03.04.2024

Matematici speciale
(seminar 7 - S7)

1. Fie X o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-x} & \text{dacă } x \geq 0 \\ 0 & \text{dacă } x < 0 \end{cases}, \quad \text{unde } c > 0.$$

Să se determine:

a) constanta c astfel încât f_X este densitate de probabilitate;

b) funcţia de repartiţie $F_X(x)$;

c) $P(1 \leq X \leq 3)$, $P(X = 2)$ şi $P(X > 2)$.

d) $M(X)$ şi $\sigma^2(X)$.

a) $f_X(x) \geq 0$

Vom impune condiția $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\infty} c \cdot e^{-x}\,dx = c \cdot \frac{e^{-x}}{-1}\Big|_0^{\infty} = -c \cdot \frac{1}{e^{\infty}} + c \cdot \frac{1}{e^0} = c = 1$$

$\Rightarrow c = 1$

b) $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^x e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^x =$

$= 1 - e^{-x}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

c) $P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 f(x)\,dx = \left(-e^{-x}\right)\Big|_1^3 = e^{-1} - e^{-3}$

sau

$P(1 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(1) = e^{-1} - e^{-3}$

$P(X = a) = 0 \Rightarrow P(X = 2) = 0$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - 1 + e^{-2} = e^{-2}$

d) $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^{\infty} - e^{-x}\Big|_0^{\infty} = \frac{-x}{e^x}\Big|_0^{\infty} - (-1) = 1$

$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x} = 2$

$\sigma^2(X) = 2 - (1)^2 = 1$

$X \sim Exp(1)$

2. Fie X o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate:

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{dacă } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{in} \quad \text{rest} \end{cases}$$

Să se determine $M(X^n), \forall n \in \mathbb{N}$.

$$M(x^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx = \int_0^1 x^n\left(x+\frac{1}{2}\right) dx = \left(\frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{3n+4}{2(n+1)(n+2)}$$

3. Fie $X \sim Unif(-1,1)$ şi $Y = X^2$. Să se determine funcţia de repartiţie, $F_Y(y)$, şi densitatea de probabilitate, $f_Y(y)$, ale variabilei aleatoare Y.

Y - nenul $\in [0,1]$

pt $y \in [0,1]$

$$\Rightarrow F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

$X \sim Unif(-1, 1)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x+1}{2}, & x \in [-1, 1) \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\frac{x-(-1)}{1-(-1)}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \frac{\sqrt{y}+1}{2} - \frac{-\sqrt{y}+1}{2} = \sqrt{y} \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \sqrt{y}, & y \in [0,1) \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

$F_Y(y)$ - cont.

$\Rightarrow Y$ - v.a. cont.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

4. Se consideră că numărul persoanelor ce sosesc la un magazin urmează o distribuţie Poisson, cu un număr mediu λ de clienţi pe unitatea de timp (de exemplu, 1h). Dacă Y este numărul de clienţi ce sosesc într-un interval de lungime t (adică, în t ore), atunci $Y \sim Pois(\lambda t)$. Se presupune că magazinul deschide la $t = 0$.
Fie X variabila ce măsoară lungimea intervalului de timp până la sosirea primului client. Să se arate că $X \sim Exp(\theta = \frac{1}{\lambda})$.

$P(X>t) = P($ nu este nici o sosire în $[0,t]) = P(Y=0) = e^{-\lambda t}\frac{\lambda t^0}{0!} = e^{-\lambda t}$

$F_X(t) = P(X \le t) = 1 - P(X>t) = 1 - e^{-\lambda t}$

pt $x > 0 \Rightarrow F_X(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x) = 1 - e^{-\lambda x}$

$\theta = \frac{1}{\lambda}$ $\quad X \sim Exp(\theta = \frac{1}{\lambda})$

funcţie care este funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare distribuită exponenţial de parametru $\theta = \frac{1}{\lambda}$. Deci, $X \sim Exp(\theta = \frac{1}{\lambda})$. In acelaşi mod, timpul dintre sosirea primului şi celui de-al doilea este distribuit exponenţial de parametru $\theta = \frac{1}{\lambda}$. In general, timpul dintre doi clienţi consecutivi este distribuit exponenţial $Exp(\theta = \frac{1}{\lambda})$.

Observaţie: Dacă o variabilă aleatoare Y, ce dă numărul de produceri ale unui eveniment într-un interval de timp, are distribuţia Poisson, de parametru λ, atunci variabila X, ce măsoară lungimile intervalelor de timp între momentele de producere ale evenimentului, are distribuţia exponenţială , $X \sim Exp(\theta = \frac{1}{\lambda})$.

5. Fie $X \sim N(-5, 4)$. Să se determine:

a) $P(X < 0)$;

b) $P(-7 \le X \le -3)$;

c) $P(X > -3 | X > -5)$

d) numărul x pentru care $P(X \le x) = 0.95$.

$m = 5$
$\sigma = 2$
$Z = \frac{X - m}{\sigma}$, $Z \sim N(0,1)$

a) $P(X<0) = P\left(\frac{X+5}{2} < \frac{0+5}{2}\right) = P(Z < 2,5) = \phi(2,5) = 0,99$

b) $P(-7 \le X \le -3) = P\left(\frac{-7+5}{2} < \frac{X-5}{2} < \frac{-3+5}{2}\right) = P(-1 < Z < 1) = \phi(1) - \phi(-1) =$

$= \phi(1) - (1 - \phi(1)) = 2\phi(1) - 1 = 0,68$

c) $P(X>-3 | X>-5) = \frac{P(X>-3 \cap X>-5)}{P(X>-5)} = \frac{P(X>-3)}{P(X>-5)} = \frac{1-P(X\le -3)}{1-P(X \le -5)} =$

$= \frac{1-P(Z<1)}{1-P(Z<0)} = \frac{1-\phi(1)}{1-\phi(0)} = 0,32$

d) $P(X \le x) = 0,95$ $\qquad z_{0,95}$ $\qquad x = -5 + 2 \cdot 1,64$

$P\left(\underbrace{\frac{X+5}{2}}_{Z} \le \frac{x+5}{2}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \phi\left(\frac{x+5}{2}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{x+5}{2} = z_{0,95} = 1,64$