Seminar Nr. 13

INTEGRALE GENERALIZATE

Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

Probleme rezolvate

1. *Să se studieze convergenţa integralelor următoare, folosind definiţia*:
i) $\displaystyle\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$, **ii)** $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{x}{\sqrt{3-x}}dx$, **iii)** $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{dx}{(x-2)^2}$, **iv)** $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2-1}$.

Soluţie. i) Conform definiţiei

$$\begin{aligned}\int_{-1+0}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}} &= \lim_{\substack{u\to-1\\u>-1}}\int_{u}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}} = \lim_{\substack{u\to-1\\u>-1}}\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2}\,\Bigg|_{u}^{7}\\ &= \frac{3}{2}\lim_{\substack{u\to-1\\u>-1}}\left(\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{(1+u)^2}\right) = \frac{3\sqrt[3]{64}}{2},\end{aligned}$$

prin urmare integrala improprie $\displaystyle\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$ este convergentă.

ii) Din definiţie se obţine

$$\int_{1}^{3-0}\frac{xdx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{\substack{u\to3\\u<3}}\int_{1}^{u}\frac{xdx}{\sqrt{3-x}}.$$

Calculăm mai întâi

$$I_x = \int\frac{x}{\sqrt{3-x}}dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $\sqrt{3-x}=t$ rezultă $x=3-t^2$, deci $dx=-2tdt$, iar calculul primitivei se reduce la

$$I_t = \int\frac{3-t^2}{t}\cdot(-2t)dt = -2\int(3-t^2)dt = -2\left(3t-\frac{t^3}{3}\right)+C.$$

Prin urmare, rvenind la variabila x, găsim primitiva

$$I_x = -6\sqrt{3-x}+\frac{2}{3}(3-x)\sqrt{3-x}+C = -\frac{2}{3}\sqrt{3-x}(6+x)+C.$$

Astfel, rezultă

$$\begin{aligned}&\int_{1}^{3-0}\frac{xdx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{\substack{u\to3\\u<3}} -\frac{2}{3}\sqrt{3-x}(6+x)\,\Bigg|_{1}^{u}\\ &= \lim_{\substack{u\to3\\u<3}}\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3-u}(6+u)+\frac{14\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{14\sqrt{2}}{3},\end{aligned}$$

deci integrala este convergentă.

iii) Conform definiţiei

$$\int_1^{2-0}\frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{\substack{u\to 2\\ u<2}}\frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{\substack{u\to 2\\ u<2}} -\frac{1}{x-2}\Bigg|_1^u$$
$$= \lim_{\substack{u\to 2\\ u<2}}\left(-\frac{1}{u-2}-1\right)=\infty,$$

deci integrala este divergentă.

iv) Conform definiţiei

$$\int_{-1+0}^{0}\frac{dx}{x^2-1} = \lim_{\substack{u\to -1\\ u>-1}}\int_u^0\frac{dx}{x^2-1} = \lim_{\substack{u\to -1\\ u>-1}}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_u^0$$
$$= \lim_{\substack{u\to -1\\ u>-1}}\left(-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right)=\infty,$$

deci integrala este divergentă.

2. *Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii, folosind definiţia:*
i) $\int_0^\infty\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx$, **ii)** $\int_2^\infty\frac{1}{\sqrt{x+2}}dx$, **iii)** $\int_{-\infty}^1 xe^{-x^2}dx.$

Soluţie. i) Fie funcţia $F(v)=\int_0^v\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx$ şi calculăm limita

$$l=\lim_{v\to\infty}\int_0^v\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx.$$

Integrala $I=\int_0^v\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx$ se rezolvă cu schimbarea de variabilă $x^2=t$, de unde rezultă $xdx=\frac{dt}{2}$ şi

$$x=0\Leftrightarrow t=0;\ x=v\Leftrightarrow t=v^2.$$

Atunci avem

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{v^2}\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\Bigg|_0^{v^2}=\frac{1}{2}\ln\left(v^2+\sqrt{v^4+1}\right).$$

Revenim la calculul limitei

$$I=\lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(u^2+\sqrt{u^4+1}\right)=\infty,$$

de unde tragem concluzia că integrala improprie este divergentă.

ii) Din definiţie se obţine

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx &= \lim_{u\to\infty}\int_2^u \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx=\lim_{u\to\infty} 2\sqrt{x+2}\,\Big|_2^u\\ &= \lim_{u\to\infty}(2\sqrt{u+2}-4)=\infty,\end{aligned}$$

deci integrala este divergentă.

iii) Prin simpla schimbare de variabilă $x\mapsto -x$ avem

$$\int_{-\infty}^1 xe^{-x^2}dx=-\int_{-1}^\infty xe^{-x^2}dx$$

care este convergentă deoarece

$$\begin{aligned}\int_{-1}^\infty xe^{-x^2}dx &= \lim_{u\to\infty}\int_{-1}^u xe^{-x^2}dx=\lim_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}\,\Big|_{-1}^u\\ &= \lim_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-u^2}+\frac{1}{2e}\right)=\frac{1}{2e}.\end{aligned}$$

3. *Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii:*
i) $\displaystyle\int_{-1}^7 \frac{1}{\sqrt{|x-3|}}dx$, **ii)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, **iii)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^6-x^3+1}dx$.

Soluţie. Aici se pune problema studiului convergenţei unor integrale improprii cu două puncte singulare.

i) $\displaystyle\int_{-1}^7 \frac{1}{\sqrt{|x-3|}}dx$ este convergentă.

Punctul singular al integralei este $c=3$, situat în interiorul intervalului de integrare.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^7 \frac{1}{\sqrt{|x-3|}}dx &= \int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{|x-3|}}dx+\int_3^7 \frac{1}{\sqrt{|x-3|}}dx=\\ &= \int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx+\int_3^7 \frac{1}{\sqrt{x-3}}dx.\end{aligned}$$

Integrala studiată este convergentă deoarece s-a descompus în suma a două integrale convergente. În plus

$$\int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt{|x-3|}}dx = -2\sqrt{3-x}\,\Bigg|_{-1}^{3} + 2\sqrt{x-3}\,\Bigg|_{3}^{7} = 8.$$

ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ este convergentă.

Integrala are două puncte singulare: $a = -1$ şi $b = 1$. Fie $c = 0$ punctul intermediar situat în interiorul intervalului de integrare $(-1, 1)$ faţă de care vom face descompunerea

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Cele două integrale sunt convergente deoarece $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + \mathcal{C}$, de unde rezultă imediat

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \arcsin x|_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\\ \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \arcsin x|_{0}^{1} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

prin urmare

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi.$$

iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 - x^3 + 1}dx$ este convergentă.

Punctele singulare ale integralei improprii studiate sunt $-\infty$ şi $+\infty$. Fie $c = 0$ punctul intemediar la care raportăm descompunerea în integrale improprii cu punct singular unic.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 - x^3 + 1}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{x^6 - x^3 + 1}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 - x^3 + 1}dx.$$

Calculăm primitiva funcţiei de sub integrală.

$$I_x = \int \frac{x^2}{x^6 - x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{(x^3)'}{x^6 - x^3 + 1} dx$$

şi efectuăm substituţia $t = x^3$. Prin urmare $dt = 3x^2 dx$ iar integrala simplificată este

$$I_t = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t^2 - t + 1} dt = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{1}{3} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}.$$

Revenim la variabila x şi obţinem

$$I_x = \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^3 - 1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}.$$

Din definiţie, rezultă

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 - x^3 + 1} dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{x^6 - x^3 + 1} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 - x^3 + 1} dx \\
&= \lim_{u \to -\infty} \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^3 - 1}{\sqrt{3}} \Bigg|_u^0 + \lim_{v \to \infty} \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^3 - 1}{\sqrt{3}} \Bigg|_0^v \\
&= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\arctan(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(-\frac{\sqrt{3}}{3}) \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

4. Convergenţa integralei Euler-Poisson (a integralei Gaussiene) *Să se arate că integrala* $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ *este convergentă.*

Soluţie. În descompunerea

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$$

prima integrală este o integrală Riemann propiu-zisă, funcţia e^{-x^2} fiind continuă pe intervalul mărginit $[0,1]$, prin urmare, rămâne de studiat convergenţa integralei improprii definită pe intervalul nemărginit $[1, +\infty)$. Pe acest interval $-x^2 \leq -x$, deoarece $x \in [1, +\infty)$. Funcţia exponenţială $x \mapsto e^x$ este strict

crescătoare aşadar $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ oricare ar fi $x \in [1, +\infty)$.
Dar integrala $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$ este convergentă, iar prin comparaţie, aceeaşi proprietate o are şi $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$. Integrala I este convergentă deoarece este suma dintre un număr finit şi o integrală convergentă.

5. Să se demonstreze că $I = \int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ este convergentă şi apoi să se calculeze valoarea sa.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x^{\alpha} \frac{1}{x^2 + x - 2} = 1$, dacă $\alpha = 2 > 1$, rezultă că integrala este convergentă.

Se descompune f în fracţii simple şi se obţine egalitatea

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)}.$$

Cu aceasta rezultă

$$I = \int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = -\frac{1}{3} \int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3} \int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{x-1}.$$

Prin urmare avem

$$I = \lim_{u \to \infty} \int\limits_3^{u} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \lim_{u \to \infty} \left(-\frac{1}{3} \int\limits_3^{u} \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3} \int\limits_3^{u} \frac{dx}{x-1} \right) =$$

$$\lim_{u \to \infty} \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} \frac{u-1}{u+2} = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}.$$

6. *Să se studieze convergenţa următoarelor integrale, iar în caz afirmativ, să se determine valoarea lor:*

i) $I_1 = \int_2^9 \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}dx$; **ii)** $I_2 = \int_0^5 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}dx$; **iii)** $I_3 = \int_0^4 \frac{1}{x^2 - 16}dx$;
iv) $I_4 = \int_6^{\infty} \frac{1}{x^2 - 16}dx$; **v)** $I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 16}dx$; **vi)** $I_6 = \int_3^{\infty} \frac{1}{x^2(x-3)}dx$;

vii) $I_7 = \displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2(x+2)}dx.$

Soluţie. **i)** Funcţia de sub semnul integrală e nemărginită în punctul $x = 2$ deci folosim criteriul practic de convergenţă cu β.

$$\lim_{x\to 2, x>2} (x-2)^{\beta} \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}} = 1, \text{pentru } \beta = \frac{1}{4} < 1,$$

deci integrala este convergentă.

$$I_1 = \int_2^9 \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}dx = \left.\frac{(x-2)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}\right|_2^9 = \frac{4}{3}\sqrt[4]{7^3}.$$

ii) Punctul $x_0 = 2$ este punctul singular situat in intervalul $[0, 5]$, deci

$$I_2 = \int_0^5 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx + \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx.$$

Din criteriul de convergenţă cu β aplicat succesiv pentru cele două integrale se obţine

$$\lim_{x\to 2, x<2} (2-x)^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2-x}} = 1, \text{pentru } \beta = \frac{1}{2} < 1,$$

$$\lim_{x\to 2, x>2} (x-2)^{\beta} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 1, \text{pentru } \beta = \frac{1}{2} < 1,$$

deci I_2 este convergentă.

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = -2\sqrt{2-x}\,\Big|_0^2 = 2\sqrt{2}, \quad \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = 2\sqrt{x-2}\,\Big|_2^5 = 2\sqrt{3},$$

rezultă $I_2 = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

iii) Funcţia este nemărginită în punctul $x_0 = 4$, deci din criteriul cu β rezultă

$$\lim_{x\to 2, x<4} (4-x)^{\beta} \frac{1}{(x-4)(x+4)} = -\frac{1}{8}, \text{pentru } \beta = 1$$

deci integrala I_3 este divergentă.

iv) Intervalul de integrare este nemărginit, deci pentru studiul convergenţei integralei aplicăm criteriul cu *alpha*.

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \frac{1}{x^2-16} = 1, \text{ pentru } \alpha = 2 > 1$$

deci integrala I_4 este convergentă.

$$I_4 = \int_6^\infty \frac{1}{x^2-16}dx = \lim_{u\to\infty}\int_6^u \frac{1}{x^2-16} = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{8}\ln\left|\frac{u-4}{u+4}\right| - \frac{1}{8}\ln\frac{1}{5} = -\frac{1}{8}\ln\frac{1}{5}.$$

v) Integrala poate fi scrisă sub forma

$$I_5 = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+16}dx = I_5 = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+16}dx + \int_0^\infty \frac{1}{x^2+16}dx,$$

iar din criteriul de convergenţă cu α rezultă

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^\alpha \frac{1}{x^2+16} = 1, \text{ pentru } \alpha = 2 > 1$$

deci integrala I_5 este convergentă. Avem

$$\begin{aligned} I_5 &= \lim_{u\to-\infty}\int_u^0 \frac{1}{x^2+16}dx + \lim_{v\to\infty}\int_0^v \frac{1}{x^2+16}dx \\ &= \lim_{u\to-\infty}\frac{1}{4}\arctan\frac{x}{4}\Big|_u^0 + \lim_{v\to\infty}\frac{1}{4}\arctan\frac{x}{4}\Big|_0^v = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

vi) Funcţia de sub integrală este nemărginită în punctul $x_0 = 3$ şi intervalul de integrare e nemărginit, deci pentru a stabili convergenţa integralei folosim atât criteriul cu β, cât şi cel cu α.

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \frac{1}{x^2(x-3)} = 1, \text{ pentru } \alpha = 3 > 1,$$

$$\lim_{x\to3, x>3} (x-3)^\beta \frac{1}{x^2(x-3)} = \frac{1}{9}, \text{ pentru } \beta = 1,$$

deci integrala este divergentă.

vii) Intervalul de integrare e nemărginit, deci pentru a stabili convergenţa integralei folosim criteriul cu α.

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\frac{1}{x^2(x+2)} = 1,\ \text{pentru } \alpha = 3 > 1,$$

prin urmare I_6 este convergentă. Cum $\dfrac{1}{x^2(x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x+2}$, rezultă sistemul $\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B = 0 \\ 2B = 1 \end{cases}$, cu soluţia $A = -\dfrac{1}{4},\ B = \dfrac{1}{2},\ C = \dfrac{1}{4}$, prin urmare

$$\int \frac{1}{x^2(x+2)}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}dx$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - \frac{1}{2x}.$$

Rezultă

$$I_7 = \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2(x+2)}dx = \lim_{u\to\infty}\int_2^{u} \frac{1}{x^2(x+2)}dx = \lim_{u\to\infty}\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - \frac{1}{2x}\right)\Bigg|_2^u$$
$$= \lim_{u\to\infty}\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+2}{u}\right| - \frac{1}{2u}\right) - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}.$$

Bibliografie. D. Păunescu, A. Juratoni , Calcul integral avansat, Ed. Orizonturi Universitare, Timişoara, 2015.