PS

(tema 12)

4. Se consideră lanţul Markov cu stările $S = \{1, 2, 3\}$ având matricea de tranziţie:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

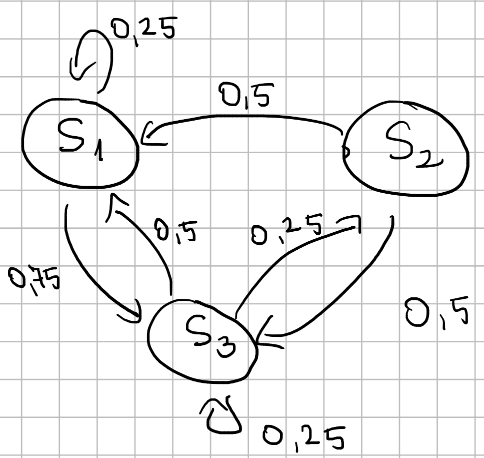
Se presupune că $P(X_1 = 1) = 1/3$ şi $P(X_1 = 2) = 1/3$. $\Rightarrow P(X_1 = 3) = \frac{1}{3}$

a) Să se deseneze graful asociat acestui lanţ Markov;

b) Să se determine $P(X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 1)$.

c) Să se determine $P(X_1 = 3, X_3 = 2)$.

a)



b) $P(X_1=3, X_2=1, X_3=2, X_4=1) = \pi_0(\overset{3}{s_3}) \cdot Q(3,1) \cdot Q(1,2) \cdot Q(2,1)$

$= \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot 0 \cdot 0,5 = 0$

$\pi_0(3) = P(X_1 = 3) = \frac{1}{3}$

$x_{2+1} = 2$

c) $P(X_1 = 3, X_3 = 2) = P(X_1 = 3) \cdot P(X_3 = 2 \mid X_1 = 3) =$

$= \frac{1}{3} \cdot Q^2(3,2) = \frac{Q(3,2) \cdot Q(3,2)}{3} =$

$= \frac{0,0625}{3}$

c) Folosind formula $P(X_{n+k} = j/X_k = i) = Q^n(i,j)$, unde $Q(i,j)$ este elementul de pe linia i şi coloana j din matricea Q^2, avem: $P(X_4 = 0/X_2 = 1) = Q^2(1,0) = \frac{7}{18}$.

5. Se consideră lanţul Markov cu stările $S = \{1, 2, 3, 4\}$ având matricea de tranziţie:

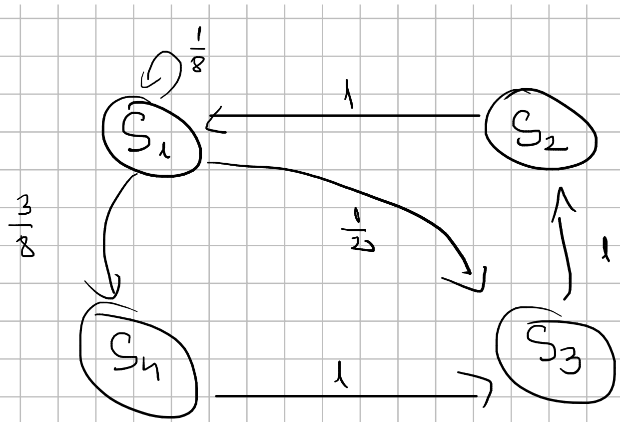
$$Q = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1/2 & 3/8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Să se studieze dacă acest lanţ este ireductibil şi aperiodic;

b) Să se determine $P(X_6 = 2|X_4 = 1)$.

c) Dacă distribuţia iniţială de probabilitatea este cea uniformă pe spaţiul stărilor, să se determine probabilitatea ca lanţul să evolueze pe traiectoria **2,1,4,1,3**.

a)



· ireductibil

$\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $Q^n(i,j) > 0$

· aperiodic

$T_i = c.m.m.d.c\{n \in \mathbb{N}^* \,/\, Q^n(i,j) > 0\}$

S_1 $\quad S_1, S_4, S_3, S_2 \xrightarrow{S_1} 4$

$\quad S_1, S_3, S_2, S_1 \to 3$ $\Big\}$ $\Rightarrow T = 1$

lanț ireductibil

$\Rightarrow$ toate nodurile sunt aperiodice

b) $P(X_{\overset{2+4}{6}} = 2 | X_4 = 1) = Q^2(1,2) = \frac{1}{2}$

c) $\pi_2\, Q(2,1) \cdot Q(1,4) \cdot Q(4,1) \cdot Q(1,3) = 0$

$\frac{1}{4}$ (aceeași șansă, 4 noduri)

6. Se consideră lanţul Markov cu stările $S = \{1, 2, 3, 4\}$ având matricea de tranziţie:

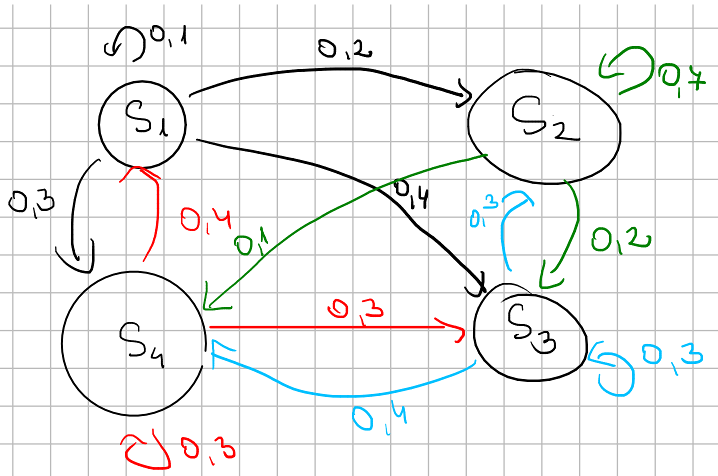
$$Q = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

a) Să se studieze dacă acest lanţ este ireductibil şi aperiodic;

b) Să se determine $P(X_4 = 2 | X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1)$ şi $P(X_4 = 2, X_3 = 2, X_2 = 1 | X_1 = 1)$.

c) Dacă distribuţia iniţială de probabilitatea este cea uniformă pe spaţiul stărilor, să se determine probabilitatea ca lanţul să evolueze pe traiectoria **1,3,4,1,2**.

a)



ireductibil

$\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $Q^n(i,j) > 0$

aperiodic

S_1 — 4, 2, 3 $\Big\} = 1$, ired $\Big\} \Rightarrow$ noduri aperiodice

b) $P(X_{\overset{n+1=4}{4}} = 2 \,|\, X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1) = P(X_{\overset{1+3}{4}} = 2 \,|\, X_3 = 1)$

$= Q(1,2) = 0{,}2$

$P(X_4 = 2, X_3 = 2, X_2 = 1 \,|\, X_1 = 1) = \dfrac{P(X_4 = 2 \cap X_3 = 2 \cap X_2 = 1 \cap X_1 = 1)}{P(X_1 = 1)} =$

$= \dfrac{\cancel{\pi_0(1)} \cdot Q(1,1) \cdot Q(1,2) \cdot Q(2,2)}{\cancel{\pi_0(1)}} =$

$= 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}02 \cdot 0{,}7 = 0{,}014$

c) $\pi_1 = \frac{1}{4}$

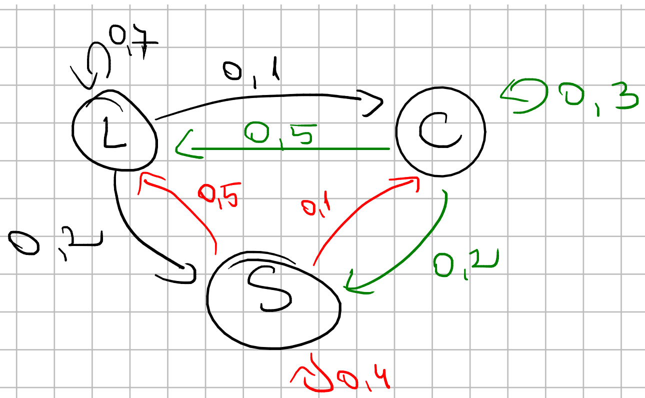
$\Rightarrow \pi_1 \cdot Q(1,3) \cdot Q(3,4) \cdot Q(4,1) \cdot Q(1,2) =$

$= \frac{1}{4} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}0032$

7. Se consideră un lanţ Markov corespunzător parcurgerii automate a unui document ce conţine sibolurile **L,C, S**, unde L-literă, C-cifră şi S-caractere. Matricea de tranziţie este:

$$Q = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & C & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ L \\ C \\ S \end{array}$$

Să se determine $P(X_2 = L|X_1 = C)$. Dacă se presupune că simbolul curent este o cifră, adică $X_0 = C$, să se calculeze probabilitatea ca următoarele două simboluri să fie toate de tip S.



$P(X_2 = L \mid X_1 = C) = Q(C, L) = 0{,}5$

$P(X_1 = S, X_2 = S \mid X_0 = C) = \dfrac{P(X_1 = S \cap X_2 = S \cap X_0 = C)}{P(X_0 = C)} =$

$= \dfrac{\cancel{\pi_0(C)} \cdot Q(C, S) \cdot Q(S, S)}{\cancel{\pi_0(C)}} = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$