Seminar Nr. 9

Limita şi continuitatea funcţiilor de mai multe variabile

Probleme rezolvate

1. *Utilizând teorema lui Heine, să se arate că următoarele funcţii nu au limită în origine:*

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0).$

ii) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}\,;$

iii) $f(x,y) = \sin \dfrac{1}{x+y}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}\,.$

Soluţie. **i)** Fie şirurile de puncte $P_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, respectiv $P_n'\left(\frac{3}{n}, \frac{2}{n}\right)$ convergente la $(0,0)$. Pentru aceste şiruri obţinem

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^2}} = -\frac{1}{4}, \\
\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{3}{n}, \frac{2}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{31}{n^2}} = \frac{1}{31},
\end{aligned}$$

de unde conform teoremei lui Heine pentriu limită, rezultă că funcţia f nu are limită în origine.

ii) Se consideră şirurile de puncte $P_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ şi $P'_n\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$ convergente la $(0,0)$. Pentru aceste şiruri avem:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2},\\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Rezultă conform teoremei lui Heine că f nu are limită în origine.

iii) Se consideră şirurile de puncte $P_n\left(\frac{1}{2n\pi},\frac{1}{2n\pi}\right)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$ şi $P'_n\left(\frac{1}{(2n+1)\pi},\frac{1}{(2n+1)\pi}\right)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$. Pentru aceste şiruri avem:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(P_n) &= \lim_{n\to\infty}\sin n\pi = 0\\ \lim_{n\to\infty} f(P'_n) &= \lim_{n\to\infty}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n.\end{aligned}$$

Rezultă că funcţia considerată nu are limită în origine.

2. *Considerând diverse curbe ce trec prin origine (drepte, parabole) să se arate că următoarele funcţii nu au limită în origine:*

i) $f(x,y)=\dfrac{2x^3y^2}{3x^6+4y^4}$; **ii)** $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; **iii)** $f(x,y)=\dfrac{x+(x-y)^2}{3x+y-(x+y)^2}$.

Soluţie. **i)** Dacă se alege $A_m=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y=mx^{3/2},m\in\mathbb{R}\}$, se obţine:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\in A_m} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=mx^{3/2}}}\frac{2x^3y^2}{3x^6+4y^4}=\lim_{x\to0}\frac{2m^2x^6}{3x^6+4m^4x^6}=\frac{2m^2}{3+4m^4}.$$

Deoarece limita depinde de $m\in\mathbb{R}$, rezultă că f nu are limită în $(0,0)$ relativă la mulţimea A_m deci nu are limită globală în origine.

ii) Considerăm mulţimea $A_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = mx, m \in \mathbb{R}\}$. Atunci rezultă că limita lui f în punctul $(0,0)$ relativă la această mulţime este

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\in A_m} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2} \in \mathbb{R}$$

Deoarece limita depinde de modul cum punctul $(x, mx)\,, m \in \mathbb{R}$ "se apropie" de origine, adică de direcţia m, rezultă că funcţia considerată nu are limită în origine.

iii) Alegând dreptele $y = mx, m \in \mathbb{R}$ putem scrie

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x+(x-y)^2}{3x+y-(x+y)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x+(x-mx)^2}{3x+mx-(x+mx)^2}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x\left[1+(1-m)^2 x\right]}{x\left[3+m-(1+m)^2 x\right]} = \frac{1}{m+3}.\end{aligned}$$

Deoarece limita depinde de $m \in \mathbb{R}$, rezultă că funcţia f nu are limită în $(0,0)$.

3. *Calculaţi:*
i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin^2(2x)}{x^2+3y^2}$, **ii)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+3x^3y^4)^{\frac{1}{x^4+y^2}}$, **iii)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^4+y^4)}{2(x^2+y^2)}$.

Soluţie. **i)** $\left|\frac{y\sin^2(2x)}{x^2+3y^2}\right| \leq \left|\frac{4x^2y}{x^2+3y^2}\right| = 4|y| \left|\frac{x^2}{x^2+3y^2}\right| \leq 4|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$

Conform criteriului majorării rezultă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin^2(2x)}{x^2+3y^2} = 0.$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+3x^3y^4)^{\frac{1}{x^4+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+3x^3y^4)^{\frac{1}{3x^3y^4}\frac{3x^3y^4}{x^4+y^2}} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y^4}{x^4+y^2}}.$

Cum $\left|\frac{3x^3y^4}{x^4+y^2}\right| \leq \left|\frac{3x^3y^4}{2x^2y}\right| = \frac{3}{2}|xy^3| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$, rezultă

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+3x^3y^4)^{\frac{1}{x^4+y^2}} = e^0 = 1.$$

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^4+y^4)}{2(x^2+y^2)} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^4+y^4)}{x^4+y^4} \cdot \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} =$
$= \frac{1}{2} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$

Conform criteriului majorării avem

$$\left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right| = x^2\frac{x^2}{x^2+y^2} + y^2\frac{y^2}{x^2+y^2} \le x^2+y^2$$

şi cum $x^2+y^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$, rezultă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+x^4+y^4)}{2(x^2+y^2)} = 0$.

4. i) *Să se demonstreze că funcţia* $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

are limită în origine după orice direcţie $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, *dar limita lui* f *în origine nu există.*

ii) *Fie* $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. *Să se arate că limitele iterate există şi sunt egale, deşi limita în origine nu există.*

iii) *Să se arate că pentru funcţia* $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$, *o limită iterată există, cealaltă nu există şi totuşi* f *are limită în origine în raport cu ansamblul variabilelor.*

Soluţie. **i)** Într-adevăr, considerând mulţimea

$$\mathrm{A}_h = \left\{\overline{x}=\overline{x_0}+t\overline{h}\,\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}\cap D_f = \{(x,y)=t\,(h_1,h_2)\mid t\in\mathbb{R}\}\cap D_f,$$

în care D_f este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f, este uşor de constatat că

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathrm{A}_h}} f(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{t^3h_1^2h_2}{t^4h_1^4+t^2h_2^2} = \lim_{t\to 0}\frac{th_1^2h_2}{t^2h_1^4+h_2^2} = 0,$$

pentru orice h_1,h_2 cu $h_1^2+h_2^2\neq 0$, ceea ce înseamnă că f are limită în origine după orice direcţie $h\in A_h$.

Pe de altă parte, dacă considerăm mulţimea arbitrară

$$\mathrm{B} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\; y=mx^2\right\}\subset\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},$$

atunci,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx^2}} f(x,mx^2) = \lim_{x\to 0}\frac{mx^4}{x^4+m^2x^4} = \frac{m}{1+m^2}\in\mathbb{R},$$

care demonstrează că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există.

ii) Se constată fără dificultate că avem

$$\begin{aligned} l_{12} &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0;\\ l_{21} &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0, \end{aligned}$$

deci $l_{12} = l_{21}$, însă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există, deoarece dacă considerăm mulţimea

$$A_m = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | y = mx\}$$

atunci

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A_m}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2},$$

deci limita lui f relativă la mulţimea A_m depinde de parametrum m prin urmare f nu are limită în $(0,0)$.

iii) Prin calcul direct se obţine că

$$l_{12} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}\right) = 0,$$

deoarece $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ pentru că este produsul dintre o funcţie mărginită $\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$ şi o funcţie care tinde la 0,

Pe de altă parte

$$l_{21} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$$

nu există, deoarece pentru funcţia $g(y) = \cos\frac{1}{y}$ dacă alegem şirurile $y_n = \frac{1}{n\pi}$, atunci $g(y_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$, deci conform teoremei lui Heine l_{21} nu există.

Pentru limita globală a funcţiei f în origine avem

$$|f(x,y)| = |x| \cdot \left|\sin\frac{1}{x}\right| \cdot \left|\cos\frac{1}{y}\right| \leq |x| \to 0,$$

deci conform criteriului majorării $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

5. *Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii:*

i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+2y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 1, & (x,y) = 0 \end{cases}$;

ii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

iii) $f(x,y) = \begin{cases} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, & (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Soluţie. **i)** Dacă $(x,y) \neq (0,0)$ funcţia f este continuă fiind compusă de funcţii elementare continue. Prin urmare, problema continuităţii se pune în punctul $O(0,0)$. Avem

$$\left|\frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{2y^3}{x^2+y^2}\right| =$$
$$= |x|\frac{x^2}{x^2+y^2} + 2|y|\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x| + 2|y| \longrightarrow_{(x,y)\to(0,0)} 0.$$

Din criteriul majorării rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} = 0 \neq f(0,0)$, deci f nu este continuă în origine.

ii) Dacă $(x,y) \neq (0,0)$ funcţia f este continuă fiind compusă de funcţii continue. Problema continuităţii se pune în $O(0,0)$. Avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin^2\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} = 2\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2\frac{x^2+y^2}{2}}{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}\frac{x^2+y^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + y^2\right) = 0,$$

deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, ceea ce înseamnă că f este continuă pe domeniul de definiţie $\mathbb{R}^2$.

iii) Pentru $x > 0, y > 0$ funcţia f este continuă fiind compusă de funcţii continue. Problema continuităţii se pune în origine. Avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}$$

Din inegalitatea $\dfrac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ adevărată pentru $x, y > 0$ conform criteriului majorării rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 0$. Având în vedere că

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right] = e$, rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 = f(0,0)$, deci f este continuă şi în origine.

6. *Să se arate că funcţia* $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathrm{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -y\right\}$, *definită prin*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy + x^2 y \ln|x+y|}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0)\,, x \neq -y \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă parţial în origine, dar nu este continuă în acest punct.

Soluţie. Pentru arăta că f este continuă parţial în origine, este suficient să arătăm că limitele parţiale în $O(0,0)$ coincid cu $f(0,0)=0$. Avem:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0} f(0,y) &= \lim_{y\to 0}\frac{0}{x^2}=0=f(0,0),\\ \lim_{x\to 0} f(x,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{0}{y^2}=0=f(0,0),\end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că f este continuă parţial în raport cu x şi cu y în origine. Studiem acum limita lui f în origine. Considerăm $y=mx, m\neq -1$. Avem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2+mx^3\ln x\,(1+m)}{x^2\,(1+m^2)}=\frac{m}{m^2+1},$$

adică f nu are limită în $O(0,0)$, aşa că f nu e continuă în $(0,0)$.

Probleme propuse spre rezolvare

1. *Studiaţi dacă următoarele funcţii au limită în punctele indicate:*

i) $f(x,y)=2x^2-3xy+7y^2$, în $(1,-1)$; **ii)** $f(x,y)=e^{-xy}$ în $(0,1)$;

iii) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{1+xy}$ în (0,0); **iv)** $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{2x}$ în (0,2);

v) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2\tan\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ în (0,0); **vi)** $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ în (0,0);

vii) $f(x,y)=(1+x^2y^3)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ în (0,0);

viii) $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+3y^2}$ în (0,0); **ix)** $f(x,y)=\dfrac{xy-y^2}{x^2+y^2}$ în (0,0);

x) $f(x,y)=\dfrac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2+(y-1)^2}$ în (2,1); **xi)** $f(x,y)=\dfrac{2x+y^2}{y^2-2x}$ în (0,0);

xii) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{|x|+|y|}$ în (0,0).

2. *Folosind teorema lui Heine să se arate că următoarele funcţii nu au limită în origine:*

i) $f(x,y)=\dfrac{y^2+2x}{y^2-3x}$, $y^2\neq 3x$, **ii)** $f(x,y)=\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$, $(x,y)\neq(0,0)$,

iii) $f(x,y)=\dfrac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2+e^{-\frac{2}{x^2}}}$.

3. *Să se cerceteze existenţa limitelor iterate şi a limitei în origine pentru funcţiile:*

i) $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\cos\dfrac{1}{x}$, **ii)** $f(x,y)=\dfrac{x^4y^4}{x^4+y^4}$,

iii) $f(x,y)=y\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$; **iv)** $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$; **v)** $f(x,y)=\dfrac{x^2-2y^2}{2x^2+y^2}$.

4. *Să se discute după valorile parametrului α continuitatea funcţiilor:*

i) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{xy}, & \text{dacă} \;\; (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha, \;\; \text{dacă} \;\; (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

ii) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\tan(x^3+y^5)}{x^2+y^4}, & \text{dacă} \;\; (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha, \;\; \text{dacă} \;\; (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

iii) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}}, & \text{dacă} \;\; (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha, \;\; \text{dacă} \;\; (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

iv) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\tan(x^2+y^2)}, & \text{dacă} \;\; 0<x^2+y^2<\dfrac{\pi}{2}\\ \alpha, \;\; \text{dacă} \;\; (x,y)=(0,0)\end{cases}$.