Algebră liniară, Probleme relativ la matrici simetrice, forme pătratice şi SVD

1. Se dă matricea simetrică:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -4 & 16 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Să se determine o bază ortonormată $\mathcal{B}'$ în $\mathbb{R}^3$, formată din vectori proprii ai matricii A şi să se scrie explicit relaţia de similaritatate a matricii A cu matricea diagonală a valorilor sale proprii.

2. Să se determine factorizarea $A = QDQ^T$, a matricii simetrice de mai jos, precizând în cuvinte cine este matricea $Q = [q_1|q_2]$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

şi apoi exprimaţi matricea A ca o combinaţie liniară de produse exterioare:

$$A = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T$$

ATENŢIE!!!! Există tendinţa de a scrie relaţia de similaritate fără a gândi în prealabil şi anume, unii aplică relaţia $A = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} D T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^T$ şi când matricea A nu este simetrică. **ESTE GREŞIT!!!!** Doar când matricea este simetrică putem construi o bază ortonormată formată din vectori proprii ai lui A şi deci $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ este matrice ortogonală, adică inversa este egală cu transpusa!

3. a) Care este expresia analitică a unei forme pătratice asociate matricii simetrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$? Exemplificaţi, determinând expresia analitică a formei pătratice definită de matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Să se determine matricea formei pătratice $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 7x_2^2 - 5x_2x_3 + x_3^2$$

4. Să se reducă forma pătratică $Q(x_1, x_2) = -2\sqrt{2}x_1x_2 + x_2^2$ la forma canonică. Este forma pozitiv definită, negativ definită sau nedefinită?

5. Să se determine baza ortonormată în care forma pătratică $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 8x_1x_2 + 16x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$ are forma canonică.

6. Dacă matricea unei forme pătratice are valorile proprii $-1, 2, -3$ ce puteţi spune despre forma pătratică (tipul pozitiv, negativ sau nedefinită)? Dar dacă valorile proprii sunt $(2, 7, 0)$?

7. Să determine descompunerea singulară a matricii

$$A = [2\ 1\ \ -2]$$

8. Să se determine descompunerea SVD a matricii

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şi aproximaţia A_1 a acesteia. Calculaţi distanţa dintre A şi aproximaţia sa: $\|A - A_1\|_F$, adică eroarea aproximării.

Indicaţie: A se vedea în curs cum se calculează în funcţie de valorile singulare neglijate, această distanţă.

9. Fie A o matrice simetrică ce are valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ şi $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ baza ortonormată din $\mathbb{R}^n$, formată din vectori proprii ai lui A. Să se deducă descompunerea SVD a matricii A. Să se arate că dacă o matrice simetrică este (semi)pozitiv definită atunci descompunerea sa ortogonală coincide cu descompunerea SVD (această proprietate era folosită de Facebook pentru recunoaşterea feţelor şi tag automat; tag-ul automat a fost stopat acum un an).

Indicaţie: Matricea A fiind simetrică avem $A^T = A$ şi deci $A^TA = A^2$. Valorile proprii ale matricii A^2 sunt $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ (vezi Cursul 11). Prin urmare valorile singulare ale matricii simetrice A sunt $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$. Dacă A este (semi)pozitiv definită atunci $\lambda_i \geq 0$ şi deci $\sigma_i = |\lambda_i| = \lambda_i$.

10. Să se determine descompunerea SVD a matricii:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \theta \neq 0, \pi$$

11. Determinaţi descompunerea SVD a matricii:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

şi exprimarea ei ca o combinaţie liniară de matrici de rang 1.