

Mostenire

Densitatea de probabilitate a unui vector aleator continuu (X, Y) este $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/4, & \text{daca } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Să se calculeze $P(X \leq 1, Y \leq 1)$.

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{4} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}$$

Selectați răspunsul corect:

- a. 1/4
- b. 1
- c. 1/2
- d. 1/8

Your answer is correct.

Răspunsul corect este: 1/4

Dacă $Y=2X+1$ și $\sigma^2(X)=25$, sa se scrie matricea de covarianta a vectorului (X, Y) .

Selectați răspunsul corect:

a. $\Sigma = \begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 100 \end{pmatrix}$

b. $\Sigma = \begin{pmatrix} 25 & -500 \\ -500 & 100 \end{pmatrix}$

c. $\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & -50 \\ -50 & 10 \end{pmatrix}$

d. $\Sigma = \begin{pmatrix} 25 & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix}$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(2x+1) = 4 \text{Var}(x) = 4 \cdot 25 = 100$$

$$a > 0 \Rightarrow \text{Cov}(x, y) = 1$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(x, y) = 1 \cdot 10 \cdot 5 = 50$$

Your answer is correct.

Răspunsul corect este: $\Sigma = \begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 100 \end{pmatrix}$

Se consideră un lanț Markov cu două stări, $S = \{1, 2\}$, a cărui matrice de tranziție este

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este lanțul Markov ireductibil? Cât este perioada stării 1?



✓

ap: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Selectați răspunsul corect:

a. Da, $\tau_1 = 0$

b. Nu, $\tau_1 = 0$

c. Da, $\tau_1 = 2$

d. Da, $\tau_1 = 1$

Your answer is correct.

Răspunsul corect este: Da, $\tau_1 = 2$

Numarul de cereri catre baza de date a unui computer este un Proces Poisson cu rata $\lambda = 4$ cereri pe secunda.

Care este probabilitatea sa existe exact 4 cereri in prima secunda de observatie?

Selectați răspunsul corect:

a. $\frac{4}{3e^4}$

b. $\frac{1}{e^4}$

c. $\frac{13}{3e^4}$

d. $\frac{32}{3e^4}$

$$P(N_1=4) = \frac{e^{-4} 4^4}{4!}$$

Your answer is correct.

Răspunsul corect este: $\frac{32}{3e^4}$

In primul an de operare Dropbox Romania va accepta un milion de clienti. Se estimeaza ca cererea de memorie de stocare X_i , de catre un user, $i, i = 1 \dots 10^6$, are media $m = 1.5 \text{Gb}$ si abaterea standard de $\sigma = 0.5 \text{Gb}$.

Ce volum, x , de Gb trebuie asigurat, daca cu o probabilitate de $p = 0.9$, cererea totala, C , va fi de cel putin x Gb?

Se va folosi $z_{0.1} = -1.28$.

Selectati raspunsul corect:

- a. 1.500.000Gb
- b. 1.599.230Gb
- c. 1.499.360Gb
- d. 1.400.000Gb

Your answer is correct.

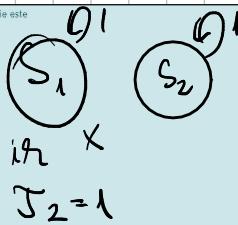
Se consideră un lanț Markov cu două stări, $S = \{1, 2\}$, a cărui matrice de tranziție este

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Este lanțul Markov ireductibil? Cât este perioada stării 2?

Selectati raspunsul corect:

- a. Da, $\tau_2 = 1$
- b. Da, $\tau_2 = 2$
- c. Nu, $\tau_2 = 2$
- d. Nu, $\tau_2 = 1$



Your answer is correct.

Raspunsul corect este: Nu, $\tau_2 = 1$

Numărul de apeluri primite la telefonul de la serviciu este un Proces Poisson cu rata $\lambda = 4$ apeluri pe oră. Care este probabilitatea că telefonul să sume de 2 ori în primele două ore de lucru?

Selectati raspunsul corect:

- a. $16e^{-4}$
- b. $32e^{-8}$
- c. $12e^{-6}$
- d. e^{-8}

$$P(N_L=2) = \frac{e^{-8} \cdot 8^2}{2!}$$

Densitatea de probabilitate a unui vector aleator continuu (X, Y) este $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/4, & \text{daca } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$\text{Să se calculeze } P(X + Y > 2) = \int_0^2 \int_{2-x}^2 \frac{1}{4} dy dx = \int_0^2 \frac{1}{4} (2 - 2 + x) dx = \int_0^2 \frac{1}{4} x dx = \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$$

Durata in secunde a serviciului procesorului pentru o clasa de job-uri este o variabila aleatoare distribuita hiper-exponential de densitate $f(x) = \frac{1}{2}f_1(x) + \frac{1}{2}f_2(x)$, cele două componente având parametrii $\theta_1 = 10$ și $\theta_2 = 8$. Sa se determine durata medie a serviciului pentru această clasa de joburi.

Selectati raspunsul corect:

- a. 1/18
- b. 9
- c. 1/9
- d. 18

Your answer is incorrect.

Raspunsul corect este: 9

Dat un proces Poisson (N_t) de rata λ , atunci variabila aleatoare care da numarul de evenimente in intervalul $(s, t]$ depinde de

Selectati raspunsul corect:

- a. lungimea intervalului
- b. niciunul dintre raspunsuri
- c. extremitatea dreapta a intervalului

Se consideră lanțul Markov cu trei stări, $S = \{1, 2, 3\}$, a cărui matrice de tranziție este

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine distribuția de probabilitate a stărilor la momentul $n = 2$ știind că distribuția inițială de probabilitate este $\pi_0 = [1/2, 1/4, 1/2]^T$.

Să se determine perioada stării 1.

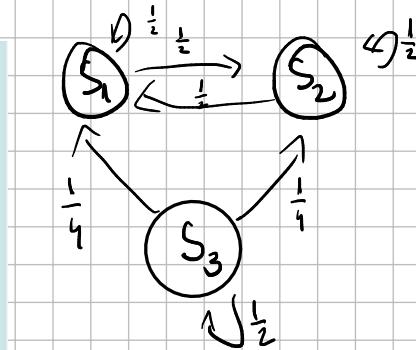
$$\pi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} Q^2$$

Selectați răspunsul corect:

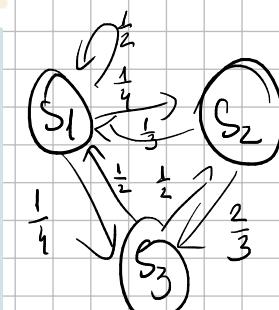
- a. $\pi_2 = [10/32, 12/32, 10/32]^T, \tau_1 = 2$
- b. $\pi_2 = [15/32, 15/32, 1/16]^T, \tau_1 = 1$
- c. $\pi_2 = [1/32, 15/32, 1/2]^T, \tau_1 = 1$
- d. $\pi_2 = [5/16, 10/16, 1/16]^T, \tau_1 = 1$

Your answer is correct.

Răspunsul corect este: $\pi_2 = [15/32, 15/32, 1/16]^T, \tau_1 = 1$



$$1: S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \quad 2: S_1 \rightarrow S_1 \\ S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \quad 3: S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3$$



$$S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \quad 1 \\ S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \quad 2 \Rightarrow 1$$

Covarianța unui vector (X, Y) se definește ca fiind

$$\text{cov}(X, Y) := M[(X - M(X))(Y - M(Y))]$$

Covarianța are următoarele proprietăți:

- $\text{cov}(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$
- $\text{cov}(X, X) = \sigma^2(X);$
- $\text{cov}(X, a) = 0$
- $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X);$
- $\text{cov}(aX, Y) = a \text{cov}(X, Y), a \in \mathbb{R};$
- $\text{cov}(X + Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z);$
- $\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\text{cov}(X, Y);$
- Dacă în plus X și Y sunt variabile aleatoare independente, atunci $\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$.

$$\text{Analog } M(y^2) = 1$$

• X, Y sunt independente, atunci $\text{cov}(X, Y) = 0$ (Reciproca nu este adeverată!)

itemize **Coefficientul de corelație** a două variabile aleatoare X și Y , de abateri standard nenele σ_X, σ_Y , este

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)} \in [-1, 1]$$

$$\frac{1}{\theta} \cdot \frac{\theta}{1+\theta} = \frac{1}{1+\theta}$$

Fie densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\theta}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} & \text{daca } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altele} \end{cases}, \text{ unde parametru } \theta > 0 \text{ este necunoscut.}$$

1. Se determină media teoretică și apoi estimatorul parametrului θ .

2. Se determină estimatorul verosimilității maxime al parametrului θ pe baza unui eșantion oarecare de volum n .

$$1) M(x) = \int_0^1 \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \frac{1}{\frac{1-\theta}{\theta} + 2} = \frac{1}{1+\theta} = \bar{x} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1-\bar{x}}{\bar{x}}$$

Activate Windows
Go to Settings to activate Windows

$$2) L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\theta} \right)^n \prod_{i=1}^n x_i^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

$$l(\theta) = n \ln \frac{1}{\theta} + \frac{1-\theta}{\theta} \ln \prod_{i=1}^n x_i$$

$$\ell'(\theta) = n \frac{1}{\theta} \cdot \left(-\frac{1}{\theta^2}\right) + \frac{-\theta - (1-\theta)}{\theta^2} \ln \bar{x}_i =$$

$$= -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \ln \bar{x}_i$$

Fie X_1, X_2, \dots, X_{100} variabile aleatoare discrete i.i.d. având distribuția de probabilitate Poisson de parametru $\lambda = 25$. Să se estimeze probabilitatea ca variabila aleatoare medie aritmetică

$\bar{X}_{100} = (X_1 + X_2 + \dots + X_{100})/100$ să fie mai mare decât 25.5.

Selectați răspunsul corect:

- a. $2\Phi(1) - 1$ ✗
- b. $\Phi(1)$
- c. $1 - \Phi(1)$
- d. $\Phi(1) - 1$

AptH(25, $\frac{25}{100}$)

Your answer is incorrect.

Răspunsul corect este: $1 - \Phi(1)$



$$P(\bar{X}_{100} > 25.5) =$$

$$= 1 - P(\bar{X}_{100} \leq 25.5) = 1 - P\left(\frac{\bar{X}_{100} - 25}{\frac{5}{\sqrt{10}}} \leq \frac{25.5 - 25}{\frac{5}{\sqrt{10}}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi(-1)$$

Fie X, Y două variabile aleatoare independente și uniform distribuite, $X \sim \text{Unif}[0, 2]$, $Y \sim \text{Unif}[-1, 3]$.

1. Să se calculeze probabilitatea ca vectorul (X, Y) să ia valori în pătratul $G = [0, 1] \times [0, 1]$.
2. Să se scrie pseudo-codul de simulare a unei valori de observație a vectorului (X, Y) .
3. Să se calculeze $M(X \cdot Y)$ și $\text{cov}(X, Y)$.

a) $P = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$

$$f = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{in } G \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

b) $x = 2 * \text{urand}();$
 $y = -1 + 4 * \text{urand}();$

return (x,y);

c) $M(x \cdot y) = \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \frac{1}{8} dy dx = \frac{1}{8} \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^3 dx =$

$$= \frac{1}{8} \int_0^2 x \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

$$\text{cov}(x, y) = M(xy) - M(x) \cdot M(y) = 1 - 1 \cdot 2 = -1$$

$$f_x = \int_{-1}^3 \frac{1}{8} dy = \frac{1}{8} (3 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$M(x) = \int_0^2 \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

$$f_y = \int_0^2 \frac{1}{8} dx = \frac{1}{4} \Rightarrow M(y) = \int_{-1}^3 y \cdot \frac{1}{4} dy = \frac{1}{4} (9 - 1) = 2$$

Fie vectorul (X, Y) a cărui densitate de probabilitate este $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/2, & \text{dacă } x \in [1, 2], y \in [0, 2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$C : x_0 = 1,5 \quad y_0 = 1$$

1. Să se determine probabilitatea $P((X, Y) \in G)$, unde $G = \{(x, y) : (x - 1.5)^2 + (y - 1)^2 \leq 0.5^2\}$.

2. Să se calculeze $\text{cov}(X, Y)$.

3. Să se scrie pseudo-codul **optim** de generare a unui punct aleator **uniform** în mulțimea G .

$$h = 0,5$$

$$1. P = \frac{\pi \cdot 0,5^2}{1 \cdot 2}$$

$$2. \text{cov}(x, y) = M(xy) - M(x) \cdot M(y)$$

se calc $f_x, f_y \dots$