Curs 9: Vectori aleatori continui

1.1 Distribuţia de probabilitate a unui vector aleator

O pereche (X,Y) sau, mai general, un n–uplu $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variabile aleatoare continue se numeşte vector aleator continuu. Vectorii aleatori sunt definiţi în experimente în care se observă sau se măsoară simultan n caracteristici ale sistemului sau procesului supus studiului.

Pentru a înţelege mai rapid problematica relativ la vectorii aleatori continui studiem cazul cel mai simplu, al vectorilor aleatori cu două componente.

Ca şi în cazul unei singure variabile continue X, ne interesează, relativ la vectorul aleator (X,Y), probabilităţile evenimentelor de forma $((X,Y) \in D)$: "evenimentul ca vectorul (X,Y) să ia valori în domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$". Cele mai uzuale domenii sunt cele dreptunghiulare: $D = [a,b] \times [c,d]$, $D = [a,b) \times [c,d)$ etc.

Distribuţia de probabilitate a unui vector aleator (X,Y) se precizează dând *densitatea de probabilitate*, care este o funcţie $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ care verifică proprietăţile:

1) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$, $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

2) $f_{X,Y}$ este integrabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1. \tag{1}$$

A doua condiţie din definiţia densităţii asigură că volumul domeniului din $\mathbb{R}^3$ mărginit superior de graficul funcţiei, adică de suprafaţa de ecuaţie $z = f_{X,Y}(x,y)$, iar inferior de planul xOy, care are ecuaţia $z = 0$, este egal cu unu (Fig. 1).

Probabilitatea ca vectorul (X,Y) să ia valori în domeniul[1] $D \subset \mathbb{R}^2$ este integrală dublă pe D din densitate, adică

$$\boxed{P((X,Y) \in D) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy. \tag{2}}$$

[1]Domeniul de integrare este în problemele practice o mulţime mărginită sau nemărginită pe care integrala există.

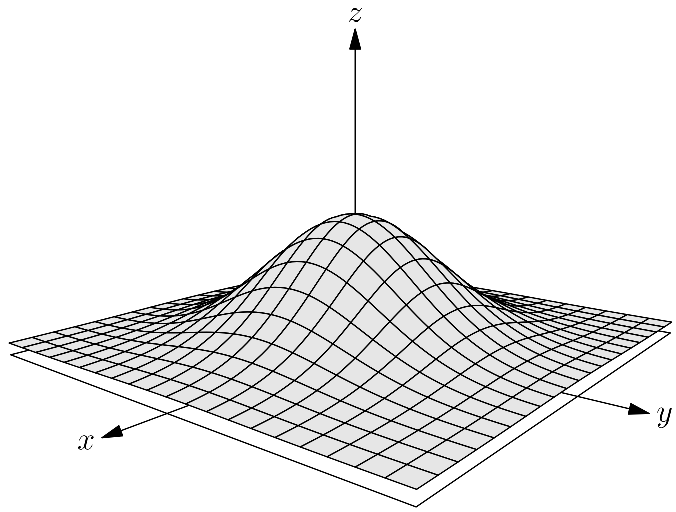

Fig. 1: Graficul densităţii de probabilitate a unui vector aleator (X, Y).

Densitatea din Fig. 1 are expresia analitică $f(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$, adică este nenulă pe $\mathbb{R}^2$. Domeniul G din plan pe care densitatea de probabilitate a unui vector aleator (X, Y) este nenulă se numeşte *suportul densităţii.*

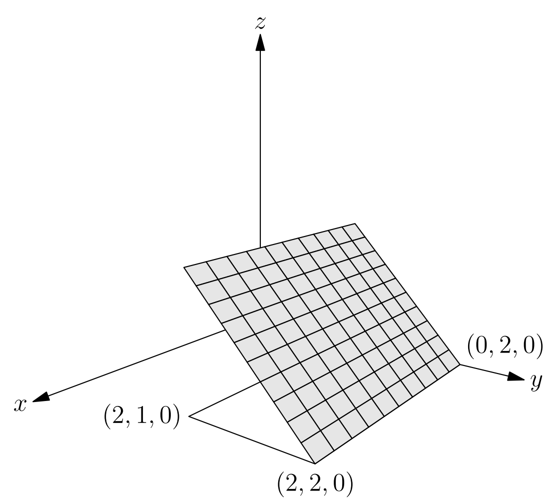

Fig. 2: Graficul unei densităţi de probabilitate cu suport mărginit.

Exemplul 1. Fie (X, Y) un vector aleator ce are densitatea

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 - y, & \text{dacă } x \in [0, 2],\ y \in [1, 2], \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Suportul densităţii este domeniul dreptunghiular $G = [0, 2] \times [1, 2)$. Graficul funcţiei $f_{X,Y}$ este vizualizat în Fig. 2. El constă din domeniul dreptunghiular haşurat (dat de ecuaţia $z = 2 - y$, pentru $(x, y) \in [0,2] \times [1,2]$) şi din planul xOy minus domeniul dreptunghiular G.

Să verificăm mai întâi că funcţia $f_{X,Y}$ este o densitate de probabilitate. Este evident că $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pe de altă parte, avem

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_1^2 2 - y\,dy \right) dx = \int_0^2 \left(2y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^2 dx = \int_0^2 \frac{1}{2}\,dx = 1,$$

deci $f_{X,Y}$ este densitatea de probabilitate a unui vector aleator (X, Y).

Probabilitatea ca vectorul aleator (X, Y) să ia valori în discul

$$D = \{(x,y) \,|\, (x-1)^2 + (y-1.5)^2 \leq 0.5^2\}$$

este

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \iint_D (2-y)\;dx\,dy.$$

Efectuând schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x &= 1 \quad + \rho\cos\theta, \\ y &= 1.5 + \rho\;\sin\theta, \end{cases}$$

unde $\rho \in (0, 0.5]$ şi $\theta \in [0, 2\pi)$, avem

$$\iint_D (2-y)\;dx\,dy = \int_0^{0.5} \left(\int_0^{2\pi} (2 - 1.5 - \rho\sin\theta)\rho\,d\theta \right) d\rho = \int_0^{0.5} \pi\rho\,d\rho = \frac{\pi}{8}.$$

□

Densitatea de probabilitate $f_{X,Y}$ defineşte funcţia de repartiţie $F_{X,Y}$ a vectorului aleator (X, Y) prin

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(t,s)\,dt\,ds. \tag{3}$$

Domeniul de integrare din plan pentru calculul funcţiei de repartiţie este ilustrat în Fig. 3.

Cunoscând densitatea de probabilitate $f_{X,Y}$ a vectorului aleator (X, Y), putem afla densităţile de probabilitate f_X, f_Y ale coordonatelor sale X, Y?

Răpunsul este afirmativ şi pentru a determina densităţile asociate lui X, respectiv Y, observăm că dacă $f_{X,Y}$ este integrabilă în raport cu x, respectiv y, atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \right) dx = 1. \tag{4}$$

Notăm prin f_X, respectiv f_Y, funcţiile $f_X, f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin:

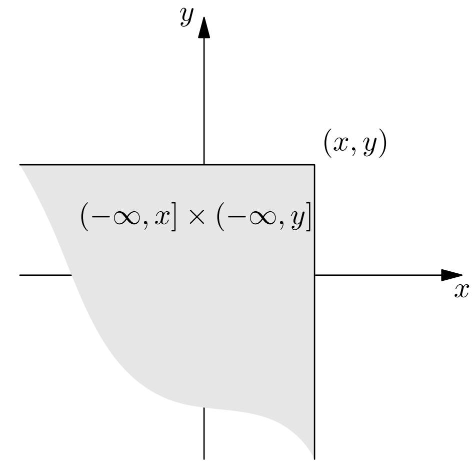

Fig. 3: Domeniul de integrare pentru calculul funcţiei de repartiţie a unui vector (X, Y).

$$\boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx.}$$

Ambele funcţii sunt integrale dintr-o funcţie nenegativă, $f_{X,Y} \geq 0$, deci sunt şi ele nenegative. Din relaţia (4) rezultă de asemenea că

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, dy = 1,$$

deci funcţiile f_X, f_Y sunt densităţi de probabilitate. Vom demonstra că f_X este chiar densitatea variabilei X, respectiv f_Y este densitatea variabilei Y. Într-adevăr, conform relaţiei (2) funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X este:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, s)\, ds \right)}_{f_X(t)} dt = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt.$$

Prin urmare, f_X este densitatea de probabilitate a variabilei X, căci ea defineşte funcţia de repartiţie a lui X.

Funcţia f_X definită mai sus se numeşte *densitatea marginală a lui* X, iar funcţia de repartiţie F_X asociată se numeşte *repartiţia marginală* a lui X. Analog, se arată că funcţia f_Y este densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare Y, numită *densitatea marginală a lui* Y, iar *repartiţia marginală* corespunzătoare este

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(s)\, ds = \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, s)\, dt \right) ds. \tag{5}$$

Generalizând, un vector aleator cu n componente $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este reprezentat din punct de vedere probabilist de densitatea sa de probabilitate $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, care defineşte apoi funcţia de repartiţie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prin

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \cdots dt_n. \end{aligned} \tag{6}$$

1.2 Variabile aleatoare independente

Definiţia 1.2.1 Variabilele aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se numesc *independente* dacă

$$\begin{aligned} &P((X_1 \le x_1) \cap (X_2 \le x_2) \cap \ldots \cap (X_n \le x_n)) \overset{not.}{=} P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n) \\ &\quad = P(X_1 \le x_1) P(X_2 \le x_2) \cdots P(X_n \le x_n),\ \forall\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Relaţia de mai sus este echivalentă cu faptul că funcţia de repartiţie a vectorului aleator $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este produsul funcţiilor de repartiţie marginale:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),\ \forall\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Propoziţia 1.2.1 *Variabilele aleatoare X şi Y sunt independente dacă şi numai dacă densitatea de probabilitate a vectorului aleator (X, Y) este produsul densităţilor variabilelor aleatoare X, Y, adică*

$$\boxed{f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y),\ \textit{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (7)}$$

Generalizând la n variabile aleatoare, se obţine că $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt independente dacă şi numai dacă densitatea de probabilitate a vectorului aleator $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este produsul densităţilor variabilelor:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n), \forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

unde $f_{\mathbf{X}}$ este densitatea de probabilitate a vectorului aleator $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Exemplul 2. Un circuit electronic conţine doi tranzistori. Durata de viaţă a trazistorilor este dată de variabilele aleatoare X şi Y. Densitatea de probabilitate a vectorului aleator (X, Y) este

$$f(x, y) = \begin{cases} (1/8) x\, e^{-(x+y)/2}, & \text{dacă } x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se verifice dacă duratele de viaţă ale celor doi tranzistori sunt independente.

Rezolvare: Vom calcula mai întâi densităţile marginale ale celor două variabile. Dacă $x \leq 0$, atunci

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dy = 0.$$

Pe de altă parte, pentru $x > 0$ avem

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \frac{1}{8}\,x\,e^{-x/2}\int_{0}^{\infty} e^{-y/2}\,dy = \frac{1}{8}\,x\,e^{-x/2}(-2)e^{-y/2}\Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{4}\,x\,e^{-x/2}\left(\lim_{y\to\infty} e^{-y/2} - 1\right) = \frac{1}{4}\,x\,e^{-x/2}. \end{aligned}$$

Deci, densitatea marginală a variabilei aleatoare X este

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x\,e^{-x/2}, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

Analog, pentru $y \leq 0$, se obţine $f_Y(y) = 0$, iar pentru $y > 0$, are loc

$$f_Y(y) = \int_{0}^{\infty} (1/8)x\,e^{-x/2}e^{-y/2}\,dx = (1/8)e^{-y/2}\int_{0}^{\infty} x\,e^{-x/2}\,dx = (1/2)e^{-y/2}.$$

De aici rezultă

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,e^{-y/2}, & \text{dacă } y > 0, \\ 0, & \text{dacă } y \leq 0. \end{cases}$$

Este evident că $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, deci variabilele aleatoare X şi Y sunt independente.

$\square$

• Un şir $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ de variabile aleatoare cu proprietatea că orice subşir finit este constituit din variabile aleatoare independente se numeşte *şir de variabile aleatoare independente*.

• În statistică se folosesc în general şiruri finite de *variabile aleatoare independente şi identic distribuite* (notaţie *i.i.d.*), $X_1, X_2, \ldots, X_n$, adică densitatea de probabilitate a fiecărei variabile din şir este aceeaşi: $f_{X_k} = f$, $\forall\ k = \overline{1,n}$.

1.3 Variabile aleatoare condiţionate de valoarea altei variabile

Recunoaşterea formelor, *machine learning* sau *data mining* se bazează preponderent pe statistica Bayesiană, care implică distribuţii de probabilitate condiţionate. În cele ce urmează prezentăm noţiunile de bază relativ la variabilele aleatoare condiţionate.

Atunci când se fac predicţii relativ la valorile distribuţiilor marginale ale unui vector aleator (X, Y), suntem interesaţi în a determina în ce fel este influenţată probabilitatea ca

X să ia valori într-un interval de faptul că se ştie că în urma observaţiilor asupra variabilei Y s-a înregistrat valoarea $Y = y_0$.

Presupunem că vectorul aleator (X, Y) are densitatea de probabilitate $f_{X,Y}$ continuă pe suportul său (cazul cel mai frecvent întâlnit în practică). Presupunem că în urma unei măsurători sau observaţii am înregistrat pentru variabila Y valoarea y_0, unde y_0 este astfel încât $f_Y(y_0) \neq 0$. Ne propunem să determinăm în ce fel se modifică distribuţia de probabilitate a variabilei X ştiind că evenimentul $(Y = y_0)$ a avut loc. Se demonstrează uşor că funcţia

$$\boxed{g(x|y_0) = \frac{f_{X,Y}(x, y_0)}{f_Y(y_0)} \qquad (9)}$$

este o densitate de probabilitate. Variabila aleatoare ce are densitatea de probabilitate $g(\cdot\,|\,y_0)$ se notează cu $(X|Y = y_0)$ şi se numeşte variabila aleatoare X condiţionată de evenimentul $(Y = y_0)$.

Analog, funcţia $h(\cdot\,|x_0)$ definită prin

$$\boxed{h(y|x_0) = \frac{f_{X,Y}(x_0, y)}{f_X(x_0)},\ y \in \mathbb{R}, \qquad (10)}$$

unde $x_0 \in \mathbb{R}$ cu $f_X(x_0) \neq 0$, este o densitate de probabilitate. Variabila aleatoare ce are această densitate se notează cu $(Y|X = x_0)$ şi se numeşte variabila aleatoare Y condiţionată de evenimentul $(X = x_0)$.

Variabilele aleatoare X, Y sunt independente dacă şi numai dacă

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \quad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \qquad (11)$$

Astfel, dacă X şi Y sunt independente, atunci

$$g(x|y) = \frac{f_X(x) f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Analog,

$$h(y|x) = f_Y(y),\ y \in \mathbb{R}.$$

Cu alte cuvinte, dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente, cunoaşterea valorii x a lui X, obţinută printr-o observaţie, măsurare etc, nu afectează în nici un fel distribuţia de probabilitate a lui Y.

Exemplul 3. Vectorul aleator (X, Y) are densitatea de probabilitate

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 6x, & \text{dacă } 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

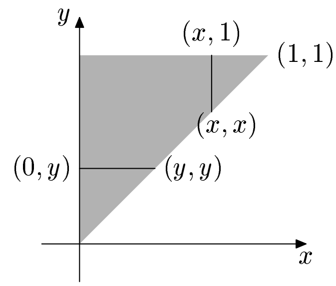

Fig. 4: Densitatea de probabilitate a vectorului aleator din Exemplul 3 este nenulă pe domeniul triunghiular haşurat.

a) Să se determine densitatea marginală f_X;
b) Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $(Y|X = 0.25)$;
c) Să se calculeze $P(X > 0.5)$ şi $P(Y > 0.5|X = 0.25)$.

Rezolvare: a) Ţinând seama că densitatea de probabilitate $f_{X,Y}$ are suportul (este nenulă) pe domeniul triunghiular haşurat din Fig. 4, avem:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^1 6x\, dy = 6x(1-x),$$

dacă $x \in (0,1)$, şi $f_X(x) = 0$, în rest.
b) Densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $(Y|X = 0.25)$ este

$$h(y|0.25) = \frac{f_{X,Y}(0.25,y)}{f_X(0.25)} = \begin{cases} \frac{6\times 0.25}{6\times 0.25\times 0.75} = \frac{4}{3}, & \text{dacă } y \in (0.25,1), \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

c) Avem

$$P(X > 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_{0.5}^{1} 6x(1-x)\, dx = 0.5,$$

iar

$$P(Y > 0.5|X = 0.25) = \int_{0.5}^{\infty} h(y|0.25)\, dy = \int_{0.5}^{1} \frac{4}{3}\, dy = \frac{2}{3}.$$

□

1.3.1 Formula lui Bayes pentru densităţi de probabilitate

Fie (X,Y) un vector aleator continuu de densitate de probabilitate $f_{X,Y}$. Notăm cu f_X, respectiv f_Y densităţile marginale corespunzătoare şi cu $f(x|y)$, $f(y|x)$ densitătile variabilelor condiţionate $(X|Y = y)$, respectiv $(Y|X = x)$.

Reamintim formula lui Bayes pentru o partiţie H_i, $i = \overline{1, n}$, a evenimentului sigur:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}, \quad k = \overline{1, n},$$

unde H_i se numesc evenimente ipoteze, iar A eveniment informaţie.

Corespondentul acestei formule pentru densităţi de probabilitate este[2]:

$$\boxed{f(x|y)=\frac{f_X(x)f(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f(y|t)dt}.}$$

Într-adevăr, din definiţia densităţilor condiţionate avem

$$f(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad \text{şi} \quad f(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}.$$

Din a doua relaţie se scoate $f_{X,Y}$ şi se înlocuieşte în prima. Astfel, se obţine:

$$f(x|y) = \frac{f_X(x)f(y|x)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, y)\, dy} = \frac{f_X(x)f(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f(y|t)dt}.$$

1.4 Vectori aleatori continui uniform distribuiţi Operaţii cu variabile aleatoare continue

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime din plan de arie finită şi nenulă. Un vector aleator continuu (X, Y) este uniform distribuit pe D dacă admite densitatea de probabilitate:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{aria}(D)}, & \text{dacă } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Graficul densităţii de probabilitate a unui vector aleator (X, Y) uniform distribuit pe un domeniu D din plan este ilustrat mai jos:

În cazul particular în care D este un dreptunghi, $D = [a, b] \times [c, d]$, densitatea de probabilitate a vectorului (X, Y) devine:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & \text{dacă } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

[2]Notaţia $f(x|y)$ în loc de $g(x|y)$, respectiv $f(y|x)$ în loc de $h(y|x)$ este puţin confuză, dar astfel se foloseşte în modelele Bayesiene din *machine learning*, *data mining*, adică ordinea variabilelor este cea care indică a cui densitate este funcţia respectivă, nu numele funcţiei!

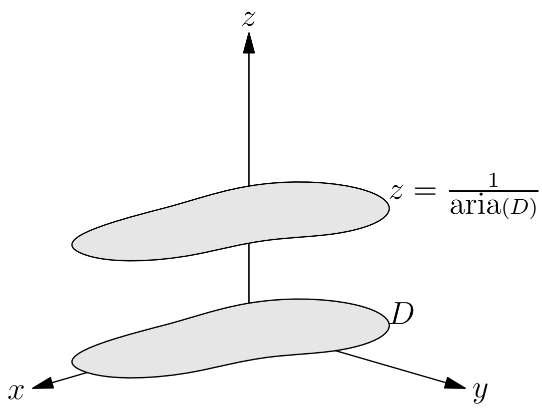

Fig. 5: Graficul densităţii de probabilitate a unui vector aleator (X, Y) uniform distribuit pe domeniul D din plan.

Calculând densităţile sale marginale, obţinem

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{dacă } x \in [a, b], \\ 0, & \text{în rest,} \end{cases} \quad \text{respectiv } f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{d-c}, & \text{dacă } y \in [c, d], \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Astfel,

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y),\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Prin urmare, variabilele X şi Y sunt independente. Analizând densităţile marginale ale acestora, observăm că X şi Y sunt uniform distribuite pe $[a, b]$, respectiv $[c, d]$.

În concluzie, am dedus următoarea proprietate:

> Dacă un vector aleator (X, Y) este uniform distribuit pe $D = [a, b] \times [c, d]$, atunci coordonatele sale X şi Y sunt independente şi uniform distribuite pe $[a, b]$, respectiv $[c, d]$.
>
> Reciproc, dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente şi uniform distribuite pe $[a, b]$, respectiv $[c, d]$, atunci vectorul aleator (X, Y) este uniform distribuit pe dreptunghiul $[a, b] \times [c, d]$.

Rezultatul de mai sus se poate generaliza pentru orice vector aleator $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uniform distribuit pe $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Densitatea de probabilitate a unui astfel de vector aleator este:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{vol(D)},\ \text{dacă } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D,$$

şi zero în rest.

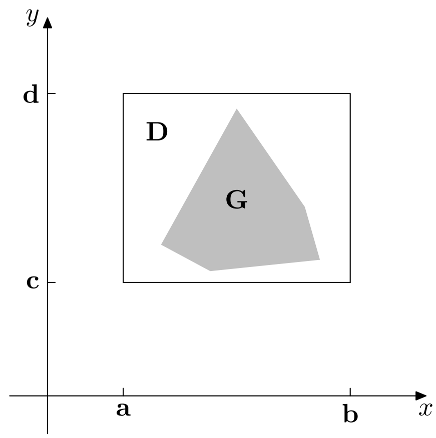

Fig. 6: Regiunea G inclusă într-un dreptunghi $D = [a, b] \times [c, d]$.

1.4.1 Simularea unui vector aleator continuu uniform distribuit

Am arătat mai sus că dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente şi uniform distribuite pe intervalele $[a, b]$, respectiv $[c, d]$, atunci vectorul aleator (X, Y) este uniform distribuit pe dreptunghiul $[a, b] \times [c, d]$.

Datorită acestei proprietăţi, avem următoarea metodă de generare de puncte (x, y) uniform distribuite în dreptunghiul $D = [a, b] \times [c, d]$:

```
x ← a + (b − a) ∗ urand();
y ← c + (d − c) ∗ urand();
return (x,y);
```

adică se generează o valoare x, uniform distribuită pe $[a, b]$, respectiv o valoare y, uniform distribuită pe $[c, d]$, iar punctul de coordonate (x, y) este o observaţie asupra vectorului aleator (X, Y), uniform distribuit pe D (în cazul de faţă, funcţia `urand()` generează o valoare asupra unei variabile aleatoare uniform distribuite pe intervalul $[0, 1]$).

Pentru a genera puncte aleatoare în domenii G mărginite, ne-dreptunghiulare şi de arie nenulă se fixează un dreptunghi $D = [a, b] \times [c, d]$ ce include domeniul G (Fig. 6), apoi se generează la întâmplare (ca mai sus) puncte în D şi se reţin doar cele care aparţin lui G:

```
do{
    generează un punct (x, y) în D;
  }while((x, y) nu aparţine lui G);
return(x,y);
```

Această metodă se numeşte **metoda respingerii** (se poate demonstra că aceasta generează într-adevăr puncte aleatoare uniform distribuite în G).

Întrebare: Cum trebuie să fie D pentru ca algoritmul de mai sus să fie cât mai eficient?

Numărul N, de parcurgeri ale buclei `do-while`, este o variabilă aleatoare ce are distribuţia geometrică de parametru p, unde $p \in (0,1)$ este probabilitatea succesului, adică probabilitatea ca punctul generat să cadă în G.

Ţinând seama că densitatea de probabilitate a vectorului aleator (X,Y), uniform distribuit pe D, este

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\text{aria}(D)}, \text{ pentru } (x,y) \in D,$$

şi zero în rest, se obţine că probabilitatea ca vectorul (X,Y) să ia valori în $G \subset D$ este:

$$\boxed{p = P((X,Y) \in G) = \iint_G f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\text{aria}(D)} \iint_G 1\,dx\,dy = \frac{\text{aria}(G)}{\text{aria}(D)}.}$$

Astfel, numărul mediu de parcurgeri ale buclei `do-while` este

$$M(N) = 1/p = \text{aria}(D)/\text{aria}(G),$$

deci cu cât D are arie mai mică, cu atât numărul mediu de parcurgeri ale buclei `do-while` este mai mic şi algoritmul mai eficient. De aceea, se recomandă să se folosească pentru generatorul de puncte din G acel dreptunghi D cu laturile paralele cu axele de coordonate şi arie minimă, care include domeniul G.

Exemplul 4. Pentru a genera puncte uniform distribuite în discul eliptic

$$G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\},$$

alegem dreptunghiul $D = [-3,3] \times [-4,4]$, de arie minimă, ce include discul eliptic G. Generatorul de puncte aleatoare în G funcţionează astfel:

```
do{
  x = -3 + 6 * urand();
  y = -4 + 8 * urand();
}while(x * x/9 + y * y/16 > 1);
return (x, y);
```

1.5 Operaţii cu variabile aleatoare continue

Dacă (X,Y) este un vector aleator continuu având densitatea de probabilitate $f_{X,Y}$ şi $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci $Z = g(X,Y)$ este o variabilă aleatoare continuă. Dacă, în plus, funcţia $|g\, f_{X,Y}|$ este integrabilă pe $\mathbb{R}^2$, atunci variabila aleatoare Z are valoare medie şi

$$M(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy. \tag{12}$$

Pentru $g(x,y) = x + y$, respectiv $g(x,y) = x\, y$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, se obţine

$$M(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy,\ M(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy.$$

Propoziţia 1.5.1 *Are loc:*

$$\boxed{M(X+Y) = M(X) + M(Y).}$$

Demonstraţie: Avem

$$\begin{aligned}
M(X+Y) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(x,y) dx\, dy \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)\, dy\right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(x,y) dx\right) dy \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} x \underbrace{\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy\right)}_{f_X(x)} dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \underbrace{\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\right)}_{f_Y(y)} dy \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy = M(X) + M(Y).
\end{aligned}$$

□

Generalizând, rezultă că media unei combinaţii liniare cu coeficienţi reali a n variabile aleatoare este combinaţia liniară cu aceeaşi coeficienţi a mediilor variabilelor respective, adică

$$\boxed{M(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1M(X_1) + a_2M(X_2) + \cdots + a_nM(X_n),\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.}$$

Propoziţia 1.5.2 *Dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente, atunci*

$$M(XY) = M(X)\, M(Y).$$

Demonstraţie: Cum X şi Y sunt independente rezultă că $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Astfel, obţinem

$$\begin{aligned} M(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x)\, f_Y(y)\,dx\,dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy\right) \\ &= M(X)\,M(Y). \end{aligned}$$

$\square$

Observaţia 1.5.1 În general, $M(XY) \neq M(X)\,M(Y)$.