

Laborator LSD - Săptămâna 13

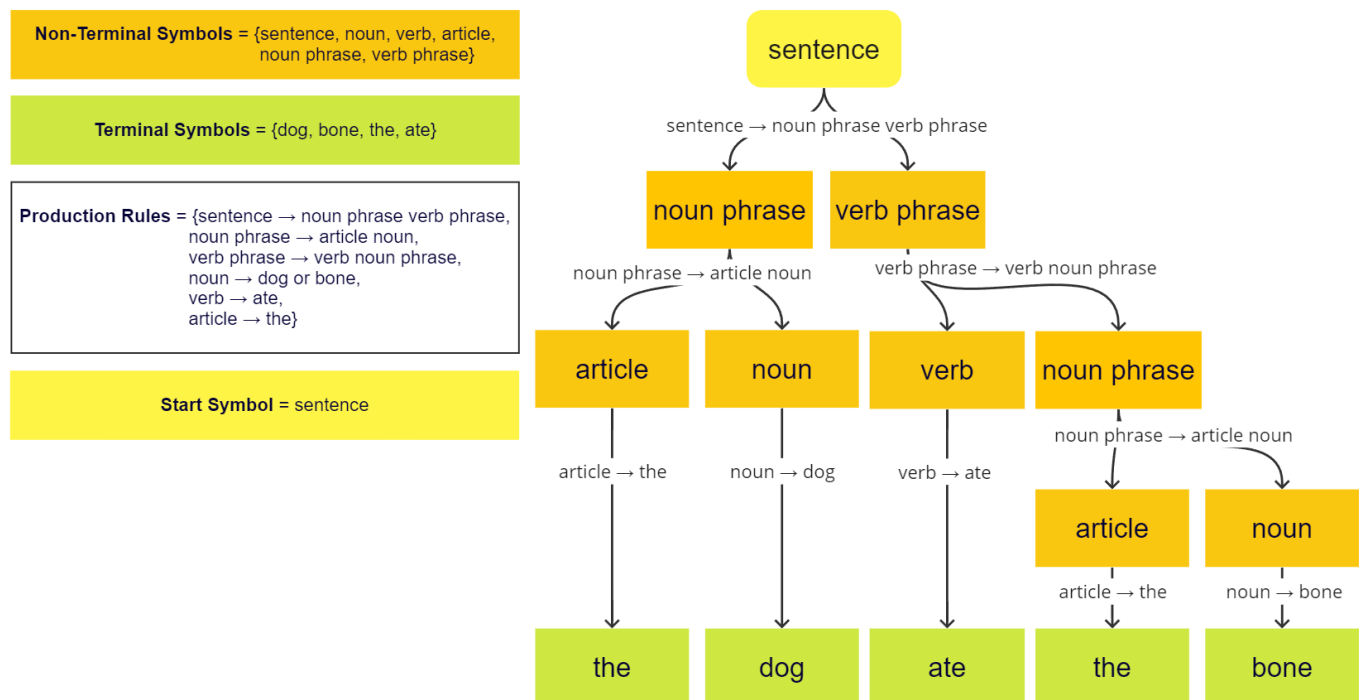
Grupa 1.1C, 1.2D

1 Gramatici formale

O gramatică formală G este un cvadruplu $G=(\Sigma, N, P, S)$ format din:

- Σ - o mulțime de simboluri terminale (din care se formează șirurile limbajului)
- N - o mulțime de simboluri neterminale, ce vor fi folosite doar în descrierea gramaticii
- P - o mulțime de reguli de producție
- S - un simbol de start

În mod normal simbolurile neterminale sunt reprezentate folosind majuscule, iar cele terminale folosind litere mici.



Exemplu

Un exemplu de gramatică formală este: $G = (\{1\}, \{S\}, S, \{(S, 1), (S, 1S)\})$

Gramatica de mai sus are un simbol neterminal (S), un simbol terminal (1) și două reguli de producție ($(S, 1)$ și $(S, 1S)$). Uzual, regulile de producție se reprezintă cu ajutorul \rightarrow , prin urmare le putem rescrie:

$$S \rightarrow 1$$

$$S \rightarrow 1S$$

2 Derivarea

Derivarea este o noțiune formală care se referă la modul în care un șir de caractere este recunoscut/produs de o gramatică. Pentru a aplica acest proces, începem cu simbolul de start (S) și apoi continuăm să aplicăm reguli de producție până când obținem un șir de caractere care conține doar simboluri neterminale.

Exercițiul 1

Considerăm gramaticile definite prin următoarele reguli de producție:

a)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow ab \\ B &\rightarrow bb \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ S &\rightarrow aA \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow ba \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ S &\rightarrow AA \\ A &\rightarrow aB \\ A &\rightarrow ab \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AA \\ S &\rightarrow B \\ A &\rightarrow aaA \\ A &\rightarrow aa \\ B &\rightarrow bB \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAb \\ B &\rightarrow bBa \\ A &\rightarrow \epsilon \\ B &\rightarrow \epsilon \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow T \\ S &\rightarrow bSb \\ T &\rightarrow aT \\ T &\rightarrow \epsilon \end{aligned}$$

Care sunt limbajele generate de fiecare gramatică de mai sus?

Soluție

a)

$$abbb$$

b)

$$aa, aba$$

c)

$$abab, abb$$

d)

$$a^{2m}, b^n, n \geq 1, m \geq 2$$

e)

$$a^m b^m b^n a^n, n \geq 0, m \geq 0$$

f)

$$S \rightarrow T \rightarrow aT \rightarrow aaT \rightarrow aaaT \rightarrow \underbrace{\dots}_n \rightarrow \underbrace{a\dots a}_n$$

$$S \rightarrow bSb \rightarrow bbSbb \rightarrow bbbSbbb \rightarrow \underbrace{b\dots b}_m S \underbrace{b\dots b}_m \rightarrow \underbrace{b\dots b}_m T \underbrace{b\dots b}_m \rightarrow \underbrace{b\dots b}_m \underbrace{a\dots a}_n \underbrace{b\dots b}_m$$

Limbajul generat este

$$b^m a^n b^m, n > 0, m \geq 0$$

Exercițiul 2

Scrieți o gramatică care poate genera limbajul

$$a^n b^{2n}, n \geq 0$$

Soluție

$$S \rightarrow aSbb$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

Exercițiul 3

Scrieți o gramatică care poate genera toate palindroamele pentru cuvintele formate doar din 0 și 1

Soluție

$$S \rightarrow 0S0$$

$$S \rightarrow 1S1$$

$$S \rightarrow 0$$

$$S \rightarrow 1$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

3 Arbori de derivare. Gramatici ambigue

Exercițiul 4

Fie gramatica definită prin următoarele reguli de producție:

$$S \rightarrow abS$$

$$S \rightarrow bcS$$

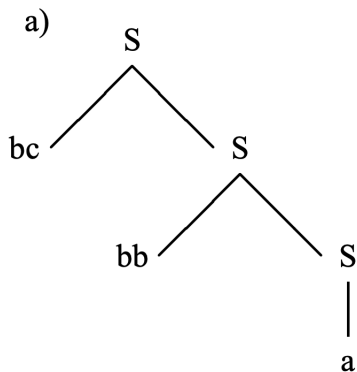
$$S \rightarrow bbS$$

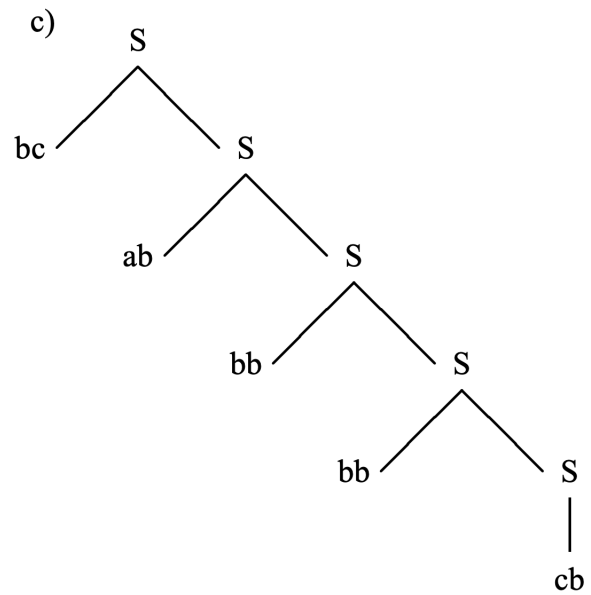
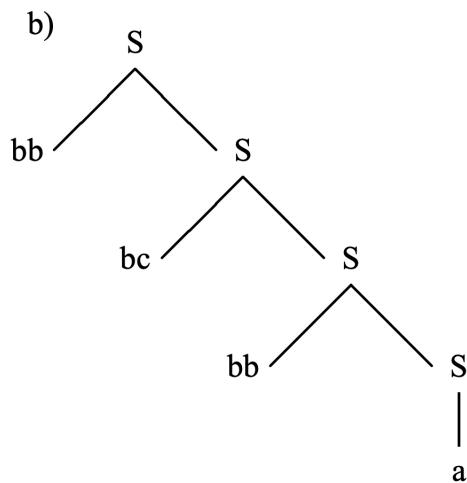
$$S \rightarrow a$$

$$S \rightarrow cb$$

Construiți arborii de derivare pentru următoarele șiruri de caractere:

- a) bcbba
- b) bbbcbba
- c) bcabbbbbc





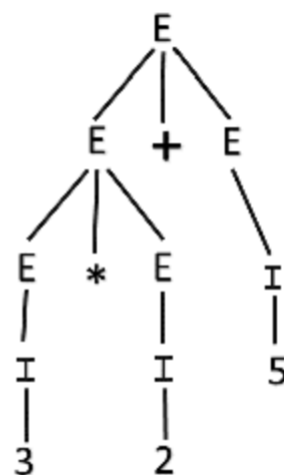
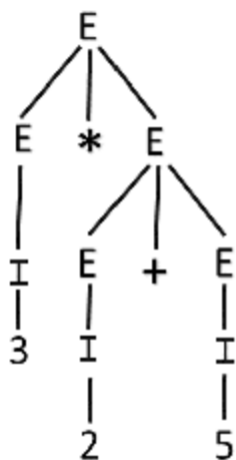
Gramatici ambigue

O gramatică este ambiguă dacă există cel puțin un șir cu mai mulți arbori de derivare diferiți.

Exemplu: Fie gramatica:

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow E \\
 S &\rightarrow I \\
 E &\rightarrow E * E \\
 E &\rightarrow E + E \\
 E &\rightarrow (E) \\
 I &\rightarrow \epsilon \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid \dots \mid 9
 \end{aligned}$$

Construiți arborele de derivare pentru $3 * 2 + 5$. Este gramatica ambiguă?



Putem modifica gramatica astfel:

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow T \mid S + T \\
 T &\rightarrow I \mid T * I \\
 I &\rightarrow (S) \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid \dots \mid 9
 \end{aligned}$$

4 Exerciții propuse

1. Verificați dacă gramaticile definite mai jos sunt ambigue:

a)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSb \\ S &\rightarrow SS \\ S &\rightarrow \epsilon \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow SS \\ S &\rightarrow (S) \\ S &\rightarrow a \end{aligned}$$

2. Scrieți o gramatică care poate genera cuvinte ce conțin doar a și b în care numărul de apariții al lui a este egal cu numărul de apariții al lui b.

3. Demonstrați că gramatica definită mai jos este ambiguă:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0A10 \\ S &\rightarrow B10 \\ B &\rightarrow A0 \\ B &\rightarrow B1 \\ A &\rightarrow 00 \\ A &\rightarrow \epsilon \end{aligned}$$

4. Ce limbaj este generat de următoarea gramatică?

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aaS \\ S &\rightarrow bbS \\ S &\rightarrow Saa \\ S &\rightarrow Sbb \\ S &\rightarrow abSba \\ S &\rightarrow baSba \\ S &\rightarrow \epsilon \end{aligned}$$

5. Arătați că următoarele gramatici sunt ambigue:

a)

$$S \rightarrow SS \mid a \mid b$$

b)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABA \\ A &\rightarrow aA \mid \epsilon \\ B &\rightarrow bB \mid \epsilon \end{aligned}$$

c)

$$S \rightarrow aSb \mid aaSb \mid \epsilon$$

d)

$$S \rightarrow aSb \mid abS \mid \epsilon$$