SEMINAR săptămâna 7:
Spaţii euclidiene. Produs scalar. Baze ortonormate. Matrice ortogonale

0.1 SARCINI

• De citit din cartea scrisă cu dl. prof. Dăianu:
- din capitolul 6 parcurgeţi §1 şi §2 (pag. 153-161), cu menţiunea că pe-alocuri se face referire la noţiuni ca ,,formă bilianiară” sau ,,formă pătratică” studiate în capitolul 5

- exerciţiile rezolvate 2-7 (pag. 167-169)

- de lucrat exerciţiile: 1,4,5,7a),b),8,17,18,19,20,21,22,24 (pag. 76-82)

• Rezolvaţi exerciţiile propuse mai jos.

• În fine, rezolvaţi şi încărcaţi pe CV exerciţiul pe care îl aveţi lăsat temă pe CV.

0.2 EXERCIŢII PROPUSE

1. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definit prin $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + 2x_1y_2 + ax_2y_1 + 5y_1y_2$ este produs scalar.

2. Demonstraţi că $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definit prin $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + ay_1y_2$ este produs scalar dacă şi numai dacă $a > 4$.

3. Se consideră în plan punctele $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$. Calculaţi normele vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$ şi cosinusul unghiului dintre vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ dacă produsul scalar dintre doi vectori $\overrightarrow{v_1}(x_1, y_1)$ şi $\overrightarrow{v_2}(x_2, y_2)$ este definit prin:
a) $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2$;
b) $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = x_1x_2 + 3y_1y_2$.
Deduceţi că în primul caz triunghiul OAB are $OA \perp OB$ şi $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\|$, adică este dreptunghic isoscel, în timp ce în cazul produsului scalar de la b) triunghiul OAB are toate laturile şi toate unghiurile egale, adică este echilateral.

4. Fie $v_1 = (1, 2, 3)$ şi $v_2 = (3, 2, 1)$. Determinaţi mulţimea tuturor vectorilor $w \in \mathbb{R}^3$ care sunt simultan ortogonali pe v_1 şi pe v_2. (Produsul scalar considerat este cel standard: $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.)

5. Demonstraţi că în orice spaţiu euclidian are loc **Teorema cosinusului**:

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w \rangle$$

6. Deduceţi **Teorema lui Pitagora:**

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \Leftrightarrow v \perp w.$$

7. Demonstraţi **identitatea paralelogramului**:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

(Într-un paralelogram, suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor laturilor.)

8. Daţi exemplu de o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$ (cu produsul scalar standard) în care unul dintre vectori este $v = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, apoi calculaţi coordonatele vectorului $w = (1, 2, 3)$ în această bază.

9. Determinaţi cosinusul unghiului dintre vectorii $\overrightarrow{u_1}$ şi $\overrightarrow{u_2}$ ştiind că vectorii $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ şi $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$ sunt ortogonali şi vectorii $2\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ şi $-\overrightarrow{u_1} + 3\overrightarrow{u_2}$ sunt şi ei ortogonali.

10. Arătaţi că $B = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$ formează o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$, aflaţi coordonatele vectorului $v = (0, 0, 7)$ în această bază şi scrieţi matricea de trecere de la această bază la baza canonică.