MS

(seminar 12 - S12) – partea 2

• Cum se defineşte un lanţ Markov absorbant? Forma standard asociată matricei de tranziţie pentru un lanţ Markov absorbant.

• Care este probabilitatea ca un lanţ Markov absorbant ce pleacă din starea tranzitorie $i \in S_t$ să facă n paşi în mulţimea stărilor tranzitorii înainte să fie absorbit de starea absorbantă $j \in S_a$?

$$p_{i,j}(n) = \sum_{k \in S_t} T^n(i,k)R(k,j)$$

• Cum se defineşte matricea fundamentală N asociată unui lanţ Markov absorbant? Interpretarea unor elemente asociate matricei fundamentale:

• Elementul $N(i,j)$, $i,j \in S_t$, reprezintă numărul mediu de vizite pe care lanţul Markov ce porneşte din starea i îl face stării tranzitorii j înainte de a fi absorbit.

• Numărul mediu de paşi ai lanţului Markov ce pleacă din starea tranzitorie i înainte de a fi absorbit este

$$t_i = \sum_{j \in S_t} N(i,j),$$

adică este suma elementelor de pe linia i a matricei fundamentale.

• Care este probabilitatea ca un lanţ Markov absorbant ce pleacă din starea tranzitorie $i \in S_t$ să fie absorbit de starea absorbantă $j \in S_a$?

$$(NR)(i,j) = \sum_{k \in S_t} N(i,k)R(k,j)$$

1. Un exemplu de lanţ Markov absorbant, ce a inspirat folosirea acestui tip de lanţuri Markov în ştiinţa şi ingineria calculatoarelor, este mersul beţivului (Fig.12.1). Între bar (starea 0) şi casă (starea 4) există 3 colţuri, $1, 2, 3$. Când beţivul ajunge la un colţ i, $i \in \{1, 2, 3\}$, cu probabilitatea $1/2$ o ia spre stânga, adică trece în $i-1$ şi cu probabilitatea $1/2$ o ia spre dreapta, deci trece în starea $i+1$. Barul şi casa sunt stări absorbante. O dată ajuns în una din aceste stări, rămâne sigur acolo.

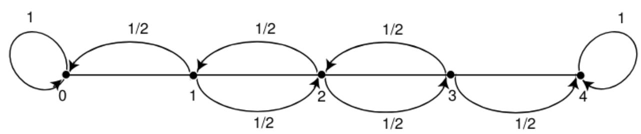

Fig.12.1: Graful lanţului Markov ce modelează mersul beţivului.

Se cere:

a) Sa se scrie matricea de tranzitie a acestui lant Markov;

b) Să se determine distribuţia staţionară a stărilor unui lant Markov absorbant, adică matricea Π.

c) Să se detemine numărul mediu de treceri ale beţivului prin colţul 2 înainte de ajunge acasă sau la bar, ştiind că a pornit din colţul 1.

d) Numărul de paşi parcurşi până ce lanţul Markov este absorbit, ştiind că a pornit din colţul 3 .

e) Probabilitatea ca beţivul ce porneşte din colţul 2 să ajungă la bar (să fie absorbit de bar, codificat cu starea 0).

a) $$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Pentru a aplica teoria lanturilor abosrbante este necesar sa reorganizare a starilor lantului sub forma $S = S_a \cup S_t$, unde $S_a = \{0, 4\}$ este multimea starilor abosrbante, iar $S_t = \{1, 2, 3\}$ este multimea starilor tranzitorii. In consecinta, matricea Q se va modifica dupa cum urmeaza. Permutând vectorul $(0, 1, 2, 3, 4)$ în $(0, 4, 1, 2, 3)$, obţinem matricea de tranziţie în forma standard, notată cu $Q' = P_\pi Q P_\pi^T$, unde $\pi \in S_5$ este permutarea descrisă mai sus, adică $\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, iar P_π este matricea permutare corespunzătoare,

$$Q' = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ \hline 3 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \end{array}$$

$$Q = \begin{pmatrix} I_2 & O_{2\times 3} \\ R & T \end{pmatrix}$$

- I este matricea unitate de tip $n_a \times n_a$, unde $n_a = 2$;
- O este o matrice nulă de tip $n_a \times n_t$, unde $n_t = 3$.

Justificarea pentru blocurile I şi O vine din faptul că stările $1, 2, \ldots, n_a$ sunt absorbante şi deci $p_{ii} = 1$, $p_{ij} = 0$, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n_a\}$, $j \in S$, $j \neq i$.

- Matricea R este matricea de tranziţie de la stările tranzitorii la cele absorbante. Ea este de tip $n_t \times n_a$. Cu alte cuvinte, $R(i, j) = P(X_{n+1} = j \in S_a | X_n = i \in S_t)$, $n \in \mathbb{N}$;
- Matricea T dă probabilităţile de trecere între stările tranzitorii. Ea este de tip $n_t \times n_t$ şi $T(i, j) = P(X_{n+1} = j \in S_t | X_n = i \in S_t)$, $n \in \mathbb{N}$.

Matricea R este

$$R = \begin{pmatrix} R(1,0) & R(1,4) \\ R(2,0) & R(2,4) \\ R(3,0) & R(3,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

Matricea de tranziţie a unui lanţ Markov absorbant scrisă în forma (12.1) se numeşte *matrice de tranziţie în forma standard.*

In cazul nostru avem matricea T este

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $$\Pi = \begin{pmatrix} I & O \\ N \cdot R & O \end{pmatrix}$$

$N = (I - T)^{-1}$ – matricea fundamentală a lanţului Markov absorbant unde $N = (I - T)^{-1}$ este matricea fundamentala a lantului Marov absorbant. Linia i din matricea Π se numeşte distribuţia staţionară a stării i (remarcăm că spre deosebire de lanţurile Markov ireductibile şi aperiodice, unde fiecare stare avea aceeaşi distribuţie staţionară π). Prin calcul direct se obtine

$$N = (I_3 - T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

c)

c) Reamintim că elementul $n_{ij} = N(i,j)$, $i, j \in S_t$, reprezintă numărul mediu de vizite pe care lanţul Markov ce porneşte din starea $i \in S_t$ îl face stării tranzitorii $j \in S_t$ înainte de a fi absorbit.

Cum stările tranzitorii ale lanţului Markov sunt $1, 2, 3$ (în indexarea iniţială), rezultă că numărul mediu de treceri prin colţul 2 înainte de a ajunge acasă sau la bar, ştiind că a pornit din colţul 1, este $n_{12} = 1$.

d) Din teorie avem că numărul mediu de paşi ai lanţului Markov absorbant ce pleacă din starea tranzitorie i înainte de a fi absorbit este:

$$t_i = n_{i,n_a+1} + n_{i,n_a+2} + \cdots + n_{i,n_a+n_t},$$

unde $\{n_a + 1, n_a + 2, \ldots, n_a + n_t\}$ este mulţimea stărilor tranzitorii.

Explicaţie: Dacă stările tranzitorii ale unui lanţ Markov absorbant sunt $3, 4, 5$, iar 1, 2 sunt stări absorbante, atunci o traiectorie ce porneşte din $i = 3$ poate fi, de exemplu, de forma $3, 5, 5, 4, 3, 5, 4, 1$. Numărul de paşi parcurşi până ce lanţul Markov este absorbit de starea 1 este dat de suma numărului de vizite ale stării 3, ale stării 4 şi ale stării 5.

Numărul t_i se numeşte *timpul mediu până la absorbţia lanţului Markov* ce pleacă din starea i.

Observăm că vectorul coloană $\mathbf{t}$, de coordonate t_i, se poate obţine înmulţind matricea N cu vectorul coloană $\mathbf{e}$, ce are toate elementele 1, adică $\mathbf{t} = N\,\mathbf{e}$.

Deci, numărul mediu de paşi (treceri de la un colţ la altul) ai beţivului înainte de a ajunge fie acasă, fie la bar, ştiind că a pornit din colţul 3, este $t_3 = n_{31} + n_{32} + n_{33} = 3$.

e) Din teorie, probabilitatea ca lanţul ce porneşte din starea tranzitorie i să fie absorbit de starea absorbantă j este

$$b_{ij} = \sum_{k \in S_t} N(i,k) R(k,j).$$

Notând cu B matricea de elemente (b_{ij}), avem $B = NR$.

Probabilitatea ca beţivul ce porneşte din colţul 2 să ajungă la bar (să fie absorbit de bar, codificat cu starea 0) este

$$b_{2\,0} = \sum_{k=1}^{3} N(2,k)R(k,0) = N(2,1)R(1,0) + N(2,2)R(2,0) + N(2,3)R(3,0).$$

Avem că

$$b_{2\,0} = 1 \times 0.5 + 2 \times 0 + 1 \times 0 = 0.5.$$

Atenţie la indexarea elementelor matricei R: $R(i,j)$, $i \in S_t$, iar $j \in S_a$. În cazul lanţului analizat mulţimea stărilor tranzitorii este $S_t = \{1, 2, 3\}$, iar cea a stărilor absorbante $S_a = \{0, 4\}$.