

Partea 2—MS (PS)— CTI—Rândul 3

4.

Vectorul aleator (X, Y) este uniform distribuit pe un dreptunghi $D = [0, 3] \times [-2, 2]$.

- Să se determine densitatea sa de probabilitate și să se calculeze $P(X > 0.5/Y = 1)$.
- Scrieți algoritmul optim ce generează puncte aleatoare uniform distribuite în D .
- Simulând un punct uniform distribuit în dreptunghiul $D = [0, 3] \times [-2, 2]$, să se determine probabilitatea ca acest punct să fie în G , unde G este discul cu centrul în $(1.5, 0)$ și înscris în dreptunghiul D .

3.00 pct

5. Să se definească distribuția de echilibru a unui lanț Markov și să se precizeze ce reprezintă coordonatele acestei distribuții. În ce condiții este asigurată existența acestei distribuții?

Un lanț Markov are matricea de tranziție:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Să se calculeze $P(X_5 = 1|X_3 = 4)$ și $P(X_2 = 1, X_3 = 4|X_0 = 1)$. Arătați că lanțul Markov este ireductibil și aperiodic. Știind că matricea Q are vectorul propriu $v = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)^T$ corespunzător valorii proprii 1, iar Q^T are vectorul propriu $w = (0.4, 0.6, 0.5, 0.5)^T$ corespunzător aceleiași valori proprii 1, să se determine coordonatele distribuției de echilibru π .

3.00 pct

6. a) Romtel oferă discount la fiecare al 4-lea client ce solicită conectare la internet. Cererile clienților sosesc ca un proces Poisson de rată 5/zi. Să se calculeze probabilitatea ca în primele 3 zile ale săptămânii să fie depuse 18 cereri, și în următoarele 2 zile 8 cereri. Să se calculeze media și dispersia momentului primei oferte de discount a săptămânii.

1.00 pct

b) Există ipoteza că timpul de așteptare T , pentru a primi acces la un server internet, are densitatea de probabilitate

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} (\theta + 1)x^{\theta}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{în rest,} \end{cases}$$

unde θ este un parametru pozitiv necunoscut. Pentru a estima parametrul θ s-au făcut 5 observații asupra variabilei T care au condus la următorii timpi de așteptare (în secunde):

$$0.34, 0.75, 0.26, 0.65, 0.1.$$

Să se calculeze media teoretică a timpului de așteptare și apoi estimatorul parametrului θ . Să se determine estimatorul verosimilității maxime pentru parametrul θ .

2.00 pct