Folosiți separarea variabilelor pentru a găsi soluția PVI dată prin $y(0) = 1$ și ecuația diferențială de mai jos (4p). Aplicați metoda trapezului cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$ (4p). Găsiți eroarea în $t = 1$ comparând cu soluția corectă (2p).

$y' = t/y^2$.

- soluţia exactă a ecuaţiei $y' = cy$ poate fi găsită folosind metoda **separării variabilelor**
- presupunând că $y \neq 0$, împărţim ambele părţi cu y, separăm variabilele, şi integrăm, după cum urmează:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= c\,dt \\ \ln|y| &= ct + k \\ |y| &= e^{ct+k} = e^k e^{ct}. \end{aligned}$$

- condiţia iniţială $y(0) = y_0$ implică $y = y_0 e^{ct}$

- $y' = \dfrac{t}{y^2} \quad | \cdot y^2$

$y^2\,dy = t\,dt \quad | \int$

$\dfrac{y^3}{3} = \dfrac{t^2}{2} + k$

$y^3 = \dfrac{3}{2}t^2 + k \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + k}$

$y(0) = \sqrt[3]{k} = 1 \Rightarrow k = 1$

$\Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 1}$

Algoritmul 3 (Metoda trapezului explicită)

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))\right). \quad (33) \end{aligned}$$

$y' = \dfrac{t}{y^2}$

- $h = \frac{1}{2} \qquad [0, 1]$

$y(0) = 1$

$w_0 = 1$

$y' = f(t, y) \qquad t_{i+1} = t_i + h$

$w_1 = w_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{t_0}{w_0^2} + \frac{t_0 + h}{\left(w_0 + h\frac{t_0}{w_0^2}\right)^2}\right) = 1 + \frac{1}{4}\left[\frac{0}{1} + \frac{0 + \frac{1}{2}}{\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{0}{1}\right)^2}\right] = 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} =$

$= 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} = 1,125$

$w_2 = w_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{t_1}{w_1^2} + \frac{t_1 + h}{\left(w_1 + h\frac{t_1}{w_1^2}\right)^2}\right) = \frac{9}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{81}{64}} + \frac{1}{\left(\frac{9}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{8}}\right)^2}\right) =$

$= \frac{9}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{32}{81} + \frac{1}{\left(\frac{9}{8} + \frac{2}{9}\right)^2}\right) = \frac{9}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{32}{81} + \frac{1}{\left(\frac{97}{72}\right)^2}\right) = 1,36$

$w_3 = w_2 + \frac{1}{4}\left(\frac{t_2}{w_2^2} + \frac{t_2 + h}{\left(w_2 + h\frac{t_2}{w_2^2}\right)^2}\right) = 1,36 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1,36^2} + \frac{\frac{3}{2}}{\left(1,36 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1,36^2}\right)^2}\right) =$

$= 1,64$

- $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 1}$

$t = 1 \Rightarrow y(1) = \sqrt[3]{\frac{3}{2} + 1} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} = 1,35 \Rightarrow e = 1,64 - 1,35 = 0,29$

Folosiți separarea variabilelor pentru a găsi soluția PVI dată prin $y(0) = 1$ și ecuația diferențială de mai jos (4p). Aplicați metoda lui Euler cu pasul $h = 1/2$ pentru această P... $[0, 1]$ (4p). Găsiți eroarea în $t = 1$ comparând cu soluția corectă (2p).
$y' = t/y^2$.

Algoritmul 2 (Metoda lui Euler)

$$w_0 = y_0$$
$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i). \quad (11)$$

- soluția exactă a ecuației $y' = cy$ poate fi găsită folosind metoda **separării variabilelor**
- presupunând că $y \neq 0$, împărțim ambele părți cu y, separăm variabilele, şi integrăm, după cum urmează:

$$\frac{dy}{y} = cdt$$
$$\ln|y| = ct + k$$
$$|y| = e^{ct+k} = e^k e^{ct}.$$

- condiția inițială $y(0) = y_0$ implică $y = y_0 e^{ct}$

- $y(0) = 1$

$y' = \frac{t}{y^2} \; | \cdot y^2 \qquad y' = f(t, y)$

$y^2 dy = t dt \; | \int$

$\Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + k} \qquad y(0) = 1 \Rightarrow k = 1$

$\Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 1}$

- $h = \frac{1}{2} \qquad [0, 1] \qquad t_0 = 0 \qquad t_1 = \frac{1}{2} \qquad t_2 = 1$

$w_0 = y_0 = 1$

$w_1 = w_0 + \frac{1}{2} \frac{t_0}{w_0^2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{1^2} = 1$

$w_2 = w_1 + \frac{1}{2} \frac{t_1}{w_1^2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$w_3 = w_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t_2}{w_2^2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{5}{4}^2} = \frac{5}{4} + \frac{8}{25} = \frac{125+32}{100} = 1{,}57$

- eroarea $= 1{,}57 - 1{,}35 = 0{,}22$ pt $t = 1$

$y(1) = 1{,}35$

Folosiți separarea variabilelor pentru a găsi soluția PVI dată prin $y(0) = 1$ și ecuația diferențială de mai jos (4p). Aplicați metoda mijlocului cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$ (4p). Găsiți eroarea în $t = 1$ comparând cu soluția corectă (2p).
$y' = t^2/y$. $\longrightarrow y = \frac{t}{y^2}$ (am greșit când am copiat funcția)

Algoritmul 1 (Metoda mijlocului)

$$w_0 = y_0$$
$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right). \quad (4)$$

- $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + 1}$ (dem. mai sus)
- $h = \frac{1}{2} \qquad t_0 = 0 \qquad t_1 = \frac{1}{2} \qquad t_2 = 1 \qquad [0, 1]$

$w_0 = y_0 = 1$

$w_1 = w_0 + h \frac{t_0 + \frac{h}{2}}{w_0 + \frac{h}{2} \cdot \frac{t_0}{w_0^2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{0 + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{0}{1^2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$

$w_2 = w_1 + h \cdot \frac{t_1 + \frac{h}{2}}{w_1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{t_1}{w_1^2}} = \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{9}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{81}{64}}} = \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{8} + \frac{8}{81}} = 1{,}43$

$w_3 = w_2 + h \cdot \frac{t_2 + \frac{h}{2}}{w_2 + \frac{h}{2} \cdot \frac{t_2}{w_2^2}} = 1{,}43 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{4}}{1{,}43 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1{,}43^2}} = 1{,}83$

• eroarea $\longrightarrow y(1) = 1{,}35 \Rightarrow e = 1{,}83 - 1{,}35 = 0{,}48$

Găsiți soluția PVI dată prin $y(0) = 0$ și ecuația diferențială liniară de ordinul întâi de mai jos (4p). Aplicați metoda Adams-Moulton cu doi pași cu pasul $h = 1/2$ pentru ...
intervalul $[0, 1]$ (4p). Folosiți metoda trapezului implicită pentru a determina w_1. Găsiți eroarea în $t = 1$ comparând cu soluția corectă (2p).
$y' = -2y + 4t.$

$h = \frac{1}{2}$

$t = 1$

Algoritmul 8 (Metoda Adams–Moulton cu doi pași (de ordinul trei))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}]. \qquad (45)$$

- considerăm problema cu valoare inițială

$$\begin{cases} y' = g(t)y + h(t) \\ y(a) = y_a \\ t \in [a, b]. \end{cases} \qquad (19)$$

$$y(t) = e^{\int g(t)dt} \int e^{-\int g(t)dt} h(t)dt. \qquad (20)$$

• $y' = -2y + 4t$

$y(t) = e^{\int -2dt} \int e^{-\int -2dt} 4t\,dt = e^{-2t} \int e^{2t} 4t\,dt = e^{-2t}\left(2e^{2t}t - \int \frac{e^{2t}}{2} \cdot 4dt\right) =$

$\left(\frac{e^{2t}}{2}\right)'$

$= 2t - 1 + \mathscr{C} \cdot e^{-2t}$

$y(0) = -1 + \mathscr{C}e^0 = 0 \Rightarrow \mathscr{C} = 1$

$\Rightarrow y(t) = 2t - 1 + e^{-2t}$

• $h = \frac{1}{2} \qquad t_0 = 0 \qquad t_1 = \frac{1}{2} \qquad t_2 = 1$

Algoritmul 8 (Metoda Adams–Moulton cu doi pași (de ordinul trei))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}]. \qquad (45)$$

$y' = -2y + 4t \qquad f_i \equiv f(t_i, w_i).$

$w_0 = y_0 = 0$

$w_2 = w_1 + \frac{1}{24}\left[5 \cdot (-2w_2 + 4t_2) + 8(-2w_1 + 4t_1) - (-2w_0 + 4t_0)\right]$

$\longrightarrow$ pt. a determina w_1 folosim:

Algoritmul 7 (Metoda trapezului implicită (de ordinul doi))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f_{i+1} + f_i]. \qquad (44)$$

$w_1 = w_0 + \frac{h}{2}\left[(-2w_1 + 4t_1) + (-2w_0 + 4t_0)\right] = 0 + \frac{1}{4}\left[-2w_1 + 2 + (-0) + 4 \cdot 0\right] =$

$= -\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}w_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow w_1 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow w_2 = \frac{1}{24}\left[-10w_2 + 20 \cdot 1 - 16 \cdot \frac{1}{3} + \cancel{32}^{16} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0\right] + \frac{1}{3} =$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{24}\left[-10w_2 + 36 - \frac{16}{3}\right] = \frac{1}{3} - \frac{5}{12}w_2 + \frac{1}{24} \cdot \frac{92}{3}$

$\frac{17}{12}w_2 = \frac{24 + 92}{24 \cdot 3} \quad \Big| \cdot 12$

$17w_2 = \frac{116}{6} = \frac{58}{3} \Rightarrow w_2 = \frac{58}{51} = 1{,}137$

$y(1) = 2 - 1 + e^{-2} = 1 + \frac{1}{e^2} = 1{,}135$

$\Rightarrow$ eroarea este $1{,}137 - 1{,}135 = 0{,}002$

Găsiţi soluţia PVI dată prin $y(0) = 0$ şi ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi de mai jos (4p). Aplicaţi metoda Milne–Simpson cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$ (4p). Folosiţi metoda trapezului implicită pentru a determina w_1. Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă (2p).

$y' = -2y + 4t.$ $\qquad y(1) = 1,135$

Algoritmul 7 (Metoda trapezului implicită (de ordinul doi))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f_{i+1} + f_i]. \quad (44)$$

- $y' = -2y + 4t \Rightarrow y(t) = 2t - 1 + e^{-2t}$ (dem. mai sus)

- $\longrightarrow$ pt. w_1: $\qquad w_0 = y_0 = 0$

$w_1 = w_0 + \frac{h}{2}[(-2w_1 + 4t_1) + (-2w_0 + 4t_0)] =$

$= 0 + \frac{1}{4}[-2w_1 + \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0] = -\frac{w_1}{2} + \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2} w_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow w_1 = \frac{1}{3}$

Algoritmul 9 (Metoda Milne–Simpson)

$$w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}[f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}]. \quad (48)$$

$w_2 = w_0 + \frac{1}{6}[(-2w_2 + 4t_2) + 4(-2w_1 + 4t_1) + \overbrace{(-2w_0 + 4t_0)}^{0}] =$

$= 0 + \frac{1}{6}[-2w_2 + 4 - 8 \cdot \frac{1}{3} + \overset{8}{\cancel{16}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}] =$

$= -\frac{w_2}{3} + \frac{1}{6}[\overset{3}{}12 - \frac{8}{3}] = -\frac{w_2}{3} + \frac{28}{18}$

$\frac{4w_2}{3} = \frac{28}{18} \;\Big|\cdot\frac{3}{4} \Rightarrow w_2 = \frac{7}{6} = 1,166$

$\Rightarrow$ eroarea $= 1,166 - 1,135 = 0,031$

Găsiţi soluţia PVI dată prin $y(0) = 0$ şi ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi de mai jos (4p). Aplicaţi metoda Runge–Kutta de ordinul patru cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$ (4p). Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă (2p).

$y' = -y + t^2.$

- $y' = -y + t^2 \Rightarrow y(t) = e^{\int -1 dt} \int e^{-\int -1 dt} t^2 dt = e^{-t} \int e^t t^2 dt =$

$= e^{-t}\left(e^t t^2 - \int e^t 2t\, dt\right) = e^{-t}\left[e^t t^2 - 2\left(e^t t - e^t + \mathcal{C}\right)\right] =$

$= t^2 - 2t + 2 - 2\mathcal{C} e^{-t}$

$y(0) = 2 - 2\mathcal{C} = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = 1 \Rightarrow y(t) = -2e^{-t} + t^2 - 2t + 2$

Algoritmul 2 (Metoda Runge–Kutta de ordinul patru (RK4))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) \quad (8)$$

unde

$$\begin{aligned} s_1 &= f(t_i, w_i) \\ s_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}s_1\right) \\ s_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}s_2\right) \\ s_4 &= f(t_i + h, w_i + hs_3). \end{aligned}$$

$h = \frac{1}{2}$

$t_0 = 0 \quad t_1 = \frac{1}{2} \quad t_2 = 1$

$w_0 = y_0 = 0 \qquad y' = -y + t^2$

$s_1 = f(t_i, w_i) = -w_0 + t_0^2 = 0$

$s_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} s_1) = -(w_0 + \frac{h}{2} \cdot 0) + (t_0 + \frac{h}{2})^2 = \frac{1}{16}$

$s_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} s_2) = -(w_0 + \frac{\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{1}{16}) + (t_0 + \frac{h}{2})^2 = \frac{-1}{64} + {}^{4/}\frac{1}{16} = \frac{3}{64}$

$s_4 = f(t_i + h, w_i + h s_3) = -(w_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{64}) + (t_0 + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{128} + {}^{32/}\frac{1}{4} = \frac{29}{128}$

$w_1 = w_0 + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) = 0 + \frac{1}{12}\left(0 + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \frac{29}{128}\right) = \frac{19}{512} = 0{,}037$

se aplică și pt w_2 și pt w_3 . . . (s_1, s_2, s_3, s_4)

$y(1) = -2\frac{1}{e} + 1 - \cancel{2} + \cancel{2} = 1 - \frac{2}{e} = 0{,}264$

Aplicaţi metoda de tip predictor–corector care foloseşte metoda Adams–Bashforth cu patru paşi şi metoda Adams–Moulton cu trei paşi cu mărimea pasului $h = 0.025$ problemei cu valoare iniţială dată prin $y(0) = 0$ şi ecuaţia diferenţială de mai jos, pe intervalul $[0, 1]$. Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia dată de funcţia ode45.

$y' = -2y + 4t.$

Aplicaţi metoda Runge–Kutta de ordinul patru cu mărimea pasului $h = 0.025$ problemei cu valoare iniţială dată prin $y(0) = 1$ şi ecuaţia diferenţială de mai jos, pe intervalul $[0, 1]$. Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia dată de funcţia ode45

$y' = 5t^4 y.$

Iancu Fiat

Folosiţi separarea variabilelor pentru a găsi soluţia PVI dată prin $y(0) = 1$ şi ecuaţia diferenţială de mai jos (4p). Aplicaţi metoda trapezului cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$ (4p). Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă (2p).

$y' = t^3/y^2.$

Găsiţi soluţia PVI dată prin $y(0) = 0$ şi ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi de mai jos (4p). Aplicaţi metoda Adams–Moulton cu doi paşi cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$ (4p). Folosiţi metoda trapezului implicită pentru a determina w_1. Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă (2p).

$y' = y + t.$

Folosiţi separarea variabilelor pentru a găsi soluţia PVI dată prin $y(0) = 1$ şi ecuaţia diferenţială de mai jos (4p). Aplicaţi metoda mijlocului cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$ (4p). Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă (2p).

$y' = t^3/y^2.$