Recapitulare matrici şi sisteme de ecuaţii liniare

Noţiunea de matrice este fundamentală în algebra liniară. Riguros matematic, o matrice de elemente reale, cu m linii şi n coloane este definită de o aplicaţie

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \to \mathbb{R}$$

ce asociază fiecărei perechi de indici (i, j), cu $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, numărul $A(i, j)$.

Valorile $A(i, j)$ ale unei astfel de aplicaţii se notează a_{ij} şi se afişează într-un tablou de m linii şi n coloane. Matricea se identifică cu acest tablou:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Spunem că matricea A este o matrice de elemente reale de tip $m \times n$.

Notăm cu $\mathbb{R}^{m\times n}$ mulţimea matricilor de m linii şi n coloane şi elemenete reale.

Operaţii cu matrici

- **adunarea**: dacă $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ sunt două matrici din $\mathbb{R}^{m\times n}$, definim suma lor ca fiind matricea $C = (c_{ij})$, de acelaşi tip şi de elemente $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.
- **produsul cu un scalar**: dacă $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ este o matrice şi α este un scalar din $\mathbb{R}$, atunci produsul αA este matricea de elemente $P = (\alpha a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Produsul a două matrici: Pentru orice două matrici A, B de elemente din $\mathbb{R}$, cu particularitatea că numărul de coloane al primei matrici coincide cu numărul de linii al celei de-a doua, adică A este de tip $m \times p$, iar B de tip $p \times n$, definim matricea produs, ca fiind matricea $C = AB$, de elemente $c_{ij} \in \mathbb{R}$, cu

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj},$$

adică:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \mathbf{c_{ij}} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \cdots & \mathbf{a_{ik}} & \cdots & \mathbf{a_{ip}} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & \mathbf{b_{kj}} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & \mathbf{b_{pj}} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

Transpusa unei matrici. Fie A o matrice de tip $m \times n$, $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$. *Transpusa* sa este o matrice de tip $n \times m$, notată A^T, de elemente $b_{ij} = a_{ji}$. Cu alte cuvinte, linia i a matricii A este coloana i în transpusă, $i = \overline{1,m}$.

Exemplul 1. Transpusa matricii

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 8 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

este

$$A^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Proprietăţi ale operatorului de transpunere

1. $(A^T)^T = A$
2. $(AB)^T = B^T A^T$, oricare ar fi A, B două matrici ce se pot înmulţi.

Determinantul unei matrici pătratice

Determinantul unei matrici pătratice, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, este un număr real ce se notează:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Calculul determintului de **ordin 2** (al unei matrici de 2 linii şi 2 coloane):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - ((-3) \cdot 4) = 10 - (-12) = 10 + 12 = 22.$$

Un determinant de **ordin 3** se calculează folosind fie regula lui **Sarrus**, fie **regula triunghiului**.

Pentru a calcula valoarea determinantului folosind regula lui Sarrus se copiază linia 1 şi apoi linia 2 sub linia 3 a determinantului şi se efectuează calculele astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$
$$+a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{13}$$

Ultimul membru al egalitătii de mai sus exprimă regula triunghiului. Termenii cu semnul + în faţă se obţin efectuând produsele elementelor de aceeaşi culoare din:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}$$

iar termenii cu semnul - se obţin efectuând la fel produsele elementelor de aceeaşi culoare din:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}$$

O matrice pătratică A al cărei determinant este zero se numeşte **matrice singulară**. Dacă determinantul este diferit de zero, matricea se numeşte **matrice nesingulară**.

Calculul determinanţilor de ordin mai mare decât 3

- Se bazează pe noţiunea de minor al unui element.

Definiţia 0.0.1 *Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice pătratică, $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$. Fiecărui element $a_{k\ell}$ din matrice i se asociază un determinant de ordin $n - 1$ notat $M_{k\ell}$, obţinut prin eliminarea liniei k şi coloanei ℓ din det(A). Determinantul $M_{k\ell}$ se numeşte minorul elementului a_{kl}.*

Exemplul 2. Constituirea minorului M_{23} în determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} & a_{14} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & \mathbf{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & \mathbf{a_{43}} & a_{44} \end{vmatrix} \Rightarrow \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Ştiind să calculăm un determinant de ordin 3, un determinant de ordin 4 se calculează dezvoltându-l după o linie i (sau o coloană j) astfel:

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3} + a_{i4}(-1)^{i+4}M_{i4},$$

Exemplul 3. Să dezvoltăm următorul determinant după elementele liniei 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ 3 & 7 & -9 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{0(-1)^{3+1}M_{31}}_{=0} -6(-1)^{3+2}M_{32} + 1(-1)^{3+3}M_{33} - 2(-1)^{3+4}M_{34} =$$

$$6\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & -9 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$

Fie D determinantul unei matrici pătratice de n linii şi n coloane. Notăm cu L_i, L_j două linii distincte ale determinantului.

Proprietăţile determinanţilor

1. Dacă se schimbă două linii între ele, atunci determinantul schimbă semnul.

Simbolizăm prin $L_i \leftrightarrow L_j$ schimbarea liniilor i şi j între ele.

Exemplul 4. Fie determinantul

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

Efectuând schimbarea $L_2 \leftrightarrow L_3$ obţinem determinantul

$$D' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -2 = -D$$

2. Dacă se înmulţeşte o linie a unui determinant cu un număr, atunci valoarea determinantului se înmulţeşte cu numărul respectiv.

De exemplu în determinantul D, de mai sus, înmulţim linia 2 cu 3 şi rezultatul îl rescriem în linia 2 a unui nou determinant D'' şi obţinem:

$$D'' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-4) \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 9 & 3 & -12 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3D = 6$$

3. Dacă se înmulţeste o linie a determinantului cu un număr şi se adună la o altă linie, valoarea determinantului nu se schimbă.

În determinantul D de mai sus, înmulţim linia 1 cu 3 şi o adunăm la linia 2, rezultatul fiind înregistrat în linia 2, $3L_1 + L_2 \to L_2$, şi avem:

$$D''' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = D = 2$$

4. Determinantul transpusei unei matrice este egal cu determinantul matricii:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Datorita acestei proprietăţi şi pentru că liniile matricii A^T sunt coloane în matricea A, rezultă că proprietăţile **1-3** enunţate pentru linii ale determinantului sunt valabile şi pentru coloane.

Proprietăţi ale determinanţilor sunt foarte utile în calculul determinanţilor de ordin mai mare decat 3, pentru care nu avem o regula ca Sarrus sau regula triunghiului, ci se dezvoltă determinantul după elementele unei linii sau coloane.

Exemplul 5. Pentru a calcula determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

am putea dezvolta după elementele coloanei 1 şi atunci:

$$D = (-1)^{1+1}1 \cdot M_{11} + (-1)^{2+1}3M_{12} + (-1)^{1+3}2M_{13} + (-1)^{1+4} \cdot 1M_{14}$$

Deci practic am reduce calculul lui D la calculul a 4 determinanţi de ordinul trei, $M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}$, ceea ce ar presupune calcule multe. Pentru a evita calculul celor 4 determinaţi de ordinul 3, aplicăm proprietatea 3 a determinanţilor pentru a transforma elementele coloanei 1, de sub $a_{11} = 1$ în zerouri.

Observăm că aplicând succesiv operaţiile:

$$-3L_1 + L_2 \to L_2, \quad -2L_1 + L_3 \to L_3, \quad -1L_1 + L_4 \to L_4$$

obţinem aceeaşi valoare a determinantului şi anume:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -10 & 7 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -10 & 7 & 8 \\ -5 & 1 & 7 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot M_{12} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot M_{13} + (-1)^{1+4} \cdot 0 \cdot M_{14}$$

Deci practic am redus calculul determinantului de ordin 4 la calculul unui singur determinant de ordin 3.

Observaţie: Operaţiile asupra liniilor unui determinant se pot alege şi pentru a transforma în zerouri elementele altei coloane nu neapărat coloana 1. De exemplu pentru determinantul D cu care am lucrat era mai simplu dacă în coloana 3 formam zerouri în liniile 1,2 şi 4, efectuând operaţiile:

$$-7L_3 + L_2 \to L_2, \quad -4L_3 + L_4 \to L_4$$

şi obţineam:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ -11 & -8 & 0 & -19 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -7 & -6 & 0 & -11 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -11 & -8 & -19 \\ -7 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

Dacă $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sunt două matrici pătratice, atunci determinatul produsului lor este produsul determinanţilor:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Matrici inversabile

O matrice pătratică $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ având determinantul zero se numeşte *matrice singulară.* O matrice de determinant nenul se numeşte matrice nesingulară.

Orice matrice nesingulară, A, este inversabilă, adică există o matrice notată A^{-1}, cu proprietatea că:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

unde I_n este matricea unitate de ordin n.

Reamintim *etapele de calcul ale inversei unei matrici* A,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1. se calculează determinantul matricii; dacă $\det(A) = 0$ matricea nu este inversabilă. În caz contrar se trece la etapa 2;

2. se determină transpusa matricii A,

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3. se calculează adjuncta matricii A, adică matricea pătratică notată A^*, de elemente $a^*_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$, unde $\det(M_{ij})$ este minorul elementului din poziţia (i, j) a transpusei;

4. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} A^*$

Proprietăţi ale operaţiei de inversare

• $(A^{-1})^{-1} = A$.

• Produsul a două matrici pătratice, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, inversabile este o matrice inversabilă şi

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

• $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Rangul unei matrici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este ordimul celui mai mare determinant nenul ce se poate constitui din elementele de intersecţie a k linii şi k coloane ale matricii A, unde $k = 1, 2, \ldots, \min{(m, n)}$.

Un sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute se exprimă prin:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2}$$

Coeficienţii a_{ij}, b_i, $i = \overline{1, m}$, $j = 1, n$, sunt numere reale sau complexe.

Sistemul (2) se poate scrie în forma matricială:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

Matricea $A = (a_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, se numeşte matricea sistemului, iar matricile coloană

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

coloana necunoscutelor, respectiv coloana termenilor liberi.

Astfel sistemul se exprimă matricial:

$$AX = B \tag{5}$$

Un sistem de forma (2) în care toţi termenii liberi sunt zero: $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ se numeşte *sistem liniar şi omogen*. Dacă cel puţin un termen liber, b_i, este nenul, sistemul se numeşte *sistem liniar neomogen*.

Reamintim că mulţimea soluţiilor unui sistem de ecuaţii liniare poate fi:

- mulţimea vidă (sistemul nu are soluţii), caz în care sistemul se numeşte *incompatibil*;
- o mulţime cu un singur element (există o unică soluţie) şi sistemul se numeşte *sistem compatibil determinat*;
- o mulţime infinită şi sistemul se numeşte *compatibil nedeterminat*.

Condiţii necesare şi suficiente de compatibilitate a unui sistem studiate la liceu.

1. Un sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute (deci de matrice pătratică) este compatibil determinat dacă şi numai dacă determinantul sistemului este diferit de zero.

2. Teorema Kronecker–Capelli. Un sistem liniar de m ecuaţii cu n necunoscute (2) este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricii prelungite $\overline{A}$, adică al matricii obţinute prin bordarea matricii A a sistemului cu matricea coloană a termenilor liberi,

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} & b_m \end{array}\right],$$

are acelaşi rang ca şi A.

Particularizând pentru un sistem omogen:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{6}$$

observăm că matricea prelungită $\overline{A} = [A|0]$ are acelaşi rang ca matricea A, deci un sistem omogen este compatibil (are soluţii). Orice sistem omogen admite cel puţin soluţia banală $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Sistemele de ecuaţii liniare şi neomogene, compatibile, cu matrici de dimensiuni reduse, $m, n \in \{1, 2, 3\}$, se pot rezolva uşor prin calcul direct. De exemplu un sistem de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute sau trei ecuaţii cu trei necunoscute, compatibil determinat (i.e. determinatul matricii sistemului este nenul) se poate rezolva direct prin:

- metoda matricială: $X = A^{-1}B$;
- metoda Cramer: $x_i = \Delta_{x_i}/\Delta$, $i = \overline{1, n}$, $n = 2$ sau 3, unde $\Delta = \det(A)$, iar Δ_{x_i} se obţine din determinantul Δ înlocuind coloana i cu coloana termenilor liberi B, restul coloanelor rămânând neschimbate.

Exemplul 6. Să se arate că sistemul:

$$\begin{array}{rcr} 3x - y + z & = & 0 \\ -2x + y + 3z & = & -7 \\ x + 2y - 2z & = & 7 \end{array} \tag{7}$$

este compatibil determinat şi să i se determine soluţia.
Rezolvare: Matricea sistemului:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

are determinantul det$(A) = -28$, deci sistemul are o unică soluţie. Pentru a rezolva sistemul folosind metoda Cramer calculăm determinanţii necunoscutelor:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -7 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -28, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -7 & 3 \\ 1 & 27 & -2 \end{vmatrix} = -28,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56$$

Astfel $x = 1$, $y = 1$, $z = -2$.

Exemplul 7. Se dă sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Să se studieze natura sistemului şi în caz de compatibilitate să se determine muîltimea soluţiilor.

Matricea sistemului este:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Rangul maxim poate fi 3. Din coloanele matricii putem constitui $C_4^3 = 4$ determinanţi de ordin 3. Şi anume determinanţii ce conţin respectiv coloanele:

$$(1, 2, 3), \quad ,(1, 2, 4) \quad (1, 3, 4) \quad (2, 3, 4$$

Dacă cel puţin unul este nenul, atunci rangul matricii este 3. Calculând cei patru determinanţi de ordin 3, constatăm că toţi patru sunt zero. Deci rangul matricii nu poate fi 3. Următoarea întrebare: există determinanţi de ordin 2 nenuli? Răspunsul este afirmativ. De exemplu:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

deci $rang(A) = 2$ Matricea prelungită:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

are de asemenea rangul 2, deoarece toţi determinanţii de ordin 3 sunt nuli (adică determinanţii constituiţi din coloanele:

$$\begin{array}{l} (1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5), \\ (1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5) \end{array}$$

au valoarea 0. Calculaţi!)

Conform teoremei Kronecker–Capelli sistemul este compatibil.

Pentru a determina mulţimea soluţiilor alegem determinantul principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Cum acest determinant conţine coeficienţi ai ecuaţiilor $1, 2$ din coloanele $1, 2$, rezolvarea sistemului dat revine la rezolvarea sistemului format din primele 2 ecuaţii, în raport cu necunoscutele x_1, x_2 care sunt necunoscute principale. $\alpha := x_3$, $\beta := x_4$ sunt necunoscute secundare:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + 5\alpha + 4\beta & = & -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3\alpha + 3\beta & = & 0 \end{array}$$

Rezolvând obţinem mulţimea soluţiilor:

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - \alpha + 2\beta, -2 - \alpha - 7\beta, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Pentru a întelege cât mai bine modul de alegere a ecuaţiilor şi necunoscutelor principale, luăm pentru acelaşi sistem alt determinant principal şi anume dterminantul ce conţine elementele de intersecţie ale liniilor $1, 3$ cu coloanele $2, 4$:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Cu această alegere, se vor rezolva ecuaţiile $1, 3$ în raport cu necunoscutele principale x_2, x_4. Necunoscutele x_1, x_3 vor fi în acest caz, necunoscute secundare. Rezolvaţi!