MS
(tema 13 - S 13)

5. Numărul clienţilor ce sosesc la un magazin este modelat de un proces Poisson cu rata $\lambda = 4$ clienti/ ora. Să se determine:

a) Să se determine probabilitatea sa existe 2 clienţi în intervalul $(8, 8:20]$.

b) Să se determine probabilitatea sa existe un client în intervalul $(8, 8:20]$ şi 3 clienţi în intervalul $(8:20, 9]$.

Y_1 Y_2

a) $Y = N_{8:20} - N_8 \sim Pois\left(4 \cdot \frac{1}{3}\right)$

$$P(Y=2) = \frac{e^{-\frac{4}{3}} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2}{2!}$$

b) $Y_1 \sim Pois\left(4 \cdot \frac{1}{3}\right) \quad Y_2 \sim Pois\left(4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}\right)$

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 3) = P(Y_1 = 1) \cdot P(Y_2 = 3) = \frac{e^{-\frac{4}{3}} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^1}{1!} \cdot \frac{e^{-\frac{8}{3}} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3}{3!}$$

6. Căderea de reţea la o bancă este un proces Poisson de rată $\lambda = 3/$ an . Care este distribuţia de probabilitate a intervalului de timp, X, dintre două căderi consecutive? Care este media lui X? Care este probabilitatea ca în primul trimestru al unui an să nu cadă reţeaua?

$Pois(3 \cdot t)$

$$X \sim exp\left(\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\frac{1}{3}} \cdot e^{-\frac{x}{\frac{1}{3}}}, & x > 0 \end{cases}$$

$$M(X) = \theta = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}$$

$$P\left(N_{\frac{1}{3}} = 0\right) = \frac{e^{-3 \cdot \frac{1}{3}} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)^0}{0!} = \frac{1}{e}$$ (vrem să nu cadă reţeaua)

7. Fluxul sosirilor job-urilor la un server este un proces Poisson de rata 10 joburi/ oră. Să se calculeze probabilitatea ca intervalul de timp dintre sosirile a două joburi consecutive să fie: a) mai lung de 2 minute? b) între 3 şi 5 minute?
Indicaţie: se va calcula λ'- rata pe minut si apoi se foloseşte faptul că $X \sim Exp(1/\lambda')$.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \text{ joburi} \ \ldots \ 60 \text{ min} \\ x \text{ joburi} \ \ldots \ 1 \text{ min} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda' = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

$$X \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda'} = 6\right)$$

$$P(X > 2) = 1 - F_X(2)$$

$$P(X > 3 \cap X < 5) = P(X < 5 \mid X > 3) \cdot P(X > 3) = P(X < 5) \cdot P(X > 3) =$$

$$= (1 - P(X>5)) \cdot (1 - F_X(3)) = F_X(5)(1 - F_X(3))$$

8. Căderile de conexiune într-o reţea de comunicaţie urmează o lege Poisson de rată $\lambda = 2.4/$ zi.

a) Să se calculeze probabilitatea ca intervalul de timp dintre două eşecuri consecutive să fie mai mic de 3 zile.

b) Probabilitatea să se producă 8 eşecuri în 3 zile.

c) Să se determine timpul mediu între două eşecuri consecutive.

a) $X \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2{,}4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}\right)$

$P(X<3) = F_X(3)$

b) $P(N_3 = 8) = \frac{e^{-2{,}4 \cdot 3} \cdot (2{,}4 \cdot 3)^8}{8!}$

c) $M(X) = \theta = \frac{5}{12}$

9. Procesul Poisson al fluxului intrărilor SMS-urilor la o emisiune TV se constituie din 2 subfluxuri independente, recepţionate de receptorul A, respectiv B. Rata celor ce sosesc la A este de 10/minut, iar la B de 13/minut. Cele două receptoare transmit SMS-urile unui receptor central ce le şi afişează instantaneu pe un banner.

a) Care este timpul mediu dintre momentele afişarii a două SMS-uri consecutive pe banner.

b) Din momentul deschiderii televizorului care este timpul mediu scurs până la afişarea a 10 SMS-uri?

$\left.\begin{array}{l}\lambda_A = 10/\text{minut}\\ \lambda_B = 13/\text{minut}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 23/\text{minut}$

a) $X \sim Exp\left(\frac{1}{23}\right)$

$\Rightarrow M(X) = \frac{1}{23}$

b) $\frac{10}{23}$

10. Sosirile într-un sistem coadă formează un proces Poisson cu o rată de 40 de clienţi pe oră. Serverul sistemului funcţionează între orele 9:00 şi 19:00. $\rightarrow 40$ c/oră

a) Care este rata sosirilor într-o zi de lucru?

b) Care este probabilitatea ca nici un client să nu sosească între 9:00 şi 9:15?

c) Să se calculeze probabilitatea ca nici un client să nu sosească între 9:00 şi 9:15 ştiind că între 9:00 şi 9:30 au sosit 3 clienţi.

Indicaţie: b) Se ia minutul ca unitate de timp. În acest context rata procesului sosirilor este $\lambda = 40/60 = 2/3$. Deci (N_t) are distribuţia Poisson de parametru $2t/3$;

c) Se cere $P(N_{15} = 0 \mid N_{30} = 3)$.

$40 \ \ldots \ 60$

$\lambda' \ \ldots \ 1$

$\Rightarrow \lambda' = \frac{4\cancel{0}}{6\cancel{0}} = \frac{2}{3}$

a) 400 clienţi / zi

b) $P(N_{15} = 0) = \frac{e^{-\frac{2}{3} \cdot 15} \, 10^0}{0!} = \frac{1}{e^{10}}$

c) $P(N_{15}=0 \mid N_{30}=3) = P(N_{15}=0 \mid \overset{0}{N_{15}} + N_{15-30}=3) = P(N_{15}=0 \mid N_{15-30}=3) =$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{3}\cdot 15}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 15\right)^0}{0!}$$

11. Bancomatul de la Facultatea de Electrotehnică este accesat în mod independent, la momente aleatoare de timp, de către clienţii ce lucrează şi învaţă în clădire. Rata sosirilor clienţilor studenţi la bancomat este de 8 pe oră, iar cea a angajaţilor de 2 pe oră.

Dacă X este variabila aleatoare ce dă numărul clienţilor (din Electro) sosiţi la bancomat între ora 10 şi 11:30, să se calculeze $P(X=5)$.

Indicaţie: Procesul Poisson (N_t) al sosirilor la bancomat se obţine din mixarea celor două fluxuri: fluxul sosirii studenţilor şi fluxul sosirii angajaţilor. Deci rata procesului (N_t) este $8+2=10$ clienţi pe oră sau echivalent $\lambda = 1/6$ clienţi pe minut.

Variabila aleatoare X este variabila N_{90}, adică numărul clienţilor sosiţi în 90 de minute (între ora 10 şi ora 11:30).

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 8 \text{ c.s / oră}\\ \lambda_2 = 2 \text{ c.a / oră}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 10 \text{ c / oră} \quad \begin{array}{l}\dots 60\\ x \dots 1\end{array} \Bigg\} \Rightarrow x = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

$Y \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$

$$P(N_{90}=5) = \frac{e^{-\frac{1}{6}\cdot 90}\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot 90\right)^5}{5!}$$