SEMINAR săptămâna 5: Baze, schimbări de baze, matrice de trecere. Subspaţii vectoriale

0.1 SARCINI

• De citit din cartea scrisă cu dl. prof. Dăianu:
- §$3, 4, 7, 8$ din capitolul 2 (pag. 54-57, 62-68) şi mai ales exerciţiile 1 (pag. 55), 2 (pag. 56), 5 (pag. 63) strecurate în text
- exerciţiile rezolvate 5,6,8,12 (pag. 69-75) şi exemplul 2.8.1 (pag. 67)
- de lucrat exerciţiile: 3,5,6,7,8,9,10,13,15,17 (pag. 76-79)

• Rezolvaţi exerciţiile propuse mai jos.

• În fine, rezolvaţi şi încărcaţi pe CV exerciţiul pe care îl aveţi lăsat temă pe CV.

0.2 EXERCIŢII PROPUSE

1. Fie B o bază în $\mathbb{R}^n$. Care este matricea de trecere de la baza B la baza B?

2. Fie $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ o bază într-un spaţiu vectorial V peste $\mathbb{R}$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale. Arătaţi că $B' = (a_1 v_1, a_2, v_2, \ldots, a_n v_n)$ este bază în V dacă şi numai dacă $a_k \neq 0$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. În acest din urmă caz, scrieţi matricea de trecere de la baza B la baza B'.

3. Arătaţi că mulţimea şirurile de numere reale formează un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$. Pentru fiecare din submulţimile de mai jos, stabiliţi dacă ele sunt subspaţii ale acestui spaţiu vectorial:
- mulţimea şirurilor convergente
- mulţimea şirurilor convergente la 0
- mulţimea şirurilor convergente la 1
- mulţimea şirurilor monotone
- mulţimea şirurilor crescătoare
- mulţimea şirurilor mărginite
- mulţimea şirurilor constante

4. Arătaţi că dacă $B = (v_1, v_2)$ este bază într-un spaţiu vectorial V, atunci şi $B' = (v_2, v_1)$ este bază în V. Scrieţi matricea $T_{BB'}$ şi verificaţi că $T_{BB'}^2 = I_2$.

5. Daţi exemplu de două baze în în $\mathbb{R}^{2\times 2}/_{\mathbb{R}}$ şi scrieţi matricele de trecere între cele două baze alese.

6. Matricea de trecere de la baza B la baza B' este $T_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Dacă vectorul v' are coordonatele 1, 2 în baza B', ce coordonate are el în baza B?
b) Dacă vectorul v are coordonatele 1, 2 în baza B, ce coordonate are el în baza B'?

7. Fie $V/_K$ un spaţiu vectorial şi $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Demonstraţi că mulţimea $S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K\}$ împreună cu operaţiile induse de pe V este subspaţiu vectorial al lui V.

8. Arătaţi că mulţimea matricelor simetrice de ordinul n formează un subspaţiu al spaţiului vectorial al matricelor pătrate de ordinul n.

9. Demonstraţi că vectorii v_1 şi v_2 şi $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ formează sistem de generatori pentru un spaţiu vectorial V dacă şi numai dacă v_1 şi v_2 este sistem de generatori pentru V.

10. Demonstraţi că vectorii $v_1 + 2v_2$ şi $v_2 + 2v_1$ formează bază într-un spaţiu vectorial V dacă şi numai dacă vectorii v_1 şi v_2 formează o bază în V. Scrieţi matricele de trecere $T_{BB'}$ şi $T_{B'B}$.