Matematici speciale
(curs 6 - S6)

28.03.2024

O variabilă aleatoare (v.a.) este o funcție ce atribuie un număr real fiecărui rezultat din spațiul tuturor realizărilor unui experiment aleator.

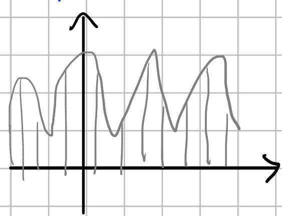
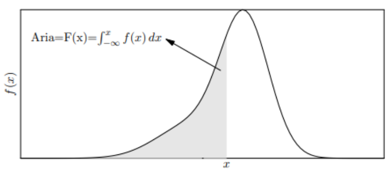
$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Variabilă aleatoare discretă: are valori într-o mulțime finită sau infinit numărabilă

- număr de biți transmiși cu eroare într-un canal de comunicație

Variabilă aleatoare continuă: poate lua orice valoare dintr-un interval din. $\mathbb{R}$ (mărginit sau nu)

- timpul de execuție a unui program
- durata de viață a unei componente electronice
- frecvența de acces în traficul pe WEB
- dimensiunea pachetelor de date în FTP (File Transfer Protocol)

v. a. discrete	v. a. continue
Mulțimea valorilor $b_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ $\rightarrow$ finită / infinită numărabilă	b_X = interval $\overset{not}{=} J$ (poate fi $\mathbb{R}$)
$p_i = P(X = x_i)$ $\sum_i p_i = 1, \; p_i \geq 0$ $p(x) = \begin{cases} p_i, & x = x_i \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$	Densitatea de probabilitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a) $f(x) \geq 0, \; \forall x \in \mathbb{R}$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ $\Leftrightarrow$ + f - integrabilă pe $\mathbb{R}$  **O variabilă aleatoare continuă** este o variabilă aleatoare pentru care distribuția de probabilitate este definită de o densitate de probabilitate (p.d.f.), f_X.
$P(X < a) = \sum_{x_i < a} p_i$	$P(X \in J) = \int f(x)\,dx$ J = aria de subgrafic, $x \in J$ X - v.a. continuă
Funcția de repartiție a unei v.a. X $F_X(x) = P(X \leq x)$ $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ pt. v.a. discretă $F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i$	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = P(X \leq x) =$ $= P[X \in (-\infty, x)]$ $P(X \in J) = \int_J f(t)\,dt$ 

Media

$$M(x) = \sum_i x_i p_i$$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Dispersia

$$\sigma^2(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 \longrightarrow M(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$M(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx$$

Densitatea de probabilitate

Ne interesează: $P(X \in I)$, unde
$I = [a, b], (a, b), (a, b], (a, b); (-\infty, b], (-\infty, b), [a, \infty), (a, \infty)$
Relația dintre p.d.f. și probabilitatea unui eveniment:

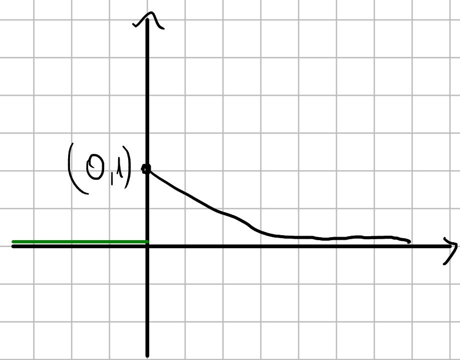
$$P(X \in I) = \int_I f_X(x) dx$$

Interpretare geometrică: $\int_I f_X(x)\, dx=$ aria domeniului de sub graficul lui f

Figure: Aria domeniului hașurat reprezintă $P(a \leq X \leq b)$

Observație: $P(X = a) = P(X \in [a, a]) = \int_a^a f_X(x)dx = 0$.

ex: $f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & , x \geq 0 \end{cases}$



- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$?

$$L.H.S = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}\, dx = -\frac{1}{\ln(e) \cdot e^{\frac{x}{2}}}\Bigg|_0^{\infty} = +\frac{1}{\ln e} - 0 = 1$$

Funcția de repartiție

Proprietăți

Pentru o variabilă aleatoare continuă, funcția de repartiție este:

- continuă
- nedescrecătoare
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

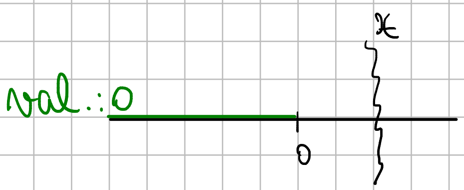
Observație:

$$P(X \in I) = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

În cazul în care una dintre extremitățile intervalului este $\pm\infty$ notăm $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Pt. ex:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$



caz 1: $X < 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

de ex: $x = -1$: $\int_{-\infty}^{-1} \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt = 0$

caz 2: $X \ge 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt =$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{2} \left. \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right|_{0}^{x} = -\left(e^{-\frac{x}{2}} - 1\right)$$

Observație importantă: Fie I este un interval arbitrar din $[0, \infty)$.
$P(X \in I)$ se poate calcula în două moduri:
1) $P(X \in I) = \int_I \frac{1}{2} e^{-x/2} dx$;
2) $P(X \in I) = F(b) - F(a) = e^{-a/2} - e^{-b/2}$, unde $a < b$ sunt extremitățile intervalului I.

$\Rightarrow P(a \le x \le b) = F_X(b) - F_X(a)$

Există leg. între cele 2 concepte? (densitatea de probabilitate f și funcția de repartiție F_X)

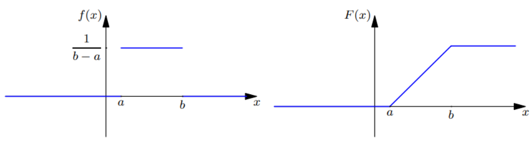
$\longrightarrow$ Dacă se cunoaște f : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$\longrightarrow$ Dacă se cunoaște F și e derivabilă : $F'(x) = f$

Distribuția uniformă

V. a. X, continuă ce are densitatea de probabilitate
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dacă } x \in [a, b) \\ 0 & \text{dacă } x \notin (a, b) \end{cases}$ se numește v.a. **uniform distribuită** pe intervalul $[a, b)$($X \sim \text{Unif}[a, b)$.)

Funcția de repartiție: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dacă } a \le x < b \\ 1 & \text{dacă } x \ge b \end{cases}$



Proprietate: Alegând orice subinterval $[x, x+L)$ de lungime L din $[a,b)$, avem $P(x \leq X < x+L) == \frac{L}{b-a}$, adică această probabilitate nu depinde de capetele intervalului, ci doar de lungimea lui.

Valorile lui X sunt "uniform distribuite" în subintervalele din $[a,b]$ de aceeași lungime.

Cazul a=0, b=1: de interes pentru algoritmii de generare de numere (pseudo)aleatoare folosind v.a. U, $U \sim$Unif[0,1).

Densitatea de probabilitate/funcția de repartiție este:

$$f_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in [0,1) \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases} \quad , \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ x & \text{dacă } x \in [0,1) \\ 1 & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}$$

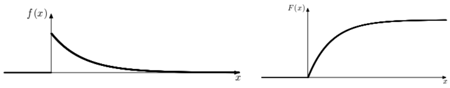
Probabilitatea ca U, $U \sim$Unif[0,1), să ia valori într-un subinterval $[c,d) \subset [0,1)$ este egală cu lungimea, $d-c$, a intervalului:

$$P(c \leq U < d) = F(d) - F(c) = d - c$$

Distribuția exponențială

V. a. X ce are densitatea de probabilitate f, definită prin:
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$, $\theta > 0$ se numește v. a. cu **distribuție exponențială, de parametru** θ. ($X \sim \text{Exp}(\theta)$)

Funcția de repartiție a unei variabile $X \sim \text{Exp}(\theta)$ este:
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 - e^{-x/\theta} & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} ,$$



V. a. exponențial distribuite se folosesc ca modele pentru:

- Durata servirii unui client, de către un server dintr-un sistem coadă;
- Intervalul de timp dintre două sosiri consecutive ale clienților la coadă;
- Durata de viață a componentelor electronice;

Media și dispersia pt. distrib. exp.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx \quad \text{(integrare prin părți)}$$

$f = x \Rightarrow f' = 1$

$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$

$g = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow g' = e^{-\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow M(X) = 2$

$X \sim \text{Exp}(\theta = 2)$, $M(X) = \theta$

Fie X o v.a. exponențial distribuită de parametru, $\theta > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Avem: $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx + \int_{0}^{\infty} x\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\,dx = \theta$.

Observație: Există variabile aleatoare care nu au valoare medie.
De exemplu, X-o v.a. cu distribuția de probabilitate Cauchy:
$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, integrala $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ este divergentă.

Fie X v.a. cu densitatea de probabilitate f.
Dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă sau cu un număr finit de puncte de discontinuitate de speța întâi, atunci $Y = g(X)$ este o variabilă aleatoare.
Dacă $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)dx < \infty$, atunci $Y = g(X)$ are media

$$M(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$$

Dispersia unei variabile aleatoare continue X ce are media $m = M(X)$ este, ca și în cazul variabilelor discrete, numărul notat $\sigma^2(X)$ sau $D^2(X)$, și egal cu:

$$\sigma^2(X) = M((X-m)^2)$$

Notând cu g funcția definită prin $g(X) = (X-m)^2$, avem

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx.$$

Proprietăți:

- $M(aX+b) = aM(X) + b, \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $\sigma^2(aX+b) = a^2\sigma^2(X), \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $\sigma^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2$

Observație: Fie X o v.a. de medie m și abatere standard σ.
Variabila aleatoare asociată, $Y = \frac{X-m}{\sigma}$, se numește v.a. **standardizată**.
Avem $M(Y) = 1, \sigma^2(Y) = 0$.