FIZICĂ
PENTRU INGINERI

Lector Dr. Trif-Tordai Delia

Departamentul BAZELE FIZICE ALE INGINERIEI
delia.calinoiu@upt.ro
Cabinet: C213
http://fizica-upt.weebly.com/

STRUCTURĂ FIZICĂ

- 14 cursuri (în primele 10 săptămâni)
- 7 ședințe de seminar
- 7 ședințe de laborator

- Distribuită – evaluarea se face pe parcursul semestrului
- 4 credite

Notă_finală = parte_întreagă (2/3 Notă_distribuită +
+ 1/3 Notă_Activitate + 0.5)

Notă_distribuită = (Distribuită1 +Distribuită2)/2

Notă_Activitate = (Notă_Seminar + Notă_Laborator)/2

CURSUL 1

1. Noțiuni Fundamentale ale Fizicii

1.1. Introducere în fizică

1.2. Mărimi fizice

1.3.Unități de măsură

1.4.Unități de măsură tolerate

1.5. Analiză dimensională

1.6.Operaţii cu vectori

Spaţiul şi timpul, sisteme de referinţă

1.1. Introducere în fizică

Fizica = o ştiinţă fundamentală a naturii (physis = natură, în limba greacă), care studiază cele mai simple, dar în acelaşi timp, şi cele mai generale forme de mişcare sau de transformare ale materiei.

Scopul fizicii este acela de a descoperi şi aplica legile care guvernează interacţiunile dintre corpurile materiale sau dintre corpurile materiale şi diferite câmpuri de forţe.

Domenii ale Fizicii:
Mecanică, Termodinamică, Electromagnetism, Optică, Fizica Solidului, Fizica nucleară, Fizica Plasmei, Fizica Semiconductorilor, Fizica Supraconductorilor, Biofizica, etc.

O **mărime fizică** este o mărime care caracterizează starea unui sistem fizic. Mărimea fizică are o parte cantitativă (valoarea numerică) și una calitativă (unitate de măsură).

1.2. Mărimi fizice

- Efectuarea unei operaţii de măsurare a unei mărimi fizice M, implică stabilirea unei unităţi de măsură corespunzătoare.

- A măsura o mărime fizică, înseamnă a o compara cu o altă mărime de aceeași natură numită etalon sau unitate de măsură.

- Orice mărime fizică M trebuie exprimată prin produsul dintre valoare numerică $\{\mathrm{M}\}$ şi unitatea de măsură $\langle\mathrm{M}\rangle$, astfel:

$$M = \{M\}\langle \mathrm{M}\rangle$$

1.2.1. Clasificarea mărimilor fizice:

a) După modul de definire al mărimilor fizice:

- Mărimi fundamentale
- Mărimi derivate (aria, volumul, densitatea, viteza etc.)
- Mărimi suplimentare (unghi plan şi unghi solid)

b) După natura mărimilor fizice:

- Mărimi scalare – caracterizate numai prin valoarea numerică
- Mărimi vectoriale – caracterizate prin modul, direcţie şi sens
- Mărimi tensoriale

c) Din punct de vedere al posibilităţilor de măsurare:

- Mărimi fizice măsurabile (lungimea, timpul, etc.)
- Mărimi fizice calculabile (volumul, densitatea corpurilor)

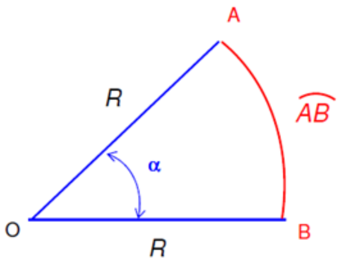
1.2.2. Mărimi fizice fundamentale ale SI

Mărime fizică	Simbol	Simbol dimensiune	Unitate de măsură	Simbol
lungime	l	L	metru	m
masă	m	M	kilogram	kg
timp	t	T	secundă	s
intensitatea curentului electric	I_c	I	amper	A
temperatură absolută	T	Θ	kelvin	K
cantitate de substanţă	ν	Q	mol	mol
intensitate luminoasă	I_l	J	candelă	Cd

1.2.3. Mărimi fizice suplimentare ale SI

➢ **Radianul (rad)** – utilizat ca unitate de unghi plan;

Radianul este unghiul plan cuprins între doua raze care delimitează pe un cerc un arc cu lungimea egala cu raza.



$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{R} \quad rad$$

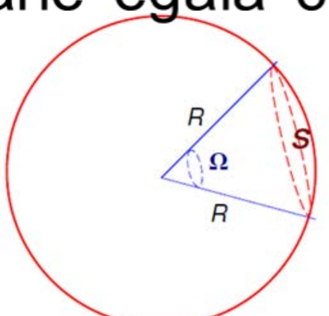
$$360^o \ldots\ldots\ldots\ldots 2\pi \;\; rad \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ = \dfrac{2\pi}{360} \;\; \text{rad} \\ 1\, rad = \dfrac{360^\circ}{2\pi} = 57°17' \end{cases}$$

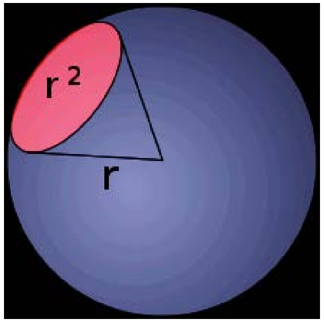
➢ **Steradianul (sr)** – utilizat ca unitate de unghi solid.

Steradianul este unghiul solid cu vârful în centrul unei sfere, care delimiteaza pe suprafata sferei o arie egala cu cea a unui patrat având latura egala cu raza sferei.

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \quad sr$$

$$\Omega_{max} = \frac{S_{sfera}}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \; sr$$





1.3. Unități de măsură

In 1960, la cea de XI Conferință Generală de Măsuri și Greutăți (CGPM) s-a adoptat un nou sistem de unități de măsură, bazat pe sistemul metric, denumit Sistemul Internațional de unități.

SI de unități este un sistem practic, coerent, simplu și rațional.

În SI se disting trei clase de unități de măsură:

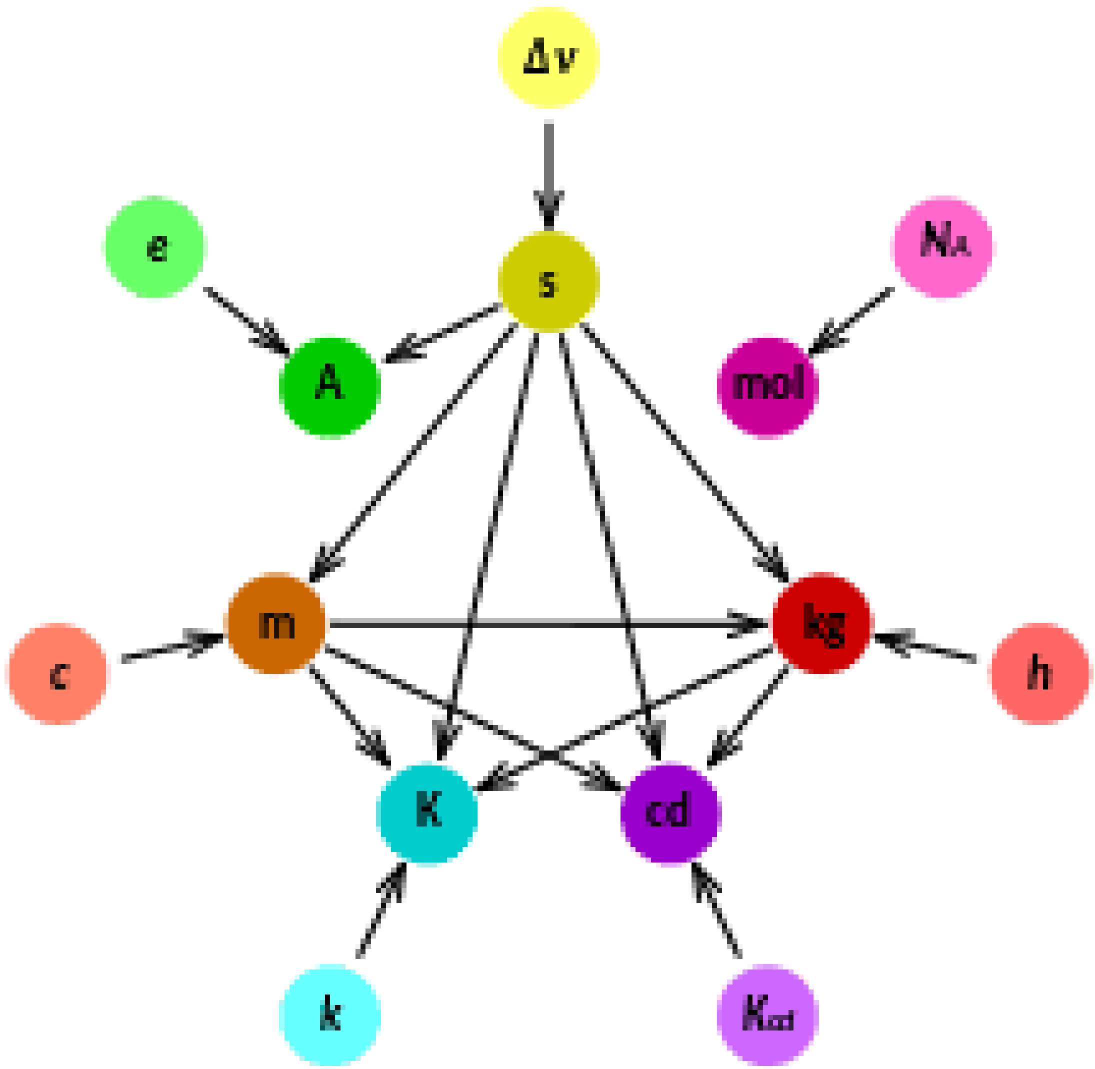
- unităţi fundamentale;
- unităţi suplimentare;
- unităţi derivate.

Biroul Internațional de Măsuri si Greutăți

1.3. Unități de măsură

Unitate de măsură	Simbol	Constanta de definitie	Simbol	Valoare
kilogram	kg	**Constanta lui Planck**	h	$6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J·s
metru	m	Viteza luminii in vid	c	299 792 458 m/s
secunda	s	tranziției între două niveluri de energie hiperfine ale atomului de Cs	$\Delta\nu$	9 192 631 770 Hz
amper	A	**Sarcina elementara**	e	$1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C
kelvin	K	**Constanta lui Boltzmann**	k	$1{,}380\,649 \times 10^{-23}$ J·K^{-1}
mol	mol	**Numărul lui Avogadro**	N_A	$6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}$
candela	cd	radiație monocromatică cu frecvența de 540 THz	K_{cd}	683 lm/W

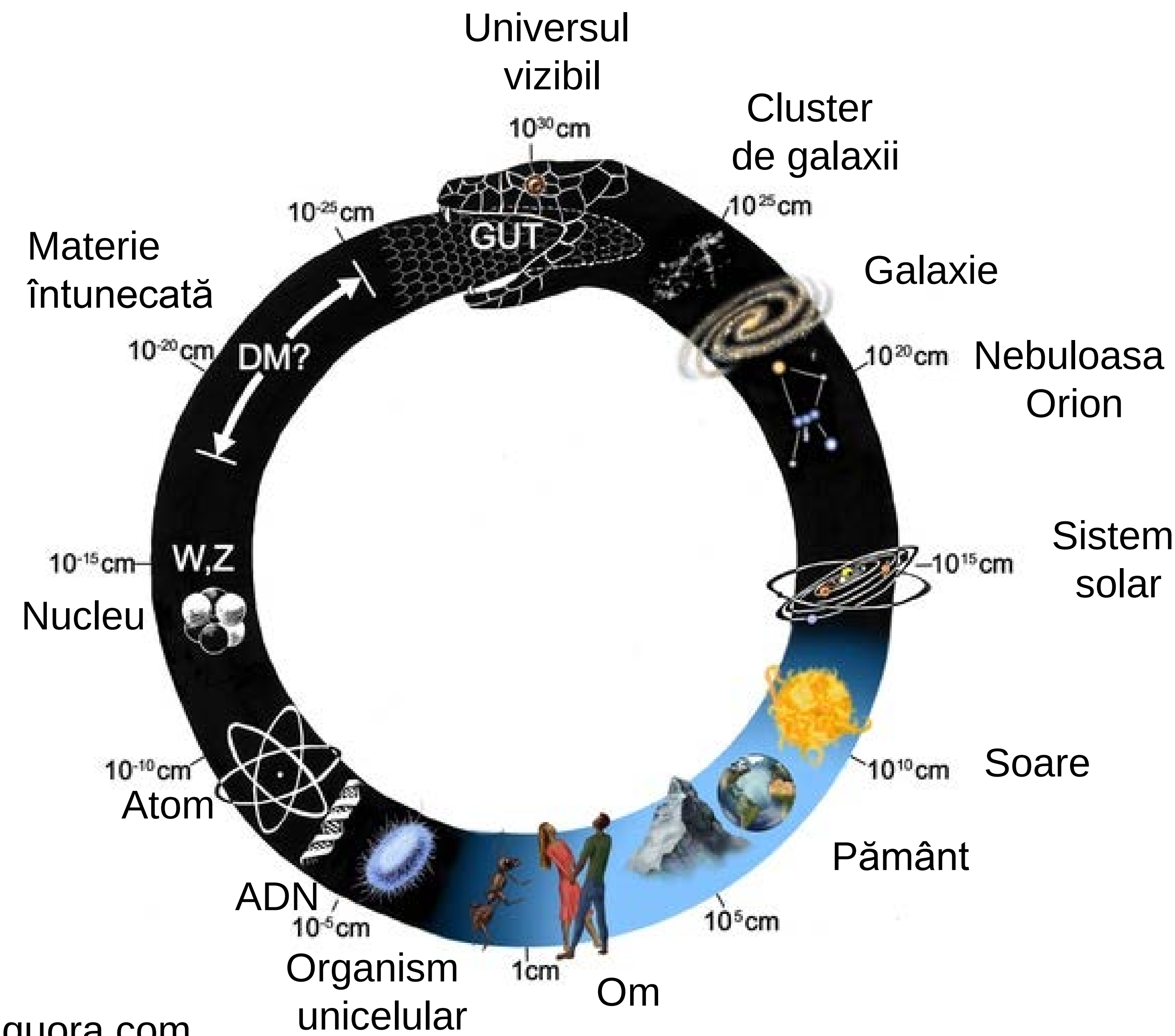
1.3. Unități de măsură



Unitatea de lungime (metrul)

- a 10^7 parte din distanţa dintre Polul Nord şi Ecuator (1792);
- distanţa dintre două repere gravate în vecinătatea capetelor unei bare confecţionate dintr-un aliaj de platină şi iridiu (Biroul Internaţional de Măsuri şi Greutăţi) (1889);
- **lungimea drumului parcurs de lumină în vid, în timp de 1 / 299.792.458 secunde (1983)**

Unitatea de lungime (metrul)



*https://www.quora.com

Unitatea de masă (kilogramul)

Unitatea fundamentală

➢ masa unui litru de apă aflată la presiune atmosferică normală şi temperatura de 3,98°C (1799);

➢ masa unui cilindru având înălţimea şi diametrul egale cu 39 mm, confecţionat dintr-un aliaj de platină şi iridiu (Biroul Internaţional de Măsuri şi Greutăţi) (1889);

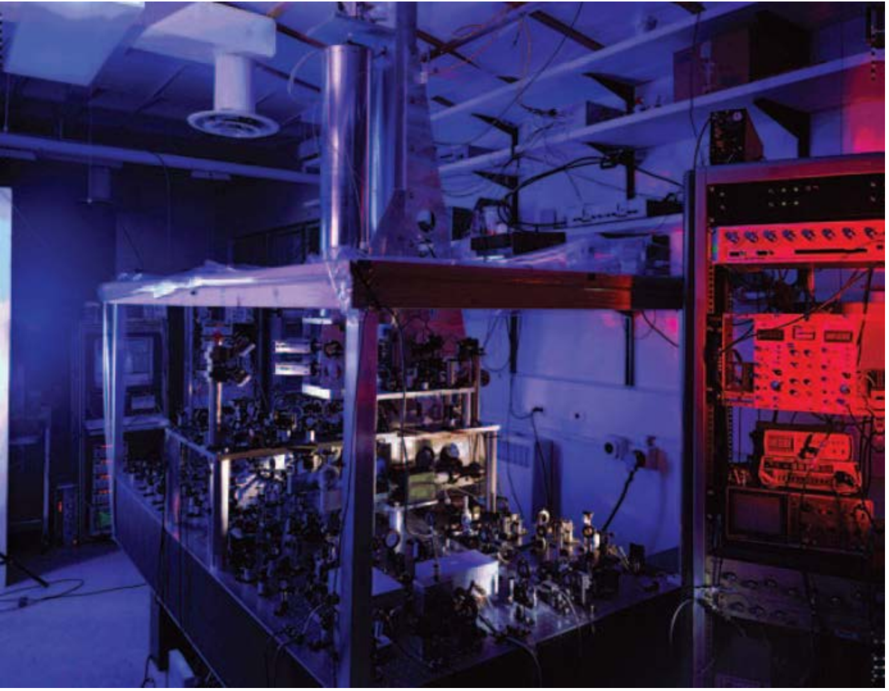
Instrument de măsurare: balanţa cu braţe egale

➢ Kilogramul este definit prin fixarea valorii constantei lui Planck h la valoarea exactă de 6.62607015×10−34 J⋅s, date fiind definițiile metrului și a secundei (2019).

Unitatea secundară (unitatea atomică de masă)

➢ a 12-a parte din masa izotopului ^{12}C (1961).

$$1 \text{ u.} = 1 \text{ Da} = 1{,}6605402\ 10^{-27} \text{ kg}$$



Unitatea de timp (secunda)

1 min. = 60 s

1 h = 60 min = 3600 s

1 zi = 24 h = 1440 min. = 86400 s

➢ Secunda este durata a 9.192.631.770 perioade ale radiaţiei ce corespunde tranziţiei între două nivele energetice ale stării fundamentale a atomului de Cesiu 133 la tempretatura de 0K (1967, a 12-a Conferinţă Generală de Măsuri şi Greutăţi).

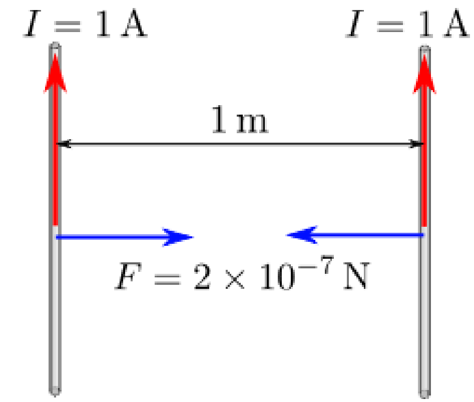
➢ <u>Instrument de măsurare</u>: ceas atomic

<u>Aplicaţie 1: </u>Caţi ani are un om care a trăit un miliard de secunde (10^9)?

Unitatea de timp – exemple de instrumente

A candle marked for use as a timer

Intensitatea curentului electric (Amper)



Amperul (simbol: A) este unitatea de măsură pentru intensitatea curentului electric.

- *Amperul* este intensitatea unui curent electric constant care, menținut în două conductoare paralele, rectilinii, cu lungimea infinită și cu secțiunea transversală circulară neglijabilă, așezate în vid, la o distanță de 1 metru unul de altul, ar produce între aceste conductoare o forță de 2×10^{-7} dintr-un newton pe o lungime de 1 metru.

- *Amperul este intensitatea unui curent de $1/1.602176634\times10^{-19}$ sarcini elementare, e, pe secundă (2019).*

Unitatea de temperature (Kelvin)

- **Kelvinul** reprezintă fracţiunea 1/273,16 din temperatura termodinamică a punctului triplu al apei (temperatura de echilibru între gheaţă, apă şi vapori de apă) (CGPM, 1967).

Alte scare de temperatură folosite:

- *Scara Celsius:*
  $T(K) = t(°C)$+273.15
- *Scara Fahrenheit*:
  $T(\mathrm{K}) = (°\mathrm{F} + 459{,}67){:}\,1{,}8$
- Scara Rankine:
  $T(K) = t(°R) : 1{,}8$
- Scara Reaumur:
  $T(K) = t(°Re) * 1.25 + 273.15$, etc

- *Kelvinul este definit prin fixarea valorii numerice a constantei lui Boltzmann k la 1.380649×10^{-23} J·K^{-1}, (J = kg·m^2·s^{-2}), date fiind definițiile kilogramului, metrului și a secundei (2019).*

Cantitatea de substanţă (molul)

- *Molul* este cantitatea de substanță dintr-un sistem, care conține un număr de entități elementare egal cu numărul de atomi din 0,012 kilograme de carbon ^{12}C (CGPM, 1967).

Numărul de atomi din 0,012 kg de ^{12}C este egal cu numărul lui Avogadro ($6,0221367 \times 10^{23}$).

Un mol este cantitatea de substanță a cărei masă exprimată în kilograme este egală cu masa atomică a acelei substanțe.

- O cantitate de substanță egală cu exact $6.02214076 \times 10^{23}$ entități elementare (2019). Acesta este valoarea numerică fixată pentru constanta lui Avogadro N_A, atunci când este exprimată în unitatea mol^{-1} și este denumită numărul lui Avogadro.

Intensitatea luminoasă (Candela)

Candela este intensitatea luminoasă, într-o direcție dată, a unei surse care emite o radiație monocromatică cu frecvența de 540×10^{12} hertzi (Hz) și a cărei intensitate energetică, în această direcție este de 1/683 dintr-un watt pe steradian (W/sr) (CGPM, 1979).

Candela este intensitatea luminoasă, în direcţia normalei, a unei suprafeţe de $1,667 \times 10^{-6}$ m^2 a unui corp negru la temperatura de solidificare a platinei (1772 ºC), la o presiune normală.

Alte sisteme de unităţi de măsură

1. **CGS** (c – centimetru, g – gram, s – secundă);

2. **MKS** (m – metru, k – kilogram, s – secundă);

3. **MKSA** (m – metru, k – kilogram, s – secundă, A – Amper);

4. **MKfS** (m – metru, k – kilogram, f – forţa, s – secundă).

***1 Kilogram-forță (kgf)** reprezintă unitatea de măsură a forței, a cărei valoare este egală cu greutatea prototipului internațional de masă, măsurată în vid, la accelerația gravitațională normală.*

1kgf = 9, 80655 N

Ex. sistemul C.G.S.

Mărime fizică	Unitate de măsură	Simbol
lungime	centimetru	cm
masă	gram	g
timp	secundă	s

1.4. Unități de măsură tolerate

- **Electron-volt (1 eV = 1,60219·10^{-19} J).** Un electron-volt este energia cinetică câştigată de un electron care traversează, în vid, o diferenţă de potenţial de un volt.
- **Unitatea atomică de masa (1 u.a.m. = 1,66057·10^{-27} kg).** Unitatea atomică de masa este fracţiunea 1/12 din masa unui atom al izotopului carbon 12 ($^{12}_{6}C$).
- **Ångström (1Å= 10^{-10} m)**
- **Unitatea astronomică (1 UA = 1,495980·10^{11} m)**. Unitatea astronomică este egală cu distanţa medie dintre Soare şi Pământ.
- **Anul lumină (1 al = 9,4605·10^{15} m).** Anul lumină este egal cu distanţa pe care o parcurge lumina în vid, în decursul unui an.

Unități de măsură folosite împreună cu unitățile SI

Denumirea	Simbol	Valoarea în SI
An	a	1 a=3,16·10^7 s
Zi	d	1 d = 24 h = 1440 min = 86400 s
Oră	h	1 h = 60 min = 3600 s
Minut	min	1 min = 60 s
Grad	º	1 º = π / 180 rad
Minut	'	1 ' = (1/60)°= (π/10800) rad
Secundă	''	1 '' = (1/60)' = (π/648000) rad
Litru	l	1 l = 1 dm^3 = 10^{-3} m^{-3}
Tonă	t	1 t = 10^3 kg
Ţol	ţ	1 ţ = 2,54 10^{-2} m
Yard	y	1 y = 0,914398 m
Milă terestră	M.t	1 M.t = 1609 m
Milă marină	M.m	1 M.m = 1852 m
Ar	a	1 a = 10^2 m^2
bar	bar	1bar= 10^5 N/m^2
torr	torr	1 Torr = 133,32 N/m^2

Ordinul de mărime

$$328.460.587 = 3{,}28 \cdot 10^8 \Rightarrow \boxed{10^8}$$

Exemple:

134527 = ?

0,000572 = ?

Multipli, submultipli

$$1\,cm = 10^{-2}\ m \qquad 1\,kg = 10^3\ g$$

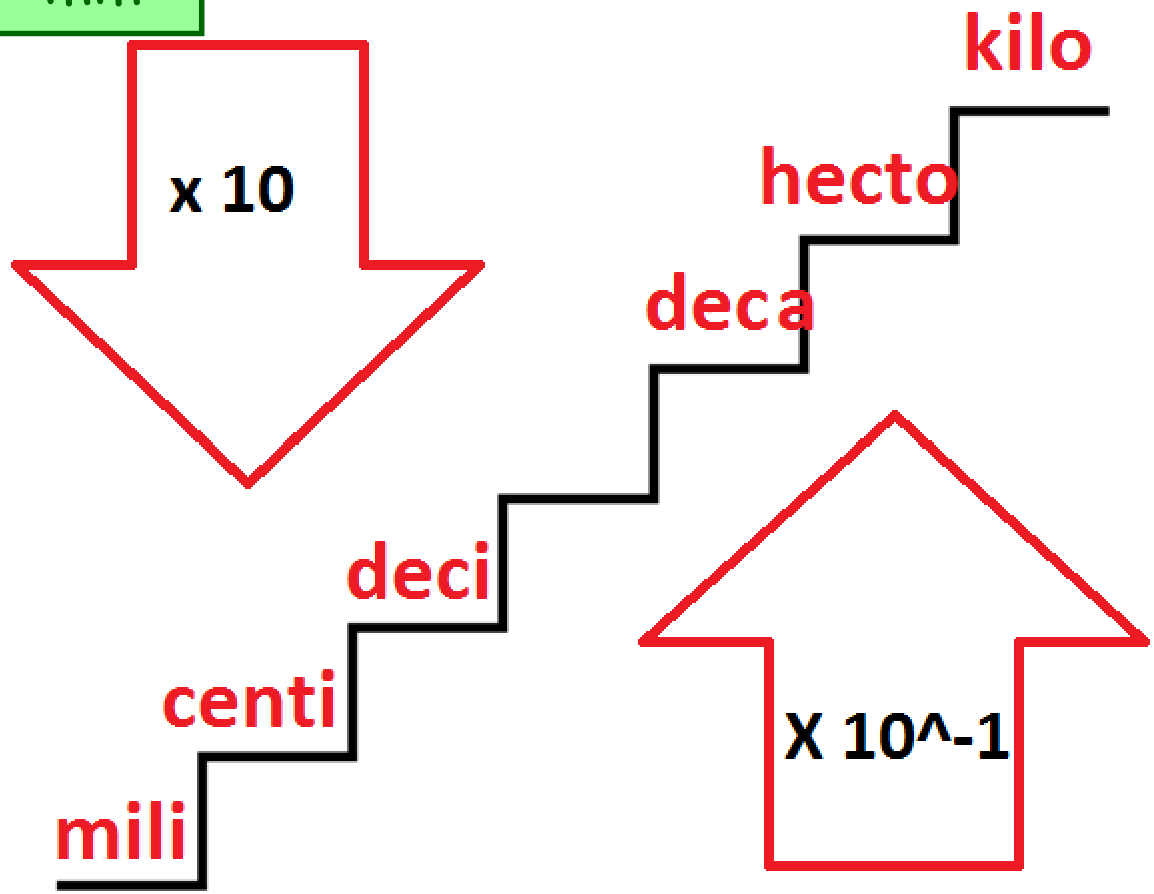
$$1\ \mathrm{l} = 1\ \mathrm{dm}^3 = 10^3\ \mathrm{cm}^3 = 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$$

Prefix multipli / submultipli

Prefix	Simbol	Factor conversie
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
deca	da	10^{1}
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	µ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

1 m = 10^2 cm

1 dm = 10^2 mm



1 cm = 10^{-3} dam

1 mm = 10^{-3} m

1.5. Analiza dimensională

În afară de valoarea numerică {*M*}, respective unitatea de măsură ⟨M⟩, orice mărime fizică se caracterizează şi prin dimensiunea [*M*], care reprezintă un monom algebric de puteri – pozitive, negative, întregi sau fracționare – ale simbolurilor mărimilor fizice fundamentale. Formula dimensională a mărimii fizice M este:

$$[M] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} I^{\delta} \Theta^{\varepsilon} J^{\omega} Q^{\chi}$$

Exponenţii raţionali α, β, γ, δ, ε, ω, χ reprezintă, fiecare în parte, dimensiunea mărimii derivate *M* în raport cu una din mărimile fundamentale.

<u>Exemplu</u>: Legea a doua a lui Newton, scrisă scalar $F = m \cdot a$

Din punct de vedere dimensional, forţa *F* se exprimă prin dimensiunile corespunzătoare masei *m* şi acceleraţiei *a*:

$$[F] = [m][a] = MLT^{-2}$$

Alfabetul grec

Denumire	Literă mică	Literă mare		Denumire	Literă mică	Literă mare
Alfa	α	A		**Niu**	ν	N
Beta	β	B		**Csi**	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ		**Omicron**	o	O
Delta	δ	Δ		**Pi**	π	Π
Epsilon	ε	E		**Ro**	ρ	P
Zeta	ζ	Z		**Sigma**	σ	Σ
Eta	η	H		**Tau**	τ	T
Teta	θ	Θ		**Ipsilon**	υ	Υ
Iota	ι	I		**Fi**	φ	Φ
Kappa	κ	K		**Hi**	χ	X
Lambda	λ	Λ		**Psi**	ψ	Ψ
Miu	μ	M		**Omega**	ω	Ω

1.6. Mărimi fizice scalare, vectoriale. Operaţii cu vectori

Mărimile scalare se specifică prin valorile lor numerice (temperatura, timpul, masa, numărul de molecule etc.)

$$\boxed{m = 2\ \text{kg}}$$

Mărimile vectoriale sunt definite prin:

-*modulul*, care reprezintă valoarea sa numerică, fiind un număr strict pozitiv egal cu lungimea segmentului orientat prin care se reprezintă mărimea vectorială;

$$\boxed{\mathrm{F} = \left|\vec{\mathrm{F}}\right| = 4\ \mathrm{N}}$$

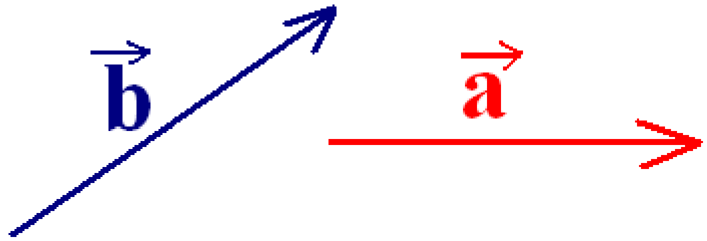
- *direcţia*, reprezentată prin dreapta purtătoare;

- *sensul*, specificat printr-o săgeată marcată la extremitatea segmentului orientat.

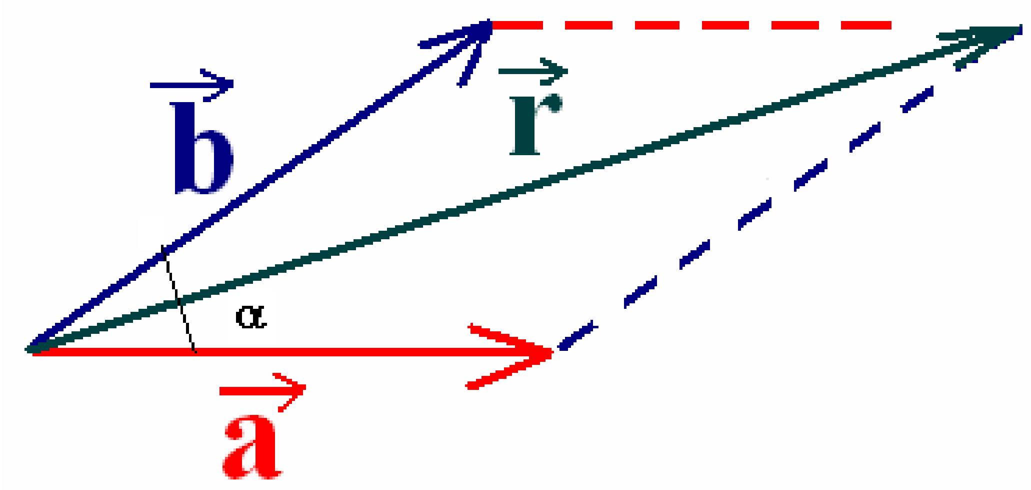
Operaţii cu mărimi vectoriale - recapitulare

a1) Adunarea vectorilor - metoda grafică

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$



Formula lui Pitagora generalizată



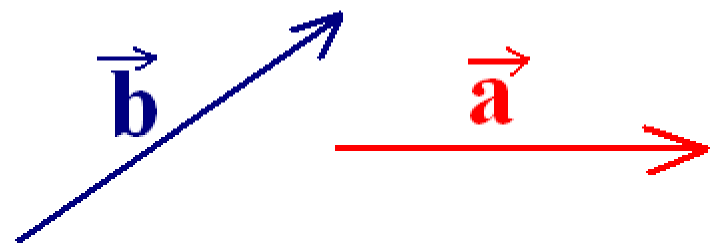
$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

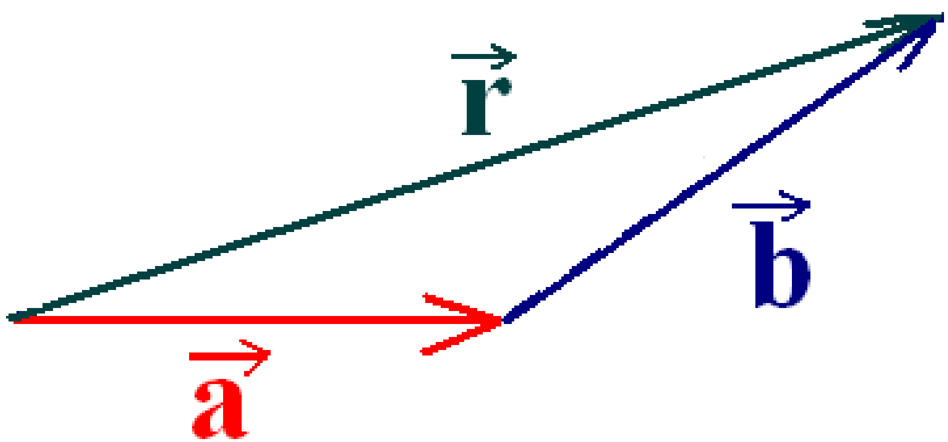
Regula paralelogramului

Operaţii cu mărimi vectoriale - recapitulare

a1) Adunarea vectorilor – metoda grafică

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$



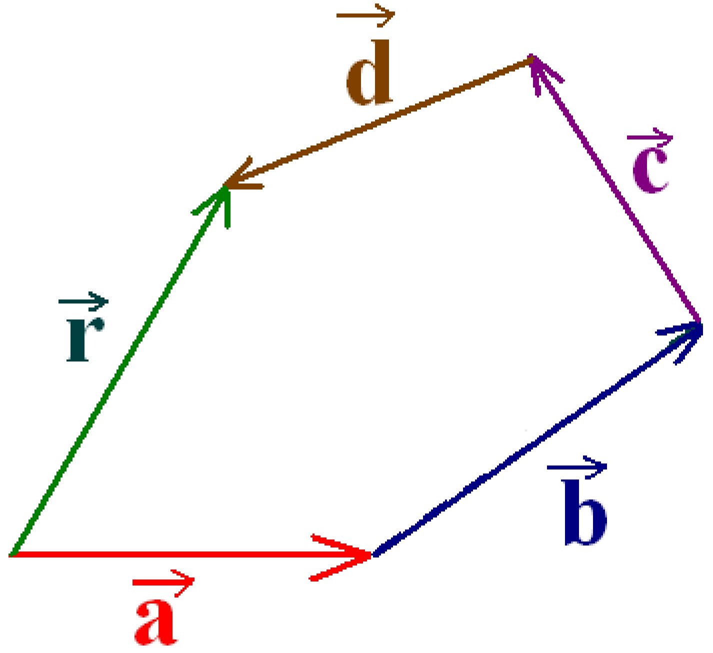


$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

Regula triunghiului

Operaţii cu mărimi vectoriale - recapitulare

a1) Adunarea vectorilor – metoda grafică

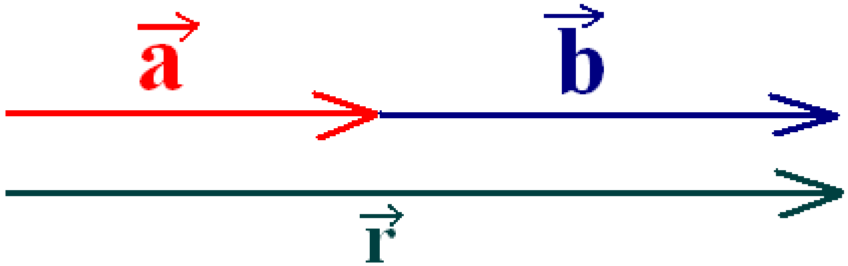


$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

Regula poligonului

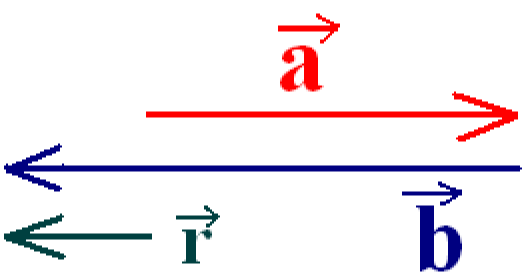
Caz particular

Adunarea vectorilor paraleli



$$\left|\vec{r}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$$

Adunarea vectorilor antiparaleli



$$\left|\vec{r}\right| = \left|\vec{b}\right| - \left|\vec{a}\right|$$

Proprietăţi ale adunării vectorilor sunt:

a) *Comutativitatea* $$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

b) *Asociativitatea* $$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

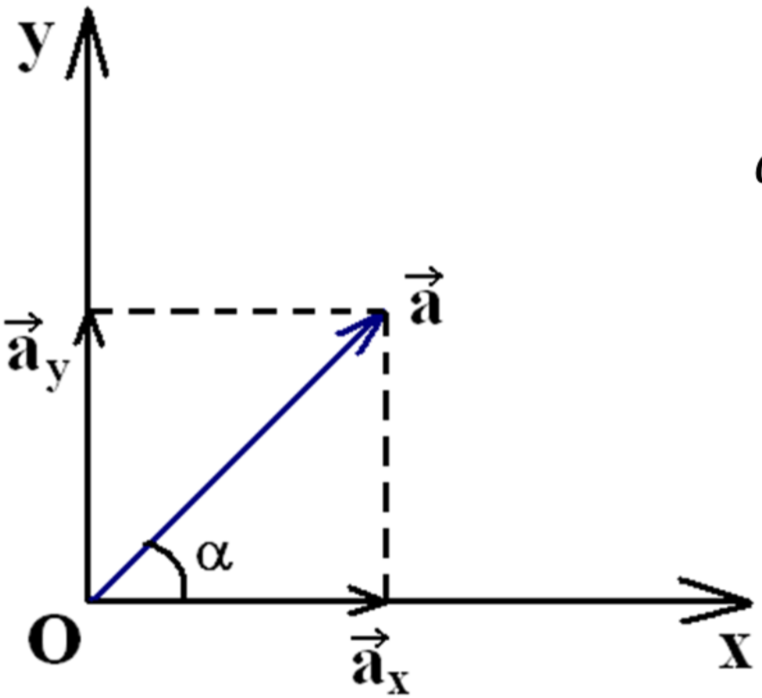
Studiu individual: a se demonstra cele două proprietăţi

Operaţii cu mărimi vectoriale - recapitulare

a2) Adunarea vectorilor – metoda analitică

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateta opusa}}{\text{ipotenuza}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateta alaturata}}{\text{ipotenuza}}$$



$\vec{a}_x$(proiecţia pe axa absciselor)

$\vec{a}_y$(proiecţia pe axa ordonatelor)

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y}$$

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

$\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ componentele vectoriale

$$a_x = a \cdot \cos\alpha$$

$$a_y = a \cdot \sin\alpha$$

$a_x > 0$ daca $\vec{a}_x$ are sensul lui $\vec{i}$

$a_x < 0$ daca $\vec{a}_x$ are sens contrar lui $\vec{i}$

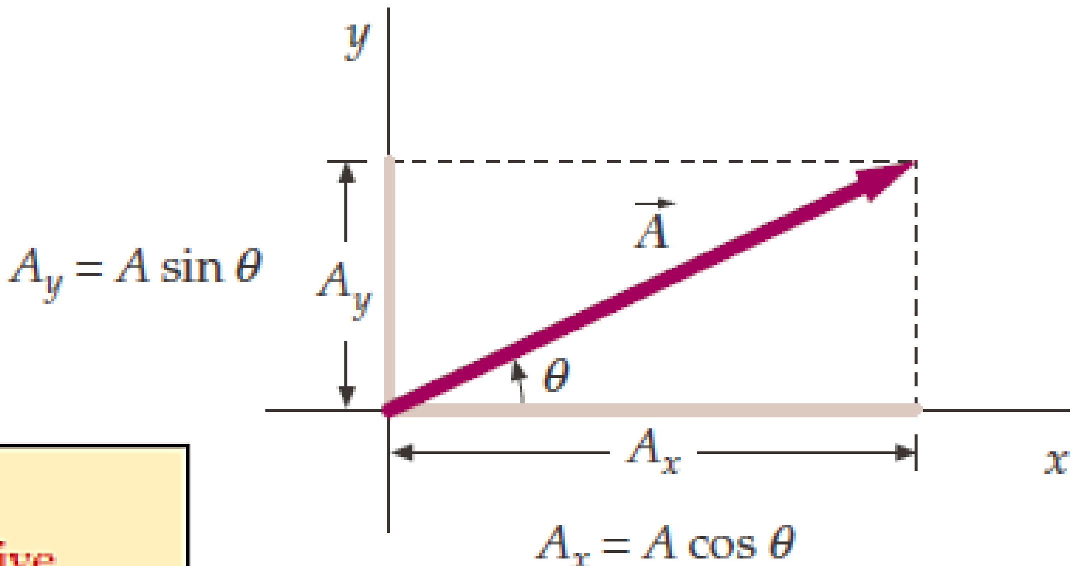
Operaţii cu mărimi vectoriale - recapitulare

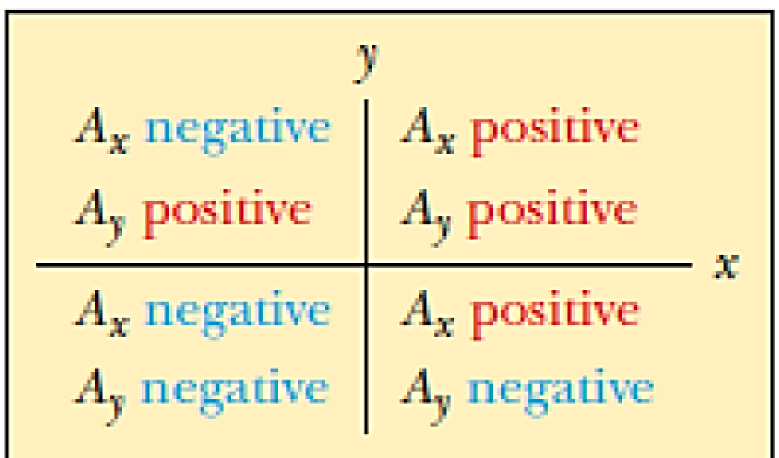
a2) Adunarea vectorilor – metoda analitică

Direcția vectorului rezultant, $\vec{A}$ este:

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

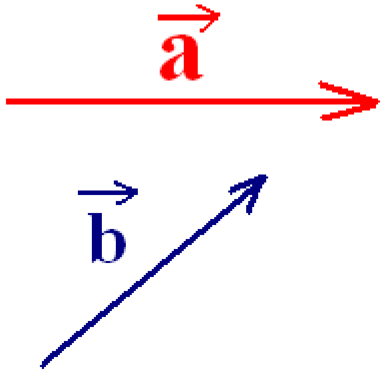
$$\Longrightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}$$

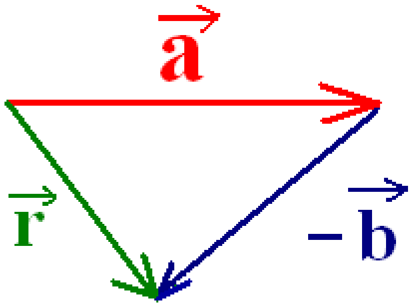




Operaţii cu mărimi vectoriale - recapitulare

b) Scăderea vectorilor – metoda grafică





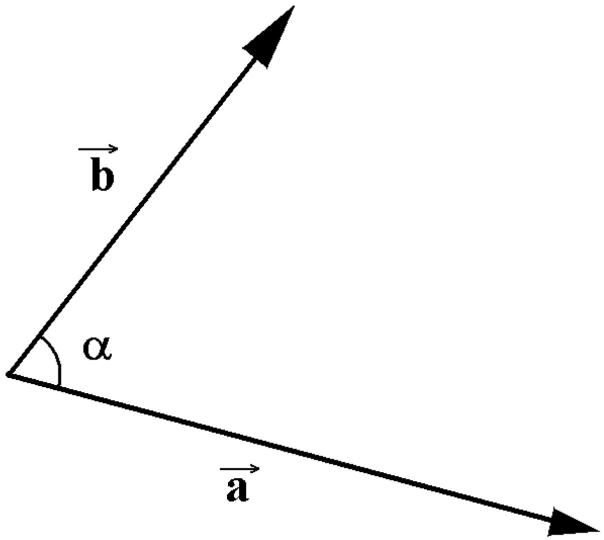
$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$-\vec{b}$ *opusul* vectorului $\vec{b}$

Operaţii cu mărimi vectoriale - recapitulare

c) Produsul scalar a doi vectori

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\alpha$$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\cdot\vec{k})\cdot(b_x\cdot\vec{i} + b_y\cdot\vec{j} + b_z\cdot\vec{k})$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$

$$\vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0$$

<u>Exemplu</u>: lucrul mecanic elementar

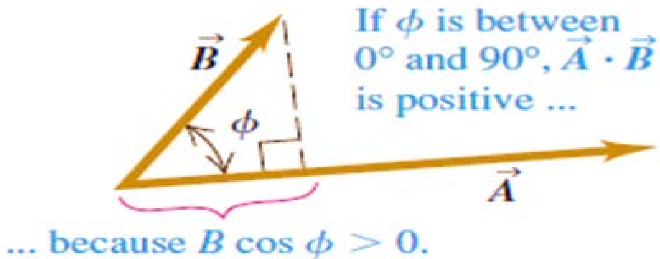
$$\eth L = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Operaţii cu mărimi vectoriale - recapitulare

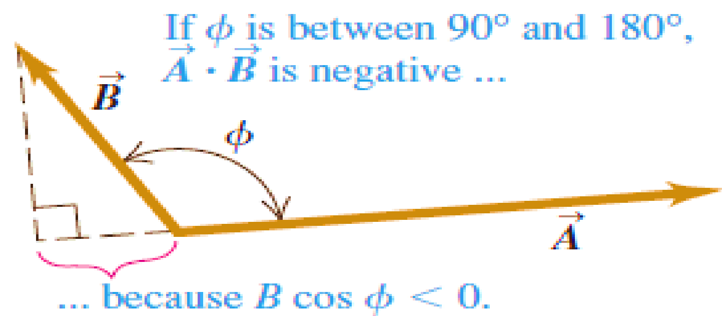
c) Produsul scalar a doi vectori

In funcție de unghiul dintre $\vec{A}$ și $\vec{B}$, produsul scalar poate să fie:

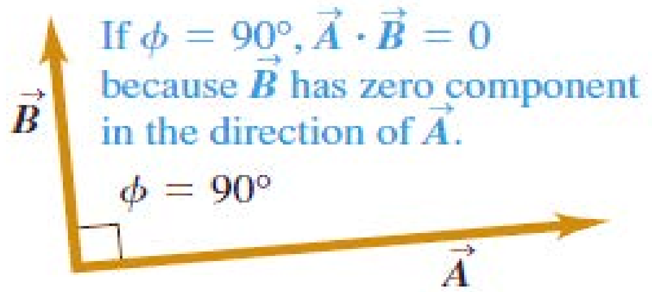
- POZITIV



- NEGATIV

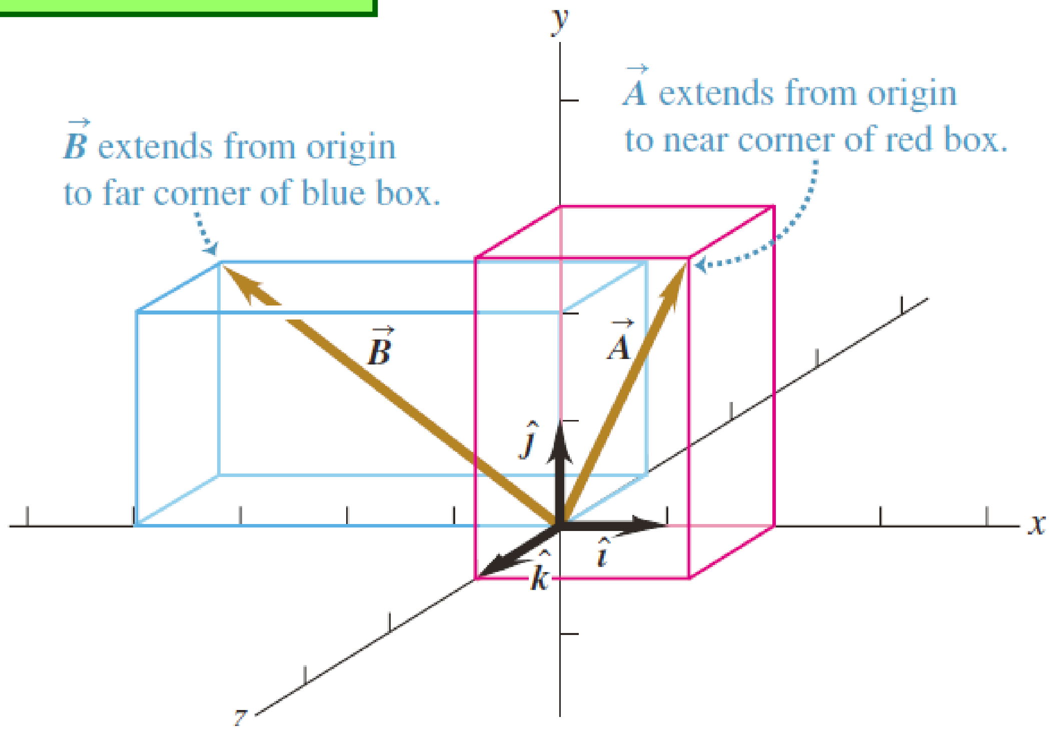


- ZERO



Operaţii cu mărimi vectoriale - recapitulare

c) Produsul scalar a doi vectori



Aplicație:

Să se determine unghiul dintre:

$\vec{A} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 1\vec{k}$ și

$\vec{B} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 1\vec{k}$

Rezolvare:

Se calculează produsul scalar:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Se determină modulul fiecărui vector, după care se determină unghiul:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \Longrightarrow \alpha = 100°$$

Studiu individual

1.Fie vectorii deplasare:

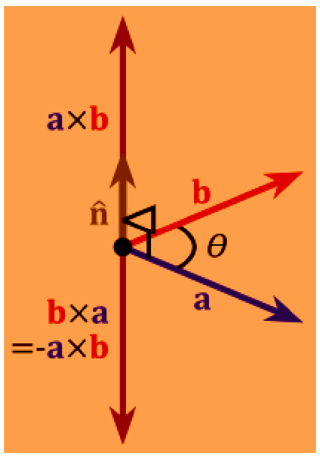
$$\vec{d}_1 = (4\,\mathrm{m}) \cdot \vec{i} + (5\,\mathrm{m}) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{d}_2 = (-3\,\mathrm{m}) \cdot \vec{i} + (4\,\mathrm{m}) \cdot \vec{j}$$

Să se calculeze produsul scalar al vectorilor.

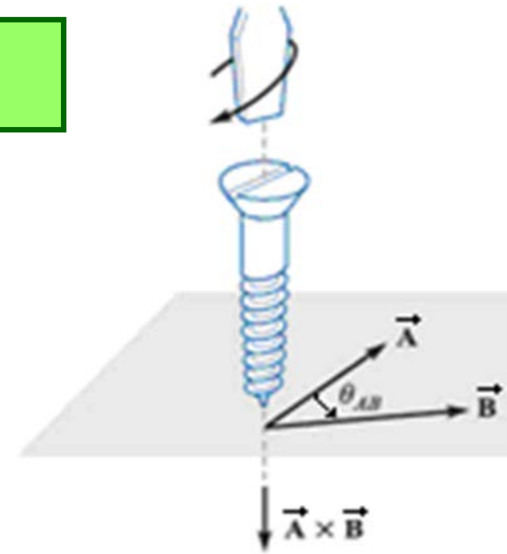
Operaţii cu mărimi vectoriale - recapitulare

d) Produsul vectorial a doi vectori



$$\left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = a\, b \sin \alpha$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$



$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -(\vec{j} \times \vec{i}) = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = -(\vec{k} \times \vec{j}) = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = -(\vec{i} \times \vec{k}) = \vec{j}$$

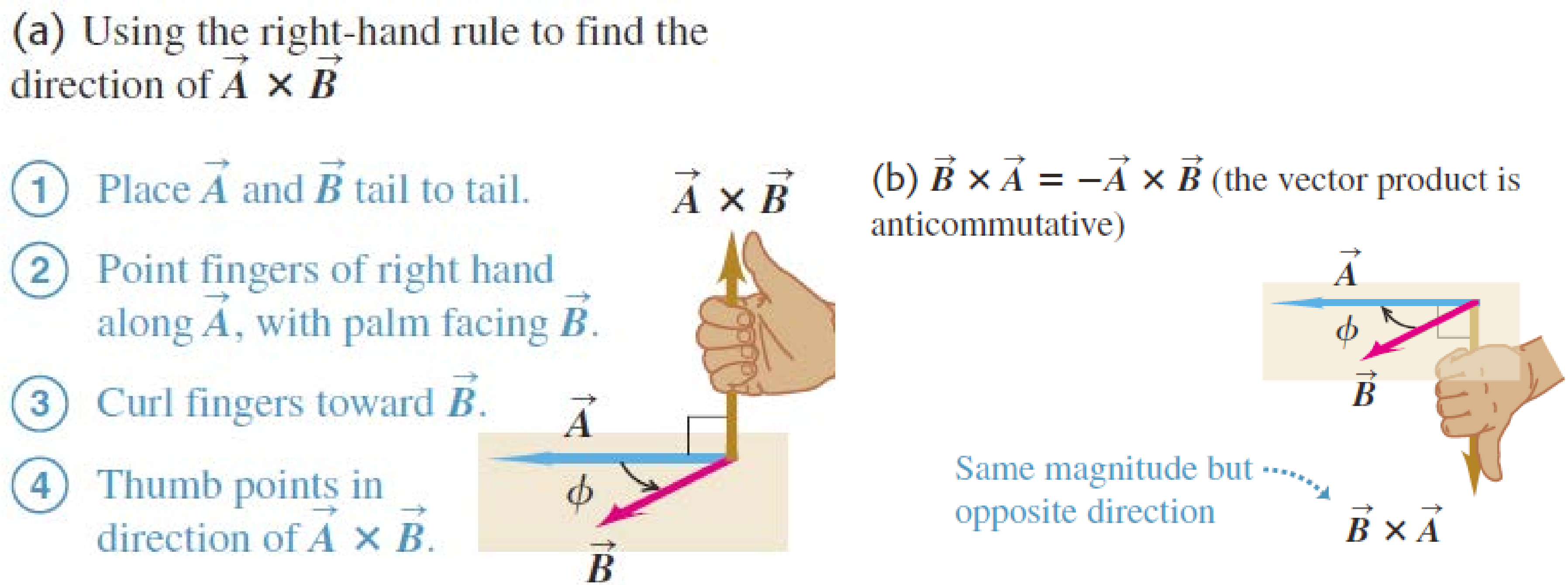
Exemplu: momentul cinetic

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Operaţii cu mărimi vectoriale - recapitulare

d) Produsul vectorial a doi vectori

Regula mâinii drepte



Studiu individual

Fie vectorii:

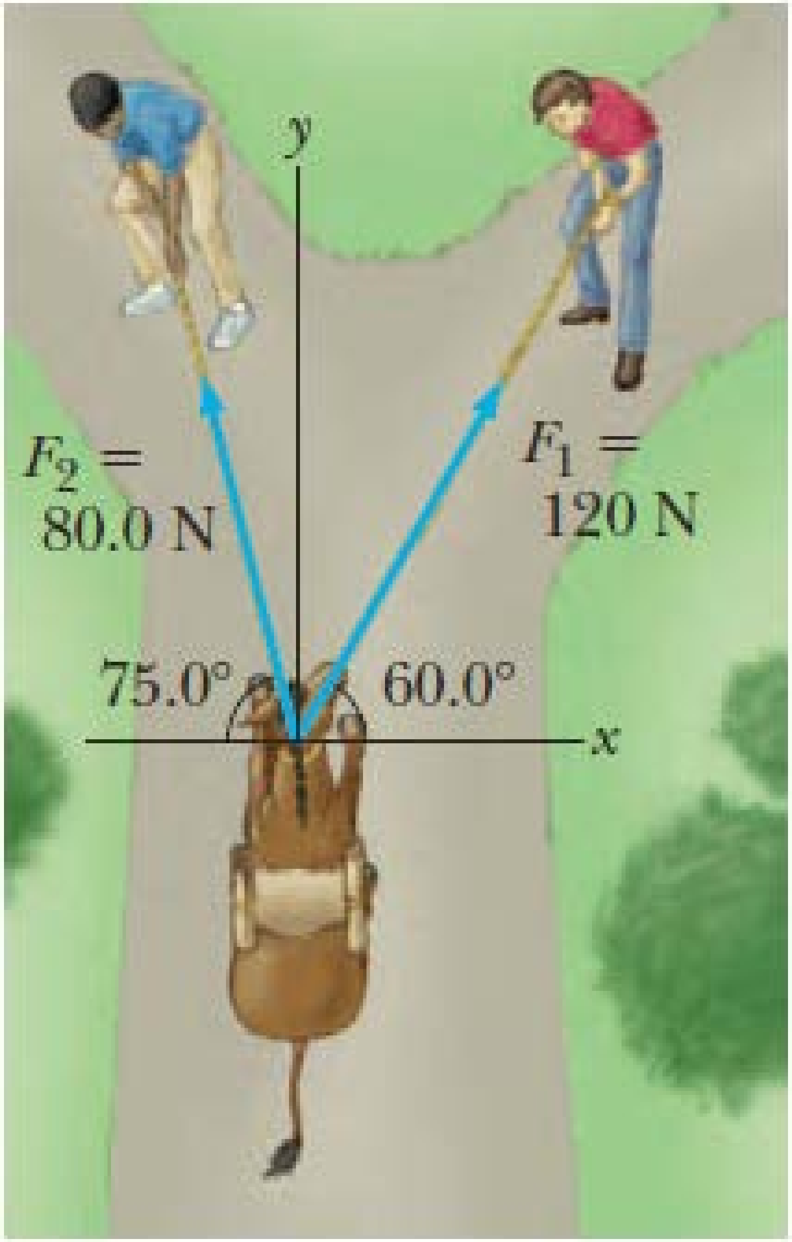
$$\vec{a} = (3\ \mathrm{m}) \cdot \vec{i} + (4\ \mathrm{m}) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{b} = (5\ \mathrm{m}) \cdot \vec{i} + (-2\ \mathrm{m}) \cdot \vec{j}$$

a) să se reprezinte vectorii într-un sistem de coordonate cartezian;
b) să se scrie vectorul rezultant în funcţie de vectorii unitate;
c) să se calculeze modulul vectorului rezultant;
d) să se calculeze unghiul format de vectorul rezultant cu sensul pozitiv al axei Ox.

Studiu individual

Să se determine sensul, direcția și modulul forței rezultante, folosind valorile din figura alăturată.

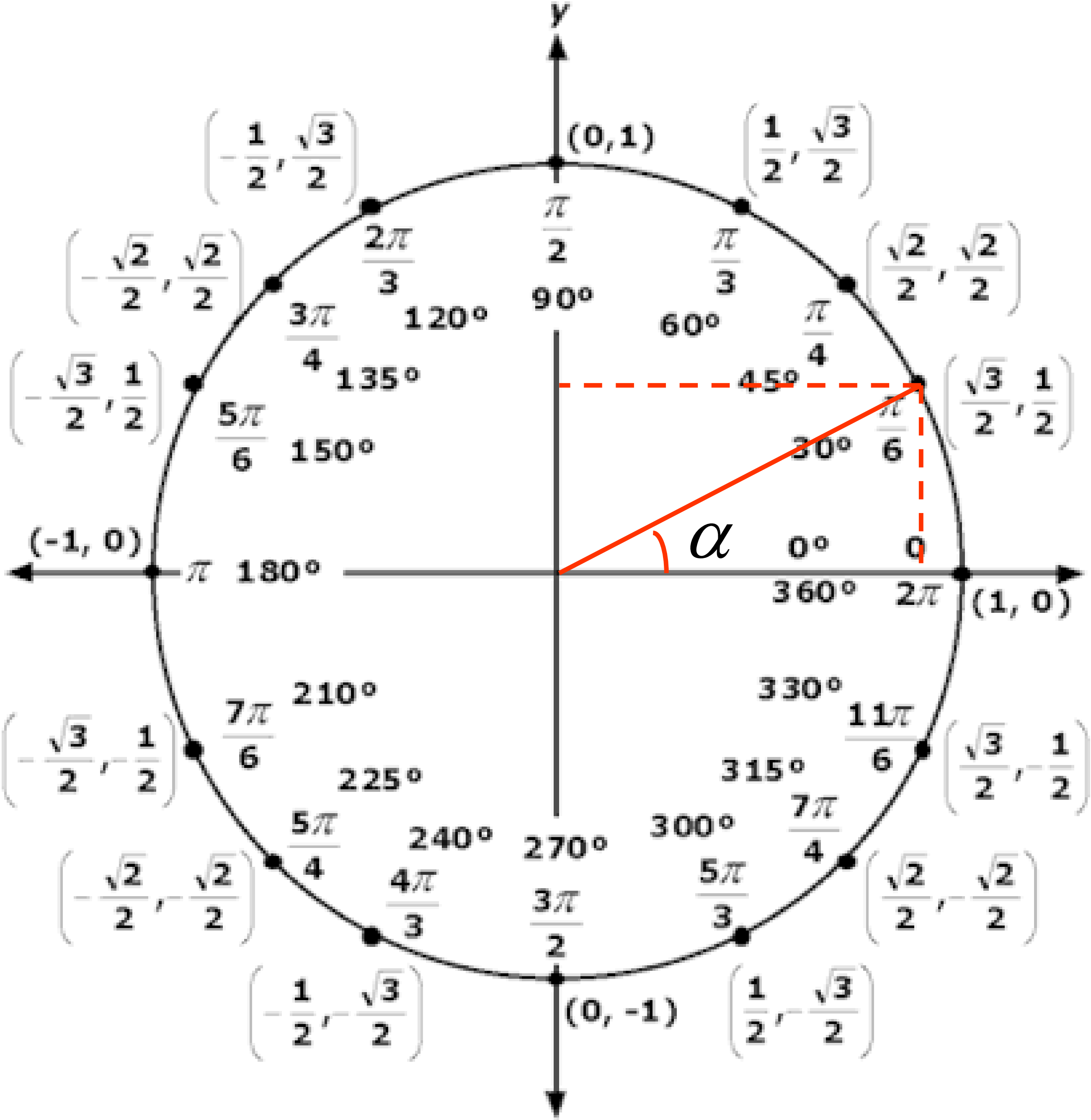


Anexă

α	0^o	$30^o\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^o\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^o\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^o\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin\alpha$	$0 \quad \left(\frac{\sqrt{0}}{2}\right)$	$\frac{1}{2} \quad \left(\frac{\sqrt{1}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 \quad \left(\frac{\sqrt{4}}{2}\right)$
$\cos\alpha$	$1 \quad \left(\frac{\sqrt{4}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2} \quad \left(\frac{\sqrt{1}}{2}\right)$	$0 \quad \left(\frac{\sqrt{0}}{2}\right)$

$$\boxed{360^o = 2\pi \text{ rad}}$$

Anexă



$$\cos\alpha = x$$

$$\sin\alpha = y$$

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

• enumere mărimile fundamentale ale Sistemului Internaţional de Unităţi şi unităţile lor de măsură;
• transforme o unitate de măsură în multipli respectiv submultipli acesteia;
•Să deducă, pornind de la relațiile de definiție, expresiile dimensionale ale mărimilor fizice;
• facă diferenţa dintre mărimile scalare şi cele vectoriale;
• cunoască metodele grafice de adunare şi scădere a vectorilor;
• proiecteze un vector pe axele de coordonate şi să exprime componentele sale;
• cunoască şi să aplice în probleme metoda analitică de compunere a vectorilor;
• definească produsul scalar şi vectorial a doi vectori;

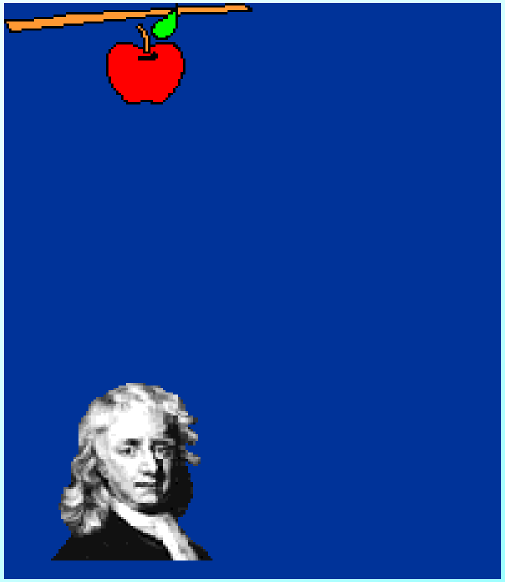
BIBLIOGRAFIE

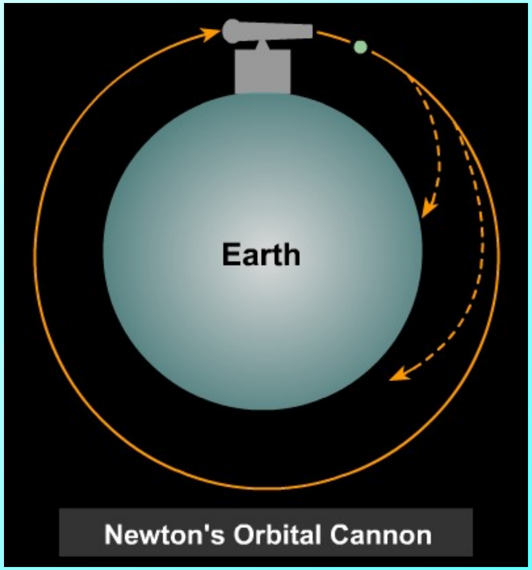
- **Fizica,** F. W.Sears, Zemansky , H. D.Young, Ed. Didactica si Pedagogica, 1983;
- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, F. Barvinschi, Ed. Orizonturi Universitare, 2016;
- **Elemente de fizică generală,** D. Popov, I. Damian, Ed. Politehnica, 2014;
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Ed. Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008
- **PHYSICS for Scientist and Engineers with Modern Physics** – Seventh Edition, R. Serway, J. Jewett, ed. Thomson Brooks/Cole, 2008.
- **Sears & Zemansky's University Physics: with Modern Physics**, 13th Edition, H. Young, R. Freedman, ed. Pearson, 2012

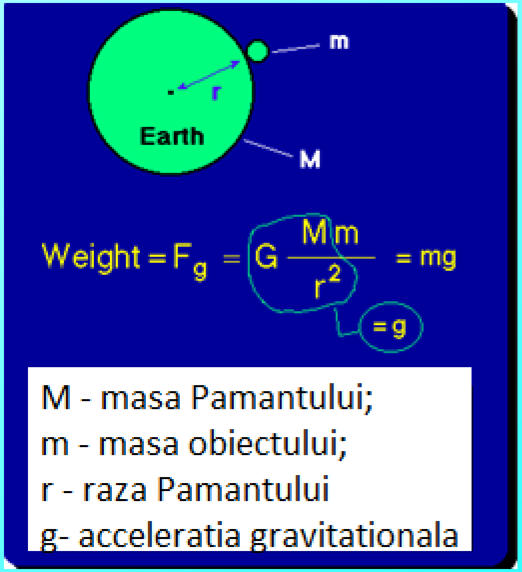
FIZICĂ PENTRU INGINERI

Prezentat de

Trif-Tordai Delia







Universitatea Politehnica Timişoara, România

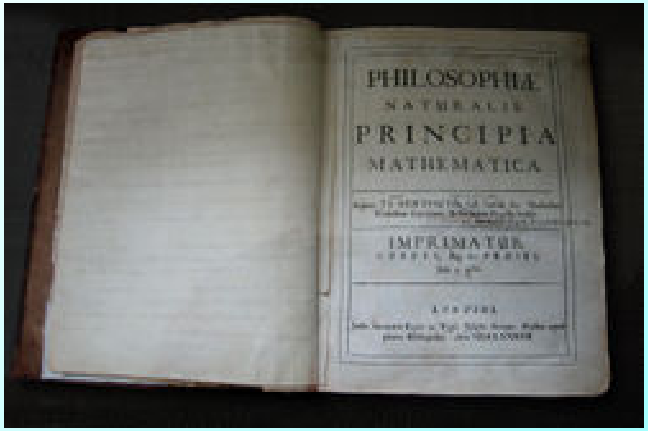
CURSUL 2

2020-2021

2. Mecanică clasică
2.1. Noțiuni generale
2.2. Principiile fundamentale ale dinamicii
2.3. Tipuri de forţe - Recapitulare

2. Mecanica clasică (newtoniană)

Mecanică = parte a fizicii care studiază mişcarea mecanică a corpurilor şi condiţiile de echilibru ale acestora



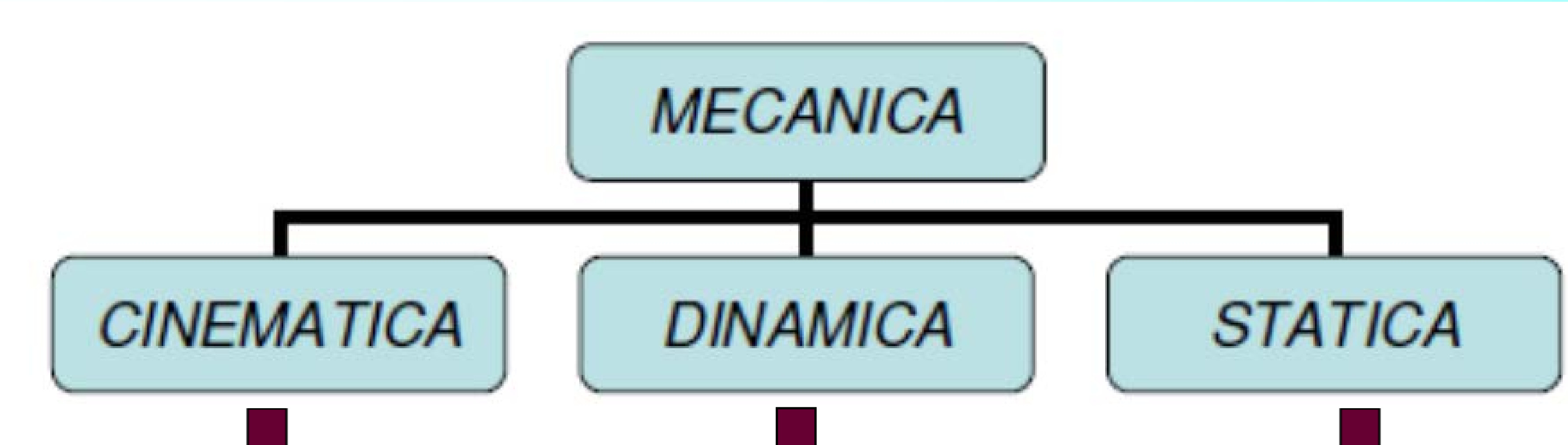
Sir Isaac Newton

(1643 – 1727)

- cele trei Principii
- Legea atracţiei universale

"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica - 1687"

2. Mecanica clasică



descrie mişcarea corpurilor

studiază cauzele mişcării corpurilor

echilibrul forţelor ce acţionează asupra unui corp

2.1. Cinematică. Noţiuni generale

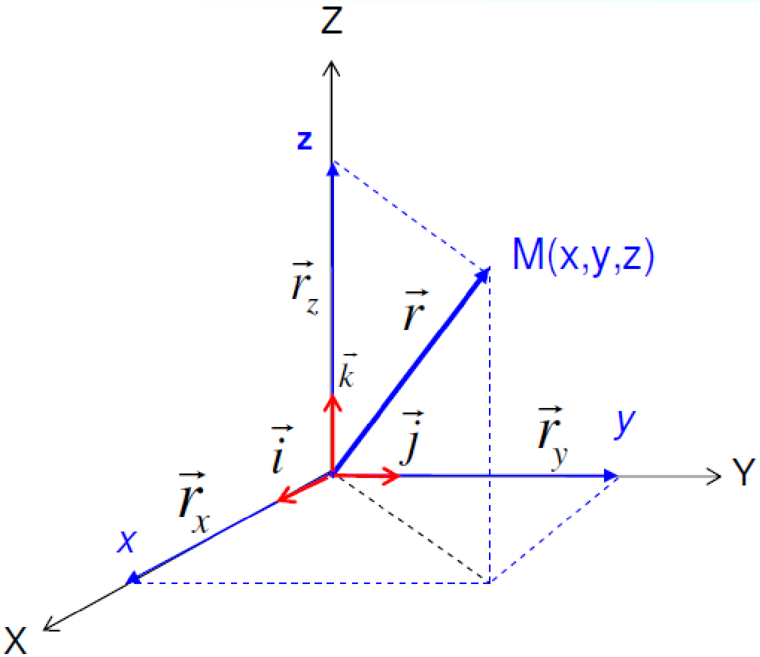
Spaţiul fizic este “locul” în care se desfăşoară fenomenele fizice. Spaţiul fizic convenţional este spaţiului euclidian, care este tridimensional.

Timpul reprezintă o măsură a duratei proceselor fizice.
Timpul este absolut şi universal, şi se scurge monoton de la trecut spre viitor.

Punctul material (PM) reprezintă un corp fizic de dimensiuni neglijabile, a cărui masă este concentrata într-un punct (numit *centru de masă*).
Aproximaţia de punct material constituie cel mai simplu model mecanic.

Sistemul de referinţă cuprinde un sistem de axe de coordonate, legat rigid de un corp aflat într-o stare de mişcare cunoscută faţă de alt corp sau sistem de corpuri, care împreună cu un ceas legat de sistemul de coordonate, indica poziţia corpurilor în spaţiu şi timp.
Indicarea stării de mişcare sau de repaus a unui corp are sens numai în raport cu un sistem de referinţă dat.

2.1. Cinematică. Noţiuni generale



Vectorul unitate (versori) – vector având modulul egal cu unitatea şi sensul dat de sensul pozitiv al axei de coordonate

$$\boxed{\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1}$$

<u>Vectorul de poziţie</u> - vector cu originea în originea sistemului de coordonate şi vârful în punctul în care se află corpul.

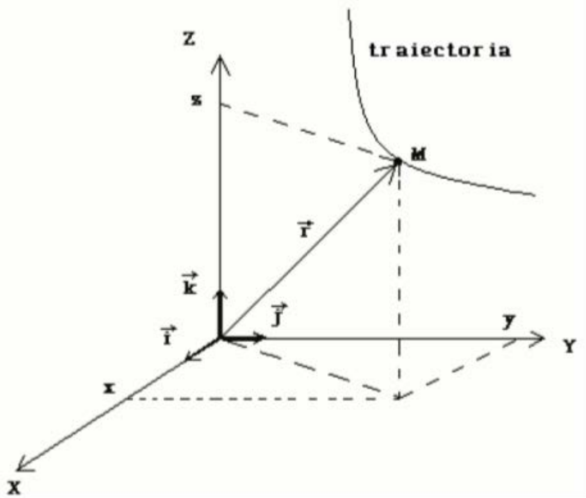
$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

<u>Modulul vectorului de poziţie:</u>

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.1. Cinematică. Noţiuni generale

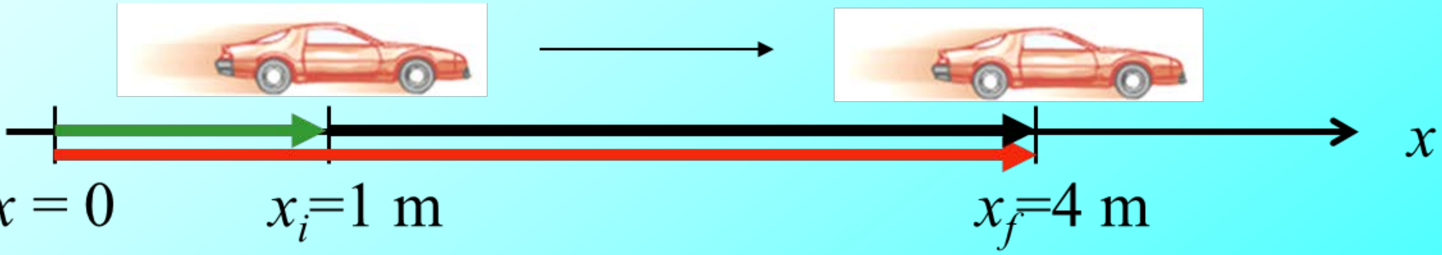
Traiectoria = totalitatea punctelor prin care trece punctul material (PM) pe parcursul mişcării sale.



Deplasarea = modificarea poziţiei PM

Vectorul deplasare: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$

Exemplu: $\Delta x = x_f - x_i = 4 - 1 = 3\,m$



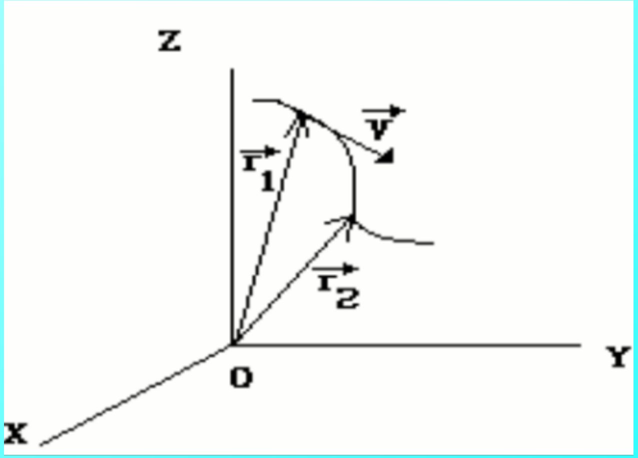
deplasarea este o mărime fizică vectorială !

2.1. Cinematică. Noţiuni generale

Viteza medie = raportul dintre vectorul deplasare (nu distanţă !!!) şi intervalul de timp în care a fost efectuată aceasta (deplasarea efectuată în unitatea de timp)

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}} \qquad \boxed{v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_f - r_i}{t_f - t_i}} \qquad \boxed{[v]_{S.I.} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

!!! este o mărime fizică vectorială



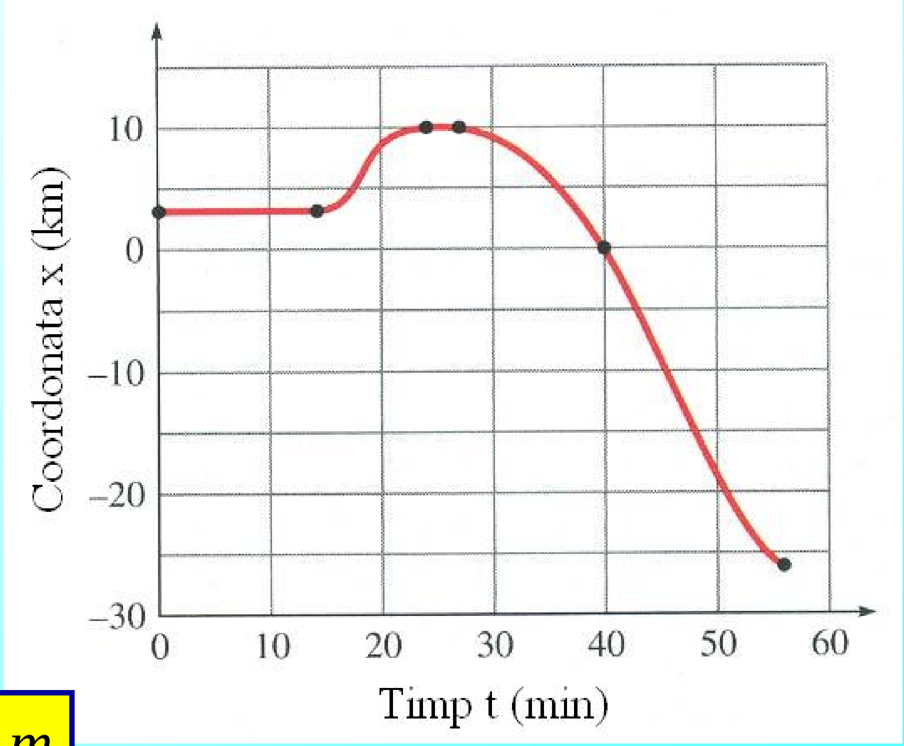
Viteza momentană (instantanee) = viteza punctului material la un moment dat.

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$$

2.1. Cinematică. Noţiuni generale

Aplicaţie:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$



$$v_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{-26000 - 3000}{3360 - 0} = -8{,}63\frac{m}{s}$$

!!! Obs. viteza medie are direcţia şi sensul vectorului deplasare

2.1. Cinematică. Noțiuni generale

Acceleraţia medie = variaţia vitezei punctului material în unitatea de timp

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

$$[a]_{S.I.} = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

!!! este o mărime fizică vectorială

Acceleraţia momentană = accelerația PM la un moment dat.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\left(= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)$$

2.1. Cinematică. Noțiuni generale

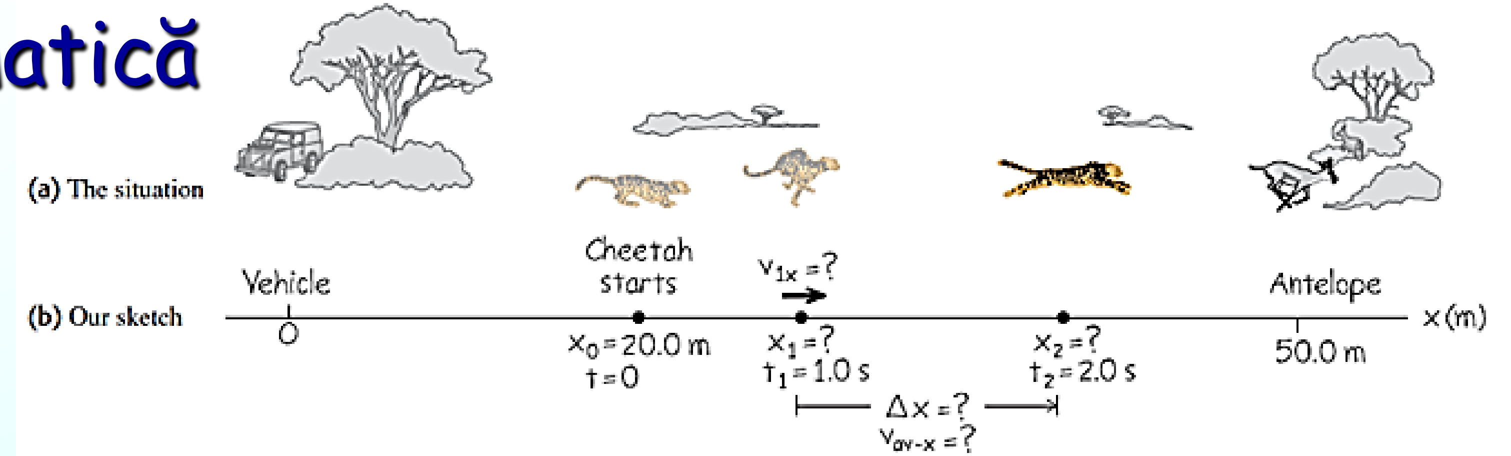
Componentele accelerației $a = \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dot{v}_x = a_x \\ \ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dot{v}_y = a_y \\ \ddot{z} = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dot{v}_z = a_z \end{cases}$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

Sau

$$\vec{a} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k}$$

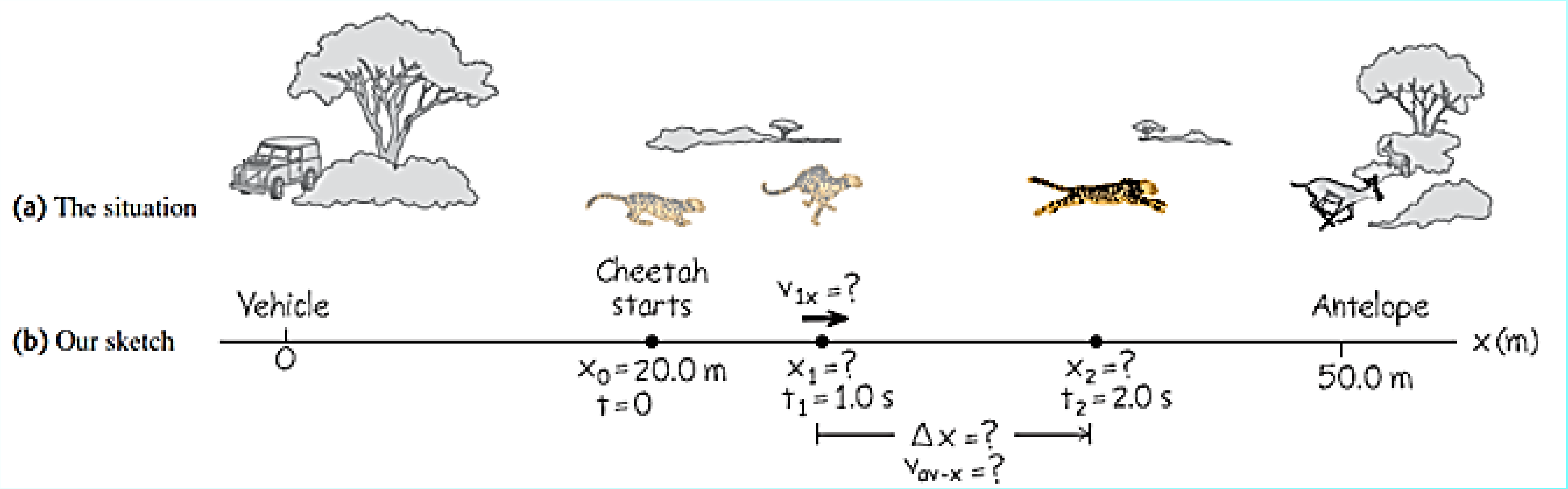
2.1. Cinematică



Aplicație:
La 20 m est față de un observator se află un ghepard. La momentul $t = 0$, ghepardul începe să alerge spre est, către o antilopă, aceasta fiind situată la 50 m est față de observator. În primele 2 s ale atacului, coordonatele ghepardului variază în funcţie de timp, conform ecuaţiei: $x = 20\ \mathrm{m} + (5\ \mathrm{m/s^2})t^2$.

a) Să se determine deplasarea ghepardului între momentele $t_1 = 1\ s$ şi $t_2 = 2\ s$.
b) Să se determine viteza medie în acest interval.
c) Să se determine viteza medie la $t_1 = 1\ s$, dacă $\Delta t = 0.1\ s$.
d) Determinaţi expresia vitezei momentane în funcţie de timp a ghepardului, şi utilizați-o pentru a determina viteza v_x la momentele $t_1 = 1\ s$, respectiv $t_2 = 2\ s$.

2.1. Cinematică



a) La $t_1 = 1$ s şi $t_2 = 2$ s coordonatele ghepardului sunt:

$$x_1 = 20\text{m} + (5\,\text{m}/s^2)(1\text{s})^2 = 25\text{ m}$$

$$x_2 = 20\text{m} + (5\,\text{m}/s^2)(2\text{s})^2 = 40\text{ m}$$

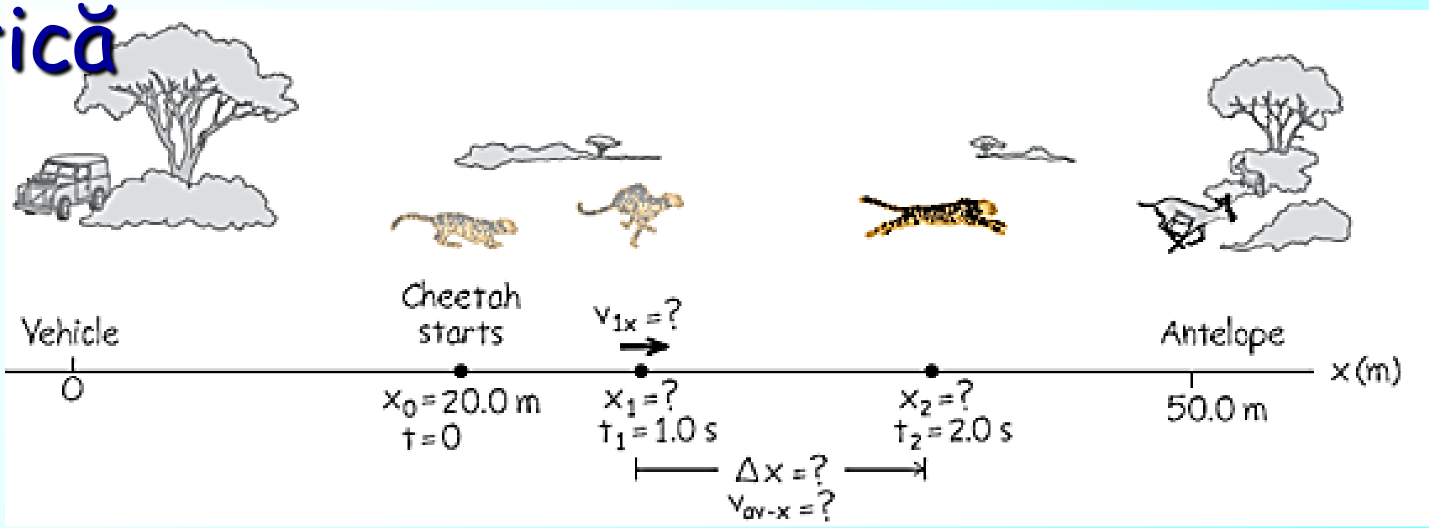
Deplasarea în acest interval de 1 s este:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 15\text{ m}$$

b) Viteza medie în acest interval este:

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{15\text{ m}}{1\text{ s}} = 15\ \text{m/s}$$

2.1. Cinematică



c) Dacă $\Delta t = 0.1\ s$, atunci intervalul de timp este de la $t_1 = 1$ s la $t_2 = 1.1$ s. La momentul t_2 poziţia este:

$$x_{2'} = 20\text{m} + (5\,\text{m}/s^2)(1.1\text{ s})^2 = 26.05\text{ m}$$

Viteza medie în interval de 0.1 s este:

$$v_{m-x} = \frac{x_{2'} - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{26.05\text{m} - 25\text{m}}{1.1s - 1s} = 10.5\ \text{m}/\text{s}$$

d) Se derivează ecuaţia $x = 20\text{ m} + (5\ \text{m}/s^2)t^2$ la timp şi se obţine:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = (5\ \text{m}/\text{s}^2)(2t) = (10\ \text{m}/s^2)\text{t}$$

La $t_1 = 1$ s, viteza este $v_{x1} = 10\ \text{m}/\text{s}$, respectiv $t_2 = 2$ s viteza este $v_{x2} = 20\ \text{m}/\text{s}$.

2.1. Cinematică. Noțiuni generale

Clasificarea mişcărilor punctului material

- Rectilinie
  - uniformă($\vec{v} = constant;\quad \vec{a} = 0$)
  - variată ($\vec{a} \neq 0$)
    - uniform variată ($a =$ const.)
      - accelerată a>0
      - încetinită a<0
    - neuniformă ($a =$variabil)
- Curbilinie
  - uniformă $|\vec{v}| = constant$
  - neuniformă

2.1. Cinematică. Noțiuni generale

Determinarea vitezei și a coordonatei poziției prin integrare

Legea mişcării rectilinii uniforme (v=ct.)

$$v = \frac{dr}{dt} \longrightarrow dr = v \cdot dt \longrightarrow \int_{r_0}^{r} dr = \int_{t_0}^{t} v \cdot dt$$

$$\boxed{r = r_0 + v\left(t - t_0\right)}$$

Legea vitezei (a=ct.)

$$a = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dv = a \cdot dt \longrightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a \cdot dt$$

$$\boxed{v = v_0 + a\left(t - t_0\right)}$$

2.1. Cinematică. Noțiuni generale

Determinarea vitezei și a coordonatei poziției prin integrare

Legea mişcării (a=ct)

$$v = \frac{dr}{dt} \longrightarrow dr = v \cdot dt \longrightarrow \int_{r_0}^{r} dr = \int_{t_0}^{t} v \cdot dt$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$\boxed{r = r_0 + v\left(t - t_0\right) + \frac{a\left(t - t_0\right)^2}{2}}$$

De ex: să considerăm un mobil care se mișcă în direcția pozitivă a axei x, atunci legea de mișcare devine:

$$x = x_0 + v_x\left(t - t_0\right) + \frac{a_x\left(t - t_0\right)^2}{2}$$

2.1. Cinematică. Noțiuni generale

Determinarea vitezei și a coordonatei poziției prin integrare

Formula lui Galilei

Se pune condiția ca: $t_0 = 0$

$$v = v_0 + a \cdot t \Longrightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

Se introduce timpul în legea de mișcare:

$$r = r_0 + v \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{a}{2}\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

Se obține: $\boxed{v^2 = v_0{}^2 + 2\,a\,(\mathrm{r} - r_0)}$

2.1. Cinematică. Noţiuni generale

Mişcarea rectilinie uniform variată

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$\boxed{v = v_0 + a\,(t - t_0)}$$

Legea vitezei

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

$$v_m = \frac{v + v_0}{2} = v_0 + \frac{1}{2} a\,(t - t_0)$$

$$\boxed{x = x_0 + v_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2} a\,(t - t_0)^2}$$

Legea mişcării

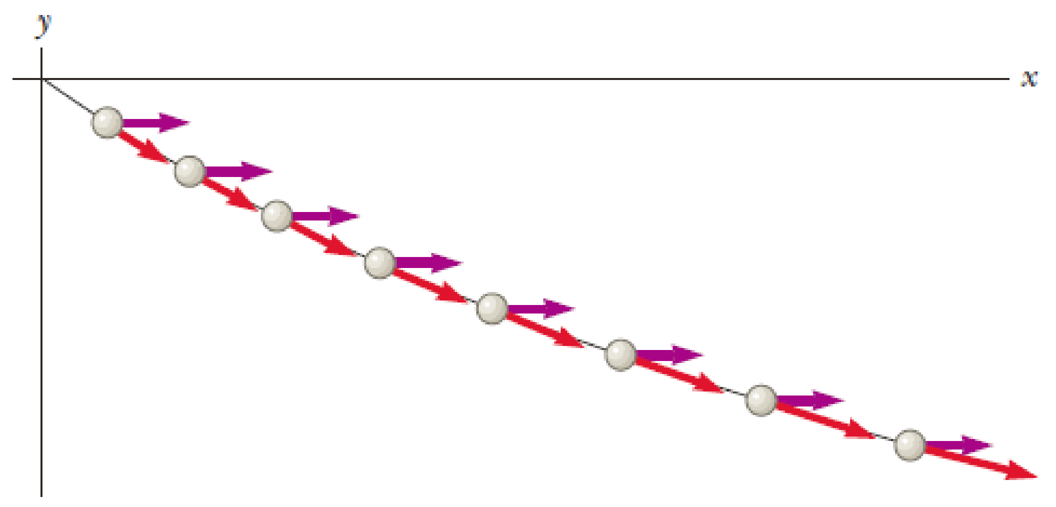
$$t - t_0 = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 = x_0 + \frac{v^2 - v_0{}^2}{2\,a}$$

$$\boxed{v^2 = v_0{}^2 + 2\,a\,(x - x_0)}$$

Formula lui Galilei

Aplicație



O particulă pornește din origine la $t = 0$ cu o viteză inițială care are componentă pe axa *x* de 20 m/s, respectiv componenta pe axa y de –15 m/s. Particula se deplasează în planul *xy* cu o singură componetă a accelerație, dată de $a_x = 4\ \mathrm{m/s^2}$.

a) Să se determine vectorul viteză rezultant la orice moment.
b) Să se determine vectorul viteză si modulul acesteia la momentul $t = 5$ s.
c) Să se determine coordonatele particulei la orice moment *t* și vectorul deplasare.

Aplicație

a) Din datele problemei rezultă: $v_{xi} = 20\ \mathrm{m/s}$ şi $v_{yi} = -15\ \mathrm{m/s}$; $a_x = 4\ \mathrm{m/s^2}$, respectiv $a_y = 0$.

Aplicând legea vitezei rezultă:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t = (v_{xi} + a_x t)\vec{\imath} + \left(v_{yi} + a_y t\right)\vec{\jmath}$$

După introducerea valorilor se obţine:

$$\vec{v}_f = [20\ \mathrm{m/s} + (4\,\mathrm{m/s^2})t]\vec{\imath} + (-15\,\mathrm{m/s} + 0)\vec{\jmath}$$

$$\vec{v}_f = [(20 + 4t)\vec{\imath} - 15\vec{\jmath}]\ \mathrm{m/s}$$

b) $t = 5\ \mathrm{s} \Longrightarrow \vec{v}_f = [(20 + 4 \cdot 5)\vec{\imath} - 15\vec{\jmath}]\,\mathrm{m/s} = (40\vec{\imath} - 15\vec{\jmath})\ \mathrm{m/s}$

Direcţia pe care o are particula la mometul $t = 5$ s este:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{yf}}{v_{xf}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15\ \mathrm{m/s}}{40\ \mathrm{m/s}}\right) = -21°$$

Semnul negativ al unghiului indică faptul că, vectorul viteză este poziţionat sub axa *x* şi formează cu aceasta un unghi de 21°.

Modulul vectorului viteză: $\left|\vec{v}_f\right| = v_f = 43\ \mathrm{m/s}$

Aplicație

c) Aplicând legea spațiului şi ţinând cont de condiţiile iniţiale $x_i = y_i = 0$ la t =0, rezultă:

$$x_f = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = (20t + 2t^2)\ \mathrm{m}$$

$$y_f = v_{yi}t = (-15t)\ \mathrm{m}$$

Expresia vectorului de poziţie al particulei la orice moment este:

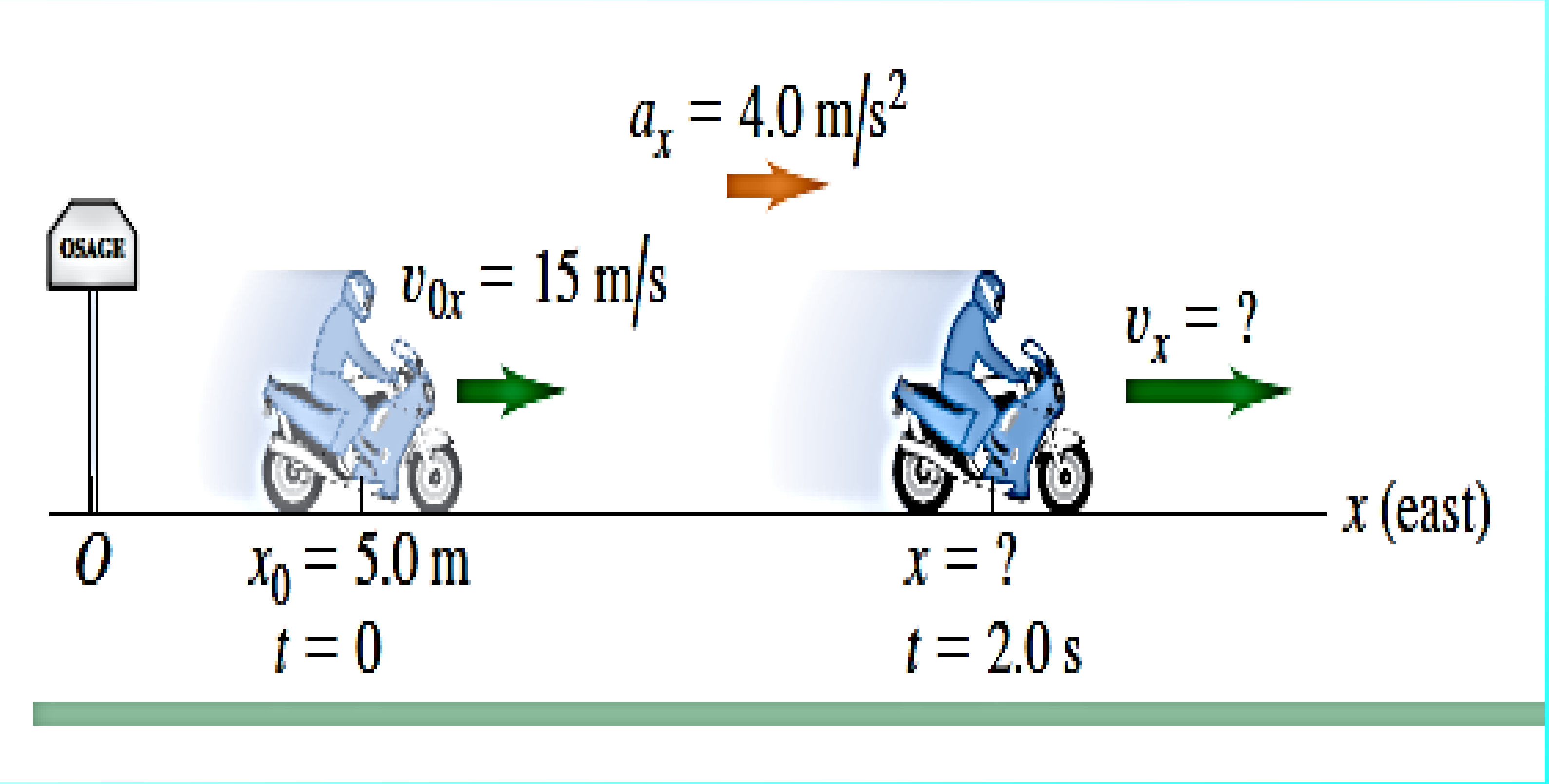
$$\vec{r}_f = x_f\vec{i} + y_f\vec{j} = [(20t + 2t^2)\vec{i} - 15t\vec{j}]\mathrm{m}$$

Studiu de caz:

Un motociclist se deplasează spre est, iar după ce trece de limitele unui oraş, accelerează constant, cu valoarea $a_x = 4$ m/s^2. In momentul $t = 0$ este la 5 m est şi se deplasează cu o viteză de 15 m/s.

a) Să se determine poziţia şi viteza la $t = 2\ s$.

b) Să se determine poziţia, atunci când viteza este de 25 m/s.



2.1. Cinematică. Noțiuni generale

Mişcarea rectilinie cu accelerației variabilă $a \neq ct.$

Să considerăm mișcarea unui corp în sensul pozitiv al axei x, cu o accelerație al cărei sens este opus vitezei și a cărei mărime este proporțională cu viteza, astfel:

$$a = -k \cdot v$$

unde *k* este o constantă. Să se determine viteza și poziția.

$$a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow -k \cdot v = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow \frac{dv}{v} = -k\,\mathrm{d}t \Longrightarrow$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t \Longrightarrow \ln\frac{v}{v_0} = -k\,t \Longrightarrow \boxed{v = v_0 \exp(-k\,t)}$$

viteza scade exponențial cu timpul

$$v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = v_0\,\mathrm{e}^{-kt} \xrightarrow[t_0 = 0]{x_0 = 0} x = \frac{v_0}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)$$

Deși copului îi este necesar un timp infinit pentru a ajunge în repaus, în acest timp infinit corpul parcurge numai o distanță finită, v_0/k .

2.2.Principiile fundamentale ale dinamicii

Principiile mecanicii clasice formulate de Galilei şi de Newton, sunt valabile doar pentru mişcări care se desfăşoară cu viteze mult mai mici decât viteza luminii în vid, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

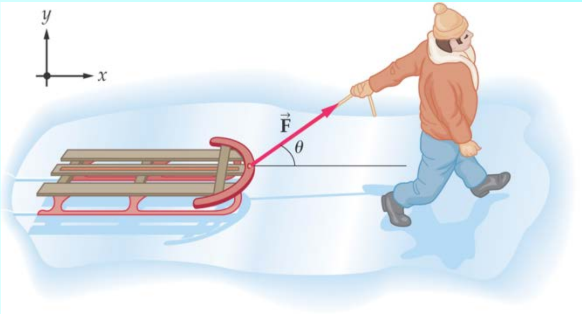
1. Principiul inerţiei (prima lege a lui Newton):

Un corp îşi pastrează starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă atât timp cât asupra lui nu se exercită nicio forţă sau dacă rezultanta tuturor forţelor este egală cu zero.

Sistemele de referinţă în care este valabil *Principiul inerţiei* şi care se mişcă uniform şi rectiliniu unele faţă de altele se numesc *sisteme de referinţă inerţiale.*

2.2.Principiile fundamentale ale dinamicii

Forţa - mărime fizică vectorială ce caracterizează interacţiunea dintre corpuri.



Masa: - mărime fizică scalară;
- măsură a cantităţii de substanţă conţinută de corp;
- caracterizează inerţia unui corp.

$$[m]_{SI} = kg$$

Inerţia (= ”lene”) este tendinţa unui corp de a-şi păstra starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă atâta timp cât asupra sa nu acţionează o forţă netă care să-i modifice această stare.

2.2.Principiile fundamentale ale dinamicii

2. Legea fundamentală a dinamicii (a II-a lege a lui Newton):

Forţa care acţionează asupra unui corp îi imprimă acestuia o acceleraţie proporţională cu forţa şi invers proportională cu masa corpului.

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

Forţa rezultantă: $\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$

$$\boxed{[F]_{S.I.} = [m][a] = 1\,\mathrm{kg} \cdot 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{N} \;\; (\mathrm{Newton})}$$

1 Newton reprezintă forţa care, aplicată asupra unui corp cu masa de 1 kg îi imprimă o acceleraţie de 1 m/s^2

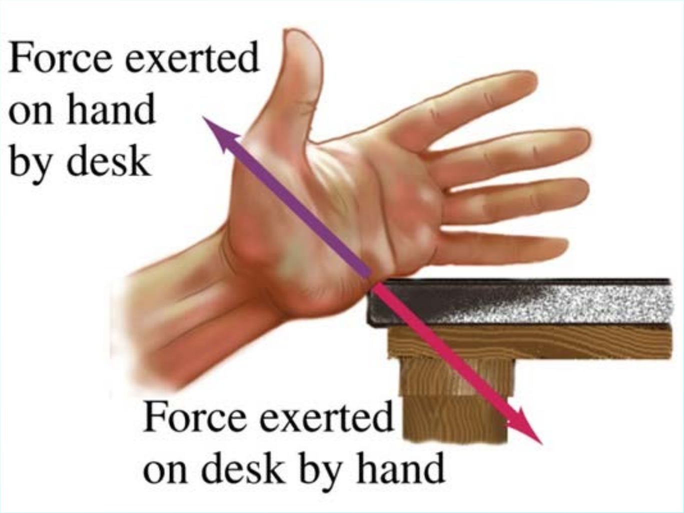
$$\boxed{\sum F_x = m\,a_x \quad \sum F_y = m\,a_y \quad \sum F_z = m\,a_z}$$

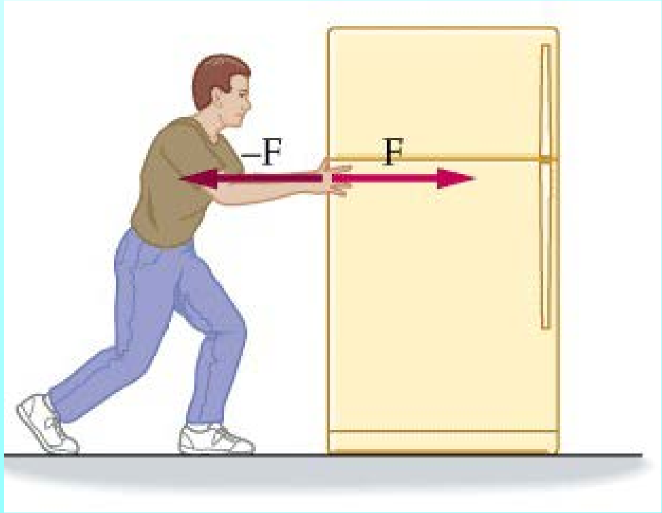
2.2.Principiile fundamentale ale dinamicii

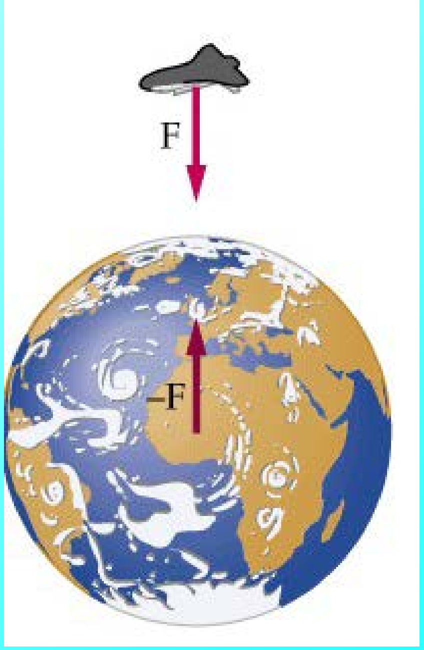
3. Principiul actiunii si reactiunii (legea a III – a a lui Newton)

Dacă un corp A acţionează asupra unui corp B cu o forţă numită acţiune, corpul B va acţiona asupra corpului A cu o forţă numită reacţiune. Acţiunea şi reacţiunea sunt egale în modul, dar orientate în sens contrar:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$



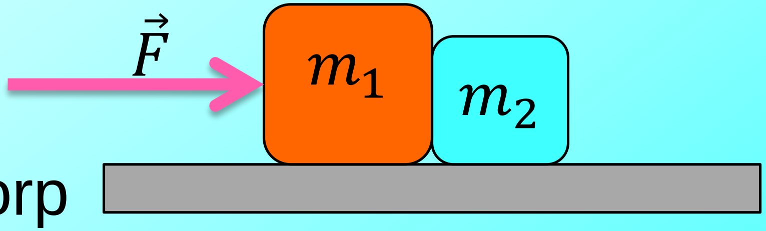




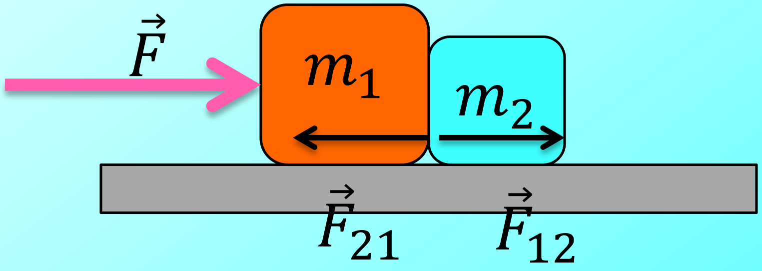
2.2.Principiile fundamentale ale dinamicii

3. Principiul actiunii si reactiunii – <u>aplicaţie</u> $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

Două corpuri sunt în contact pe o suprafaţă orizontală, fără frecare. Dacă se aplică o forţă, ca în figură, să se găsească acceleraţia şi cele două forţe $\vec{F}_{12}$şi $\vec{F}_{21}$. Se dă F=3.2 N, m_1= 2kg si m_2= 6 kg.



- Se aplică $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ pentru fiecare corp
- Dar $F_{12} = F_{21}$



- Rezultă: $a = \frac{F}{m_1+m_2}$ $F_{12} = F_{21} = \frac{m_2}{m_1+m_2}F$

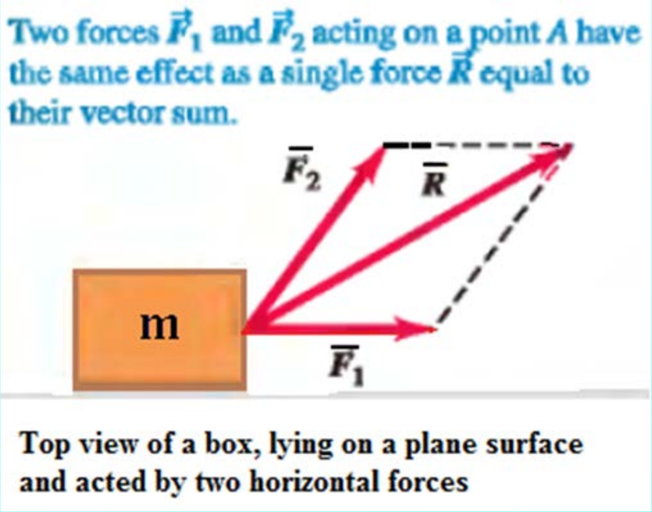
2.2.Principiile fundamentale ale dinamicii

4. Principiul independenţei acţiunii forţelor

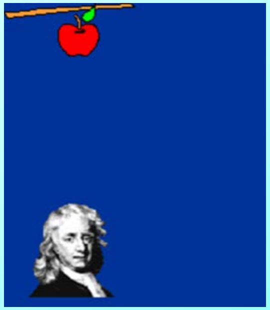
Fiecare din forţele care acţionează asupra unui corp, îşi manifestă acţiunea independent de prezenţa celorlalte forţe aplicate.

Rezultanta forţelor: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = \sum \vec{F}$

$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y$$



2.3. Tipuri de forţe - Recapitulare

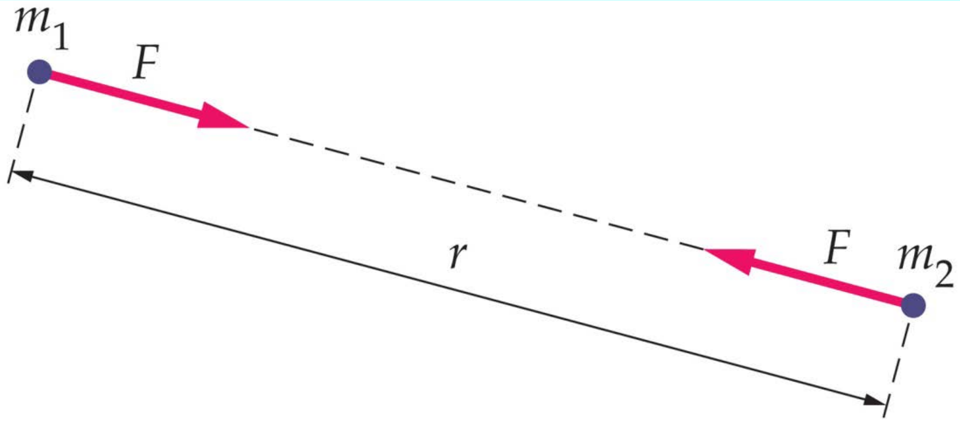


1. Forţa de atracţie gravitaţională

Newton, 1665

$$\vec{F} = -K\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Legea atracţiei universale



Constanta atracţiei universale:

$$K = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{N\,m^2}{kg^2}$$

In modul forța de atracție gravitațională se scrie:

$$F = K\frac{m_1\, m_2}{r^2}$$

http://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/gravity-and-orbits

https://phet.colorado.edu/sims/html/gravity-force-lab/latest/gravity-force-lab_en.html

2.3. Tipuri de forţe - Recapitulare

1. Forţa de atracţie gravitaţională - **Aplicaţie 1:**

$m_1 = 80$ kg
$m_2 = 40$ kg
$r = 1$ m

$$\boxed{F = K \frac{m_1 \, m_2}{r^2}}$$

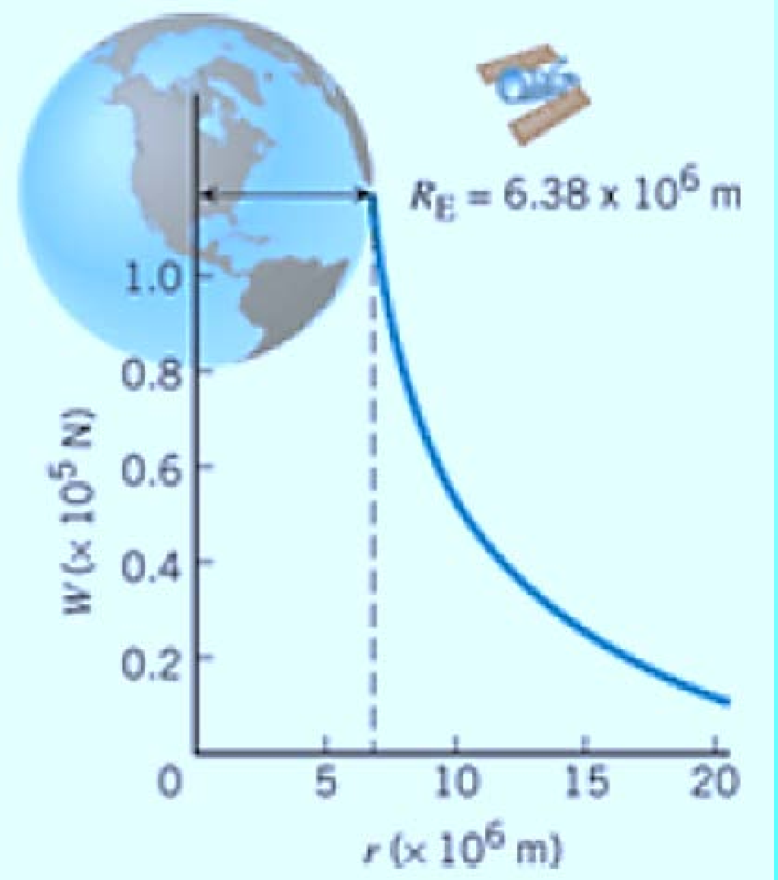
$$\boxed{K = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{N \, m^2}{kg^2}}$$

$$\Rightarrow F = 2{,}13 \cdot 10^{-7} \; N$$

Obs.: Forţa de atracţie gravitaţională ce se exercită între două corpuri de mici dimensiuni este neglijabilă

2.3. Tipuri de forţe

1. Forţă de atractie gravita. – <u>Aplicaţie 2</u>



Forţa de atracţie gravitaţională a telescopului spaţial Hubble descreşte cu creşterea distanţei *r* ($r=R_p+h$). Daca masa telescopului spaţial este de 11600 kg, atunci să se determine forţa de atracţie gravitațională:

a) când telescopul este la suprafaţa pământului;
b) când este la 600 km deasupra Pământului

2.3. Tipuri de forţe

$$F = K\frac{M_P\, m_{Hub}}{r^2}$$

1. Forţă de atractie gravitationala – <u>aplicaţie 2</u> - continuare

a) **Telescopul este la suprafaţa pământului** $F_0 = 1{,}14 \cdot 10^5\ N$

Raza Pământului $r = R_p = R_E = 6{,}38 \cdot 10^6\ m$

$$F_0 = \frac{(6{,}673 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg)(5{,}972 \cdot 10^{24} kg)(11600 kg)}{(6{,}38 \cdot 10^6 m)^2}$$

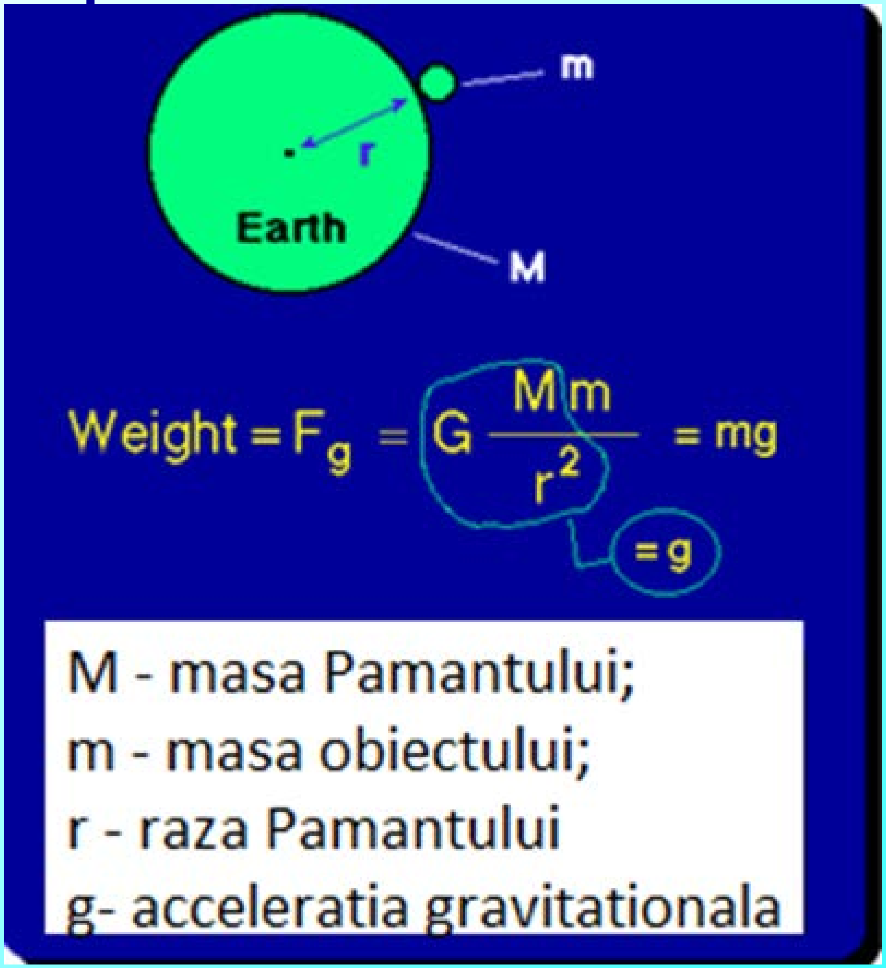
b) Telescopul este la 600 km deasupra Pământului $r = R_p + h$

$$F_h = 0{,}95 \cdot 10^5\ N$$

2.3. Tipuri de forţe - Recapitulare

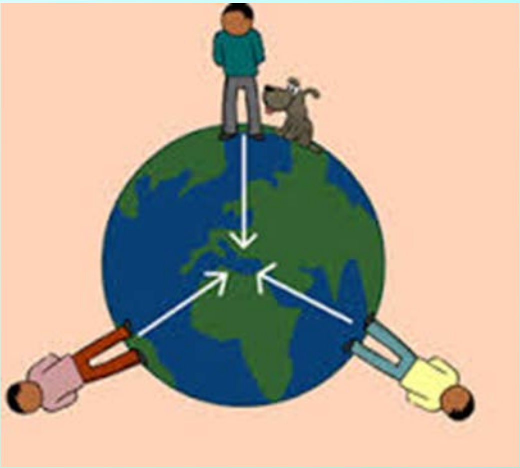
2. Forţă de greutate

Pentru un corp aflat în vecinătatea suprafeţei Pământului:

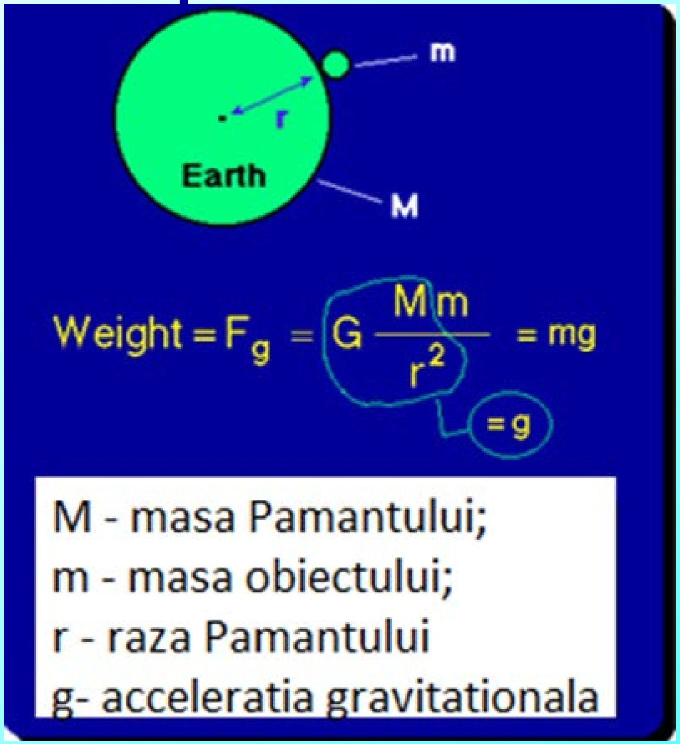


$$F = K\frac{M_P m}{R_P^2} = \left(\frac{K\,M_P}{R_P^2}\right)\cdot m = m\,g$$

$$r \cong R_p = 6{,}38\cdot 10^6\ m$$



2. Forţă de greutate



g – acceleraţie gravitaţională

9,832 m/s² (la Poli)
9,780 m/s² (la Ecuator)

$$g = \frac{K\ M_P}{R_P^2} = \frac{6{,}673\cdot 10^{-11}\left(\frac{N\ m^2}{kg^2}\right)5{,}98\cdot 10^{24}\ (kg)}{(6{,}38\cdot 10^6)^2\ (m^2)} = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$$

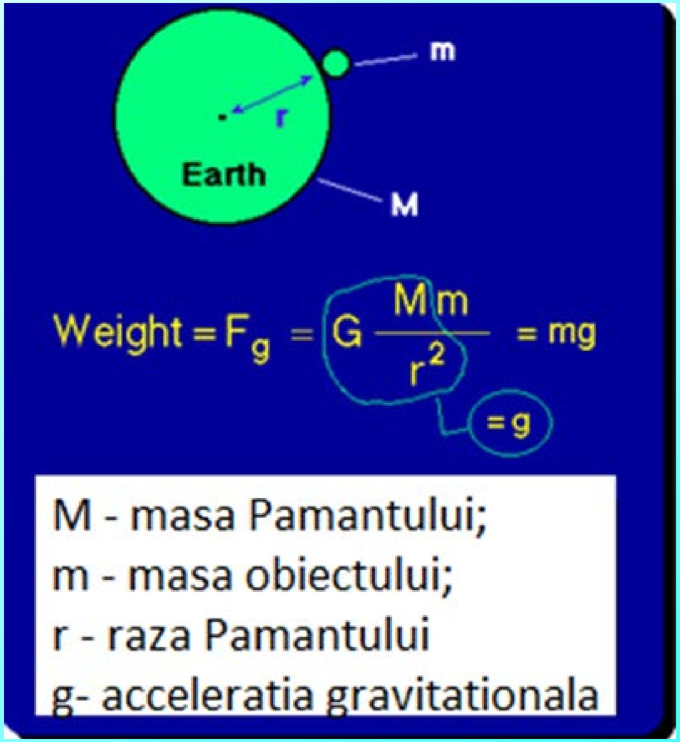
2.3. Tipuri de forţe - Recapitulare

2. Forţă de greutate

g – acceleraţie gravitaţională

Free-Fall Acceleration g at Various Altitudes Above the Earth's Surface

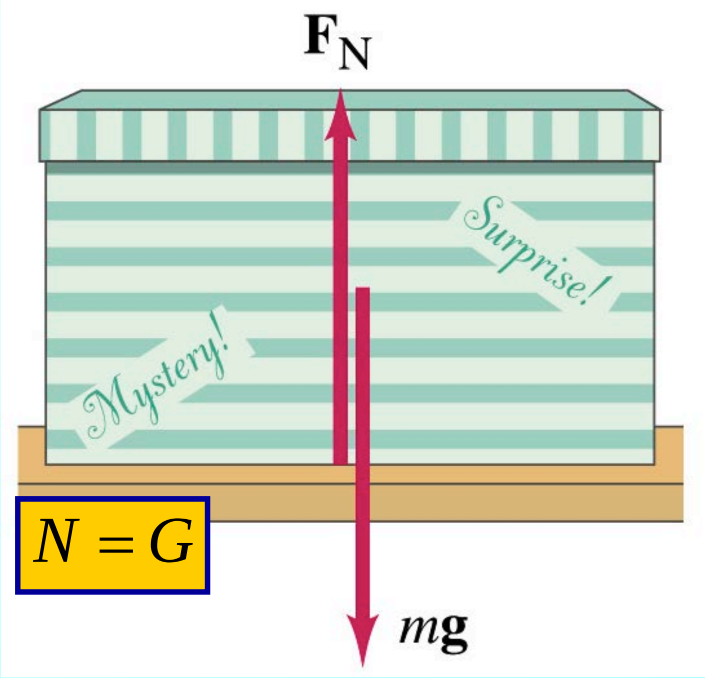
Altitude h (km)	g (m/s^2)
1 000	7.33
2 000	5.68
3 000	4.53
4 000	3.70
5 000	3.08
6 000	2.60
7 000	2.23
8 000	1.93
9 000	1.69
10 000	1.49
50 000	0.13
∞	0



2.3. Tipuri de forţe - Recapitulare

3. Forţa normală

Forţa normală este forţa pe care o suprafaţă o exercită asupra unui corp cu care se află în contact şi este întotdeauna perpendiculară (normală) pe suprafaţa de contact

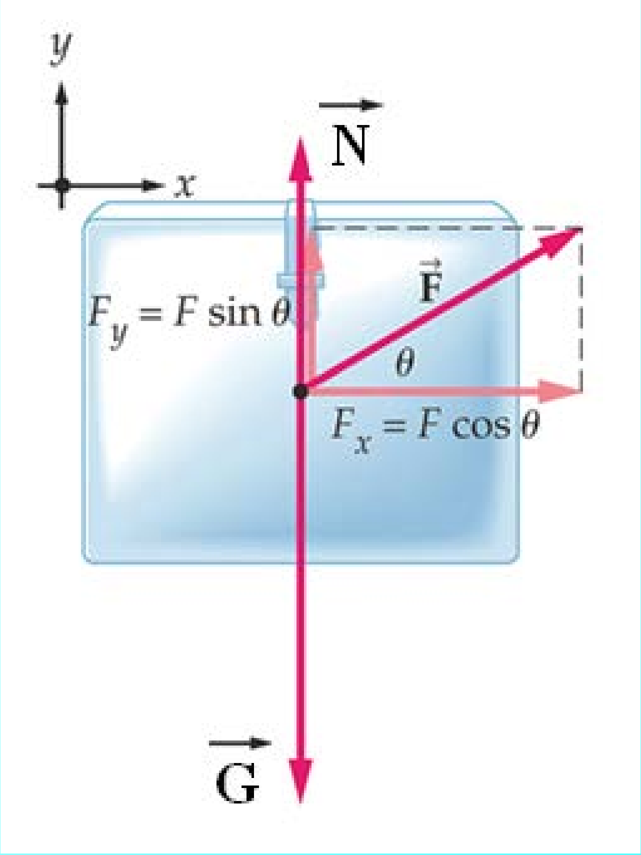


2.3. Tipuri de forţe - Recapitulare

3. Forţa normală – <u>aplicaţie 1</u>

$m = 10$ kg
$F = 50$ N
$\theta = 30^o$
$g = 10\ m/s^2$

$N = ?$



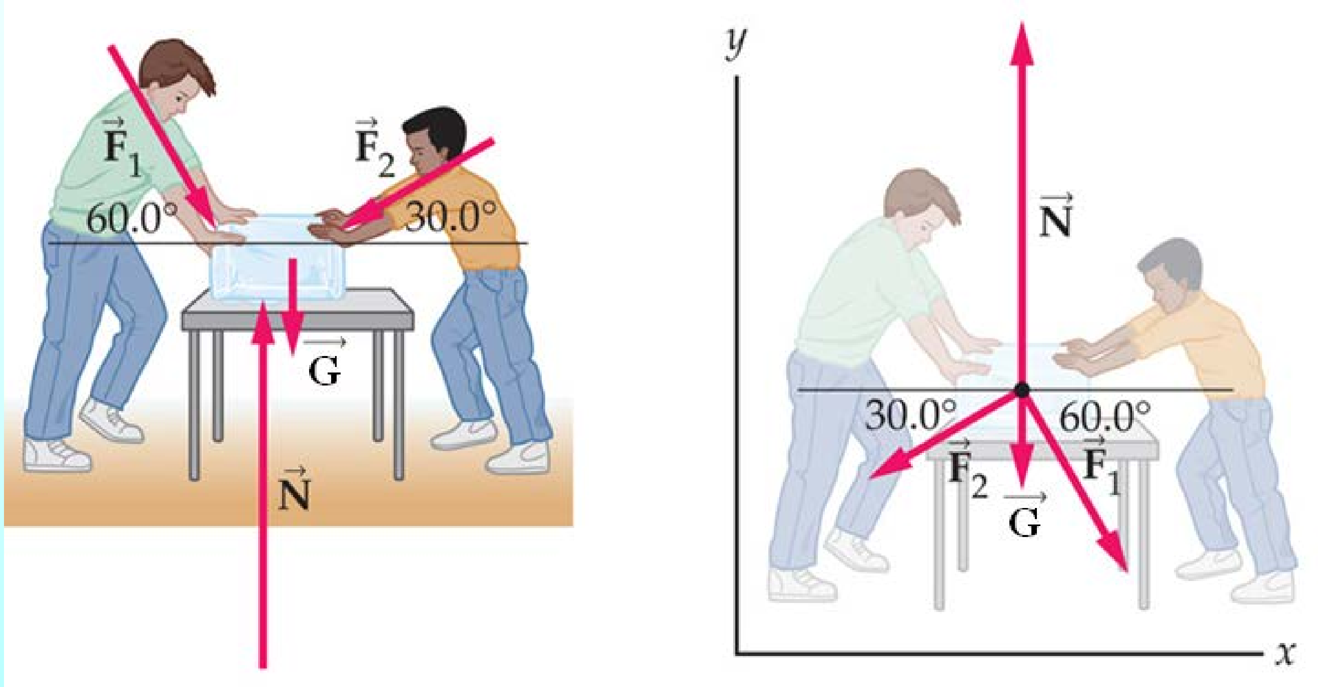
2.3. Tipuri de forţe - Recapitulare

3. Forţa normală – aplicaţie 2

$m = 1\ kg$
$F_1 = 30\sqrt{3}\ N$
$\theta_1 = 60^o$
$F_2 = 60\ N$
$\theta_2 = 30^o$
$g = 10\ m/s^2$

---

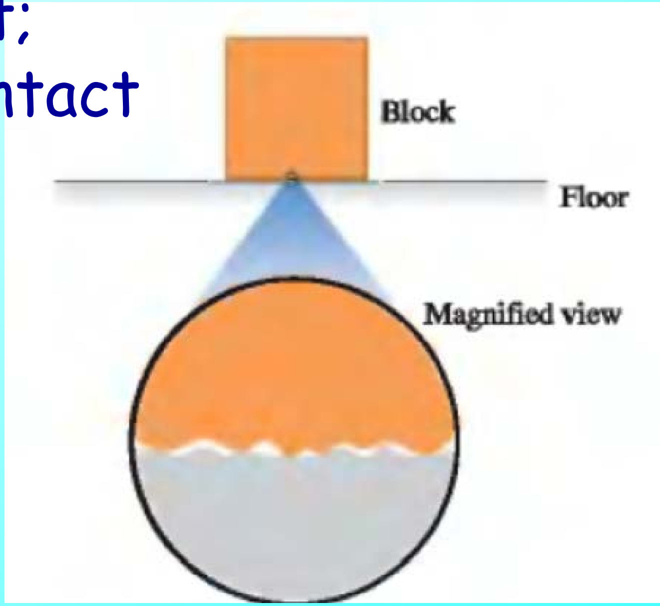
a) $a = ?$
b) $N = ?$



2.3. Tipuri de forţe - Recapitulare

4. Forţa de frecare $\boxed{F_f = \mu N}$

- nu depinde de aria suprafeţei de contact;
- are direcţia paralelă cu suprafaţa de contact
- şi sens contrar sensului de mişcare



neregularităţi microscopice a două suprafeţe în contact

4.1. Forţa de frecare statică

Se opune deplasării relative a celor două suprafeţe de contact

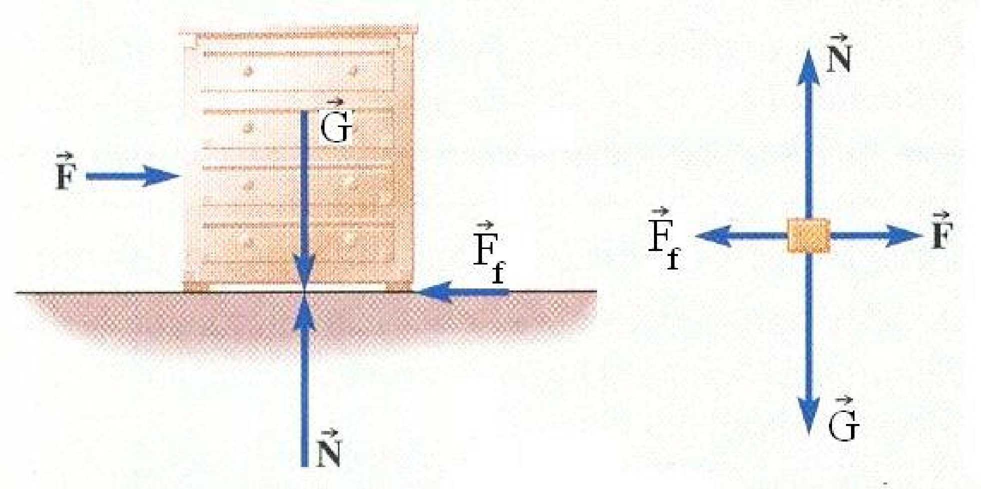
$$\boxed{0 \le F_s \le F_{s\,\max}}$$

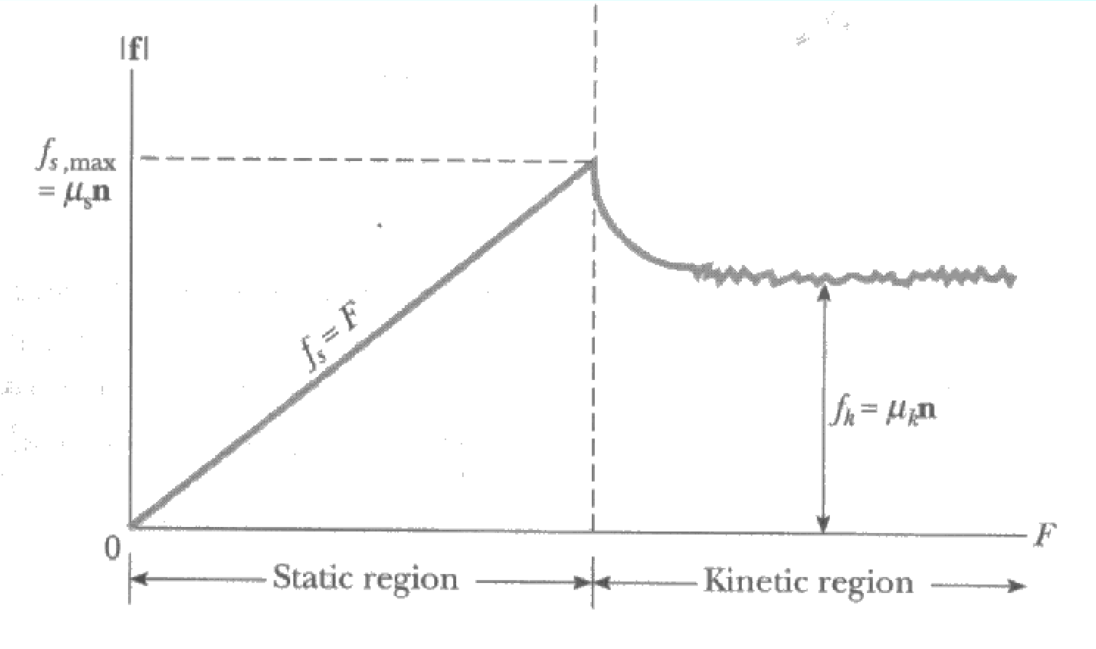
2.3. Tipuri de forţe - Recapitulare

4.2. Forţa de frecare cinetică

$$\boxed{F_c = \mu_c\ N}$$

$$\boxed{\mu_s > \mu_c}$$



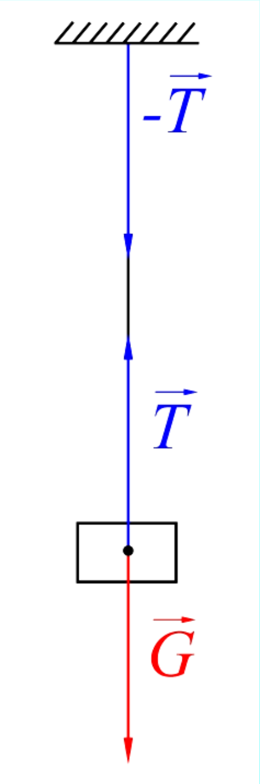


	Coefficient of Static	Coefficient of
Materials	Friction, μ_s	Kinetic Friction, μ_k
Glass on glass (dry)	0.94	0.4
Ice on ice (clean, 0 °C)	0.1	0.02
Rubber on dry concrete	1.0	0.8
Rubber on wet concrete	0.7	0.5
Steel on ice	0.1	0.05

2.3. Tipuri de forţe - Recapitulare

5. Forţa de tensiune în fir

- forţa cu care fiecare segment din fir acţionează asupra segmentului adiacent;
- are direcţia firului.

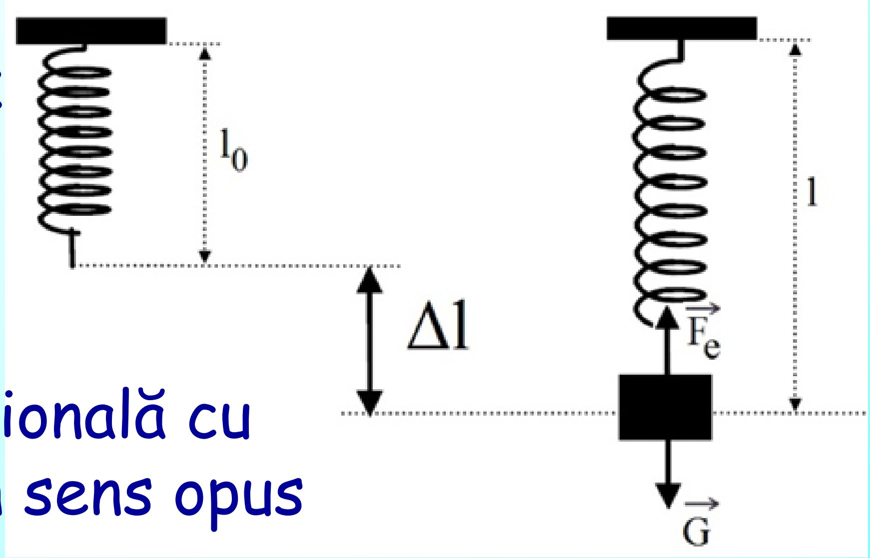


Aplicaţie numerică

$$m_{corp} = 100 \text{ kg}$$
$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$T = ?$$

2.3. Tipuri de forţe - Rec



6. Forţa elastică

Forța elastică este direct proporțională cu mărimea deformării și orientată în sens opus acesteia.

$$\boxed{\vec{F}_e = -k\overrightarrow{\Delta l}}$$

Δl – deformarea (alungirea sau comprimarea)

k - constantă elastică, $[k]_{SI} = 1\frac{N}{m}$

Legea lui Hooke: $\Delta l = \frac{1}{E}\frac{F \cdot l_0}{S}$

E- modulul lui Young, $[E]_{SI} = 1\frac{N}{m^2}$

https://phet.colorado.edu/sims/html/hookes-law/latest/hookes-law_en.html

2.3. Tipuri de forţe - Recapitulare

6. Forţa elastică. Aplicaţie

Dacă de un resort elastic este suspendat un corp cu masa, m = 5kg, atunci acesta se alungește cu 100 mm. Să se determine constanta elastică.

Rezolvare:

$$m\vec{g} - k\overrightarrow{\Delta l} = 0 \implies mg = k\Delta l$$

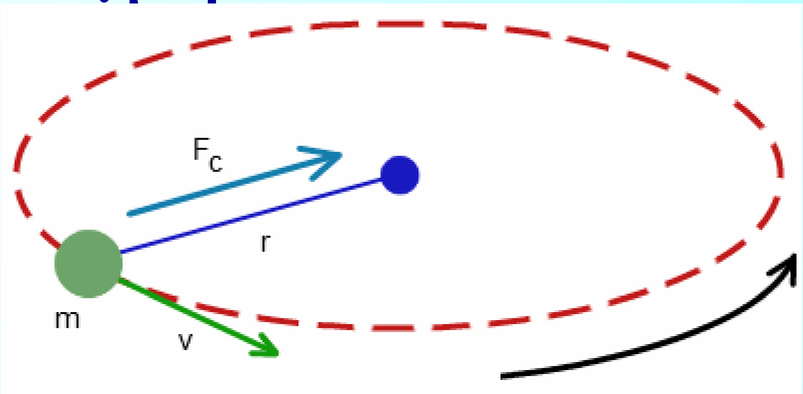
Rezultă:

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{5 \cdot 9.81}{100 \cdot 10^{-3}} = 490.5\ \mathrm{N/m}$$

https://phet.colorado.edu/sims/mass-spring-lab/mass-spring-lab_en.html

2.3. Tipuri de forţe - Rec

7. Forţa centripetă



- Sensul forței este către centru

$$\vec{F} = -\frac{mv^2}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

unde m – masa corpului

v – viteza corpului

r – distanța față de centrul traiectoriei circulare

In modul, forța centripetă se scrie:

$$F = m\frac{v^2}{R}$$

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- enunţe corect şi să interpreteze principiile lui Newton;
- aplice legea fundamentală a dinamicii în probleme;
- cunoască diferenţa dintre masă şi greutate;
- recunoască diferitele tipuri de forţe şi să scrie expresiile lor matematice, precizând semnificaţia fizică a mărimilor;

BIBLIOGRAFIE

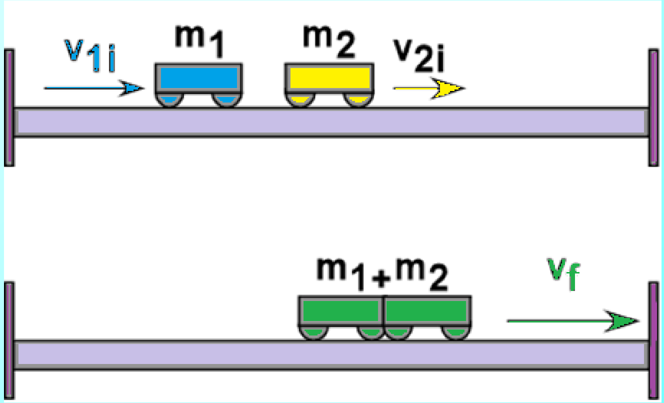
- **Fizica,** F. W.Sears, Zemansky , H. D.Young, Ed. Didactica si Pedagogica, 1983;
- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, F. Barvinschi, Ed. Orizonturi Universitare, 2016;
- **Elemente de fizică generală,** D. Popov, I. Damian, Ed. Politehnica, 2014;
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Ed. Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008
- **PHYSICS for Scientist and Engineers with Modern Physics** – Seventh Edition, R. Serway, J. Jewett, ed. Thomson Brooks/Cole, 2008.
- **Sears & Zemansky's University Physics: with Modern Physics**, 13th Edition, H. Young, R. Freedman, ed. Pearson, 2012

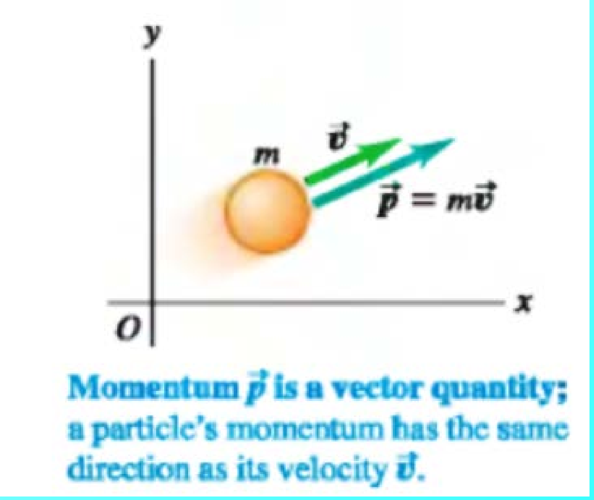
FIZICĂ PENTRU INGINERI

Universitatea Politehnica Timişoara

Prezentat de

Trif-Tordai Delia





Universitatea Politehnica Timişoara, România

CURSUL 3
2020-2021

2. Mecanică clasică
2.4. Teoreme generale în dinamica punctului material

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

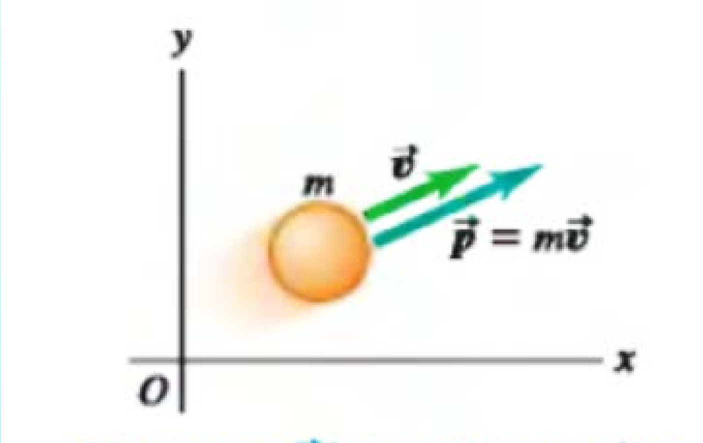
1. Teorema impulsului

Cantitatea de mişcare sau impulsul unui corp se defineşte ca produsul dintre masa şi vectorul viteză al corpului:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad [p]_{SI} = 1kg\frac{m}{s}$$

Forţa care acţionează asupra punctului material este egală cu variaţia impulsului în unitatea de timp.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$



Momentum $\vec{p}$ is a vector quantity; a particle's momentum has the same direction as its velocity $\vec{v}$.

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

1. Teorema impulsului – continuare

Dem.: $$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}$$

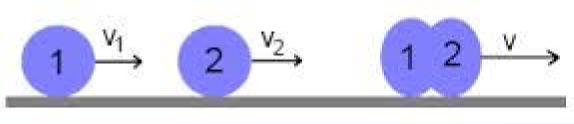
Legea de conservare a impulsului – dacă $\vec{F} = 0$, atunci $\vec{p} = ct$.

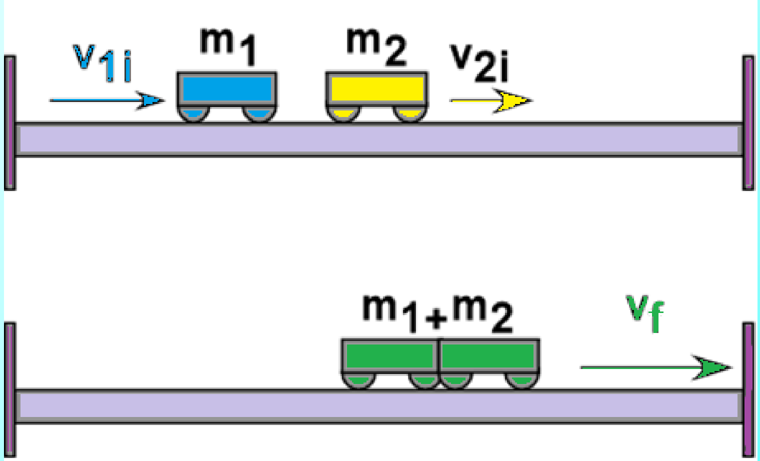
Impulsul mecanic al PM este constant, dacă asupra acestuia nu acţionează forţe, sau dacă rezultanta este nulă.

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

1. Teorema conservării impulsului – $\vec{p} = ct.$

a) Ciocnire plastică

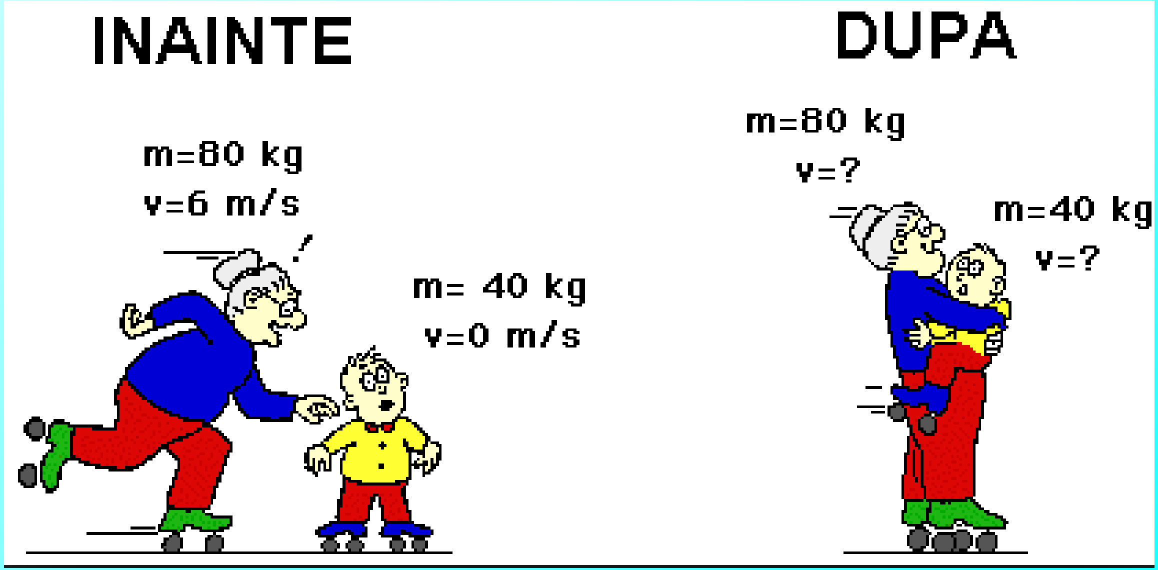




$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}$$

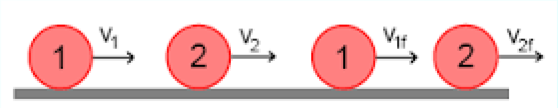
$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$



2.4. Teoreme generale în dinamica PM

1. Teorema conservării impulsului – $\vec{p} = ct.$

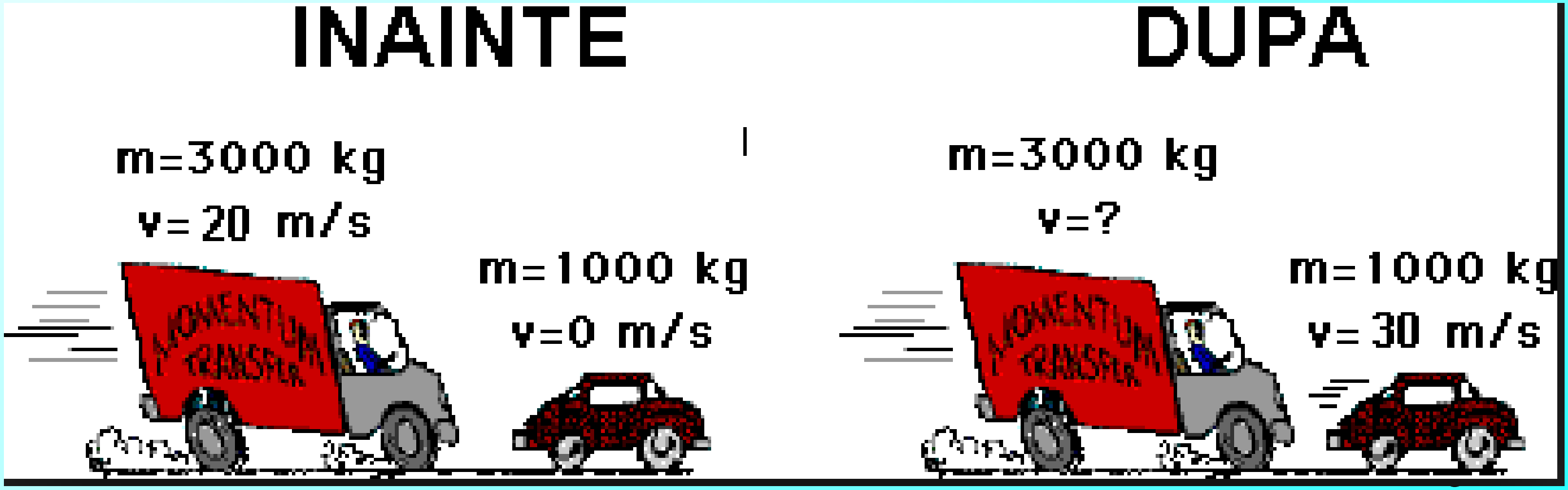
b) Ciocnire elastică



$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}'$$

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

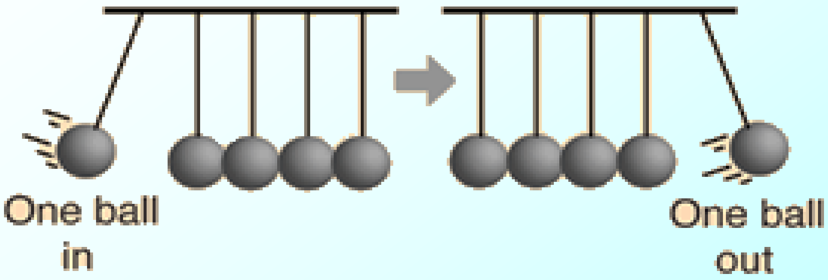
$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$



2.4. Teoreme generale în dinamica PM

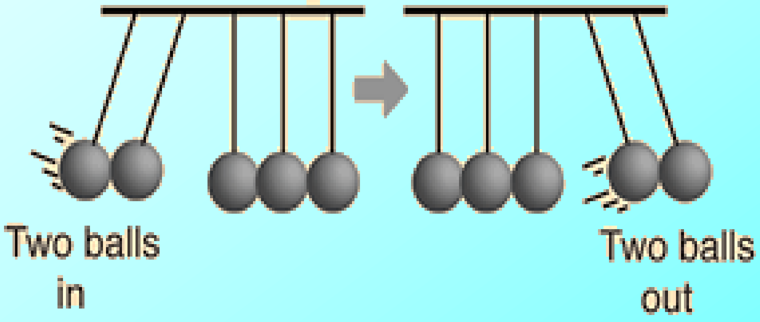
Momemtum in: mv = momentum out

Kinetic energy in: $\frac{1}{2}mv^2$ = kinetic energy out



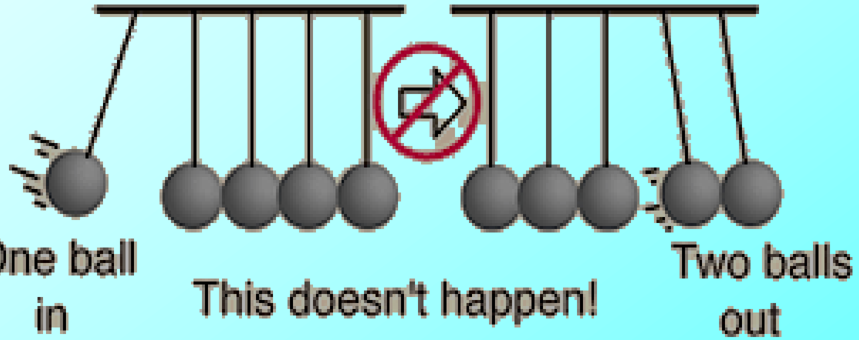
Momemtum in: 2mv = momentum out

Kinetic energy in: $\frac{1}{2}2mv^2$ = kinetic energy out



Momemtum in: mv = momentum out

Kinetic energy in: $\frac{1}{2}mv^2 \neq$ kinetic energy out!



Conserving momentum in this case requires that the two balls come out with half the speed.

$$\text{Momentum out} = 2m\frac{v}{2}$$

But this gives

$$\text{Kinetic energy out} = \frac{1}{2}2m\frac{v^2}{4}$$

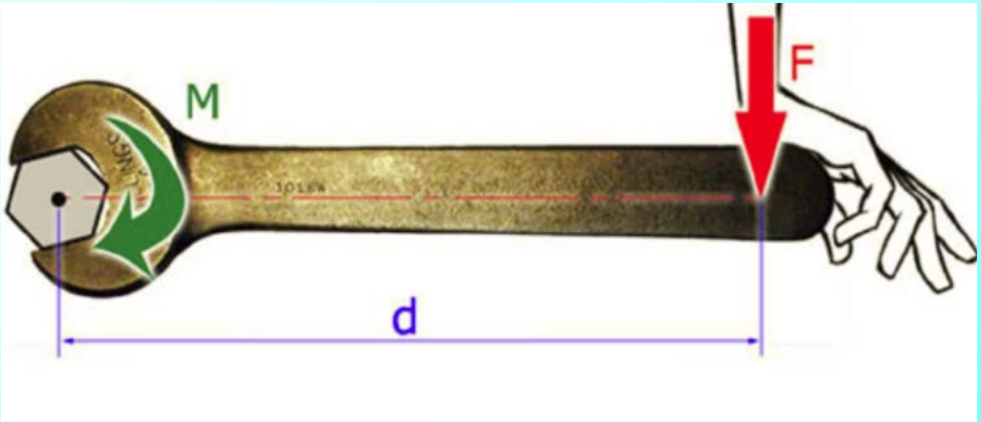
Which amounts to a loss of half of the kinetic energy!

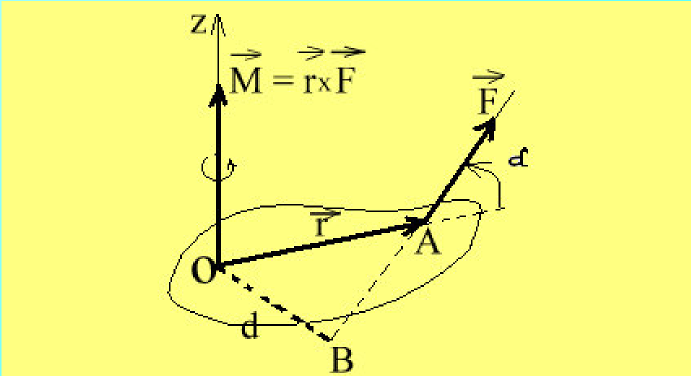
2.4. Teoreme generale în dinamica PM

2. Momentul unei forţe care acţionează asupra punctului material în raport cu un pol este rezultatul produsului vectorial dintre vectorul de poziţie al punctului de aplicaţie al forţei şi forţă:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a}; \qquad [M]_{SI} = 1\,N \cdot m$$

- expimă capacitatea forţei de a roti corpul în jurul unei axe care trece prin polul considerat.





Momentul unei forte in raport cu polul O

https://www.youtube.com/watch?v=yMG6qe_cq8g

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

3. Teorema momentului cinetic:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

Momentul cinetic al PM faţă de un punct fix (pol) este egal cu produsul vectorial dintre vectorul de poziţie şi impulsul PM.

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad [J]_{SI} = 1kg\frac{m^2}{s}$$

Obs.: Momentul cinetic este perpendicular pe planul ($\vec{r}$,$\vec{p}$) şi are sensul dat de regula burghiului.

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

3. Teorema momentului cinetic – continuare

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al corpului faţă de un pol este egală cu momentul forţei care acţionează asupra acestuia faţă de acelaşi pol:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \overrightarrow{M}$$

Teorema conservării momentului cinetic

Dacă momentul unei forţe este nul, atunci momentul cinetic se conservă.

$$\overrightarrow{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \Longrightarrow \vec{J} = constant$$

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

Aplicaţie:

Vectorul de poziţie al unui corp cu masa de 1 Kg este:

$$\vec{r}(t) = (t^3 - 4t)\vec{i} - 4t^2\vec{j} + (3t + 2)\vec{k}$$

1) Să se găsească:

a) forţa care acţionează asupra corpului;

b) Momentul forţei $\vec{M} = \vec{f}(t)$, faţă de originea axelor;

c) Impulsul şi momentul cinetic $\vec{J} = \vec{f}(t)$, faţă de originea axelor;

2) Să se verifice teorema de variaţie a impulsului: $d\vec{p}/dt = \vec{F}$;

3) Să se verifice teorema de var. a momentului cinetic, $d\vec{J}/dt = \vec{M}$.

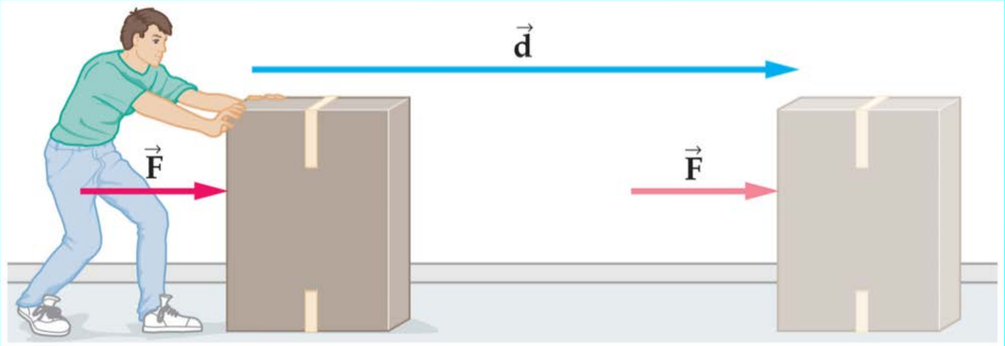
2.4. Teoreme generale în dinamica PM

4 . Energia mecanică şi teoremele energiei

a) **Lucru mecanic** este egal cu produsul scalar dintre forţă si deplasare.

$$L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot cos\alpha$$

$$[L]_{SI} = 1\, N \cdot m = 1\, J\ (Joule)$$



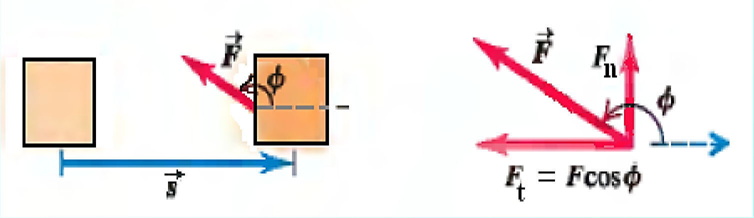
Un Joule - lucrul mecanic efectuat de o forţă de 1 N al cărei punct de aplicaţie se deplasează cu 1 m în direcţia şi sensul forţei.

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

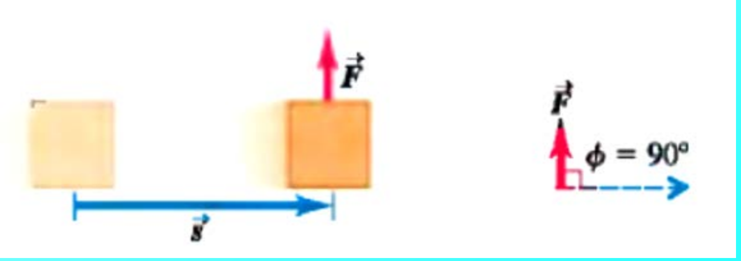
4 . a) Lucru mecanic: pozitiv, negativ sau zero

➢ Dacă $\vec{F}$ este în direcţia deplasării, atunci *L* este "+"

➢ Daca $\vec{F}$ se opune direcţiei de deplasare, atunci *L* este "-"

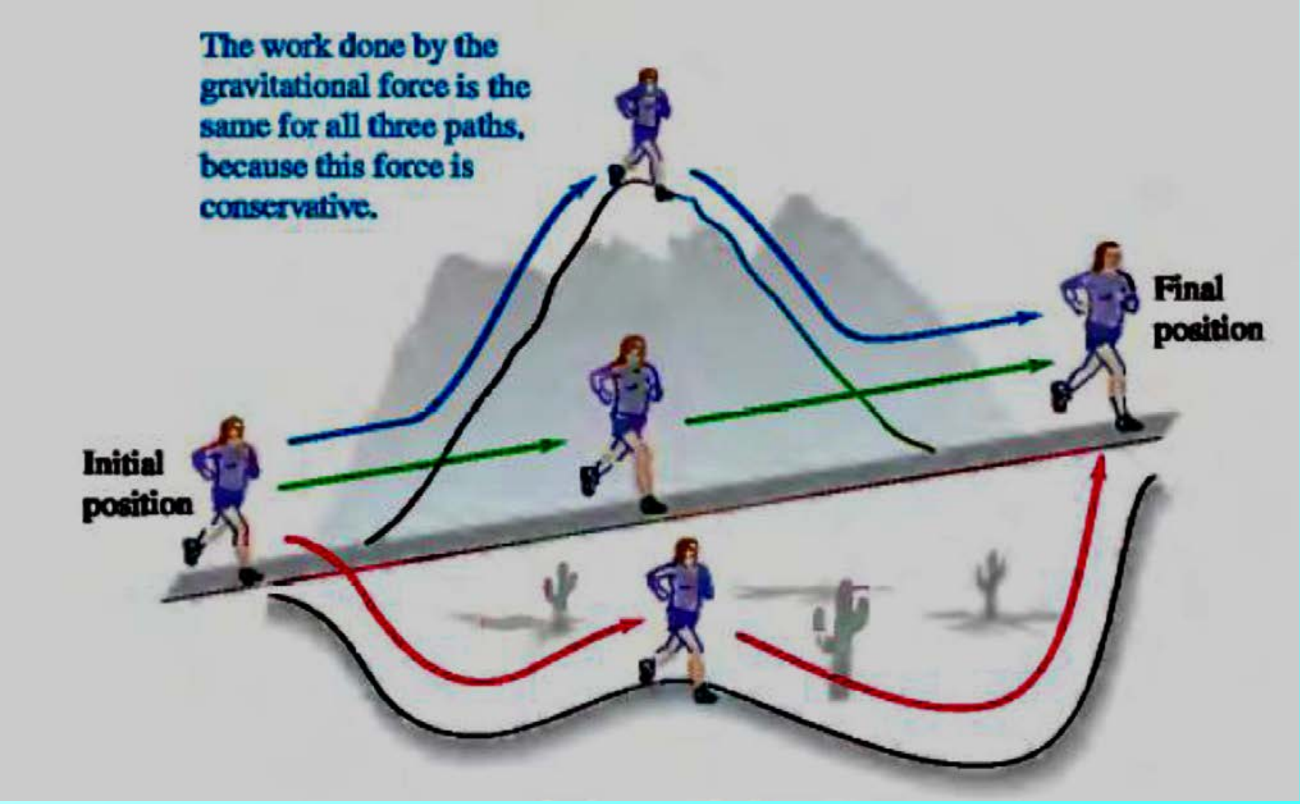


➢ Dacă $\vec{F}$ ⊥ pe direcţia de deplasare, atunci nu se efectuează lucru mecanic



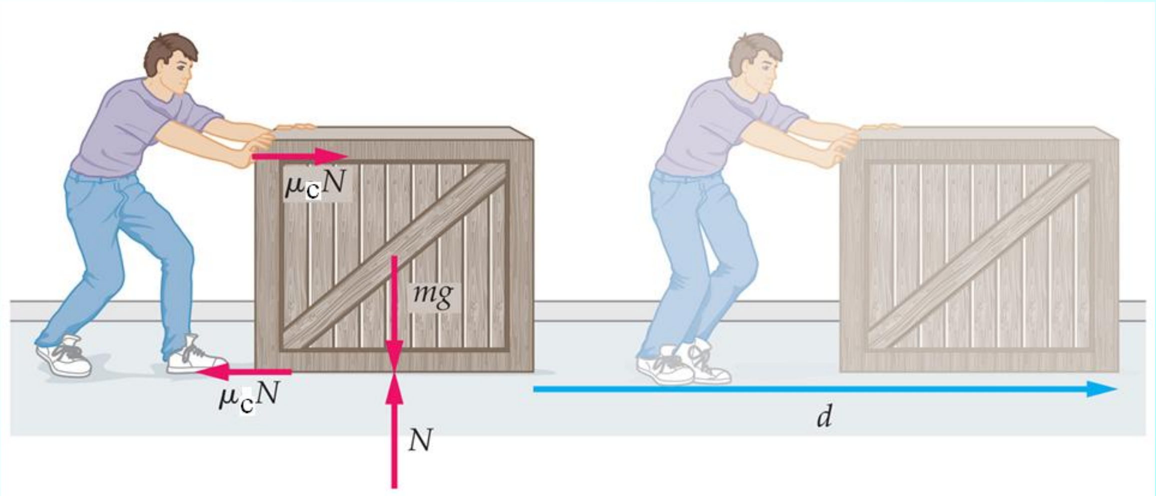
Forţă conservativă = forţă care, acţionând asupra unui punct material, efectuează un lucru mecanic independent de traiectoria punctului material între poziția inițială și finală.

Exemple: forţa de greutate, forţa elastică



lucrul mecanic efectuat de o forţă conservativă este "înmagazinat" şi convertit ulterior în energie cinetică

Exemple de forţe neconservative:
forţa de frecare, forţa dezvoltată de un muşchi



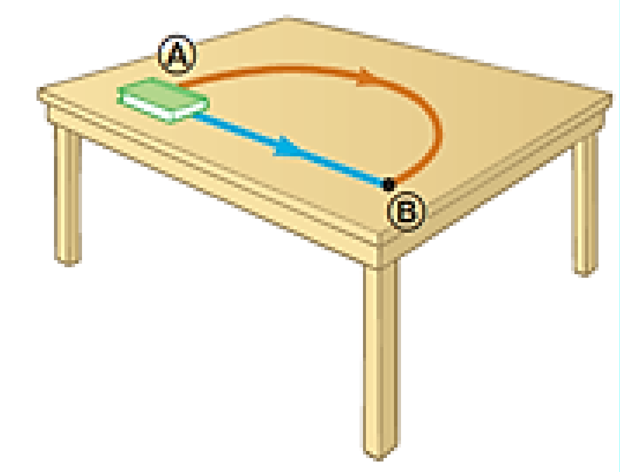


Figure 7.19 The work done against the force of kinetic friction depends on the path taken as the book is moved from Ⓐ to Ⓑ. The work is greater along the brown path than along the blue path.

Lucrul mecanic efectuat de către o forţă neconservativă depinde de forma drumului urmat, dar și de poziția inițială si finală a PM.

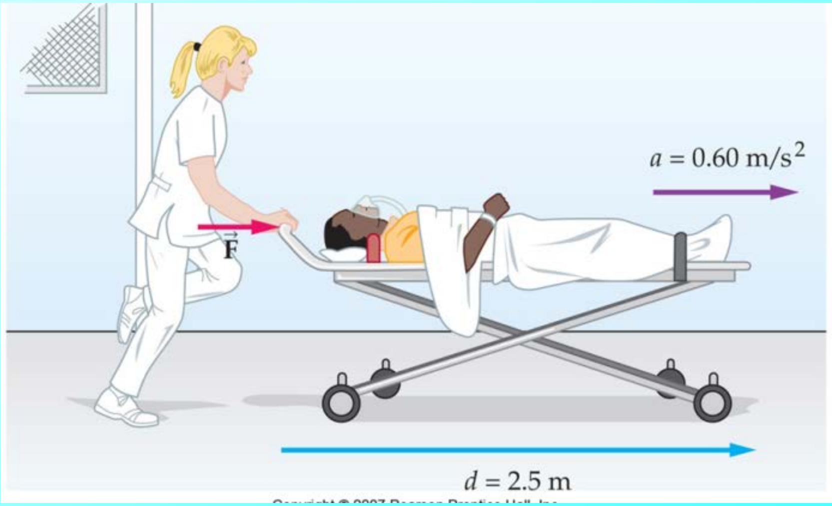
Lucrul mecanic efectuat de o forţă neconservativă nu poate fi convertit ulterior în energie cinetică, ci este disipat sub alte forme de energie (termică).

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

Lucru mecanic – <u>aplicaţie</u>

Un pacient cu masa de 90 kg este deplasat către sala de operaţie pe o targă de 10 kg. Ştiind că forţa aplicată imprimă tărgii o acceleraţie de 0,6 m/s2 şi neglijând forţele de frecare, să se calculeze:a) forţa aplicată;

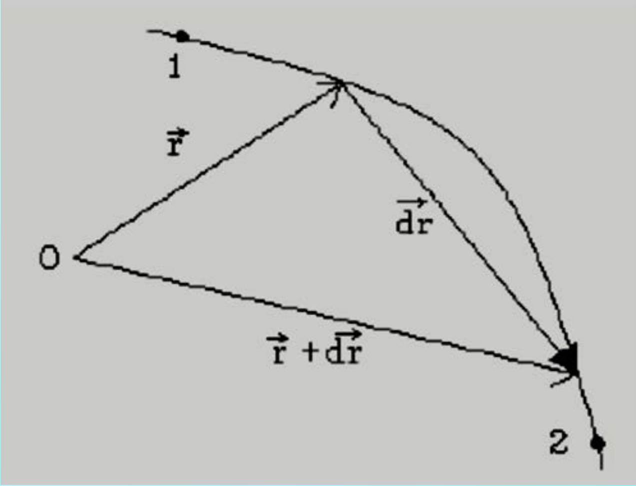
b) lucrul mecanic efectuat de forţă pe o distanţă de 2,5 m.



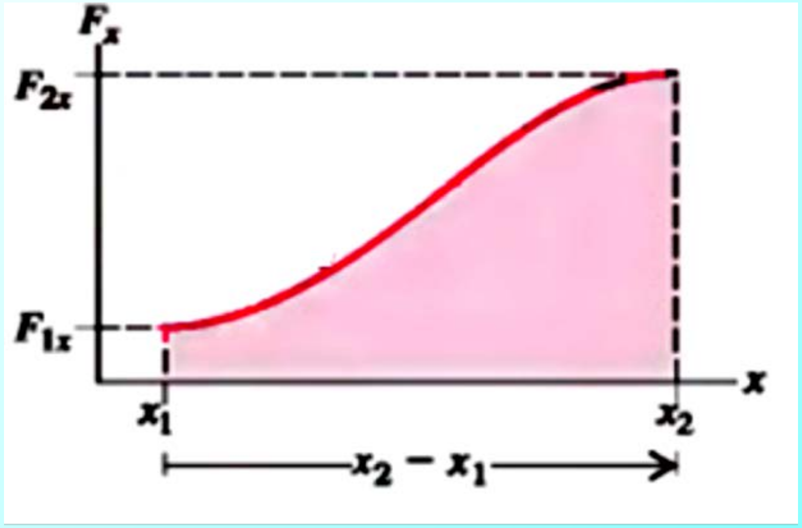
2.4. Teoreme generale în dinamica PM

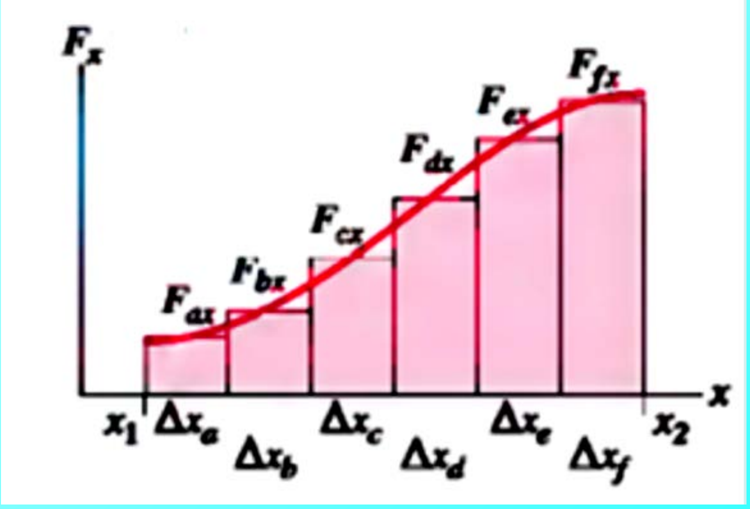
Lucru mecanic elementar $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Lucru mecanic efectuat de o forţă care variază în mărime și direcție în timpul deplasării punctului material între punctele 1 si 2 ale traiectoriei:



$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$





$$L = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

4 . Energia mecanică şi teoremele energiei

$$L = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \left(F_x dx + F_y dy + F_x dz \right)$$

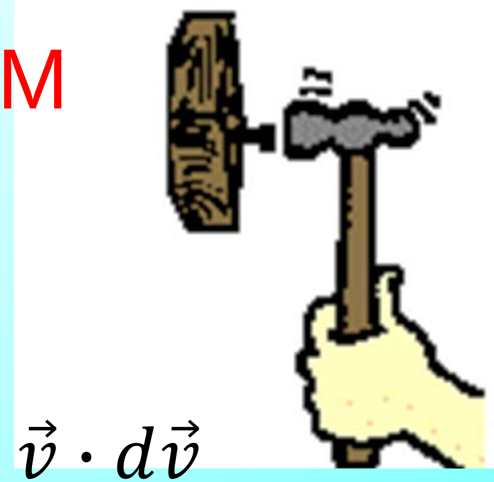
b) Energia cinetică este mărimea scalară egală cu produsul dintre masa şi pătratul vitezei PM, împărţite la doi

$$\boldsymbol{E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}}$$

$$\boldsymbol{[E_c]_{SI} = 1\,J}$$

Energia cinetică este o mărime fizică de stare

2.4. Teoreme generale în dinamica PM



4. b) Teorema variaţiei energiei cinetice

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \cdot d\vec{v} \frac{d\vec{r}}{dt} = m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$dL = d\left(\frac{1}{2} m\vec{v}^2\right) = dE_c$$

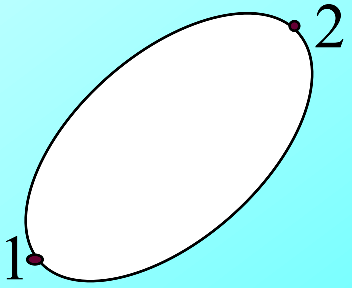
Lucrul mecanic efectuat de rezultanta forţelor care acţionează asupra punctului material este egal cu variaţia energiei cinetice a acestuia:

$$L_{12} = \Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}$$

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

4. b) Teorema variaţiei energiei cinetice

Lucrul mecanic al forțelor conservative de-a lungul unei traiectorii închise este nul.



$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Lucrul mecanic efectuat de forțele unui câmp potențial la deplasarea între două puncte se poate scrie:

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \mathrm{U}(\vec{r}_1) - \mathrm{U}(\vec{r}_2)$$

sau pentru o deplasare elementară:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU$$

$\mathrm{U}(\vec{r})$- energia potențială a PM într-un câmpul potențial

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

c) Câmpuri potenţiale

- Câmpul gravitaţional – câmpul în care forţa de atracţie gravitaţională este conservativă $E_p = U = mgh$

- Câmp electrostatic este creat de sarcini electrice $E_p = qV$, unde $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$ potenţialul electric al unei sarcini electrice.

- Câmpul forţelor elastice $E_p = U = \frac{kx^2}{2}$, k – const. de elasticitate


Energia potenţială este o mărime fizică de stare.

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

d) Teorema variaţiei energiei potenţiale

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta E_p = -L}$$

Lucrul mecanic al forţelor conservative este egal cu variația energiei potențiale luată cu semn schimbat.

De aceea, se poate spune că forţele conservative derivă din potenţiale, adică din energii potenţiale:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU \Longrightarrow \vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

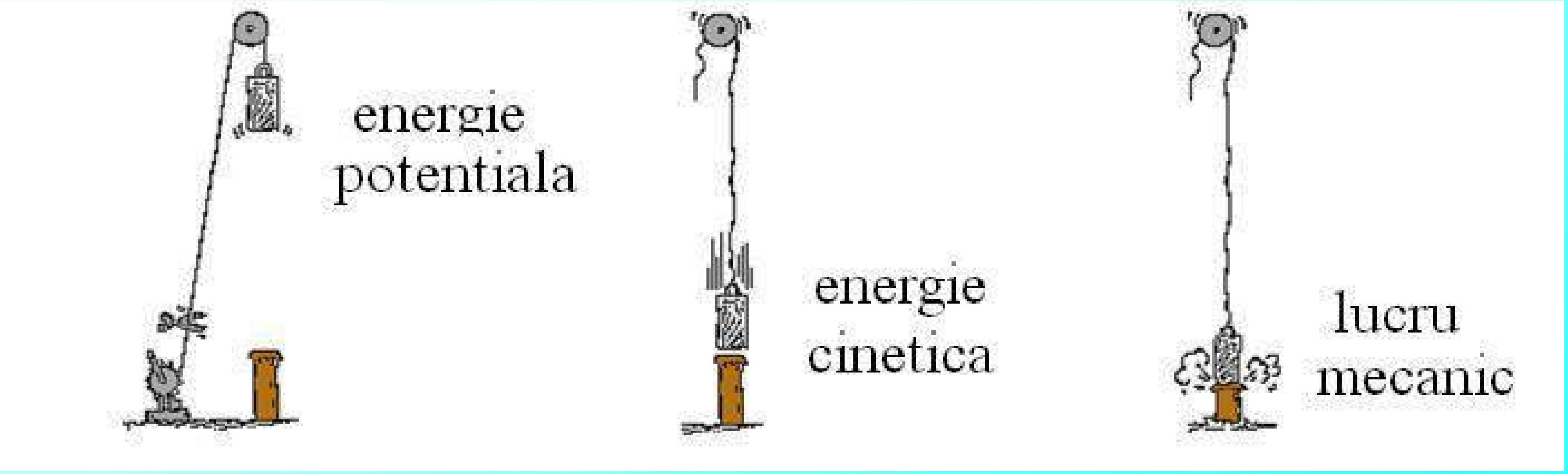
∇U – gradientul energiei potenţiale

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

e) Energia mecanică totală

Energia mecanică totală a punctului material este dată de suma dintre energia cinetică și cea potențială a PM.

$$E = E_c + E_p$$



2.4. Teoreme generale în dinamica PM

f) Teorema conservării energiei mecanice

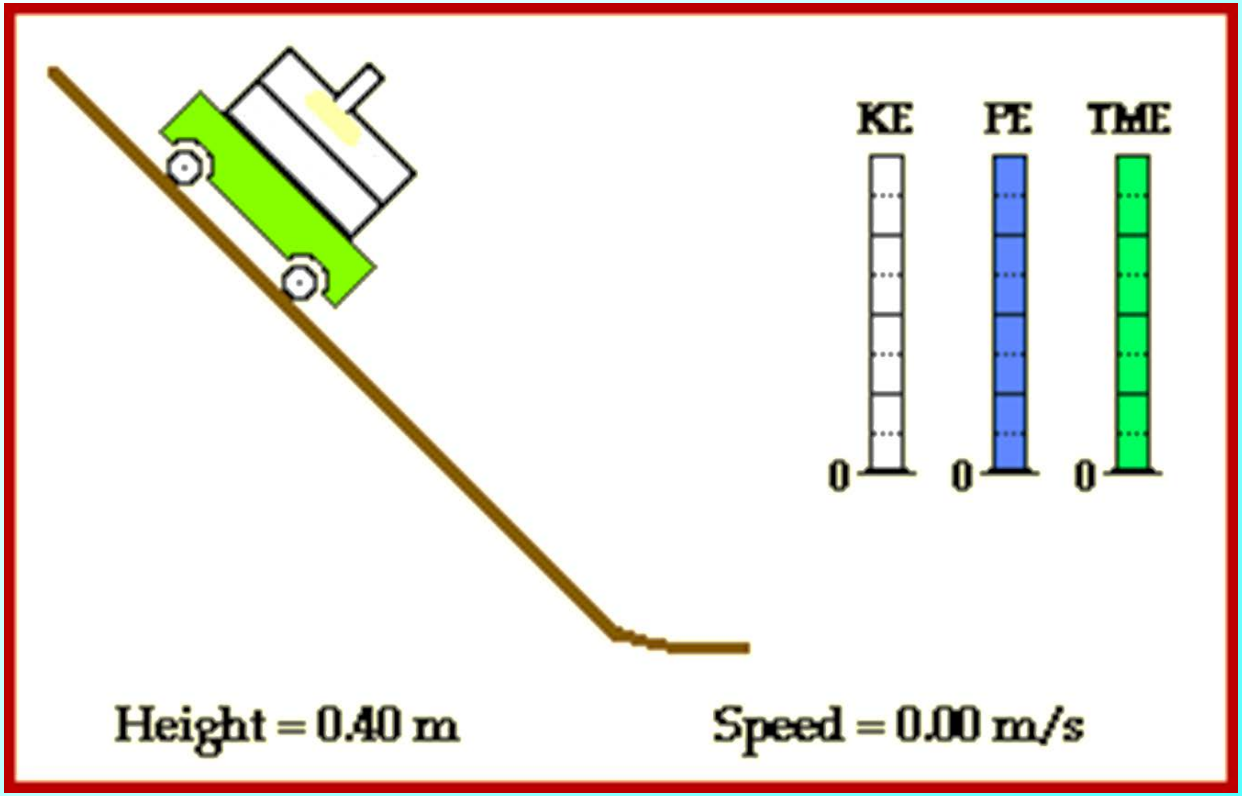
Dacă PM se află în câmpuri de forţe conservative, atunci energia mecanică totală a PM rămâne constantă (se conservă).

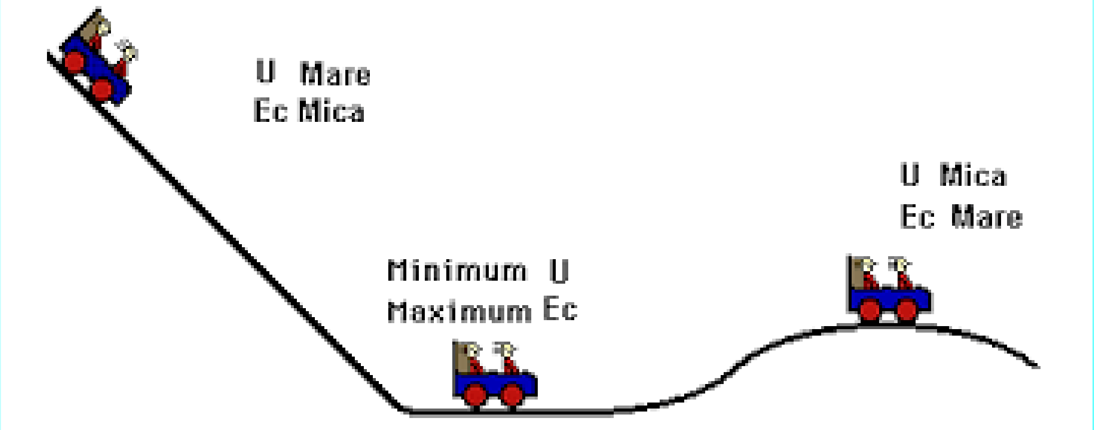
$$\boldsymbol{\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = constant}$$

http://phet.colorado.edu/sims/html/energy-skate-park-basics/latest/energy-skate-park-basics_en.html
http://phet.colorado.edu/en/simulation/energy-skate-park-basics

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

Teorema conservării energiei mecanice





2.4. Teoreme generale în dinamica PM

Energie cinetică	**Lucru mecanic**
mărime fizică scalară	mărime fizică scalară
unitate de măsură: J	unitate de măsură: J
mărime de stare	mărime de proces
întotdeauna pozitivă	pozitivă sau negativă

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

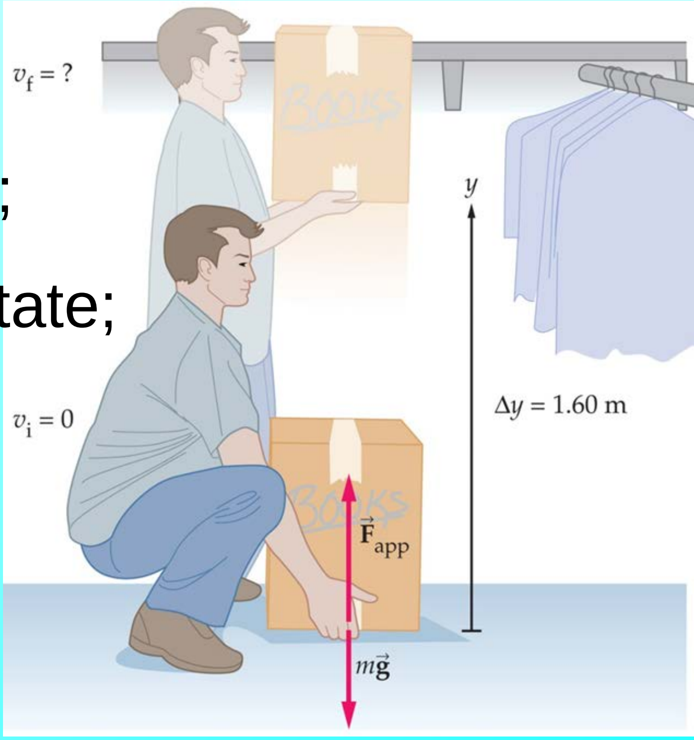
<u>Aplicaţie</u>:

O cutie cu masa de 4 kg este ridicată pe o distanţă de 1,6 m prin aplicarea unei forţe constante de 60 N. Cunoscând valoarea lui $g = 10\ m/s^2$ să se calculeze:

a) lucrul mecanic efectuat de forţa aplicată;

b) lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate;

c) viteza finală a cutiei.



2.4. Teoreme generale în dinamica PM

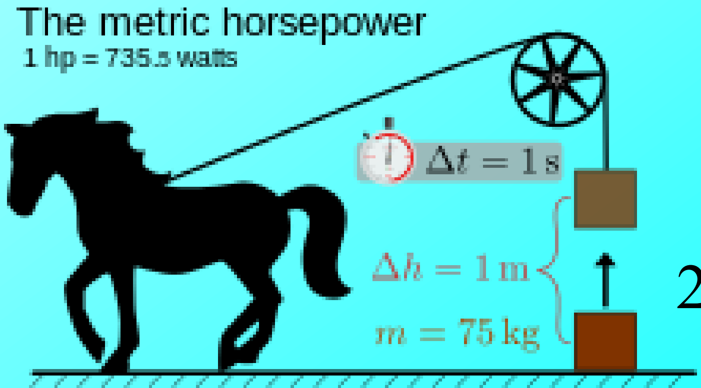
g) Puterea reprezintă lucrul mecanic efectuat de un sistem în unitatea de timp

- Puterea medie: $P_m = \dfrac{L}{\Delta t}$
- Putere instantanee: $P = \dfrac{dL}{dt} = \vec{F}\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$$[P]_{SI} = 1\,W = 1\,\frac{J}{s}\,, \qquad (W - Watt)$$

***1 Watt** este puterea dezvoltată de un corp care efectuează un lucru mecanic de 1 J în timp de 1 s.*

1CP = 735.5 W (cal putere)



2.4. Teoreme generale în dinamica PM

g) Puterea – aplicaţie

Să se compare puterile dezvoltate de două macarale, dacă se ştie că prima ridică 500 kg până la o înălţime de 2 m în timp de 1s, în timp ce a doua ridică 800 kg până la înălţimea de 3 m în timp de 3 s.

$$L_1 = m_1\, g\, h_1 = 500\, kg \cdot 10\, \frac{m}{s^2} \cdot 2\, m = 10000\ J \qquad P_1 = \frac{L_1}{\Delta t_1} = \frac{10000\ J}{1\, s} = 10000\, W$$

$$L_2 = m_2\, g\, h_2 = 800\, kg \cdot 10\, \frac{m}{s^2} \cdot 3\, m = 24000\ J \qquad P_2 = \frac{L_2}{\Delta t_2} = \frac{24000\ J}{3\, s} = 8000\, W$$

$$P_2 < P_1$$

2.4. Teoreme generale în dinamica PM

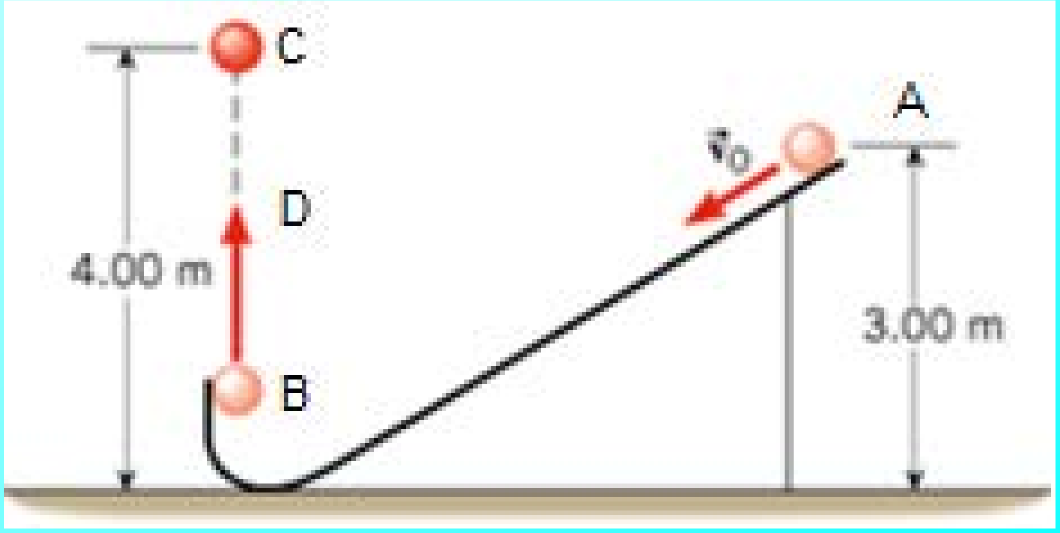
<u>Aplicaţie</u>:

O minge cu masa 0,5 kg este lansata din punctul A cu viteza iniţială $v_{0,}$ ca în fig. După ce părăseşte punctul B, mingea urcă pe un perete până la înălţimea de 4m. Neglijând frecarea cu aerului să se determine:

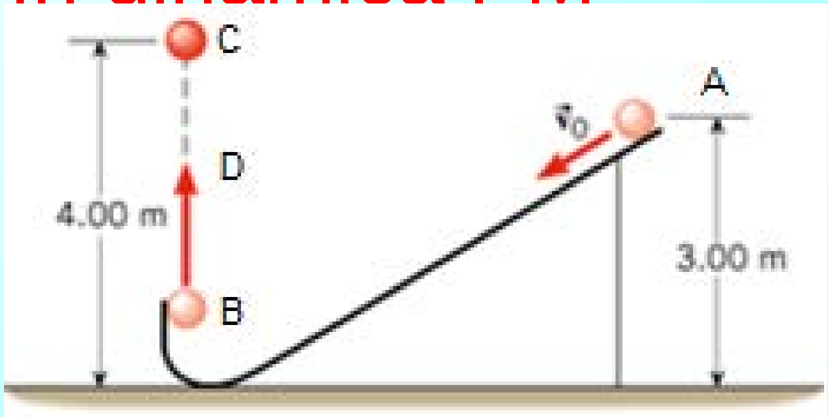
a) Viteza mingii în punctul A;

b) Viteza în cel mai de jos punct;

c) Înălţimea unde energia cinetică şi cea potenţială sunt egale.



2.4. Teoreme generale în dinamica PM



Aplicaţie:

a) $$E_{t_A} = E_{t_C} \qquad v_o = \sqrt{2g(h_C - h_1)} = 2\sqrt{5}\ \text{m}/\text{s}$$

b) $$\frac{mv_{Max}^2}{2} = E_{p_C} \qquad v_{Max} = \sqrt{\frac{2mgh_c}{m}} = \sqrt{2gh_c} = 8.94 m/s$$

c) $$Ec_D = E_{p_D} = E_t / 2 \qquad mgh_o = \frac{1}{2} mg \frac{h_c}{2} = 2\ \text{m}$$

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

•definească impulsul mecanic şi să aplice teorema conservării impulsului mecanic;

• definească momentul cinetic şi momentul forţei;

• definească şi să calculeze lucrul mecanic efectuat de o forţă constantă variabilă, precizând unitatea sa de măsură în S.I.;

•definească şi să calculeze energia cinetică a unui corp, precizând unitatea sa de măsură în S.I.;

• enunţe şi să aplice în probleme teorema conservării energiei cinetice;

• definească şi să calculeze energia potenţială (în câmp gravitaţional) a unui corp, precizând unitatea sa de măsură în S.I.;

• definească şi să dea exemple de forţe conservative;

• enunţe teorema conservării energiei mecanice;

• definească şi să calculeze puterea mecanică, precizând unitatea sa de măsură în S.I.;

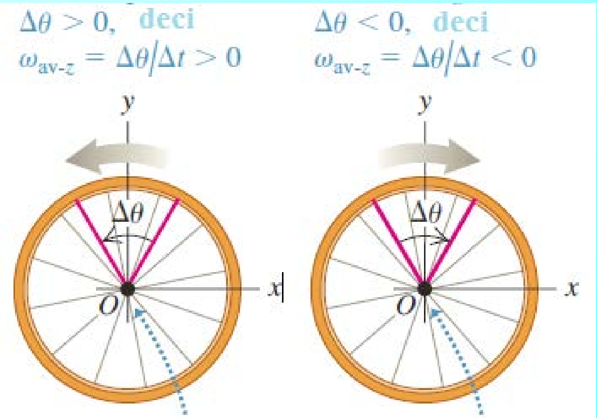
BIBLIOGRAFIE

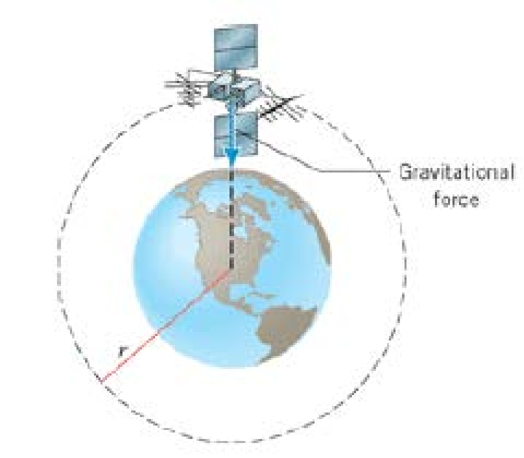
- **Fizica,** F. W.Sears, Zemansky , H. D.Young, Ed. Didactica si Pedagogica, 1983;
- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, F. Barvinschi, Ed. Orizonturi Universitare, 2016;
- **Elemente de fizică generală,** D. Popov, I. Damian, Ed. Politehnica, 2014;
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Ed. Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008
- **PHYSICS for Scientist and Engineers with Modern Physics** – Seventh Edition, R. Serway, J. Jewett, ed. Thomson Brooks/Cole, 2008.
- **Sears & Zemansky's University Physics: with Modern Physics**, 13th Edition, H. Young, R. Freedman, ed. Pearson, 2012

FIZICĂ PENTRU INGINERI

Prezentat de

Trif-Tordai Delia





Universitatea Politehnica Timişoara, România

CURSUL 4

2020-2021

2. Mecanică clasică

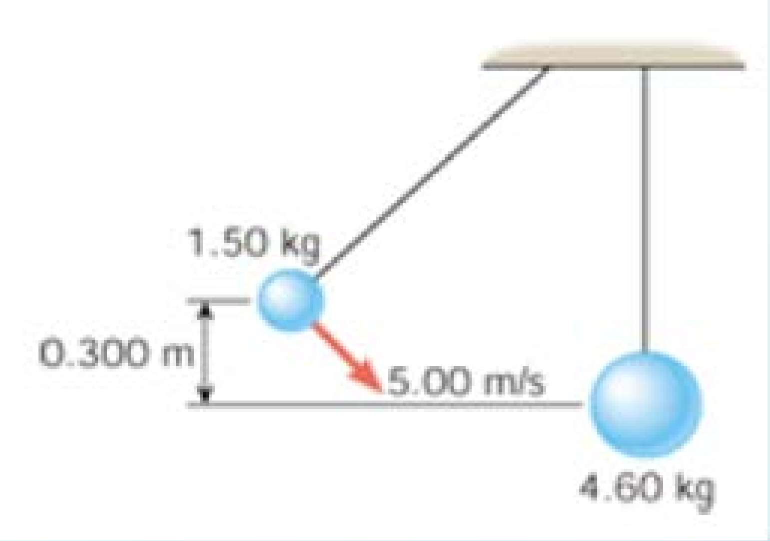
2.5. Dinamica sistemelor de puncte materiale

2.6. Mişcarea de rotaţie

2.7. Legile lui Kepler

2.8. Determinarea vitezelor cosmice

Recapitulare curs 3

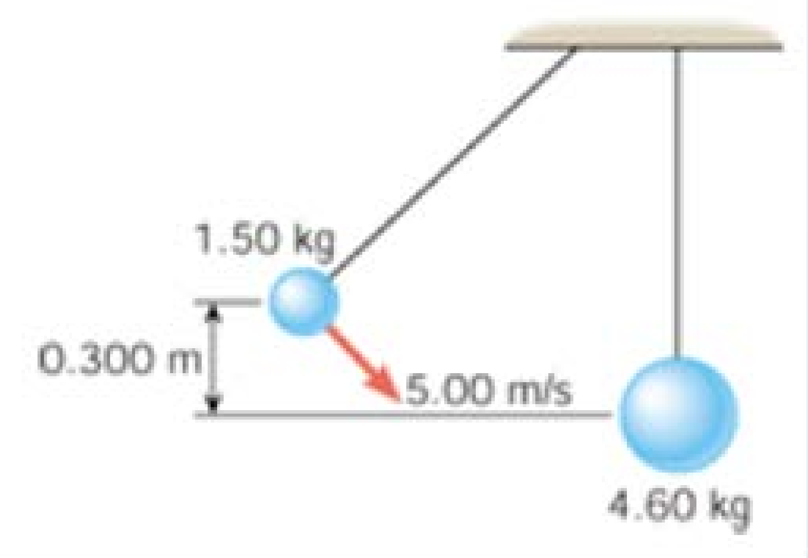


<u>Aplicaţie 1</u>:

Un corp cu masa m_1=1,5 kg, si cu viteza iniţială 5m/s, se deplasează de la înălţimea de 0.3 m şi loveşte un alt corp de masă m_2=4,6 kg aflat în repaus, ca în figura alăturată. Să se determine: a) Viteza corpului m_1 înainte de ciocnire, folosind teorema conservării energiei; b)Viteza finală a corpurilor, presupunând că este o ciocnire plastică; c) La ce înălțime ajung cele două corpuri după ciocnire, neglijând frecarea cu aerul.

Recapitulare curs 3

Aplicaţie 1 - rezolvare



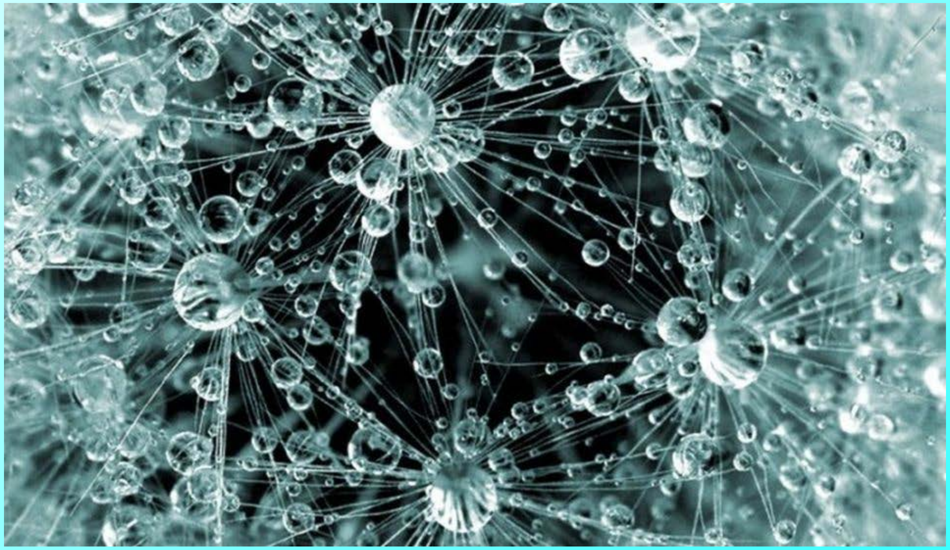
a) $$\frac{m_1 v_i^2}{2} + m_1 g h_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} \qquad v_1 = 5{,}57 \ \mathrm{m/s}$$

b) $$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_f \qquad v_f = \frac{1.5}{6.1} \cdot 5.57 = 1.37 \ \mathrm{m/s}$$

c) $$h_f = \frac{v_f^2}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \left(v_1^2 + 2gh_1\right)\frac{1}{2g} = \left(\frac{1.5}{6.1}\right)^2 \left(\frac{25}{20} + 0.3\right) = 0.094 \ \mathrm{m} \approx 0.1 \ \mathrm{m}$$

2.5. Dinamica sistemelor de puncte materiale

Dacă sistemul mecanic conţine N puncte materiale, atunci asupra fiecărui punct material *i*, de masă m_i, acţionează atât forţe externe $\vec{F}_{ext}$, cât şi forţe interne din partea celorlalte puncte materiale ale sistemului, $\vec{F}_{ij}, i \neq j$ ($\vec{F}_{int}$).



Masa totală a sistemului este:

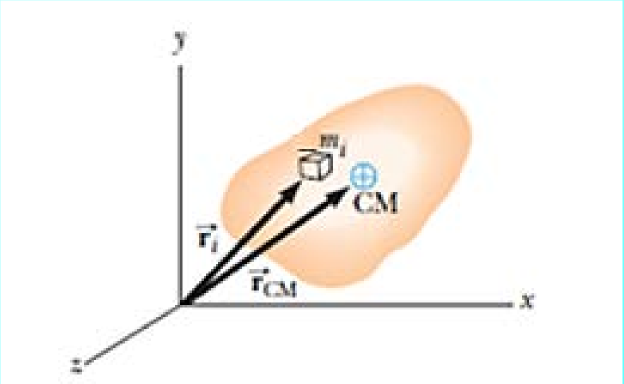
$$M = \sum m_i$$

Rezultanta fortelor interne si momentul rezultant al acestora faţă de orice pol sunt nule

2.5. Dinamica sistemelor de puncte materiale

Se defineşte ***centrul de masă (CM)*** al unui sistem mecanic format din *N* puncte materiale, cu distribuţie discretă a masei acestora, prin vectorul de poziţie:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$$



Proiecțiile vectorului de poziție pe cele trei axe sunt:

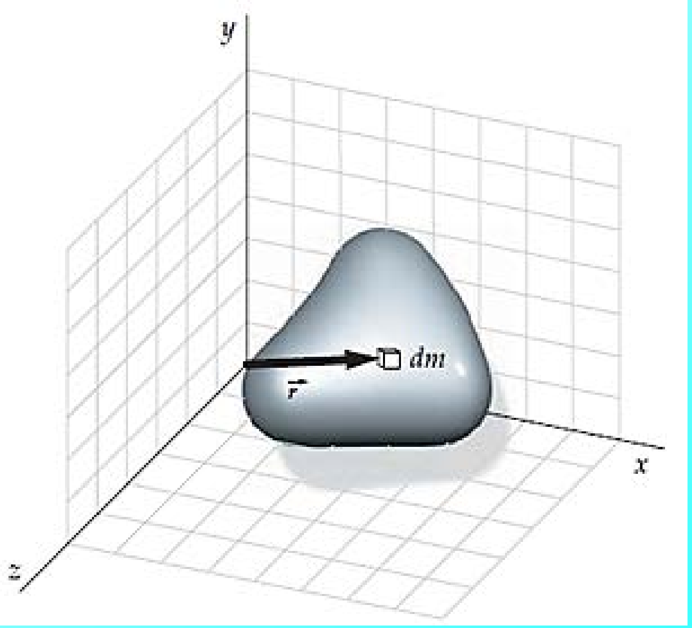
$$\vec{x}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{x}_i \qquad \vec{y}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{y}_i \qquad \vec{z}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{z}_i$$

$\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i$ - descrie poziţia punctului material.

2.5. Dinamica sistemelor de puncte materiale

Pentru un sistem cu distribuţie continuă a masei, **vectorului de poziţie al centrului de masă** este definit prin relaţia:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,\rho\,dV$$



unde

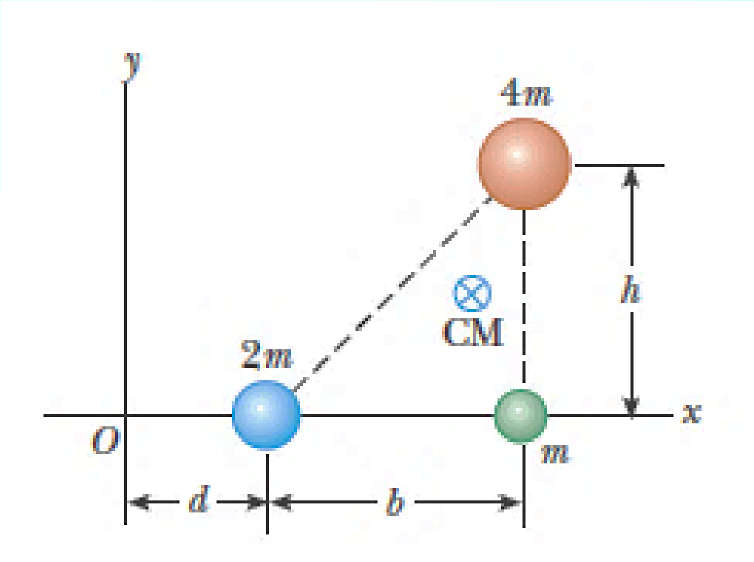
$M = \int \rho\,dV$ este masa sistemului mecanic

ρ – densitatea volumică a sistemului

Dacă un corp este omogen, atunci are aceeași densitate, iar centrul maselor corespunde cu centrul lui geometric.

2.5. Dinamica sistemelor de puncte materiale

Aplicaţie 1:

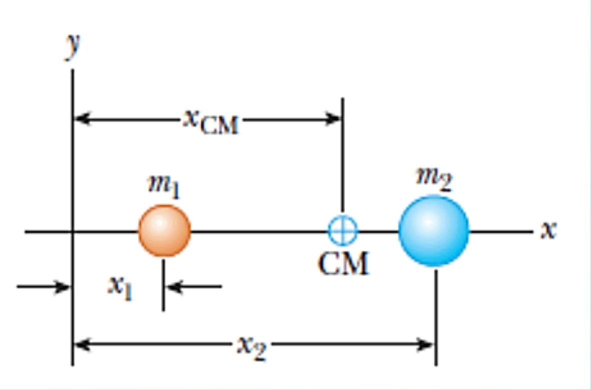


$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{2md + m(d+b) + 4m(d+b)}{7m}$$

$$= d + \tfrac{5}{7}b$$

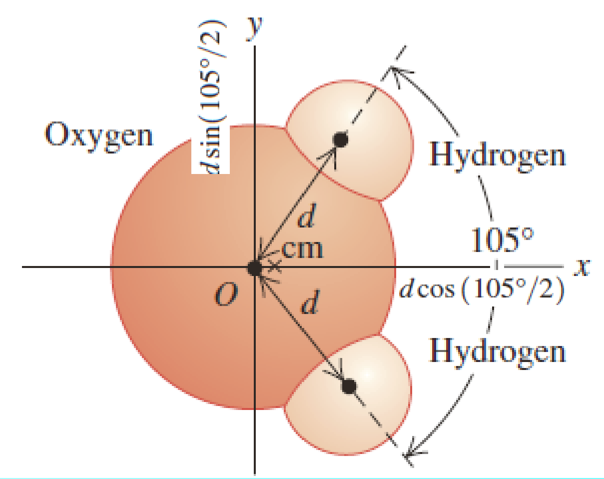
$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} = \frac{2m(0) + m(0) + 4mh}{7m} = \tfrac{4}{7}h$$

Aplicaţie 2:



2.5. Dinamica sistemelor de puncte materiale

Aplicaţie 3: Centru de masă al moleculei de apă



Distanța de separare dintre oxigen și hidrogen este $d = 9.57 \cdot 10^{-11}$m. Fiecare atom de hidrogen are masa 1 u.a.m, respectiv atomul de oxigen are m=16 u.a.m. Să se găsească poziția centrului de masă. (1u.a.m=$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg).

Centru de masă pentru molecula de oxigen este $x = 0, y = 0.$

$$x_{cm} = \frac{\begin{bmatrix}(1.0\text{ u})(d\cos 52.5°) + (1.0\text{ u}) \\ \times (d\cos 52.5°) + (16.0\text{ u})(0)\end{bmatrix}}{1.0\text{ u} + 1.0\text{ u} + 16.0\text{ u}} = 0.068d$$

$$y_{cm} = \frac{\begin{bmatrix}(1.0\text{ u})(d\sin 52.5°) + (1.0\text{ u}) \\ \times (-d\sin 52.5°) + (16.0\text{ u})(0)\end{bmatrix}}{1.0\text{ u} + 1.0\text{ u} + 16.0\text{ u}} = 0$$

$$x_{cm} = (0.068)(9.57 \times 10^{-11}\text{ m}) = 6.5 \times 10^{-12}\text{ m}$$

2.5. Dinamica sistemelor de puncte materiale

CM joacă un rol important în studiul mişcării sistemului mecanic.

- **Impulsul mecanic al unui sistem mecanic**

Derivând în raport cu timpul relaţia de definire a CM

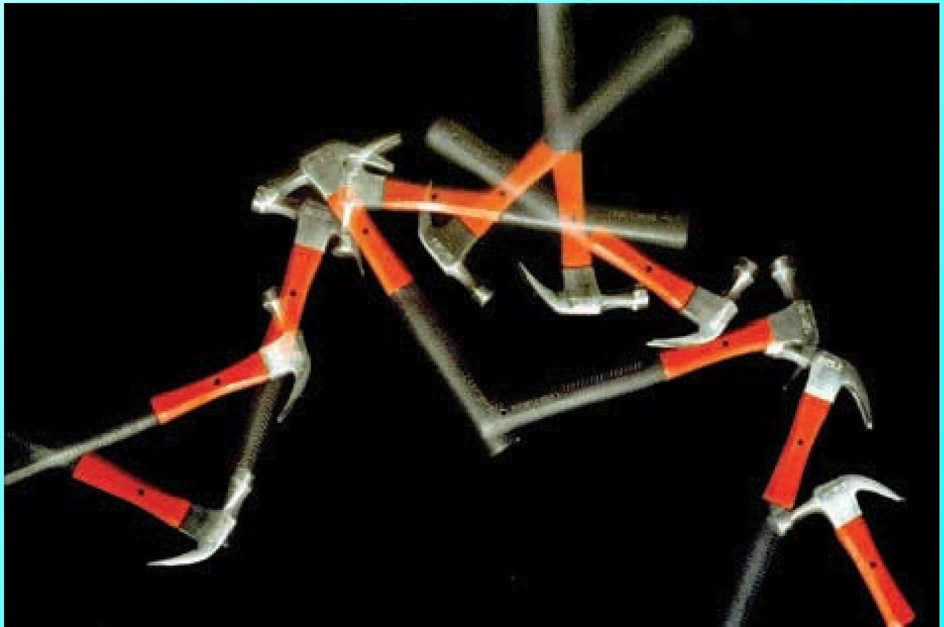
$$M\dot{\vec{r}}_{CM} = M\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{P}$$

- **Forţa rezultantă a unui sistem mecanic**

$$M\ddot{\vec{r}}_{CM} = M\vec{a}_{CM} = \dot{\vec{P}} = \vec{F}$$

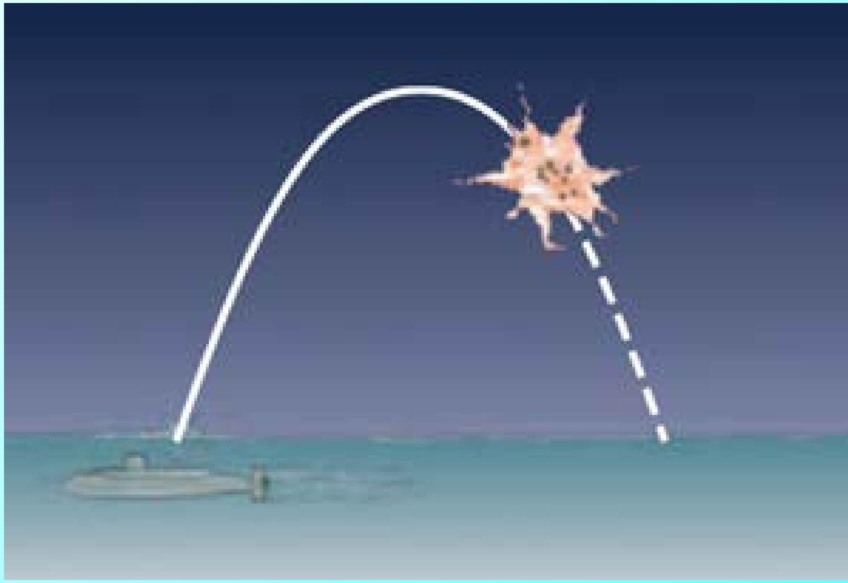
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{int}$$

$$\Longrightarrow \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext} = \mathrm{M}\vec{a}_{CM}$$



2.5. Dinamica sistemelor de puncte materiale

O racheta este lansată vertical în sus. In momentul când ajunge la altitudinea de 1000 m, cu viteza de 300 m/s, explodează şi se descompune în trei fragmente cu aceasi masa. Un fragment se mişcă în sus cu o viteză de 450 m/s, cel de al doilea fragment are o viteză



de 240 m/s şi se deplasează spre est. Să se determine viteza celui de al treilea fragment imediat după expozie.

Rezolvare: $\vec{P} = ct$

$$\vec{P}_i = M\vec{v}_i = M(300\vec{j}\ \mathrm{m/s})$$

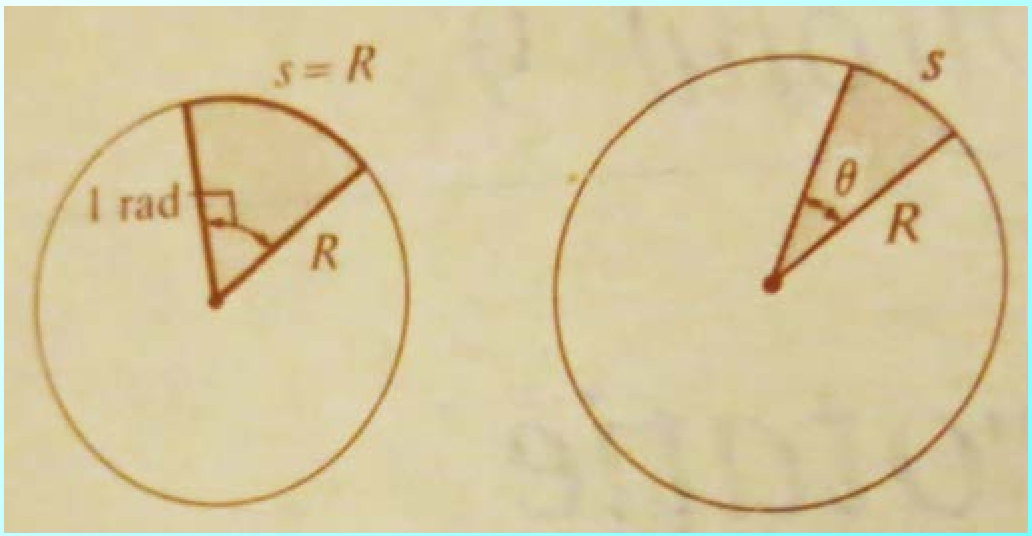
$$\vec{P}_f = \frac{M}{3}(240\vec{\imath}\ \mathrm{m/s}) + \frac{M}{3}(450\vec{j}\ \mathrm{m/s}) + \frac{M}{3}\vec{v}_f$$

$$\vec{v}_f = (-240\vec{\imath} + 450\vec{j})\ \mathrm{m/s}$$

2.6. Mişcarea de rotaţie

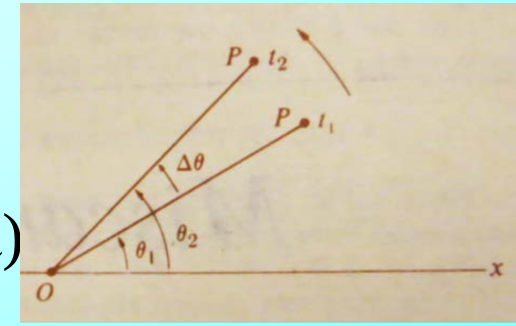
Radianul este unghiul plan cuprins între două raze care delimitează pe un cerc un arc cu lungimea egală cu raza.

$$\theta = \frac{S}{R}$$



$$1\ \text{rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57.3°$$

2.6. Mişcarea de rotaţie



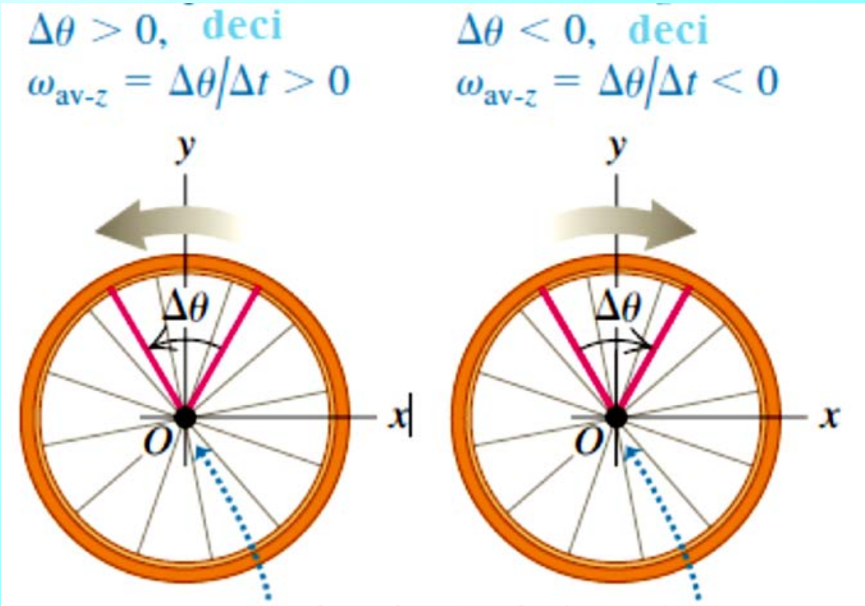
1) Viteza unghiulară:

a) medie $\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$ ($\Delta\theta$ – deplasare unghiulară)

b) instantanee $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

Unitatea de măsură în SI este *1 rad·s*$^{-1}$ sau *rot·min*$^{-1}$

Invers acelor de ceas, direcție pozitivă

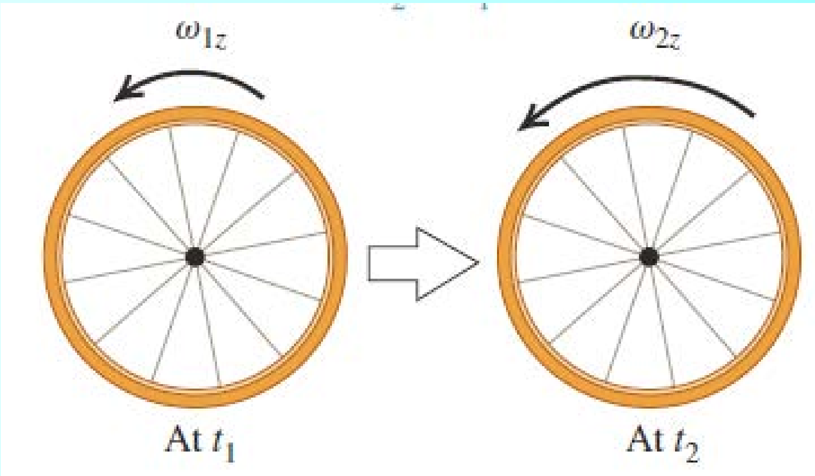


Acelor de ceas direcție negativă

Axa de rotație (axa z)

2.6. Mişcarea de rotaţie

Când viteza unghiulară a unui corp variază, spunem că el are o accelerație unghiulară.



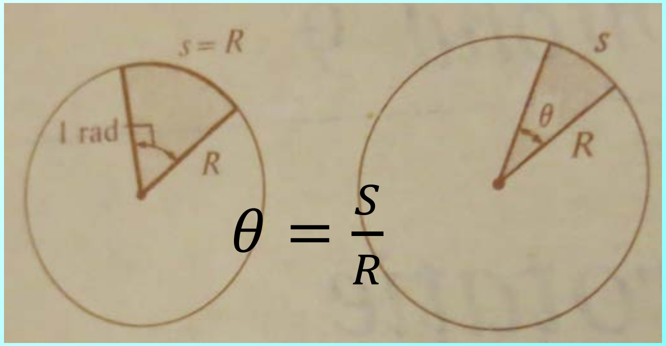
2) **Acceleraţia unghiulară**:

a) medie $\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

b) instantanee $\varepsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

Unitatea de măsură în SI este $1\ rad \cdot s^{-2}$

2.6. Mişcarea de rotaţie



$$\theta = \frac{S}{R}$$

Rotaţia cu acceleraţie unghiulară constantă

- Viteza unghiulară: $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ (1)

Dem.: $d\omega/dt = \varepsilon = \text{ct.} \;\; \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt \;\; \Rightarrow \;\; \omega = \omega_0 + \varepsilon t$

- Coordonata unghiulară: $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$ (2)

Dem.: $d\theta/dt = \omega \;\; \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega dt \;\; \Rightarrow \;\; \theta = \theta_0 + \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt$

- $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\theta - \theta_0)$ (3)

Dem.: Din regula de derivare a funcțiilor compuse: $\varepsilon = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \cdot \frac{d\omega}{d\theta}$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \varepsilon d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega \;\; \Rightarrow \varepsilon(\theta - \theta_0) = \frac{1}{2}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) \;\; \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\theta - \theta_0)$$

2.6. Mişcarea de rotaţie

Aplicaţie:

Viteza unghiulară a unui corp este de *4 rad·s*$^{-1}$ la momentul *t=0*, iar acceleraţia lui unghiulară este constantă şi egală cu *2 rad·s*$^{-2}$. Dreapta OP din corp este orizontală la timpul *t=0*. a) Ce unghi formează această dreaptă cu orizontala, la momentul t=3s? b) Care este viteza unghiulară, în acest moment?

a) $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = 0 + (4rad \cdot s^{-1})(3s) + \frac{1}{2}(2rad \cdot s^{-2})(3s)^2$

$$\theta = 21 \text{ rad} = \frac{21}{2\pi}\text{rot} = 3{,}34\text{rot}$$

b) $\omega = \omega_0 + \varepsilon t = 4\,rad \cdot s^{-1} + (2\,rad \cdot s^{-2})(3\,s) = 10 \text{ rad·s}^{-1}$

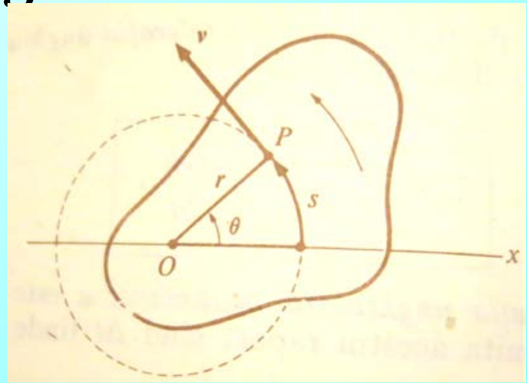
Sau

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\theta - \theta_0) = (4\,rad \cdot s^{-1})^2 + 2(2\,rad \cdot s^{-2})(21\,rad)$$

$$\omega = 10 \text{ rad·s}^{-1}$$

2.6. Mişcarea de rotaţie

Relaţiile dintre vitezele şi acceleraţiile liniare şi unghiulare

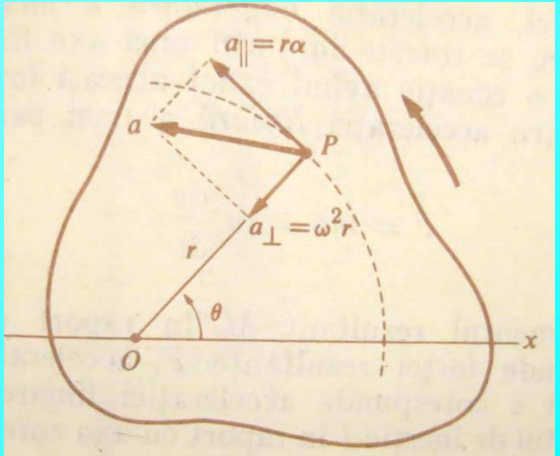


Considerăm un corp rigid care se rotește în jurul unei axe fixe, fiecare punct din corp se mișcă pe un cerc care are centrul pe axă. Fie *r* distanța de la axă până la un punct P din corp, astfel încât punctul se mișcă pe un cerc de rază *r*, ca în figura. Atunci când raza formează unghiul θ cu axa de referință, distanța *s* până la punctul P este $s = r\theta$

Derivând $s = r\theta$ rezultă $\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$, adică $v = r\omega$

Derivând $v = r\omega$ rezultă $\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$, adică $a_{\parallel} = a_t = r\varepsilon$

$$a_r = a_{\perp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

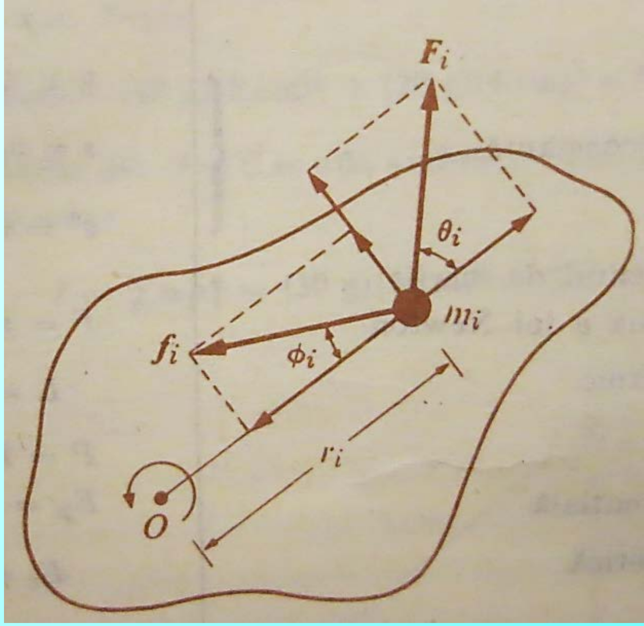


$a_{\parallel} = a_t$ este componenta tangențială a accelerației;

$a_r = a_{\perp}$ este componenta radială a accelerației;

Obs.: accelerația unghiulară se mai notează si cu α

2.6. Mişcarea de rotaţie



Momentul de inerţie: $I = \sum_i^N m_i r_i^2$

Unitatea de măsură în SI este kg·m^2.

Momentul de inerţie este o mărime fizică ce caracterizează distribuţia masei în jurul unei axe.

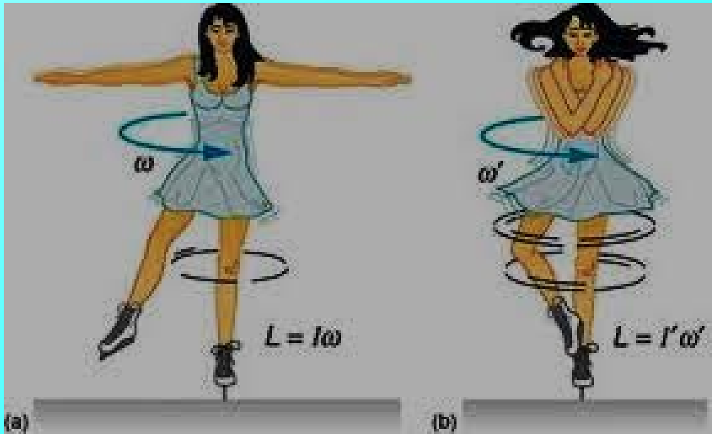
Momentul foţei: $\mathrm{M} = I\varepsilon = I\frac{d\omega}{dt}$

Când un corp rigid este rotit în jurul unei axe fixe, momentul rezultant al forţelor externe în raport cu axa este egal cu produsul dintre momentul de inerţie al corpului în raport cu axa şi acceleraţia unghiulară.

Momentul cinetic: $L = I\omega$

Ex. de conservare a momentului cinetic $L = \text{ct.}$ ***:***

O patinatoare care execută piruete, atunci când doreşte să îşi mărească viteza de rotaţie îşi apropie mâinile de corp (se modifică modul în care este distribuită masa, *I* scade), iar când doreşte să îşi micşoreze viteza îşi îndepărtează mâinile de corp (*I* crește).

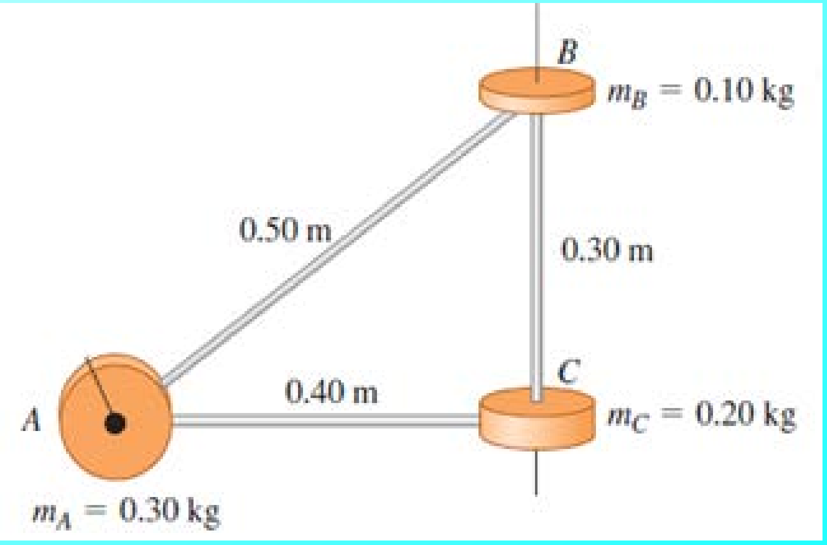


2.6. Mişcarea de rotaţie

Aplicaţie:

Trei mici corpuri, care pot fi considerate particule, sunt legate prin tije uşor rigide, ca în figură. Care este momentul de inerţie al sistemului: a) în raport cu o axă ce trece prin punctul A, perpendiculară pe planul figurii, şi b) în raport cu o axă care coincide cu tija BC?

Momentul de inerţie: $I = \sum_i^N m_i r_i^2$



2.6. Mişcarea de rotaţie

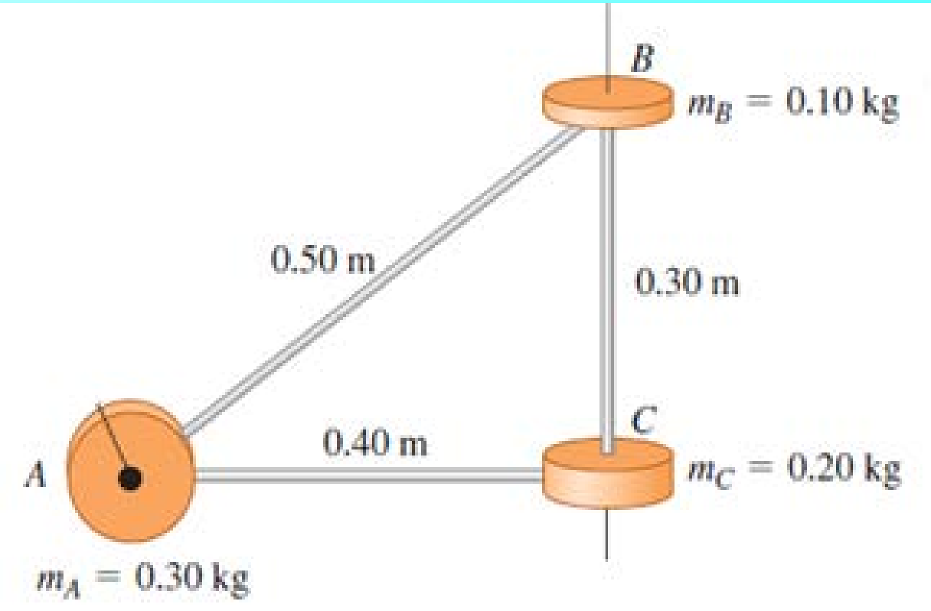
Aplicaţie: Rezolvare

a) Particula din punctul A se află pe axă. Distanţa ei până la axă este zero, adică ea nu contribuie cu nimic la momentul de inerţie.

$$I = \sum_i^3 m_i r_i^2 = m_B \cdot (BA)^2 + m_c \cdot (CA)^2 + 0$$

b) Particulele B şi C se află pe axă, rezultă

$$I = \sum_i^3 m_i r_i^2 = m_A \cdot (AC)^2$$



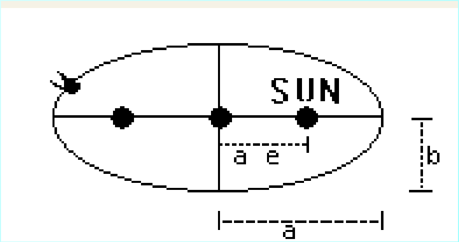
2.6. Mişcarea de rotaţie

Mărimi specifice mişcărilor de translaţie şi de rotaţie

Mişcarea de rotaţie	Mişcarea liniară
Deplasare unghiulară, $\Delta\theta$	Deplasare, Δr
Viteza unghiulară $\omega = d\theta/dt$	Viteză liniară $v = dr/dt$
Acceleraţie unghiulară $\varepsilon = d\omega/dt$	Acceleraţie liniară $a = dv/dt$
Momentul de inerţie, I	Masa, m
Momentul forţei $M = I\varepsilon$	Forţă $F = m \cdot a$
Lucru mecanic $L = \int M \cdot d\theta$	Lucru mecanic $L = \int F \cdot dr$
Energia cinetică $E_c = \frac{1}{2} I\omega^2$	Energia cinetică $E_c = \frac{1}{2} mv^2$
Puterea $P = M\omega$	Puterea $P = F \cdot v$
Momentul cinetic $L = I\omega$	Impuls $p = m \cdot v$

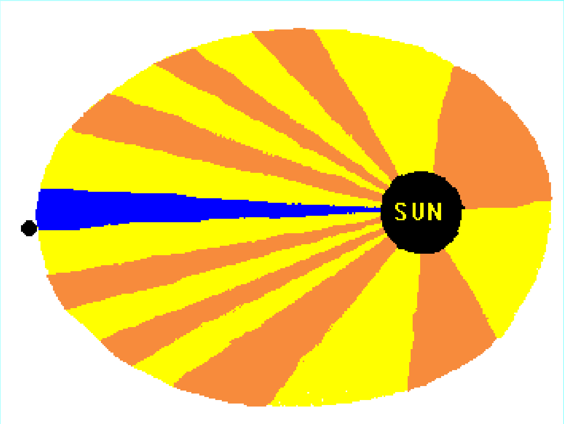
2.7. Legile lui Kepler

Legea 1: Planeta se mișcă în jurul stelei pe o orbită eliptică, în care steaua reprezintă unul din focare. (1609)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ (ecuația elipsei)

Legea a 2-a: Linia dreaptă care unește planeta cu steaua (raza vectoare a planetei) mătură arii egale în perioade de timp egale. (1609)

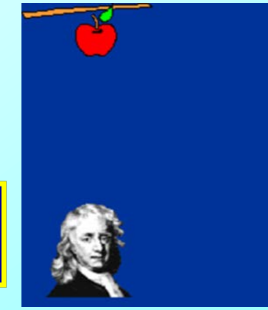


Legea a 3-a: Pătratul perioadei de revoluție a planetei este direct proporțional cu cubul semiaxei mari a orbitei. (1619)

$$T^2 = Ca^3$$

C-constanta si are aceleasi valori pentru toate planetele.

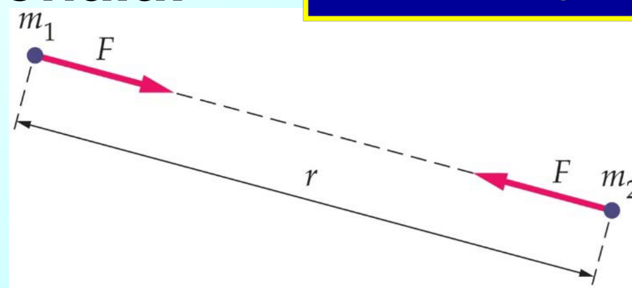
Recapitulare din cursul 2



Newton, 1665

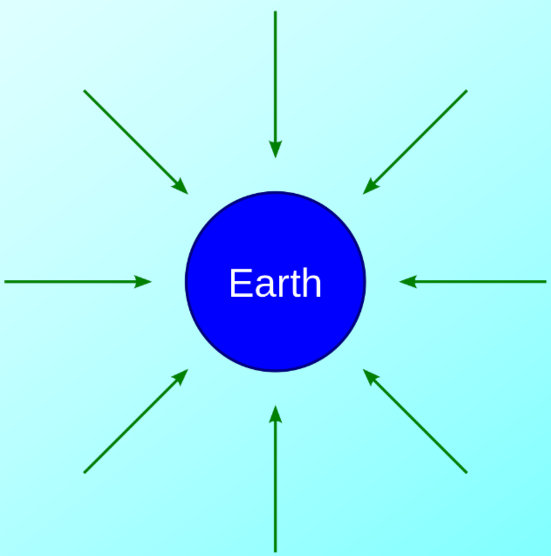
Forţa de atracţie gravitaţională:

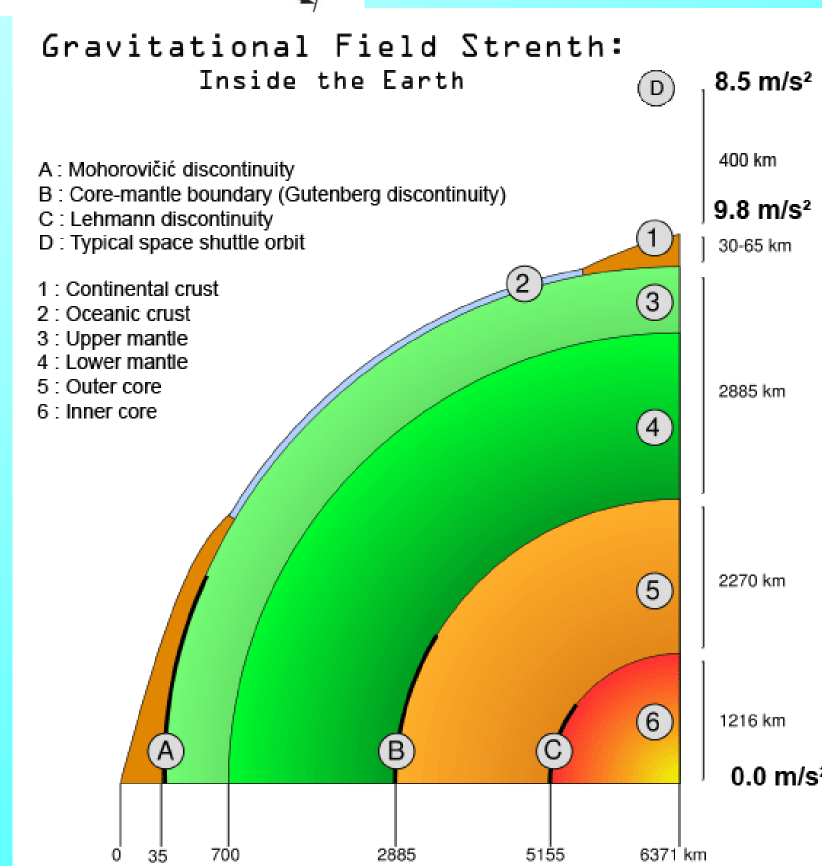
$$\boxed{F = K\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}}$$



Constanta atracţiei universale:

$$\boxed{K = 6{,}673\cdot 10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}}$$

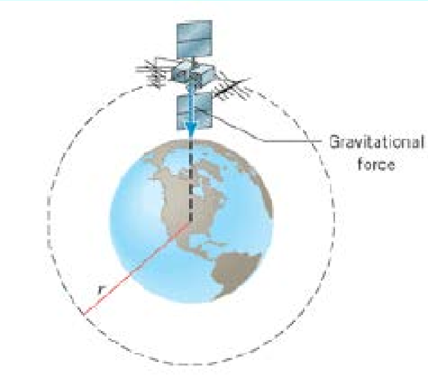




2.8. Determinarea vitezelor cosmice

Prima viteză cosmică - viteza minimă necesară unui satelit pentru a se roti în jurul Pământului

a) ***r* = *R*** (R- raza Pământului)



Condiția ca un satelit să rămână pe orbită este:

$$K\frac{mM_P}{r^2} = \frac{m{v_0}^2}{r}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{KM_P}{R}} = \sqrt{\frac{(6{,}67\cdot 10^{-11}N\cdot \frac{m^2}{kg^2})(5{,}97\cdot 10^{24}kg)}{6{,}37\cdot 10^{6}m}}$$

$$\boxed{v_0 \approx 7{,}9\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}}$$

sau

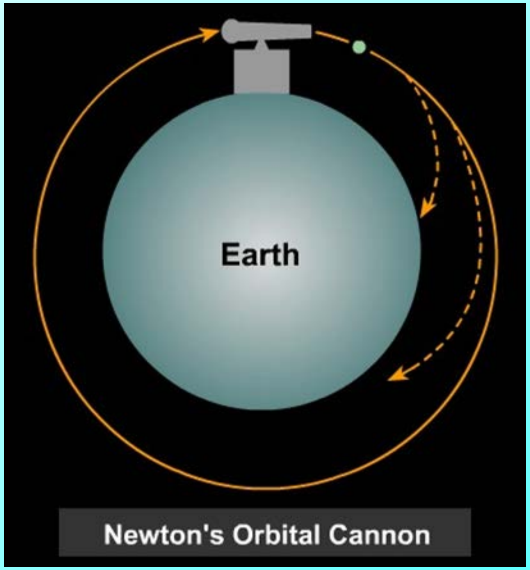
$$v_0 = \sqrt{\frac{KM_P}{R}} = \sqrt{\frac{KM_PR}{R^2}} = \sqrt{gR}$$

2.8. Determinarea vitezelor cosmice

<u>Prima viteză cosmică </u>- viteza minimă necesară unui satelit pentru a se roti în jurul Pământului

b) ***r = R+h***

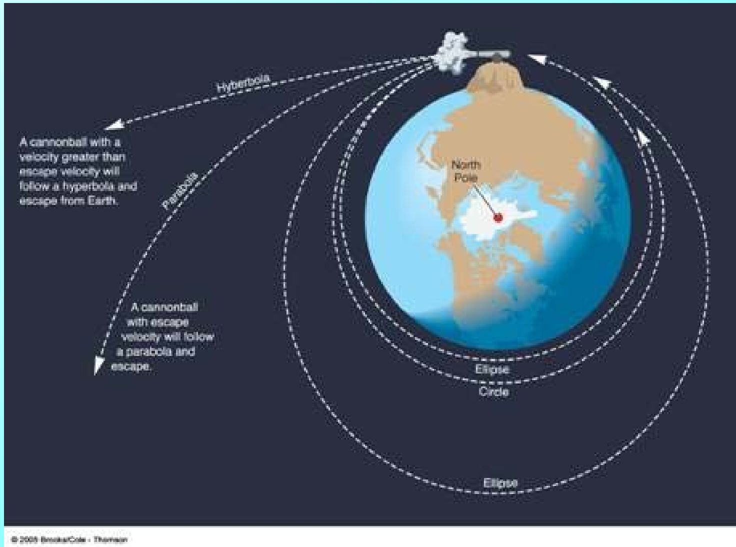
$$K\frac{mM_P}{(R+h)^2}=\frac{m{v_1}^2}{R+h}$$



$$v_1=\sqrt{\frac{KM_P}{R+h}}=v_{01}\sqrt{\frac{R}{R+h}}$$

2.8. Determinarea vitezelor cosmice

<u>A doua viteză cosmică</u> – viteza minimă necesară unui corp pentru a părăsi complet campul de atracţie al Pământului, intrand în sfera de atracţie a altor planete sau a Soarelui.



$$\Delta E_c = L \qquad E_{cf} - E_{ci} = L_G = \int \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$$

$$0 - \frac{m v_2^2}{2} = -\int_R^{\infty} K \frac{m M_P}{r^2} dr = -K \frac{m M_P}{R}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{K M_P}{R}} = \sqrt{2gR} = v_1 \sqrt{2} \approx 11{,}2 \ \mathrm{km/s}$$

Sau $E_{c_i} + E_{p_i} = E_{c_f} + E_{p_f}$ când $r \to \infty \Rightarrow E_{p_f} = 0 \quad si \quad E_{c_f} = 0$

2.8. Determinarea vitezelor cosmice

List of escape velocities [edit]

Location	Relative to	V_e (km/s)[13]	Location	Relative to	V_e (km/s)[13]	System escape, V_{te} (km/s)
On the Sun	The Sun's gravity	617.5				
On Mercury	Mercury's gravity	4.25	At Mercury	The Sun's gravity	~ 67.7	~ 20.3
On Venus	Venus's gravity	10.36	At Venus	The Sun's gravity	49.5	17.8
On Earth	Earth's gravity	11.186	At Earth/the Moon	The Sun's gravity	42.1	16.6
On the Moon	The Moon's gravity	2.38	At the Moon	The Earth's gravity	1.4	2.42
On Mars	Mars' gravity	5.03	At Mars	The Sun's gravity	34.1	11.2
On Ceres	Ceres's gravity	0.51	At Ceres	The Sun's gravity	25.3	7.4
On Jupiter	Jupiter's gravity	60.20	At Jupiter	The Sun's gravity	18.5	60.4
On Io	Io's gravity	2.558	At Io	Jupiter's gravity	24.5	7.6
On Europa	Europa's gravity	2.025	At Europa	Jupiter's gravity	19.4	6.0
On Ganymede	Ganymede's gravity	2.741	At Ganymede	Jupiter's gravity	15.4	5.3
On Callisto	Callisto's gravity	2.440	At Callisto	Jupiter's gravity	11.6	4.2
On Saturn	Saturn's gravity	36.09	At Saturn	The Sun's gravity	13.6	36.3
On Titan	Titan's gravity	2.639	At Titan	Saturn's gravity	7.8	3.5
On Uranus	Uranus' gravity	21.38	At Uranus	The Sun's gravity	9.6	21.5
On Neptune	Neptune's gravity	23.56	At Neptune	The Sun's gravity	7.7	23.7
On Triton	Triton's gravity	1.455	At Triton	Neptune's gravity	6.2	2.33
On Pluto	Pluto's gravity	1.23	At Pluto	The Sun's gravity	~ 6.6	~ 2.3

https://en.wikipedia.org/wiki/Escape_velocity

2.8. Determinarea vitezelor cosmice

Aplicaţie: Un proiectil este lansat direct în sus de la Polul Sud cu viteza iniţială v_i=8 km/s. Să se găsească înălțimea maximă la care ajunge, neglijând efectele frecării cu aerul.

$$E_{c_i} + E_{p_i} = E_{c_f} + E_{p_f}$$

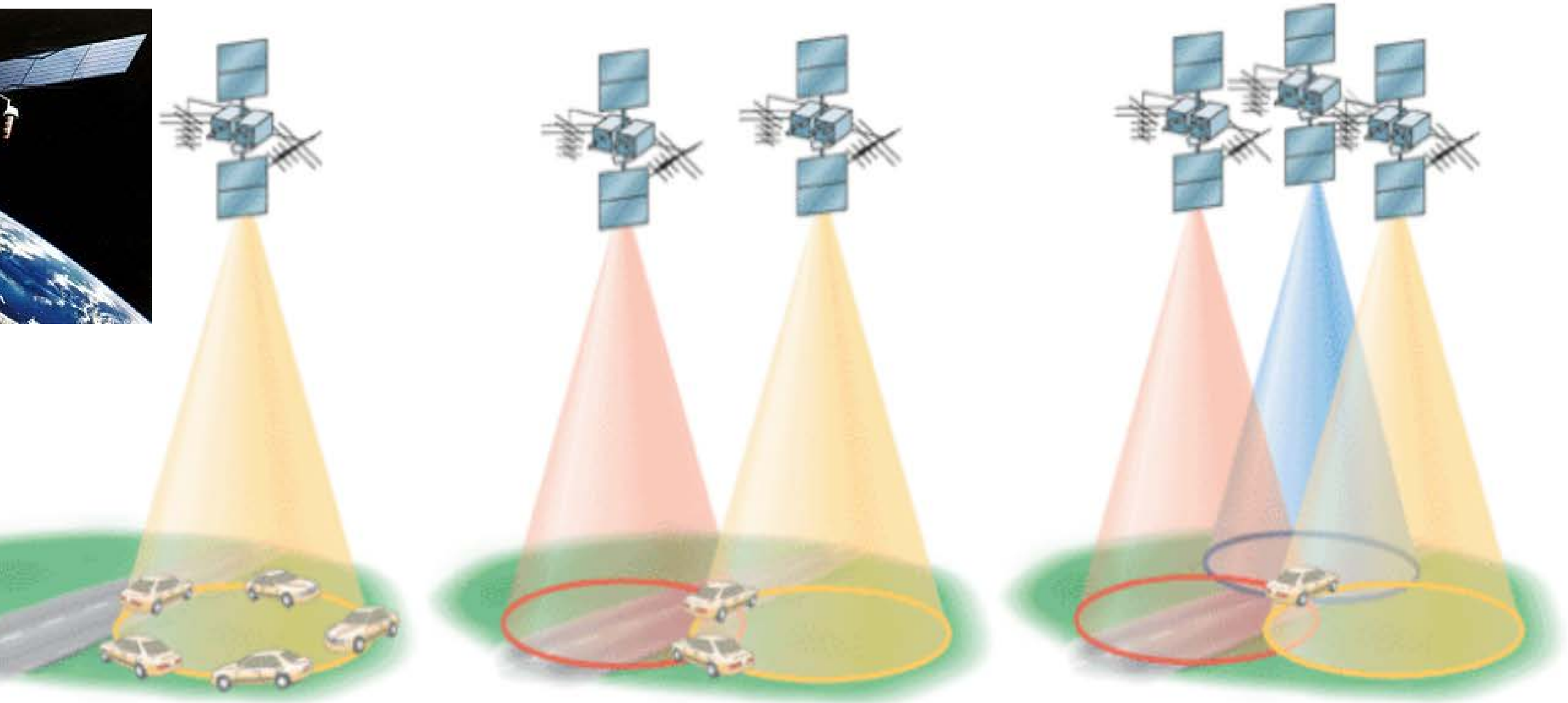
$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{KMm}{R_p} = 0 - \frac{KMm}{R_f}$$

$$\frac{1}{R_f} = -\frac{v_i^2}{2KM} + \frac{1}{R_p}$$

$$R_f = 1.30 \cdot 10^7 \mathrm{m}$$

$$h = R_f - R_p = 1.30 \cdot 10^7 - 6{,}37 \cdot 10^6 = 6{,}7 \cdot 10^6 \mathrm{m}$$

GPS - GLOBAL POSITIONING SYSTEM



Sistem de poziționare globală

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- Definească centru de masă şi să rezolve probleme;
- Definească corect viteza şi acceleraţia unghiulară;
- Scrie ecuaţiile pentru rotaţia cu acceleraţie unghiulară constantă;
- Definească relaţiile dintre vitezele şi acceleraţiile liniare şi unghiulare;
- Definească momentul de inerţie şi să rezolve probleme;
- Scrie diferenţa dintre mărimi specifice mişcărilor de translaţie şi de rotaţie;
- Definească legile lui Kepler;
- Calculeze prima si a doua viteză cosmică;

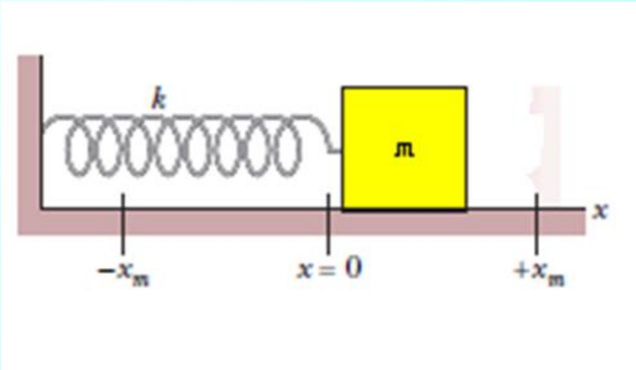
BIBLIOGRAFIE

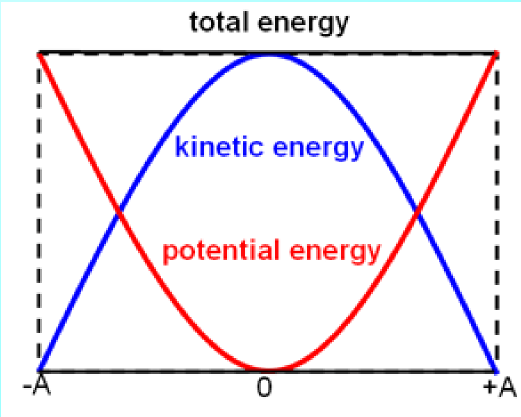
- **Fizica,** F. W.Sears, Zemansky , H. D.Young, Ed. Didactica si Pedagogica, 1983;
- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, F. Barvinschi, Ed. Orizonturi Universitare, 2016;
- **Elemente de fizică generală,** D. Popov, I. Damian, Ed. Politehnica, 2014;
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Ed. Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008
- **PHYSICS for Scientist and Engineers with Modern Physics** – Seventh Edition, R. Serway, J. Jewett, ed. Thomson Brooks/Cole, 2008.
- **Sears & Zemansky's University Physics: with Modern Physics**, 13th Edition, H. Young, R. Freedman, ed. Pearson, 2012

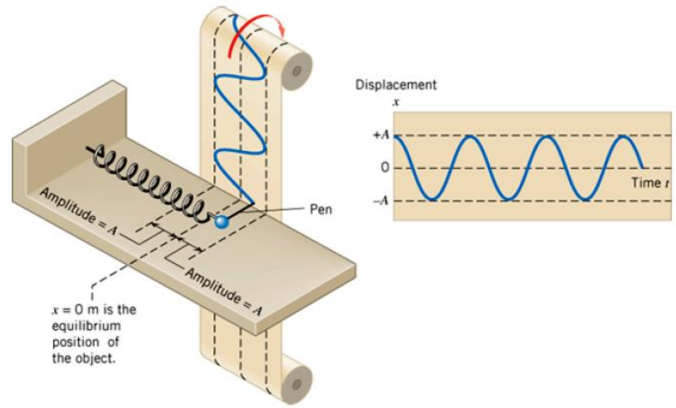
FIZICĂ PENTRU INGINERI

Prezentat de

Trif-Tordai Delia







Universitatea Politehnica Timişoara, România

CURSUL 5 & 6

2020-2021

3. Oscilaţii mecanice

3.1. Noţiuni generale

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

3.3. Compunerea oscilaţiilor armonice

3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

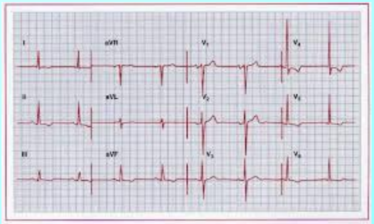
3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

3. Oscilaţii mecanice

3.1. Noţiuni generale

Oscilaţia = fenomenul fizic în decursul căruia o anumită mărime fizică prezintă o variaţie periodică sau pseudoperiodică

- Moleculele vibrează ⟶ căldură
- Curenţii electrici oscilează: curentul altenativ
- Corzile unei chitare vibrează ⟶ sunet
- Pendula unui orologiu oscilează
- Bătăile inimii



https://phet.colorado.edu/sims/mass-spring-lab/mass-spring-lab_en.html
https://phet.colorado.edu/sims/pendulum-lab/pendulum-lab_en.html

3. Oscilaţii mecanice

3.1. Noţiuni generale. Clasificare:

a)D.p.d.v. al formei de energie dezvoltată în timpul oscilației

OSCILAȚII

- elastice, mecanice
- electromagnetice
- electromecanice

b) D.p.d.v. al conservării energiei sistemului oscilant

OSCILAȚII

- ideale
- amortizate
- forțate

3. Oscilaţii mecanice

3.1.Noţiuni generale. Mărimi caracteristice oscilaților periodice

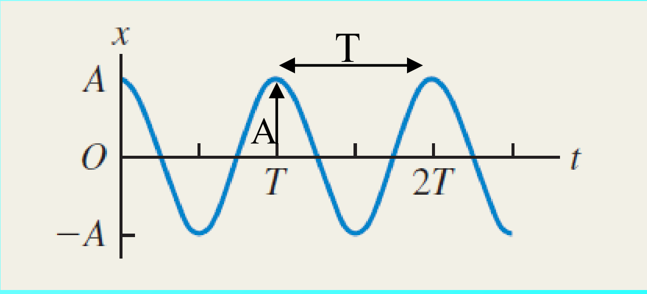
- Mărimea care variază în timpul fenomenului oscilator se numeşte <u>mărime caracteristica</u>. Valoarea la un moment dat a acestei mărimi poartă denumirea de <u>elongaţie</u>, iar valoarea maxima a elongaţiei se numeşte <u>amplitudine</u>.

- Durata minimă în decursul căreia se efectuează o oscilaţie completa se numeşte <u>perioadă</u> (T). $[T]_{SI} = 1\ s$

- <u>Frecvenţa</u> (f) = numărul de oscilaţii efectuate în timp de 1 s.

$f = \frac{1}{T} \quad [f]_{SI} = 1\ s^{-1} = 1Hz$

- <u>Pulsaţia</u> $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad [\omega]_{SI} = 1\ rad/s$

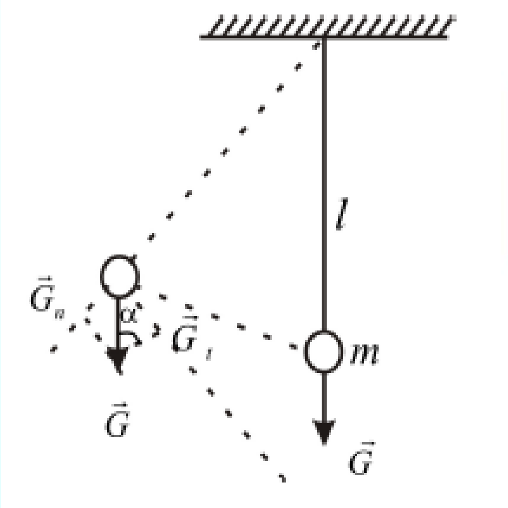


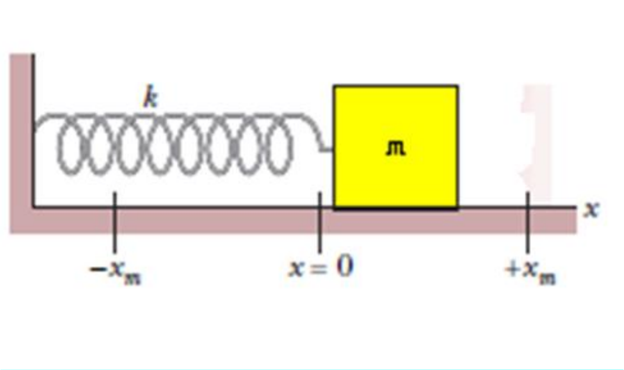
3. Oscilaţii mecanice

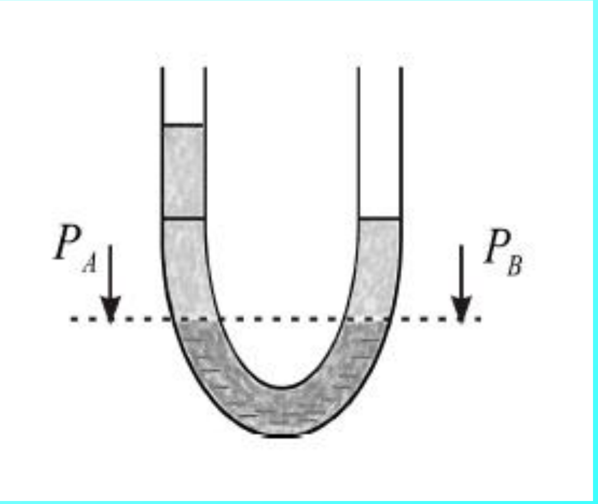
3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Oscilaţiile libere ideale (neamortizate) se produc în absenţa unor forţe de frecare sau de disipare a energiei, rezultă că energia totală a oscilatorului rămâne constantă în timp.

<u>Obs.</u>: Mişcarea oscilatorie neamortizată este o mişcare ideală.



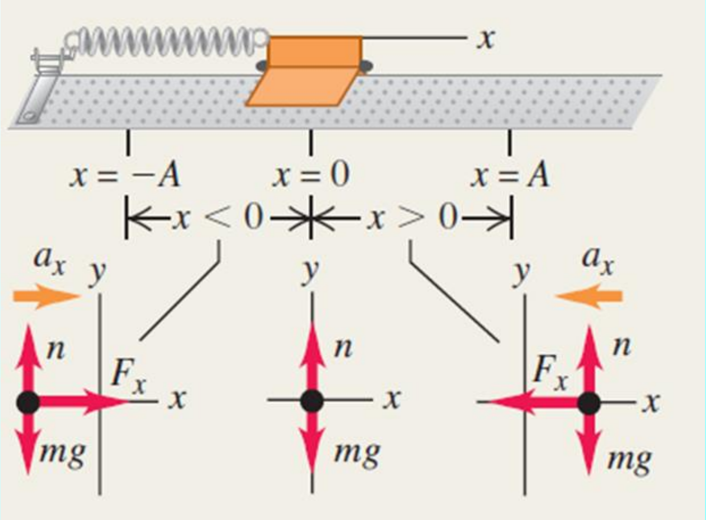


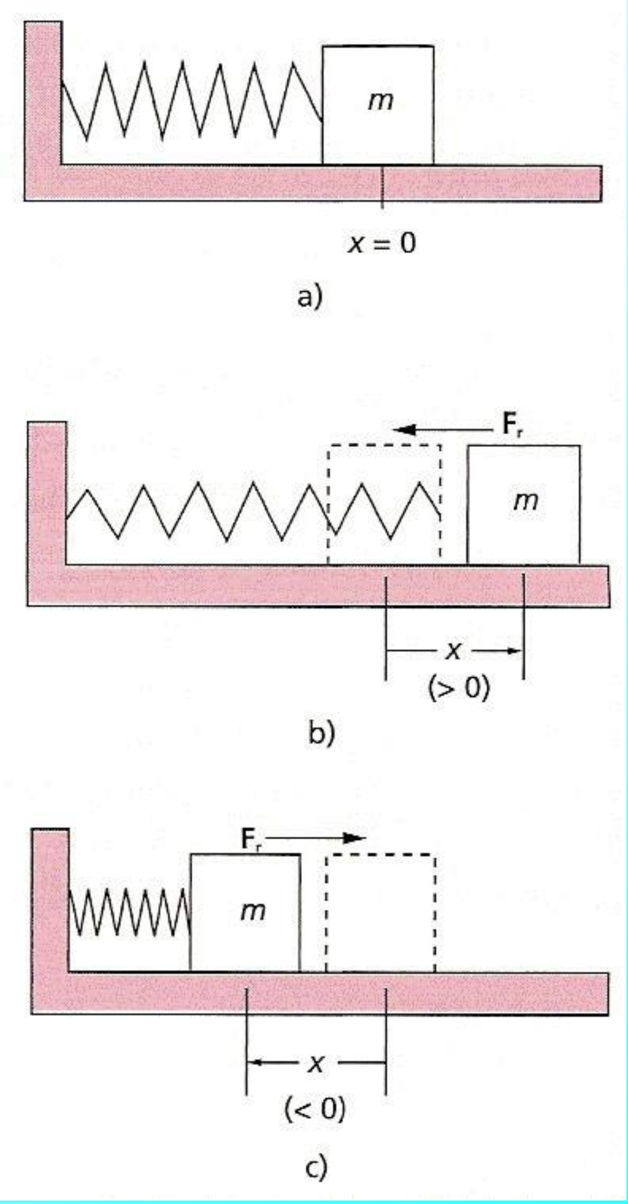


3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

- Oscilator mecanic: <u>resort elastic </u>(de constantă elastică *k*) şi un <u>PM</u> de masă *m*
- In absenţa frecărilor (oscilaţii ideale) rezultă o mişcare periodică în jurul poziţiei de echilibru.





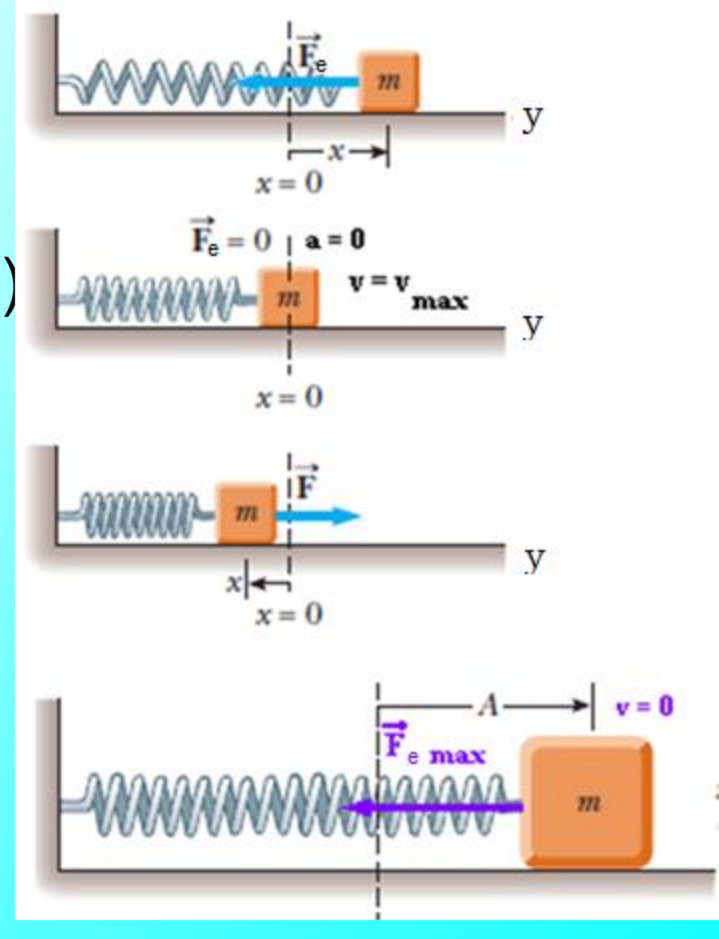
Poziţia de repaus : x = 0

Scos din poziţia de repaus : x > 0 → forţa de revenire (forţa elastică): $\boxed{F_e = -kx}$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Forţa elastică din resort, este singura forţă din sistemul mecanic, iar conform principiului al doilea al mecanicii clasice:



$$-\boldsymbol{ky} = \boldsymbol{ma}$$

unde

y – elongaţia mişcării (alungirea resortului)

Ecuaţia de mişcare devine:

$$\boldsymbol{ma} + \boldsymbol{ky} = \boldsymbol{0}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$ ecuatie diferentială de ordinul doi

Notăm cu $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsaţia proprie a oscilatorului (rad/s)

$\ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$

Soluţiile particulare sunt de forma: $y(t) = e^{\pm i\omega_0 t}$

Formulele lui Euler: $\rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = a + ib,$ $\left|e^{i\varphi}\right|^2 = 1$

Soluţia generală este: $y(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Elongaţia mişcării (m)

Faza oscilaţiei (rad)

$$y(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Amplitudinea mişcării (m)

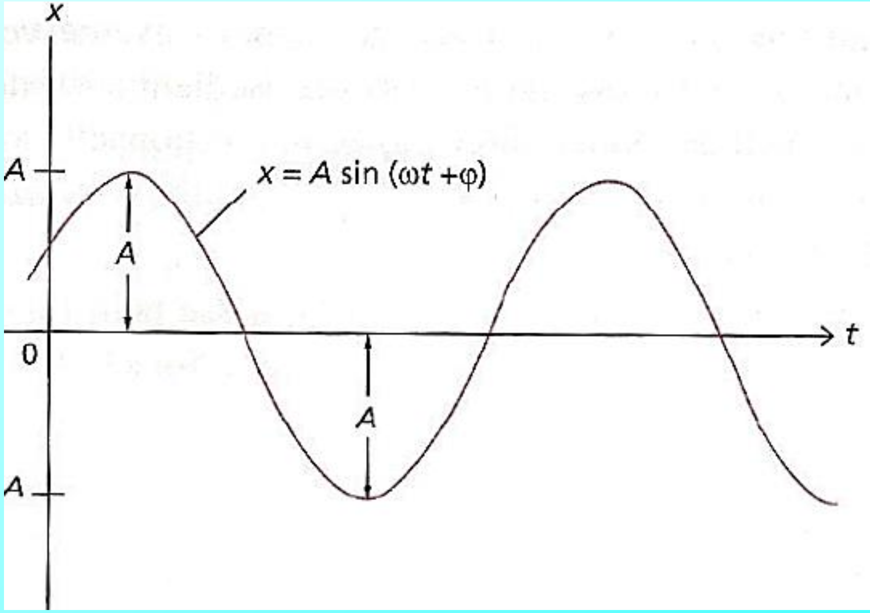
Pulsaţia proprie a oscilatorului

Faza iniţială a mişcării (rad)

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Din condiţiile iniţiale (la t=0, se cunosc poziţia şi viteza iniţială) se determină A şi φ_0



Dacă $\varphi_0 = 0 \Rightarrow y(t) = Asin(\omega_0 t)$

Dacă $t = T \;\Rightarrow\; y(t) = y(T)$

$\omega_0 T = 2\pi \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\ f}$

ω_0 , T şi *f* nu depind de condiţiile iniţiale, ele sunt mărimi proprii ale sistemului oscilant.

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Aplicaţie: Un corp cu masa m = 5 kg este legat de un resort cu constanta elastică k = 20 N/m. Sistemul oscilează cu amplitudinea A = 2 cm, astfel încît la t = 0, x(0)=- A. Să se determine ecuaţia de mişcare x(t).

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x(0) = -A = A\sin\varphi_0 \quad \Rightarrow \sin\varphi_0 = -1 \quad \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

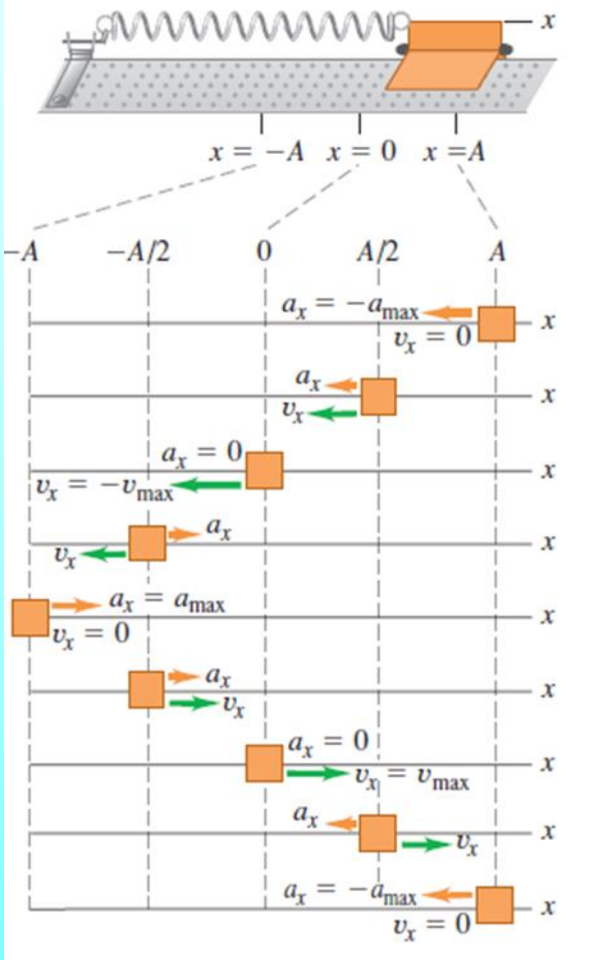
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2rad/s$$

$$\boxed{x(t) = 0{,}02\sin(2t + \frac{3\pi}{2})(m)}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

<u>*Viteza şi acceleraţia oscilatorului ideal*</u>



Elongaţia mişcării la un moment dat:

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

Viteza la un moment dat:

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

$$v_{\max} = A\omega_0$$

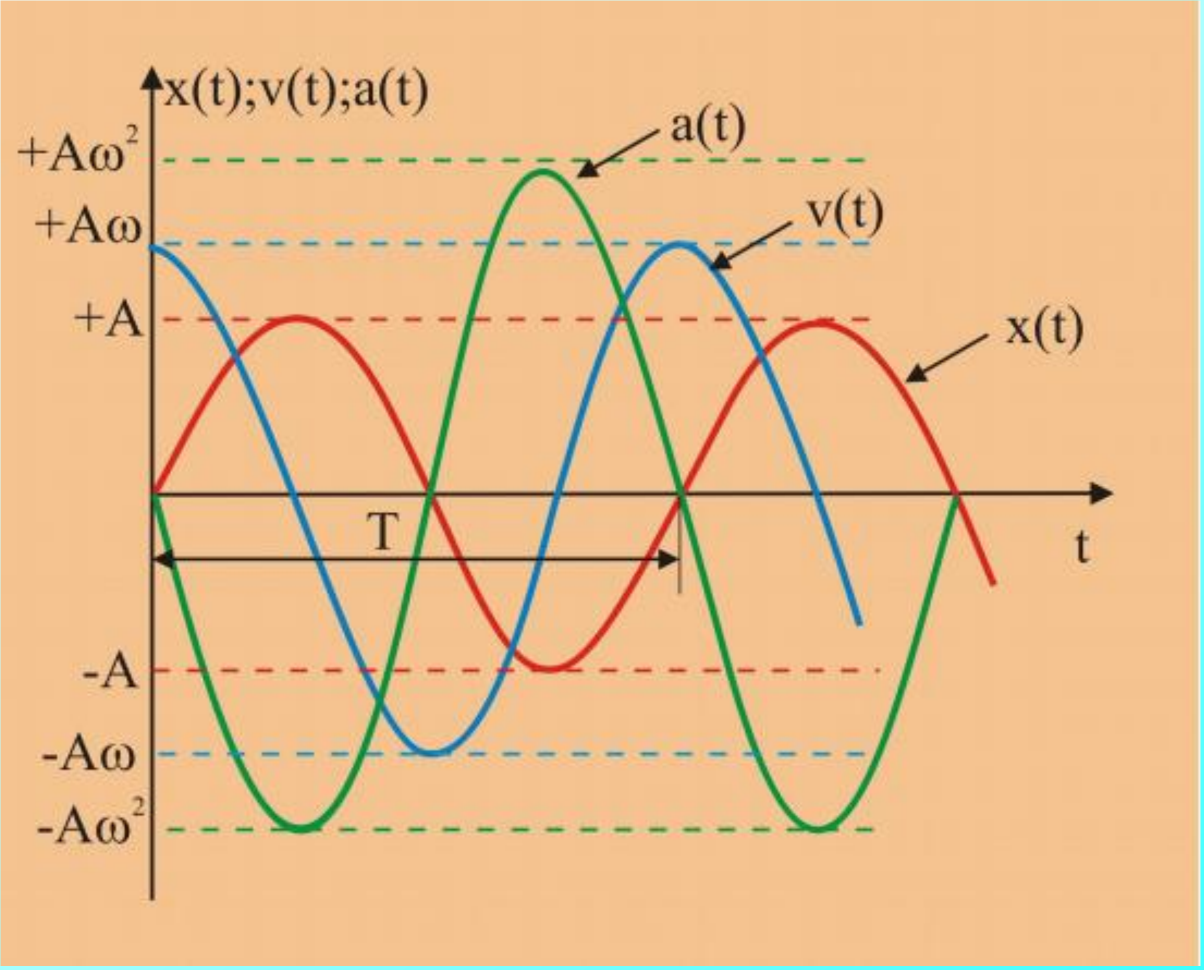
Acceleraţia la un moment dat: $\boxed{a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -A\omega_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)}$

$$a_{\max} = A\omega_0^2$$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Reprezentarea grafică a elongaţiei, vitezei şi acceleraţiei oscilatorului ideal în funcţie de timp



3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

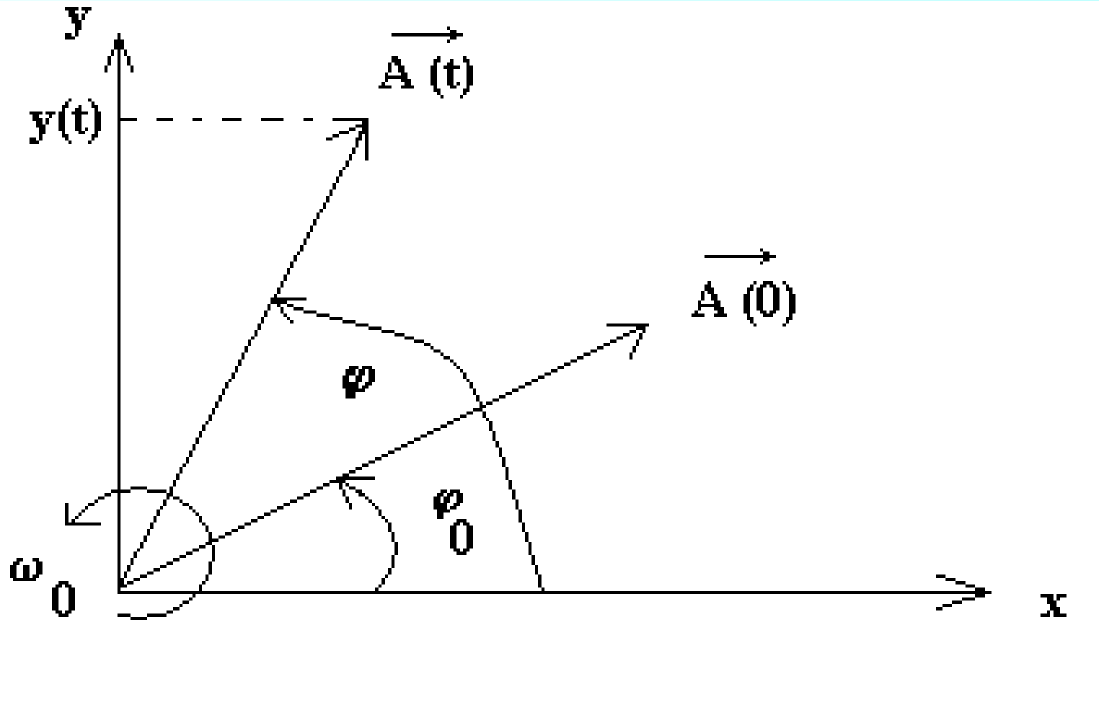
Reprezentarea fazorială a oscilaţiei

Fazor=vector rotitor în sens trigonometric +, cu vit. unghiulară ω_0
Lungimea fazorului = modulul vectorului pe care-l reprezintă, A
Faza vectorului = cu unghiul format de fazor cu axa orizontala, Ox
Vectorul reprezentat = cu proiectia fazorului pe axa verticala, Oy

$$y = A \sin \varphi(t)$$

unde

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$$



3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Energia mecanică a mişcării oscilatorii armonice ideale

$$E_c = \frac{m\,v^2}{2} \Longrightarrow E_c = \frac{1}{2} m\,A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 \Longrightarrow E_p = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$E_m = E_c + E_p \Longrightarrow E_m = \frac{1}{2} k\,A^2$$

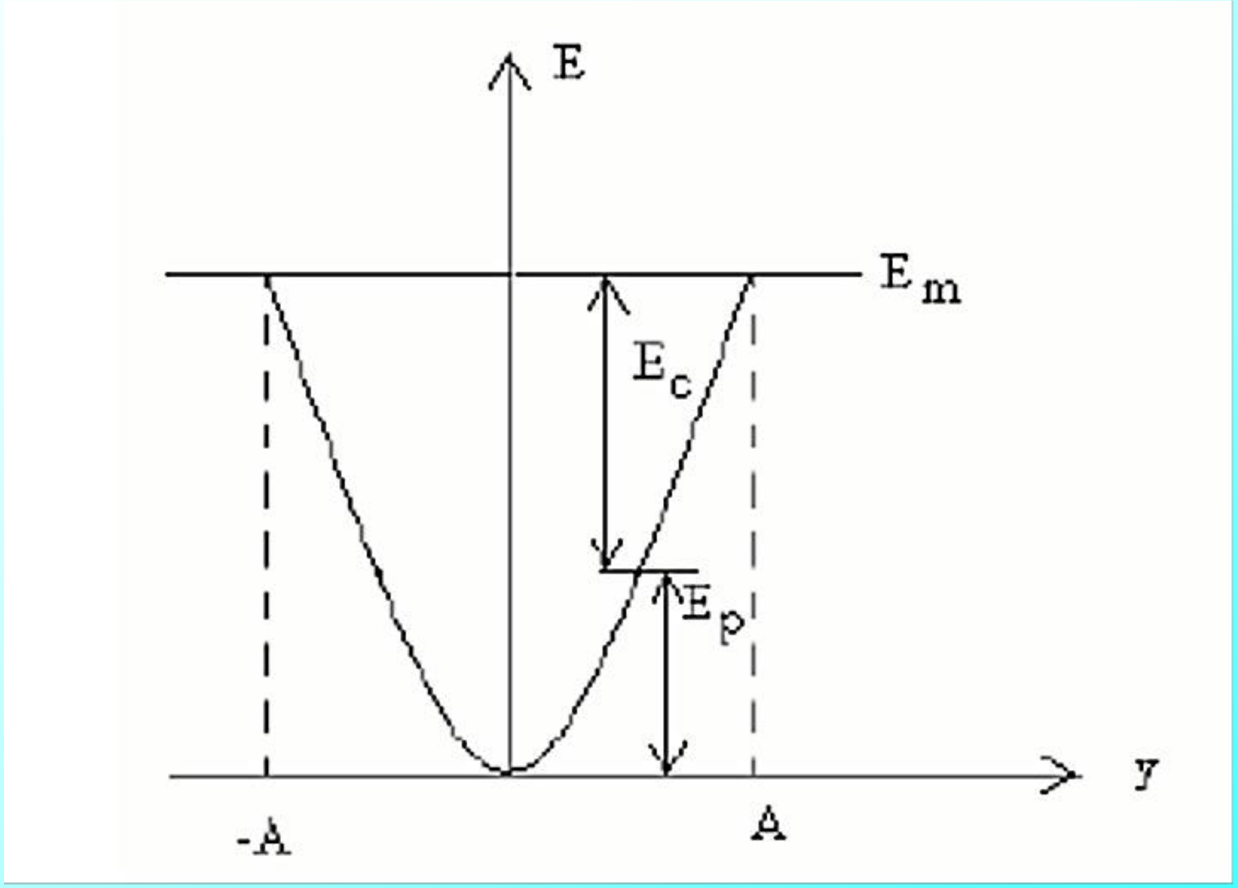
3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Legea conservarii energiei mecanice a oscilatorului ideal

Energia mecanică a oscilatorului armonic ideal se conservă.

$$E_m = E_c + E_p = const.$$



$$E_m = \frac{1}{2} k\ A^2$$

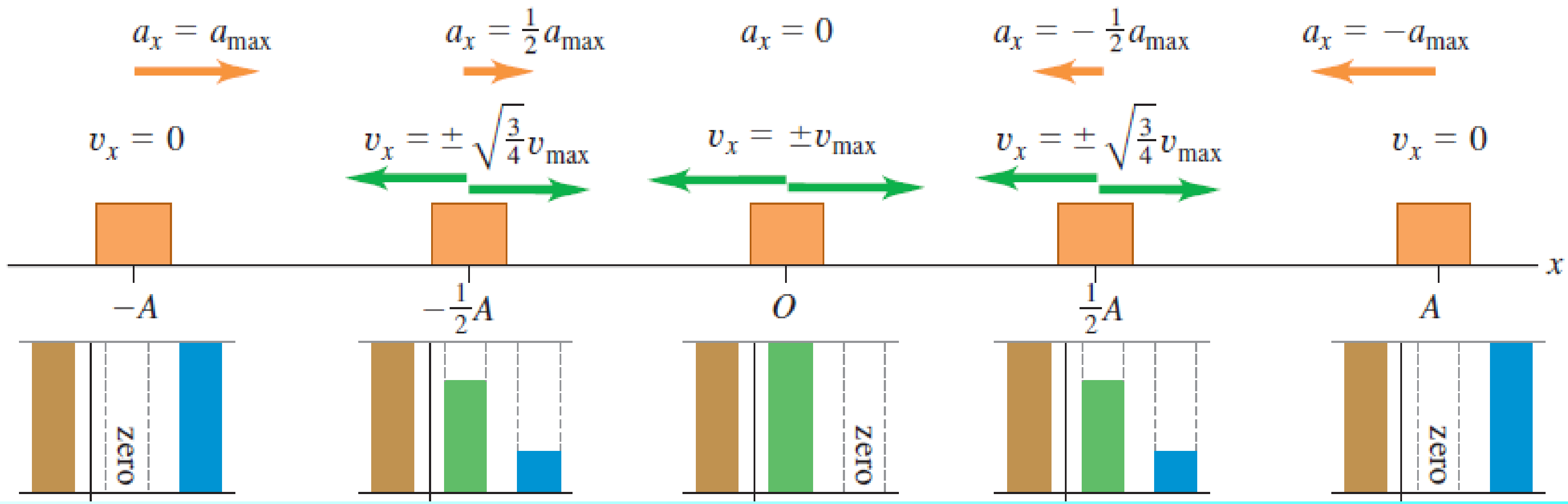
$$E_c = \frac{m\,v^2}{2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Energiei mecanice a oscilatorului ideal



$E = E_C + E_P$ $E = E_C + E_P$ $E = E_C + E_P$ $E = E_C + E_P$ $E = E_C + E_P$

$E = 0 + E_P$ $E = E_C + 0$ $E = 0 + E_P$

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Aplicaţie:

Un corp de masă m=0,05 kg fixat de capătul unui resort execută o mişcare oscilatorie armonică de-a lungul axei Ox după legea: $x(t) = 0{,}05\sin(10t)$ (m). Să se determine:

a) Constanta elastică a resortului şi perioada oscilaţiilor;
b) Energia totală a corpului;
c) Momentele de timp la care energia cinetică este egală cu energia potenţială.

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

<u>Aplicaţie:</u>

$a)\ \ k = \omega^2 m = 5$ (N/m) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ (s)

$b)\ \ E_t = \frac{kA^2}{2} = 6.25 \cdot 10^{-3}$ (J)

$c)\ \ E_c = E_p$

$tg^2 10t = 1$, dar $tg\frac{\pi}{4} = 1$ $\Rightarrow$ momemtele de timp $t_n = (2n+1)\frac{\pi}{40}$

3. Oscilaţii mecanice

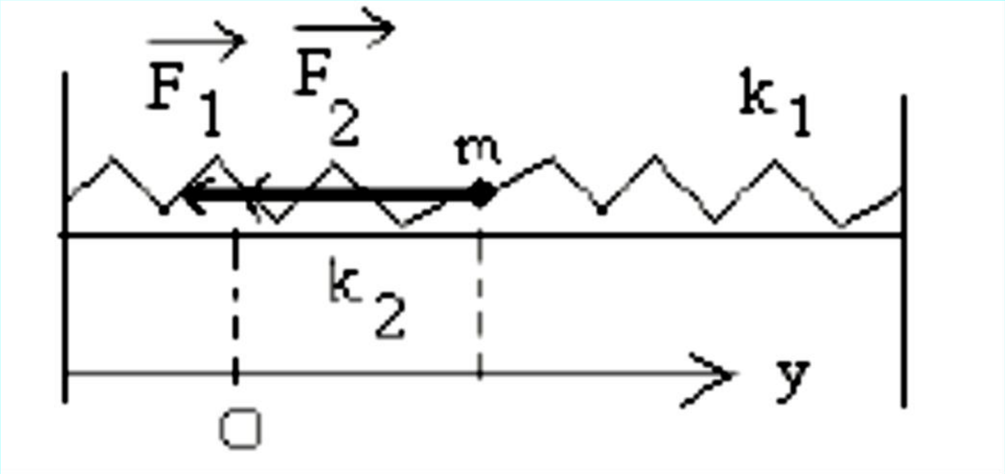
3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie

Să presupunem că un punct material de masă m este legat de două resorturi elastice, fiind supus simultan la două forţe elastice pe aceeaşi direcţie, dar în sensuri diferite.

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_{01})$$

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_{02})$$



Cele 2 resorturi elastice sunt identice, adică au aceeaşi $k_1 = k_2 = k$.

https://phet.colorado.edu/sims/normal-modes/normal-modes_en.html

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie

Oscilatia armonica rezultanta:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \qquad\qquad y(t) = \mathrm{A}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Ne propunem să calculăm amplitudinea şi faza iniţială a mişcării compuse prin metoda fazorilor și prin metoda trigonometrică.

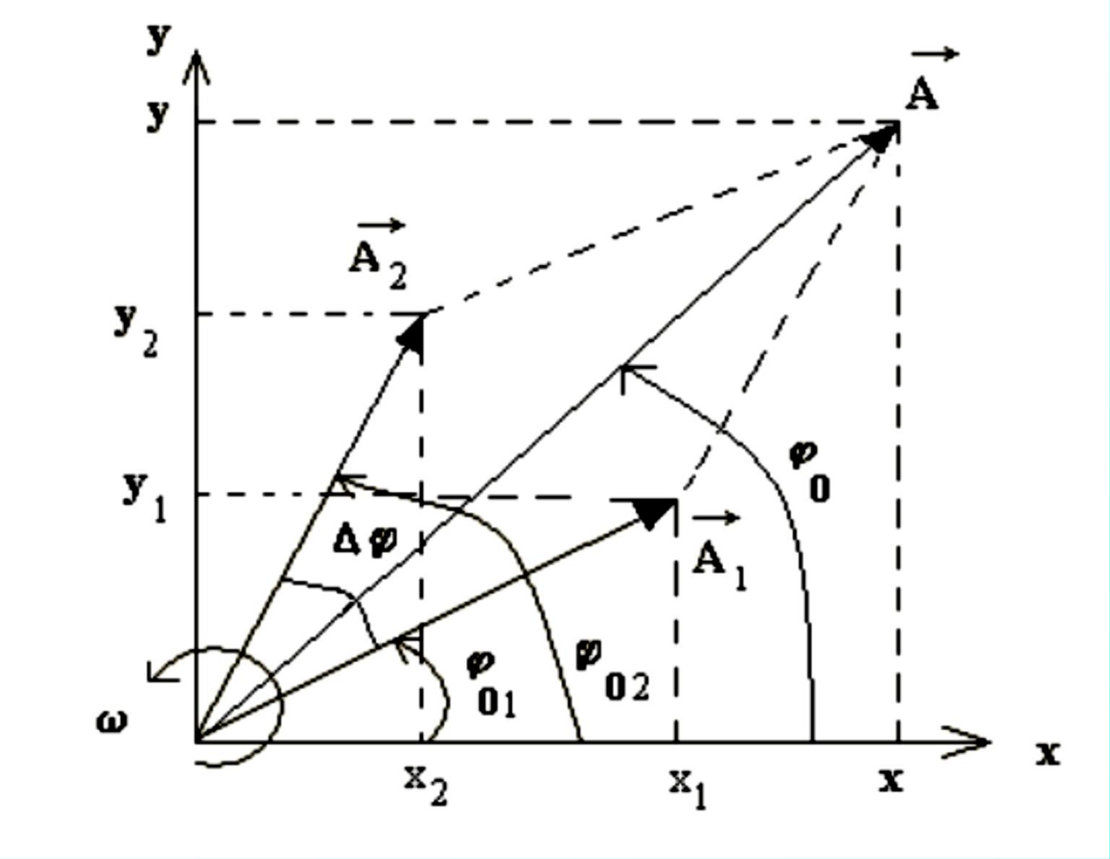
A_1, **A_2** - Fazorii corepunzători celor două oscilaţii, $y_1(t)$ şi $y_2(t)$, se rotesc în fază, deoarece au aceeaşi viteză unghiulară, ω.

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie

Reprezentarea fazorială a compunerii oscilaţiilor paralele



3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie

Diferenţa de fază dintre cele două oscilaţii este independentă de timp:

$$\triangle\varphi = \varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \omega t + \varphi_{02} - \omega t - \varphi_{01} = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

$$\vec{A} = \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2}$$

Amplitudinea oscilaţiei rezultante se obţine din formula generalizată a lui Pitagora:

$$A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$$

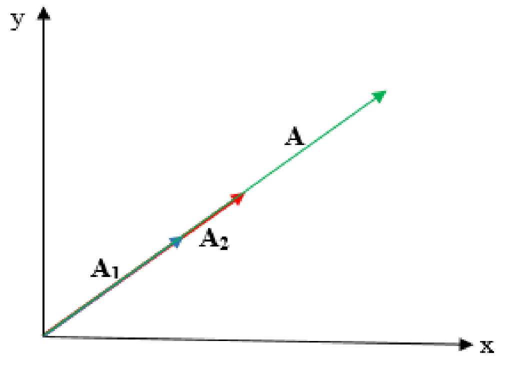
3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie

Faza iniţială a oscilaţiei rezultante este:

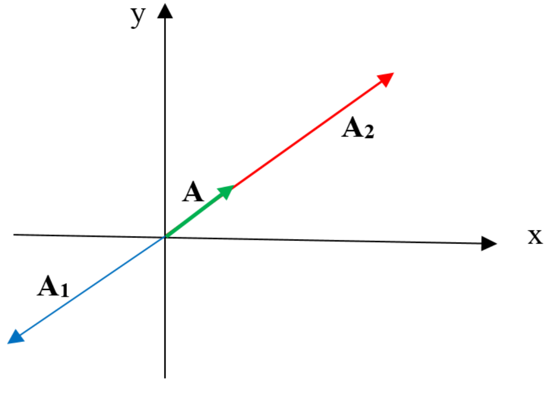
$$tg\varphi_0 = \frac{y}{x} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 sin\varphi_{01} + A_2 sin\varphi_{02}}{A_1 cos\varphi_{01} + A_2 cos\varphi_{02}}$$



Cazuri particulare:

a) Dacă $\Delta\varphi = 0 \rightarrow$ oscilatorii sunt in fază

$A = A_1 + A_2$ *amplitudinea rezultantă este maximă*



b) Daca $\Delta\varphi = \pi \rightarrow$ oscilatorii sunt în opoziţie de fază

$A = |A_1 - A_2|$ *amplitudinea rezultantă este minimă*

3. Oscilaţii mecanice

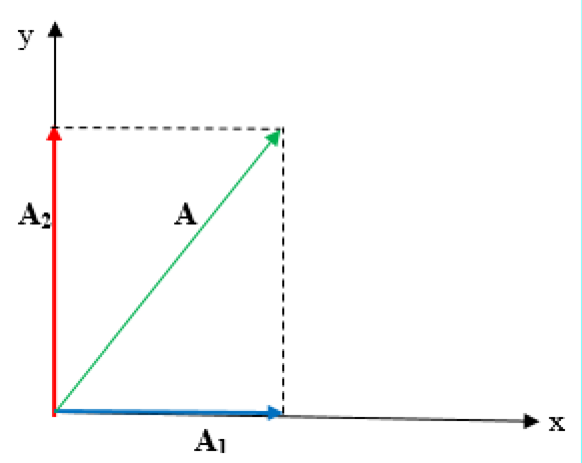
3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.1. Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie

Cazuri particulare:

c) Daca $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ oscilaţiile sunt în cuadratură de fază

$$A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2}$$

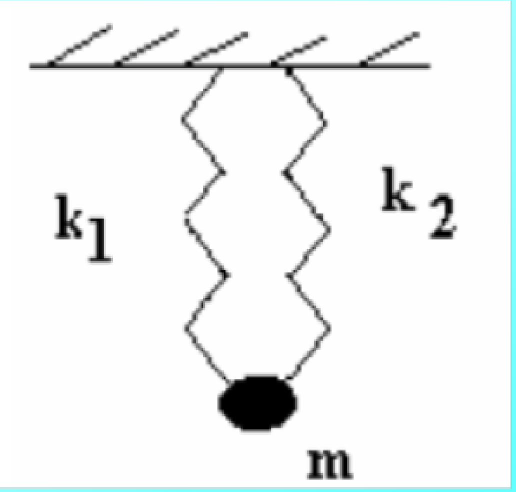


d) Dacă $\Delta\varphi = \pi$ si $A_1 = A_2$ oscilaţiile sunt în opoziţie de fază, oscilaţia se stinge

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită



Elongaţiile celor două oscilaţii armonice sunt:

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Elongaţia oscilaţiei rezultante este de forma:

$$y(t) = \mathrm{A}\sin(\omega t + \varphi)$$

Notăm: $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$ si $\omega_2 = \omega - \Delta\omega$

$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ pulsaţia cu care va oscila *y(t)*

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

Înlocuim pulsația obținută în ecuația celor două elongații $y_1(t)$ si $y_2(t)$

$$y_1(t) = A_1 \sin[(\omega + \Delta\omega)t + \varphi_1]$$

$$y_2(t) = A_2 \sin[(\omega - \Delta\omega)t + \varphi_2]$$

Rezultă: $y = y_1 + y_2 = A_1 \sin[\omega t + (\Delta\omega t + \varphi_1)] + A_2 \sin[\omega t + (-\Delta\omega t + \varphi_2)]$

Folosim: $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

Se obţine:

$$y = A_1\left[\sin\omega t\cos(\Delta\omega t+\varphi_1)+\cos\omega t\sin(\Delta\omega t+\varphi_1)\right]+$$
$$+A_2\left[\sin\omega t\cos(-\Delta\omega t+\varphi_2)+\cos\omega t\sin(-\Delta\omega t+\varphi_2)\right]$$

$$y = \left[A_1\cos(\Delta\omega t+\varphi_1)+A_2\cos(\Delta\omega t-\varphi_2)\right]\sin\omega t+$$
$$+\left[A_1\sin(\Delta\omega t+\varphi_1)-A_2\sin(+\Delta\omega t-\varphi_2)\right]\cos\omega t$$

dar $$y(t) = A\sin(\omega t+\varphi) = A\sin\omega t\cos\varphi + A\cos\omega t\sin\varphi$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

Se obţine:

(*)

$$A\cos\varphi = A_1\cos(\Delta\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\Delta\omega t - \varphi_2)$$

$$A\sin\varphi = A_1\sin(\Delta\omega t + \varphi_1) - A_2\sin(\Delta\omega t - \varphi_2)$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin(\Delta\omega t + \varphi_1) - A_2\sin(\Delta\omega t - \varphi_2)}{A_1\cos(\Delta\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\Delta\omega t - \varphi_2)}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

Ec. (*) se ridică la pătrat şi se adună

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\left[\cos(\Delta\omega t + \varphi_1)\cos(\Delta\omega t - \varphi_2) - \sin(\Delta\omega t + \varphi_1)\sin(\Delta\omega t - \varphi_2)\right]$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[(\Delta\omega t + \varphi_1) + (\Delta\omega t - \varphi_2)\right]$$

Iar $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$

Amplitudinea oscilaţiei rezultante este de forma:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[2\Delta\omega t + \varphi_1 - \varphi_2\right]$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

Cazuri particulare:

a) Dacă $\omega_1 = \omega_2$ atunci $\Delta\omega = 0$ amplitudinea si faza iniţială ale oscilaţiei rezultante sunt identice cu cele de la compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi pulsaţie.

b) Considerăm amplitudinile egale $A_1 = A_2 = A_0$ şi fazele iniţiale nule $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$A = A_0\sqrt{1+1+2\cos(2\Delta\omega t)} = 2A_0\cos(\Delta\omega t)$$

$$1+\cos(2a) = 2\cos^2 a$$

$$y = 2A_0\cos(\Delta\omega t)\sin(\omega t)$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$y = 2A_0\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţă diferită

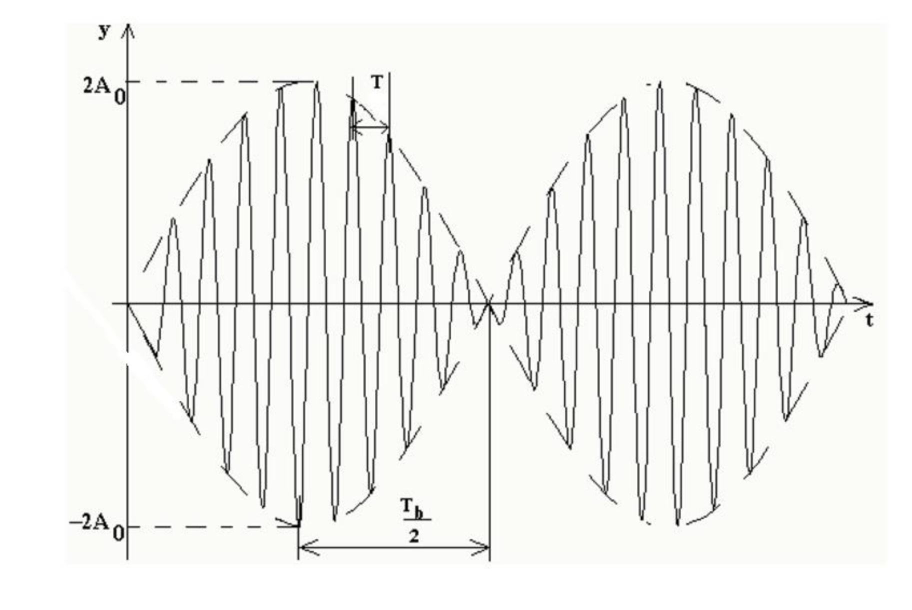
Fenomenul de bătăi:

$$T_b = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}$$

T_b - perioada bătăilor

$$\nu_b = \frac{1}{T_b}$$

frecventa de modulație



Graficul elongaţiei oscilaţiei rezultante în funcţie de timp

Perioada bătăilor este intervalul de timp între două treceri succesive ale amplitudinii rezultante prin valoarea minimă sau maximă.

3. Oscilaţii mecanice

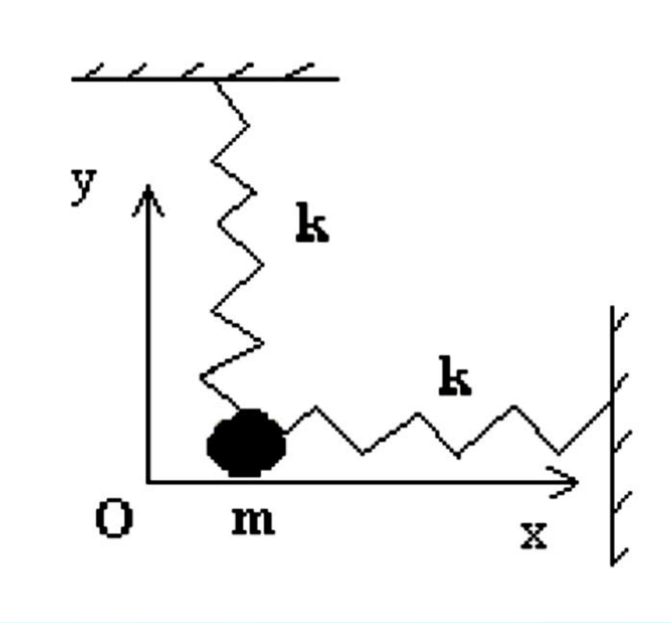
3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Ecuaţiile elongaţiilor pe cele două direcţii sunt de forma:

$$x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$



Ne propunem să determinăm ecuaţia traiectoriei punctului material.

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Se elimină timpul din cele 2 ec.

a) $$\frac{x(t)}{A_1} = \sin(\omega t + \varphi_1) = \sin\omega t \cos\varphi_1 + \cos\omega t \sin\varphi_1$$

b) $$\frac{y(t)}{A_2} = \sin(\omega t + \varphi_2) = \sin\omega t \cos\varphi_2 + \cos\omega t \sin\varphi_2$$

Înmulţim ecuaţia (a) cu *cos* φ_2, iar ecuaţia (b) cu *cos* φ_1. După aceea, le scădem şi dăm factor comun *cos* ωt si se obține:

(1*) $$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \cos\omega t(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_1)$$

Se stie: $$\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 = -\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Înmulţim ecuaţia (a) cu sinφ2, iar ecuaţia (b) cu sinφ1. După aceea, le scădem şi dăm factor comun sin ωt si se obține:

(2*) $$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_1 = \sin\omega t\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1\right)$$

Se stie: $$\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Se ridică la pătrat ecuaţiille (1*) şi (2*) şi se adună. Se obţine:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2+\left(\frac{y}{A_2}\right)^2-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)=$$
$$=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)\left(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t\right)$$

Adică: ec. (3) $$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2+\left(\frac{y}{A_2}\right)^2-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

Ecuaţia (3) constituie *ecuaţia traiectoriei punctului material* supus simultan la două mişcări oscilatorii armonice pe direcţii perpendiculare.

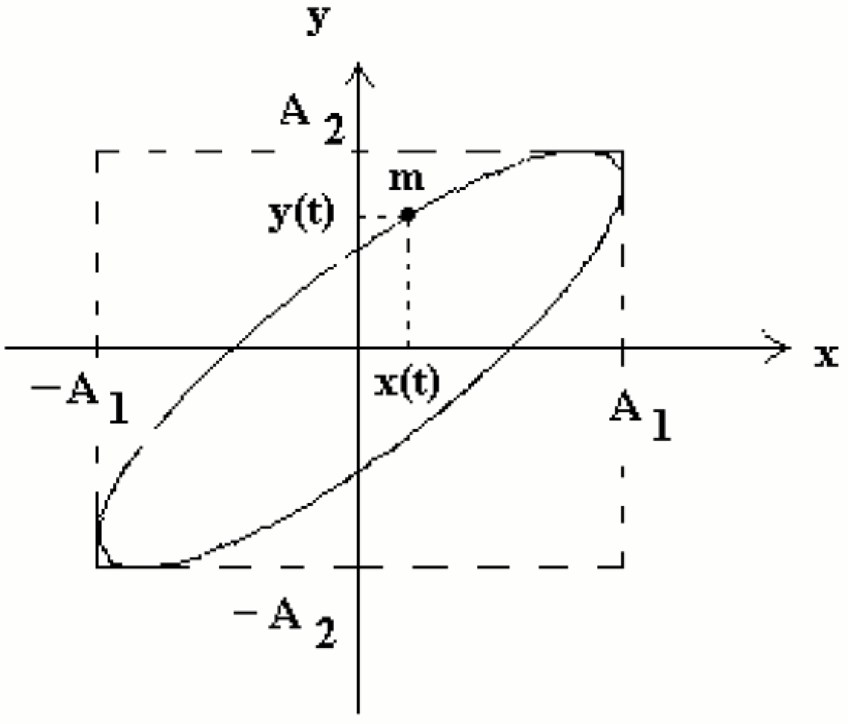
3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.2. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2+\left(\frac{y}{A_2}\right)^2-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

Ec. generalizată a elipsei



Traiectorie eliptică rotită faţă de axe

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Cazuri particulare

a) Dacă diferenţa fazelor iniţiale este un multiplu par de π, $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$, atunci oscilaţiile sunt în fază, iar ecuaţia traiectoriei devine:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

În acest caz, oscilaţia se desfăşoară de-a lungul unei drepte de ecuaţie:

$$y = \frac{A_2}{A_1}x$$

Amplitudinea mişcării oscilatorii:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Cazuri particulare

b) Dacă diferenţa fazelor iniţiale este un multiplu impar de π

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$ oscilaţiile sunt în opoziţie de fază, iar ecuaţia traiectoriei devine:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 + 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0 \longrightarrow \left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

Oscilaţia se desfăşoară de-a lungul unei dreapte (pe cea de-a doua diagonală) de ecuaţie:

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x$$

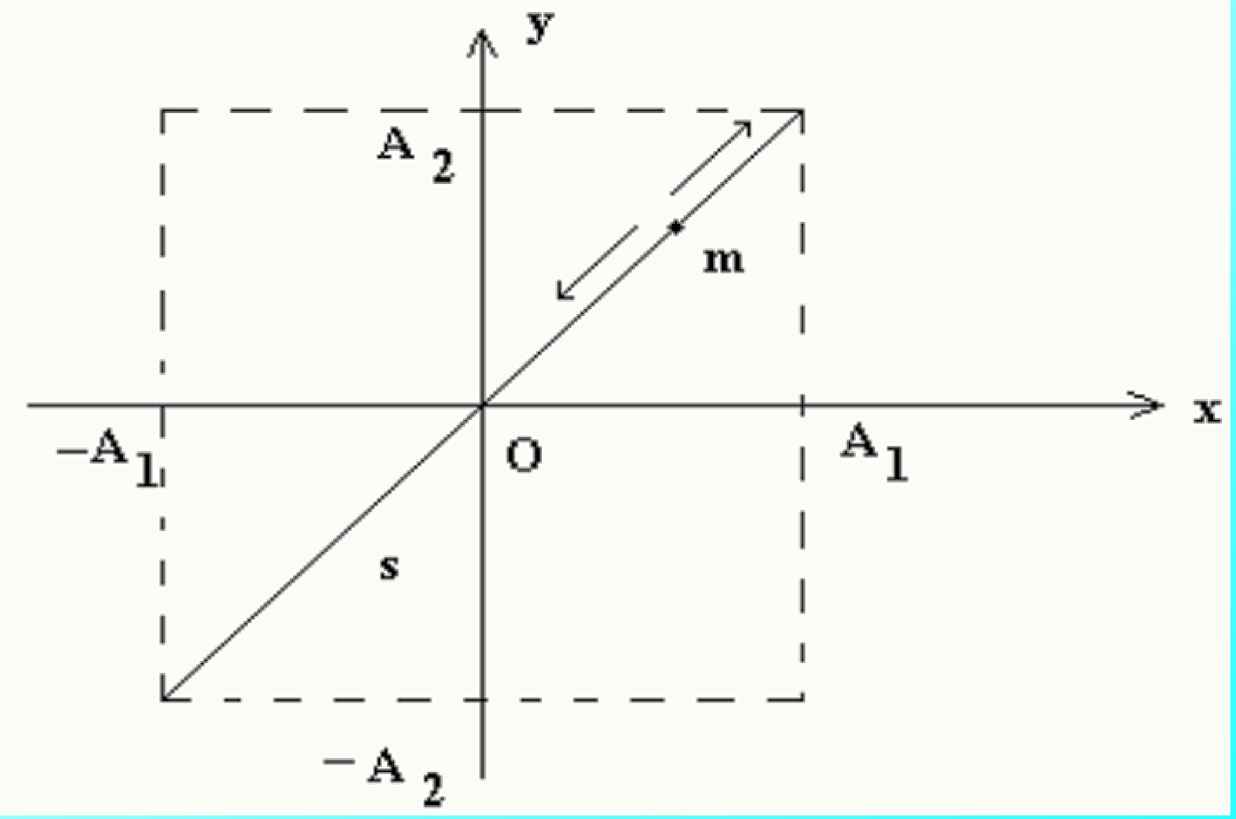
3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Ec. elongaţiei mişării rezultante:

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi_1)$$



3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

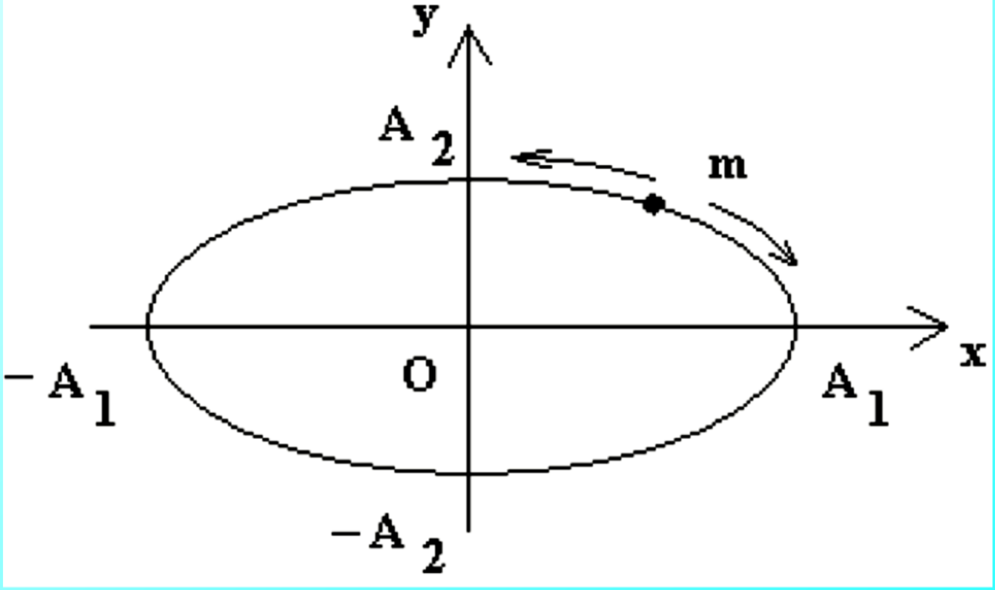
3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Cazuri particulare

c) Dacă diferenţa fazelor iniţiale este $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

⇒ oscilaţiile sunt în cuadratură

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 = 1$$



Elipsa care descrie traiectoria particulei nu mai este rotită faţă de axele de coordonate

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

3.3.3. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Cazuri particulare

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

d) Dacă $A_1 = A_2 = A_0$ şi sunt în cuadratură de fază

⇒ ecuaţia traiectoriei punctului material devine:

$$\left(\frac{x}{A_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_0}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = A_0^2$$

Mişcarea punctului material este circulară, cercul având raza A_0.

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

Aplicaţie: Un corp cu masă m=10 kg este legat de două resorturi identice fiecare având constanta de elasticitate k=2000N/m. Se deplasează corpul cu distanţa A=8 cm faţă de poziţia de echilibru şi i se dă drumul. Considerând ca origine a timpului momentul când i se dă drumul şi ca origine a coordonatelor poziţia de echilibru, neglijând frecările, să se calculeze:

a) Ecuaţia de mişcare a corpului;

b) Viteza şi acceleraţia maximă a corpului;

c) Energia cinetică şi potenţială în punctul y(t)=4cm;

3. Oscilaţii mecanice

3.3. Compunerea mişcărilor oscilatorii armonice

<u>Aplicaţie:</u>

a) $y(t) = 0.08\sin(20t + \frac{\pi}{2})$ (m)

b) $v_{max} = A\omega = 1{,}6$ (m/s)

$a_{max} = \omega^2 A = 32$ (m/s^2)

c) $E_c = 9{,}6$ (J) $E_p = 3{,}2$ (J)

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- Definească oscilaţiile, precizând mărimile care le caracterizează;
- Determine ecuaţia mişcării oscilatorului armonic ideal;
- Definească energia cinetică, potenţială şi mecanică pentru un oscilator ideal.
- Enunţe teorema conservării energiei mecanice pentru oscilaţiile armonice ideale.
- Să compună oscilaţiile paralele de aceeaşi pulsaţie.
- Să utilizeze metoda fazorială.
- Să definească perioada bătăilor.
- Să compună oscilaţiile paralele de frecvenţă diferită.
- Să compună oscilaţiile perpendiculare.

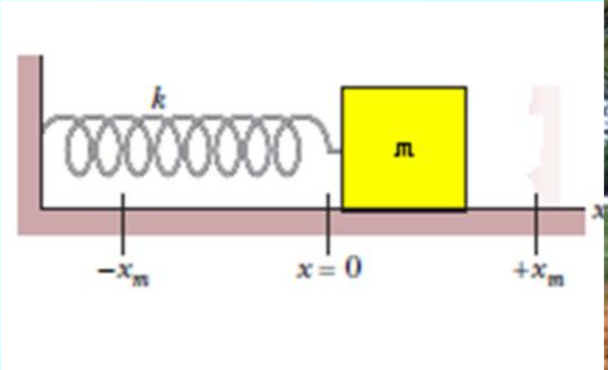
BIBLIOGRAFIE

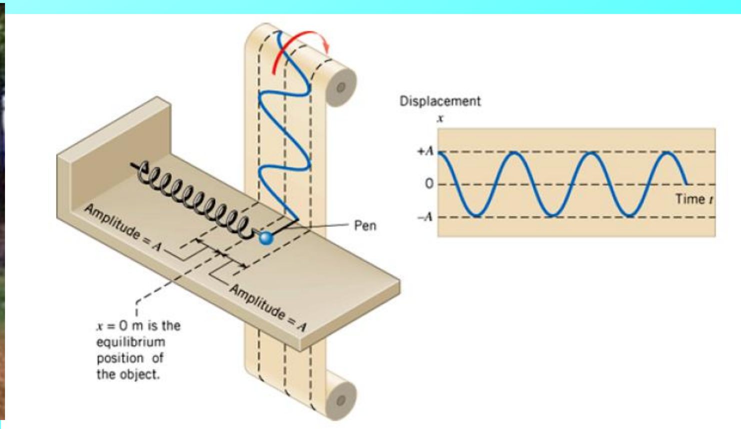
- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, in format electronic, pentru studenţii din învăţământul tehnic din Timişoara, F. Barvinschi, site: http://www.et.upt.ro/etf/index.php?link=2&sublink=1203&pag=1&lang=ro
- **Fizica. Elemente fundamenale pentru ingineri,** N. Pop, Ed. Politehnica, 2013;
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Editura Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008.
- Fizică, F. W. Sears, M. Zemansky, H. Young, Ed. Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1983.

FIZICĂ PENTRU INGINERI

Prezentat de

Trif Delia





Universitatea Politehnica Timişoara, România

CURSUL 7

2020-2021

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

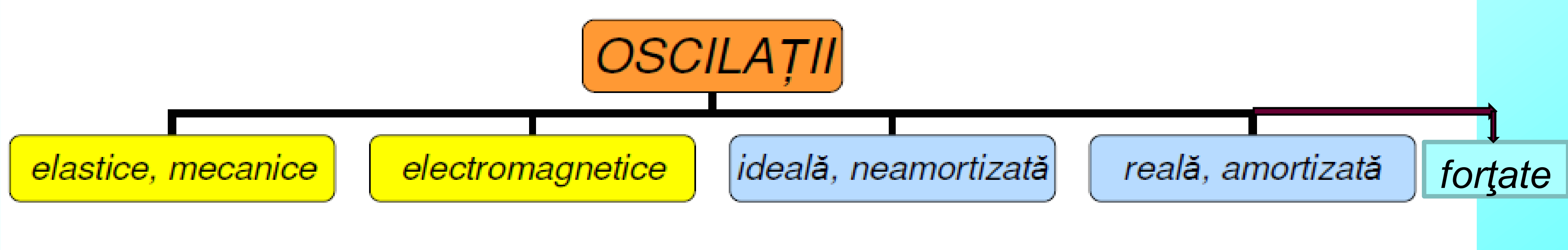
3.5. Analogie între oscilaţiile mecanice şi cele electromagnetice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa.

3.7. Consideraţii energetice

3. Oscilaţii mecanice

3.1. Noţiuni generale



Oscilaţia ideală – energia totală se conservă

<u>*Oscilaţia amortizată* – energia totală se consumă în timp</u>

Oscilaţia forţată – se furnizează energie din afara sistemului, pentru compensarea pierderilor

3. Oscilaţii mecanice

3.2. Mişcarea oscilatorie armonică ideală

Elongaţia mişcării (m)

Faza oscilaţiei (rad)

$$y(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Amplitudinea mişcării (m)

Pulsaţia proprie a oscilatorului

Faza iniţială a mişcării (rad)

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată (reală)

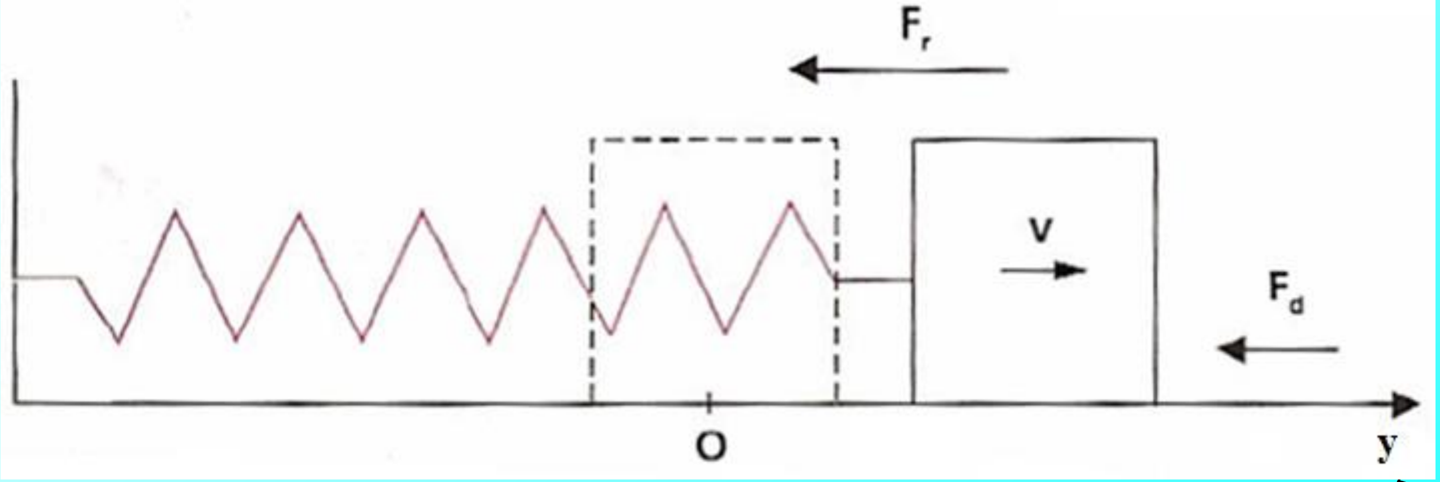
- Oscilator mecanic: resort elastic (k) şi un PM de masă m
- Datorită frecărilor, amplitudinea scade în timp. $A \Rightarrow 0$

➢ Forţa disipativă F_d este opusă vitezei şi proporţională cu ea:

$$F_d = -\rho\, v$$

ρ este coeficientul de rezistenta mecanica

$$[\rho]_{SI} = 1\frac{kg}{s}$$



3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

Legea a II-a a dinamicii: $$ma = -ky - \rho v$$

Notăm : $2\beta = \frac{\rho}{m}$ Coeficientul de amortizare $[\beta]_{SI} = s^{-1}$

Ecuaţia diferenţială a mişcării: $$\frac{d^2y}{dt_2} + 2\beta\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$$

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

Căutăm soluţii de forma: $y(t) = e^{rt}$

Ec. caracteristică a ecuaţiei diferenţiale: $r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$

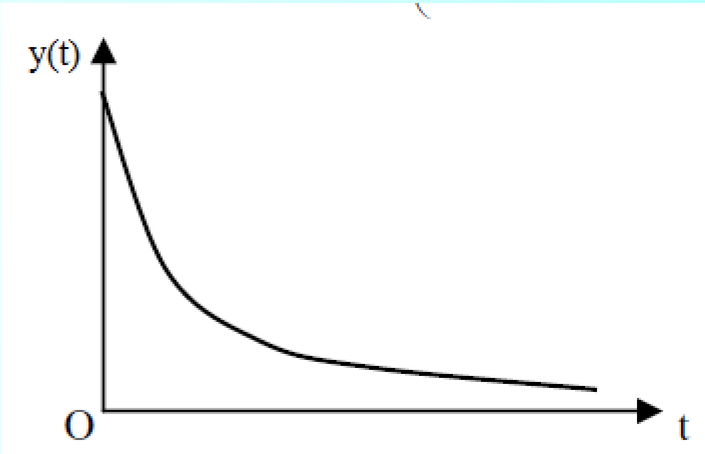
Soluţiile ecuaţiei caracteristice: $r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

<u>Cazuri particulare</u>



a) Dacă $\boldsymbol{\beta > \omega_0}$ $\Rightarrow \beta^2 - \omega_0^2 > \mathbf{0}$
(forţa de frecare este mare) $\exists\, r_1$ şi $r_2 \Rightarrow$

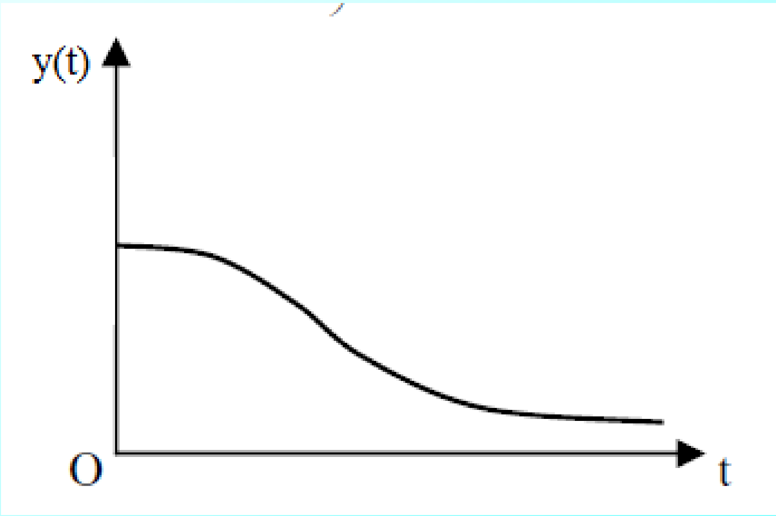
Elongaţia mişcării amortizate:

$$y(t) = C_1 e^{-\beta t} e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}\, t} + C_2 e^{-\beta t} e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}\, t}$$

C_1, C_2 – constante de integrare

- Mişcarea este neperiodică, iar elongaţia tinde la zero, când timpul tinde la infinit, fără ca punctul material să oscileze.

3. Oscilaţii mecanice



3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

Cazuri particulare

b) Dacă $\boldsymbol{\beta = \omega_0}$ $\quad \Rightarrow \quad r = -\beta$

Elongaţia mişcării amortizate:

C_1, C_2 – constante de integrare

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\beta t}$$

- Mişcarea este neperiodică, numită şi *mişcare aperiodică critică*.
- Elongaţia, având un singur maxim, tinde asimptotic la zero, dar fără ca punctul material să efectueze oscilaţii elastice.

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

<u>Cazuri particulare</u>

c) Dacă $\boldsymbol{\beta < \omega_0}$ (forţele de amortizare sunt slabe)

Notăm: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ pseudo-*pulsaţia oscilatorului amortizat*

⇒ ec. caracteristică are soluţii complexe: $r_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega$

Ec. elongaţiei oscilatorului amortizat:

$$y(t) = C_1 e^{-\beta t} e^{i \omega t} + C_2 e^{-\beta t} e^{-i \omega t}$$

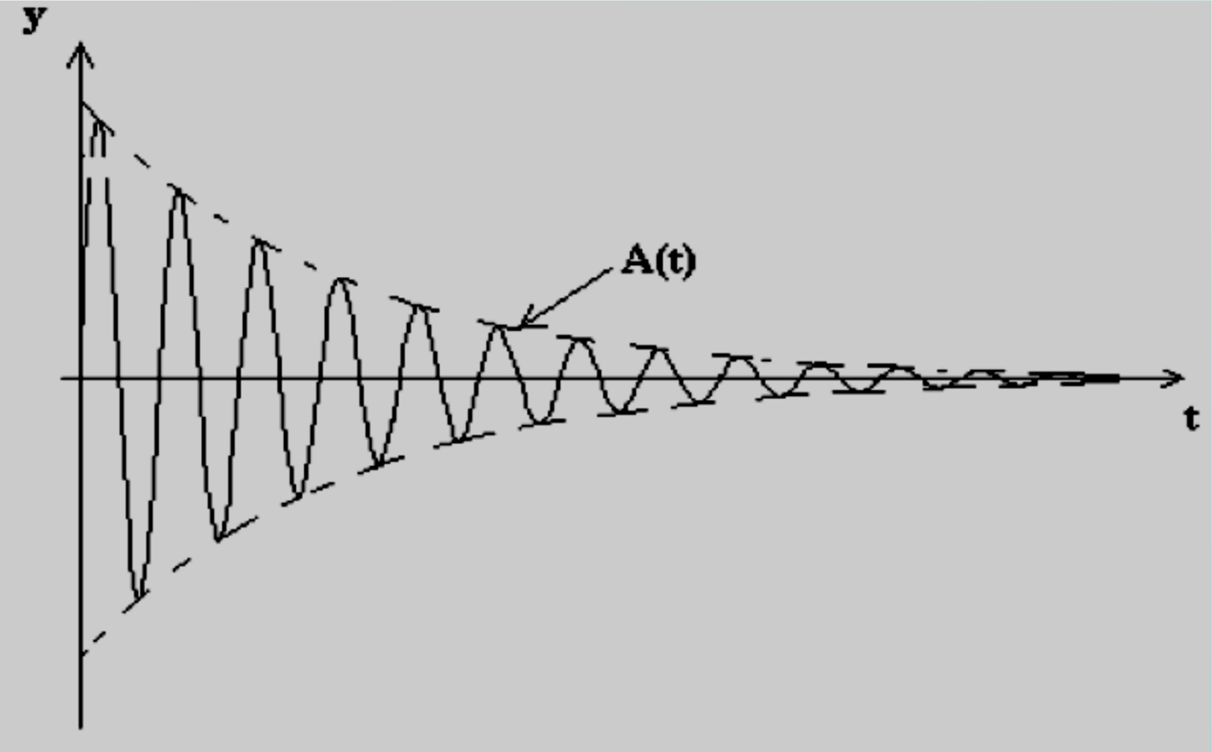
Formulele Euler: $e^{i\varphi} = cos\varphi + i\, sin\varphi$

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

Cazuri particulare: **c) Dacă $\boldsymbol{\beta < \omega_0}$**

Elongaţia oscilatorului armonic amortizat: $y(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$



Elongaţia şi amplitudinea oscilatorului armonic amortizat în funcţie de timp.

3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

Cazuri particulare **c) Dacă $\beta < \omega_0$**

Descreşterea amplitudinii mişcării oscilatorii amortizate este caracterizată de mărimea numită ***decrement logaritmic***.

- Decrementul logaritmic este egal cu logaritmul natural al raportului dintre două amplitudini succesive:

$$\Delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

3. Oscilaţii mecanice

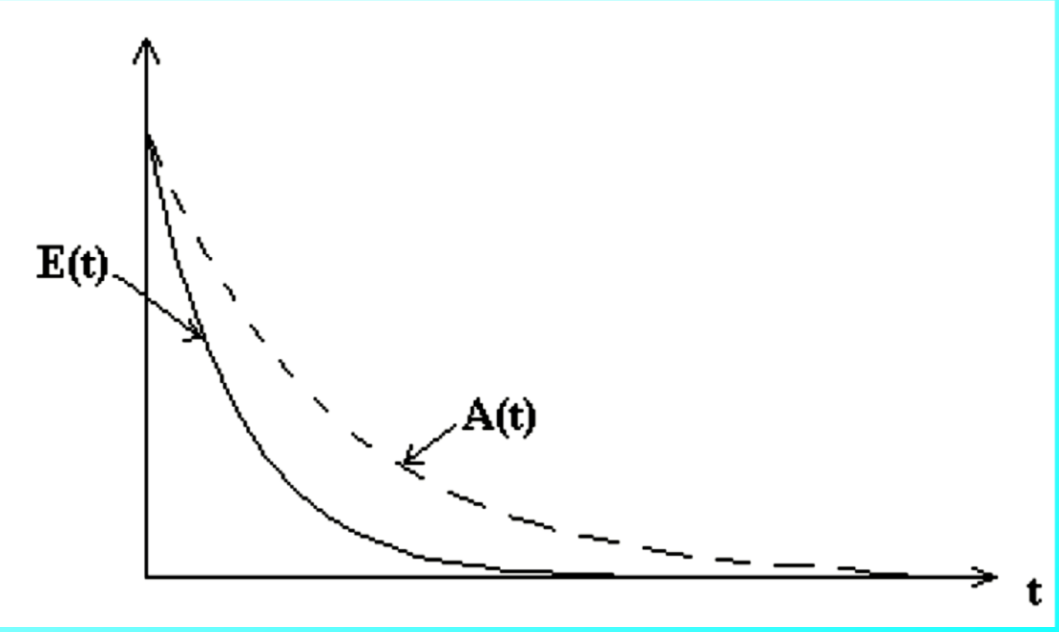
3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

Viteza oscilatorului armonic amortizat:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -A_0\beta e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi) + A_0\omega e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Energia totală a oscilatorului armonic amortizat:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\beta t}$$



3. Oscilaţii mecanice

3.4. Mişcarea oscilatorie amortizată

- Timpul caracteristic pentru scăderea energiei mecanice a oscilatorului amortizat se numeşte *timp de relaxare*, notat τ

- Timpul de relaxare τ este intervalul de timp după care energia mecanică scade de e = 2.718 ori (*ln e = 1*):

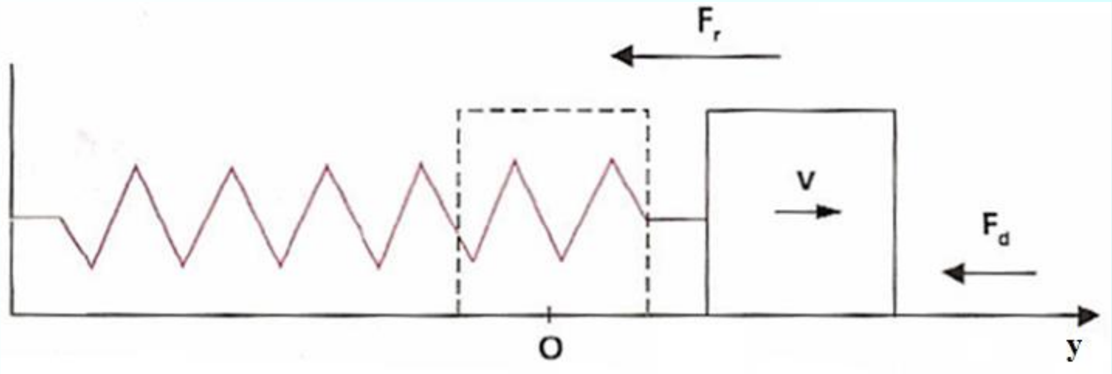
$$\frac{E(t)}{E(t+\tau)} = 2.718 = e \Rightarrow \tau = \frac{1}{2\beta} = \frac{m}{\rho}$$

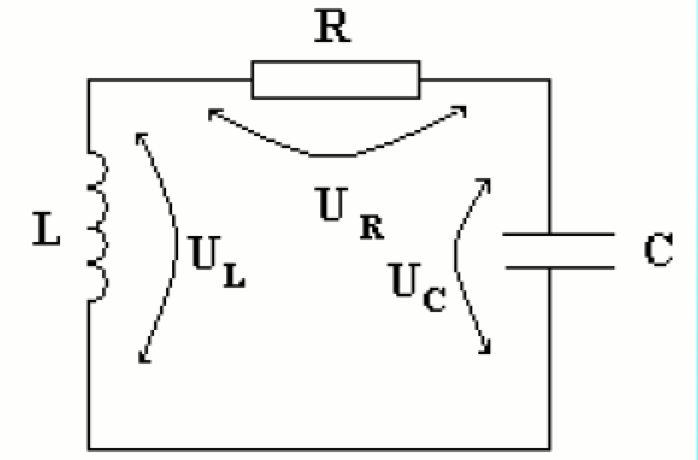
- Perioada oscilaţiilor amortizate:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} > T_0$$

3. Oscilaţii mecanice

3.5. Analogie între oscilaţiile mecanice şi cele electromagnetice





Ambele sisteme suferă oscilaţii amortizate

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\rho\frac{dy}{dt}+ky=0$$

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0$$

$$y(t)=A_0e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$i(t)=A_0\,e^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.5. Analogie între oscilaţiile mecanice şi cele electromagnetice

Oscilații electromagnetice		**Oscilații elastice**	
Mărimea electrică	*Simbol*	*Mărimea mecanică*	*Simbol*
Intensitatea istantanee a curentului electric	$i\,(t)$	Elongația mișcării oscilatorii armonice	$y(t)$
Inductanța bobinei	L	Masa oscilatorului elastic	m
Rezistența electrică	R	Rezistența mecanică	ρ
Inversul capacității electrice	$\frac{1}{C}$	Constanta elestică	k
Coeficientul de amortizare	$\frac{R}{L} = 2\beta$	Coeficientul de amortizare	$\frac{\rho}{m} = 2\beta$
Pulsația proprie de oscilație	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	Pulsația proprie de oscilație	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Factorul de calitate	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	Factorul de calitate	$Q = \frac{1}{\rho}\sqrt{mk}$

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate (întreţinute)

Pentru a compensa pierderile de energie datorate forţelor disipative, asupra oscilatorului trebuie acţionat cu o forţă perturbatoare exterioară.

- Dacă forţa perturbatoare exterioară este continuă, oscilaţiile se numesc *oscilaţii întreţinute*, de exemplu oscilaţiile unui ceas.

- Dacă forţa perturbatoare exterioară este periodică, oscilatorul va executa un nou tip de oscilaţii numite *oscilaţii forţate*, de exemplu legănarea într-un balansoar, sau vibraţiile geamurilor de la ferestre când pe stradă trec utilaje foarte grele.

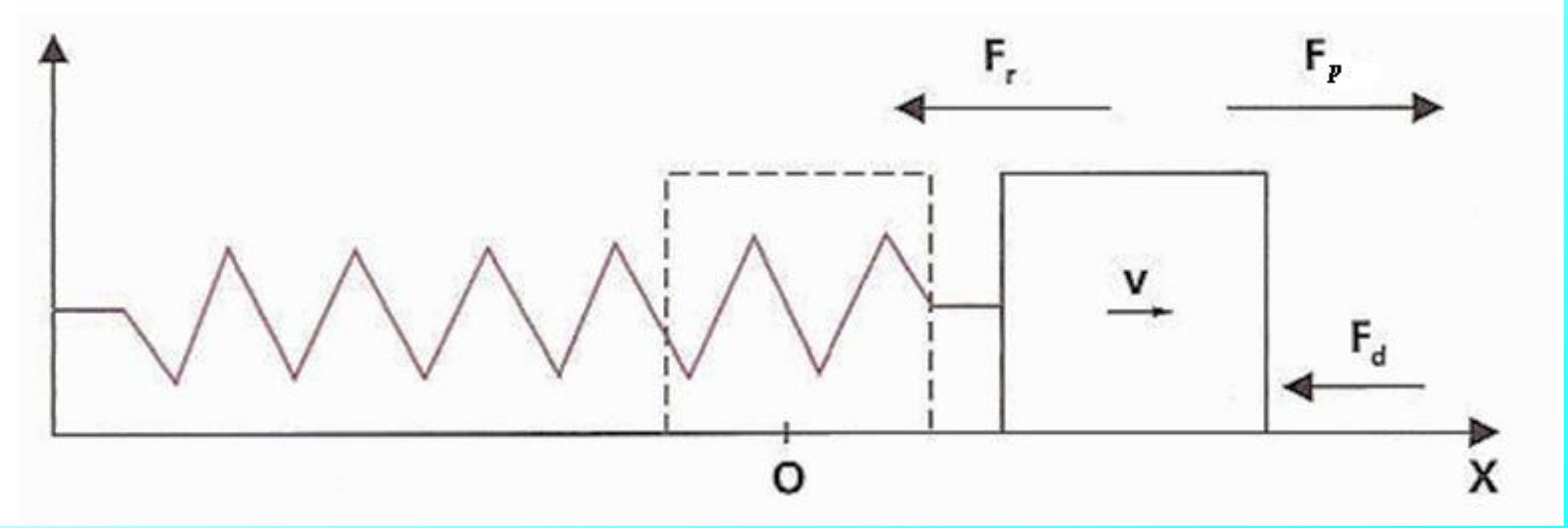
3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate (întreţinute)

Se aplica forţe exterioare de forțare (perturbatoare) ⇒ oscilații “forțate”

- Oscilator mecanic (resort + PM) care oscilează forţat sub acţiunea unei forţe exterioare perturbatoare de tip armonic:

$$F_p = F_0 \sin(\omega_p t)$$



3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate (întreţinute)

Ecuaţia de mişcare oscilatorie forţată: $m\,a = -k\,y - \rho\,v + F_0 \sin\left(\omega_p t\right)$

Ecuaţia de mişcare este o ec. diferenţială neomogenă de ordinul II:

$$\ddot{y} + 2\beta\,\dot{y} + +\omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\sin\omega_p t$$

Experienţa arată că o mişcare periodică întreţinută prezintă un *regim tranzitoriu*, după trecerea căruia se instalează *regimul permanent*. Regimul tranzitoriu este de scurtă durată, iar regimul permanent se manifestă prin oscilaţii întreţinute.

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate (întreţinute)

Soluţia: $y(t) = y_o(t) + y_p(t)$

$y_o(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$ ⇒ regim tranzitoriu (sol. omogenă)

$y_p(t) = A_p \sin(\omega_p t - \varphi)$ ⇒ regim permanent (sol. neomogenă)

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate (întreţinute)

Amplitudinea şi faza iniţială oscilaţiilor întreţinute:

$$A_p = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + (2\beta\omega_p)^2}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega_p}{(\omega_0^2 - \omega_p^2)}$$

➢ Amplitudinea regimului permanent:

- nu depinde de timp;
- depinde de pulsaţia forţei care o întreţine.

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa

Rezonanţa este fenomenul fizic de apariţie a maximului amplitudinii oscilaţiei întreţinute.

❑ Condiţia de maxim a unei funcţii: *anularea derivatei de ordinul 1*.

$$\frac{dA_p}{d\omega_p} = 0$$

$$A_{p,rez} = \frac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

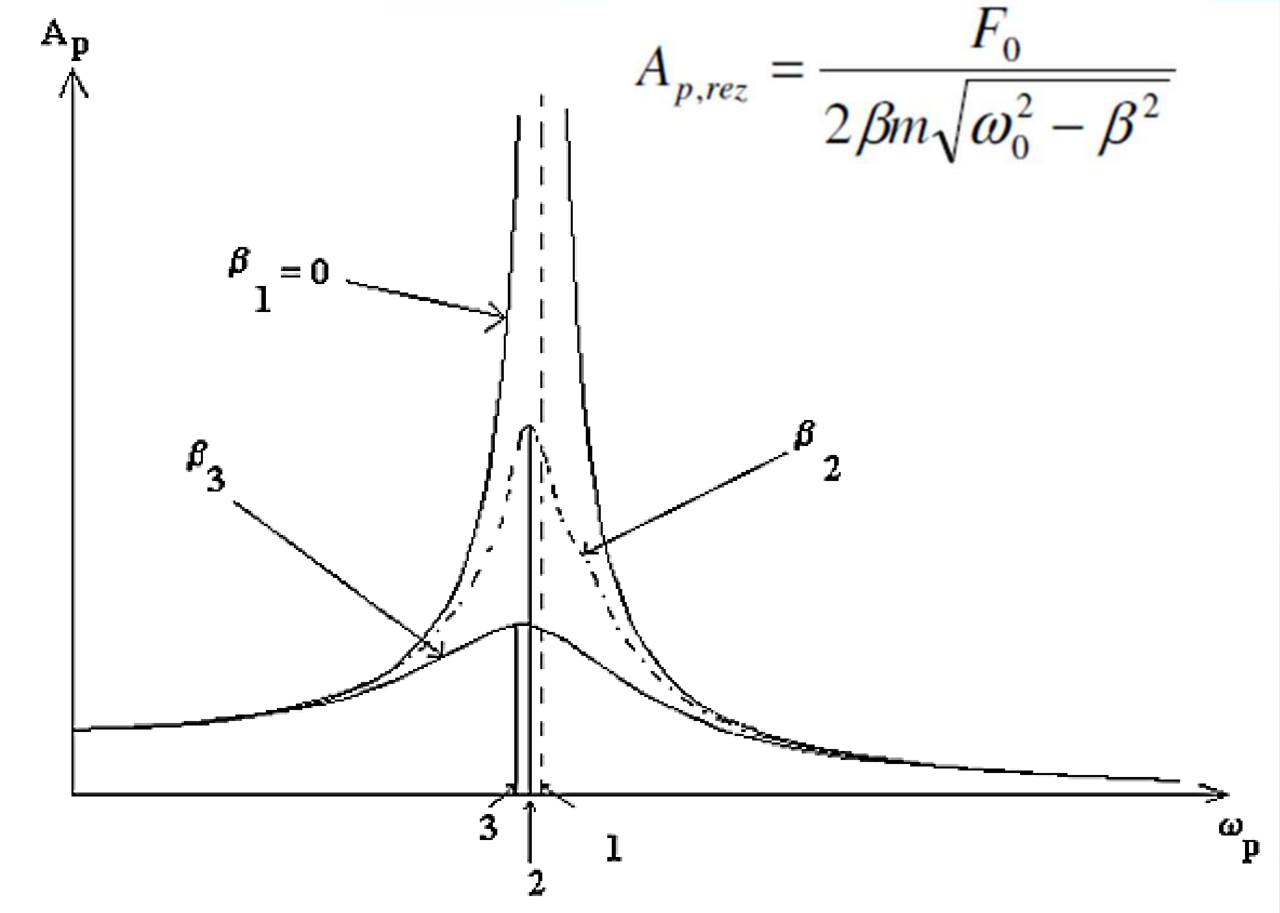
Amplitudinea de rezonanţă

Notăm: $\omega_p = \omega_{rez} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$ pulsaţia de rezonanţă

http://www.scientia.ro/stiinta-la-minut/56-fizica-distractiva/808-poate-vocea-umana-sa-sparga-un-pahar.html

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa



1. $\beta_1 = 0$

2. $\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_2^2}$

3. $\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_3^2}$

$\beta_3 > \beta_2$

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa

In anul 1985, clădirile de înalţime medie s-au prăbuşit in Mexico City, în urma unui cutremur cu epicentrul la 350 km în largul coastei mexicane.
Clădirile înalte şi cele mici au rămas intacte. Înălțimea clădirii este o măsură a frecvenței de rezonanță a unei clădiri.

In general, clădirile din zonele seismice sunt construite, astfel încât să nu se producă fenomenul de rezonanța. Atunci cand se contruieste o cladire se tine cont de frecvența produsa de undele seismice.

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa

Din cauza vibrațiilor s-a produs fenomenul de rezonanță, care a distrus podul Tacoma Narrows din statul Washington,în 1940. Vântul nu a fost deosebit de puternic, dar vibraţiile generate de el podului au avut frecvența egală cu cea a podului.

3. Oscilaţii mecanice

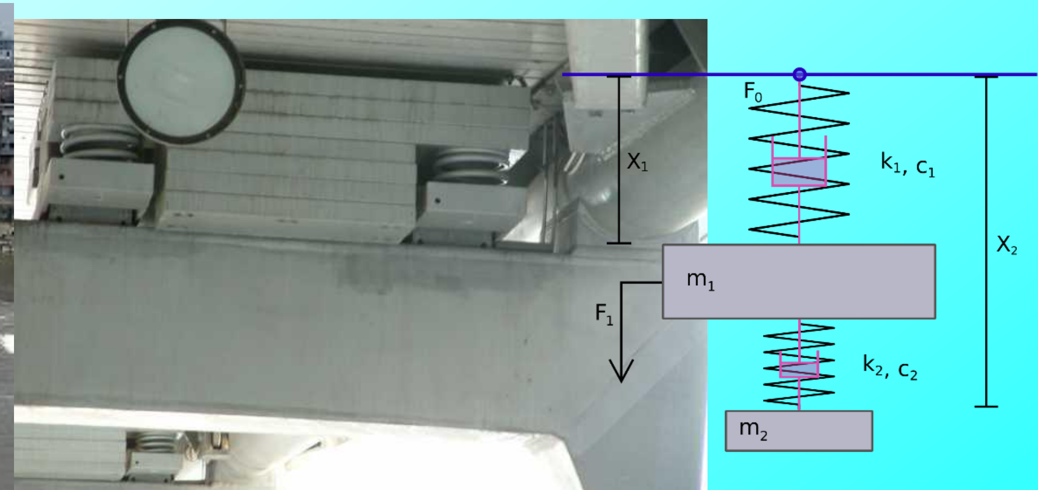
3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa

In 1831 podul Broughton s-a prăbușit, din cauza marșului soldaților. Frecvenţa proprie de oscilație a podului a coincis cu frecvenţa imprimată de paşii cadențați, astfel s-a produs fenomenul de rezonanţă. Amplitudinea devine maximă, iar transferul de energie care se produce este maxim.

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa

Millenium Bridge din Londra a fost dat in folosinţă in 2000. Podul din oţel destinat exclusiv circulaţiei pietonilor a avut o problema, atunci când era traversat de prea multă lume se misca destul de tare. Podul Mileniului a fost redeschis în februarie 2002, după ce proiectanţii au adaugat dispozitive de atenuare a vibraţiilor.

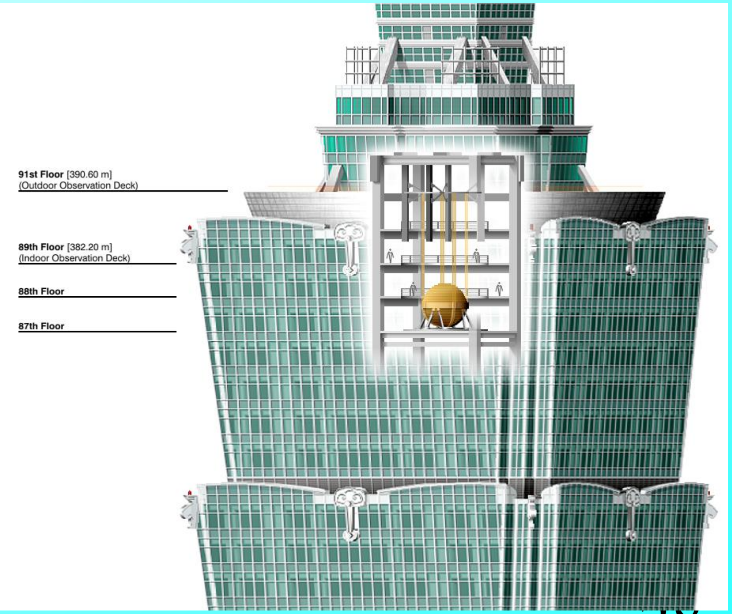


tuned mass damper

3. Oscilaţii mecanice

3.6. Oscilaţii forţate. Rezonanţa

In construirea unor structuri: poduri, turnuri și clădiri, ca o contramăsură, amortizoare pot fi amplasate ca să absoarbă frecvențele rezonante și astfel să disipeze energia acumulată. Taipei 101, un zgârie-nori de 509 metri se bazează pe un pendul de 660 de tone ca să amortizeze rezonanța.



3. Oscilaţii mecanice

3.7. Consideraţii energetice ale oscilaţiilor forţate

a) Puterea instantanee absorbită de sistemul oscilant întreţinut:

$$P_{abs}(t) = \frac{dL_{abs}}{dt} = F_p \frac{dy_p}{dt} = F_0 \omega_p A_p \sin \omega_p t \cdot \cos(\omega_p t + \varphi_p)$$

b) Puterea medie absorbită în decursul unei perioade:

$$\langle P_{abs} \rangle = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P_{abs}(t) dt = \beta \frac{F_0^2}{m} \frac{\omega_p^2}{\left(\omega_0^2 - \omega_p^2\right)^2 + 4\beta^2 \omega_p^2}$$

3. Oscilaţii mecanice

3.7. Consideraţii energetice ale oscilaţiilor forţate

c) Puterea instantanee disipată sub formă de căldură de către forţa de frecare:

$$P_{dis}(t) = \frac{dL_{dis}}{dt} = -F_r \frac{dy_p}{dt} = 2m\beta\left(\frac{dy_p}{dt}\right)^2$$

d) Puterea medie disipată sub formă de căldură într-o perioada:

$$\langle P_d(t)\rangle = \overline{P_d} = 2\beta m A_p^2 \omega_p^2 \frac{1}{T_p}\int_o^{T_p} \cos^2(\omega_p t - \varphi)dt = \beta m A_p^2 \omega_p^2$$

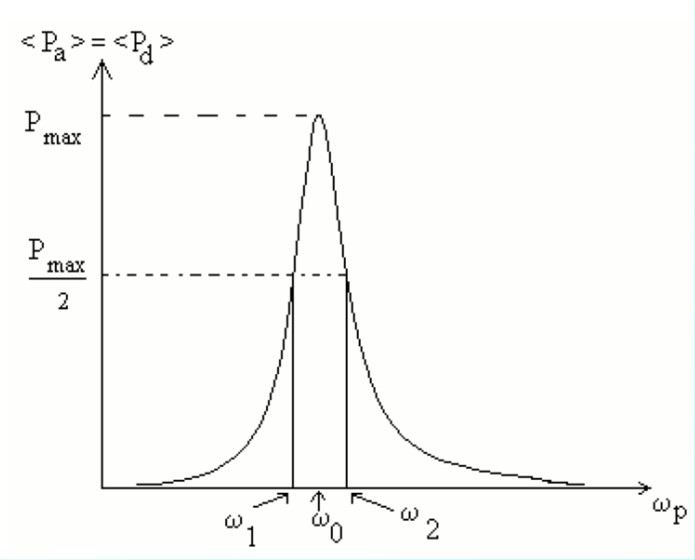
3. Oscilaţii mecanice

3.7. Consideraţii energetice ale oscilaţiilor forţate

e) Puterea maximă

Pentru $\omega_p = \omega_0$ puterea medie absorbita este egala cu puterea medie disipata si egale cu *puterea maxima* atinsa:

$$P_{max} = \frac{F_0^2}{4\beta m}$$



3. Oscilaţii mecanice

3.7. Consideraţii energetice ale oscilaţiilor forţate

e) Puterea efectivă

$$P_{ef} = \frac{P_{max}}{2} = \frac{F_0^2}{8\beta m}$$

$$\Delta\omega_{rex} = 2\beta = \frac{1}{\tau}$$

f) Energia medie

$$\langle E \rangle = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle = \frac{m}{2}\langle v^2 \rangle + \frac{k}{2}\langle x^2 \rangle = \frac{m}{4}\left(\omega_0^2 + \omega_p^2\right) A_p^2$$

g) Factorul de calitate

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{rez}} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

După parcurgerea acestui curs studentul trebuie să:

- Cunoască diferenţele dintre oscilaţiile ideale, amortizate şi forţate;
- Determine ecuaţia mişcării oscilatorului amortizat;
- Determine amplitudinea şi faza iniţială în cazul oscilatorului amortizat.
- Definească energia totală a oscilatorului armonic amortizat.
- Definească decrementul logaritmic.
- Definească timpul de relaxare.
- Cunoască analogia dintre oscilaţiile mecanice şi cele electromagnetice.
- Determine amplitudinea şi faza iniţială în cazul oscilaţiilor forţate.
- Definească fenomenul de rezonanţă.
- Cunoască consideraţiile energetice ale oscilaţiilor forţate.

BIBLIOGRAFIE

- **Fizica,** F. W.Sears, Zemansky , H. D.Young, Ed. Didactica si Pedagogica, 1983;
- **Fizica Elemente Fundamentale**, M. Cristea, F. Barvinschi, I. Luminosu, D. Popov, I. Damian, I. Zaharie, Ed. Politehnica, 2009;
- **Curs de Fizică generală**, F. Barvinschi, Ed. Orizonturi Universitare, 2016;
- **Elemente de fizică generală,** D. Popov, I. Damian, Ed. Politehnica, 2014;
- **Fizica între teamă si respect. Fundamentele începătorului**, V. Dorobantu, S. Pretorian, Ed. Politehnica, 2009.
- **Fizica. Teorie, aplicatii, autoevaluare**, I. Luminosu, V. Chiritoui, N. Pop, M. Costache, Ed. Politehnica, 2009.
- **Physics for Scientists and Engineers** - Sixth Edition, Paul Tipler, Gene Mosca, Ed. W.H. Freeman and Company, 2008
- **PHYSICS for Scientist and Engineers with Modern Physics** – Seventh Edition, R. Serway, J. Jewett, ed. Thomson Brooks/Cole, 2008.
- **Sears & Zemansky's University Physics: with Modern Physics**, 13th Edition, H. Young, R. Freedman, ed. Pearson, 2012