MS

Tema 11 - 2

2. Fie $X \sim Bin(n,p)$, unde . Folosind inegalităţile Markov şi Cebîsev, să se evalueze probabilitatea $P(X \geq \alpha n)$, $p < \alpha < 1$. Să se decidă care dintre cele două inegalităţi oferă o margine mai bună a acestei probabilităţi.

$M(X) = n \cdot p$

$\sigma^2(X) = np(1-p)$

$P(X \geq \alpha n) \leq \frac{n \cdot p}{\alpha n} = \frac{p}{\alpha}$

$P(X - np \geq \alpha n - np) \leq P(|X - np| \geq n(\alpha - p)) \leq \frac{np(1-p)}{n^2(\alpha-p)^2} =$

$= \frac{p(1-p)}{n(\alpha-p)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ → e mai bună

3. Fie $X_i, i = 1,2,3$ trei variabile aleatoare de tip binomial, $X_i \sim Bin(n, p_i), i = 1,2,3$. Să se folosească inegalitatea Markov pentru a determina o mărgine superioară a probabilităţii $P(Z \geq \alpha n)$, $p < \alpha < 1$, unde $Z = \sum_{i=1}^{3} X_i$. Să se studieze cazul particular $p_i = p$, iar $\alpha = 2p$.

$Z = X_1 + X_2 + X_3$

$M(X_1 + X_2 + X_3) = n \cdot p_1 + n \cdot p_2 + np_3$

$P(Z \geq \alpha n) \leq \frac{np_1 + np_2 + np_3}{\alpha n} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{\alpha}$

caz p. => $= \frac{3\cancel{np}}{2\cancel{pn}} = \frac{3}{2}$

4. Fie $X \sim Exp(\theta)$. Folosind inegalitatea Markov să se determine o margine superioară a probabilităţii $P(X \geq a)$, $a > 0$.

$M(X) = \theta \qquad \sigma^2(X) = \theta^2$

$P(X \geq a) \leq \frac{\theta}{a}$

5. Fie $X \sim Exp(\theta)$. Folosind inegalitatea Cebîsev să se determine o margine superioară a probabilităţii $P(|X - M(X)| \geq a)$, $a > 0$.

$M(x) = \theta \qquad \sigma^2 = \theta^2$

$$P(|x - M(x)| \geq a) \leq \frac{\theta^2}{a^2}$$

6. O pagină Web este accesată zilnic în medie într-o zi de 25×10^3 ori pe zi, dar proprietarul paginii susţine că în 1% din zile ea este accesată de mai mult de 5×10^4 ori. Să se determine abaterea standard (faţă de medie) a numărului de accesări zilnice.
Indicaţie: Dacă X este v.a. ce dă numărul de accesări pe zi, atunci $M(X) = 25 times 10^3$, iar $P(X > 5 \times 10^4) = 0.01$. Deci, $-0.01 = P(X > 5 \times 10^4) = P(X - 25000 > 2500) = P(|X - 25000| > 25000) = P(|X - 25000| > 25001)$. Din inegalitatea Cebâev se obţine $0.01 = P(|X - M(X)| > 25001) \leq \frac{\sigma^2(X)}{2501^2}$. Deci, $\sigma \geq 2500.1$ Deci, faţa de media numărului de accesări zilnice se înregistreaza cel puţin 2500 de accesări.

$M(x) = 25 \cdot 10^3$ ori

$1\% = 5 \cdot 10^4$ ori

Ce a vrut sa spuna autorul?