pornit din repaus? Care va fi energia lui cinetică? Cât timp i-a trebuit pentru pentru a parcurge distanța?

Răspuns: Forţa este constantă, prin urmare electronul se mişcă cu o acceleraţie constantă:

$$a=\frac{F_c}{m}=\frac{eE}{m}=\frac{1{,}6\cdot 10^{-15}\mathrm{N}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\mathrm{kg}}=1{,}8\cdot 10^{15}\mathrm{m\cdot s}^{-2}$$

După ce parcurge 1 cm, viteza lui este:

$$v=\sqrt{2ax}=6\cdot 10^{6}\mathrm{m\cdot s}^{-1}$$

Energia lui cinetică este: $\frac{1}{2}mv^2=1{,}6\cdot 10^{-17}\mathrm{J}$

Timpul este: $t=\frac{v}{a}=3{,}3\cdot 10^{-9}\mathrm{s}$

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

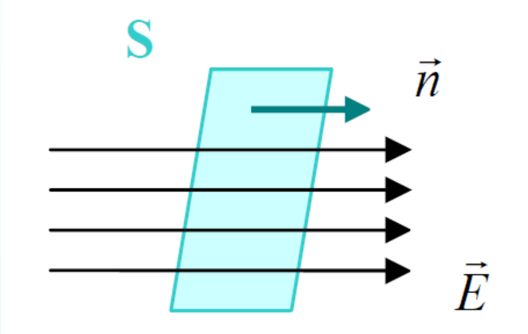
Fluxul electric

Convenție: Numărul liniilor de câmp ce străbat unitatea de suprafața este egal cu intensitatea câmpului electric din locul în care este situată suprafața.

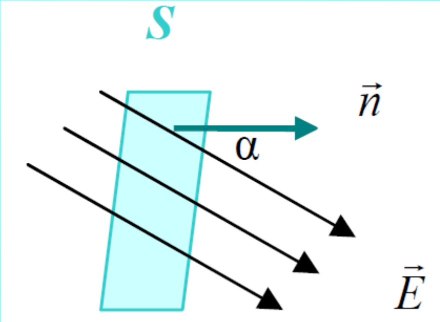
O mărime importantă în studiul câmpului electric este *fluxul câmpului electric*.

Def. Fluxul electric prin suprafața S: $\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{S}$ $[\Phi_e] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

Considerăm un câmp electric uniform de intensitate $\vec{E}$ ce străbate o suprafață plană S, perpendiculară pe liniile de câmp (vectorul normal la suprafață, $\vec{n}$, este paralel cu $\vec{E}$).



$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES$$



$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} S = ES \cos\alpha$$

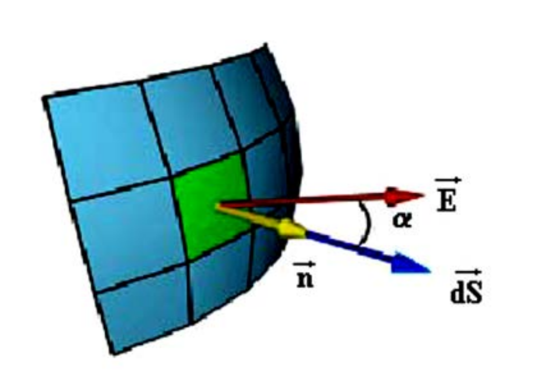
7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Fluxul electric

Considerăm cazul unui câmp electric neuniform şi al unei suprafeţe de formă şi orientare oarecare faţă de liniile câmpului electric

Def. Fluxul electric prin suprafaţa elementară d*S*



$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cos\alpha \, dS$$

$$d\vec{S} = \vec{n} dS$$

Teorema lui Gauss: Fluxul electric printr-o suprafaţă închisă este egal cu sarcina din interiorul suprafeţei, împărțită la ε.

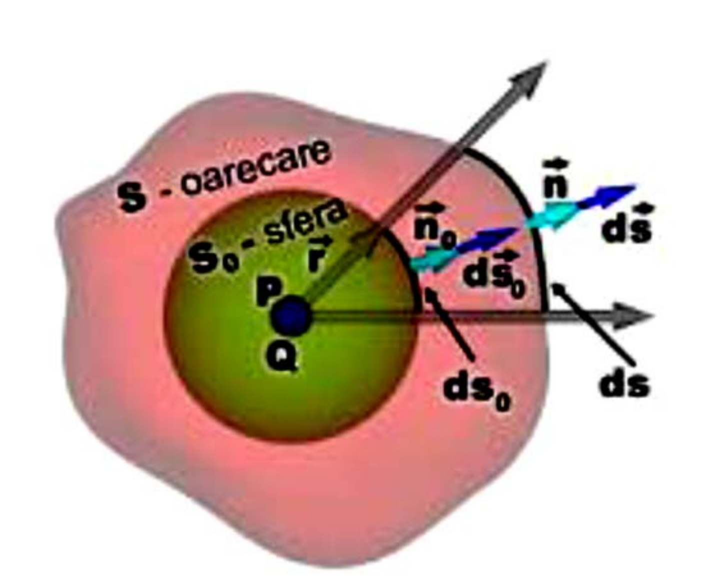
$$\Phi_{e_S} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon}$$

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Fluxul electric. ***<u>Teorema lui Gauss</u>***. Demonstraţie

$$\Phi_S = \Phi_{S_0} \qquad \rightarrow \qquad d\Phi_S = d\Phi_{S_0}$$



- fluxul infinitezimal prin suprafaţa dS_0:

$$d\Phi_{S_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r^3}\vec{n}_0 dS_0$$

- produsul scalar dintre rază şi versorul normal la dS_0

$$\vec{r}\,\vec{n}_0 = r\cos 0 = r \quad \Rightarrow \quad d\Phi_{S_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}dS_0$$

- integrăm fluxul prin suprafaţa sferei

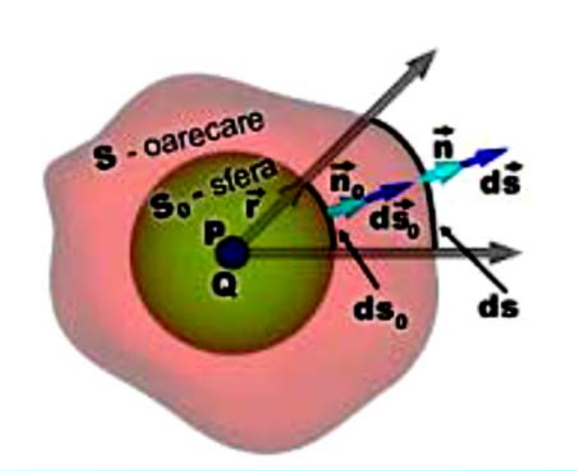
$$\Phi_{S_0} = \oint_{S_0} d\Phi_{S_0} = \oint_{S_0}\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}dS_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}\oint_{S_0}dS_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}S_0 =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon}$$

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Fluxul electric. ***<u>Teorema lui Gauss</u>***. Demonstraţie



Datorită faptului că fluxurile prin cele două suprafeţe din figură sunt egale, putem scrie:

$$\Phi_S = \Phi_{S_0} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

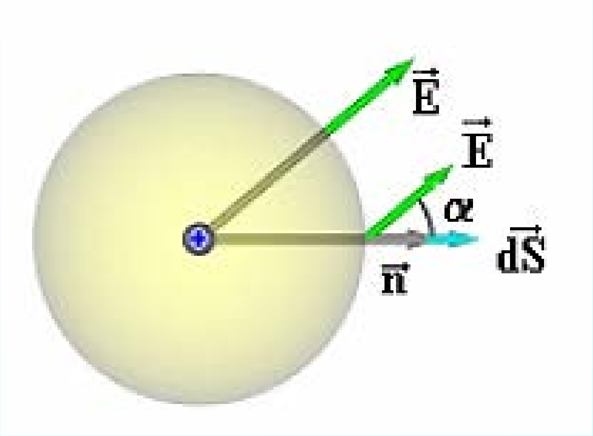
Această lege constituie o nouă formulare a legii lui Coulomb. Dacă în interiorul suprafeţei închise se află mai multe sarcini electrice, q_1, q_2, q_3, ...,q_n, atunci fluxul este egal cu:

$$\Phi_S = \frac{q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n}{\varepsilon}$$

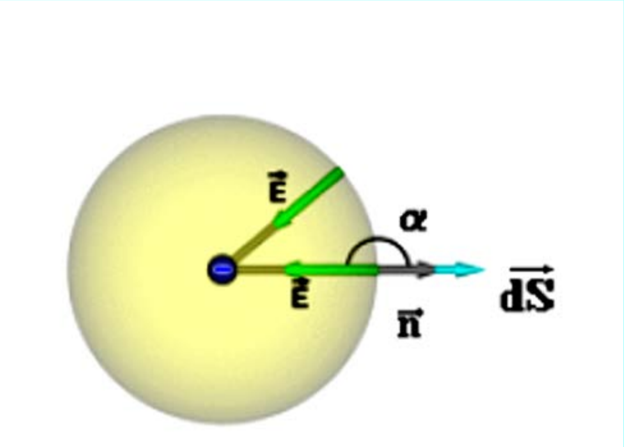
7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Fluxul electric. <u>Semnul fluxului electric</u>



flux pozitiv



flux negativ

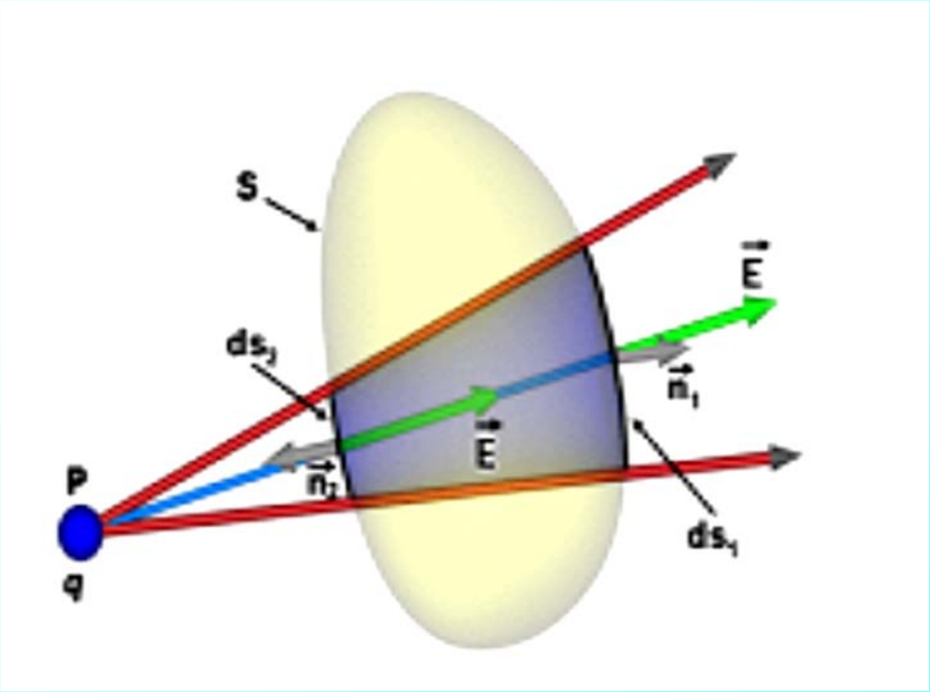
a) Dacă $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, în acest caz *cosα* este pozitiv, iar fluxul electric este şi el tot pozitiv.

b) Dacă $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, atunci *cos α este* negativ, deci fluxul este tot negativ.

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Fluxul electric. Semnul fluxului electric

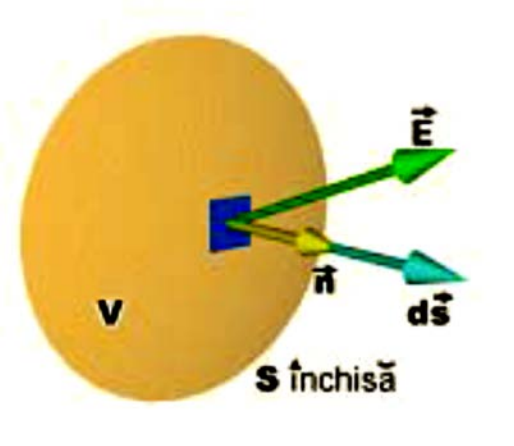


Se observă că toate liniile de câmp ce trec prin dS_1 trec şi prin dS_2, deci fluxurile prin cele două suprafețe elementare sunt egale, dar de semn opus. Fluxul infinitezimal prin suprafața dS_2 este negativ. Astfel, cele două fluxuri elementare prin dS_1 şi dS_2 se anulează reciproc.

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric. Forma locală diferenţială a legii lui Gauss. Prima ecuaţie a lui Maxwell

Considerăm o sarcină electrică q distribuită într-un volum V.



Def. Densitatea de sarcină electrică ρ ca fiind sarcina electrică din unitatea de volum:

$$\rho = \frac{dq}{dV} \qquad [\rho]_{SI} = 1\,\frac{C}{m^3} \qquad q = \int_V \rho\, dV$$

Formula matematică Gauss-Ostrogradski

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{E}\, dV}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \int_V \nabla\vec{E}\, dV$$

unde divergenţă

$$\nabla\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \int_V \nabla\vec{E}\, dV = \frac{q}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho\, dV$$

Prima ecuaţie a lui Maxwell

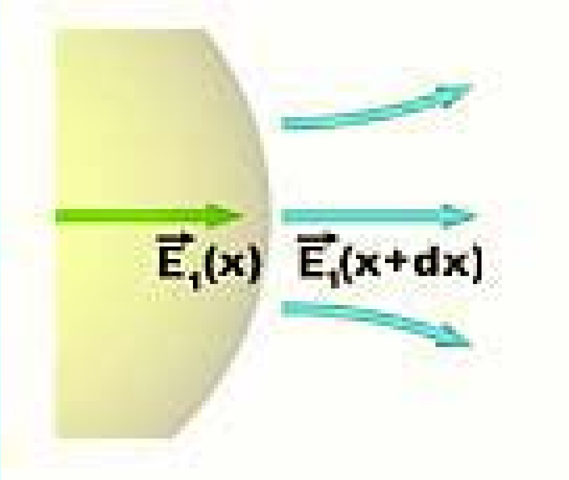
$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

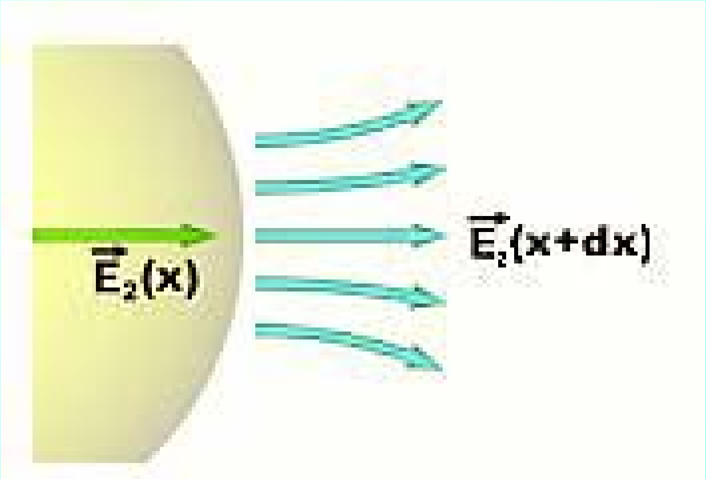
7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Forma locală diferenţială a legii lui Gauss. Prima ecuaţie a lui Maxwell

Divergenţa vectorului $\vec{E}$, div $\vec{E}$, este mai mare în punctele în care denitatea volumica de sarcina este mai mare





a) câmp electric cu linii de câmp mai puţine;

b) câmp electric cu linii de câmp mai dese

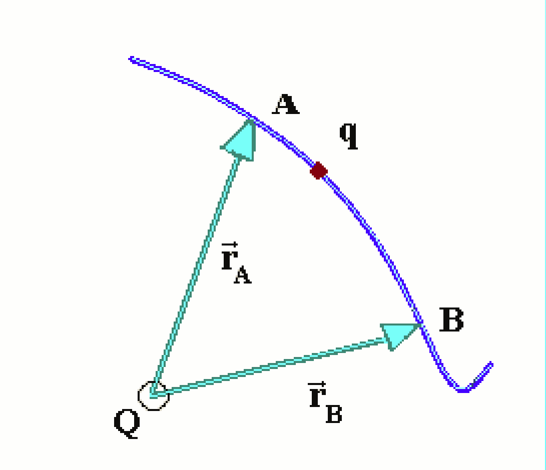
$$\nabla\vec{E}_2 > \nabla\vec{E}_1$$

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Lucru mecanic

Considerăm o sarcină electrică Q fixă. În câmpul electric creat de aceasta se mişcă o sarcină q, numită corp de probă.



Lucrul mecanic efectuat la deplasarea sarcinii electrice q:

$$L_{AB} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Dacă punctul B se află la infinit, $\vec{r}_B \to \infty$ rezultă

$$L_{A\infty} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_A}\right)$$

Dacă sarcina q = 1 C, rezultă

$$L_{A\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_A}$$

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Potenţialul electric. Tensiunea electrică

Potenţialul electric într-un punct reprezintă lucru mecanic efectuat pentru deplasarea unui corp de probă cu sarcina electrică de q=1C între punctul considerat şi infinit.

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_A} \qquad 1V = \frac{1\,J}{1\,C}$$

Potenţialul electric într-un punct situat la distanţa r de sarcina punctiformă Q prin

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$$

Definim ***tensiunea electrică*** dintre două puncte ca fiind diferenţa potenţialelor electrice ale celor două puncte considerate:

$$U = V_A - V_B$$

Energia electrostatică este egală cu produsul dintre diferenţa de potenţial şi sarcina electrică de probă q:

$$W = q(V_A - V_B) = q\,U$$

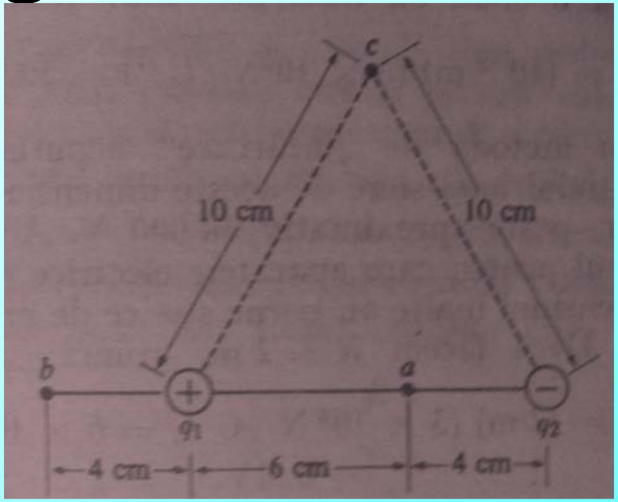
Unitatea de măsură pentru energia elecrostatică: ***Joule***

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Potenţialul electric. Tensiunea electrică.

<u>Aplicaţie</u>



Două sarcini punctiforme de + 12 ·10^{-9} C şi - 12 ·10^{-9} C sunt plasate la 10 cm distanţă una de alta, ca în figură.
Să se calculeze potenţialul în punctele a, b şi c.

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$$

<u>Raspuns:</u> Trebuie calculata suma algebrica in fiecare punct.
Potenţialul electric datorat sarcinii pozitive in punctul a:

$$V_{a(q+)} = 9 \cdot 10^9 \frac{12 \cdot 10^{-9}}{0.06} = 1800\text{V}$$

Potenţialul electric datorat sarcinii negative in punctul a:

$$V_{a(q-)} = 9 \cdot 10^9 \frac{-12 \cdot 10^{-9}}{0.04} = -2700\text{V}$$

Deci: $V_a = 1800 + (-2700) = -900V$

In punctul b, potenţialul datorat sarcinii pozitive este de +2700V, iar cel datorat sarcinii negative este de -770V.

Deci: $V_b = 2700 - 770 = 1930\ V$

In punctul c potentialul este: $V_c = 1080 - 1080 = 0V$

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Relația dintre potențialul electric si intensitatea câmpului electric

In cursul 3, energia potențială: $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{l}$

E este constant ⇒ $\vec{F} = q\vec{E}$

$$\left.\begin{array}{l} dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{l} \\ \vec{F} = q\vec{E} \end{array}\right\} dE_p = -q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$dV = \frac{dE_p}{q_0} = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}\,V = -\nabla V}$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta E_p}{q_0} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Obs.: *Energia potențiala se notează cu U sau cu* $\mathbf{E_p}$.
Potențialul electric se notează cu **V** *sau* φ.

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

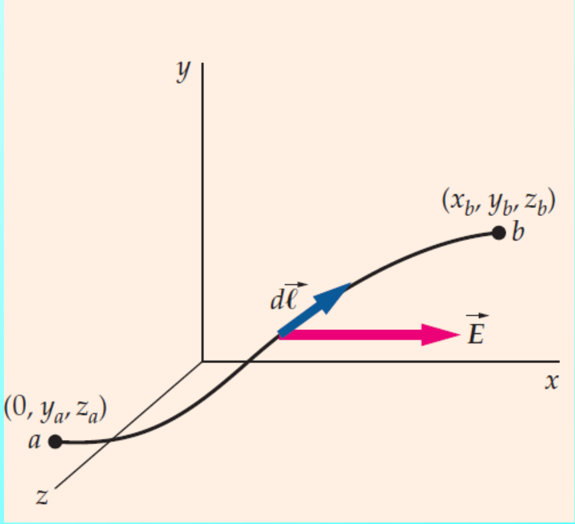
Legătura dintre potențialul electric si intensitatea câmpului electric

Aplicație: Un câmp electric uniform E = 10 N/C este orientat in direcția pozitivă a axei x. Să se determine potențialul in funcție de x, dacă la $x_0 = 0$, V = 0.

Rezolvare:

Diferența de potențial electric:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$



unde:

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E\hat{i} \cdot (dx\ \hat{i} + dy\ \hat{j} + dz\ \hat{k}) = E\,dx$$

rezultă:

$$V_b - V_a = -\int_{x_a}^{x_b} E\,dx$$

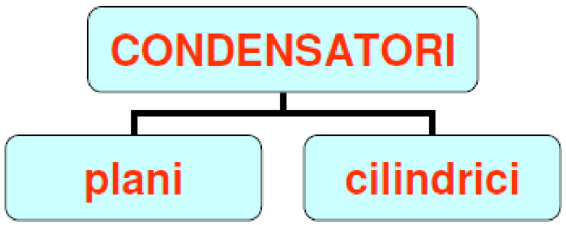
$$V_b - 0 = -E\int_0^{x_b} dx \quad \Rightarrow \quad V_b = -Ex_b \quad \Rightarrow \quad V(x) = -Ex = \boxed{-(10\ \mathrm{V/m})x}$$

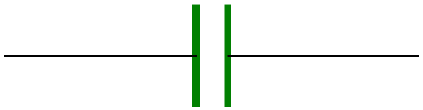
7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

<u>Condensatorul electric</u>. Energia câmpului electric

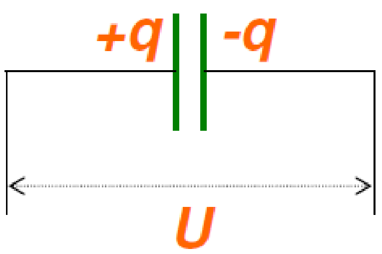
<u>*Condensatorul electric*</u> = ansamblu de doua placi metalice (armaturi) separate de un strat izolator (dielectric)





<u>Def</u> *Capacitatea electrică* a condensatorului:

$$\boxed{C = \frac{q}{U} \quad ; \ [C] = 1 \text{ Farad}}$$



<u>Obs:</u>

a) capacitatea condensatorului plan: $C_{c.plan} = \varepsilon \dfrac{S}{d}$

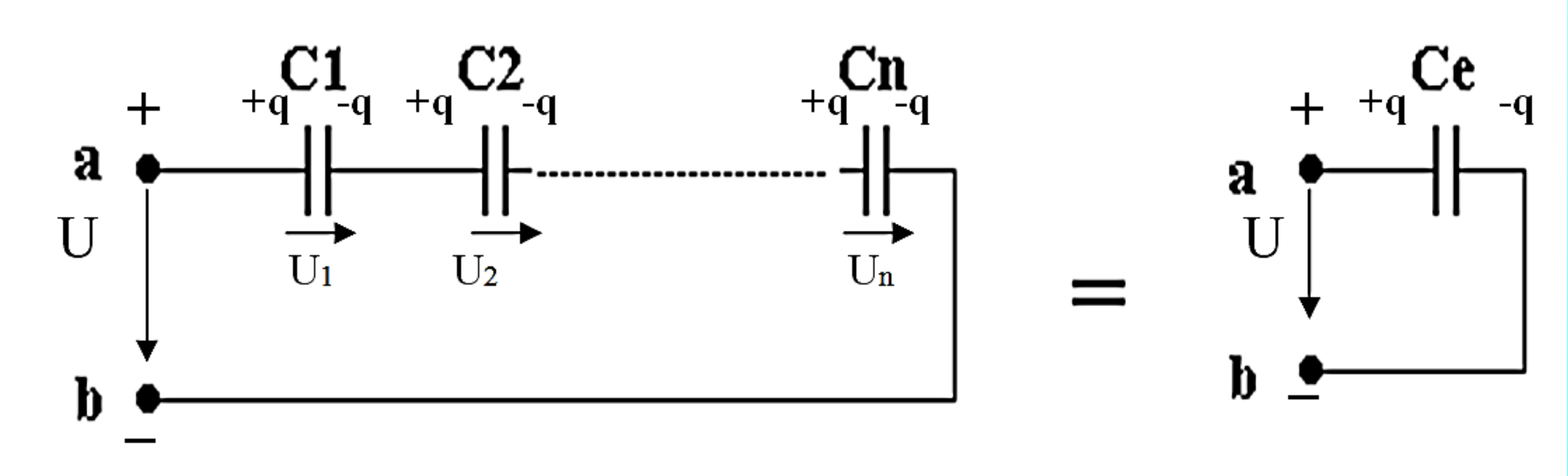
b) intensitatea câmpului electric uniform dintre armăturile condensatorului plan: $E = \dfrac{U}{d}$

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

<u>Condensatorul electric</u>. Energia câmpului electric

a) Gruparea în serie a condensatoarelor electrice



$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{C_n} \quad \text{sau:} \quad \frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

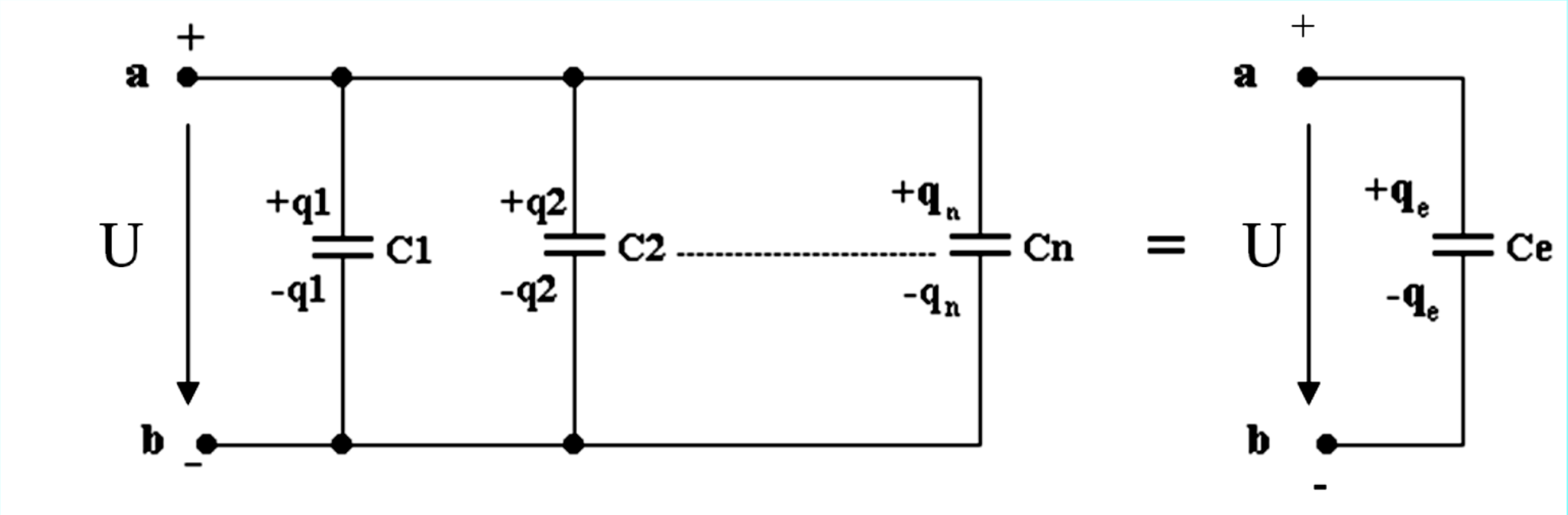
Inversul capacității echivalente este egal cu suma inverselor celor n capacități

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

<u>Condensatorul electric</u>. Energia câmpului electric

a) Gruparea în paralel a condensatoarelor electrice



$$C_e = C_1 + C_2 + \ldots.. + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Capacitate echivalentă este egală cu suma celor n capacități

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

<u>Condensatorul electric</u>. Energia câmpului electric

Gruparea condensatoarelor electrice. **<u>Aplicație</u>**

1. Sa se calculeze gruparea a n condensatoare identice in serie.
2. Să se calculeze gruparea a 2 condensatoare diferite in serie.
3. Sa se calculeze gruparea a n condensatoare identice in paralel.
4. Să se calculeze gruparea a 2 condensatoare diferite in paralel.

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Condensatorul electric. <u>Energia câmpului electric</u>

La încărcarea unui condensator plan se consumă un lucru mecanic pentru a transporta sarcinile electrice de pe o armătură pe alta. Lucrul mecanic infinitzimal efectuat pentru a transporta sarcina infinitezimală dQ de pe o armătură pe alta este:

$$dL = U\,dQ$$

Sarcina electrică Q de pe armături este egală:

$$Q = C\,U$$

sarcina infinitezimală dQ: $dQ = C\,dU$

Lucrul mecanic infinitzimal efectuat pentru a transporta sarcina infinitezimală dQ de pe o armătură pe alta este:

$$dL = C\,U\,dU$$

Lucrul mecanic efectuat pentru încărcarea condensatorului este:

$$L = \int_0^U C\,U\,dU = \frac{1}{2}\,C\,U^2$$

7. Câmpul electromagnetic

7.1. Câmpul electric

Condensatorul electric. Energia câmpului electric

Energia câmpului electric dintre armaturile condensatorului este egala cu lucrul mecanic efectuat pentru încărcarea lui:

$$\boxed{W = L = \frac{CU^2}{2}}$$

Def *Densitatea volumică de energie:*

$$\boxed{\mathrm{w} = \frac{W}{V}}$$

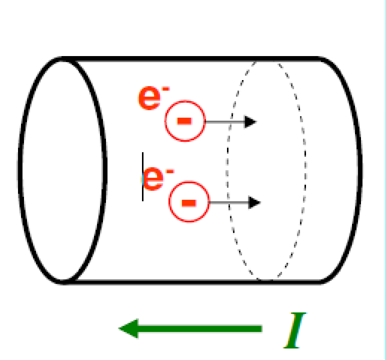
$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}(E\,d)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V$$

$$\boxed{\mathrm{w} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

(densitatea volumică de energie a câmpului electric)

7. Câmpul electromagnetic

7.2. Curent electric. Densitatea de curent electric



<u>*Curent electric*</u> = mişcarea ordonata a sarcinilor electrice

Conventie: sensul curentului electric = sensul de deplasare a sarcinilor electrice pozitive (sensul invers de deplasare a electronilor)

<u>*Def.*</u> *Intensitatea curentului electric:* $I = \dfrac{q}{t}$; $[I] = 1$ Amper

(intensitatea curentului electric constant, continuu)

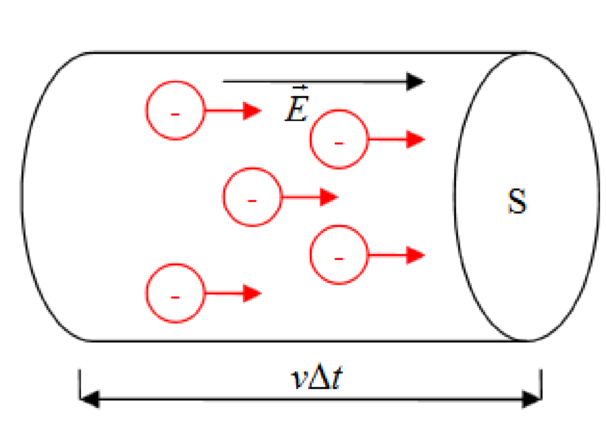
<u>Obs:</u> Dacă intensitatea curentului nu este constantă, atunci: $I = \dfrac{dq}{dt}$

<u>Def</u> *Densitatea de curent electric* $\vec{j}$: $j = \dfrac{I}{S_n}$; $[j] = \dfrac{\text{A}}{\text{m}^2}$

<u>Obs:</u> Dacă curentul nu este distribuit uniform în secțiunea transversală a conductorului, atunci: $j = \dfrac{dI}{dS_n}$

7. Câmpul electromagnetic

7.2. Curent electric. Densitatea de curent electric



- Consideram o porțiune de conductor a cărui secțiune transversală este S și în interiorul căreia există un câmp electric.
- În intervalul de timp Δt , numărul purtătorilor de sarcină electrică ce se deplasează în unitatea de volum este: $N = nSv\Delta t$

iar cantitatea de sarcină electrică transportată de aceştia prin suprafaţa S este $\Delta Q = Nq = nSvq\Delta t$

În acest caz, intensitatea curentului este $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = nvqS$

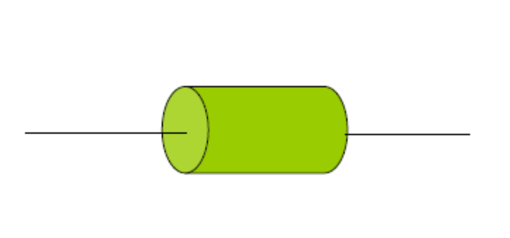
Densitatea de curent se definește ca fiind cantitatea de sarcină electrică care trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafață.

$$j = \frac{I}{S} = nqv \qquad \vec{j} = nq\vec{v}$$

Intensitatea curentului reprezintă fluxul densității de curent prin suprafața S.

$$I = \int_S dI = \int_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

7. Câmpul electromagnetic

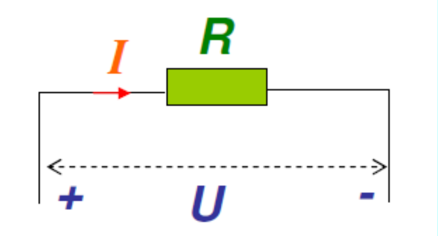


7.2. Curent electric

<u>Rezistenta electrica.</u> Legile lui Ohm

<u>Def.</u> Rezistenta electrica a conductorului:

$$\boxed{R = \frac{U}{I}\ ;\ [R] = \Omega\ \text{(Ohm)}}$$



Obs: Rezistenta electrica a unui conductor cu lungimea l si aria secțiunii transversale S:

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{S}}$$

ρ *– rezistivitatea materialului conductorului*

Rezistenta electrica variază liniar cu temperatura in domeniul (0 - 100°C)

$$\rho = \rho_o[1 + \alpha(T - T_0)]\ ;\ [\rho] = \Omega\text{m}$$

α = coeficientul de temperatură al rezistivității

7. Câmpul electromagnetic

7.2. Curent electric

<u>Rezistenta electrica.</u> Legile lui Ohm

<u>Aplicaţie:</u>

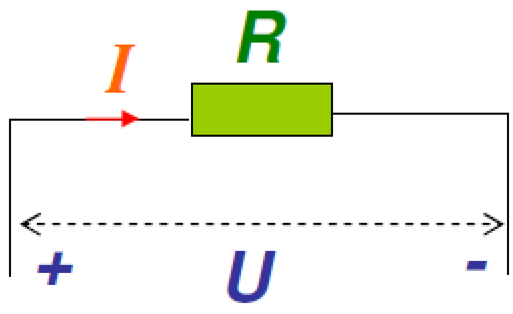
Care este rezistenţa electrică a unui fir de 100 m de cupru, cu raza de 1 mm ? Se cunoaşte rezistivitatea materialului $\rho = 1{,}72 \cdot 10^{-8}\ \Omega\ \mathrm{m}$.

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{S}}$$

7. Câmpul electromagnetic

7.2. Curent electric

Rezistenta electrica. Legile lui Ohm



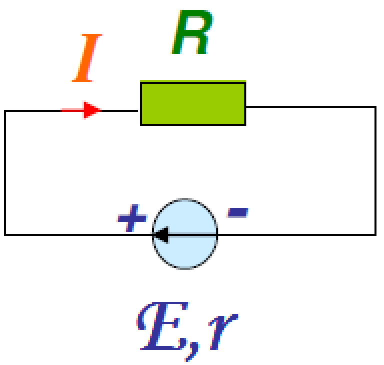
$$\boxed{I = \frac{U}{R}}$$

Legea lui Ohm

(forma integrală, macroscopică)

Legea lui Ohm pentru un circuit simplu:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$



$$E = \frac{U}{l} \Rightarrow U = E\,l$$

$$I = \frac{El}{\rho \frac{l}{S}} = \frac{ES}{\rho} \Rightarrow \frac{I}{S} = \frac{E}{\rho} \Rightarrow j = \frac{E}{\rho}$$

$$\boxed{\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho}}$$

Legea lui Ohm

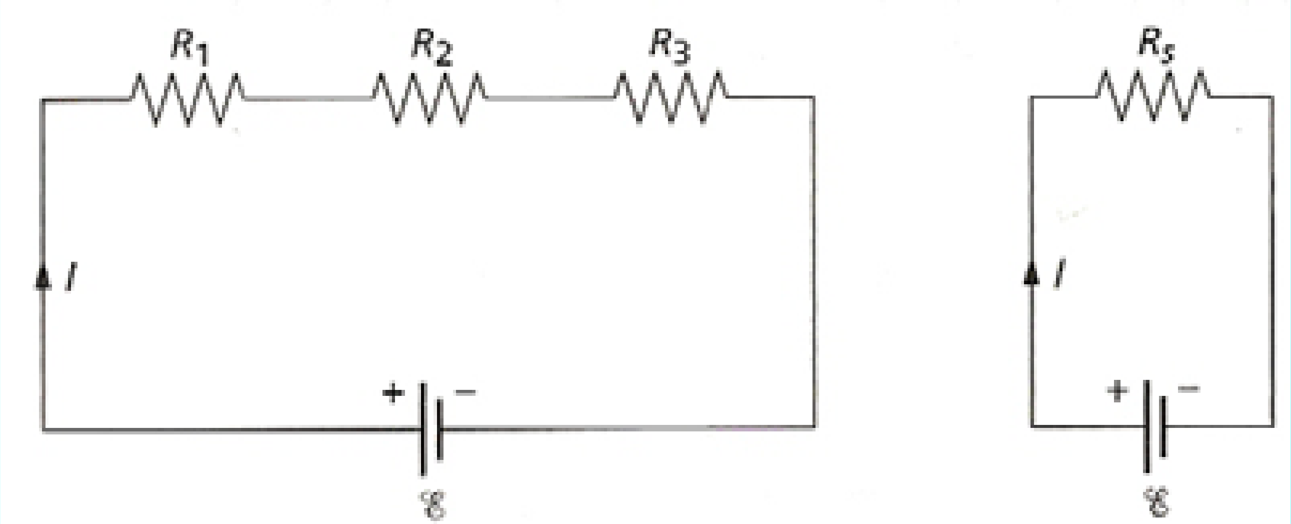
(forma locală, microscopică, punctuală)

7. Câmpul electromagnetic

7.2. Curent electric

Rezistenta electrica. Legile lui Ohm

a) Gruparea rezistenţelor electrice în serie



$$R_s = R_1 + R_2 + R_3$$

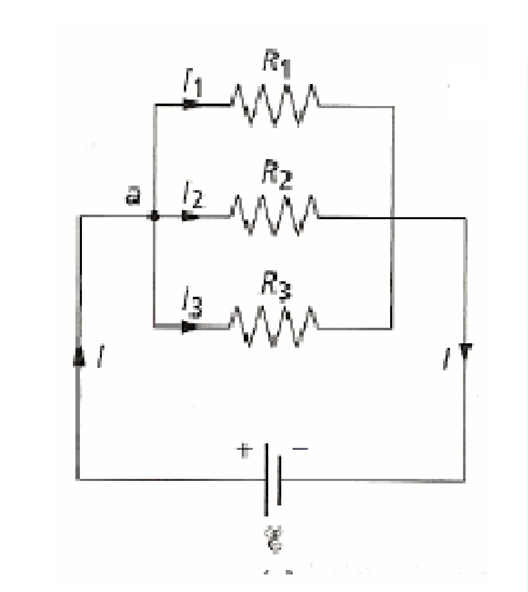
Demonstraţia: Legea a 2-a a lui Kirchhoff

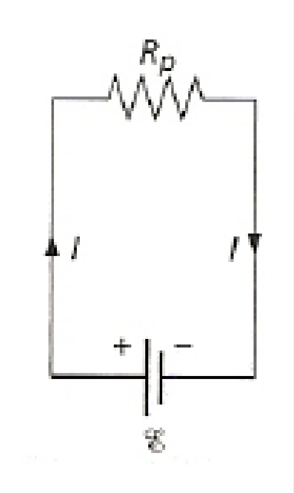
7. Câmpul electromagnetic

7.2. Curent electric

Rezistenta electrica. Legile lui Ohm

a) Gruparea rezistenţelor electrice în paralel





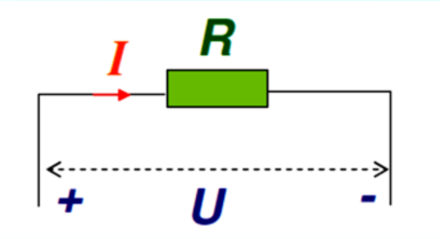
$$\boxed{1/R_p = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}$$

Demonstraţia: Legea a 1-a a lui Kirchhoff

7. Câmpul electromagnetic

7.2. Curent electric

Energia curentului electric



Consumatorul este străbătut în timpul *t* de sarcina electrică: $q = It$

care are energia potențială: $W = qU$

=> Energia transferată consumatorului în timpul *t* :

$$\boxed{W = U\,I\,t \;\; ; \;\; [W] = 1\,\text{Joule}}$$

Obs: kwh = unitate de masura pentru energia electrica

Efectul termoelectric (efect Joule): ***încălzirea conductorilor parcurşi de curent electric.***

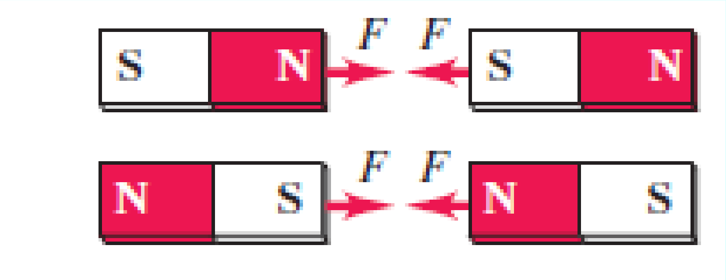
Def: Puterea electrica: $\boxed{P = \dfrac{W}{t} \;\; ; \;\; [P] = 1\,\text{watt}}$

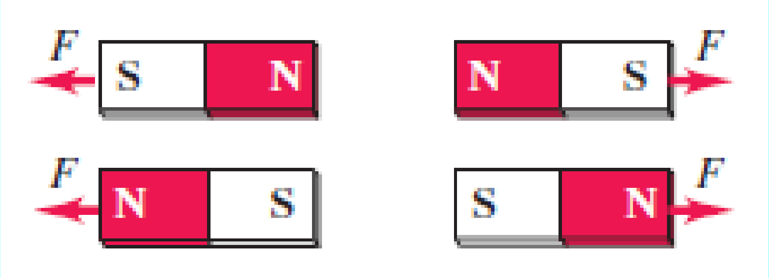
7. Câmpul electromagnetic

7.3 Câmpul magnetic

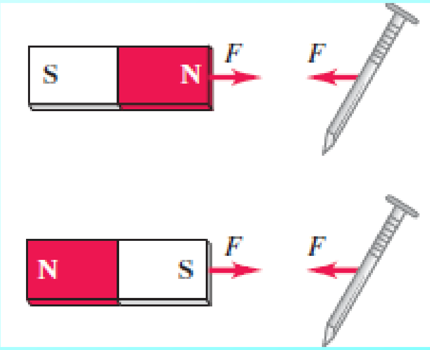
Noţiuni generale. Magnetul

- Magnetul a fost descoperit Magnesia (acum Manisa), Turcia
- Magnetul are doi poli: Nord (N) şi Sud (S)

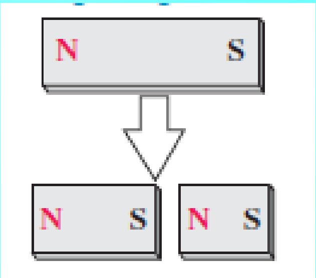




- Atrag doar metale



- Polii unui magnet nu pot fi separaţi



7. Câmpul electromagnetic

7.3 Câmpul magnetic

Noţiuni generale. Câmpul magnetic al Pământului

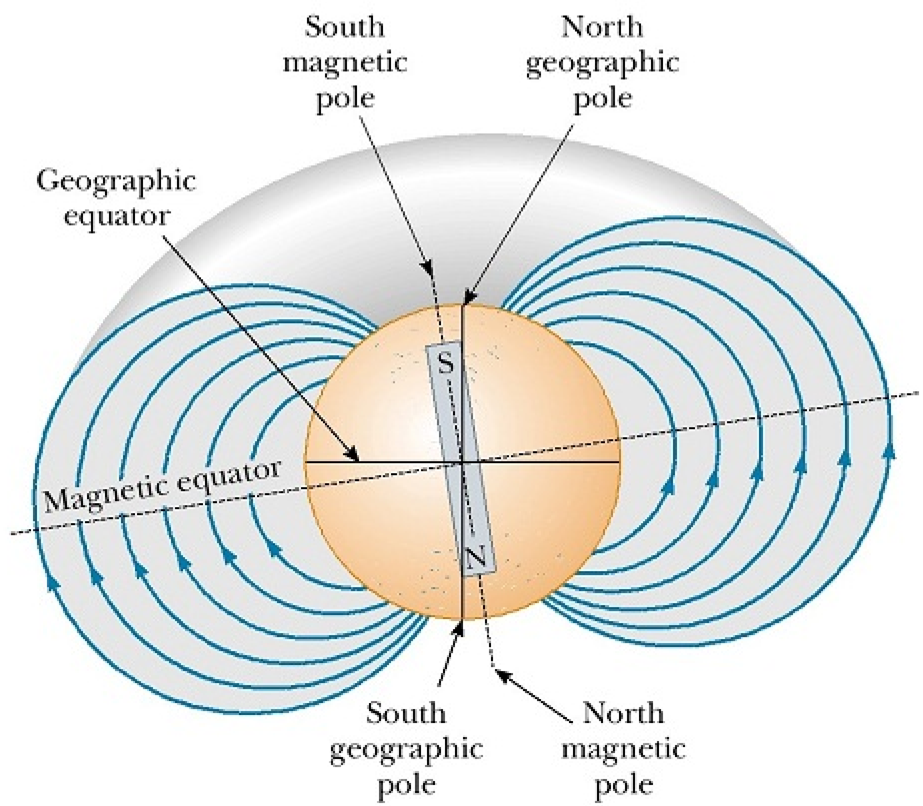
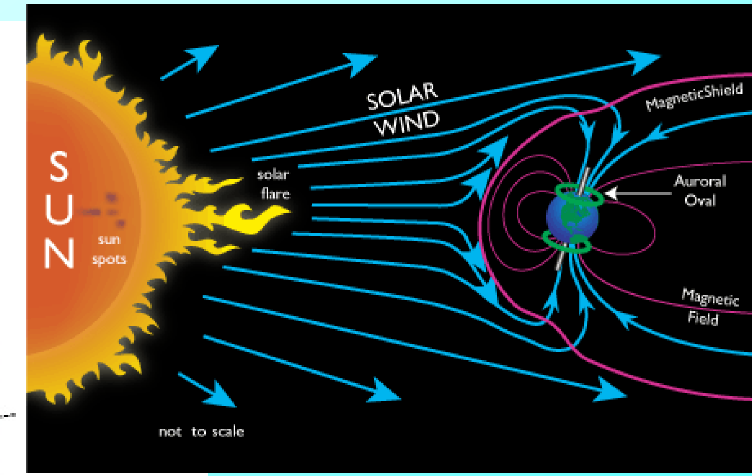


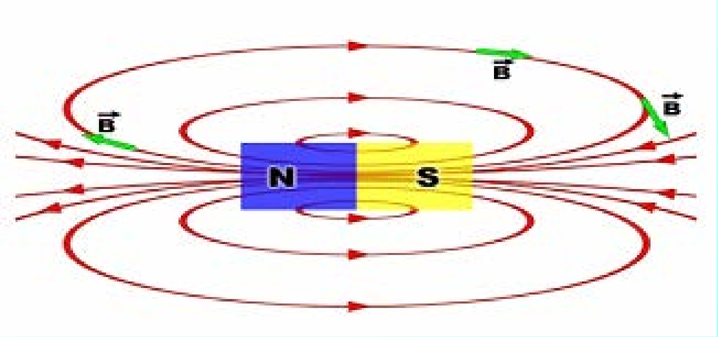
Figure 30.35 The Earth's magnetic field lines. Note that a south magnetic pole is near the north geographic pole, and a north magnetic pole is near the south geographic pole.

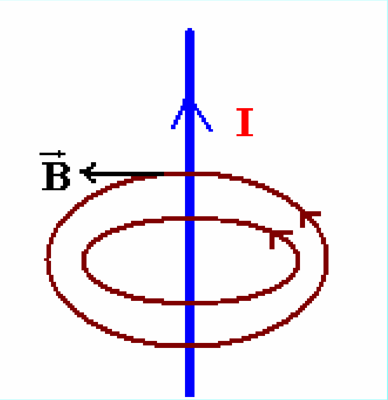


7. Câmpul electromagnetic

9.1. Câmpul magnetic

Def. ***Câmp magnetic***





- liniile de câmp magnetic sunt linii de câmp închise.
- caracterizat prin mărimea vectorială - ***inducţie magnetică***, $\vec{B}$

$$[B] = 1\text{T (Tesla)}$$

- poate fi măsurat cu *magnetometrul*.

Def. ***Intensiatea câmpului magnetic***, $\vec{H}$, *unde* $[H] = \frac{A}{m}$

$$\boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}}$$

$\mu = \mu_0\mu_r$ permeabilitatea magnetică a mediului, in H/m.

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\frac{Wb}{Am}\left(sau\ \frac{H}{m}\right)$ permeabilitatea magnetică a vidului.

μ_r- permeabilitatea relativă a mediului.

7. Câmpul electromagnetic

7.3 Câmpul magnetic

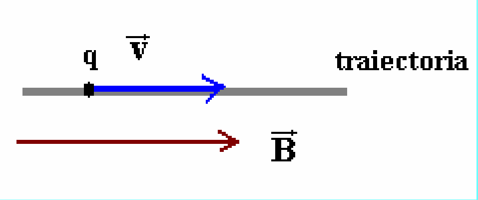
Acţiunea câmpului magnetic asupra sarcinilor electrice în mişcare

- Considerăm un câmp magnetic omogen, de inducţie magnetică, în care se deplasează cu viteza, $\vec{v}$, un corp punctiform electrizat cu sarcina q.
- Forţa cu care acţionează câmpul magnetic asupra sarcinii electrice este

forţa Lorentz $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ ***Modulul forţei Lorentz*** $F = q\,v\,B \sin\alpha$

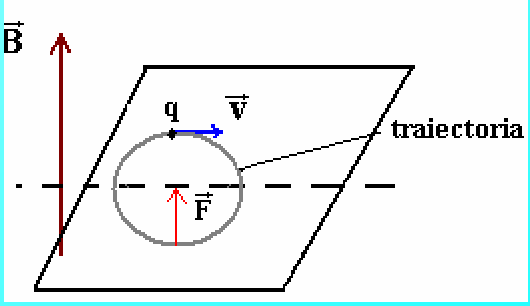
unde α este unghiul dintre direcţiile vectorilor $\vec{B}$ şi $\vec{v}$.

<u>Cazuri particulare:</u>



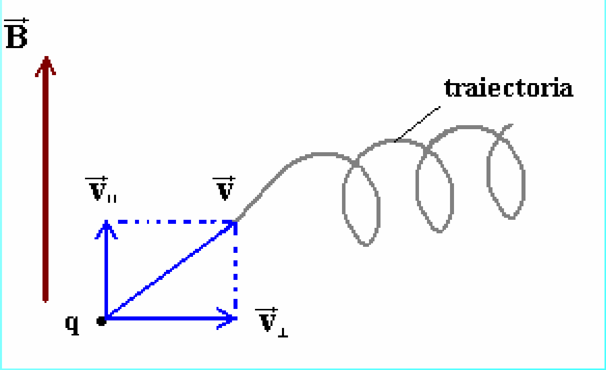
a) $\vec{v} \parallel \vec{B} \implies \sin = 0 \implies \vec{F}_L = 0$

b) $\vec{v} \perp \vec{B} \implies \sin = 1 \implies \left|\vec{F}_L\right| = qvB \implies$ traiectoria este un cerc



c) $(\vec{v}, \vec{B}) = \alpha\ \ oarecare$

$\implies$ traiectoria este o spirală



7. Câmpul electromagnetic

7.3 Câmpul magnetic

Acţiunea câmpului magnetic asupra unui conductor parcurs de curent electric

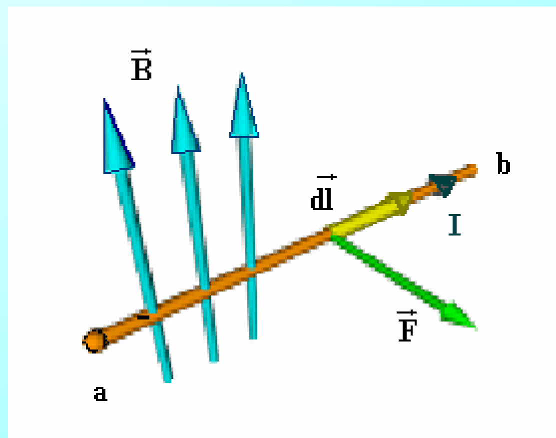
Într-un conductor parcurs de curent electric, sarcinile electrice au o mişcare ordonată => pe fiecare sarcina în mişcare acţionează ***forta Lorentz***

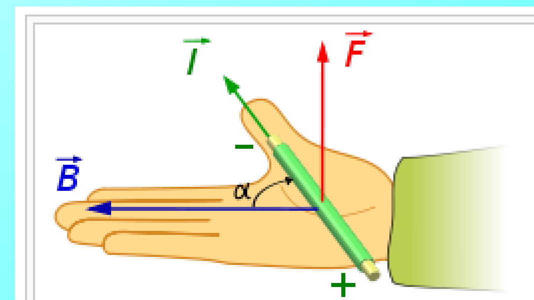
=> asupra conductorului în ansamblu actioneaza ***forta electromagnetică***

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = I\,(\vec{l} \times \vec{B})$$

$$F = B\,I\,l \sin\alpha$$





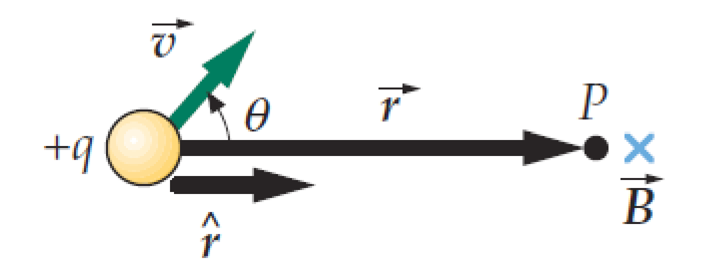
unde l = lungimea conductorului aflat în câmp magnetic, orientat în sensul curentului electric

Inducţia magnetică a unui câmp magnetic este mărimea fizică egală numeric cu forţa care acţionează asupra unităţii de lungime a unui conductor liniar, aşezat perpendicular pe liniile de câmp, parcurs de un curent egal cu o unitate.

7. Câmpul electromagnetic

7.3 Câmpul magnetic

Câmpului magnetic creat de o sarcina electrica punctiforma q, care se mişcă cu viteza **v** este:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \qquad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

A point particle that has charge $q = 4.5\ \mu\text{C}$ is moving with velocity $\vec{v} = 3.0\ \text{m/s}\ \hat{i}$ along the line $y = 3.0$ m in the $z = 0$ plane. Find the magnetic field at the origin produced by this charge when the charge is at the point $x = -4.0$ m, $y = 3.0$ m, as shown in Figure 27-2.

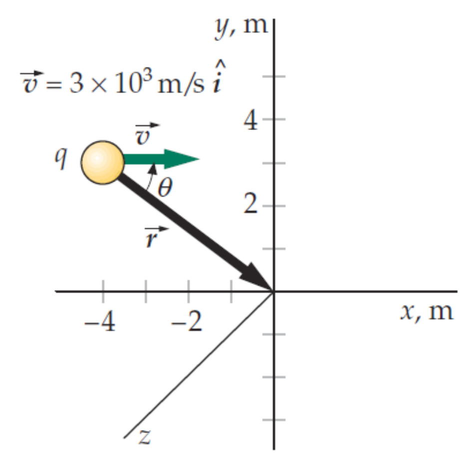


FIGURE 27-2

PICTURE The magnetic field associated with a moving charged particle is given by Equation 27-1.

SOLVE

1. The magnetic field is given by Equation 27-1:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{where} \quad \vec{v} = v\hat{i}$$

2. Find $\hat{r}$ and r from Figure 27-2 and write $\hat{r}$ in terms of $\hat{i}$ and $\hat{j}$:

$$\vec{r} = 4.0\ \text{m}\ \hat{i} - 3.0\ \text{m}\ \hat{j}$$

$$r = \sqrt{4.0^2 + 3.0^2}\ \text{m} = 5.0\ \text{m}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{4.0\ \text{m}\ \hat{i} - 3.0\ \text{m}\ \hat{j}}{5.0\ \text{m}} = 0.80\ \hat{i} - 0.60\ \hat{j}$$

3. Substitute the above results in Equation 27-1:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(v\hat{i}) \times (0.80\hat{i} - 0.60\hat{j})}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(-0.60v\hat{k})}{r^2}$$

$$= -(10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})\frac{(4.5 \times 10^{-6}\ \text{C})(0.60)(3.0\ \text{m/s})}{(5.0\ \text{m})^2}\hat{k}$$

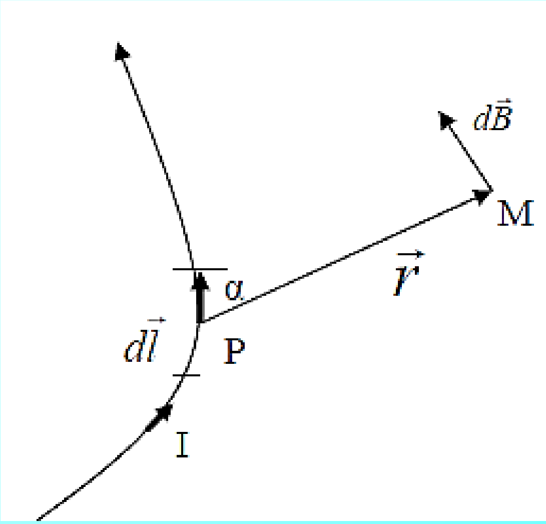
$$= \boxed{-3.2 \times 10^{-14}\ \text{T}\ \hat{k}}$$

7. Câmpul electromagnetic

7.3. Câmpul magnetic

Legea Biot-Savart (Legea Biot-Savart-Laplace)

Într-un punct M, la o distanță $\vec{r}$ de un element de conductor de lungime $d\vec{l}$ străbătut de un curent de intensitate I apare un câmp de inducție magnetică:



$$d\vec{B} = \mu \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

unde sensul elementului de lungime i s-a asociat sensul curentului.

$$dB = \mu \frac{I dl \sin\alpha}{4\pi r^2}; \quad \alpha - unghiul\ (d\vec{l}, \overrightarrow{PM})$$

Laplace a generalizat relația și a arătat că un câmp de inducție magnetică creat de un curent ce străbate un conductor de formă oarecare poate fi exprimat ca suma vectorială a câmpurilor create de porțiuni elementare de conductor:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

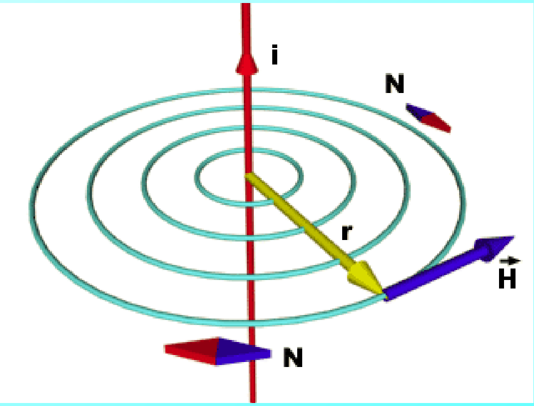
7. Câmpul electromagnetic

7.3 Câmpul magnetic

Câmpul magnetic creat de curenţii electrici

Sarcinile electrice fixe nu creează câmpuri magnetice, doar cele în mişcare.

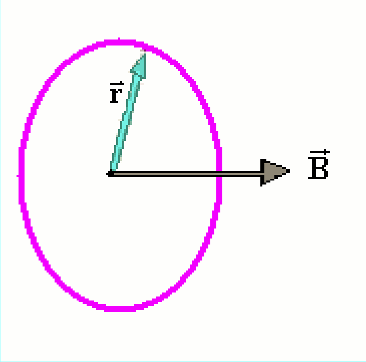
a) Câmpul magnetic al unui conductor liniar



$$H = \frac{I}{2\pi r}$$ legea lui Biot – Savart

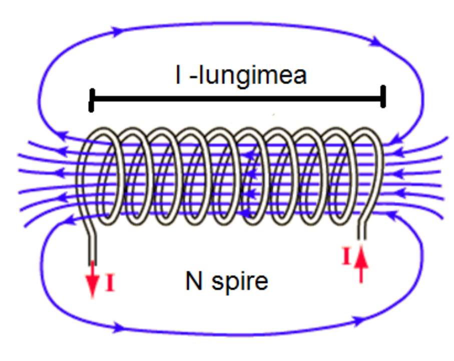
b) Câmpul magnetic al unei spire circulare

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2r}$$



c) Câmpul magnetic al unei bobine

$$B = \mu_0 \frac{In}{2r}$$



Unde $n = N/l$ reprezintă densitatea de spire pe unitatea de lungime

N numărul de spire circulare de lungime l,

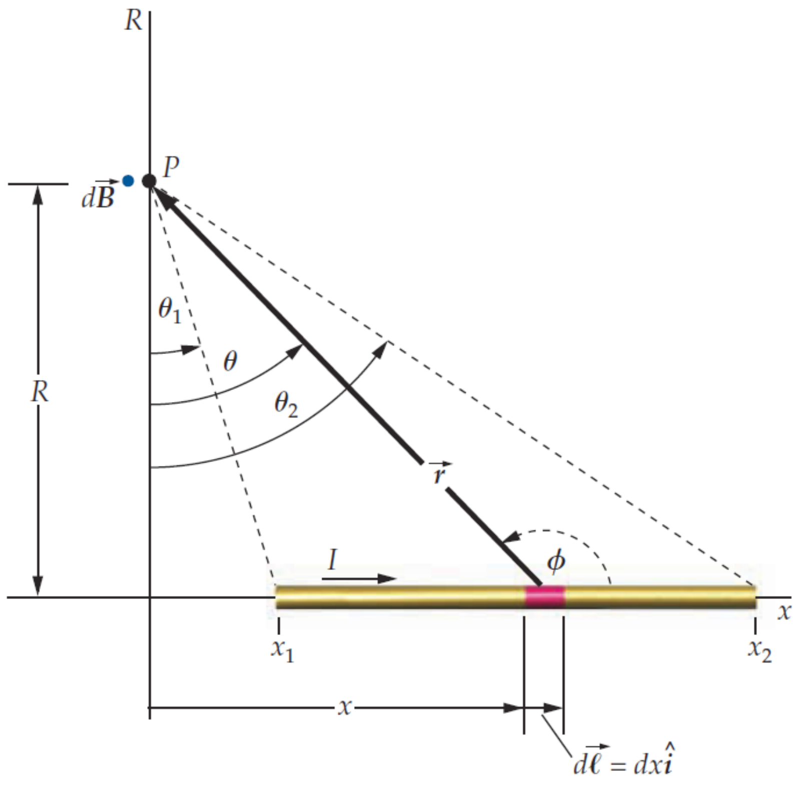
7. Câmpul electromagnetic

7.3 Câmpul magnetic

Câmpul magnetic creat de curenţii electrici

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{R}$$

a) Câmpul magnetic al unui conductor linear- legea lui Biot – Savart



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idx}{r^2}\sin\phi \qquad dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dx}{r^2}\cos\theta$$

$$x = R\tan\theta$$

$$dx = R\sec^2\theta\, d\theta = R\frac{r^2}{R^2}d\theta = \frac{r^2}{R}d\theta$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\frac{r^2\, d\theta}{R}\cos\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\cos\theta\, d\theta$$

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\cos\theta\, d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\, d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$\theta_1 = -90^\circ \text{ and } \theta_2 = +90^\circ$$

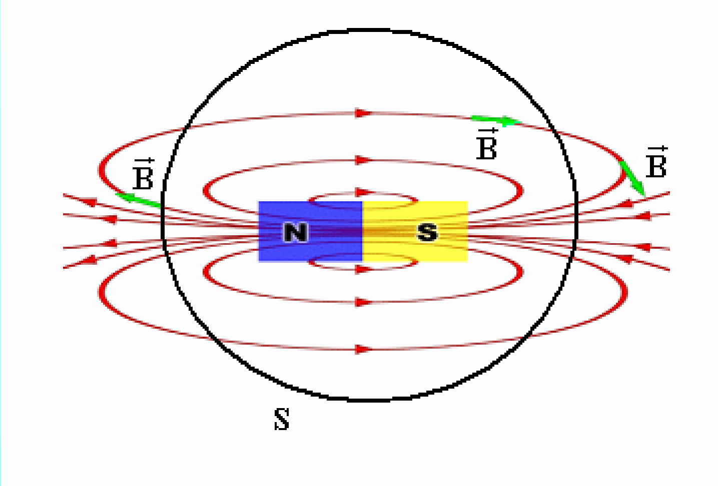
7. Câmpul electromagnetic

7.3 Câmpul magnetic

Fluxul magnetic

Este definit ca produsul scalar dintre vectorul inducţie magnetică şi versorul normal la suprafaţă, multiplicat prin aria suprafeţei considerate.

$$\Phi_m = \int_S d\Phi_m = \int_S \vec{B}\, d\vec{S}$$



Unitate de măsură: ***Weber*** , 1Wb=1Tm^2

- Consideram un magnet si o suprafața închisa S în jurul magnetului

Numărul liniilor de câmp care intra în S este egal cu numărul liniilor de câmp care ies din S ⇒ ***fluxul magnetic prin suprafaţa închisă S este nul***

$$\boxed{\Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

<u>legea lui Gauss pentru magnetism</u>
(forma integrala)

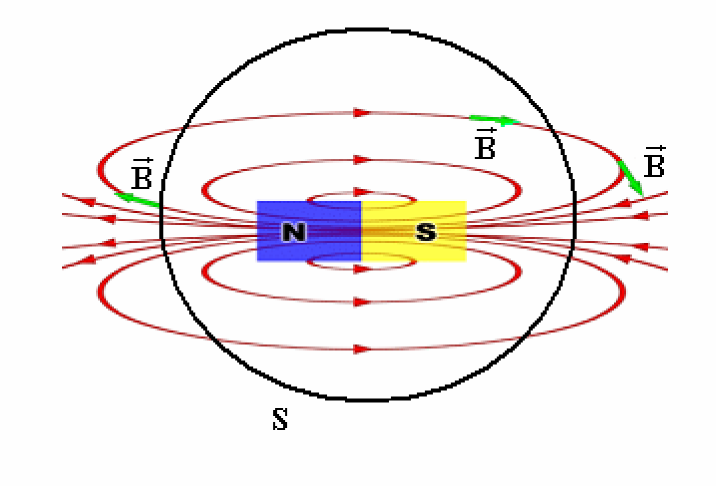
7. Câmpul electromagnetic

7.3 Câmpul magnetic

Fluxul magnetic . Legea lui Gauss pentru magnetism

<u>Legea lui Gauss:</u> fluxul inducţiei magnetice prin orice suprafaţa închisă este zero.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$



Teorema Gauss-Ostrogradski:

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = \int \nabla \vec{B}\, dV = 0$$

Forma locală a legii lui Gauss (<u>A doua ecuaţie a lui Maxwell</u>)

$$\nabla \vec{B} = 0$$

sau

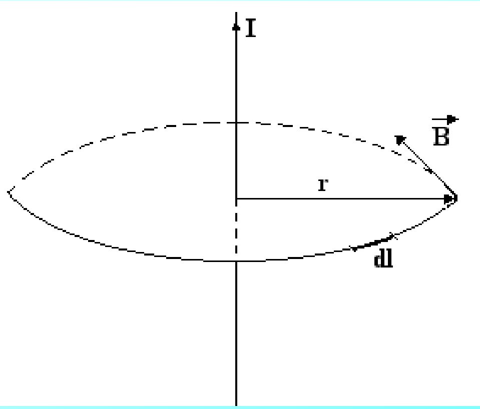
$$div \vec{B} = 0$$

7. Câmpul electromagnetic

7.3 Câmpul magnetic

Legea circuitului magnetic. Legea lui Ampère.

- Din legea lui Biot Savart rezultă:



$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I$$

Liniile câmpului magnetic sunt circulare, cu lungimea 2πr,
iar vectorul inducţie magnetică este mereu tangent la linia de câmp si constant în mărime, relaţia de mai sus poate fi scrisa în forma:

$$\boxed{\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I}$$

Legea lui Ampère (forma integrală) sau *Legea circuitului magnetic*

dl – element de lungime

Enunţ: integrala de-a lungul unei curbe închise a produsului $\vec{B} \cdot \overrightarrow{dl}$ (circulaţia vectorului) este egală cu permeabilitatea magnetica a vidului μ_0 înmulțită cu intensitatea curentului *I* ce trece prin suprafața delimitata de conturul închis *c*.

7. Câmpul electromagnetic

7.3. Câmpul magnetic

Legea circuitului magnetic. Legea lui Ampère.

Densitatea de curent $j = \dfrac{dI}{dS}$ $\Rightarrow$ $I = \iint_S \vec{j}\, d\vec{S}$

Formula lui Stokes: $\oint_{(C)} \vec{H} d\vec{l} = \iint_{S_C} (\nabla \times \vec{H}) d\vec{S}$

$$\mathrm{rot}\, \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

Introducem relațiile de mai sus in $\oint_{(C)} \vec{H} d\vec{l} = I$ $\Rightarrow$

$$\oint_{(C)} \vec{H} d\vec{l} = \iint_{S_C} (\nabla \times \vec{H}) d\vec{S} = I = \iint_{S_C} \vec{j}\, d\vec{S}$$

A treia ecuaţie a lui Maxwell (sau forma locală a legii lui Ampère)

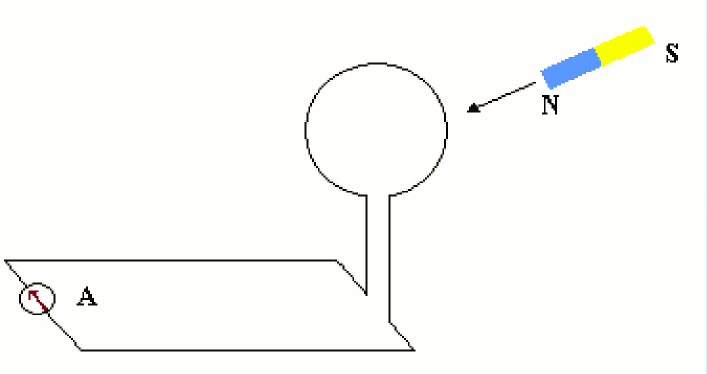
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu\, \vec{j} \qquad \boxed{rot\, \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}}$$

7. Câmpul electromagnetic

7.3 Câmpul magnetic

Inductia electromagnetica. Legea lui Faraday

"Nu ştiu la ce este bună electricitatea generată prin inducţie electromagnetică, dar ştiu că, într-o zi, ministru va pune impozit pe ea!" Faraday, 1825.



Inducţie electromagnetică: apariţia unei tensiuni electromotoare într-un circuit străbătut de un flux magnetic variabil în timp.

Conform legii inducţiei electromagnetice (Faraday): t.e.m. indusă într-un circuit este egală cu viteza de variaţie a fluxului magnetic prin suprafaţa acelui circuit, luată cu semn schimbat:

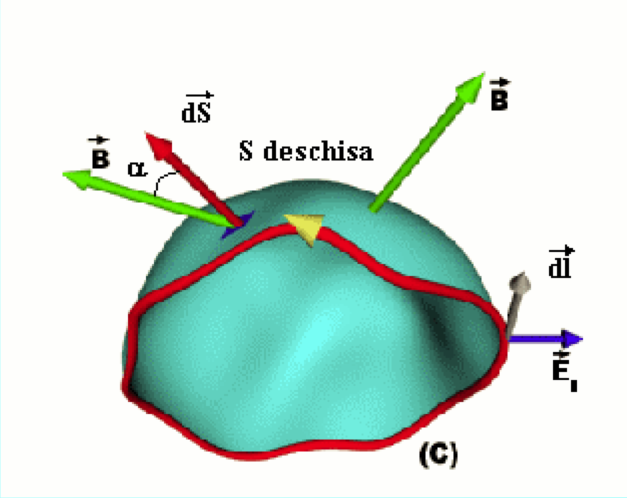
$$e = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Regula lui Lenz pentru determinarea sensului curentului indus: t.e.m. indusă şi curentul indus au un astfel de sens, încât fluxul magnetic produs de curentul indus să se opună variaţiei fluxului magnetic inductor.

7. Câmpul electromagnetic

7.3. Câmpul magnetic

Inductia electromagnetica. Legea lui Faraday



Fluxul magnetic: $d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = B\cos\alpha dS$

Tensiunea electromotoare indusă: $e = \oint_{(C)} \vec{E}\, d\vec{l}$

Teorema Stokes: $e = \oint_{(C)} \vec{E}\, d\vec{l} = \iint_{S} (\nabla \times \vec{E})d\vec{S}$

Tensiunea electromotoare indusă este egală cu derivata la timp a fluxului magnetic

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_{S} \vec{B}d\vec{S}\right) = -\iint_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

Legea lui Faraday a inducției electromagnetice. <u>A patra ecuație Maxwell</u>

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

7. Câmpul electromagnetic

7.3 Câmpul magnetic

Autoinducţie

Autoinducţia - fenomenul de inducţie electromagnetică într-o bobină datorită variaţiei curentului electric ce o străbate.

Considerăm o bobină prin care trece un curent variabil în timp. Tensiunea ce apare la capetele bobinei, datorită variaţiei curentului electric prin ea, este de forma:

$$e = -\frac{d\varphi_m}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

L - inductanţa bobinei

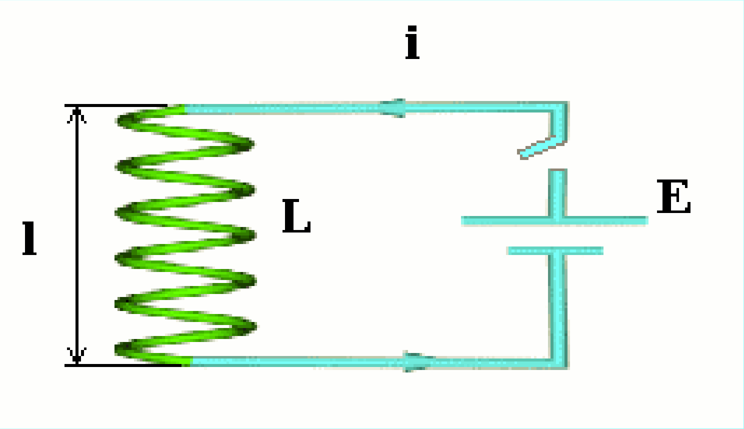
$$L = \frac{\mu N^2 S}{l}$$

unde N este numărul de spire, l este lungimea bobinei, iar S este secţiunea bobinei

$$[L]_{SI} = H \; ; \quad 1\,H = \frac{Wb}{A}$$

7. Câmpul electromagnetic

7.3 Câmpul magnetic
Energia câmpului magnetic



Inducția câmpului magnetic din solenoid:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

Energia câmpului magnetic din solenoid:

$$W = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} S\, l = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} V$$

Densitatea de energie a câmpului magnetic:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2$$

Densitatea de energie a câmpului electric:

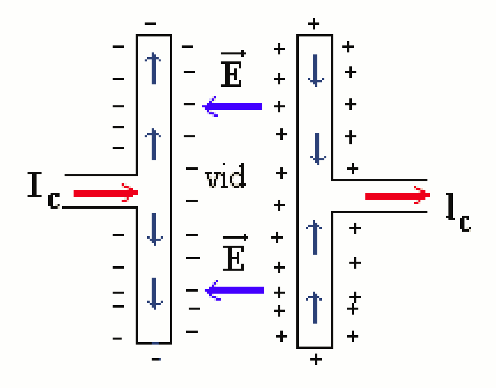
$$\mathrm{w} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

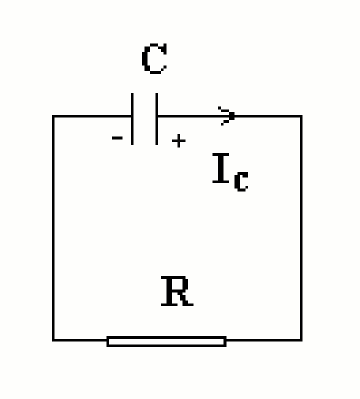
7. Câmpul electromagnetic

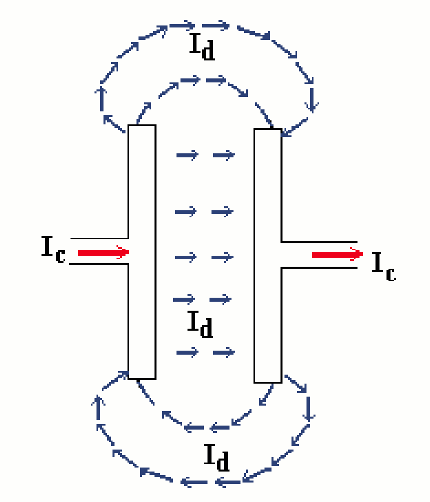
7.3 Câmpul magnetic

Curenţi de conducţie şi curenţi de deplasare

Considerăm un condensator plan cu armăturile în vid, care a fost încărcat cu sarcina electrică de la o sursă exterioară. Apoi condensatorul se descarcă pe o rezistenţă electrică







I_c – ***intensitatea curentului de conducţie***

În timpul descărcării, câmpul electric din condensator scade până la valoarea zero => ***curent de deplasare – I_d***

Densitatea curentului de deplasare (Maxwell): $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

<u>A treia ecuaţie a lui Maxwell</u>

sau Ec. lui Ampere

7. Câmpul electromagnetic

Ecuaţiile Maxwell în forma integrală sau globală

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B}\,d\vec{S} = 0$$

$$\oint_{(C)} \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0\left(\int_S \vec{j}_c\,d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\,d\vec{S}\right)$$

$$\oint_{(C)} \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\,d\vec{S}$$

7. Câmpul electromagnetic

Ecuaţiile Maxwell în forma locală sau diferenţială

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$div\vec{B} = 0$$

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- Definesca legea lui Coulomb
- Definească câmpul electric
- Definească intensitatea câmpului electric
- Cunoască legea lui Gauss
- Cunoască legea lui Ohm
- Definească capacitatea electrica
- Definească potenţialul electric
- Definească energia electrica
- Definească prima ecuaţie a lui Maxwell

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- ✓ Definesca câmpul magnetic
- ✓ Acţiunea câmpului magnetic asupra sarcinilor electrice în mişcare
- ✓ Acţiunea câmpului magnetic asupra unui conductor parcurs de curent electric
- ✓ Câmpul magnetic creat de curenţii electrici
- ✓ Definească fluxul magnetic. Legea lui Gauss pentru magnetism
- ✓ Definească legea circuitului magnetic. Legea lui Ampère
- ✓ Definească inductia electromagnetica. Legea lui Faraday
- ✓ Definească autoinducţia
- ✓ Definească energia câmpului magnetic
- ✓ **Cunoască ecuaţiile lui MAXWELL**

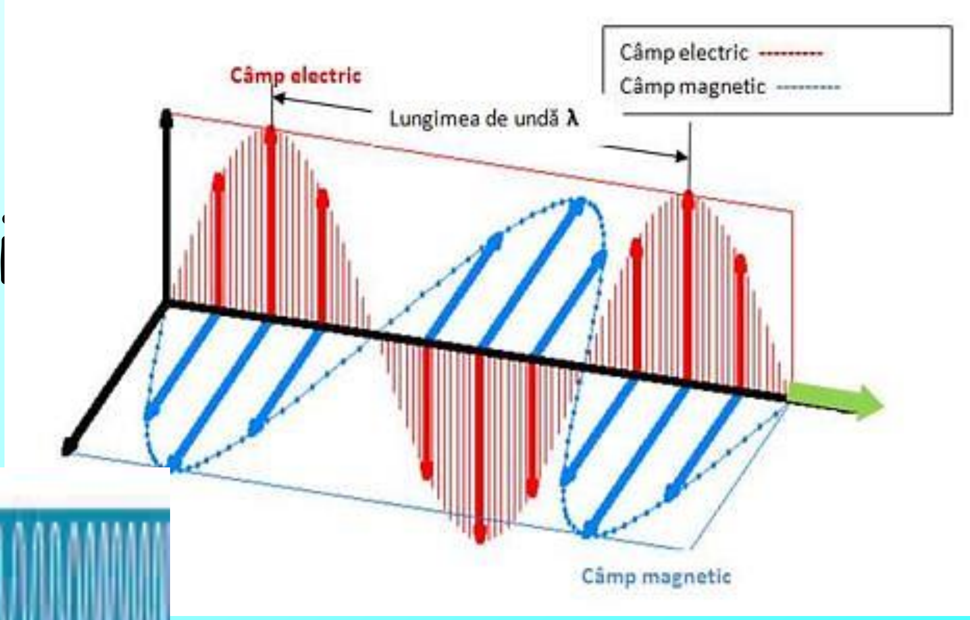
BIBLIOGRAFIE

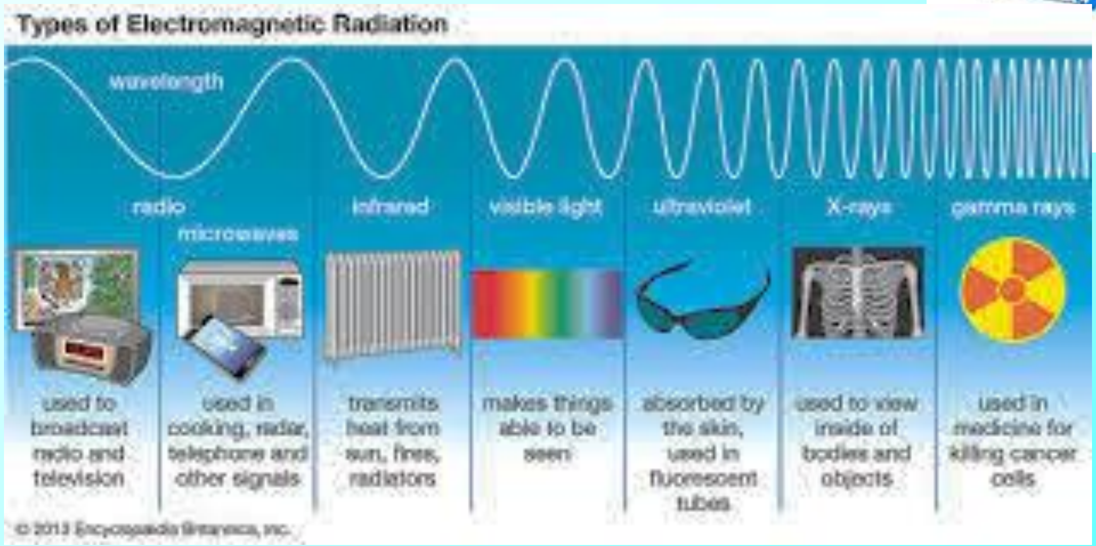
- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, in format electronic, pentru studenţii din învăţământul tehnic din Timişoara, F. Barvinschi, site: http://www.et.upt.ro/etf/index.php?link=2&sublink=1203&pag=1&lang=ro
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Editura Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008.
- Fizică, F. W. Sears, M. Zemansky, H. Young, Ed. Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1983.
- wikipedia.org

FIZICĂ PENTRU INGINERI

Prezentat de

Trif-Tordai Deli





CURSUL 13
2020-2021

8. Unde electromagnetice

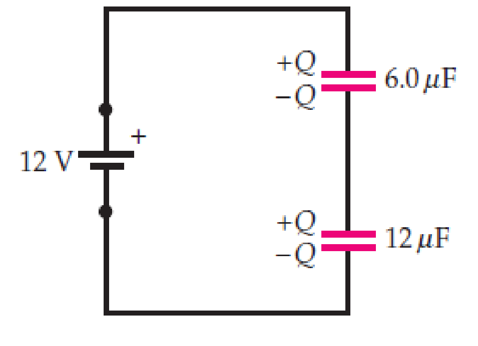
- **Ecuaţiile Maxwell**
- **Ecuația de propagarea undelor electromagnetice**
- **Viteza de propagarea undelor electromagnetice**
- **Proprietățile undelor electromagnetice**

Recapitulare: Capitol 8 – Fenomene electrice

Aplicaţia 1

Două condensatoare de 60μF, respectiv 12μF sunt legate în serie la o baterie de 12 V. Să se determine sarcina Q si diferenţa de potenţial care trece prin fiecare condensator.

Raspuns:



(a)

Sarcina pentru fiecare condensator este egala cu sarcina pe circuitul echivalent:

$$Q = C_{eq}V = (4.0\ \mu\text{F})(12\ \text{V}) = \boxed{48\ \mu\text{C}}$$

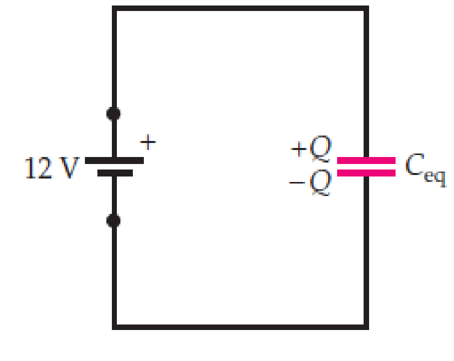
Capacitatea electrică echivalenta: $C_{eq} = 4.0\ \mu\text{F}$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6.0\ \mu\text{F}} + \frac{1}{12\ \mu\text{F}} = \frac{3}{12\ \mu\text{F}}$$

Tensiunea electrică pentru fiecare condensator:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{48\ \mu\text{C}}{6.0\ \mu\text{F}} = \boxed{8.0\ \text{V}}$$

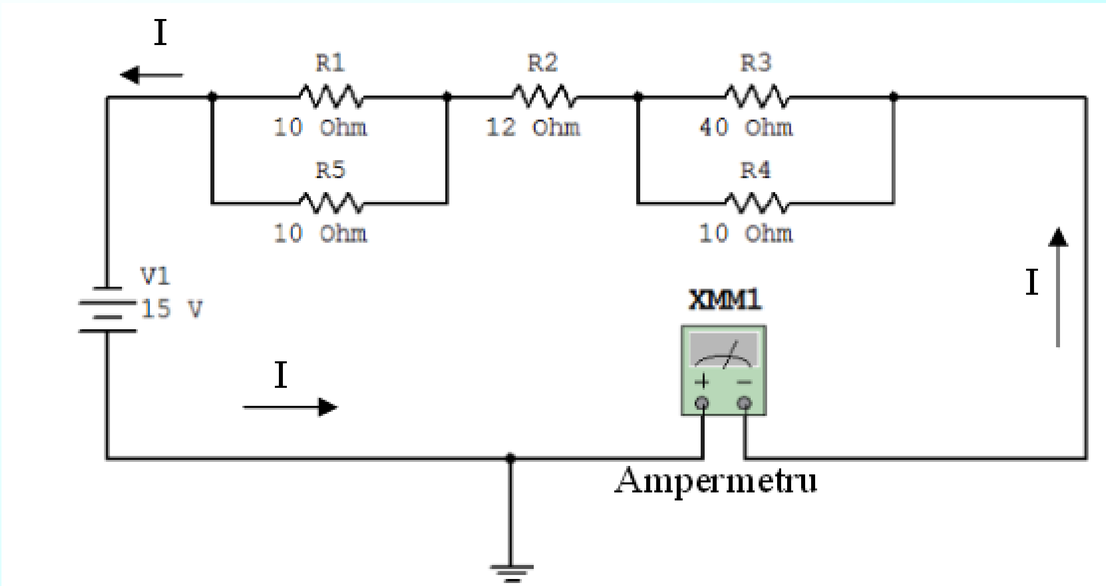
$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{48\ \mu\text{C}}{12\ \mu\text{F}} = \boxed{4.0\ \text{V}}$$



(b)

Recapitulare: Capitol 8 – Fenomene electrice

Aplicaţia 2



Se dau :

$R_1 = 10\ \Omega$

$R_2 = 12\ \Omega$

$R_3 = 40\ \Omega$

$R_4 = 10\ \Omega$

$R_5 = 10\ \Omega$

V1 = 12 V

Se cer : Rezistenţa echivalentă

Intensitatea curentului

Răspuns:

$R_E = 25\ \Omega$

$I = 0{,}6\ A$

8. Unde electromagnetice

Unda electromagnetică = ansamblu de variații ale câmpurilor electric și magnetic care se propagă în spațiu

Obs. Unda electromagnetică este o undă transversală

Ecuaţiile Maxwell în forma integrală sau globală

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$

$$\oint_{(C)} \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}$$

$$\oint_{(C)} \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\left(\int_S \vec{j}_c d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}d\vec{S}\right)$$

8. Unde electromagnetice

Ecuaţiile Maxwell în forma locală sau diferenţială

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ legea Gauss a fluxului electric

$$div\vec{B} = 0$$ legea Gauss a fluxului magnetic

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ legea lui Ampere

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ legea inducției electromagnetice (Faraday)

legile de material: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

8. Unde electromagnetice

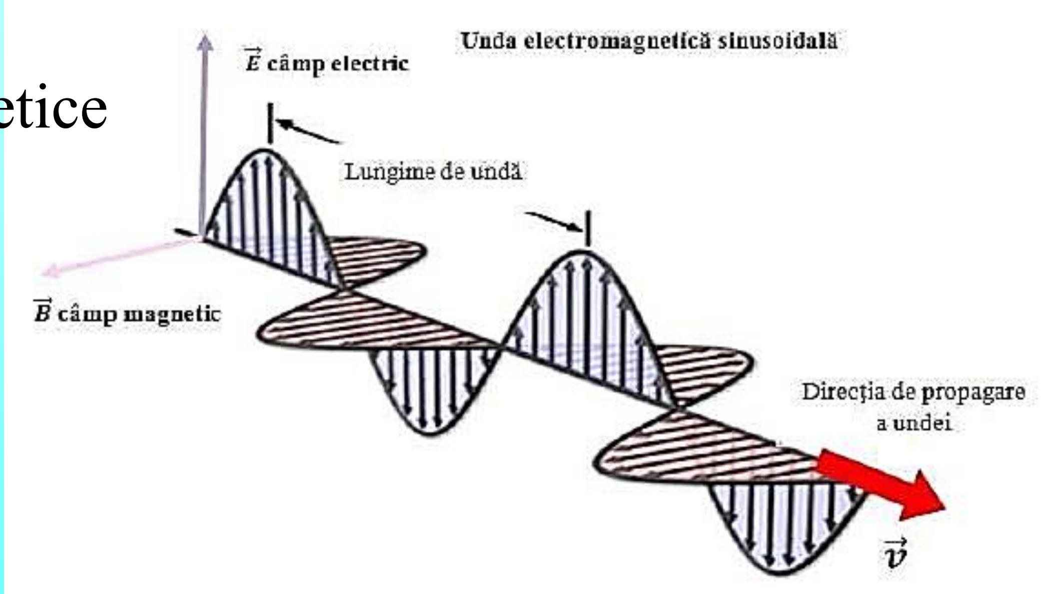
Ecuația de propagarea undelor electromagnetice

În medii dielectrice (ex: vid, aer, sticlă, etc.) densitatea de curent $\vec{j}$ și densitatea volumică de sarcină electrică ρ sunt egale cu zero. În astfel de medii neconductoare ($\sigma = 0$), ecuațiile Maxwell devin:

$$\boldsymbol{rot\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \ \ (\mathbf{1}); \qquad \boldsymbol{rot\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}} \ \ (\mathbf{2}); \quad \mathrm{div}\vec{E} = 0; \quad \mathrm{div}\vec{H} = 0$$

Din aceste ecuații rezultă că un câmp electric variabil în timp generează un câmp magnetic, care la rândul lui generează un câmp electric ș.a.m.d.

Astfel, perturbațiile electromagnetice se propagă în spațiu, din aproape în aproape, cu viteză finită, sub formă de unde electromagnetice.



8. Unde electromagnetice

Ecuația de propagarea undelor electromagnetice

Pt. obținerea ecuației de propagare se aplică “rot” primei ecuații (1).

$$rot\, rot\vec{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} rot\vec{E} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}; \qquad (dar\; rot\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t});$$

unde $rot\, rot\vec{H} = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{H}\right) = \nabla\left(\nabla \vec{H}\right) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{H} =$

$$= grad\; div\vec{H} - \Delta\vec{H} = -\Delta\vec{H}$$

Astfel se ajunge la ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad (3)$$

Analog, dacă se aplică operatorul “*rot*” la ecuația a doua (2) si rezultă:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (4)$$

8. Unde electromagnetice

Viteza de propagarea undelor electromagnetice

S-a arătat în capitolul unde elastice, că ecuația de propagare a undelor este: $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0$,.

Comparând ecuația generală a undelor cu ecuațiile (3) și (4) se obține prin identificarea termenilor că în undele electromagnetice ambele câmpuri se propagă cu viteza:

$$u=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\frac{c}{n} \qquad (5)$$

unde c este viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid

$$\mathrm{c}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=3\cdot 10^8\ m/s$$

$$\varepsilon_0=8{,}85\,10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \qquad \mu_0=4\pi 10^{-7}\frac{Wb}{Am}\left(sau\ \frac{H}{m}\right)$$

permitivitatea dielectrică în vid permeabilitatea magnetică în vid

$\mathrm{n}=\sqrt{\varepsilon_r}$ – indicele de refracție, $\mu_r=1$ pt mediile dielectrice

8. Unde electromagnetice

Aplicație: O rază de lumină cu lungimea de undă de 550 nm pătrunde din mediul 1 (aer) în mediul 2 (material transparent). Daca raza incidentă formează un unghi de 40° cu normala, iar raza refractată (transmisă) un unghi de 26° cu normala, să de determine indicele de refracție al materialului. Să se calculeze viteza luminii și lungimea de undă în material. Se consideră indicele de refracție al aerului $n_1 = 1$.

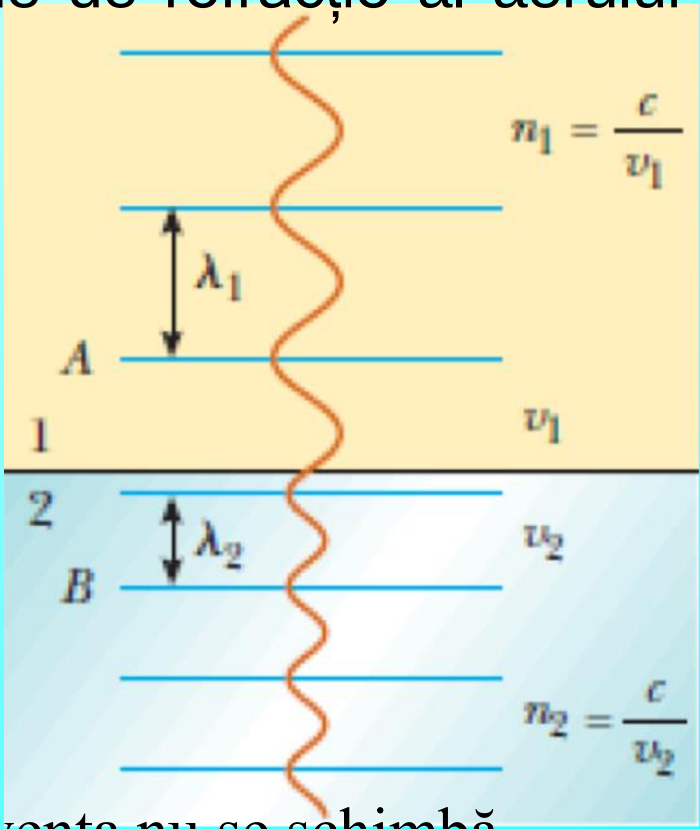
Rezolvare:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$n_2 = n_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = (1.00)\frac{\sin 40.0°}{\sin 26.0°}$$

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3.00\times10^8\ \mathrm{m/s}}{1.47} = \boxed{2.04\times10^8\ \mathrm{m/s}}$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{550\ \mathrm{nm}}{1.47} = \boxed{374\ \mathrm{nm}}$$



Dacă o undă trece dintr-un mediu în altul, frecvența nu se schimbă

8. Unde electromagnetice

Legătura dintre *E*, *B* si *c*

Soluțiile generale ale ecuațiilor (3) și (4) pentru undele electromagnetice plane, care se propagă de-a lungul axei *x*:

$$E(x,t) = E_{max}\sin(\omega t - kx)(*)$$

$$B(x,t) = B_{max}\sin(\omega t - kx)(**)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -kE_{\max}\cos(\omega \mathrm{t} - \mathrm{kx}) \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = \omega B_{\max}\cos(\omega \mathrm{t} - \mathrm{kx})$$

Legea lui Faraday: $\nabla \times \vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{t}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

Dar, $\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f = u = c$

Rezultă: $kE_{\max} = \omega B_{\max}$ $\longrightarrow$ $E_{\max} = \frac{\omega}{k}B_{\max}$ $\longrightarrow$ $\boxed{E = cB}$

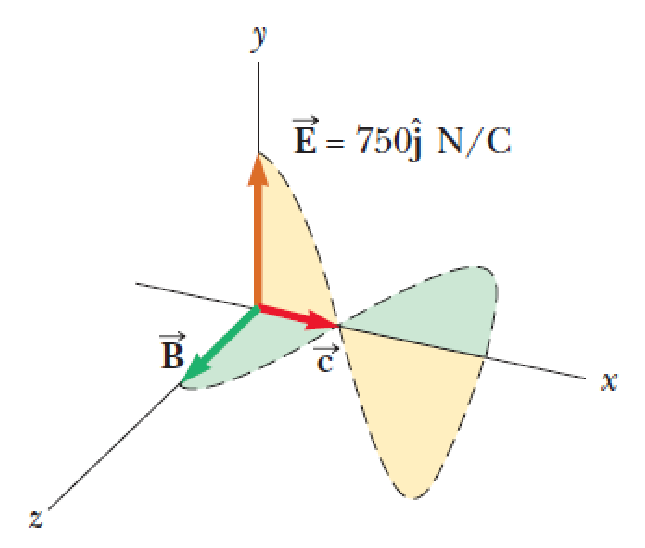
(*) si (**)

8. Unde electromagnetice

Legătura dintre *E*, *B* si *c*

Aplicatie:

O undă electromagnetică sinusoidală cu frecvența 40 MHz se propagă prin spațiu de a lungul axei *x*.



a) Determinați lungimea de undă și perioada undei.

b) La un moment dat, într-un punct, câmpul electric are valoarea maximă de 750 N/C și este direcționat de-a lungul axei *y*. Calculați magnitudinea și direcția câmpului magnetic în această poziție.

Rezolvare:

a) Lungimea de undă: $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{40.0 \times 10^6 \text{ Hz}} = 7.50 \text{ m}$

Perioada: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{40.0 \times 10^6 \text{ Hz}} = 2.50 \times 10^{-8} \text{ s}$

b) $B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c} = \frac{750 \text{ N/C}}{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}} = 2.50 \times 10^{-6} \text{ T}$

8. Unde electromagnetice

Soluțiile generale ale ecuațiilor (3) și (4) pentru undele electromagnetice plane, progresive sunt:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \qquad (6)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \qquad (7)$$

unde $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{s} = k\vec{s}$ este vector de undă, iar

$\vec{s}$ – vectorul unitate orientat în sensul propagării undei

Proprietățile undelor electromagnetice

1. Undele electromagnetice sunt transversale, adică vectorii ***E*** și ***H*** vibrează perpendicular pe direcția de propagare a undei:

$$\vec{E} \perp \vec{s} \qquad \vec{H} \perp \vec{s} \qquad (8)$$

Această proprietate rezultă din ec. (6) și (7) sau din ec. Maxwell:

$$\mathrm{div}\vec{H}(\vec{r},t) = -i\vec{k}\vec{H}(\vec{r},t) = -ik\vec{s}\vec{H}(\vec{r},t) = 0;$$

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r},t) = -i\vec{k}\vec{E}(\vec{r},t) = -ik\vec{s}\vec{E}(\vec{r},t) = 0;$$

Deoarece produsul scalar este egal cu zero, dacă vectorii sunt perpendiculari între ei, rezultă proprietatea (8).

8. Unde electromagnetice

Proprietățile undelor electromagnetice

2. Vectorii ***E*** și ***H*** sunt perpendiculari între ei.

Din ec. (6) și (7) rezultă egalitățile:

$$rot\vec{H} = -i(\vec{k}\times\vec{H}) = -ik(\vec{s}\times\vec{H}) = -i\frac{\omega}{u}(\vec{s}\times\vec{H}); \qquad \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = i\omega\vec{H}$$

$$rot\vec{E} = -i(\vec{k}\times\vec{E}) = -ik(\vec{s}\times\vec{E}) = -i\frac{\omega}{u}(\vec{s}\times\vec{E}); \qquad \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = i\omega\vec{E}$$

Dacă se introduc aceste relații în ecuațiile Maxwell (1) și (2) se obține:

$$-i\frac{\omega}{u}(\vec{s}\times\vec{H}) = i\omega\varepsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(\vec{s}\times\vec{H})$$

$$-i\frac{\omega}{u}(\vec{s}\times\vec{E}) = -i\omega\mu\vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\vec{s}\times\vec{E})$$

Din aceste expresii rezultă că în unda electromagnetică vectorii ***E*** și ***H*** sunt perpendiculari între ei, iar vectorii ***E***, ***H*** și ***s*** formează un triedru drept.

8. Unde electromagnetice

Proprietățile undelor electromagnetice

2. <u>Vectorii ***E*** și ***H*** sunt perpendiculari între ei</u>.

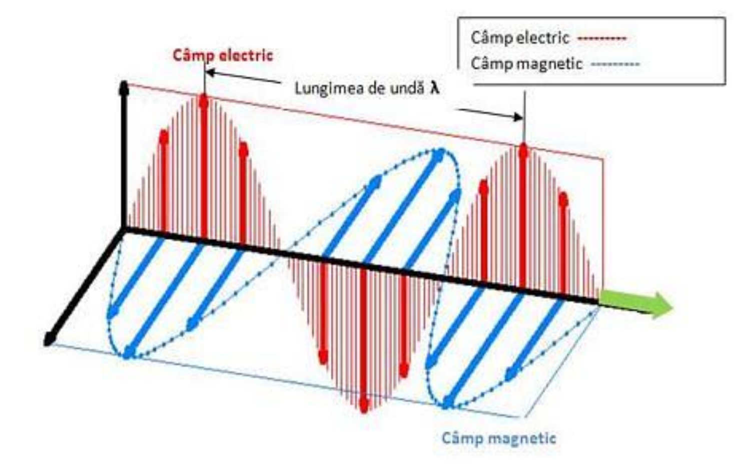
$$\vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{E} \times (\vec{s} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\vec{E}^2\vec{s} - \vec{E}(\vec{E}\vec{s})\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{E}^2\vec{s} \qquad (9)$$

Notăm vectorul Poynting cu: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r});\ [S]_{SI} = [E]_{SI} \cdot [H]_{SI} = \frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}$$

3. <u>Vibrațiile vectorilor ***E*** și ***H*** sunt în fază </u>și avem relațiile:

$$\sqrt{\varepsilon}\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\mu}\left|\vec{H}\right| \qquad (10)$$



Relația 10 ne arată că vectorii ***E*** și ***H*** ating valori maxime, respectiv minime, concomitent și în aceleași puncte din spațiu, adică oscilează în fază.

Din relația (10) se obține: $\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left|\vec{H}\right| = \mathrm{Z}\left|\vec{H}\right|$

8. Unde electromagnetice

Proprietățile undelor electromagnetice

3. <u>Vibrațiile vectorilor ***E*** și ***H*** sunt în fază</u>

unde $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{Z_0}{n}$ este impedanța de undă a mediului dielectric considerat

Pentru medii dielectrice in care $\mu_r = 1$ se introduce indicele de refracție:

$n = \sqrt{\varepsilon_r}$, iar

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\ \Omega$$

este impedanța de undă a vidului, fiind o constantă universală.

4. <u>Intensitatea undelor electromagnetice plane</u> reprezintă valoarea medie a modulului vectorului Poynting

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle$$

8. Unde electromagnetice

Proprietățile undelor electromagnetice

4. Intensitatea undelor electromagnetice plane reprezintă valoarea medie a modulului vectorului Poynting

sau

$$I = \frac{1}{2Z}E_0^2 = \frac{n}{2Z_0}E_0^2 = \frac{Z_0}{2n}H_0^2$$

Rezultă că intensitatea undelor electromagnetice, analog cu intensitatea undelor elastice, este proporțională cu pătratul amplitudinii E_0 sau H_0.

Vectorul Poyntig este un vector care are direcția și sensul de propagare a undei (energiei) și mărimea egală cu energia transferată în unitatea de suprafață normală la direcția de propagare.

Densitatea volumică de energie a câmpului electromagnetic:

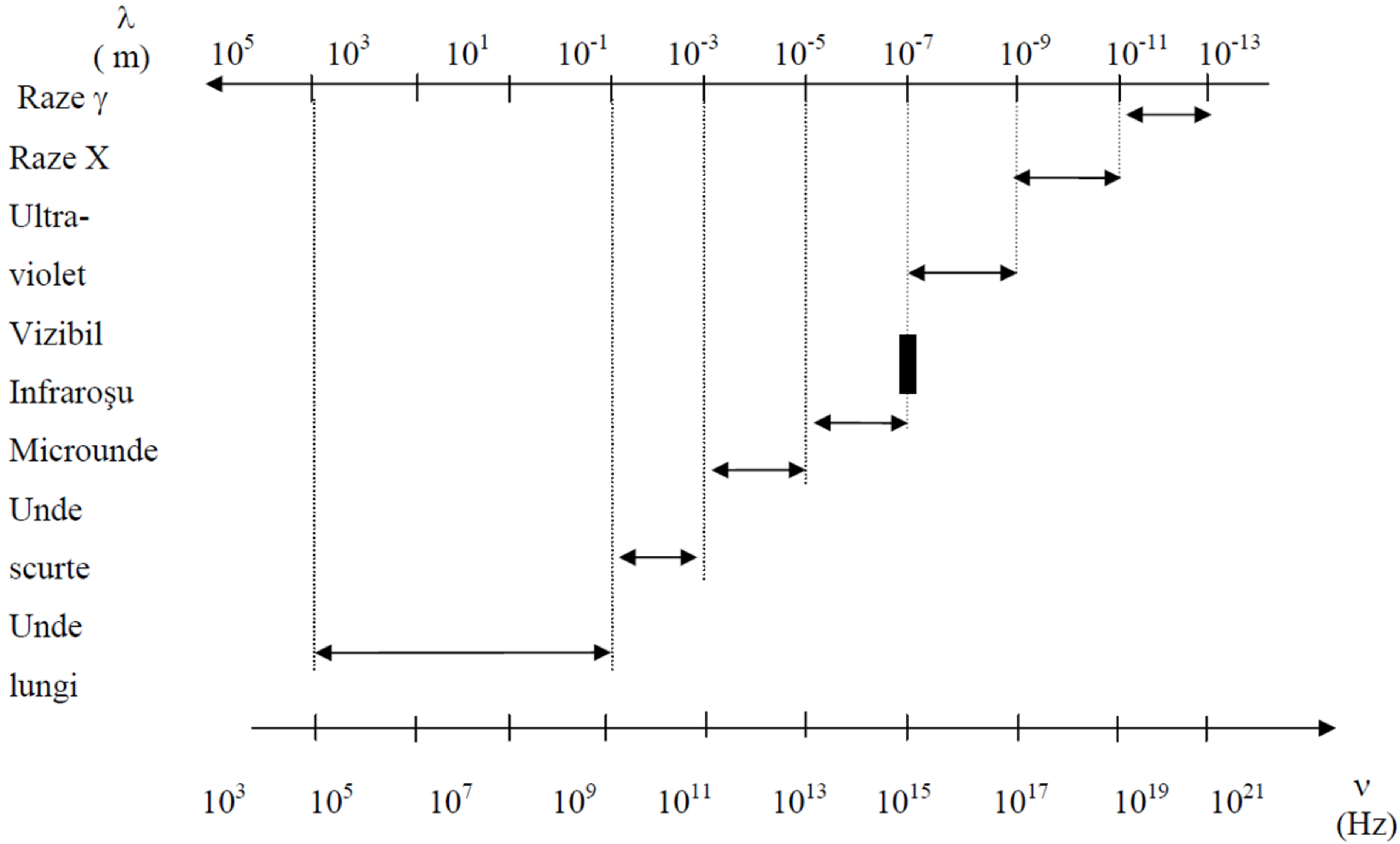
$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{1}{\mu}EH$$

5. Undele electromagnetice acoperă un domeniu larg de frecvențe, respectiv de lungimi de undă.

8. Unde electromagnetice

Proprietățile undelor electromagnetice

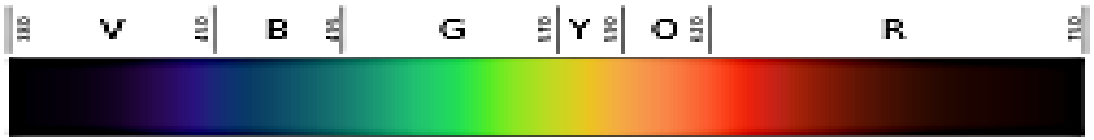
5. Undele electromagnetice acoperă un domeniu larg de frecvențe



8. Unde electromagnetice

Proprietățile undelor electromagnetice

5. <u>Undele electromagnetice acoperă un domeniu larg de frecvențe</u>



Color	Wavelength	Frequency	Photon energy
violet	380–450 nm	668–789 THz	2.75–3.26 eV
blue	450–495 nm	606–668 THz	2.50–2.75 eV
green	495–570 nm	526–606 THz	2.17–2.50 eV
yellow	570–590 nm	508–526 THz	2.10–2.17 eV
orange	590–620 nm	484–508 THz	2.00–2.10 eV
red	620–750 nm	400–484 THz	1.65–2.00 eV

https://en.wikipedia.org/wiki/Visible_spectrum

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- ✓ **Definească undele electromagnetice**
- ✓ **Cunoască ecuaţiile lui MAXWELL**
- ✓ **Cunoscă ecuația de propagarea undelor electromagnetice**
- ✓ **Cunoscă viteza de propagarea undelor electromagnetice**
- ✓ **Cunoscă proprietățile undelor electromagnetice**
- ✓ **Definească vectorul Poynting**

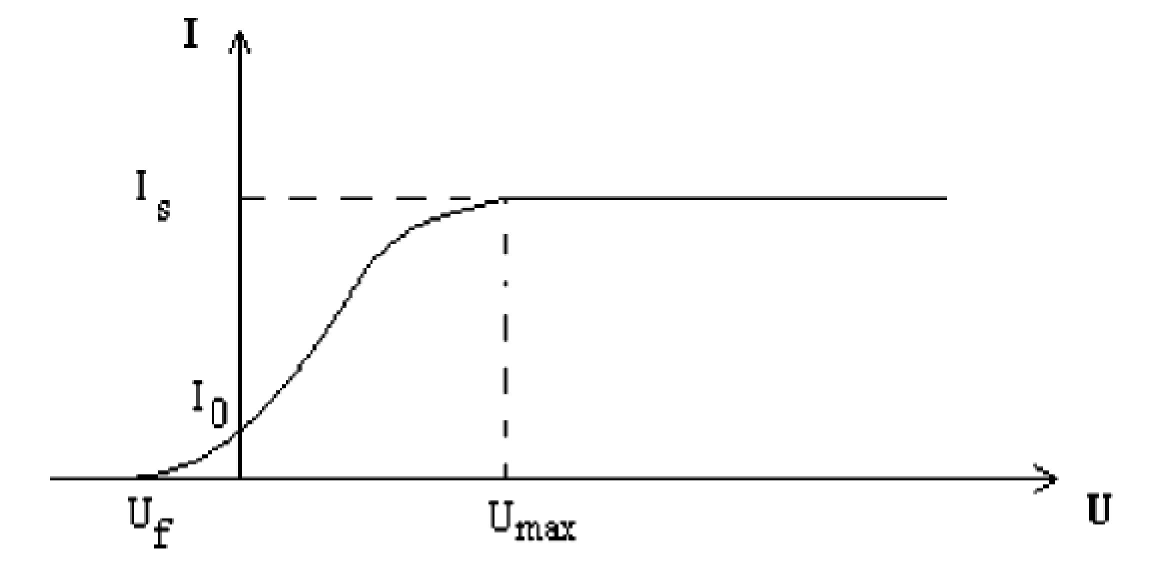
BIBLIOGRAFIE

- **Fizica,** F. W.Sears, Zemansky , H. D.Young, Ed. Didactica si Pedagogica, 1983;
- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, F. Barvinschi, Ed. Orizonturi Universitare, 2016;
- **Elemente de fizică generală,** D. Popov, I. Damian, Ed. Politehnica, 2014;
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Ed. Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008
- **PHYSICS for Scientist and Engineers with Modern Physics** – Seventh Edition, R. Serway, J. Jewett, ed. Thomson Brooks/Cole, 2008.
- **Sears & Zemansky's University Physics: with Modern Physics**, 13th Edition, H. Young, R. Freedman, ed. Pearson, 2012

FIZICĂ PENTRU INGINERI

Prezentat de

Trif-Tordai Delia



Universitatea Politehnica Timişoara, România

CURSUL 14

9. Originile fizicii cuantice

- 9.1. Radiaţia termică
  - Mărimi fizice care caracterizează radiaţia termică
  - Legile clasice ale radiaţiei termice
- 9.2. Efectul fotoelectric
- 9.3. Interacţiunea dintre microparticule şi fotoni
- 9.4. Efectul Compton
- 9.5. Spectre atomice

9. Originile fizicii cuantice

Fizica cuantică studiază legile de mişcare ale microparticulelor (e-, p+,...) şi ale sistemelor care cuprind aceste microparticule (nuclee atomice, atomi, molecule, ioni) precum şi interacțiunile care guvernează mișcarea acestora.

9.1. Radiaţia termică

Radiația termica = emisia de energie în mediul ambiant, sub forma de unde electromagnetice, pe care o realizează orice corp, indiferent de temperatura la care se afla**.**

Structura spectrală a radiaţiei termice depinde de temperatura *T* a corpurilor.

Mărimi fizice care caracterizează radiaţia termică

a) Fluxul energetic Φ se defineşte prin raportul dintre energia radiată şi timpul corespunzător

$$\Phi = \frac{dW}{dt} \ ; \ [\Phi] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{Watt}$$

9. Originile fizicii cuantice

9.1. Radiaţia termică

Mărimi fizice care caracterizează radiaţia termică

b) Deoarece fluxul energetic cuprinde radiaţii cu diferite lungimi de undă şi depinde de temperatură, se defineşte fluxul spectral pe $[\lambda,\ \lambda + d\lambda]$:

$$\Phi_\lambda = \frac{d\Phi}{d\lambda} \qquad \Rightarrow \Phi = \int_0^\infty \Phi_\lambda d\lambda$$

c) Radianţa energetică R este raportul dintre fluxul energetic emis de o suprafaţă elementară şi aria dS a acestei suprafeţe:

$$R = \frac{d\Phi}{dS} \quad ; \quad [R] = \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2}$$

Obs: R depinde de λ a radiației emise si de T absoluta a corpului radiant.

d) Radianta spectrala pe intervalul $[\lambda,\ \lambda + d\lambda]$

$$R_\lambda = \frac{dR}{d\lambda} \qquad \Rightarrow R = \int_0^\infty R_\lambda d\lambda$$

9. Originile fizicii cuantice

9.1. Radiaţia termică

Mărimi fizice care caracterizează radiaţia termică

e) Densitatea volumica de energie

$$w = \frac{dW}{dV} \;;\; [w] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$$

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon \mathrm{E}^2 + \mu \mathrm{H}^2)$$

f) Densitatea specifica spectrala, pe intervalul $[\lambda,\ \lambda + d\lambda]$

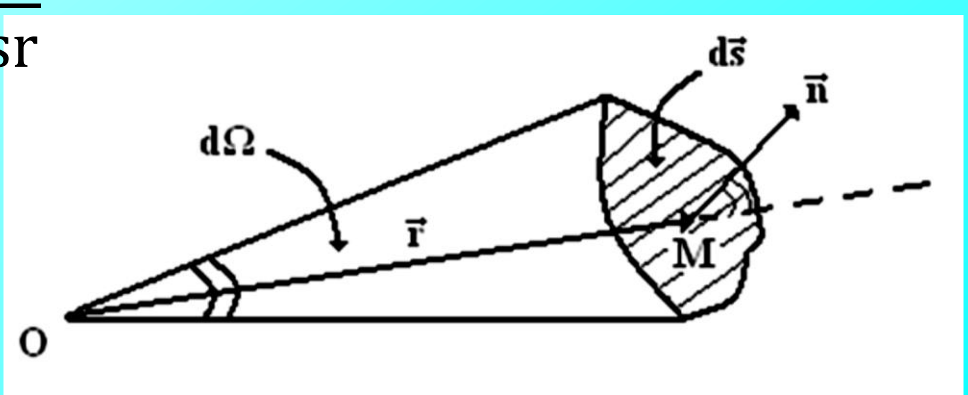
$$w_\lambda = \frac{dw}{d\lambda} \overset{not}{=} \rho_\lambda \quad \Rightarrow \quad w = \int_0^\infty \rho_\lambda d\lambda$$

g) Intensitatea energetică a unei surse punctiforme reprezinta fluxul de radiaţie emis în unitatea de unghi solid:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}, \qquad \text{cu unitatea } [I]_{SI} = 1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}}$$

Elementul de unghi solid este:

$$d\Omega = \frac{\vec{r}\,d\vec{A}}{r^3} = \frac{dA}{r^2}\cos\theta$$



9. Originile fizicii cuantice

9.1. Radiaţia termică

Legile clasice ale radiaţiei termice

a) LEGEA STEFAN – BOLTZMANN $R_T = \sigma T^4$

$\sigma = 5.6 \cdot 10^{-8} \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}$ constanta lui Stefan-Boltzmann

Daca suprafata corpului nu este absolut neagra (corp real), atunci:

$0 < \varepsilon < 1$

$R_T = \varepsilon \sigma T^4$ ε = emisivitatea (caracterizeaza suprafata corpului radiant)

b) LEGEA LUI WIEN $\lambda_{max} = \dfrac{const}{T}$ $const = 2.8 \cdot 10^{-3}$ m K

9. Originile fizicii cuantice

9.1. Radiaţia termică

Legile clasice ale radiaţiei termice

c) LEGEA LUI PLANCK

- 1905, Planck, ipoteza: emisia si absorbtia radiatiei electromagnetice se realizeaza discret prin cuante de energie ($\varepsilon = h\upsilon$)

$$E_n = n\varepsilon \qquad (\text{unde } n = 1, 2, 3, .)$$

- Planck: Energia atomilor poate avea doar valori discrete:

E1 , E2 , ... , Ei , ...

- Planck: La trecerea atomului din starea cu energia E_k în starea cu energia E_n, atomul emite sau absoarbe o cuanta de energie:

$$h\nu_{kn} = E_k - E_n$$

- Planck deduce legea radiatiei corpului negru:

$$r_{\lambda,T} = \frac{c_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

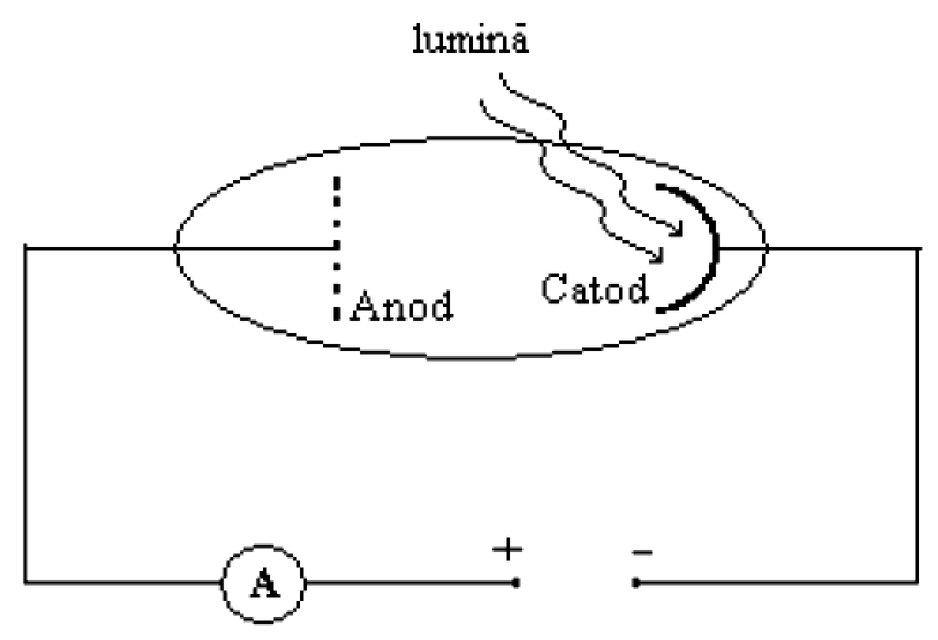
Legea lui Planck pentru radiatia corpului negru

9. Originile fizicii cuantice

9.2. Efectul fotoelectric

- 1887 – a fost descoperit experimetal de către Hertz, prin iluminare, placutele metalice emit electroni

Efectul fotoelectric = emisa de electroni de către metale sub acțiunea undelor electromagnetice

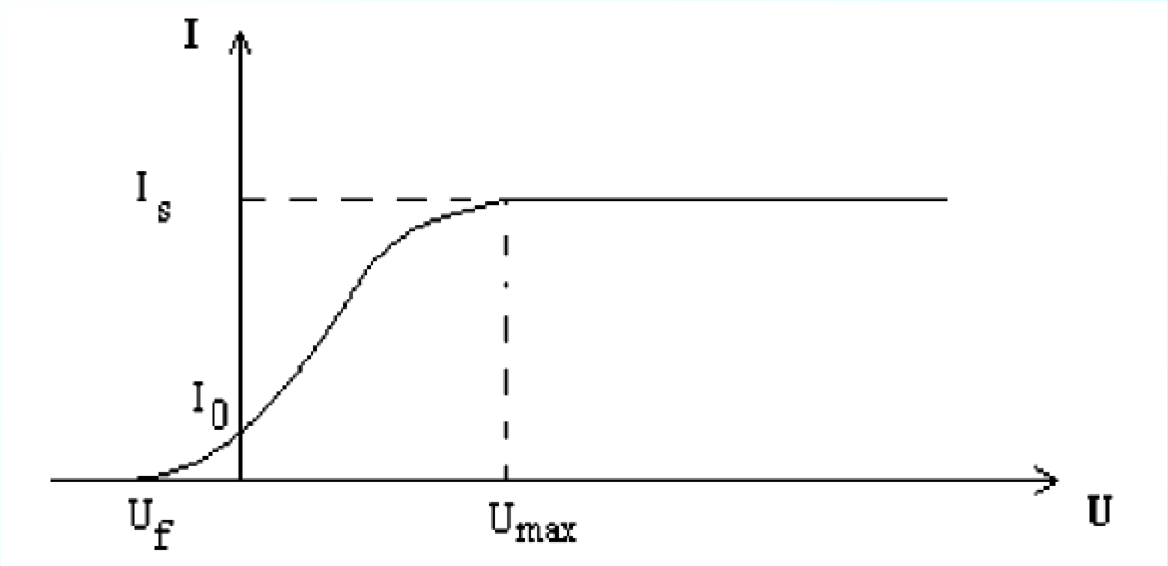


În anul 1888 Stoletov şi Edison au utilizat montajul experimental din figură pentru a studia efectul fotoelectric.

Montajul este format dintr-o celulă fotoelectrică (un catod metalic şi un anod sub forma unei grile metalice, închise într-un tub vidat), un ampermentru, o sursă de curent electric continuu cu polaritatea pozitivă spre anod şi o sursă de lumină monocromatică.

9. Originile fizicii cuantice

9.2. Efectul fotoelectric



Caracteristica I-U a fotocelulei

I_{sat} = intensitatea curentului fotoelectric de saturație
U_f = tensiunea de frânare

$$\frac{m v^2}{2} = e\,U_f$$

9. Originile fizicii cuantice

9.2. Efectul fotoelectric

Legile experimentale ale efectului fotoelectric:

1. Intensitatea I_s curentului fotoelectric de saturaţie este proporţională cu intensitatea I a radiaţiei monocromatice incidentă, când frecvenţa este constantă .

2. Pentru un fotocatod dat, efectul fotoelectric are loc numai dacă frecventa ν a radiaţiei incidente este mai mare decât o anumită valoarea ν_0

$$\nu > \nu_0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda > \lambda_0, \qquad \text{iar} \qquad \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$$

unde ν_0 este frecventa de prag, iar λ_0 - lungimea de undă de prag

3. Pentru un $\nu > \nu_0$, energia cinetică maximă a fotoelectronilor este proporțională cu frecvența radiației incidente ($E_c \sim \nu$) si nu depinde de fluxul radiației incidente ($E_c \nsim \phi$)

4. Efectul fotoelectric este practic instantaneu ($\Delta t = 1$ ns)

9. Originile fizicii cuantice

9.2. Efectul fotoelectric

- 1905 Albert Einstein a emis ipoteza că într-un fascicol luminos energia este transportată prin spaţiu sub formă de porţii finite, numite *cuante de energie*, de către fotoni.
- 1900, Planck: radiația termica este emisa sub forma de cuante de energie purtate de “fotoni”. Fiecare foton are energia

$$\varepsilon = h\upsilon = \hbar\omega$$

unde $\hbar$- constanta lui Planck redusă ($\hbar = h/2\pi$)

Fiecare foton din facicolul incident pe catodul fotocelulei ciocneşte un electron căruia îi cedează energia sa. Electronul care a prmit energia fotonului poate fi eliberat din metal, dacă energia fotonului este mai mare decât lucrul de extracţie a electronilor din metal, L_{ext}. Restul de energie a fotonului devine energia cinetică a fotoelectronului emis.

Pe baza acestor ipoteze se obţine legea efectul fotoelectric:

$$h\nu = L_{ext} + \frac{mv^2}{2}$$

9. Originile fizicii cuantice

9.2. Efectul fotoelectric

Să presupunem că frecvenţa fascicolului incident este ν_0 , astfel încât energia fotonului egalează lucrul mecanic de extracţie a electronului din metal:

$$h\nu_0 = L_{ext}$$

Electronul este eliberat din metal, dar nu mai are energie cinetică. Dacă lumina are o frecvenţă mai mică decât ν_0, atunci energia fotonului incident este mai mică decât lucrul mecanic de extracţie, deci efectul fotoelectric nu se mai produce. De aceea, putem spune că fiecare metal are o frecvenţă de prag proprie, căci lucrul mecanic de extracţie a electronilor este specific fiecărui material.

$$\nu_0 = \frac{L_{ext}}{h}$$

Frecvenţa de prag este frecvenţa minimă la care se mai poate produce efectul fotoelectric

9. Originile fizicii cuantice

9.2. Efectul fotoelectric

Mărimile caracteristice fotonului

- energia: $\varepsilon = h\upsilon = mc^2$

  unde $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js (constanta lui Planck), $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

- masa de mişcare: $m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$
- teoria relativităţii a lui Einstein $\varepsilon = mc^2$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

  unde m_0 - masa de repaus, iar v - viteza relativistă a corpului

- viteza: $\mathrm{v} = c \Rightarrow m_0 = 0$
- impulsul: $p = mc = \frac{h\nu}{c^2} c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$
- sarcina electrica: $q = 0$

9. Originile fizicii cuantice

9.2. Efectul fotoelectric. **Aplicatii**

1. Să se calculeze energia cinetică maximă a fotoelectronilor emişi de o placă de argint iradiată cu o radiaţie ultravioletă de lungime $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$ cm. Lucru mecanic de extracţie pentru argint este $L_{ext} = 1{,}51$ eV.

   Răspuns: $E_c = h\frac{c}{\lambda} - L_{ext} = 1{,}5$ eV

2. Lucrul mecanic necesar pentru extracţia electronului de la suprafaţa cesiului este $L_{ext} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J. Cu ce viteză maximă ies electronii din cesiu, dacă pe suprafaţa metalului cade lumină galbenă cu lungimea de undă $\lambda = 0.589$ µm? Se cunoaşte masa de repaus a electronului $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

   Răspuns:

   $$\frac{mv^2}{2} = h\nu - L_{ext} \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{2}{m_0}\left(h\frac{c}{\lambda} - L_{ext}\right)} = 6{,}2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- ✓ **Definească radiația termică**
- ✓ **Definească mărimi fizice care caracterizează radiația termică**
- ✓ **Cunoască legile clasice ale radiației termice**
- ✓ **Cunoască legile efectului fotoelectric**
- ✓ **Definească mărimile caracteristice fotonului**

BIBLIOGRAFIE

- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, in format electronic, pentru studenţii din învăţământul tehnic din Timişoara, F. Barvinschi, site: http://www.et.upt.ro/etf/index.php?link=2&sublink=1203&pag=1&lang=ro
- **Fizica. Elemente fundamenale pentru ingineri,** N. Pop, Ed. Politehnica, 2013;
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Editura Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008.
- Fizică, F. W. Sears, M. Zemansky, H. Young, Ed. Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1983.
- **Fizică. Curs universitar**, Traian Crețu, Ed. Tehnică, București, 1996.