Seminar 12

Lanturi Markov absorbante

• Cum se defineşte un lanţ Markov absorbant? Forma standard asociată matricei de tranziţie pentru un lanţ Markov absorbant.

• Care este probabilitatea ca un lanţ Markov absorbant ce pleacă din starea tranzitorie $i \in S_t$ să facă n paşi în mulţimea stărilor tranzitorii înainte să fie absorbit de starea absorbantă $j \in S_a$?

$$p_{i,j}(n) = \sum_{k \in S_t} T^n(i,k) R(k,j)$$

• Cum se defineşte matricea fundamentală N asociată unui lanţ Markov absorbant? Interpretarea unor elemente asociate matricei fundamentale:

• Elementul $N(i,j)$, $i,j \in S_t$, reprezintă numărul mediu de vizite pe care lanţul Markov ce porneşte din starea i îl face stării tranzitorii j înainte de a fi absorbit.

• Numărul mediu de paşi ai lanţului Markov ce pleacă din starea tranzitorie i înainte de a fi absorbit este

$$t_i = \sum_{j \in S_t} N(i,j),$$

adică este suma elementelor de pe linia i a matricei fundamentale.

• Care este probabilitatea ca un lanţ Markov absorbant ce pleacă din starea tranzitorie $i \in S_t$ să fie absorbit de starea absorbantă $j \in S_a$?

$$(NR)(i,j) = \sum_{k \in S_t} N(i,k) R(k,j)$$

12.1 Probleme rezolvate

1. Un exemplu de lanţ Markov absorbant, ce a inspirat folosirea acestui tip de lanţuri Markov în ştiinţa şi ingineria calculatoarelor, este mersul beţivului (Fig.12.1). Între bar (starea 0) şi casă (starea 4) există 3 colţuri, $1, 2, 3$. Când beţivul ajunge la un colţ i, $i \in \{1, 2, 3\}$, cu probabilitatea $1/2$ o ia spre stânga, adică trece în $i-1$ şi cu probabilitatea $1/2$ o ia spre dreapta, deci trece în starea $i+1$. Barul şi casa sunt stări absorbante. O dată ajuns în una din aceste stări, rămâne sigur acolo.

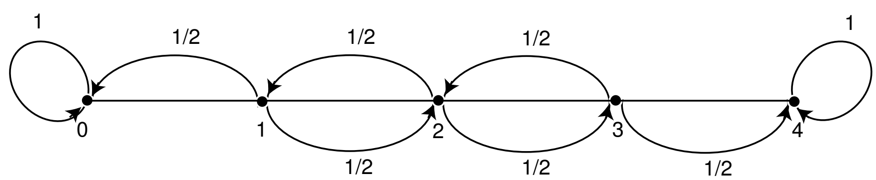

Fig.12.1: Graful lanţului Markov ce modelează mersul beţivului.

Se cere:

a) Sa se scrie matricea de tranzitie a acestui lant Markov;

b) Să se determine distribuţia staţionară a stărilor unui lant Markov absorbant, adică matricea Π.

c) Să se detemine numărul mediu de treceri ale beţivului prin colţul 2 înainte de ajunge acasă sau la bar, ştiind că a pornit din colţul 1.

d) Numărul de paşi parcurşi până ce lanţul Markov este absorbit, ştiind că a pornit din colţul 3 .

e) Probabilitatea ca beţivul ce porneşte din colţul 2 să ajungă la bar (să fie absorbit de bar, codificat cu starea 0).

Rezolvare: a) Matricea de tranziţie a modelului pentru mersul la întâmplare al beţivului este

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru a aplica teoria lanturilor abosrbante este necesar sa reorganizare a starilor lantului sub forma $S = S_a \cup S_t$, unde $S_a = \{0, 4\}$ este multimea starilor abosrbante, iar $S_t = \{1, 2, 3\}$ este multimea starilor tranzitorii. In consecinta, matricea Q se va modifica dupa cum urmeaza. Permutând vectorul $(0, 1, 2, 3, 4)$ în $(0, 4, 1, 2, 3)$, obţinem matricea de tranziţie în forma standard, notată cu $Q' = P_\pi Q P_\pi^T$, unde $\pi \in S_5$ este permutarea descrisă mai sus, adică $\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, iar P_π este matricea permutare corespunzătoare,

$$Q' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 3 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Se observă că această matrice se poate scrie:

$$Q = \begin{pmatrix} I & O \\ R & T \end{pmatrix}, \tag{12.1}$$

unde:

• I este matricea unitate de tip $n_a \times n_a$, unde $n_a = 2$;

• O este o matrice nulă de tip $n_a \times n_t$, unde $n_t = 3$.

Justificarea pentru blocurile I şi O vine din faptul că stările $1, 2, \ldots, n_a$ sunt absorbante şi deci $p_{ii} = 1$, $p_{ij} = 0$, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n_a\}$, $j \in S$, $j \neq i$.

• Matricea R este matricea de tranziţie de la stările tranzitorii la cele absorbante. Ea este de tip $n_t \times n_a$. Cu alte cuvinte, $R(i,j) = P(X_{n+1} = j \in S_a | X_n = i \in S_t)$, $n \in \mathbb{N}$;

• Matricea T dă probabilităţile de trecere între stările tranzitorii. Ea este de tip $n_t \times n_t$ şi $T(i,j) = P(X_{n+1} = j \in S_t | X_n = i \in S_t)$, $n \in \mathbb{N}$.

Matricea R este

$$R = \begin{pmatrix} R(1,0) & R(1,4) \\ R(2,0) & R(2,4) \\ R(3,0) & R(3,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

Matricea de tranziţie a unui lanţ Markov absorbant scrisă în forma (12.1) se numeşte *matrice de tranziţie în forma standard*.

In cazul nostru avem matricea T este

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Reamintim că distribuţia staţionară a stărilor unui lant Markov absorbant

$$\Pi = \begin{pmatrix} I & O \\ NR & O \end{pmatrix},$$

unde $N = (I - T)^{-1}$ este matricea fundamentala a lantului Marov absorbant. Linia i din matricea Π se numeşte distribuţia staţionară a stării i (remarcăm că spre deosebire de lanţurile Markov ireductibile şi aperiodice, unde fiecare stare avea aceeaşi distribuţie staţionară π). Prin calcul direct se obtine

$$N = (I_3 - T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

c) Reamintim că elementul $n_{ij} = N(i,j)$, $i, j \in S_t$, reprezintă numărul mediu de vizite pe care lanţul Markov ce porneşte din starea $i \in S_t$ îl face stării tranzitorii $j \in S_t$ înainte de a fi absorbit.

Cum stările tranzitorii ale lanţului Markov sunt $1, 2, 3$ (în indexarea iniţială), rezultă că numărul mediu de treceri prin colţul 2 înainte de a ajunge acasă sau la bar, ştiind că a pornit din colţul 1, este $n_{12} = 1$.

d) Din teorie avem că numărul mediu de paşi ai lanţului Markov absorbant ce pleacă din starea tranzitorie i înainte de a fi absorbit este:

$$t_i = n_{i,n_a+1} + n_{i,n_a+2} + \cdots + n_{i,n_a+n_t},$$

unde $\{n_a + 1, n_a + 2, \ldots, n_a + n_t\}$ este mulţimea stărilor tranzitorii.

Explicaţie: Dacă stările tranzitorii ale unui lanţ Markov absorbant sunt $3, 4, 5$, iar 1, 2 sunt stări absorbante, atunci o traiectorie ce porneşte din $i = 3$ poate fi, de exemplu, de forma $3, 5, 5, 4, 3, 5, 4, 1$. Numărul de paşi parcurşi până ce lanţul Markov este absorbit de starea 1 este dat de suma numărului de vizite ale stării 3, ale stării 4 şi ale stării 5.

Numărul t_i se numeşte *timpul mediu până la absorbţia lanţului Markov* ce pleacă din starea i.

Observăm că vectorul coloană $\mathbf{t}$, de coordonate t_i, se poate obţine înmulţind matricea N cu vectorul coloană $\mathbf{e}$, ce are toate elementele 1, adică $\mathbf{t} = N\,\mathbf{e}$.

Deci, numărul mediu de paşi (treceri de la un colţ la altul) ai beţivului înainte de a ajunge fie acasă, fie la bar, ştiind că a pornit din colţul 3, este $t_3 = n_{31} + n_{32} + n_{33} = 3$.

e) Din teorie, probabilitatea ca lanţul ce porneşte din starea tranzitorie i să fie absorbit de starea absorbantă j este

$$b_{ij} = \sum_{k \in S_t} N(i,k)R(k,j).$$

Notând cu B matricea de elemente (b_{ij}), avem $B = NR$.

Probabilitatea ca beţivul ce porneşte din colţul 2 să ajungă la bar (să fie absorbit de bar, codificat cu starea 0) este

$$b_{2\,0} = \sum_{k=1}^{3} N(2,k)R(k,0) = N(2,1)R(1,0) + N(2,2)R(2,0) + N(2,3)R(3,0).$$

Avem că

$$b_{2\,0} = 1 \times 0.5 + 2 \times 0 + 1 \times 0 = 0.5.$$

Atenţie la indexarea elementelor matricei R: $R(i,j)$, $i \in S_t$, iar $j \in S_a$. În cazul lanţului analizat mulţimea stărilor tranzitorii este $S_t = \{1, 2, 3\}$, iar cea a stărilor absorbante $S_a = \{0, 4\}$.

12.2 Probleme propuse

2. Considerăm un lanţ Markov ce are spaţiul stărilor $S = \{1, 2, 3\}$ şi matricea de tranziţie:

$Q =$

	1	2	3
1	0	4/5	1/5
2	1/6	2/3	1/6
3	0	0	1

a) Să se arate că lanţul Markov este absorbant.
b) Să se scrie matricea de tranzitie în forma standard şi să se precizeze matricile T şi R.
c) Să se calculeze matricea fundamentală N.
d) Să se calculeze probabilitatea ca lanţul Markov ce porneşte din starea 2 să fie absorbit de starea 3.

3. Considerăm un lanţ Markov ce are spaţiul stărilor $S = \{1, 2, 3, 4\}$ şi matricea de tranziţie:

$Q =$

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0.1	0.2	0.5	0.2
3	0.1	0.2	0.6	0.1
4	0.2	0.2	0.3	0.3

a) Să se arate că lanţul Markov este absorbant.
b) Să se precizeze matricea de trecere, T, între stările tranzitorii şi matricea de trecere, R, de la stările tranzitorii la starea absorbantă.
c) Să se calculeze probabilitatea ca lanţul Markov ce porneşte din starea 3 să facă 2 paşi în mulţimea stărilor tranzitorii înainte de absorbire.
d) Ştiind că linia 3 a matricei fundamentale N a lanţului Markov este

$$N[3, :] = [1.52,\ \ 3.7,\ \ 2.4],$$

să se precizeze ce reprezintă elementul 3.7 din această linie. Să se interpreteze suma elementelor acestei linii.
Atenţie! Linia 3 a matricei N corespunde stării tranzitorii 4.

4. Considerăm un lanţ Markov absorbant ce are spaţiul stărilor $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ şi matricea de tranziţie:

$Q =$

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1/2	0	1/6	1/6	1/6
3	1/3	2/3	0	0	0
4	1/3	2/3	0	0	0
5	0	0	0	0	1

a) Să se scrie matricea Q în forma standard şi să se expliciteze matricile T şi R.
b) Ştiind că lanţul porneşte din starea 2, adică $X_0 = 2$, să se calculeze probabilitatea ca la momentul $n = 2$ să se ajungă în starea 1.
c) Să se calculeze probabilitatea ca absorţia lanţului ce porneşte din starea 2 să se producă la momentul $n = 3$.
d) Ştiind că matricea fundamentală a lanţului este

$$N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1.28 & 0.21 & 0.21 \\ 0.85 & 1.14 & 0.14 \\ 0.85 & 0.41 & 1.41 \\ \hline \end{array}$$

să se scrie relaţia dintre N şi T. Ce reprezintă elementele de pe linia a treia a matricii N?
e) Să se determine numărul mediu de vizite pe care lanţul îl face stării tranzitorii 2, dacă porneşte din starea 4.

5. Considerăm un lanţ Markov ce are spaţiul stărilor $S = \{1, 2, 3, 4\}$ şi matricea de tranziţie:

$Q =$

	1	2	3	4
1	1/8	0	1/2	3/8
2	1	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

a) Să se studieze dacă este un lanţ Markov absorbant.
b) Să se calculeze probabilitatea ca lanţul să evolueze pe traiectoria 4,3,2,1,3, ştiind că distribuţia iniţială este $\pi_0 = [5/12 \quad 1/6 \quad 1/4 \quad 1/6]$.
c) Să se deseneze graful asociat matricii de tranziţie.
d) Să se calculeze $P(X_7 = 3/X_2 = 4)$.

6. Starea unui student la CTI poate fi: student în anul I, student în anul II, student în anul III, student în anul IV, absolvent sau exmatriculat. Codificăm aceste stări prin `I, II, III, IV, Ex, Ab`. Matricea de tranziţie este:

	Ab	Ex	I	II	III	IV
Ab	1	0	0	0	0	0
Ex	0	1	0	0	0	0
I	0	0.1	0.1	0.8	0	0
II	0	0.05	0	0.1	0.85	0
III	0	0.05	0	0	0.05	0.9
IV	0.9	0.05	0	0	0	0.05

a) Ştiind ca distribuţia iniţială de probabiliate este distribuţia uniformă, să se calculeze probabilitea ca un student să aibă următoarea traiectorie: $\mathtt{II}, \mathtt{III}, \mathtt{III}, \mathtt{Ex}$.

b) Care este probabilitatea ca un student ce ”porneşte” din anul `III` să treacă prin două stări tranzitorii înainte de absorbire (fie ea exmatriculare sau absolvire).

c) Ştiind că matricea fundamentală a acestui lanţ Markov absorbant este

$$N = \begin{pmatrix} 1.1111 & 0.9877 & 0.8837 & 0.8372 \\ 0 & 1.1111 & 0.9942 & 0.9418 \\ 0 & 0 & 1.0526 & 0.9972 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0526 \end{pmatrix},$$

să se calculeze probabilitatea ca un student ce porneşte din anul `I` să fie absorbit de `Ab`solvire.