Matematici speciale
(seminar 3 - S3)

06.03.2024

1. O cutie conţine 20 chip-uri de memorie din care 5 sunt defecte. Se aleg 3 la întâmplare. Să se calculeze a) probabilitatea ca toate trei să fie defecte; b) exact un chip să fie defect.

a) E_1 - ev. când chip-ul 1 este defect

E_2 - ev. când chip-ul 2 este defect

E_3 - ev. când chip-ul 3 este defect

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot P(E_3 | E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$P(E_2 | E_1) = \frac{4}{19}$$

$$P(E_3 | E_1 \cap E_2) = \frac{3}{18}$$

$$\Rightarrow P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{19} \cdot \frac{3}{18} = \frac{3}{19 \cdot 18}$$

b) $$\boxed{P(\underset{\text{defect}}{E_1} \cap \underset{\text{bun}}{\overline{E_2}} \cap \underset{\text{bun}}{\overline{E_3}})} + P(\overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3}) + P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3) =$$

$$\Leftrightarrow P(E_1) \cdot P(\overline{E_2} | E_1) \cdot P(\overline{E_3} | E_1 \cap \overline{E_2}) = \frac{5}{20} \cdot$$

$$P(\overline{E_2} | E_1) = 1 - P(E_2 | E_1) = 1 - \frac{4}{19} = \frac{15}{19}$$

$$P(\overline{E_3} | E_1 \cap \overline{E_2}) = 1 - P(E_3 | E_1 \cap \overline{E_2}) = 1 - \frac{3}{18} = \frac{15}{18}$$

$$P(E_1 \cap \overline{E_2}) = P(E_1) \cdot P(\overline{E_2} | E_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} = \frac{15}{76}$$

$$P(\overline{E_3} | E_1 \cap \overline{E_2}) = \frac{P(\overline{E_3} \cap E_1 \cap \overline{E_2})}{P(E_1 \cap \overline{E_2})} = \frac{P(\overline{E_3}) \cdot \cancel{P(E_1)} \cdot P(\overline{E_2})}{\cancel{P(E_1)} \cdot P(\overline{E_2} | E_1)} = \frac{\frac{14}{18} \cdot \frac{15}{\cancel{19}}}{\frac{15}{\cancel{19}}} = \frac{14}{18}$$

2. a) Fie A şi B două evenimente independente într-un experiment. Ştiind că $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.3$ să se calculeze $P(A \cup B)$, $P_B(\complement A)$ şi $P(A \cap \complement B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}25 + 0{,}3 - 0{,}25 \cdot 0{,}3 = 0{,}55 - 0{,}075 = 0{,}475$$

$$P_B(CA) = 1 - P_B(A) = 1 - P(A|B) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

independente

$$P(A \cap CB) = P(A) \cdot P(CB) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}175$$

3. Un proiect constă din trei sarcini independente şi probabilităţile ca aceste sarcini să fie îndeplinite la timp sunt, respectiv: 0.9, 0.8, 0.85. Să se calculeze probabilitatea:
a) ca toate cele trei sarcini să fie îndeplinite la timp.
b) ca primele două să fie îndeplinite la timp, iar a treia nu.
c) cel puţin una din sarcini să fie îndeplinită la timp.

a) $P(A_1) = 0{,}9 \qquad P(A_2) = 0{,}8 \qquad P(A_3) = 0{,}85$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85 =$$
$$= 0{,}612$$

b) $$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot (1 - P(A_3)) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}15 =$$
$$= 0{,}108$$

c) $$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_1) +$$
$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$
$$= 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}85 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 - 0{,}8 \cdot 0{,}85 - 0{,}85 \cdot 0{,}9 + 0{,}612 =$$
$$= 0{,}997$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 1 - P(\complement(A_1 \cup A_2 \cup A_3)) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = \\ &= 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) P(\overline{A}_3) \\ &= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3)) \end{aligned}$$