Curs introductiv: Matematici Speciale

Conf.dr. Maria Jivulescu

Departamentul de Matematică
UPT

Cuprins

- Partea I: Prezentare structura curs MS
- Partea II: Background matematic
- Partea III: Motivaţie

- Curs pentru anul I, semestrul II (3h/ 14 săptămâni)
- Curs, Joi, 9-12
- Curs: Conf.dr. Maria Jivulescu
- Seminar: 2h/ 14 săptămâni
    - Conf.dr. Maria Jivulescu (grupa 1)
    - Asist. drd. Florinela Popa (grupele 2,3)

Ce vom face la acest curs?

Vom studia Teoria Probabilitatilor si Statistica Matematică si aplicaţii in CS!

Conţinutul cursului:

- **Capitolul I: Introducere în Teoria Probabilităţilor**: definiţia axiomatică a probabilităţii, scenariul matematic pentru teoria probab., probabilităţi condiţionate, teoria lui Bayes asupra probabilităţii
- **Cap II: Variabile (vectori) aleatoare discrete**: distribuţii clasice de probabilitate
- **Cap III: Variabile (vectori) aleatoare continue**: distributia normala, clopotul lui Gauss
- **Cap IV: Procese stochastice**: Lanturi Markov, Procese Poisson
- **Statistica**: Estimatori, Teorema de limită centrală

Desfășurarea cursului de MS

Desfășurare curs pe parcursul celor 14 saptămani:

- Orar: Joi 9:00-12:00
- pdf, video, materiale și informații utile pe Campusul Virtual-UPT(acolo se găsesc deja cursurile/seminariile)
- ne dorim ca la curs să clarificăm cursul postat pe Campus, deci este necesar o citire a acestuia, pentru ca voi să puteți formula întrebări și să răspundeți la ele

Sunteți rugați să consultați permament Campusul Virtual-UPT!
Acest mediu ne asigură legatura între noi!

Desfășurarea seminarului de MS

Desfășurare seminarului pe parcursul celor 14 saptămani:

- Seminarul se va ține on-site, pe grupe.
- suportul pdf pentru aplicatii pe Campusul Virtual-UPT
- se vor da 2 teste
- notele de la teste vor fi parte integrantă al notei finale
- prezența este obligatorie

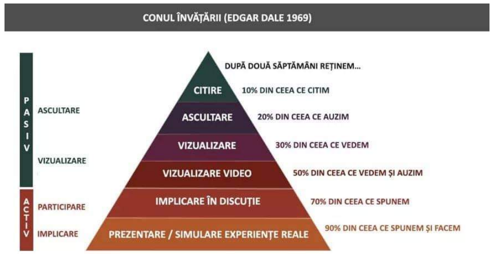
Evaluarea materiei de MS

Forme de evaluare a materiei MS

- Final seminar $\rightarrow$ nota activitate pe parcurs: media aritmetică a notelor de la teste+ Bonus
- maxim 2 puncte se pot obtine din raspunsuri: 0.5 bonus pentru fiecare răspuns bun
- Seminarul se consideră încheiat dacă nota obținută este ≥ 4.5; în caz contrar el trebuie recontractat, în anul următor
- Final curs $\rightarrow$
  Nota examen=1/2 *Nota activitate pe parcurs+1/2 * [Nota examen-iunie (≥ 4.5)+Bonus curs (1 punct)]
- Bonus curs se obține din realizarea unui referat pe echipe (temele se vor anunta pe CV si va veti putea alege)

Cum să ne asigurăm succesul la materia MS

- citirea cursurilor de pe CV-UPT înainte/după curs
- participarea/prezenta activa la curs/seminar
- teme/teste predate la timp
- consultarea în permanența a CV-UPT pentru anunțurile legate de curs



Bibliografie

Material bibliografic este disponibil pe CV-UPT, dacă doriți în plus, carţi, culegeri de Matematici Speciale (Probabilităţi si Statistică) sunt disponibile la Biblioteca UPT.

- Emilia Petrișor, Probabilităţi și Statistică-Curs si Aplicații in Inginerie (ediția tipărită Editura Politehnica 2001, online-capitole pe CV)
- Probability and Computing- Randomized algorithms and Probability Analysis, M. Mitzenmacher, Eli Upfal, Cambridge University Press, 2017
- Applied Statistics and Probability for Engineers, Douglas Montgomery, George Runger, John Wiley- Sons, Inc, 2003

- noţiuni din liceu despre metodele de numărare(permutări, aranjamente, combinări) si despre teoria probabilităţilor (determinarea probabilităţii ca un eveniment să aibă loc); Seminarul din sap 1 are scopul de a reaminti aceste lucruri.
- noţiuni din liceu din analiza matematica (de exemplu, calcul integral)
- noţiuni din semestrul I legate de serii numerice, valori/vectori proprii
- noţiuni introductive despre integralele generalizate

$$\int_2^\infty \frac{1}{x-1}dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x-1}dx = \ln|t-1| - \ln 1 = \infty$$

- integrale duble

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

Vor exista întâlniri pentru a explica noţiunile noi şi materiale suplimentare cursului.

Problemă

Se presupune ca se aruncă o monedă, pâna cand se obtine "capul"(C=H=head); fata opusa este 'stema' (S=T=tail)
Sa se determine probabilitatea ca de a arunca moneda de 3 ori, inainte de a obține H?

- probabilitatea (de a obține la prima aruncare C)=1/2
- probabilitatea (de a obține prima data C la a doua aruncare) = probabilitatea (de a obține la prima S si la a doua aruncare C)=$1/2 \times 1/2 = 1/4$
- probabilitatea (de a obține prima data C la a treia aruncare) = probabilitatea (de a obține la a prima si la a doua aruncare S, iar la a treia C)=$1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/8$
- in general, probabilitatea de a obține $N-1$ de S, inainte de a obține evenimentul cautat C este o serie de evenimente cu probabilitățile $1/2, 1/4, 1/8, \dots (1/2)^{N-1} \times 1/2$

Partea II: Seria geometrică

Cum putem să înțelegem mai bine ce se întampla?

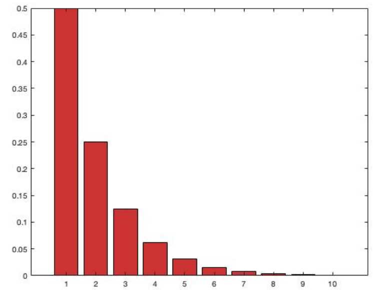


Figure: Graficul aruncarii unei monede pana cand se obtine Cap

- Histograma=graficul ce relaționează evenimente de probabilitatea lor;
- OX -numarul de aruncari, iar OY- probabilitatea acestui eveniment

Alta problemă...mai grea

Care este numărul mediu de aruncări pentru a fi sigur (cu probabilitate de 90%) că se obține cap?

- P(succes cu o aruncare)=1/2
- P(succes cu doua aruncări)=1/2+1/4=0.75
- P(succes cu trei aruncări)=1/2+1/4+1/8=0.875
- P(succes cu patru aruncări)=1/2+1/4+1/8+1/16=0.9375

Raspuns: n=4

Se observă că ne apare seria geometrică $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \ |r| < 1$

Se folosește la situații de genul : $N-1$ insuccese, urmate de un succes

O altă problemă...

Care este probabilitatea de a obține un Cap din 3 aruncări independente ale unei monede?
P(un Cap din 3 aruncări)
=P(C,S,S)+P(S,C,S)+P(S,S,C)=3 $\times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
Se folosesc combinările pentru a număra cazurile posibile, aici $C_3^1 = 3$
In general, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Aproximări. Polinomul Taylor

Polinoame Taylor ce aproximează diferite funţii:
https://mathlets.org/mathlets/taylor-polynomials/
Rezultat folosite

- la distribuţia Poisson: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $\ln(1+x) \approx x$;
- $\ln(1+x) \approx x - x^2$

Calcul Integral:

- integrarea prin părţi
- metoda substituţiei

Partea III: Motivație pentru studiul Prob-Stat

Ne poate furniza rezultate surprinzătoare legate de anumite situații/întrebări.

Exemplu: celebra problemă a zilei de naștere ("Birthday paradox")
Formulare: Intr-o cameră cu 50 de persoane, care este probabilitatea sa existe două persoane cu aceeași zi de naștere?
Obs.:

- aparent ne trebuie 366 de persoane pentru a asigura cel puțin un cuplu de persoane cu aceeași zi de naștere
- aparent, probabilitatea ca 2 persoane din 50 să aibă aceeași zi de naștere este mică

Birthday paradox

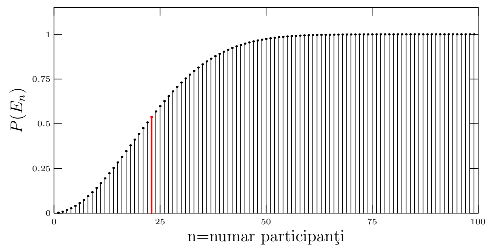


Figure: Probabilitatea ca 2 persoane să aibă aceeași zi de naștere ca funcție de numărul de persoane din grup

Rezultat: probabilitatea ca 2 persoane din 50 să aibă aceeași zi de naștere este approximativ 97%.
Pentru a avea probabilitate de 50%, sunt necesare doar 23 de persoane!

Cum se obţine acest rezultat?

Vom studia probabilitatea ca alegand 50 persoane, ele sa aiba zile de nastere diferite.

- P(primele doua persoane alese să aibă zile de zile de nastere diferite)$=\frac{365}{365} \times \frac{364}{365}$
- P(primele 50 persoane alese să aibă zile de zile de nastere diferite)$=\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \ldots \times \frac{316}{365} \approx= 0.03$
- P(primele k persoane alese să aibă zile de zile de nastere diferite)$=\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \ldots \times \frac{365-k+1}{365}$

Deci, probabilitatea ca sa existe cel puţin 2 persoane din 50 care să aibă aceeaşi zi de naştere este $1 - 0.03 \approx= 0.97$.

Partea III: Motivaţie pentru studiul Prob-Stat

Probabilitatea =aleatoriu (random)

Algoritm probabilist=**un algoritm care fac alegeri aleatoare în timpul execuţiei lor**, adica un program ce va folosi valori generate de un generator de numere aleatoare, pentru a decide paşii următori, la anumite ramuri de execuţie.

De ce este nevoie de algoritmi probabilişti?
Sunt mai eficienţi, mai simpli şi mai uşor de programat.

Preţul: Răspunsul (output) poate să fie incorect, cu o anumită probabilitate sau eficienta acestui algoritm este garantata cu o anumita probabilitate

Algoritm probabilist

De ce am face un program care să dea un rezultat posibil greșit (cu o anumita probabilitate)?

Probabilitatea de a comite o eroare este suficient de mică ca să merite imbunătăţiri in viteza sau in memorie.
Observație: La algoritmii probabilisti este interesant si studiul complexitatii problemei!

Exemplu de algoritm probabilist

Algoritm probabilist pentru verificarea echivalenței a două polinoame

Scop: folosirea notiunii de aleator pentru a verifica eficient corectitudinea unui rezultat.

Situatie: Presupunem ca cineva a programat un program de multiplicarea a monoamelor intr-un polinom dat ca produs.

Ne dorim sa verificam daca acest program ne da un rezultat corect.

Exemplu: dat imput $(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)$,
programul ne da ca este egal cu $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 24$.

Cum se poate verifica ca este corect?

Problema: date doua polinoame $F(x) = \prod_{i=1}^{d}(x_i - a_i)$ și $G(x) = \sum_{i=1}^{d} c_i x^i$, cum putem verifica daca $F(x) = G(x)$?

Metooda 1:

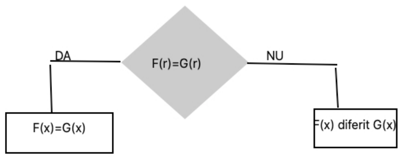
- Se efectuează înmulțirea celor d monoame, pentru a-l aduce pe F la forma canonică.
- Sunt necesare un număr de operații de ordinul lui d^2, ceea ce implică timp și memorie!

Concluzie: aceasta metoda este ineficienta: dorim sa verificam eficient un rezultat, nu sa rescriem un nou program, care face acelasi lucru cu primul program!

Exemplu de algoritm probabilist

Metooda 2:

- se fixeaza $d = grad\{F(x), G(x)\}$
- impunem ca algoritmul sa aleaga aleator uniform un numar $r \in S = \{1, 2, \ldots, 100d\}$
- algoritmul va calcula valorile $F(r)$ si $G(r)$ (asta se poate face intr-un numar de d pasi)
- decizia se bazeaza pe schema



Exemplu de algoritm probabilist

Apar doua intrebari:

- Q1: Care este timpul de rulare al acestui algoritm? Raspuns: de ordinul d
- Q2: In ce caz da algoritmul un raspuns gresit?
  Raspuns:
  - Daca $F(x) = G(x), \forall x \in S$, atunci algoritmul da raspuns corect (pt ca are loc si faptul ca $F(r) = G(r)$, iar in acest caz algoritmul ne spune ca $F(x) = G(x)$)
  - daca $F(x) \neq G(x)$ si $F(r) \neq G(r)$, atunci algoritmul da raspuns corect
  - Dar, daca a $F(x) \neq G(x)$ si $F(r) = G(r)$, atunci algoritmul da raspuns gresit.

Exemplu de algoritm probabilist

Cazul in care algoritmul poate da un raspuns gresit:

$$F(x) \neq G(x), \text{ dar } F(r) = G(r) \rightarrow (F - G)(r) = 0,$$

deci r este o radacina a polinomului $(F - G)$, polinom de grad cel mult d.
Teorema fundamentala a algebrei: polinomul $(F - G)$ poate sa aiba cel mult d radacini.
Deci, sunt cel mult d valori ale lui r din multimea $\{1, \ldots, 100d\}$ pentru care $F(r) = G(r)$, chiar daca $F(x) \neq G(x)$.

$$\text{Probabilitatea (algoritmul da raspuns gresit)} \leq \frac{d}{100d} = 0.01$$

Concluzie: In cazul $F(x) \neq G(x)$, algoritmul da razultat corect în cel putin 99% din cazuri.
Cum se poate imbunatati aceasta probabilitate?
Rularea programului de mai multe ori sau marirea multimii S.

Vă mulţumesc pentru atenţie şi vă doresc mult succes în acest semestru!

Întrebări, vă rog?!