SFERA ŞI CERCUL ÎN SPAŢIU

0.1 EXERCIŢII REZOLVATE

1. Să se determine centrul şi raza sferei S de ecuaţie

$$S:\ x^2+y^2+z^2-6x-8y=0.$$

Rezolvare.
Cu termenii care conţin x respectiv cu cei cu y formăm pătrate: $x^2-6x+9-9+y^2-8y+16-16+z^2=(x-3)^2+(y-4)^2+z^2-25=0$ adică

$$S:\ (x-3)^2+(y-4)^2+z^2=5^2$$

de unde sfera are centrul $C(3,4,0)$ şi raza $R=5$.

2. Să se scrie ecuaţia sferei S de diametru $[AB]$ unde $A(2,1,0)$ şi $B(0,1,2)$.
Rezolvare.
Centrul sferei este mijlocul C al segmentului $[AB]$, de unde $C=\dfrac{1}{2}A+\dfrac{1}{2}B$, deci $C\left(\dfrac{2+0}{2},\ \dfrac{1+1}{2},\ \dfrac{0+2}{2}\right)$, adică $C(1,1,1)$. Raza sferei va avea lungimea R, jumătate din distanţa $d(A,B)=\sqrt{8}$, deci $R=\sqrt{2}$. În final

$$S:\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2.$$

3. Considerăm planele

$$\alpha_1:\ x+y+z-1=0,\ \ \alpha_2:\ 2x+z-1=0$$

şi punctul $M(2,-1,0),\ M\in\alpha_1$. Să se scrie ecuaţia sferei S al cărei centru $C\in\alpha_2$ şi care e tangentă la planul α_1 în M.
Rezolvare.
Pentru că sfera e tangentă la planul α_1, raza prin M va fi perpendiculară în M la α_1, deci dreapta ei suport d va fi determinată de punctul M şi vectorul director $\overline{N}_{\alpha_1}=(1,1,1)$ şi va avea ecuaţiile parametrice

$$d:\begin{cases}x=2+t\\ y=-1+t\\ z=0+t.\end{cases}$$

Centrul C este punctul de intersecţie $C=d\cap\alpha_2$ deci e acel punct de pe d ce satisface $2(2+t)+t-1=0$ adică pentru $t=-1$, deci $C(1,-2,-1)$.
Raza sferei are lungimea R egală cu cea a segmentului $[CM]$, adică $R=\sqrt{3}$. Vom avea

$$S:\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=3.$$

4. Să se determine centrul şi raza cercului

$$\mathcal{C}:\begin{cases}(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9\\ 2x-y+z=0.\end{cases}$$

Rezolvare.
Cercul reprezintă intersecţia sferei $S:\ (x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$ de centru $C'(1,-4,0)$ cu planul $\alpha:\ 2x-y+z=0$. Centrul cercului va fi punctul C de intersecţie a planului α cu dreapta d, perpendiculara dusă din punctul C' pe planul α, care are vectorul director $\overline{N}_\alpha=(2,-1,1)$. Dreapta are ecuaţiile

$$d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=-4-t\\ z=0+t\end{cases}$$

şi punctul C se obţine pentru $2(1+2t)-(-4-t)+t=0$, deci pentru $t=-1$ de unde $C(-1,-3,-1)$.
Pentru un punct P de pe cerc, din teorema lui Pitagora, avem

$$d^2(C',P)=d^2(C,P)+d^2(C',C).$$

Dar $d(C',P)$ e lungimea razei sferei, iar după un calcul simplu,
$d^2(C,C')=6$. De aici, lungimea razei cercului este $r=\sqrt{3}$.

0.2 EXERCIŢII PROPUSE

1. Să se determine centrul şi raza, apoi să se reprezinte grafic sfera, în fiecare dintre cazurile de mai jos.

   (a) $x^2+y^2+z^2-2x+y=0$;
   (b) $z=\pm\sqrt{2-x^2-y^2+x}$;

   Răspuns. (a) $\left(1,\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right),\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}$; (b) $\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right),\ \dfrac{3}{2}$;

2. Să se scrie ecuaţia sferei de diametru OM, unde $M(1,2,3)$.

   Răspuns. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{7}{2}$.

3. Să se determine $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât planul de ecuaţie $y=\alpha$ să fie tangent la sfera de ecuaţie $x^2+y^2+z^2-6x-4z+9=0$ şi să se arate că $M(1,2,3)$ este un punct exterior sferei.

   Răspuns. $\alpha\in\{-2,2\}$.

4. Fie sfera $S: \ x^2+y^2+z^2-2\sqrt{3}\,x+1=0$. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuaţii $x=y=\alpha z$ să fie

   (a) exterioară sferei;

   (b) tangentă sferei;

   (c) secantă.

   Răspuns. (a) $\alpha \in (-1,1)$; (b) $\alpha \in \{-1,1\}$; (c) $\alpha \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.

5. Scrieţi ecuaţiile planului tangent în punctul curent la sferă, în fiecare dintre cele trei cazuri de la Problema 1.

   Răspuns. Dacă punctul curent aparţinând sferei este (a,b,c) atunci

   (a) $2(a-1)(x-a)+(2b+1)(y-b)+2c(z-c)=0$;
   (b) $(2a-1)(x-a)+2b(y-b)+2c(z-c)=0$;

6. Determinaţi ecuaţia sferei tangente la planul $\pi: \ x+y-2z=0$ în punctul $M(1,1,1)$ şi la planul $\pi': \ x+y-2z=13$.

   Răspuns. $\left(x-\dfrac{25}{12}\right)^2+\left(y-\dfrac{25}{12}\right)^2+\left(z+\dfrac{7}{6}\right)^2=\dfrac{169}{24}$.

7. Scrieţi ecuaţia sferei de rază 1 aflate în primul octant (i.e. $x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0$), care este tangentă la planele de coordonate.

   Răspuns. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

8. Determinaţi centrul şi raza cercurilor obţinute prin intersecţia planului de ecuaţie $x+y+z=0$ cu sferele definite la Problema 1.

   Răspuns. (a) $\sqrt{\dfrac{7}{6}}, \ \left(\dfrac{5}{6}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{6}\right)$; (b) $\sqrt{\dfrac{13}{6}}, \ \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{6}\right)$;

9. Determinaţi raza şi centrul sferei care trece prin origine şi prin punctele $A(1,0,0), B(0,1,1)$ şi $C(0,0,1)$.

   Răspuns. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \ \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

10. Determinaţi ecuaţia sferei tangente la planul $\pi: \ x+y-2z=0$ în punctul $M(1,1,1)$ şi la planul $\pi': \ -x+2y+z=0$.

    Răspuns. $\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(z-\dfrac{9}{5}\right)^2=\dfrac{24}{25}$ şi
    $\left(x-\dfrac{9}{7}\right)^2+\left(y-\dfrac{9}{7}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{7}\right)^2=\dfrac{24}{49}$.

11. Scrieţi ecuaţia sferei ce trece prin punctul $M\,(R,R,R)$ (unde $R>0$) şi cercul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=R. \end{cases}$$

Răspuns. $x^2+y^2+z^2=R\,(x+y+z)\,.$

12. Determinaţi centrul şi raza sferei înscrise în tetraedrul definit de planele de ecuaţii $3x-2y+6z=18,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Răspuns. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1.$

13. Determinaţi planele tangente sferei $S:\ x^2+y^2+z^2-2x+2z=0$ care trec prin dreapta de ecuaţii $x=2,\ y=3.$

Răspuns. $(y-3)+(3\pm 4)(x-2)=0$, i.e. $x-y+1=0$ şi $7x+y-17=0.$

14. Găsiţi centrul şi raza cercului de ecuaţii $x^2+y^2+z^2-10y=0$, $x^2+y^2+z^2+x-8y+2z-19=0.$

Răspuns. $(1,7,2)\,,\ 4.$

15. Scrieţi ecuaţia planului ce trece prin centrul Q al suprafeţei $x^2+y^2+z^2-2x+y-3z=0$ şi este perpendicular pe dreapta OQ.

Răspuns. $2x-y+3z=7.$

16. Determinaţi ecuaţia locului geometric al punctelor a căror distanţă faţă de origine este dublul distanţei la punctul $(0,-3,0)\,.$

Răspuns. $x^2+(y+4)^2+z^2-4=0.$

17. Să se determine centrul sferei $S:\ x^2+y^2+z^2-2x-2z=0$ şi raza cercului $C=S\cap\pi$, unde $\pi:\ x-y=0.$

(examen, Ingineria sistemelor, 2014)

18. * Fie planul (π) $2x+y-2z+5=0$ şi punctele $A(17,\ 8,\ 28)$ şi $B\left(-9,\ -\dfrac{19}{2},\ -9\right).$

a) Să se determine poziţia relativă a sferelor centrate în A şi respectiv B, tangente la planul (π).

b) Să se determine punctul $M\in(\pi)$ pentru care $dist(M;A)+dist(M;B)$ este minimă.

(concurs ,,Traian Lalescu”, profil neelectric, faza finală, Timişoara, 2014)

19. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ şi $D(m,m,m)$ să definească o sferă şi scrieţi ecuaţia acesteia în cazul $m=1$.

Răspuns. $m\neq\dfrac{1}{3}$; $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0.$

20. Fie sfera $S:\ x^2+y^2+z^2=1$. Stabiliţi poziţia relativa faţă de sfera S a:
a) punctului $A(1,1,1)$
b) dreptei d: $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$
c) planului α: $x-y+z-1=0$.

Răspuns. a), b): exterior; c) planul taie sfera după un cerc

21. Scrieţi ecuaţiile cercului circumscris triunghiului OAB dacă $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,1)$.

Răspuns. $y-z=0$, $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$