MS

(seminar 11 - S 11)

- partea 2 -

Inegalitatea Markov:

Fie X o v.a. astfel încât $X \geq 0$, adică X ia valori nenegative. Dacă X are medie finită, atunci, pentru $a > 0$, avem
$$P(X \geq a) \leq \frac{M(X)}{a}.$$

Inegalitatea Cebîşev

Fie X o v.a. arbitrară de medie $M(X)$ şi dispersie $\sigma^2(X)$ finite. Atunci:
$$P(|X - M(X)| \geq a) \leq \frac{\sigma^2(X)}{a^2},\ a > 0.$$

1. Fie $X \sim Bin(n, p)$, unde $p = 1/2$. Folosind inegalităţile Markov şi Cebîsev, să se evalueze probabilitatea $P(X \geq \frac{3n}{4})$. Să se decidă care dintre cele două inegalităţi oferă o margine superioară mai bună a acestei probabilităţi.

$$X \sim Bin\left(n, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow M(X) = np = \frac{n}{2}$$
$$\sigma^2(X) = np(1-p) = \frac{n}{4}$$

Din inegalitatea Markov, pt. $a = \frac{3n}{4}$:
$$P\left(X \geq \frac{3n}{4}\right) \leq \frac{\frac{n}{2}}{\frac{3n}{4}} = \frac{2}{3}$$

Pt. Cebîşev:
$$P\left(X \geq \frac{3n}{4}\right) = P\Big(X - \underbrace{\frac{n}{2}}_{M(X)} \geq \frac{3n}{4} - \frac{n}{2}\Big) = P\left(X - \frac{n}{2} \geq \frac{n}{4}\right) \leq$$
$$\leq P\left(\left|X - \frac{n}{2}\right| \geq \frac{n}{4}\right) \leq \frac{\frac{n}{4}}{\frac{n^2}{16}} = \frac{4}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Se observă că inegalitatea Markov oferă o margine mai slabă, care este constantă şi care nu se modifică în funcţie de n. Marginea superioară oferită de către inegalitatea Cebîşev, anume $\frac{4}{n}$, converge către 0, pentru $n \to \infty$. Cea mai bună margine a acestei probabilităţi este oferită de către inegalităţile de tip Chernoff, şi anume limite de tip exponenţial mergând către 0:

$$P(X \geq \frac{3n}{4}) \leq (\frac{16}{27})^n.$$