1. Fie X o variabilă cu valorile -2, -1, 0, 1, 2, fiecare valoare fiind luată cu probabilitate $p=\frac{1}{5}$. Se consideră $Y=X^2$. Să se arate că cov(X,Y)=0, dar variabilele X și Y nu sunt independente.

Rezolvare: Distribuția de probabilitate a vectorului (X,Y) este:

| | | Y | | | $\sum p_i$ |
|------------|----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | 0 | 1 | 4 | |
| | -2 | 0 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| X | -1 | 0 | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ |
| | 0 | $\frac{1}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{5}$ |
| | 1 | 0 | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ |
| | 2 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| $\sum q_i$ | | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 15215 | |

$$P(x = -2, y = 0) = P(x = -2) \cdot P(y = 0)$$

$$=> coo(x,y) = M(xy) - M(x) M(y)$$

$$xy = \begin{pmatrix} -8 & -4 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$P(x-2, y-4) = \frac{1}{5}$$
 $M(x, y) - \frac{8}{5} - \frac{1}{5} + \frac{8}{5} = 0$

- 2. Fie X o variabilă aleatoare ce are media M(X) = 3 și dispersia $\sigma^2(X) = 1$, iar Y = -2X + 5. Să se calculeze covarianța și coeficientul de corelație pentru variabilele X, Y. Să se determine matricea de covarianță asociată vectorului (X, Y).
 - ullet Dacă între variabilele aleatoare X și Y există o relație liniară de forma

$$Y = aX + b, \ a, b \in \mathbb{R}, \ a \neq 0,$$

atunci

$$\rho(X,Y) = \begin{cases} -1, & \operatorname{dacă} \ a < 0, \\ 1, & \operatorname{dacă} \ a > 0. \end{cases}$$

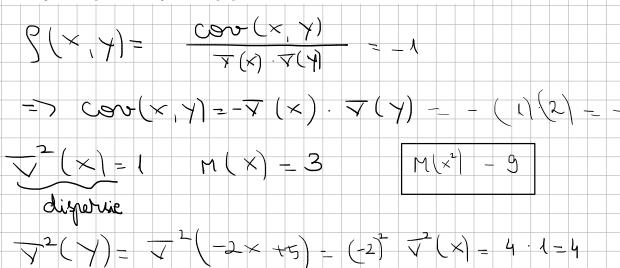
 $\rho(X,Y) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } a < 0, \\ 1, & \text{dacă } a > 0. \end{cases}$ coef de corelatue

• Reciproc, dacă $|\rho(X,Y)|=1$, atunci între ele există o relație liniară,

$$Y = aX + b, \quad a \neq 0$$

Legătura dintre două variabile X și Y poate fi determinată folosind coeficientul de corelație astfel

- $\rho(X,Y) = 0$, atunci X și Y sunt **necorelate**;
- \bullet $\rho(X,Y)$ este apropiat de zero, atunci X şi Y sunt slab corelate (intensitatea legăturii dintre ele este redusă);
- $\rho(X,Y) = 1$, atunci Y = aX + b, a > 0, X si Y sunt **pozitiv corelate**;
- $\rho(X,Y) = -1$, atunci Y = aX + b, a < 0, X şi Y sunt **negativ corelate**;
- $|\rho(X,Y)|$ are o valoare apropiată de 1, relația dintre variabilele aleatoare este 'aproape liniară", adică valorile (x,y) ale vectorului aleator (X,Y) sunt uşor dispersate în jurul unei drepte de ecuație y = ax + b.



Matricea de covarianță a vectorului aleator $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ este matricea notată cu Σ , ale cărei elemente sunt $\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j), i, j \in \{1, \dots, n\}$. Observații:

- $\sigma_{ii} = cov(X_i, X_i) = \sigma^2(X_i)$
- Σ este simetrică şi semipozitiv definită
- $\Sigma = M(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)$, unde $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{m} = (X_1 m_1, X_2 m_2, \dots, X_n m_n)^T$ iar $M(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)$ notează matricea mediilor elementelor matricii YY^T.

(x) cas(x, y)

