

4.3. Sisteme de ecuații ordinare

- aproximarea soluției sistemelor de ecuații diferențiale poate fi făcută ca o simplă extensie a metodologiei pentru o singură ecuație diferențială
- tratarea sistemelor de ecuații extinde într-o mare măsură posibilitatea de a modela comportări dinamice interesante
- capacitatea de a rezolva sisteme de ecuații diferențiale ordinare se află la baza simulării pe calculator din artă și din știință
- de exemplu, simularea pendului și a mecanicilor orbitale a motivat o dezvoltare a metodelor de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare
- **ordinul** unei ecuații diferențiale se referă la cel mai mare ordin al unei derivate care apare în ecuație

Un sistem de ordinul I are forma:

$$y'_1 = f_1(t, y_1, \dots, y_m)$$

$$y'_2 = f_2(t, y_1, \dots, y_m)$$

...

$$y'_m = f_m(t, y_1, \dots, y_m)$$

Într-o problemă cu valoare initială, fiecare variabilă are nevoie de o condiție initială.

Exemplu 1

aplicați metoda lui Euler pentru sistemul de ordinul întâi:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2^2 - 2y_1 \\ y'_2 &= y_1 - y_2 - ty_2^2 \\ y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

verificăm că soluția sistemului (1) este funcția cu valori vectoriale

$$\begin{aligned} y_1(t) &= te^{-2t} \\ y_2(t) &= e^{-t}. \end{aligned}$$

pentru moment, uităm că știm soluția, și aplicăm metoda lui Euler formula metodei lui Euler scalare este aplicată fiecărei componente separat, după cum urmează:

$$\begin{aligned} w_{i+1,1} &= w_{i,1} + h(w_{i,2}^2 - 2w_{i,1}) \\ w_{i+1,2} &= w_{i,2} + h(w_{i,1} - w_{i,2} - t_i w_{i,2}^2). \end{aligned}$$

Figura 1 prezintă aproximările pentru y_1 și y_2 date de metoda lui Euler, împreună cu soluția corectă

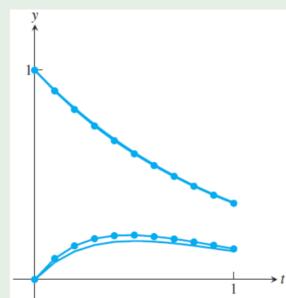


Figura 1: Ecuația (1) aproximată de metoda lui Euler. Pasul este $h = 0.1$. Curba de sus este $y_1(t)$, împreună cu soluția ei aproximativă $w_{1,1}$ (marcată prin puncte), iar curba de jos este $y_2(t)$ și, respectiv, $w_{1,2}$.

7.3.1. Ecuatii de ordin superior

- o singură ecuație diferențială de ordin superior poate fi transformată într-un sistem
 - fie
- $$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$
- o ecuație diferențială de ordinul n
- definim noile variabile

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)}, \end{aligned}$$

și observăm că ecuația diferențială inițială poate fi scrisă ca

$$y'_n = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

- luate împreună, ecuațiile

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= y_3 \\ y'_3 &= y_4 \\ &\vdots \\ y'_{n-1} &= y_n \\ y'_n &= f(t, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

transformă ecuația diferențială de ordinul n într-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi, care pot fi rezolvate folosind metoda lui Euler sau metoda trapezului, de exemplu

Exemplul 2

- transformați ecuația diferențială de ordinul trei

$$y''' = a(y'')^2 - y' + yy'' + \sin t \quad (2)$$

într-un sistem

$$\rightarrow \text{dăm } y_1 = y \Rightarrow$$

$$y_2 = y'$$

$$y_3 = y''$$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow$$

$$y'_1 = y_2$$

$$y'_2 = y_3$$

$$y'_3 = a y_3^2 - y_2 + y_1 y_3 + \sin t$$

- soluția $y(t)$ a ecuației de ordinul trei (2) poate fi găsită rezolvând sistemul (3) pentru a găsi $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$

- datorită posibilității transformării ecuațiilor de ordin superior în sisteme, ne vom restrânge atenția la ecuații și sisteme de ordinul întâi
- observăm că și un sistem de mai multe ecuații de ordin superior poate fi transformat într-un sistem de ecuații de ordinul întâi în același fel

7.4. Metoda Runge - Kutta

7.4.1. Familia Runge - Kutta

- am văzut că metoda lui Euler are ordinul unu și metoda trapezului are ordinul doi
- în plus față de metoda trapezului, există și alte metode de ordinul doi de tip Runge-Kutta
- un exemplu important este metoda mijlocului

Algoritmul 1 (Metoda mijlocului)

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 \\ w_{i+1} &= w_i + hf \left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

- pentru a verifica ordinul metodei mijlocului, trebuie să calculăm eroarea locală de trunchiere
- când am făcut acest lucru pentru metoda trapezului, am folosit expresia:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i)f(t_i, y_i) \right) + \frac{h^3}{6} y'''(c). \quad (5)$$

- pentru a calcula eroarea locală de trunchiere la pasul i , presupunem că $w_i = y_i$ și calculăm $y_{i+1} - w_{i+1}$
- repetând folosirea dezvoltării în serie Taylor pe care am făcut-o pentru metoda trapezului, putem scrie că

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= y_i + hf \left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(t_i, y_i) \right) \\ &= y_i + h \left(f(t_i, y_i) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y_i) + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i) + O(h^2) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

- comparând (5) și (6), obținem

$$y_{i+1} - w_{i+1} = O(h^3),$$

astfel că metoda mijlocului este de ordinul doi

- fiecare evaluare de funcție a părții drepte a ecuației diferențiale se numește un **stagiul** al metodei
- metodele trapezului și mijlocului sunt membre ale familiei metodelor de ordinul doi cu două stagii, având forma generală

$$w_{i+1} = w_i + h \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right) f(t_i, w_i) + \frac{h}{2\alpha} f(t_i + \alpha h, w_i + \alpha hf(t_i, w_i)), \quad (7)$$

pentru un anumit $\alpha \neq 0$

- luând $\alpha = 1$, obținem metoda trapezului, și luând $\alpha = 1/2$, obținem metoda mijlocului
- Figura 2 ilustrează intuiția care stă la baza metodelor trapezului și mijlocului

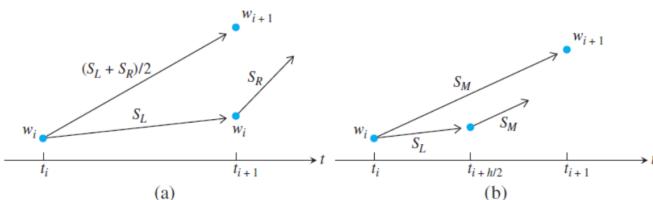


Figura 2: Prezentare schematică a doi membri ai familiei RK2. (a) Metoda trapezului folosește o medie între capătul din stânga și capătul din dreapta pentru a traversa intervalul. (b) Metoda mijlocului folosește o pantă de la mijlocul intervalului.

- metoda trapezului folosește un pas Euler la capătul din dreapta al intervalului, evaluează pantă în acel punct, și apoi face media cu pantă de la capătul din stânga al intervalului
- metoda mijlocului folosește un pas Euler pentru a se deplasa în mijlocul intervalului, evaluează pantă în acel punct ca fiind $f(t_i + h/2, w_i + (h/2)f(t_i, w_i))$, și folosește această pantă pentru a se deplasa de la w_i la noua aproximare w_{i+1}
- aceste metode folosesc abordări diferite pentru a rezolva aceeași problemă: obținerea unei pante care reprezintă întreg intervalul mai bine decât metoda lui Euler, care folosește doar pantă de la capătul din stânga al intervalului
- există metode Runge–Kutta de toate ordinea
- un exemplu foarte cunoscut este metoda de ordinul patru

Algoritm 2 (Metoda Runge–Kutta de ordinul patru (RK4))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) \quad (8)$$

unde

$$\begin{aligned} s_1 &= f(t_i, w_i) \\ s_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}s_1\right) \\ s_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}s_2\right) \\ s_4 &= f(t_i + h, w_i + hs_3). \end{aligned}$$

- cantitatea $h(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4)/6$ din metoda Runge–Kutta de ordinul patru ia locul pantei din metoda lui Euler
- această cantitate poate fi considerată ca o aproximare îmbunătățită a pantei soluției pe intervalul $[t_i, t_i + h]$
- observăm că s_1 este pantă în capătul din stânga al intervalului, s_2 este pantă folosită în metoda mijlocului, s_3 este o pantă îmbunătățită în mijlocul intervalului, și s_4 este o aproximare a pantei în capătul din dreapta al intervalului, și anume în $t_i + h$
- calculele necesare pentru a demonstra că această metodă este de ordinul patru sunt similare celor din cazul metodelor trapezului și mijlocului, dar puțin mai stufoase

Exemplul 3

- aplicați metoda Runge–Kutta de ordinul patru pentru problema cu valoare inițială

$$\begin{cases} y' = ty + t^3 \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (9)$$

calculând eroarea globală de trunchiere în $t = 1$ pentru mai multe valori ale pasului, obținem următorul tabel:

pași n	pasul h	eroarea în $t = 1$
5	0.20000	2.3788×10^{-5}
10	0.10000	1.4655×10^{-6}
20	0.05000	9.0354×10^{-8}
40	0.02500	5.5983×10^{-9}
80	0.01250	3.4820×10^{-10}
160	0.00625	2.1710×10^{-11}
320	0.00312	1.3491×10^{-12}
640	0.00156	7.2609×10^{-14}

comparăm cu tabelul corespunzător pentru metoda lui Euler diferența este remarcabilă și compensează ușor complexitatea suplimentară a metodei RK4, care necesită patru evaluări de funcție la fiecare pas, comparativ cu metoda lui Euler, care necesită una singură

$$f = y'$$

Figura 3 prezintă aceeași informație într-o formă care expune faptul că eroarea globală de trunchiere este proporțională cu h^4 , cum este de așteptat pentru o metodă de ordinul patru

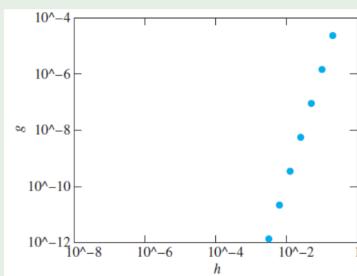


Figura 3: Eroarea ca funcție de mărimea pasului pentru metoda Runge–Kutta de ordinul 4. Diferența între soluția aproximativă a ecuației (9) și soluția corectă în $t = 1$ are panta 4 pe un grafic log-log, astfel că este proporțională cu h^4 , pentru h mic.

7.5.1. Perechi incorporate Runge - Kutta

- presupunând că

$$e_i \approx ch_i^{p+1} \quad (10)$$

pentru o anumită constantă c , mărimea pasului h care se încadrează cel mai bine în limita toleranței, satisface

$$T|w_i| = ch_i^{p+1}. \quad (11)$$

- rezolvând ecuațiile (10) și (11) pentru a găsi h și c , obținem

$$h_* = 0.8 \left(\frac{T|w_i|}{e_i} \right)^{\frac{1}{p+1}} h_i, \quad (12)$$

unde am adăugat un factor de 0.8 pentru a face algoritmul mai conservativ

- prin urmare, noua mărime a pasului va fi $h_{i+1} = h_*$
- pe de altă parte, dacă scopul $e_i/|w_i| < T$ nu este atins de către eroarea relativă, atunci h_i este luat cu valoarea h_* pentru o a doua încercare
- aceasta ar trebui să fie de ajuns, datorită aceluia factor de 0.8
- totuși, dacă nici a doua încercare nu satisface scopul, atunci pasul este pur și simplu înjumătățit

Exemplu 4

RK2/3, un exemplu de pereche încorporată Runge–Kutta de ordinul 2/3

metoda trapezului explicită poate fi folosită împreună cu o metodă RK de ordinul trei pentru a da naștere unei perechi încorporate potrivite pentru controlul mărimii pasului

Iuăm

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + h \frac{s_1 + s_2}{2} \\ z_{i+1} &= w_i + h \frac{s_1 + 4s_3 + s_2}{6}, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} s_1 &= f(t_i, w_i) \\ s_2 &= f(t_i + h, w_i + hs_1) \\ s_3 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, w_i + \frac{1}{2}h \frac{s_1 + s_2}{2}\right). \end{aligned}$$

în ecuațiile anterioare, w_{i+1} este pasul din metoda trapezului, și z_{i+1} reprezintă o metodă de ordinul trei, care necesită cele trei stagi Runge–Kutta prezentate mai sus

metoda de ordinul trei este doar o aplicare a regulii lui Simpson pentru integrarea numerică la contextul ecuațiilor diferențiale

- folosind cele două metode de rezolvare, o estimare a erorii poate fi găsită scăzând cele două aproximări:

$$e_{i+1} \approx |w_{i+1} - z_{i+1}| = \left| h \frac{s_1 - 2s_3 + s_2}{3} \right|. \quad (14)$$

- folosind această estimare pentru eroarea locală de trunchiere permite implementarea oricărui dintre protocoalele de control al mărimii pasului descrise anterior
- observăm că estimarea erorii locale de trunchiere pentru metoda trapezului este obținută cu costul a doar o evaluare în plus a funcției f , folosită pentru a calcula s_3

- deși protocolul de control al mărimii pasului a fost aplicat pentru w_{i+1} , este mai logic să se folosească aproximarea de ordin superior z_{i+1} pentru a avansa pasul, de vreme ce este disponibilă
- aceasta este numită **extrapolare locală**

- aceasta continuă până când scopul este atins
- după cum am menționat, pentru uz general, eroarea relativă ar trebui să fie înlocuită cu $e_i / \max(|w_i|, \theta)$
- atât metodele simple cât și cele sofisticate descrise mai sus depind foarte mult de un mod de a estima eroarea din pasul curent al metodei de rezolvare a EDO, și anume $e_{i+1} = |w_{i+1} - y_{i+1}|$
- constrângerea importantă este de a afla această estimare fără a necesita prea multe calcule suplimentare
- cea mai folosită modalitate de a obține o astfel de estimare a erorii este de a rula o metodă de rezolvare de ordin superior în paralel cu metoda de rezolvare de interes
- aproximarea w_{i+1} a metodei de ordin superior—notată z_{i+1} —va fi mult mai precisă decât aproximarea w_{i+1} inițială, astfel că diferența

$$e_{i+1} \approx |z_{i+1} - w_{i+1}| \quad (13)$$

este folosită ca o estimare a erorii pentru pasul curent de la t_i la t_{i+1}

Exemplul 5

perechea încorporată Bogacki–Shampine de ordinul 2/3

fie

$$\begin{aligned}
 s_1 &= f(t_i, w_i) \\
 s_2 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, w_i + \frac{1}{2}hs_1\right) \\
 s_3 &= f\left(t_i + \frac{3}{4}h, w_i + \frac{3}{4}hs_2\right) \\
 z_{i+1} &= w_i + \frac{h}{9}(2s_1 + 3s_2 + 4s_3) \\
 s_4 &= f(t + h, z_{i+1}) \\
 w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{24}(7s_1 + 6s_2 + 8s_3 + 3s_4). \tag{15}
 \end{aligned}$$

se poate verifica faptul că z_{i+1} este o aproximare de ordinul 3, și w_{i+1} , în ciuda faptului că are patru stagii, este de ordinul 2

estimarea erorii necesară pentru controlul mărimei pasului este

$$e_{i+1} = |z_{i+1} - w_{i+1}| = \frac{h}{72} |-5s_1 + 6s_2 + 8s_3 - 9s_4|. \tag{16}$$

observăm că s_4 devine s_1 în pasul următor dacă este acceptat, astfel că nu există stagii risipite—cel puțin trei stagii sunt necesare, oricum, pentru o metodă de ordinul trei

7.5.2. Metode de ordinul 4/5

Exemplul 6

perechea încorporată Runge–Kutta–Fehlberg de ordinul 4/5

$$\begin{aligned}
 s_1 &= f(t_i, w_i) \\
 s_2 &= f\left(t_i + \frac{1}{4}h, w_i + \frac{1}{4}hs_1\right) \\
 s_3 &= f\left(t_i + \frac{3}{8}h, w_i + \frac{3}{32}hs_1 + \frac{9}{32}hs_2\right) \\
 s_4 &= f\left(t_i + \frac{12}{13}h, w_i + \frac{1932}{2197}hs_1 - \frac{7200}{2197}hs_2 + \frac{7296}{2197}hs_3\right) \\
 s_5 &= f\left(t_i + h, w_i + \frac{439}{216}hs_1 - 8hs_2 + \frac{3680}{513}hs_3 - \frac{845}{4104}hs_4\right) \\
 s_6 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, w_i - \frac{8}{27}hs_1 + 2hs_2 - \frac{3544}{2565}hs_3 + \frac{1859}{4104}hs_4 - \frac{11}{40}hs_5\right) \\
 w_{i+1} &= w_i + h\left(\frac{25}{216}s_1 + \frac{1408}{2565}s_3 + \frac{2197}{4104}s_4 - \frac{1}{5}s_5\right) \\
 z_{i+1} &= w_i + h\left(\frac{16}{135}s_1 + \frac{6656}{12825}s_3 + \frac{28561}{56430}s_4 - \frac{9}{50}s_5 + \frac{2}{55}s_6\right). \tag{17}
 \end{aligned}$$

se poate verifica faptul că z_{i+1} este o aproximare de ordinul 5, și că w_{i+1} este de ordinul 4

estimarea erorii necesară pentru controlul mărimei pasului este

$$e_{i+1} = |z_{i+1} - w_{i+1}| = h \left| \frac{1}{360}s_1 - \frac{128}{4275}s_3 - \frac{2197}{75240}s_4 + \frac{1}{50}s_5 + \frac{2}{55}s_6 \right|. \tag{18}$$

metoda Runge–Kutta–Fehlberg (RKF45) este în prezent cea mai cunoscută metodă unipas cu pas variabil

implementarea este simplă, fiind date formulele anterioare

utilizatorul trebuie să selecteze o toleranță a erorii relative T și o mărime a pasului inițială h

după calculul lui w_1, z_1 , și e_1 , testul erorii relative

$$\frac{e_i}{|w_i|} < T \tag{19}$$

este verificat pentru $i = 1$

dacă se înregistrează un succes, noul w_1 este înlocuit cu versiunea local extrapolată z_1 , și programul va trece la pasul următor

pe de altă parte, dacă testul erorii relative (19) eșuează, pasul este reluat cu o mărime a pasului h dată de (12) cu $p = 4$, ordinul metodei care l-a produs pe w_i

un eşec repetat, care este puțin probabil, este tratat prin înjumătățirea pasului până când se înregistrează un succes

în orice caz, mărimea pasului h_1 pentru pasul următor trebuie calculată folosind (12)

Exemplul 7

perechea încorporată Dormand–Prince de ordinul 4/5

$$\begin{aligned}
 s_1 &= f(t_i, w_i) \\
 s_2 &= f\left(t_i + \frac{1}{5}h, w_i + \frac{1}{5}hs_1\right) \\
 s_3 &= f\left(t_i + \frac{3}{10}h, w_i + \frac{3}{40}hs_1 + \frac{9}{40}hs_2\right) \\
 s_4 &= f\left(t_i + \frac{4}{5}h, w_i + \frac{44}{45}hs_1 - \frac{56}{15}hs_2 + \frac{32}{9}hs_3\right) \\
 s_5 &= f\left(t_i + \frac{8}{9}h, w_i + h\left(\frac{19372}{6561}s_1 - \frac{25360}{2187}s_2 + \frac{64448}{6561}s_3 - \frac{212}{729}s_4\right)\right) \\
 s_6 &= f\left(t_i + h, w_i + h\left(\frac{9017}{3168}s_1 - \frac{355}{33}s_2 + \frac{46732}{5247}s_3 + \frac{49}{176}s_4 - \frac{5103}{18656}s_5\right)\right) \\
 z_{i+1} &= w_i + h\left(\frac{35}{384}s_1 + \frac{500}{1113}s_3 + \frac{125}{192}s_4 - \frac{2187}{6784}s_5 + \frac{11}{84}s_6\right) \\
 s_7 &= f(t_i + h, z_{i+1}) \\
 w_{i+1} &= w_i + h\left(\frac{5179}{57600}s_1 + \frac{7571}{16695}s_3 + \frac{393}{640}s_4 - \frac{92097}{339200}s_5 + \frac{187}{2100}s_6 + \frac{1}{40}s_7\right). \tag{20}
 \end{aligned}$$

se poate verifica faptul că z_{i+1} este o aproximare de ordinul 5, și că w_{i+1} este de ordinul 4

estimarea erorii necesară pentru controlul mărimii pasului este

$$\begin{aligned}
 e_{i+1} &= |z_{i+1} - w_{i+1}| \\
 &= h \left| \frac{71}{57600}s_1 - \frac{71}{16695}s_3 + \frac{71}{1920}s_4 - \frac{17253}{339200}s_5 + \frac{22}{525}s_6 - \frac{1}{40}s_7 \right|. \tag{21}
 \end{aligned}$$

din nou, extrapolarea locală este folosită, ceea ce înseamnă că noua aproximare va fi z_{i+1} în loc de w_{i+1}

observăm că, de fapt, w_{i+1} nici nu trebuie calculat—doar e_{i+1} este necesar pentru controlul erorii

în această metodă, ca în metoda Bogacki–Shampine, s_7 devine s_1 în pasul următor, dacă este acceptat

nu există stagii irosite; se poate arăta că cel puțin șase stagii sunt necesare pentru o metodă Runge–Kutta de ordinul cinci

7.6. Metode implice și ecuații rigide

- metodele de rezolvare a ecuațiilor diferențiale prezentate până acum sunt **explicite**, ceea ce înseamnă că există o formulă explicită pentru noua aproximare w_{i+1} în termeni de cantități cunoscute, cum ar fi h , t_i , și w_i
- dar, anumite ecuații diferențiale sunt prost deservite de metode explicite, și primul nostru scop este să explicăm de ce
- o metodă de rezolvare cu pas variabil sofisticată poate să cheltuiască cea mai mare parte a energiei sale depășind soluția corectă într-o direcție sau alta
- fenomenul de rigiditate poate fi mai ușor înțeles într-un context mai simplu
- prin urmare, vom începe cu metoda lui Euler

Exemplul 8

› aplicați metoda lui Euler pentru a rezolva problema cu valoare inițială cu o toleranță relativă de 10^{-4} :

$$\begin{cases} y' = 10(1 - y) \\ y(0) = 1/2 \\ t \in [0, 100]. \end{cases} \tag{22}$$

› metoda lui Euler pentru partea dreaptă $f(t, y) = 10(1 - y)$ cu mărimea pasului h este

$$\begin{aligned}
 w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i) \\
 &= w_i + h(10)(1 - w_i) \\
 &= w_i(1 - 10h) + 10h. \tag{23}
 \end{aligned}$$

deoarece soluția este $y(t) = 1 - e^{-10t}/2$, aproximarea soluției trebuie să se apropie de 1 pe termen lung

aici avem nevoie de noțiuni din Capitolul 2

observăm că (23) poate fi privită ca o iterație de punct fix cu $g(x) = x(1 - 10h) + 10h$

această iterație va converge la punctul fix $x = 1$ câtă vreme $|g'(1)| = |1 - 10h| < 1$

rezolvând această inegalitate, obținem $0 < h < 0.2$

pentru orice valoare mai mare a lui h , punctul fix 1 va respinge aproximările din vecinătatea lui, și soluția nu va mai putea fi precisă

- soluția este foarte clară: un echilibru la $y = 1$
- un pas Euler cu $h = 0.3$ găsește dificil echilibrul deoarece panta soluției din apropiere se schimbă mult între începutul și sfârșitul intervalului de lungime h
- aceasta cauzează o depășire numerică a soluției corecte
- ecuațiile diferențiale cu această proprietate—că soluțiile atractive sunt înconjurate de soluții care se modifică repede—sunt numite **rigide**
- acesta este adesea un semn al existenței mai multor scări de timp în sistem
- cantitativ, aceasta corespunde părții liniare a termenului drept f al ecuației diferențiale, în variabila y , care este mare și negativ
- definiția este ușor relativă, dar aceasta este natura rigidității—cu cât mai negativă partea liniară, cu atât pasul trebuie să fie mai mic pentru a evita depășirea soluției
- pentru Exemplul 8, rigiditatea este măsurată evaluând $df/dy = -10$ în soluția la echilibru $y = 1$
- un mod de a rezolva problema prezentată în Figura 4 este să obținem într-un anumit fel informații din partea dreaptă a intervalului $[t_i, t_i + h]$, în loc să ne bazăm exclusiv pe informațiile din partea stângă
- aceasta este motivația din spatele următoarei variații a metodei lui Euler:

Algoritmul 3 (Metoda lui Euler implicită)

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 \\ w_{i+1} &= w_i + hf(t_{i+1}, w_{i+1}). \end{aligned} \quad (24)$$

- observăm diferența: câtă vreme metoda lui Euler folosește panta din capătul din stânga pentru a traversa intervalul, metoda lui Euler implicită vrea să traverseze intervalul astfel încât panta să fie corectă în capătul din dreapta
- un preț trebuie plătit pentru această îmbunătățire
- metoda lui Euler implicită este primul nostru exemplu de metodă **implicită**, ceea ce înseamnă că metoda nu dă direct o formulă pentru noua aproximare w_{i+1}
- în schimb, trebuie să muncim puțin pentru a o obține
- pentru exemplul $y' = 10(1 - y)$, metoda lui Euler implicită ne dă

$$w_{i+1} = w_i + 10h(1 - w_{i+1}),$$

care, după anumite calcule, poate fi exprimată sub forma

$$w_{i+1} = \frac{w_i + 10h}{1 + 10h}.$$

- luând $h = 0.3$, de exemplu, metoda lui Euler implicită ne dă $w_{i+1} = (w_i + 3)/4$
- putem evalua din nou comportarea iterăției de punct fix $w \rightarrow g(w) = (w + 3)/4$
- există un punct fix în 1, și $g'(1) = 1/4 < 1$, ceea ce confirmă convergența la soluția adevărată de echilibru $y = 1$
- spre deosebire de metoda lui Euler cu $h = 0.3$, cel puțin comportarea calitativă corectă este urmată de către soluția numerică
- de fapt, observăm că soluția dată de metoda lui Euler implicită converge la $y = 1$ indiferent de cât de mare este pasul h

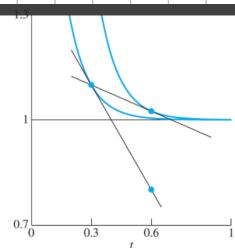


Figura 4: Comparație între pași metodelor lui Euler și Euler implicită.
Ecuația diferențială din Exemplul 8 este rigidă. Soluția la echilibru $y = 1$ este înconjurată de alte soluții cu curbură mare (pantă care se modifică repede). Pasul Euler, care pornește de jos, depășește soluția, cît timp pasul Euler implicit este mai consistent cu dinamica sistemului.

- datorită comportării mai bune a metodelor implice cum ar fi metoda lui Euler implicită, în prezența unor ecuații rigide, merită să efectuăm mai multe calcule pentru a evalua următorul pas, chiar dacă nu este disponibil explicit
- Exemplul 8 nu a fost greu de rezolvat pentru a găsi w_{i+1} , datorită faptului că ecuația diferențială este liniară, și a fost posibil să transformăm formula implicită inițială într-o formă explicită, necesară pentru a face evaluarea
- în general, însă, acest lucru nu este posibil, și trebuie să folosim alte mijloace indirecte
- dacă metoda implicită dă naștere unei ecuații neliniare care trebuie rezolvată, trebuie să folosim metode din Capitolul 2
- atât iterăția de punct fix cât și metoda lui Newton sunt adesea folosite pentru a găsi w_{i+1}
- aceasta înseamnă că există o buclă pentru rezolvarea unei ecuații în interiorul buclei care avansează spre soluția ecuației diferențiale
- următorul exemplu ne arată cum se poate face acest lucru

Exemplul 9

- aplicați metoda lui Euler implicită pentru problema cu valoare inițială

$$\begin{cases} y' = y + 8y^2 - 9y^3 \\ y(0) = 1/2 \\ t \in [0, 3]. \end{cases}$$

- această ecuație, ca cea din exemplul anterior, are o soluție de echilibru $y = 1$
- derivata parțială $\partial f / \partial y = 1 + 16y - 27y^2$ are valoarea -10 în $y = 1$, ceea ce identifică această ecuație ca fiind moderat rigidă
- va exista o limită superioară, similară cu cea din exemplul anterior, pentru h , pentru care metoda lui Euler înregistrează un succes
- prin urmare, suntem motivați să încercăm metoda lui Euler implicită

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + hf(t_{i+1}, w_{i+1}) \\ &= w_i + h(w_{i+1} + 8w_{i+1}^2 - 9w_{i+1}^3). \end{aligned}$$

- aceasta este o ecuație neliniară în w_{i+1} , pe care trebuie să o rezolvăm pentru a avansa soluția numerică
- renotând $z = w_{i+1}$, trebuie să rezolvăm ecuația $z = w_i + h(z + 8z^2 - 9z^3)$, sau

$$9hz^3 - 8hz^2 + (1 - h)z - w_i = 0 \quad (25)$$

pentru necunoscuta z

- vom demonstra acest lucru cu metoda lui Newton
- pentru a porni metoda lui Newton, o valoare inițială este necesară
- două opțiuni care ne vin în minte sunt aproximarea anterioară w_i și aproximarea dată de metoda lui Euler pentru w_{i+1}
- deși ultima este accesibilă de vreme ce metoda lui Euler este explicită, s-ar putea să nu fie cea mai bună alegere pentru probleme rigide, după cum se arată în Figura 4
- în acest caz, vom folosi w_i ca valoare inițială
- asamblând metoda lui Newton pentru (25), obținem

$$z_{\text{nou}} = z - \frac{9hz^3 - 8hz^2 + (1 - h)z - w_i}{27hz^2 - 16hz + 1 - h}. \quad (26)$$

- după evaluarea lui (26), înlocuim z cu z_{nou} și repetăm
- pentru fiecare pas al metodei lui Euler implice, metoda lui Newton este rulată până când $z_{\text{nou}} - z$ este mai mic decât o toleranță prestabilită (mai mică decât erorile care se fac în aproximarea soluției ecuației diferențiale)
- Figura 5 prezintă rezultatele pentru două mărimi diferite ale pasului
- în plus, soluția numerică a metodei lui Euler este prezentată
- evident, $h = 0.3$ este un pas prea mare pentru metoda lui Euler aplicată acestei probleme rigide
- pe de altă parte, când h este redus la 0.15, ambele metode au aproximativ aceeași performanță

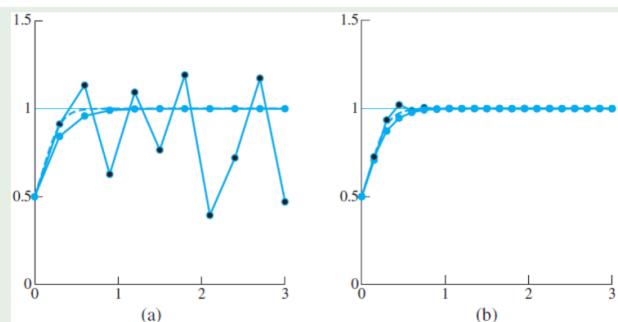


Figura 5: Soluția numerică a problemei cu valoare inițială din Exemplul 9. Soluția adevărată este curba punctată. Punctele negre reprezintă aproximarea dată de metoda lui Euler; punctele albastre reprezintă metoda lui Euler implicită. (a) $h = 0.3$ (b) $h = 0.15$.

așa-numitele metode de rezolvare implice, cum ar fi metoda lui Euler implicită, permit un control suficient al erorii cu un pas relativ mare, crescând astfel eficiența

7.7. Metode multipas

7.7.1. Generarea metodelor multipas

- ca un prim exemplu, considerăm următoarea metodă cu doi pași:

Algoritmul 4 (Metoda Adams–Bashforth cu doi pași)

$$w_{i+1} = w_i + h \left[\frac{3}{2}f(t_i, w_i) - \frac{1}{2}f(t_{i-1}, w_{i-1}) \right]. \quad (27)$$

- câtă vreme metoda mijlocului de ordinul doi,

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right),$$

- necesită două evaluări ale funcției f la fiecare pas, metoda Adams–Bashforth cu doi pași necesită doar o singură evaluare nouă la fiecare pas (una este stocată din pasul anterior)
- vom vedea în cele ce urmează că (27) este tot o metodă de ordinul doi
 - prin urmare, metodele multipas pot să obțină același ordin cu un efort computațional redus—de obicei, doar o singură evaluare de funcție la fiecare pas
 - deoarece metodele multipas folosesc mai mult de o valoare w anterioară, ele au nevoie de mai multe informații pentru a putea fi pornite
 - faza de pornire pentru o metodă cu s pași constă de obicei dintr-o metodă unipas care folosește pe w_0 pentru a produce $s-1$ valori w_1, w_2, \dots, w_{s-1} , înainte ca metoda multipas să poată fi folosită
 - metoda Adams–Bashforth cu doi pași (27) are nevoie de w_1 , împreună cu condiția inițială dată w_0 , pentru a putea începe
 - Figura 6(a) prezintă rezultatul aplicării metodei Adams–Bashforth cu doi pași pentru problema cu valoare inițială (9) de la începutul capitolului, folosind pasul $h = 0.05$ și aplicând metoda trapezului pentru a porni
 - partea (b) a figurii prezintă folosirea unei metode cu doi pași diferită
 - instabilitatea sa va fi subiectul discuției noastre despre analiza stabilității din subsecțiunile următoare
 - o metodă cu s pași generală are forma

$$\begin{aligned} w_{i+1} = & a_1 w_i + a_2 w_{i-1} + \cdots + a_s w_{i-s+1} + h[b_0 f_{i+1} + b_1 f_i \\ & + b_2 f_{i-1} + \cdots + b_s f_{i-s+1}]. \end{aligned} \quad (28)$$

- mărimea pasului este h , și folosim notația prescurtată

$$f_i \equiv f(t_i, w_i).$$

- dacă $b_0 = 0$, metoda este explicită
- dacă $b_0 \neq 0$, metoda este implicită
- vom discuta modul de utilizare a metodelor implice în scurt timp
- în primul rând, trebuie să arătăm cum sunt deduse metodele multipas și cum să decidem care dintre ele funcționează cel mai bine
- problemele principale care apar la metodele multipas pot fi introduse în cazul relativ simplu al metodelor cu doi pași, deci vom începe de acolo
- o metodă cu doi pași generală (cu $s = 2$ în (28)) are forma

$$w_{i+1} = a_1 w_i + a_2 w_{i-1} + h[b_0 f_{i+1} + b_1 f_i + b_2 f_{i-1}]. \quad (29)$$

- pentru a dezvolta o metodă multipas, trebuie să folosim Teorema lui Taylor, deoarece trebuie să potrivim cât mai mulți termeni posibil ai dezvoltării în serie Taylor a soluției cu termenii metodei
- ceea ce va rămâne va fi eroarea locală de trunchiere
- presupunem că toate valorile w_i anterioare sunt corecte—adică, $w_i = y_i$ și $w_{i-1} = y_{i-1}$ în (29)
- ecuația diferențială ne spune că $y'_i = f_i$, deci toți termenii pot fi dezvoltăți în serie Taylor după cum urmează:

$$\begin{aligned} w_{i+1} = & a_1 w_i + a_2 w_{i-1} + h[b_0 f_{i+1} + b_1 f_i + b_2 f_{i-1}] \\ = & a_1[y_i] \\ & + a_2[y_i - hy'_i + \frac{h^2}{2}y''_i - \frac{h^3}{6}y'''_i + \frac{h^4}{24}y''''_i - \cdots] \\ & + b_0[hy'_i + h^2y''_i + \frac{h^3}{2}y'''_i + \frac{h^4}{6}y''''_i + \cdots] \\ & + b_1[hy'_i] \\ & + b_2[hy'_i - h^2y''_i + \frac{h^3}{2}y'''_i - \frac{h^4}{6}y''''_i + \cdots]. \end{aligned}$$

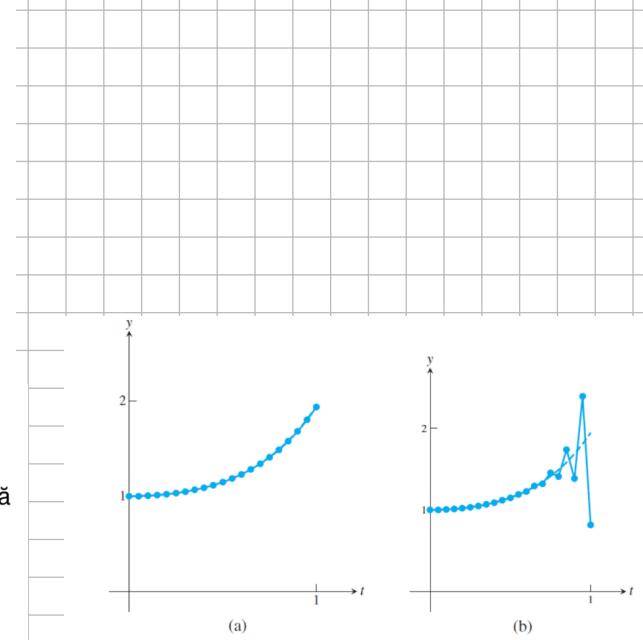


Figura 6: Metode cu doi pași aplicate pentru PVI (9). Curba punctată reprezintă soluția corectă. Pasul este $h = 0.05$. (a) Metoda Adams–Bashforth cu doi pași reprezentată sub formă punctelor. (b) Metoda instabilă (36) reprezentată sub formă punctelor.

- făcând adunarea, obținem

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= (a_1 + a_2)y_i + (b_0 + b_1 + b_2 - a_2)hy'_i + (a_2 - 2b_2 + 2b_0)\frac{h^2}{2}y''_i \\ &\quad + (-a_2 + 3b_0 + 3b_2)\frac{h^3}{6}y'''_i + (a_2 + 4b_0 - 4b_2)\frac{h^4}{24}y''''_i + \dots \quad (30) \end{aligned}$$

- alegând valorile a_i și b_i corespunzător, eroarea locală de trunchiere $y_{i+1} - w_{i+1}$, unde

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2}y''_i + \frac{h^3}{6}y'''_i + \dots, \quad (31)$$

poate fi făcută cât se poate de mică, presupunând că derivatele implicate există de fapt

- în continuare, vom investiga posibilitățile care există

7.7.2. Metode multipas explicite

- pentru a căuta metode explicite, luăm $b_0 = 0$
- o metodă de ordinul doi poate fi dezvoltată prin potrivirea termenilor din (30) și (31) până la inclusiv termenul care conține pe h^2 , ceea ce face ca eroarea locală de trunchiere să fie $O(h^3)$
- comparând termenii, obținem sistemul

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ -a_2 + b_1 + b_2 &= 1 \\ a_2 - 2b_2 &= 1. \end{aligned} \quad (32)$$

- sunt trei ecuații în patru necunoscute a_1, a_2, b_1, b_2 , deci va fi posibil să găsim o infinitate de metode explicite de ordinul doi
- una dintre soluții corespunde unei metode de ordinul trei
- observăm că ecuațiile pot fi scrise în funcție de a_1 după cum urmează:

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 - a_1 \\ b_1 &= 2 - \frac{1}{2}a_1 \\ b_2 &= -\frac{1}{2}a_1. \end{aligned} \quad (33)$$

- eroarea locală de trunchiere va fi

$$\begin{aligned} y_{i+1} - w_{i+1} &= \frac{1}{6}h^3y'''_i - \frac{3b_2 - a_2}{6}h^3y'''_i + O(h^4) \\ &= \frac{1 - 3b_2 + a_2}{6}h^3y'''_i + O(h^4) \\ &= \frac{4 + a_1}{12}h^3y'''_i + O(h^4). \end{aligned} \quad (34)$$

- suntem liberi să luăm o valoare arbitrară pentru a_1 —orice alegere conduce la o metodă de ordinul doi, după cum tocmai am arătat
- luând $a_1 = 1$, obținem metoda Adams–Bashforth de ordinul doi (27)
- observăm că $a_2 = 0$ din prima ecuație, și $b_2 = -1/2$ și $b_1 = 3/2$
- conform cu (34), eroarea locală de trunchiere este $5/12h^3y'''(t_i) + O(h^4)$
- alternativ, am putea lua $a_1 = 1/2$ o altă metodă de ordinul doi cu doi pași, cu $a_2 = 1/2$, $b_1 = 7/4$, și $b_2 = -1/4$:

$$w_{i+1} = \frac{1}{2}w_i + \frac{1}{2}w_{i-1} + h\left[\frac{7}{4}f_i - \frac{1}{4}f_{i-1}\right]. \quad (35)$$

- această metodă are eroarea locală de trunchiere $3/8h^3y'''(t_i) + O(h^4)$
- o a treia alegere, $a_1 = -1$, ne dă metoda de ordinul doi cu doi pași

$$w_{i+1} = -w_i + 2w_{i-1} + h\left[\frac{5}{2}f_i + \frac{1}{2}f_{i-1}\right] \quad (36)$$

care a fost folosită în Figura 6(b)

- eșecul metodei (36) conduce la o condiție de stabilitate importantă care trebuie îndeplinită de către metodele multipas
- să considerăm o PVI și mai simplă

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (37)$$

- aplicând metoda (36) pentru acest exemplu, obținem

$$w_{i+1} = -w_i + 2w_{i-1} + h[0]. \quad (38)$$

- o soluție $\{w_i\}$ pentru (38) este $w_i \equiv 0$
- totuși, există și altele

- înlocuind forma $w_i = c\lambda^i$ în (38), obținem

$$\begin{aligned} c\lambda^{i+1} + c\lambda^i - 2c\lambda^{i-1} &= 0 \\ c\lambda^{i-1}(\lambda^2 + \lambda - 2) &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

- soluțiile „polinomului caracteristic” $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ al acestei relații de recurență sunt 1 și -2
- ultima reprezintă o problemă—înseamnă că soluțiile de formă $(-2)^i c$ sunt soluții ale metodei pentru un c constant
- aceasta permite ca erori mici de rotunjire și de trunchiere să crească foarte rapid la valori observabile și să distrugă calculul, după cum se vede în Figura 6
- pentru a evita această posibilitate, este important ca rădăcinile polinomului caracteristic al metodei să fie mai mici decât 1 în valoare absolută
- aceasta conduce la următoarea definiție:

Definiția 1

Metoda multipas (28) este **stabilă** dacă rădăcinile polinomului $P(x) = x^s - a_1x^{s-1} - \dots - a_s$ sunt mai mici decât 1 în valoare absolută, și orice rădăcini cu valoarea absolută 1 sunt rădăcini simple. O metodă stabilă pentru care 1 este singura rădăcină de valoare absolută 1 se numește **puternic stabilă**; altfel, se numește **slab stabilă**.

- metoda Adams–Bashforth (27) are rădăcinile 0 și 1, ceea ce o face puternic stabilă, în vreme ce (36) are rădăcinile -2 și 1, ceea ce o face instabilă
- polinomul caracteristic al formulei generale cu doi pași, folosind faptul că $a_1 = 1 - a_2$ din (33), este

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - a_1x - a_2 \\ &= x^2 - a_1x - 1 + a_1 \\ &= (x - 1)(x - a_1 + 1), \end{aligned}$$

ale cărui rădăcini sunt 1 și $a_1 - 1$

- întorcându-ne la (33), putem găsi o metodă de ordinul doi slab stabilă luând $a_1 = 0$
- atunci rădăcini sunt 1 și -1, ceea ce conduce la următoarea metodă de ordinul doi cu doi pași slab stabilă:

$$w_{i+1} = w_{i-1} + 2hf_i. \quad (40)$$

Exemplul 10

- aplicați metoda puternic stabilă (27), metoda slab stabilă (40), și metoda instabilă (36) problemei cu valoare inițială

$$\begin{cases} y' = -3y \\ y(0) = 1 \\ t \in [0, 2] \end{cases} \quad (41)$$

- soluția este curba $y = e^{-3t}$
- Figura 7 prezintă cele trei aproximări ale soluției pentru pasul $h = 0.1$
- metoda slab stabilă și metoda instabilă par să urmeze îndeaproape soluția corectă o vreme, după care se îndepărtează rapid de ea
- reducerea mărimii pasului nu elimină problema, deși s-ar putea să întârzie debutul instabilității

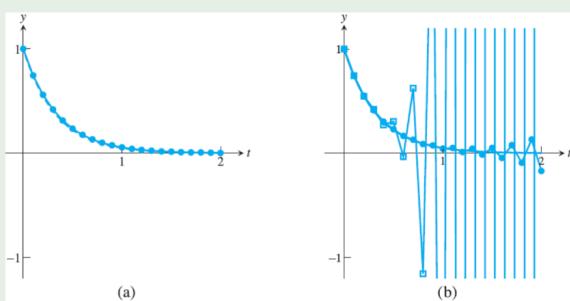


Figura 7: Comparație între metodele de ordinul doi cu doi pași aplicate PVI (41). (a) Metoda Adams–Bashforth. (b) Metoda slab stabilă (reprezentată prin puncte) și metoda instabilă (reprezentată prin pătrate).

- cu încă două definiții, putem să dăm teorema fundamentală a metodelor multipas

Definiția 2

O metodă multipas este **consistentă** dacă are ordinul cel puțin 1. O metodă de rezolvare este **convergentă** dacă soluția aproximativă converge la soluția exactă pentru orice t , când $h \rightarrow 0$.

Teorema 1 (Teorema lui Dahlquist)

Presupunem că valorile inițiale sunt corecte. Atunci o metodă multipas (28) este convergentă dacă și numai dacă este stabilă și consistentă.

- Teorema 1 ne spune că, pentru a evita o catastrofă ca cea din Figura 7(b) pentru o metodă de ordinul doi cu doi pași, trebuie să verificăm stabilitatea metodei
- o rădăcină a polinomului characteristic trebuie să fie 1
- metodele Adams–Bashforth sunt cele ale căror rădăcini diferite de 1 sunt toate 0
- din acest motiv, metoda Adams–Bashforth cu doi pași este considerată cea mai stabilă dintre metodele cu doi pași
- deducerea metodelor de ordin superior, folosind mai mulți pași, este perfect analoagă deducerii anterioare pentru metodele cu doi pași
- se poate demonstra că următoarele metode sunt puternic stabile:

Algoritmul 5 (Metoda Adams–Bashforth cu trei pași (de ordinul trei))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12} [23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}]. \quad (42)$$

Algoritmul 6 (Metoda Adams–Bashforth cu patru pași (de ordinul patru))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]. \quad (43)$$

- când coeficientul b_0 din (28) este nul, metoda este implicită
- cea mai simplă metodă de ordinul doi implicită este metoda trapezului implicită:

Algoritmul 7 (Metoda trapezului implicită (de ordinul doi))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} [f_{i+1} + f_i]. \quad (44)$$

- dacă termenul f_{i+1} este înlocuit cu evaluarea lui f în „predicția” pentru w_{i+1} dată de metoda lui Euler, atunci aceasta devine metoda trapezului explicită
- metoda trapezului implicită este numită de asemenea metoda Adams–Moulton cu un pas, prin analogie cu ceea ce urmează
- un exemplu de metodă implicită cu doi pași este metoda Adams–Moulton cu doi pași:

Algoritmul 8 (Metoda Adams–Moulton cu doi pași (de ordinul trei))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12} [5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}]. \quad (45)$$

- există diferențe semnificative între metodele implicate și cele explicite
- în primul rând, este posibil să obținem o metodă implicită de ordinul trei stabilă prin folosirea a doar doi pași anteriori, spre deosebire de cazul explicit, unde acest lucru nu este posibil
- în al doilea rând, eroarea locală de trunchiere este mai mică pentru metodele implicate
- pe de altă parte, metodele implicate au dificultatea inherentă a procesării suplimentare necesare pentru a evalua partea implicită
- din aceste motive, metodele implicate sunt adesea folosite pe post de corector într-o pereche „predictor–corector”
- metodele implicate și explicite de același ordin sunt folosite împreună
- fiecare pas este o combinație a unei predicții date de o metodă explicită și o corecție dată de o metodă implicită, unde metoda implicită folosește valoarea prezisă w_{i+1} pentru a calcula f_{i+1}
- metodele predictor–corector necesită un efort computațional aproksimativ dublu, deoarece o evaluare a termenului drept f al ecuației diferențiale este făcută atât în partea de predicție cât și în partea de corecție a pasului
- totuși, precizia câștigată și stabilitatea fac ca acest preț să merite să fie plătit

- o metodă simplă predictor–corector este formată din metoda Adams–Bashforth explicită cu doi pași pe post de predictor și din metoda Adams–Moulton implicită cu un pas pe post de corector
- ambele sunt metode de ordinul doi
- metoda Adams–Moulton cu doi pași se deduce la fel ca celelalte metode explicite
- refacem sistemul de ecuații (32), dar fără a impune ca $b_0 = 0$
- deoarece acum există un parametru în plus (b_0), putem să potrivim (30) și (31) până la termenii de gradul 3 folosind doar o metodă cu doi pași, și punând eroarea locală de trunchiere în termenul cu h^4
- analogul lui (32) este

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ -a_2 + b_0 + b_1 + b_2 &= 1 \\ a_2 + 2b_0 - 2b_2 &= 1 \\ -a_2 + 3b_0 + 3b_2 &= 1. \end{aligned} \quad (46)$$

- satisfacerea acestor ecuații rezultă într-o metodă implicită de ordinul trei cu doi pași
- ecuațiile pot fi scrise în funcție de a_1 după cum urmează:

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 - a_1 \\ b_0 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{12}a_1 \\ b_1 &= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}a_1 \\ b_2 &= \frac{1}{3} - \frac{5}{12}a_1. \end{aligned} \quad (47)$$

- eroarea locală de trunchiere este

$$\begin{aligned} y_{i+1} - w_{i+1} &= \frac{1}{24}h^4y_i'''' - \frac{4b_0 - 4b_2 + a_2}{24}h^4y_i'''' + O(h^5) \\ &= \frac{1 - a_2 - 4b_0 + 4b_2}{24}h^4y_i'''' + O(h^5) \\ &= -\frac{a_1}{24}h^4y_i'''' + O(h^5). \end{aligned}$$

- ordinul metodei va fi trei, cătă vreme $a_1 \neq 0$
- deoarece a_1 este un parametru liber, există o infinitate de metode隐式 de ordinul trei cu doi pași
- metoda Adams–Moulton cu doi pași folosește alegerea $a_1 = 1$
- se poate demonstra că această metodă este puternic stabilă
- alte alegeri ale lui a_1 sunt posibile
- observăm că există încă o alegere specială, $a_1 = 0$
- din formula erorii locale de trunchiere, vedem că această metodă cu doi pași va fi de ordinul patru

Algoritmul 9 (Metoda Milne–Simpson)

$$w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}[f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}]. \quad (48)$$

- aceasta este doar slab stabilă
- din acest motiv, este susceptibilă la amplificarea erorii
- terminologia sugestivă a metodei trapezului implicită (44) și a metodei Milne–Simpson (48) aduc aminte de formulele pentru integrarea numerică din Capitolul 6
- de fapt, deși nu am subliniat această abordare, multe din formulele multipas pe care le-am prezentat pot fi deduse alternativ prin integrarea interpolanților de aproximare, într-o analogie cu schemele de integrare numerică

- ideea de bază din spatele acestei abordări este aceea că ecuația diferențială $y' = f(t, y)$ poate fi integrată pe intervalul $[t_i, t_{i+1}]$ pentru a da

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y) dt. \quad (49)$$

- aplicând o schemă de integrare numerică pentru a aproxima integrala din (49) rezultă într-o metodă multipas
- de exemplu, folosind regula trapezului pentru integrarea numerică din Capitolul 6, obținem

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i) + O(h^2),$$

care este metoda trapezului de ordinul doi pentru EDO

- dacă aproximăm integrala folosind regula lui Simpson, rezultatul este

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \frac{h}{3}(f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}) + O(h^4),$$

metoda Milne–Simpson de ordinul patru (48)

- în esență, aproximăm partea dreaptă a ecuației diferențiale printr-un polinom și integrăm, exact ca în cazul integrării numerice
- această abordare poate fi extinsă pentru a recupera multe dintre metodele multipas pe care le-am prezentat deja, prin schimbarea gradului de interpolare și a locației punctelor de interpolare
- deși această abordare este o modalitate mai geometrică de a deduce anumite metode multipas, ea nu oferă nicio perspectivă deosebită asupra stabilității metodei de rezolvare rezultate
- prin extinderea metodelor anterioare, metodele Adams–Moulton de ordin superior pot fi deduse, folosind în fiecare caz $a_1 = 1$:

Algoritmul 10 (Metoda Adams–Moulton cu trei pași (de ordinul patru))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]. \quad (50)$$

Algoritmul 11 (Metoda Adams–Moulton cu patru pași (de ordinul cinci))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720}[251f_{i+1} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3}]. \quad (51)$$