Universitatea Politehnica Timișoara
P-ța Victoriei nr. 2
RO 300006 - Timișoara
Tel: +4 0256 403000
Fax: +4 0256 403021
rector@rectorat.upt.ro
www.upt.ro

Logică digitală

-Curs 4-

ALGEBRA BOOLEANĂ ȘI LOGICA DIGITALĂ

Algebra booleană și logica digitală

- Funcții booleene;
- Forma canonică;
- Forma standard;
- Aspecte legate de implementarea porților logice;

Funcții booleene

- O funcţie de comutaţie de n variabile f($X_0, X_1, ..., X_{n-1}$) unde variabilele X_i iau valorile 0 şi 1, pentru i=0÷n-1, se defineşte ca o aplicaţie a mulţimii $\{0,1\}^n$ în mulţimea {0,1}.

- Prin $\{0,1\}^n$ s-a notat produsul cartezian al mulţimii {0,1} cu ea însăşi de n ori.

- Domeniul de definiţie al funcţiei f este:

$X = \{0,1\}^n = \{(X_0, X_1, ..., X_{n-1}) \mid X_0 \in \{0,1\}, X_1 \in \{0,1\}, ..., X_{n-1} \in \{0,1\}\}$

ale cărei elemente sunt n-upluri de 1 şi 0 $\{X_0, ..., X_{n-1}\}$

Funcție booleană/de comutație

- Expresie algebrică care este formată variabile binare și din operatorii: și, or, negare

Exemplu:

$F = xy + xy'z + x'yz$

F = 1 dacă $x = 1$ și $y = 1$, sau

dacă $x = 1$ și $y = 0$ și $z = 1$, sau

dacă $x = 0$ și $y = 1$ și $z = 1$;

altfel, $F = 0$.

Funcții booleene

- Tabel de adevăr prin care este specificată

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Complementul unei funcții

- Funcția F′, unde F′ poate fi obținută prin interschimbarea lui 0 cu 1 în tabelul de adevăr

x	y	z	F′
0	0	0	0→1
0	0	1	0→1
0	1	0	0→1
0	1	1	1→0
1	0	0	0→1
1	0	1	1→0
1	1	0	1→0
1	1	1	1→0

Complementul unei funcții

- Funcția F′, unde F′ poate fi obținută prin aplicarea repetată a teoremelor lui DeMorgan

Exemplu

$$
\begin{aligned}
F' &= (xy + xy'z + x'yz)' \\
&= (xy)'\,(xy'z)'\,(x'yz)' \\
&= (x' + y')(x' + y + z')(x + y' + z')
\end{aligned}
$$

Complementul unei funcții

- Funcția F′, unde F′ poate fi obținută folosind principiu dualității

Exemplu

$$
\begin{array}{l}
F = (x \cdot y) \quad + \; (x \cdot y' \cdot z) \quad + \; (x' \cdot y \cdot z) \\
\qquad\quad \downarrow\;\downarrow\;\downarrow \qquad \downarrow\;\downarrow\;\downarrow\;\downarrow\;\downarrow\;\downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow\;\downarrow\;\downarrow\;\downarrow\;\downarrow \\
F' = (x' + y') \cdot (x' + y + z') \cdot (x + y' + z')
\end{array}
$$

mintermi

Un **minterm** este o funcţie elementară de n variabile notată m_i^n unde n indică numărul de variabile ale funcţiei iar i este echivalentul zecimal al **mintermi** n-uplului funcţiei aplicat în 1, interpretat ca număr binar cu n poziţii.

E_z	X_2	X_1	X_0	m_0^3	m_1^3	m_2^3	m_3^3	m_4^3	m_5^3	m_6^3	m_7^3
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

mintermi

- Dacă $i = b_{n-1}\ldots b_0$ e un număr binar între 0 și 2^{n-1}, at. un minterm de n variabile $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0$, poate fi reprezentat astfel:

$$mi\,(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = y_{n-1}\ldots y_0$$

$$unde\ y_k = \begin{cases} x_k \text{ dc. } b_k = 1 \\ \\ x_k' \text{ dc. } b_k = 0 \end{cases}$$

Sumă de mintermi

- funcţia minterm $m_2^3(X_0, X_1, X_2) = \overline{X_2} \cdot X_1 \cdot \overline{X_0}$

are expresia 1 dacă X_2 =0, X_1 =1 şi X_0 =0, și valoarea 0 în rest;

- orice funcţie booleană de n variabile poate fi reprezentată ca **sumă logică de funcţii minterm**

$$f(X_{0,} X_1 \ldots\ldots X_{n-1}) = \sum_{i \in K} m_i^n$$

Sumă de mintermi

$F = xy + xy'z + x'yz$

$$F = \sum(3,5,6,7)$$

$$F = m_3^3 + m_5^3 + m_6^3 + m_7^3$$

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Formă canonică disjunctivă

$$F = \sum(3,5,6,7)$$

$$F = m_3^3 + m_5^3 + m_6^3 + m_7^3$$

- **forma canonică disjunctivă** a funcţiei;
- **forma canonică** - termenii produs logic ai funcţiei conţin **toate** variabilele funcţiei, între termeni realizându-se operaţia **SAU** (disjuncție).

Maxterm

- maxterm este o functie elementară de n variabile notate $M_i^n = \overline{m_i^n}$ unde i este echivalentul zecimal al n-uplului funcţiei, aplicat in „0”, interpretat ca un număr binar cu n poziţii.
- Functiei maxterm îi corespunde o expresie generată de n variabile în formă

directă sau negată, (sumă logică) care în urma

evoluării pentru toate n-uplurile, ia aceeasi valoare ca

si M_i^n.

2.Reprezentarea funcţiilor de comutaţie

E_z	X_2	X_1	X_0	M_0^3	M_1^3	M_2^3	M_3^3	M_4^3	M_5^3	M_6^3	M_7^3
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
6	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Fig. 2.4 Funcţiile maxterm de 3 variabile

2.Reprezentarea funcţiilor de comutaţie

Funcţia maxterm M_3^3 de exemplu are expresia $M_3^3 = X_2 + \overline{X_1} + \overline{X_0}$ =0 pentru X_2 =0, X_1 =1, X_0 =1 pentru celelalte atribuiri având valoarea „1”. O funcţie de comutaţie de n variabile poate fi reprezentată printr-un produs de maxtermi:

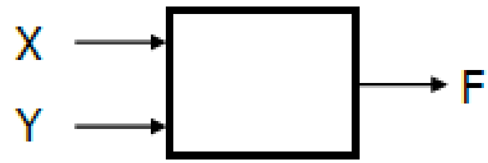
$$f(X_{0,}X_1.....X_{n-1}) = \prod_{i\in K0} M_i^n$$

unde K_0 este mulţimea indicilor echivalentului zecimal al n-uplurilor interpretate ca

Sumă de mintermi

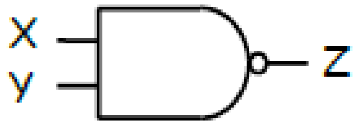
- **Orice funcție booleană poate fi convertită într-o sumă de maxtermi Any Boolean expression can be converted into a sum-ofmaxterms**
- **by generating the truth table and listing all the** 0-
- **maxterms.**
- **Example:** $F = x'y' + xz$

n variabile → 2^{2^n} funcții



X	Y	16 possible functions (F_0–F_{15})															
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	X AND Y		X		Y	X XOR Y	X OR Y	X NOR Y NOT (X OR Y)	X = Y	NOT Y		NOT X		X NAND Y NOT (X AND Y)	1

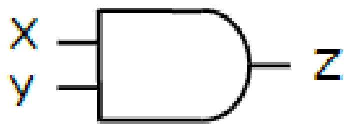
NAND



X	Y	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$Z = \overline{X \bullet Y}$$

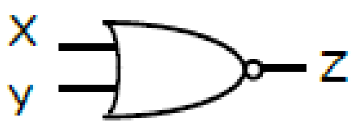
AND



X	Y	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$Z = X \bullet Y$$

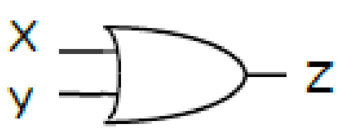
NOR



X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$Z = \overline{X + Y}$$

OR



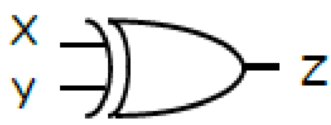
X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$Z = X + Y$$

Porți logice (cont.)

XOR

$(X \oplus Y)$



X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

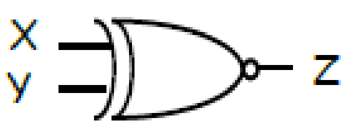
$Z = X\,\overline{Y} + \overline{X}\,Y$

X or Y but not both

("inequality", "difference")

XNOR

$\overline{(X \oplus Y)}$



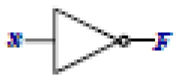
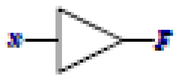
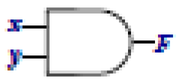
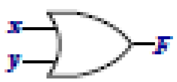
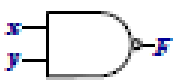
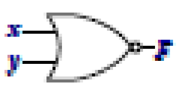
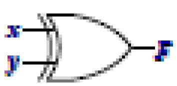
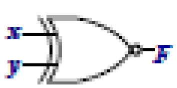
X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$Z = \overline{X}\,\overline{Y} + X\,Y$

X and Y the same

("equality")

Porți logice elementare

Name	Graphic Symbol	Functional Expression	Number of transistors	Delay in *ns*
Inverter		$F = x'$	2	1
Driver		$F = x$	4	2
AND		$F = xy$	6	2.4
OR		$F = x + y$	6	2.4
NAND		$F = (xy)'$	4	1.4
NOR		$F = (x + y)'$	4	1.4
XOR		$F = x \oplus y$	14	4.2
XNOR		$F = x \odot y$	12	3.2

Întrebări?

Enough Talking Let's Get To It
!!Brace Yourselves!!