

# Logică digitală

-Curs 3-

ALGEBRA BOOLEANĂ  
ȘI LOGICA DIGITALĂ

# Algebra booleană și logica digitală

---

- ❑ Axiomele și teoremele algebrei booleene;
  - ❑ Funcții booleene;
  - ❑ Forma canonică;
  - ❑ Forma standard;
  - ❑ Aspecte legate de implementarea porților logice;
-

# Noțiuni fundamentale de algebră

---

- **Set** – colecție de obiecte care au o anumită proprietate.
    - Dacă  $S$  este un set și  $x$  al setului  $S$ , at. scriem  $x \in S$
    - *Notăția*  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  denotă setul  $A$ , cu elementele 2, 3, 4, 5
  
  - Un **operator binar** al setului  $S$  este o regulă prin care pentru oricare pereche de elemente din  $S$  prin aplicarea regulii se obține un element tot din  $S$
  
  - **Axiomă**: propoziție care este considerată adevărată fără a fi însă demonstrată..
-

# Noțiuni fundamentale de algebră

## Exemple de axiome

---

### □ Comutativitatea

- Un operator binar  $\bullet$  este comutativ dacă și numai dacă pentru oricare  $x, y \in S$

$$x \bullet y = y \bullet x$$

### □ Elementul invers

- Un set  $S$  are invers ( $e$ ) dacă și numai dacă pt. oricare  $x \in S$ , există un element  $y \in S$  astfel încât

$$x \bullet y = e$$

### □ Distributivitate

- Dacă  $\bullet$  și  $+$  sunt doi operatori binari asupra setului  $S$ , se spune că  $\bullet$  e distributiv în raport cu  $+$  dacă, oricare ar fi  $x, y, z \in S$

$$x \bullet (y + z) = (x \bullet y) + (x \bullet z)$$

---

# Axiomele algebrei booleene

---

*Algebra booleană* este un set de elemente  $B$  cu 2 operatori binari,  $+$  și  $\cdot$ , care satisfac următoarele 6 axiome:

## **Axioma 1 (Proprietatea închiderii):**

- (a)  $B$  este închisă cu privire la operatorul  $+$ ;
  - (b)  $B$  este închisă cu privire la operatorul  $\cdot$ ;
-

# Axiomele algebrei booleene

---

*Algebra booleană* este un set de elemente  $B$  cu 2 operatori binari,  $+$  și  $\cdot$ , care satisfac următoarele 6 axiome:

## **Axioma 1 (Proprietatea închiderii):**

- (a)  $B$  este închisă cu privire la operatorul  $+$ ;
  - (b)  $B$  este închisă cu privire la operatorul  $\cdot$  ;
-

# Axiomele algebrei booleene

---

*Algebra booleană* este un set de elemente  $B$  cu 2 operatori binari,  $+$  și  $\cdot$ , care satisfac următoarele 6 axiome:

## **Axioma 2 (Element neutru):**

- (a)  $\exists$  element neutru față de operatorul  $+$  notat cu  $0$  a.î.:  $\forall a \in B, a + 0 = a$ ;
  - (b)  $\exists$  element neutru față de operatorul  $\cdot$  notat cu  $1$  a.î.:  $\forall a \in B, a \cdot 1 = a$ ;
-

# Axiomele algebrei booleene

---

*Algebra booleană* este un set de elemente  $B$  cu 2 operatori binari,  $+$  și  $\cdot$ , care satisfac următoarele 6 axiome:

## **Axioma 3 (Comutativitate):**

(a)  $\forall a, b \in B, a + b = b + a;$

(b)  $\forall a, b \in B, a \cdot b = b \cdot a;$

## **Axioma 4 (Distributivitate):**

(a)  $\forall a, b, c \in B, a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c);$

(b)  $\forall a, b, c \in B, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$

---



# Axiomele algebrei booleene

---

*Algebra booleană* este un set de elemente  $B$  cu 2 operatori binari,  $+$  și  $\cdot$ , care satisfac următoarele 6 axiome:

**Axioma 5 (Complementul):** Pentru fiecare  $x \in B$ , există  $x' \in B$  a.î.

(a)  $x + x' = 1$ ;

(b)  $x \cdot x' = 0$ ;

$x'$  se numește **complementul** lui  $x$

**Axioma 6:** Mulțimea  $B$  conține cel puțin 2 elemente diferite.  $x, y \in B$ , și  $x \neq y$

---

# Algebra booleană cu 2 valori

---

- **Set  $B$  has two elements: 0 and 1**
- Algebra are 2 operatori: SAU (OR), ȘI (AND)

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

op.și

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

op.sau

---

# Algebra booleană: precedența operatorilor

---

Op. booleeni se aplică în urm. ordine:

- Paranteze ( )
- NOT '
- AND .
- OR +

Exemplu: Evaluați expresia:  $(x + xy)'$

pt.  $x = 0$  și  $y = 1$ :

$$(0 + 0 \cdot 1)' = (0 + 0)' = (0)' = 1$$

---

# Principiul dualității

---

- Axiomele algebrei booleene sunt prezentate în perechi fiecare axiomă din pereche fiind duală celeilalte;
- O axiomă se poate obține din duala sa modificând operația "+" cu operația "." și elementul 0 cu elementul 1 (și invers).

Exemplu: existența elementului opus

$$(i) \quad a + a' = 1$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$(ii) \quad a \cdot a' = 0$$

# Teoremele algebrei booleene

---

□ T1 (Idempotența):

(a)  $x + x = x;$

(b)  $x \cdot x = x;$

□ T2 (Prop. 0 și 1):

(a)  $x + 1 = x;$

(b)  $x \cdot 0 = 0;$

---

# Teoremele algebrei booleene

---

□ T3 (Absorbție):

(a)  $y \cdot x + x = x;$

(b)  $(y + x) \cdot x = x;$

□ T4 (Involuție):

$$((x)')' = x;$$

---

# Teoremele algebrei booleene

---

□ T5 (Asociativitate):

(a)  $(x + y) + z = x + (y + z);$

(b)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$

□ T6 (De Morgan):

(a)  $(x + y)' = x' \cdot y';$

(b)  $(x \cdot y)' = x' + y';$

---

# Demonstrarea teoremelor

---

## □ Folosind axiome și alte teoreme

Exemplu:

Teorema 1(a) Idempotența:  $x + x = x$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}x + x &= (x + x) \cdot 1 \\&= (x + x) (x + x') \\&= x + xx' \text{ by} \\&= x + 0 \\&= x\end{aligned}$$

Identitatea (Ax. 2b)  
complement (Ax. 5a)  
distributivitate (Ax. 4b)  
complement (Ax. 5b)  
identitate (Ax. 2a)

Exemplu:

Teorema 1(b) Idempotența:  $x \cdot x = x$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}x + x &= x \\x \cdot x &= x\end{aligned}$$

Teorema 1(a)  
*Dualitatea*

---



# Demonstrarea teoremelor

---

- Prin considerarea tuturor combinațiilor de valori ale variabilelor

Exemplu: De Morgan

$x$	$y$	$x'$	$y'$	$x+y$	$(x+y)'$	$x' \cdot y'$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

# Funcții booleene

---

- O funcție de comutație de  $n$  variabile  $f(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$  unde variabilele  $X_i$  iau valorile 0 și 1, pentru  $i=0 \div n-1$ , se definește ca o aplicație a mulțimii  $\{0,1\}^n$  în mulțimea  $\{0,1\}$ .
- Prin  $\{0,1\}^n$  s-a notat produsul cartezian al mulțimii  $\{0,1\}$  cu ea însăși de  $n$  ori.
- Domeniul de definiție al funcției  $f$  este:  
$$X = \{0,1\}^n = \{(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \mid X_0 \in \{0,1\}, X_1 \in \{0,1\}, \dots, X_{n-1} \in \{0,1\}\}$$
ale cărei elemente sunt  $n$ -upluri de 1 și 0  $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$

# Funcție booleană

---

- Expresie algebrică care este formată variabile binare și din operatorii: și, or, negare

Exemplu:

$$F = xy + xy'z + x'yz$$

$F = 1$  dacă  $x = 1$  și  $y = 1$ , sau

dacă  $x = 1$  și  $y = 0$  și  $z = 1$ , sau

dacă  $x = 0$  și  $y = 1$  și  $z = 1$ ;

altfel,  $F = 0$ .

---

# Funcții booleene

---

- Tabel de adevăr prin care este specificată

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

---

# Complementul unei funcții

---

- Funcția  $F'$ , unde  $F'$  poate fi obținută prin interschimbarea lui 0 cu 1 în tabelul de adevăr

x	y	z	$F'$
0	0	0	$0 \rightarrow 1$
0	0	1	$0 \rightarrow 1$
0	1	0	$0 \rightarrow 1$
0	1	1	$1 \rightarrow 0$
1	0	0	$0 \rightarrow 1$
1	0	1	$1 \rightarrow 0$
1	1	0	$1 \rightarrow 0$
1	1	1	$1 \rightarrow 0$

# Complementul unei funcții

---

- Funcția  $F'$ , unde  $F'$  poate fi obținută prin aplicarea repetată a teoremelor lui DeMorgan

*Exemplu*

$$\begin{aligned} F' &= (xy + xy'z + x'yz)' \\ &= (xy)' (xy'z)' (x'yz)' \\ &= (x' + y')(x' + y + z')(x + y' + z') \end{aligned}$$

---

# Complementul unei funcții

---

- Funcția  $F'$ , unde  $F'$  poate fi obținută folosind principiu dualității

*Exemplu*

$$\begin{array}{ccccccc} F = (x \cdot y) & + & (x \cdot y' \cdot z) & + & (x' \cdot y \cdot z) \\ \downarrow \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ F' = (x' + y') \cdot (x' + y + z') \cdot (x + y' + z') \end{array}$$

# Echivalența expresiilor

---

- Poate fi realizată folosind axiomele și teoremele algebrei booleene.

Exemplu:

$$F = xy + xy'z + x'yz = xy + xz + yz$$

$xy + xy'z + x'yz = xy + xyz + xy'z + x'yz$	absorbție
$= xy + x(y + y')z + x'yz$	distributivitate
$= xy + x1z + x'yz$	complement
$= xy + xz + x'yz$	identitate
$= xy + xyz + xz + x'yz$	absorbție
$= xy + xz + (x + x')yz$	distributivitate
$= xy + xz + 1yz$	complement
$= xy + xz + yz$	identitate

---



# Întrebări?

---

---

**Enough Talking Let's Get To It  
!!Brace Yourselves!!**

