Probleme de antrenament pentru lucrarea de control nr 1.

> În săptămâna a ~~6~~ 7-a se dă lucrare de control din problematica cursurilor 1-4, Pentru a avea succes la lucrare, învăţati cursurile, rezolvaţi efectiv (nu doar citind) problemele din curs şi seminar şi apoi răspundeţi întrebărilor din acest chestionar şi rezolvaţi problemele propuse.

1. Fie $\pi = (5, 1, 4, 3, 2)$ o permutare a lui $(1, 2, 3, 4, 5)$. Scrieţi elementele liniei 3 din matricea permutare P_π.

2. Fie A o matrice pătratică din $\mathbb{R}^{4\times 4}$. Dorim să permutăm coloanele lui A astfel încât fiecare coloană trece în următoarea, iar coloana 4 în coloana 1. Cum aţi efectua matricial această modificare?

3. Se dă matricea pemutarea:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Să se determine permutarea ce defineşte matricea P.
b) Determinaţi fără calcule inversa P^{-1}, aplicând doar o proprietate a matricilor permutare.

4. Se dau matricile permutare:

$$P_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculaţi produsul $Q = P_\pi P_\sigma$ este şi Q matrice permutare? Dacă da precizaţi permutarea corespunzătoare.

5. Dacă P_π este o matrice permutare ce efect are asupra matricii A, produsul $P_\pi A P_\pi^T$. Ştiind că A este:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

iar $\pi = (2, 4, 1, 3)$, precizaţi fără a efectua calculele, care este elementul c_{41} al matricii $C = P_\pi A P_\pi^T$.

Proprietăţi ale determinanţilor şi matricilor

6. Fie A, B matrici pătratice din $\mathbb{R}^{n\times n}$. Care din relaţiile următoare este adevărată şi care falsă:

$$a)\ \det(A+B) = \det(A) + \det(B), \quad b)\ \det(AB) = \det(A)\det(B), \quad c)\ \det(A^T) = \det(A)$$

7. Ştiind că determinantul matricii pătratice A este $\det(A) = 2$, să se calculeze (precizeze) $\det(-5A)$.

8. Dacă $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ şi $\det(A) = 0$, iar $\det(B) = 3$ este matricea $C = A \cdot B$ inversabilă? Dar A^T? Argumentaţi răspunsul.

9. Dacă determinatul unei matrici $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ este $\det(A) = 7$, ce valoare are determinatul matricii A' obţinută din A prin inversarea liniei 3 cu 5? Dar determinantul matricii A'' obţinută din A prin înmulţirea liniei 4 cu -3?

10. Folosind definiţia rangului dată la liceu, să se calculeze (deducă) rangul fiecăreia dintre matricile următoare:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

11. Rangul unei matrici $A \in \mathbb{R}^{7\times 5}$ poate fi maximum ... (cât?)

12. Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Să se exprime produsul:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ca o combinaţie liniară a coloanelor lui A.

13. Fie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Fără a calcula produsul matricilor, deduceţi dacă matricea A este nesingulară (adică $(\det(A) \neq 0)$ sau nu.

Precizaţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false:

14. Două sisteme de ecuaţii liniare $Ax = b$, $A'x = b'$, cu $A, A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sunt echivalente dacă au aceleaşi necunoscute.

15. Două sisteme de ecuaţii liniare $Ax = b$, $A'x = b'$, cu $A, A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sunt echivalente dacă au aceeaşi mulţime a soluţiilor.

16. Forma scară S_A a unei matrici A este unică, adică oricare două pesoane care calculează forma scară şi nu greşesc la calcule obţin aceeaşi matrice S_A.

17. Un sistem liniar şi omogen de n ecuaţii cu n necunoscute, $Ax = 0$, având matricea A inversabilă, admite o unică soluţie.

18. Dacă matricea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este inversabilă atunci şi forma scară, S_A, este inversabilă.

19. Orice sistem liniar şi omogen, $Ax = 0$, cu mai multe necunoscute decât ecuaţii admite o infinitate de soluţii. Dacă da, de ce, dacă nu, dece? (am discutat această problemă când am dedus criteriul practic de stabilire a dependenţei/independenţei unui sistem de vectori).

Forma scară/scară redusă a unei matrici, sisteme de ecuaţii liniare

20. Dacă forma scară a unei matrici $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ are ultimele două linii de elemente nule, ce rang are matricea A? Explicaţi!

21. Două matrici $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ au rangul 2. Este adevărat sau nu că formele lor scară redusă, coincid, adică $S_A^0 = S_B^0$. Argumentaţi răspunsul dând eventual exemple concrete de formă scară redusă corespunzătoare.

22. Matricea $A \in \mathbb{R}^{6\times 4}$ are câte un pivot pe fiecare coloană. a) Cât este rangul lui A? b) Dacă v_1, v_2, v_3, v_4 sunt coloanele lui A, cum sunt aceăti 4 vectori, liniar dependenţi sau independenţi? Explicaţi!

23. Să se transforme matricea prelungită a sistemului $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

în forma scară, să se precizeze rangul matricii A şi al matricii prelungite $\overline{A}$. Indicaţi pivoţii din S_A şi $S_{\overline{A}}$ şi poziţiile acestora (adică indicaţi linia şi coloana fiecărui pivot).

Precizaţi dacă sistemul iniţial este compatibil sau nu şi dacă da determinaţi mulţimea soluţiilor sale.

24. Determinaţi mulţimea soluţiilor sistemului liniar şi omogen:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

reducând matricea sistemului la forma scară, S_A, şi rezolvând sistemul echivalent $S_A x = 0$.

25. Un sistem liniar şi neomogen $Ax = b$ are următoarea forma scară redusă a matricii prelungite, $\overline{A}$:

$$a)\ S^0_{\overline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad b) : S^0_{\overline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad c)\ S^0_{\overline{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

În fiecare caz în parte să se verifice dacă sistemul este compatibil sau incompatibil şi dacă este compatibil să se determine mulţimea soluţiilor.

26. Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

Calculaţi forma scară redusă a matricii extinse $A_e = [A|I_3]$ şi deduceţi dacă A este sau nu inversabilă. Dacă este precizaţi inversa ei şi verificaţi ca este corect găsită, calculând AA^{-1}.

27. Se dă matricea:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Asociaţi matricea extinsă A_e, calculaţi forma scară redusă a extinsei şi deduceţi dacă matricea A este inversabilă sau nu şi dacă da precizaţi cine este inversa ei, A^{-1}. Verificaţi dacă $AA^{-1} = I_3$.

28. Exprimaţi combinaţia liniară de vectori:

$$x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

ca un produs de două matrici (vezi Cursul 1.)

29. O matrice $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ are determinantul $\det(A) = 5$. Câţi pivoţi are S_A?

30. Un sistem liniar şi omogen $Ax = \theta$ este echivalent cu sistemul omogen de matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Să se determine o bază în în subspaţiul soluţiilor sistemului $Ax = \theta$.

31. Fie $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Ştiind că pivoţii formei scară redusă, S_A^0, sunt plasaţi în coloanele 1 şi 2 şi că:

$$A \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

să se determine forma scară redusă.

Indicaţie: deduceţi rangul din datele problemei şi folosiţi faptul că mulţimea soluţiilor sistemului $Ax = \theta$ coincide cu mulţimea soluţiilor sistemului $S_A^0 x = \theta$.

32. Deduceţi prin calcul sau dând doar argumente potrivite, dacă următoarele sisteme de vectori din spaţiul $\mathbb{R}^n$ (cu n precizat de voi în fiecare caz în parte) sunt siteme de vectori liniar independenţi sau dependenţi:

$$a) \quad \mathcal{S}_1 : v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad \mathcal{S}_2 : \quad w_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

33. Folosind criteriul practic să se verifice dacă vectorii $v_1 = (4, 1, -1)^T, v_2 = (2, -3, -1)^T, v_3 = (-1, 1, 2)^T$ sunt liniar dependenţi sau independenţi. La fel verificaţi (sau doar argumentaţi) pentru vectorii $v_1, v_2, 3v_1 - v_2$.

34. În $\mathbb{R}^4$ se dau vectorii:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

a) Să se exprime matricial combinaţia liniară a vectorilor v_1, v_2, v_3 cu scalarii $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$.

b) Folosind criteriul practic să se deducă dacă sistemul de vectori din $\mathbb{R}^4$ este liniar dependent sau independent.

35. Fie vectorii:

$$v_1 = (-1, 2, 3, 0)^T, v_2 = (1, -3, -14, 1)^T, v_3 = (0, -1, -11, 1)^T, v_4 = (2, 3, -5, 1)^T \in \mathbb{R}^4$$

Matricea $A = [v_1|v_2|v_3|v_4]$ are forma scară redusă:

$$S_A^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinaţi un subsistem maximal de vectori liniar independenţi al sistemului celor 4 vectori.

36. Ştiind că vectorii $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ sunt liniar independenţi să se studieze folosind definiţia (nu criteriul practic) dacă şi vectorii:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & v_1 \\ u_2 & = & v_1 + v_2 \\ u_3 & = & v_1 + v_2 + v_3 \end{array}$$

sunt liniar independenţi.

37. Vectorii $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ sunt liniar independenţi. Cum sunt atunci vectorii u_1, u_2, liniar dependenţi sau independenţi?

Indicaţie: Folosiţi combinaţia liniară ce dă vectorul nul: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + 0u_3 = \theta$, pentru a răspunde la întrebare.

38. Să se arate că $\mathcal{B}' = (u_1 = (1,2)^T, u_2 = (1,1)^T$ formează o bază în $\mathbb{R}^2$. Să se determine coordonatele vectorului $w = (-2,5)^T$ în această bază folosind matricea de trecere adecvată.

39. Vectorul v are următoarea exprimare în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}' = (u_1 = (-1,2,3)^T, u_2 = (0,3,-2)^T, u_3 = (5,1,-1)^T)$:

$$v = 2u_1 - 3u_2 + 7u_3$$

a) Să se determine coordonatele lui v în baza canonică.

b) Să se determine coordonatele vectorului $w = (1,0,4)^T$ în baza $\mathcal{B}'$.

40. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideră baza canonică $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ şi bazele

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}' & = & (u_1 = (-1,2,-3)^T, u_2 = (2,-3,1)^T, u_3 = (4,-2,1)^T) \\ \\ \mathcal{B}'' & = & (f_1 = (0,1,1)^T, f_2 = (1,0,1)^T, f_3 = (1,1,0)^T) \end{array}$$

Ştiind că vectorul w are exprimarea $w = -2f_1 + 3f_2 + f_3$ în baza $\mathcal{B}''$, să se determine coordonatele lui w în baza $\mathcal{B}'$.

41. Un exemplu de spaţiu vectorial folosit pentru generarea curbelor în computer graphics este spaţiul vectorial real al funcţiilor polinomiale de grad cel mult n:

$$V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n,\ a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0,n}\}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

Operaţiile relativ la care această mulţime are structură de spaţiu vectorial real, sunt adunarea uzuală a polinoamelor şi respectiv înmulţirea unui polinom cu un număr real.

a) Precizaţi care este vectorul nul al spaţiului.

b) Să se arate că sistemul de polinoame $\mathcal{B} = \{1, t, \ldots, t^n\}$ constituie o bază în spaţiul vectorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ (indicaţie: pentru a verifica liniar independenţa presupuneţi că o combinaţie liniară a acestor polinoame dă polinomul nul, $O(t) = 0 + 0t + 0t^2 + \cdots 0t^n$.)

$\mathcal{B}$ se numeşte baza canonică din spaţiul de funcţii polinomiale de grad cel mult n. Ce dimensiune are acest spaţiu?

c) În cazul particular al funcţiilor polinomiale de grad cel mult 3 să se precizeze coordonatele polinomului $p(t) = -3 + 2t + 7t^2 - 5t^3$, respectiv $q(t) = 3 - 11t - 5t^2$, în baza canonică corespunzătoare.

d) Să se arate că sistemul $\mathcal{S}$, de funcţii polinomiale definite pe intervalul $[0, 1]$:

$$\mathcal{S} = \{B_k^3(t) = C_3^k t^k (1-t)^{3-k}, k = 0, 1, 2, 3\} =$$
$$\{B_0^3(t) = C_3^0 t^0 (1-t)^3, B_1^3(t) = C_3^1 t^1 (1-t)^2, B_2^3(t) = C_3^2 t^2 (1-t)^1, B_3^3(t) = C_3^3 t^3 (1-t)^0\},$$

numite polinoame Bernstein de gradul 3, este un sistem liniar independent în spaţiul vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ (polinoamele Bernstein au fost folosite de Bézier, un inginer la Renault, pentru a genera curbe ce descriu alura capotelor de maşini; în ultimii ani curbele Bézier se folosesc în grafică şi modelarea geometrică).

Indicaţie : **d)** Luaţi o combinaţie liniară a polinoamelor Bernstein şi presupuneţi că este egală cu polinomul nul:

$$\alpha_0 B_0^3(t) + \alpha_1 B_1^3(t) + \alpha_2 B_2^3(t) + \alpha_3 B_3^3(t) = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3$$

În membrul stâng calculaţi combinările C_3^k din expresia fiecărui polinom Bernstein şi exprimaţi totul ca un polinom în funcţie de $1, t, t^2, t^3$ şi apoi deduceţi că în mod necesar toţi scalarii din combinaţia liniară trebuie să fie 0.

42. În spaţiul vectorial real al funcţiilor polinomiale de grad cel mult 2, se consideră baza canonică $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ şi baza Bernstein:

$$\mathcal{B}' = (B_0^2(t) = C_2^0 t^0 (1-t)^2, B_1^2(t) = C_2^1 t(1-t), B_2^2(t) = C_2^2 t^2 (1-t)^0)$$

a) Să se determine matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.
b) Să se exprime funcţia polinomială $p(t) = -5 + 2t - 3t^2, t \in [0, 1]$, ca o combinaţie liniară a polinoamelor din baza Bernstein.

Indicaţie: Pentru a face legătura cu teoria, notaţi $e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2$ şi respectiv $u_1 = B_0^2(t), u_2 = B_1^2(t), u_3 = B_2^2(t)$.

Deduceţi apoi matricea de trecere de la baza canonică $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ la baza Bernstein $\mathcal{B}'$. Calculaţi inversa ei $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$. Exprimarea lui $p(t)$ în baza $\mathcal{B}'$ va fi:

$$p(t) = c_0 B_0^2(t) + c_1 B_1^2(t) + c_2 B_2^2(t),$$

unde:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$