CIRCUITE LINIARE ȘI FILIFORME ÎN REGIM SINUSOIDAL


Courtesy Smithsonian Institution

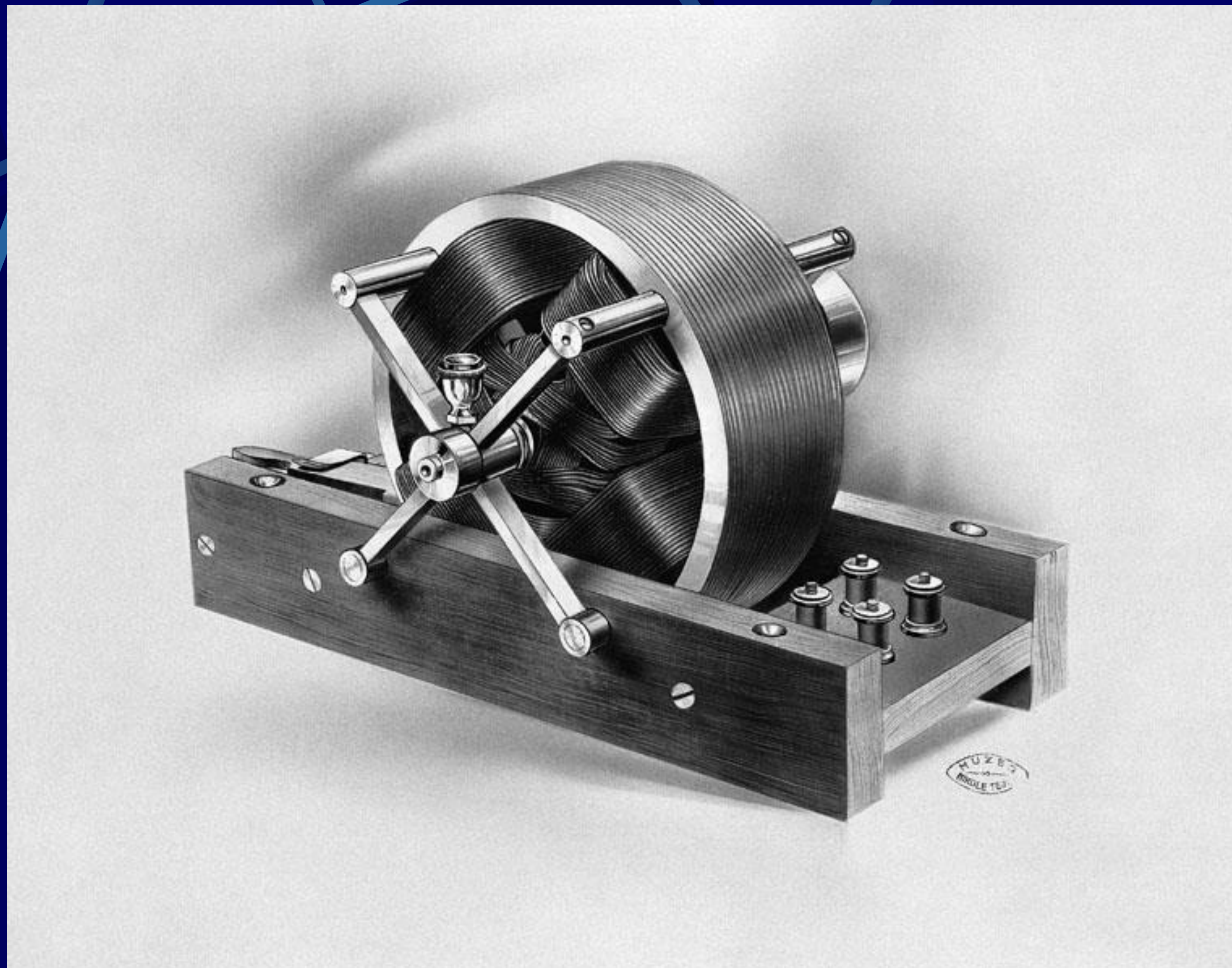
Nikola Tesla (1856–1943) was a Croatian-American engineer whose inventions—among them the induction motor and the first polyphase ac power system—greatly influenced the settlement of the ac versus dc debate in favor of ac. He was also responsible for the adoption of 60 Hz as the standard for ac power systems in the United States.

Born in Austria-Hungary (now Croatia), to a clergyman, Tesla had an incredible memory and a keen affinity for mathematics. He moved to the United States in 1884 and first worked for Thomas Edison. At that time, the country was in the "battle of the currents" with George Westinghouse (1846–1914) promoting ac and Thomas Edison rigidly leading the dc forces. Tesla left Edison and joined Westinghouse because of his interest in ac. Through Westinghouse, Tesla gained the reputation and acceptance of his polyphase ac generation, transmission, and distribution system. He held 700 patents in his lifetime. His other inventions include high-voltage apparatus (the tesla coil) and a wireless transmission system. The unit of magnetic flux density, the tesla, was named in honor of him.

Polyphase currents patents:

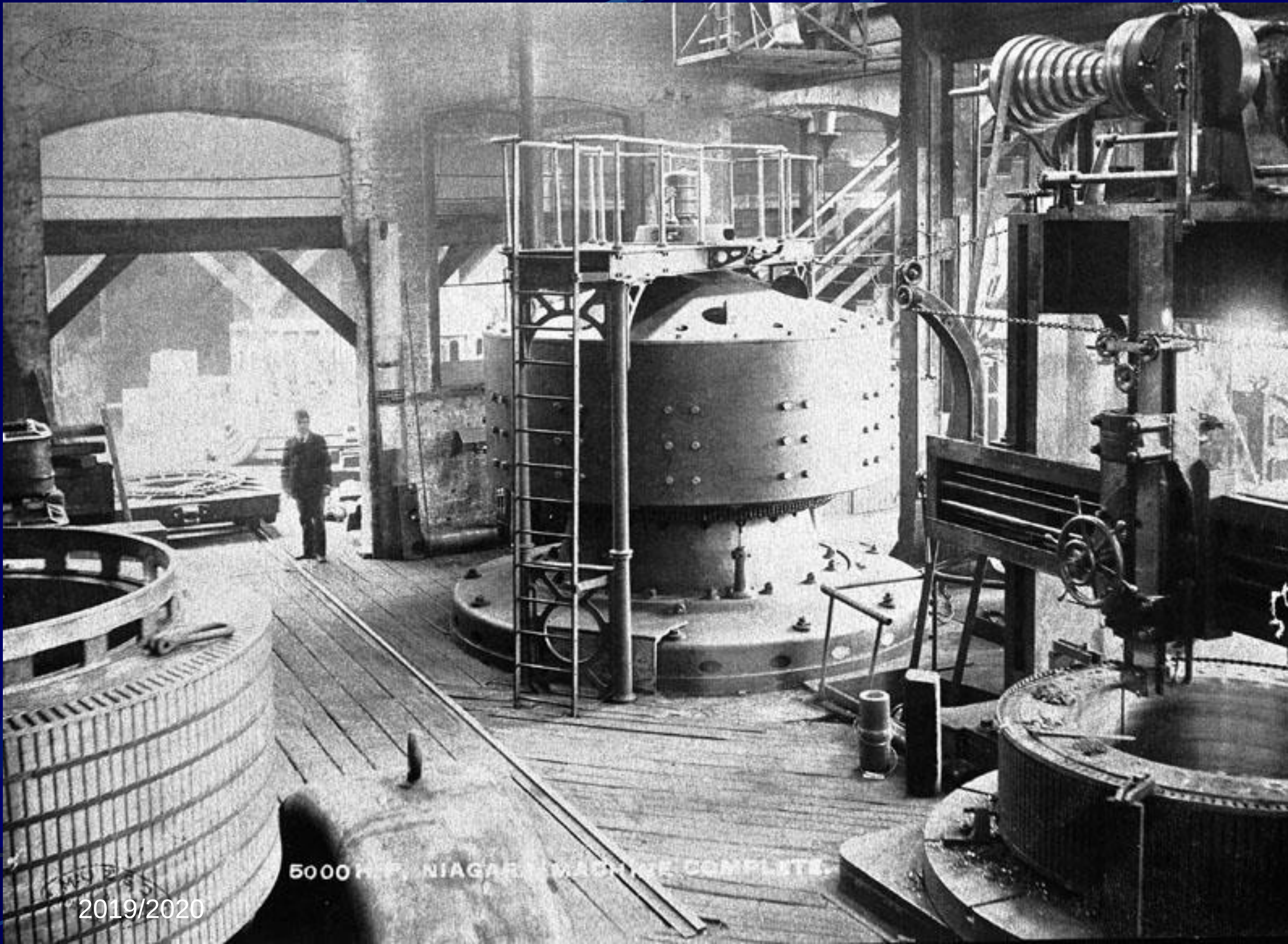
- 381968: Electro Magnetic Motors – October 12, 1887
- 382280: Electrical Transmission of power – October 12, 1887
- 381970: System of Electrical Distribution – December 23, 1887
- …. Altogether about 40 patents in 2-3 years outlying new a.c. system used until today

First Tesla's induction motor

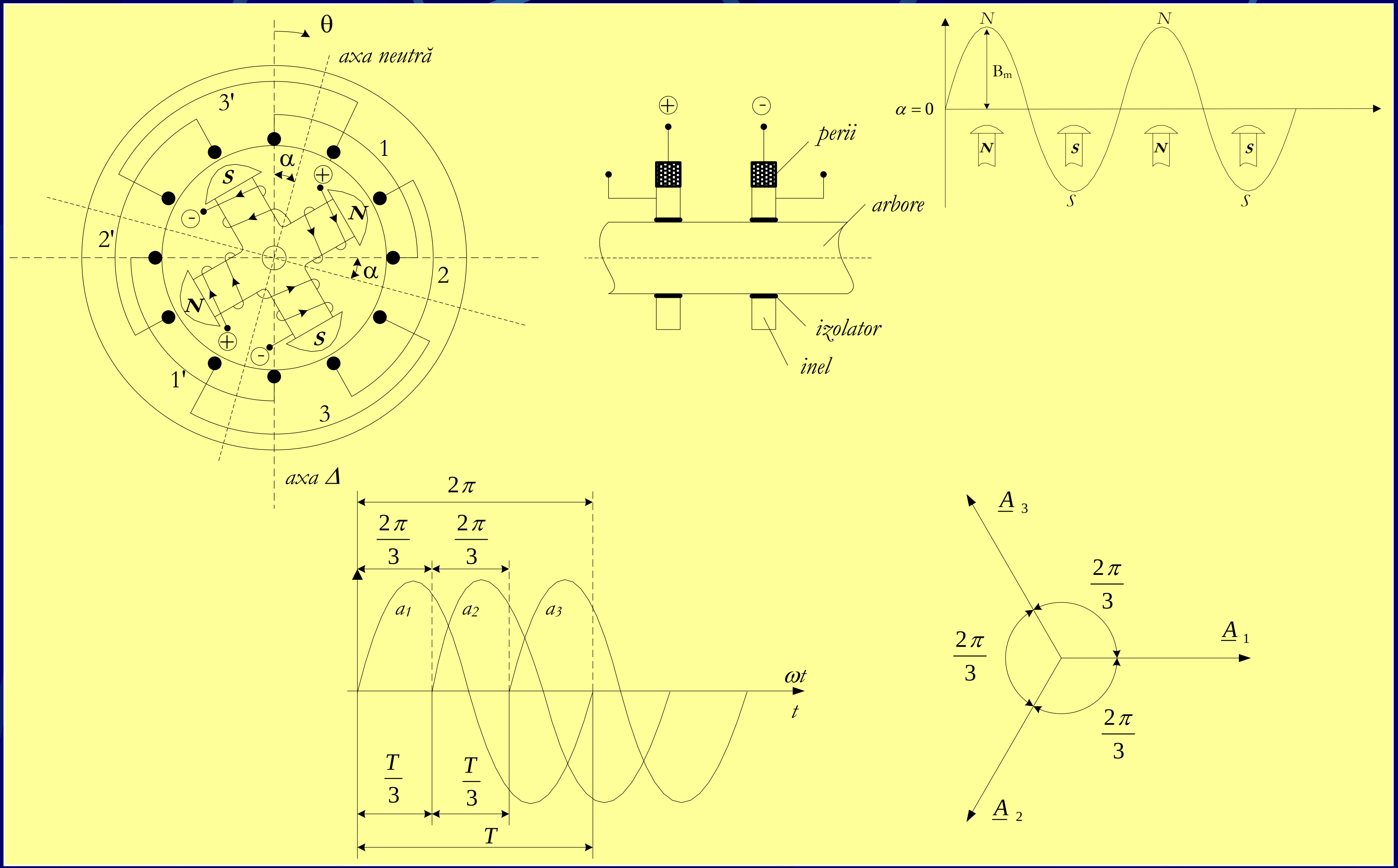


Niagara Falls

Interior of Power Plant



Principiul Generatorului Sincron



Consideraţii Generale

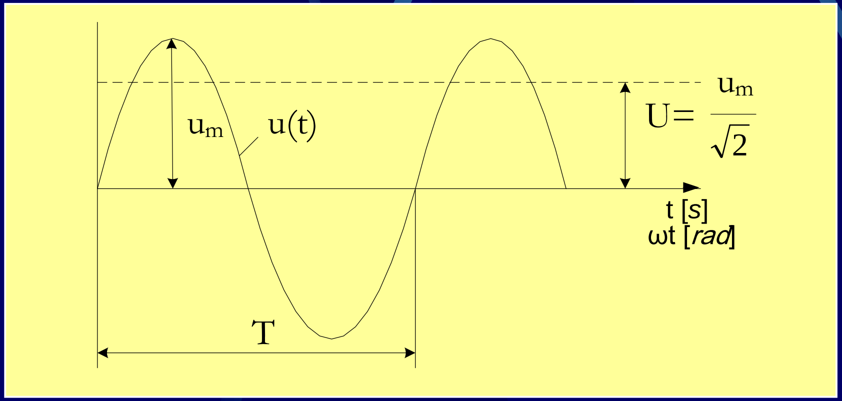
- Marea parte a energiei electrice la nivel mondial este produsă şi distribuită sub formă de variaţie sinusoidală în timp a tensiunilor şi a curenţilor. Tensiunea periodică alternativă este produsă în generatoarele sincrone, generând tensiuni care îşi schimbă polaritatea în timp.
- Generatoarele electrice, motoarele, sistemele de distribuţie şi transport a energiei electrice care utilizează curentul alternativ sunt mult mai eficiente decât cele similare care utilizează curentul continuu, fapt pentru care curentul alternativ este predominant aplicat în întreaga lume pentru aplicaţiile de putere.
- Semnalul sinusoidal reprezintă o clasă importantă de excitaţii folosite în aplicaţiile electronice.
- Regimul permanent sinusoida consideră că toate mărimile câmpului electric (tensiuni, curenţi) variază în timp sub formă sinusoidală cu aceiaşi frecvenţă. Problema fundamentală constă în determinarea amplitudinilor şi fazelor iniţiale pentru toţi curenţii şi tensiunile din circuit, când se cunosc sursele şi elementele pasive din circuit.

- O funcţie sinusoidsală, de exemplu o tensiune sinusoidală, este de forma:

$$u(t) = u_m \sin(\omega t)$$

unde u_m reprezintă *valoarea maximă* or *amplitudinea*, iar ω este *pulsaţia* tensiunii.

- Variaţia în timp a funcţiei, *u(t), se numeşte valoarea instantanee (valoarea momentană)* a funcţiei sinusoidale şi este variabilă în timp.



The Burndy Library Collection
at The Huntington Library, San Marino, California.

Heinrich Rudorf Hertz (1857–1894), a German experimental physicist, demonstrated that electromagnetic waves obey the same fundamental laws as light. His work confirmed James Clerk Maxwell's celebrated 1864 theory and prediction that such waves existed.

Hertz was born into a prosperous family in Hamburg, Germany.

He attended the University of Berlin and did his doctorate under the prominent physicist Hermann von Helmholtz. He became a professor at Karlsruhe, where he began his quest for electromagnetic waves. Hertz successfully generated and detected electromagnetic waves; he was the first to show that light is electromagnetic energy. In 1887, Hertz noted for the first time the photoelectric effect of electrons in a molecular structure. Although Hertz only lived to the age of 37, his discovery of electromagnetic waves paved the way for the practical use of such waves in radio, television, and other communication systems. The unit of frequency, the hertz, bears his name.

- O funcţie sinusoidală este o funcţie periodică, adică este o funcţie care se repetă după fiecare interval de timp *T* numit perioada funcţiei.
- In general o funcţie ca re satisface *f(t)=f(t+T)* pentru orice *t* se numeşte *funcţie periodică* cu *perioada* *T*. Alte funcţii periodice remarcabile în electronică sunt funcţia dinte de ferăstrău şi funcţia semnal dreptunghiular.
- Porţiunea formei de undă corespunzătoare unei perioade se numeşte *ciclu*. Numărul de cicluri ale formei de undă realizate într-o secundă reprezintă *frecvenţa*, *f*, măsurată în *Hertz* [*Hz*]. Evident: *f=1/T*.
- Dacă reprezentăm variaţia funcţiei sinusoidale în raport cu *ωt*, unui ciclu îi corespunde un unghi electric de *2π* radiani sau *360⁰* grade. Astfel pulsaţia undei poate fi exprimată în forma: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ de unde valoarea instantanee se poate scrie în forma:

$$u(t) = u_m \sin(\omega t) = u_m \sin(2\pi f t) = u_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

- În figura de mai jos, originea axei timp este aleasă unde curentul este nul. În general, originea se alege arbitrar, caz în care ecuaţia undei este:

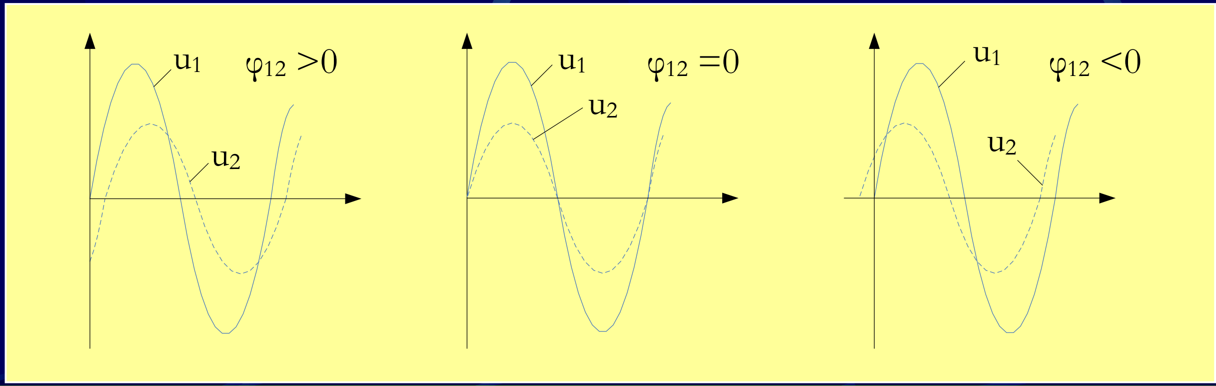
$u(t) = u_m \sin(\omega t + \varphi)$, unde *φ* reprezintă *faza iniţială*.

- Considerăm două funcţii sinusoidale, $u_1(t)=u_{m1}\sin(\omega t+\varphi_1)$, $u_2(t)=u_{m2}\sin(\omega t+\varphi_2)$
  şi $\varphi_{12}=(\omega t+\varphi_1)-(\omega t+\varphi_2)=\varphi_1-\varphi_2$
- Avem următoarele cazuri:

✓ $\varphi_{12}>0$ când spunem că funcţia u_1 atinge un maxim la un timp anterior timpului la care funcţia u_2 atinge maximul. Spunem că tensiunea u_1 este defazată înaintea tensiunii u_2 cu un unghi φ_{12}, sau invers, tensiunea u_2 este în urma tensiunii u_1 cu unghiul φ_{12}. (*fig.a*)

✓ $\varphi_{12}=0$ când funcţia u_1 atinge maximul în acelaşi timp cu tensiunea u_2. Spunem că tensiunea u_1 este în fază cu tensiunea u_2. (*fig.b*)

✓ $\varphi_{12}<0$ când spunem că funcţia u_1 atinge un maxim la un timp posterior timpului la care funcţia u_2 atinge maximul. Spunem că tensiunea u_1 este defazată în urma tensiunii u_2 cu un unghi φ_{12}, sau invers, tensiunea u_2 este în faţa tensiunii u_1 cu unghiul φ_{12}. (*fig.c*)



Operaţii cu funcţii sinusoidale

- Suma sau diferenţa a două funcţii sinusoidale de aceiaşi pulsaţie, generează o funcţie sinusoidală de aceiaşi pulsaţie.

- Derivata unei funcţii sinusoidale este tot o funcţie sinusoidală defazată în faţă cu un unghi de 90^0 faţă de funcţia sinusoidală:

$$\frac{d\,a}{d\,t} = \omega a_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega a_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Integrala unei funcţii sinusoidale este tot o funcţie sinusoidală defazată în urmă cu 90^0 faţă de funcţia sinusoidală:

$$\int a(t)dt = -\frac{a_m}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) = \frac{a_m}{\omega}\sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\cos\alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Valoarea efectivă. Valoarea medie

- ***Valoarea efectivă*** este o mărime caracteristică funcţiilor periodice. Pentru o funcţie periodică *a(t)*, cu perioada *T*, prin definiţie, valoarea efectivă (notată întotdeauna cu literă mare) este definită în forma: $$A=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T a^2(t)dt}$$

- Valoarea efectivă pentru o funcţie sinusoidală (de ex. o tensiune)

$$u(t)=u_m\sin(\omega t+\varphi)$$

este dată de:

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u_m^2\sin^2(\omega t+\varphi)dt}=\frac{u_m}{\sqrt{2}}\cong 0.707\,u_m$$

$$\boxed{U=\frac{u_m}{\sqrt{2}}\cong 0.707\,u_m}$$

unde a fost folosită identitatea:

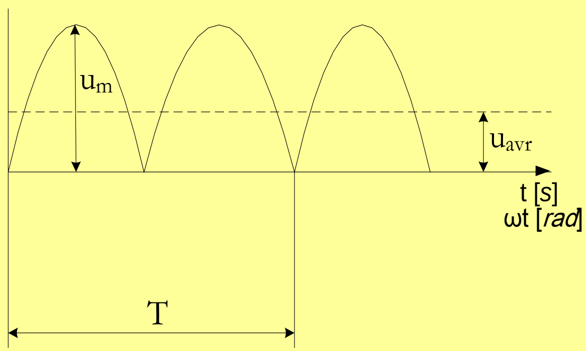
$$\int_0^T \sin^2(\omega t+\varphi)dt=\int_0^T\frac{1-\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}dt=\frac{T}{2}$$

- În electrotehnică (electronică), valoarea efectivă este preferată valorii maxime (amplitudinii). Aceasta deoarece toate aparatele de măsură ce măsoară mărimi alternative, măsoară valoarea efectivă a mărimii şi nu valoarea maximă.

- *Valoarea medie* este o altă mărime caracteristică funcţiilor periodice. Poate avea valori pozitive sau negative.
- Pentru o funcţie periodică *a(t),* cu perioada *T,* valoarea medie a funcţiei, prin definiţie, este definită în for

$$a_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,dt$$

- Pentru funcţii sinusoidsale, valoarea medie este zero.
- Uneori, în electronică, este util să folosim valoarea medie a modulului funcţiei sinusoidale. O astfel de funcţie este prezentată în figura de mai jos.



$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u_m \sin(\omega t + \varphi)\,dt$$

$$\tilde{u} = \frac{2}{T}u_m\left(-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)\right)\Big|_0^{T/2} = \frac{2u_m}{T\omega}(1+1) = \frac{2u_m}{\pi}$$

- Valoarea medie e produsului a două funcţii sinusoidale,

$$u_1(t) = u_{m1}\sin(\omega t + \varphi_1)\,, \qquad u_2(t) = u_{m2}\sin(\omega t + \varphi_2)$$

este: $$\tilde{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u_1(t)u_2(t)dt = \frac{u_{m1}u_{m2}}{T}\int_0^T \sin(\omega t + \varphi_1)\sin(\omega t + \varphi_2)dt$$

Folosind identitatea: $$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

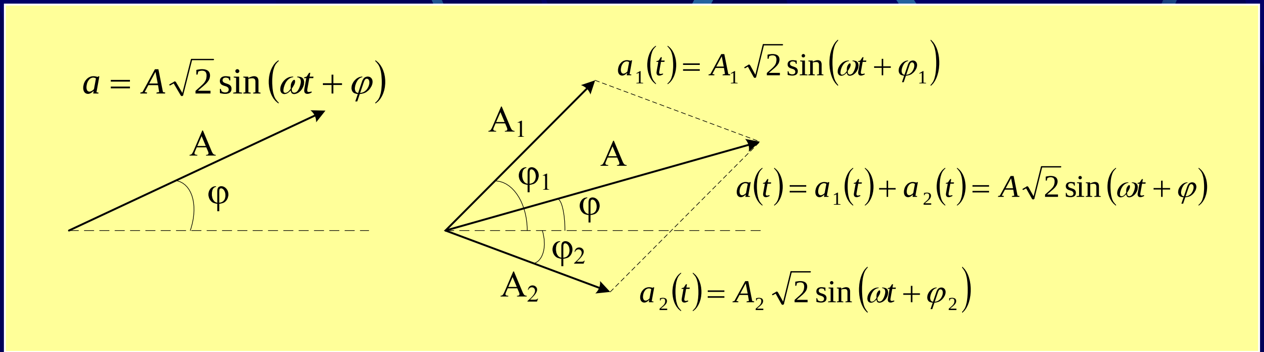
avem: $$\sin(\omega t + \varphi_1)\sin(\omega t + \varphi_2) = \frac{1}{2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)]$$

iar expresia pentru valoarea medie a produsului de două funcţii sinusoidale devine:

$$\tilde{u} = \frac{u_{m1}u_{m2}}{T}\left[\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}T - 0\right] = \frac{u_{m1}u_{m2}}{2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = U_1U_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Reprezentarea fazorială a funcţiilor sinusoidale de pulsaţie dată

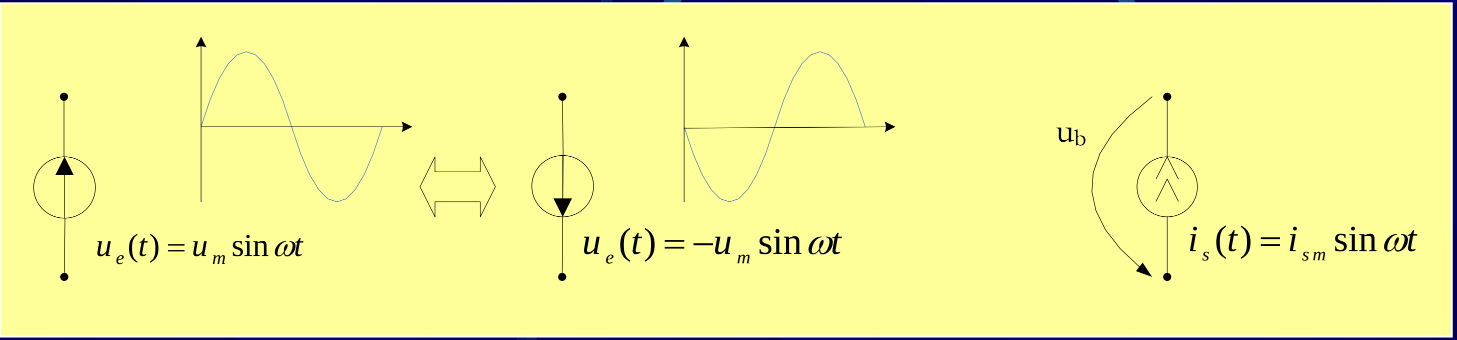
- Considerăm o direcţie arbitrară (cea cu linie punctată din fig.a de mai jos). Faţă de direcţia considerată, pentru orice funcţie sinusoidală de pulsaţie dată, putem asocia un fazor într-o formă grafică, astfel: modulul fazoruluui este egal cu valoarea efectivă a funcţiei sinusoidale, iar unghiul format de fazor faţă de direcţia considerată este egal cu faza iniţială a funcţiei sinusoidale.



- Reprezentarea fazorială a funcţiilor sinusoidale este utilă atunci când avem de efectuat operaţii de adunare sau scădere între funcţii sinusoidale. În acest fel aceste operaţii sunt identice cu operaţiile între vectori.

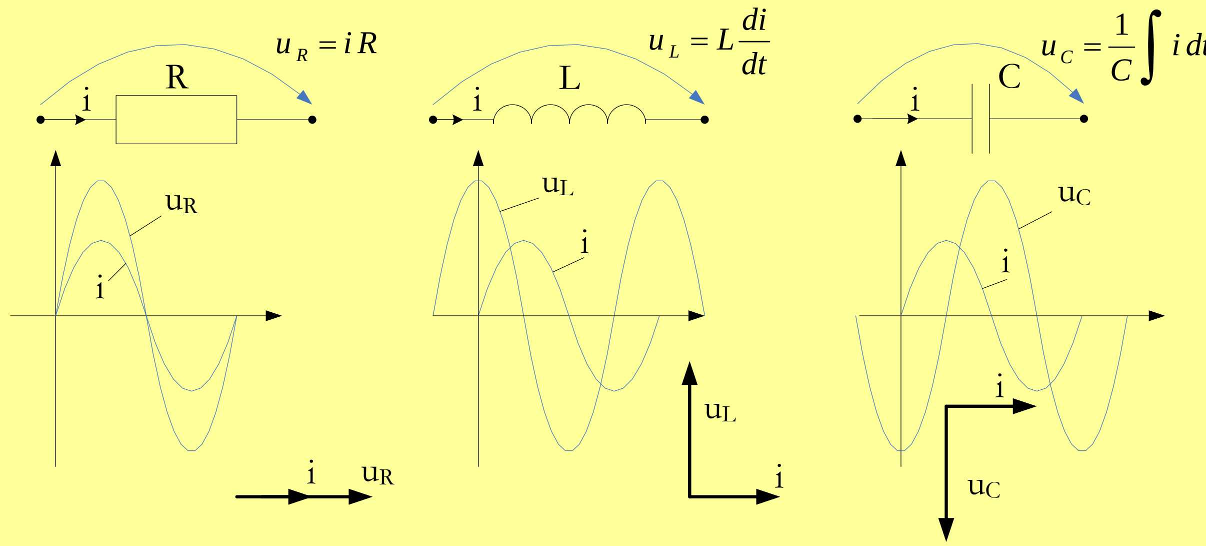
Surse sinusoidale independente

- Pentru a avea o energie electrică sinusoidală într-un circuit, este necesar să folosim surse electrice (de tensiune şi curent) care generează forme de undă sinusoidale de aceiaşi pulsaţie.
- Sinusoidal voltage sources produce voltages alternating in polarity, reversing positive and negative over time.
- Aceste surse produc tensiuni sau curenţi care schimbă polaritatea în timp, sub formă sinusoidală.



Răspunsul elementelor pasive de circuit la excitaţie sinusoidală

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin\omega t$$



$$u_R(t) = i\,R = U\sqrt{2}\sin\omega t$$

$$U = I\,R$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = \omega L\,I\sqrt{2}\cos\omega t = \omega L\,I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U = \omega L\,I = X_L I \qquad X_L = \omega L\ [\Omega]$$

$$-\cos\alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

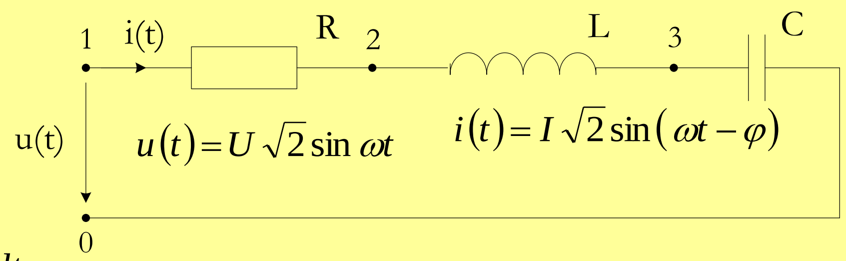
$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt = -\frac{1}{\omega C}I\sqrt{2}\cos\omega t = \frac{1}{\omega C}I\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U = \frac{1}{\omega C}I = X_C I \qquad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Circuitul RLC serie alimentat cu tensiune sinusoidală

$$u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t \qquad i(t) = ?$$

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi) \qquad I = ? \quad \varphi = ?$$



$$u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t \qquad i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$$

$$u = v_1 - v_0 = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_0)$$

$$u = u_R + u_L + u_C \quad \Rightarrow \quad u = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$U\sqrt{2}\sin\omega t = RI\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi) + \omega L I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi) - \frac{1}{\omega C}I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$$

$$U\sqrt{2}\sin\omega t = RI\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$$

$$\begin{aligned} t = 0: &\quad \begin{cases} 0 = -RI\sqrt{2}\sin\varphi + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)I\sqrt{2}\cos\varphi \\ U\sqrt{2}\sin\varphi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)I\sqrt{2} \end{cases} \\ t = \frac{\varphi}{\omega}: & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{tg}\,\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = arctg\,\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\sin\varphi = \frac{\mathbf{tg}\,\varphi}{\sqrt{1 + \mathbf{tg}^2\varphi}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad [\Omega]$$

$$\boxed{Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U} = \frac{i_m}{u_m}}$$

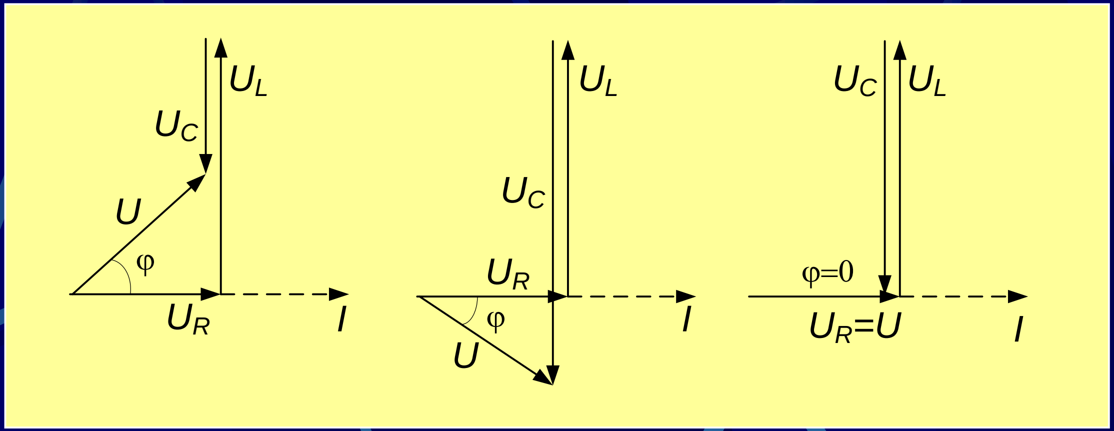
$$\boxed{Z = \frac{U}{I} = \frac{u_m}{i_m} \neq \frac{u(t)}{i(t)}}$$

$X_L = \omega L \; [\Omega]$ reactanta inductiva

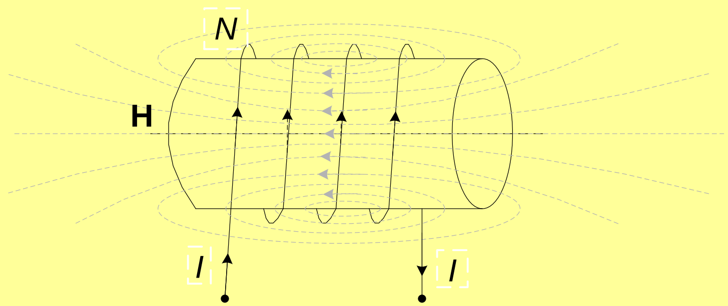
$X_C = \frac{1}{\omega C} \; [\Omega]$ reactanta capacitiva

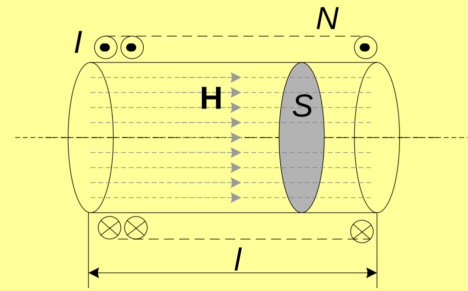
$X = X_L - X_C \; [\Omega]$ reactanta

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

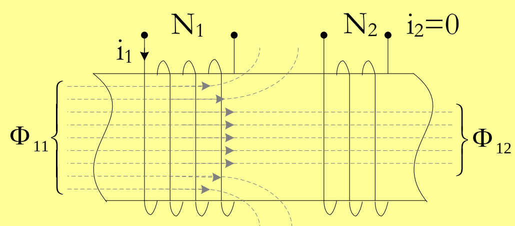


- ✓ *$\varphi>0$, caracterul circuitului este inductiv, curentul fiind defazat in urma tensiunii cu unghiul φ, iar $X_L>X_C$;*
- ✓ *$\Phi<0$, caracterul circuitului este capacitiv, curentul este defazat înaintea tensiunii cu unghiul φ, iar $X_C>X_L$;*
- ✓ *$\varphi=0$* circuitul este la rezonanţă, curentul este în fază cu tensiunea, *iar $X_C=X_L$*

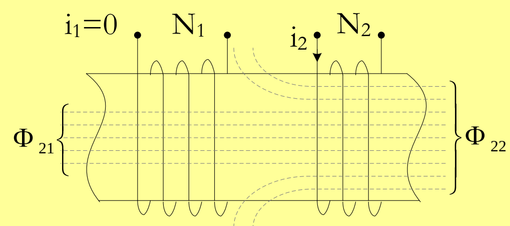




$$L=\frac{\Psi}{i}\qquad L=N\frac{\Phi}{i}\qquad L=\mu_0\,\mu_r\frac{N^2S}{l}=\mu\frac{N^2S}{l}$$

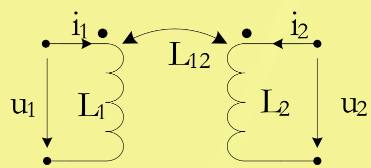


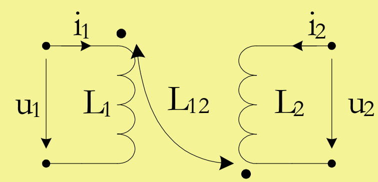
a)



b)

$$\Psi_1=N_1\left(\Phi_{11}+\Phi_{21}\right)=L_1 i_1\pm L_{21} i_2\qquad \Psi_2=N_2\left(\Phi_{22}+\Phi_{12}\right)=L_2 i_2\pm L_{12} i_1$$





$$u_{L1}=\frac{d\Psi_1}{dt}=L_1\frac{di_1}{dt}+L_{21}\frac{di_2}{dt}$$

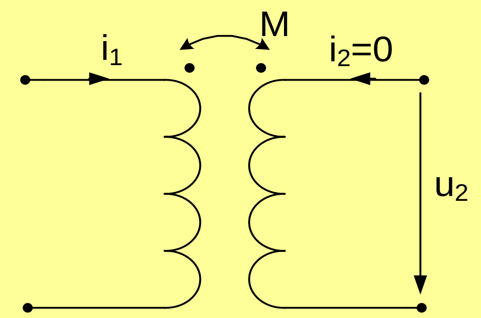
$$u_{L2}=\frac{d\Psi_2}{dt}=L_2\frac{di_2}{dt}+L_{12}\frac{di_1}{dt}$$

$$u_{L1}=\frac{d\Psi_1}{dt}=L_1\frac{di_1}{dt}-L_{21}\frac{di_2}{dt}$$

$$u_{L2}=\frac{d\Psi_2}{dt}=L_2\frac{di_2}{dt}-L_{12}\frac{di_1}{dt}$$

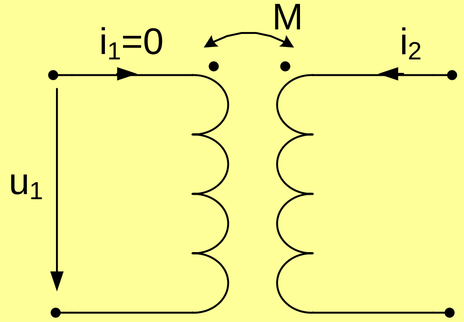
Inductivitatea mutuală. Bobine cuplate magnetic

- Inductivitatea proprie a unei bobine este legată de fluxul magnetic total ce trece prin bobină (înlănţuirea bobinei). Tensiunea autoindusă la bornele bobinei apare datorită variaţiei fluxului magnetic prin spirele bobinei când acestea sunt parcurse de un curent variabil în timp (legea inducţiei electromagnetice).
- Este posibil ca câmpul magnetic produs de o bobină să genereze o tensiune indusă într-o altă bobină aflată în apropiere. În acest caz se spune că cele două bobine sunt *cuplate magnetic*.
- Elementul de circuit folosit pentru a reprezenta cuplajul magnetic dintre bobine se numeşte *inductivitate mutuală, M*. La fel ca şi inductivitatea proprie a bobinei, se măsoară în *henrys*, *H*.
- Relaţia dintre curentul unei bobine şi tensiunea indusă la bornele altei bobine este determinată de inductivitatea de cuplaj dintre cele două bobine. Pentru circuitul de mai jos, avem:



$$u_2 = M\frac{di_1}{dt}$$

- O ecuaţie similară paote fi scrisă pentru tensiunea u_1 indusă de curentul i_2.

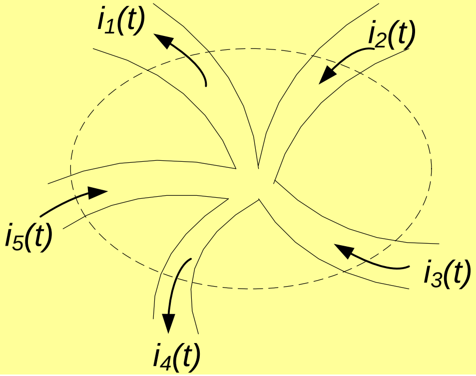


$$u_1 = M\frac{di_2}{dt}$$

- Cele două puncte marcate pe fiecare bobină indică bornele de început ale înfăşurărilor, în funcţie de care fluxurile se adună sau se scad, întărind sau slăbind tensiunea pe cele două bobine.
- Se adoptă următoarea convenţie:
  - Dacă curenţii din cele două bobine au acelaşi sens faţă de bornele marcate atunci fluxurile se adună, cuplajul fiind un cuplaj aditiv;
  - Dacă curenţii din cel două bobine au sensuri opuse faţă de bornele marcate atunci fluxurile se scad, cuplajul fiind un cuplaj diferențial.
- Cuplajul dintre două bobine permite transferul energiei între circuitele celor două bobine prin intermediul interacţiunii câmpului magnetic generat de cele două bobine. Acest fenomen stă la baza funcţionării transformatorului electric.

Teoremele lui Kirchhoff

Prima teoremă a lui Kirchhoff



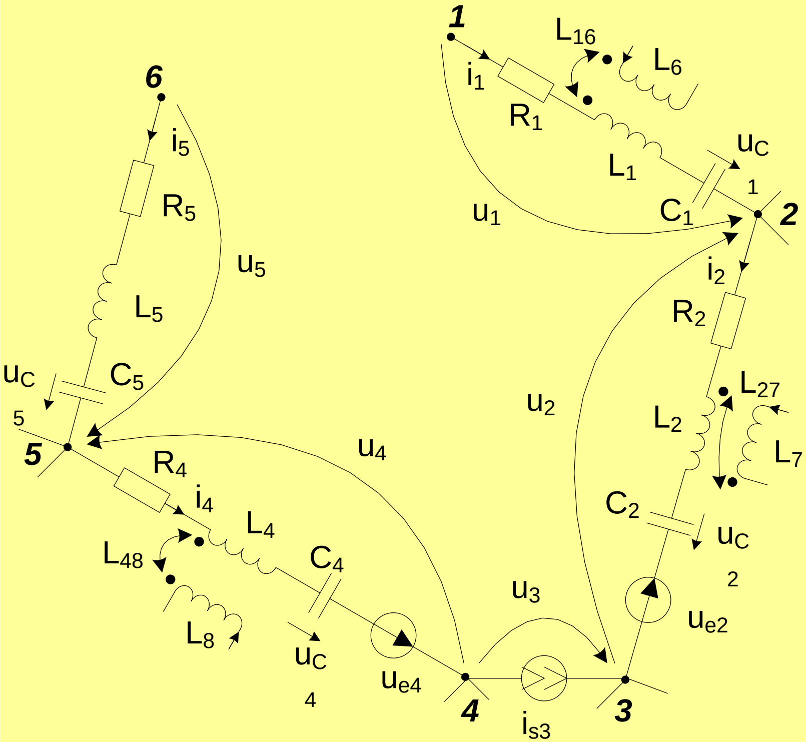
$$i_\Sigma = \oint_\Sigma \mathbf{J} \cdot \mathbf{dS} = 0$$

$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_5(t) = 0$$

$$i_1(t) + i_4(t) = i_2(t) + i_3(t) + i_5(t)$$

$$\sum_{\lambda \in (p)} \pm i_\lambda(t) = 0$$

A doua teoremă a lui Kirchhoff



$$u_{16} = v_1 - v_6 = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_4) + (v_4 - v_5) + (v_5 - v_6)$$

$$u_{16} = u_1 - u_2 - u_3 + u_4 - u_5$$

$$1 \equiv 6 \Rightarrow v_1 = v_6 \Rightarrow u_1 - u_2 - u_3 + u_4 - u_5 = 0$$

$$\sum_{\lambda \in (o)} \pm u_\lambda = 0$$

$$u_1 = u_{R1} + u_{L1} + u_{C1} = i_1 R_1 + \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{16} \frac{di_6}{dt} \right) + u_{C1} \,,$$

$$u_2 = -u_{R2} - u_{L2} - u_{C2} - u_{e2} = -i_2 R_2 - \left(L_2 \frac{di_2}{dt} - L_{27} \frac{di_7}{dt} \right) - u_{C2} - u_{e2} \,,$$

$$u_4 = u_{e4} - u_{C4} - u_{L4} - u_{R4} = u_{e4} - u_{C4} - \left(L_4 \frac{di_4}{dt} - L_{48} \frac{di_8}{dt} \right) - i_4 R_4 \,,$$

$$u_5 = u_{R5} + u_{L5} + u_{C5} = i_5 R_5 + L_5 \frac{di_5}{dt} + u_{C5}.$$

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 - i_4 R_4 - i_5 R_5 + \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{16} \frac{di_6}{dt} \right) + \left(L_2 \frac{di_2}{dt} - L_{27} \frac{di_7}{dt} \right) - \left(L_4 \frac{di_4}{dt} - L_{48} \frac{di_8}{dt} \right) - L_5 \frac{di_5}{dt} + u_{C1} +$$

$$+ u_{C2} - u_{C4} - u_{C5} - u_3 = -u_{e2} - u_{e4}$$

$$\sum_{\lambda \in (o)} \pm i_\lambda R_\lambda + \sum_{\lambda \in (o)} \pm \left(L_\lambda \frac{di_\lambda}{dt} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \lambda}}^{l} \pm L_{\beta\lambda} \frac{di_\beta}{dt} \right) + \sum_{\lambda \in (o)} \pm u_{C\lambda} + \sum_{\lambda \in (o)} \pm u_{g\lambda} = \sum_{\lambda \in (o)} \pm u_{e\lambda}$$

Reprezentarea în complex simplificat a funcţilor sinusoidale de pulsaţie dată

- Reprezentarea în complex simplificat este metoda prin care se rezolvă circuitele în regim sinusoidal, când sursele de alimentare din circuit sunt de formă sinusoidală de aceiaşi frecvenţă.
- Metoda constă în transformarea sistemului de ecuaţii bazat pe teoremele lui Kirchhoff din domeniul timp în domeniul complex.

$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \varphi)$$

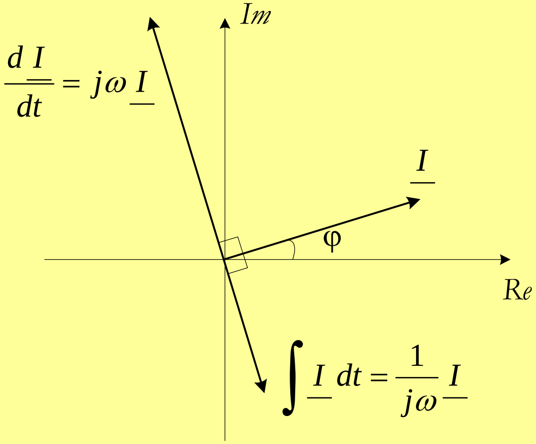
$$\frac{i_m}{\sqrt{2}} \leftrightarrow I \qquad \varphi \leftrightarrow \gamma$$

$$\underline{I} = I e^{j\gamma}$$

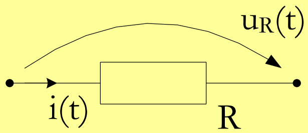
$$\frac{d\underline{I}}{dt} = j\omega \underline{I}$$

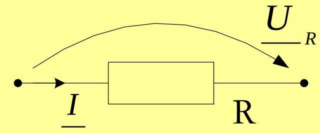
$$\underline{\int I\, dt} = \frac{1}{j\omega}\underline{I} = -\frac{j}{\omega}\underline{I}$$

$$i(t) = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}\, \underline{I}\, e^{j\omega t}\right\}$$

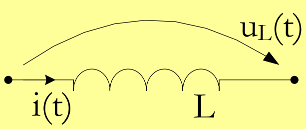


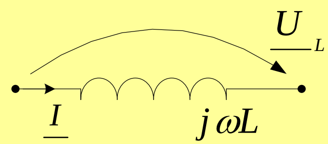
Reprezentarea simbolică şi relaţia tensiune curent în complex simplificat



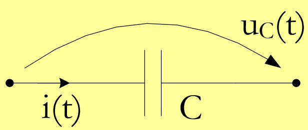


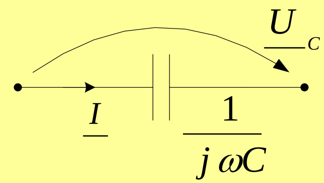
$$u_R = i\,R \qquad \underline{U}_R = \underline{I}\,R$$





$$u_L = L\frac{di}{dt} \qquad \underline{U}_L = L\frac{d\,\underline{I}}{dt} \qquad \underline{U}_L = j\omega L\,\underline{I}$$



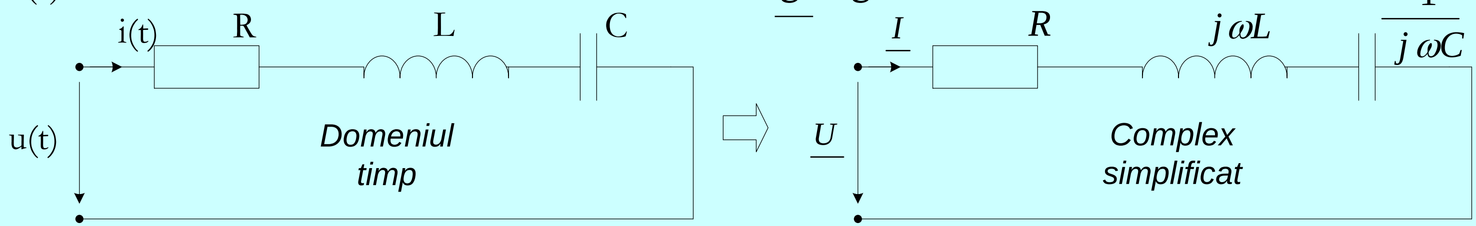


$$\underline{U}_C = \frac{1}{C}\int \underline{I}\,dt$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt \qquad \underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\,\underline{I} = -j\frac{1}{\omega C}\,\underline{I}$$

Impedanţa şi Admitanţa complexă

$u(t)=U\sqrt{2}\sin\omega t$ $\qquad\qquad$ $\underline{U}=U$



$i=I\sqrt{2}\sin(\omega t-\varphi)$ $\qquad\qquad$ $\underline{I}=I\,e^{-j\varphi}$

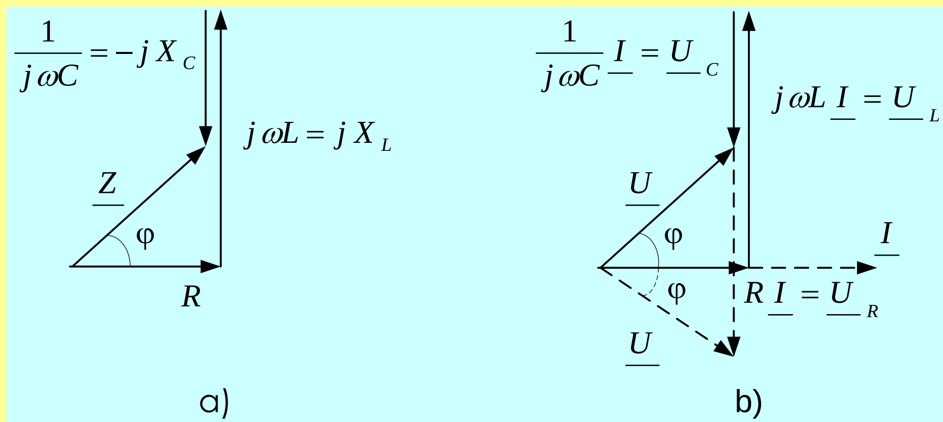
$$u=iR+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$\underline{I}R+L\frac{d\underline{I}}{dt}+\frac{1}{C}\int\underline{I}\,dt=\underline{U} \qquad \underline{U}=\underline{I}R+j\omega L\underline{I}+\frac{1}{j\omega C}\underline{I}$$

$$\underline{U}=\underline{I}\left[R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]=\underline{I}\,\underline{Z}$$

$$\underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}=R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)=R+j\left(X_L-X_C\right)=R+jX$$

$\underline{Z}$ – impedanta complexa



$$Z=\left|\underline{Z}\right|=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \varphi=Arg\left(\underline{Z}\right)=arctg\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\underline{I}=\frac{\underline{U}}{\underline{Z}}=\frac{U}{Z\,e^{j\varphi}}=\frac{U}{Z}e^{-j\varphi} \qquad i(t)=\frac{U}{Z}\sqrt{2}\sin\left(\omega t-\varphi\right)$$

$$\underline{Y}=\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{1}{R+jX}=\frac{R}{R^2+X^2}-j\frac{X}{R^2+X^2}=\frac{R}{Z^2}-j\frac{X}{Z^2}=G-jB$$

$\underline{Y}$ – admitanta complexa

$$\underline{Y}=Y\,e^{-j\varphi} \qquad Y=\sqrt{G^2+B^2}=\frac{1}{Z} \qquad \frac{B}{G}=\frac{X}{R}=tg\,\varphi$$

Teoremele lui Kirchhoff în complex simplificat

TK 1:

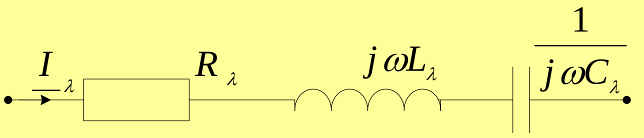
$$\sum_{\lambda\in(p)} \pm i_\lambda(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\lambda\in(p)} \pm \underline{I}_\lambda = 0$$

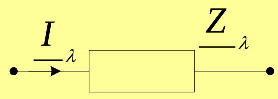
TK 2:

$$\sum_{\lambda\in(o)} \pm i_\lambda R_\lambda + \sum_{\lambda\in(o)} \pm \left(L_\lambda \frac{di_\lambda}{dt} + \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\lambda}}^{l} \pm L_{\beta\lambda} \frac{di_\beta}{dt} \right) + \sum_{\lambda\in(o)} \pm u_{C\lambda} + \sum_{\lambda\in(o)} \pm u_{g\lambda} = \sum_{\lambda\in(o)} \pm u_{e\lambda}$$

$$\sum_{\lambda\in(o)} \pm \left[\left(R_\lambda + j\omega L_\lambda + \frac{1}{j\omega C_\lambda} \right) \underline{I}_\lambda + \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\lambda}}^{l} \pm j\omega L_{\beta\lambda} \underline{I}_\beta \right] + \sum_{\lambda\in(o)} \pm \underline{U}_{g\lambda} = \sum_{\lambda\in(o)} \pm \underline{U}_{e\lambda}$$

$$\underline{Z}_\lambda = R_\lambda + j\omega L_\lambda + \frac{1}{j\omega C_\lambda}$$

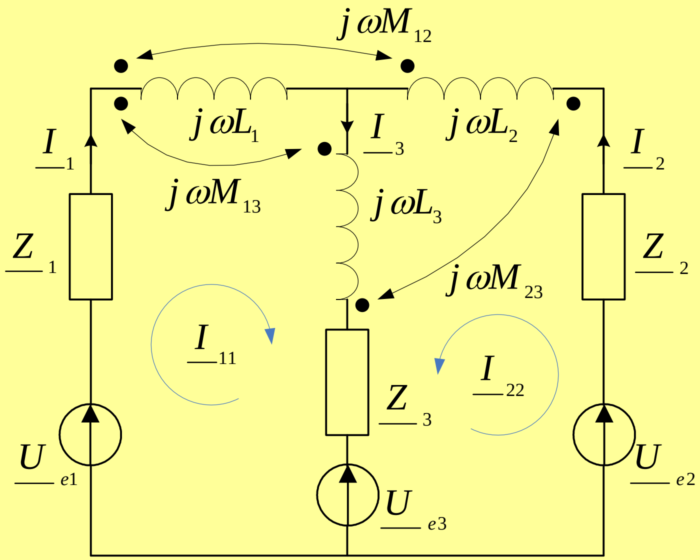




$$\sum_{\lambda\in(o)} \pm \left[\underline{Z}_\lambda \underline{I}_\lambda + \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\lambda}}^{l} \pm j\omega L_{\beta\lambda} \underline{I}_\beta \right] + \sum_{\lambda\in(o)} \pm \underline{U}_{g\lambda} = \sum_{\lambda\in(o)} \pm \underline{U}_{e\lambda}$$

- Câteva aspecte importante în folosirea complexului simplificat:
  - Calculul mărimilor necunoscute (de regulă curenţi) se face rezolvând un sistem de ecuaţii algebrice liniar;
  - Ca urmare toate tehnicile folosite în rezolvarea circuitelor de curent continuu se pot aplica pentru rezolvarea circuitelor în regim sinusoidal;
  - Valorile constante ale curenţilor şi tensiunilor din circuitele de curent continuu sunt înlocuite de complexele simplificate ale curenţilor şi tensiunilor sinusoidale. Similar rezistenţele din curent continuu sunt înlocuite de complexele impedanţelor în calculul fazorial.

Metoda curenţilor ciclici (de contur, de buclă)



$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_{22} \qquad \underline{I}_3 = \underline{I}_{11} + \underline{I}_{22}$$

$$\underline{I}_1 \underline{Z}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M_{12} \underline{I}_2 + j\omega M_{13} \underline{I}_3 + \\ + j\omega L_3 \underline{I}_3 + j\omega M_{13} \underline{I}_1 - j\omega M_{23} \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \underline{Z}_3 = \underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e3}$$

$$\underline{I}_{11}\left[\underline{Z}_1 + j\omega L_1 + j\omega M_{13} + j\omega L_3 + j\omega M_{13} + \underline{Z}_3\right] + \\ + \underline{I}_{22}\left[- j\omega M_{12} + j\omega M_{13} + j\omega L_3 - j\omega M_{23} + \underline{Z}_3\right] = \underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{I}_{11}\left[\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + j\omega L_1 + j\omega L_3 + j2\omega M_{13}\right] + \\ &+ \underline{I}_{22}\left[\underline{Z}_3 + j\omega L_3 - j\omega M_{12} + j\omega M_{13} - j\omega M_{23}\right] = \underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e3} \end{aligned}}$$

$$\underline{I}_{22}\left[\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + j\omega L_2 + j\omega L_3 - j2\omega M_{23}\right] + \underline{I}_{11}\left[\underline{Z}_3 + j\omega L_3 - j\omega M_{12} + j\omega M_{13} - j\omega M_{23}\right] = \underline{U}_{e2} - \underline{U}_{e3}$$

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{12} \underline{I}_{22} = \underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e3} \\ \underline{Z}_{21} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{22} \underline{I}_{22} = \underline{U}_{e2} - \underline{U}_{e3} \end{cases}$$

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + j\omega L_1 + j\omega L_3 + j2\omega M_{13}$$
$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + j\omega L_2 + j\omega L_3 - j2\omega M_{23}$$
$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_3 + j\omega L_3 - j\omega M_{12} + j\omega M_{13} - j\omega M_{23}$$

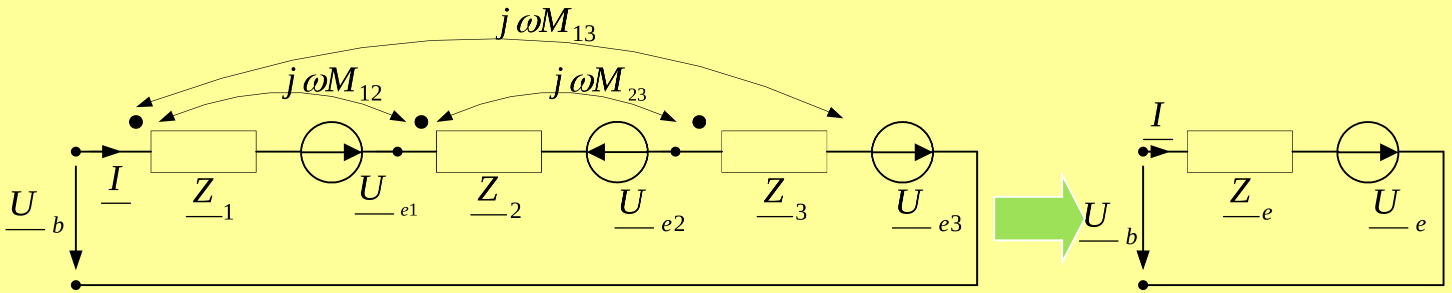
O formă generală pentru ochiul k, este:

$$\underline{I}_{11} \underline{Z}_{k1} + \underline{I}_{22} \underline{Z}_{k2} + \ldots + \underline{I}_{\lambda\lambda} \underline{Z}_{k\lambda} + \ldots + \underline{I}_{kk} \underline{Z}_{kk} + \ldots + \underline{I}_{oo} \underline{Z}_{ko} = \sum_{\gamma \in k} \underline{U}_{e\gamma}$$

$$\underline{Z}_{kk} = \sum_{\gamma \in (k)} \underline{Z}_\gamma + 2 \sum_{\substack{\gamma \in (k) \\ \beta \in (k)}} \pm j\omega M_{\gamma\beta}$$

$$\underline{Z}_{k\lambda} = \sum_{\substack{\gamma \in (k) \\ \gamma \in (\lambda)}} \pm \underline{Z}_\gamma + \sum_{\substack{\gamma \in (k) \\ \beta \in (\lambda)}} \pm j\omega M_{\gamma\beta}$$

Transfigurarea laturilor cuplate
Transfigurarea serie a laturilor cuplate



$$\underline{U}_b = \underline{I}\,\underline{Z}_1 + j\omega M_{12}\,\underline{I} - j\omega M_{13}\,\underline{I} - \underline{U}_{e1} + \underline{I}\,\underline{Z}_2 + j\omega M_{12}\,\underline{I} + j\omega M_{23}\,\underline{I} + \underline{U}_{e2} + \underline{I}\,\underline{Z}_3 + j\omega M_{23}\,\underline{I} - j\omega M_{13}\,\underline{I} - \underline{U}_{e3}$$

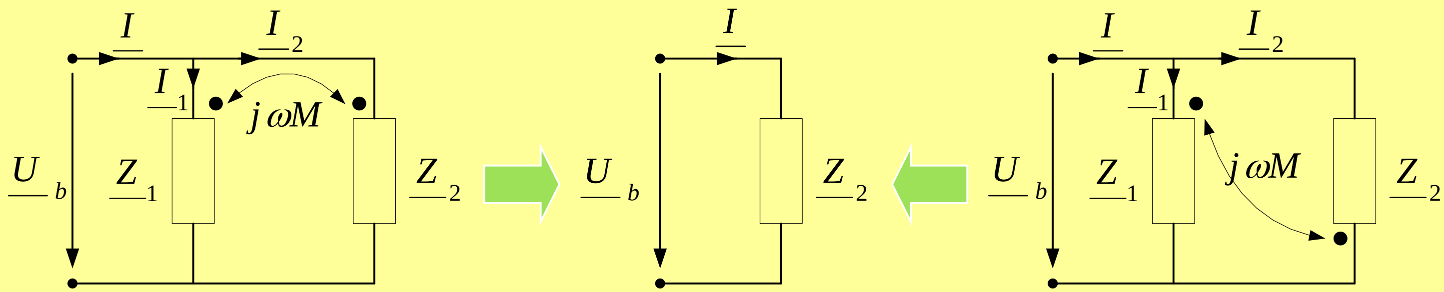
$$\underline{U}_b = \underline{I}\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3\right) + j2\omega\left(M_{12} - M_{13} + M_{23}\right)\underline{I} - \underline{U}_{e1} + \underline{U}_{e2} - \underline{U}_{e3} \qquad \underline{U}_b = \underline{I}\,\underline{Z}_e - \underline{U}_e$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + j2\omega\left(M_{12} - M_{13} + M_{23}\right) \qquad \underline{U}_e = \underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e2} + \underline{U}_{e3}$$

O formă generală a laturilor cuplate serie, este:

$$\underline{Z}_e = \sum_{\lambda=1}^{n} \underline{Z}_\lambda + 2\sum_{\lambda \neq k} \pm j\omega M_{\lambda k} \qquad \underline{U}_e = \sum_{\lambda=1}^{n} \pm \underline{U}_{e\lambda}$$

Transfigurarea paralel a laturilor cuplate



$$\begin{cases} \underline{U}_b = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + j\omega M\, \underline{I}_2 \\ \underline{U}_b = j\omega M\, \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{U}_b = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - j\omega M\, \underline{I}_2 \\ \underline{U}_b = - j\omega M\, \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 \end{cases}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \underline{U}_b & \pm j\omega M \\ \underline{U}_b & \underline{Z}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \pm j\omega M \\ \pm j\omega M & \underline{Z}_2 \end{vmatrix}} = \underline{U}_b \frac{\underline{Z}_2 \mp j\omega M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + (\omega M)^2}$$

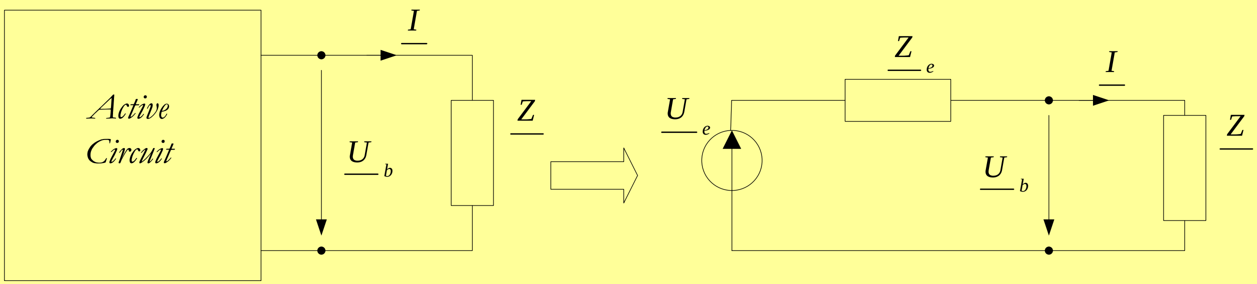
$$\underline{I}_2 = \underline{U}_b \frac{\underline{Z}_1 \mp j\omega M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + (\omega M)^2}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp j2\omega M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + (\omega M)^2} \underline{U}_b$$

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}_b}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + (\omega M)^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp j2\omega M}$$

Teorema transferului maxim de putere în regim sinusoidal

- Considerăm un sub-circuit în regim sinusoidal format din surse şi impedanţe la care se conectează o sarcină (impedanţă).
- Dorim să determinăm transferul maxim de putere ce poate fi efectuat de la sub-circuit spre sarcina *Z*.
- Considerând sub-circuitul liniar, el poate fi redus la o echivalenţă Thevenin.



$$\underline{Z} = R + jX$$

$$\underline{Z}_e = R_e + jX_e$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_e}{\underline{Z} + \underline{Z}_e} = \frac{\underline{U}_e}{(R+R_e) + j(X+X_e)} = \frac{\underline{U}_e\left[(R+R_e) - j(X+X_e)\right]}{(R+R_e)^2 + (X+X_e)^2} \Rightarrow P = I^2 R = \frac{RU_e^2}{(R+R_e)^2 + (X+X_e)^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial R} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial X} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{-2U_e^2(X+X_e)}{\left[(R+R_e)^2 + (X+X_e)^2\right]^2} = 0 \qquad X + X_e = 0 \qquad P = \frac{RU_e^2}{(R+R_e)^2}$$

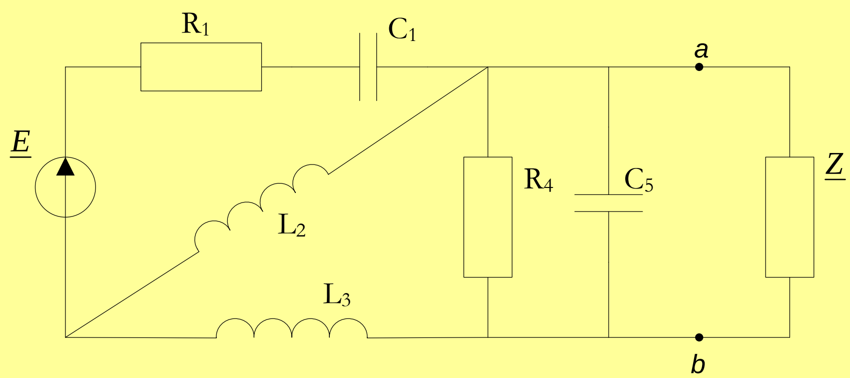
$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0 \qquad \frac{U_e^2}{(R+R_e)^3}(R_e - R) = 0 \qquad R - R_e = 0$$

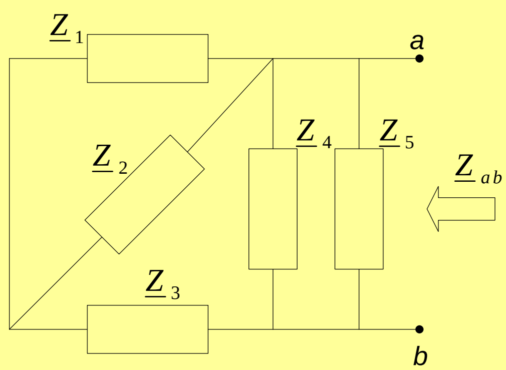
$$\underline{Z} = \underline{Z}_e^* \qquad R = R_e \qquad X = -X_e$$

Exemplu

- **Determinaţi valoarea impedanţei Z care absoarbe cea mai mare putere activă.**

$R_1=X_{C1}=2\Omega$
$X_{L2}=X_{L3}=2\Omega$
$R_4=5\Omega$
$X_{C5}=10\Omega$
E=10V





$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C1} = 2 - j2\,(\Omega)$$

$$\underline{Z}_2 = jX_{L2} = j2\,(\Omega)$$

$$\underline{Z}_3 = jX_{L3} = j2\,(\Omega)$$

$$\underline{Z}_4 = R_4 = 5\,(\Omega)$$

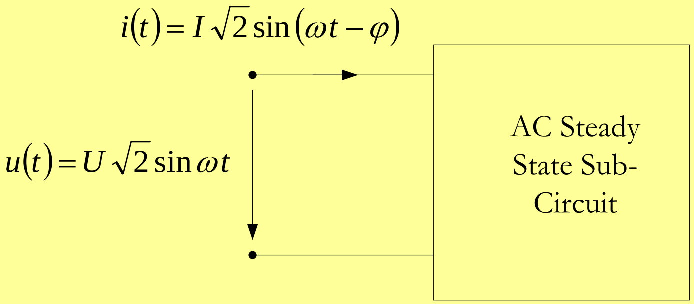
$$\underline{Z}_5 = -jX_{C6} = -j10\,(\Omega)$$

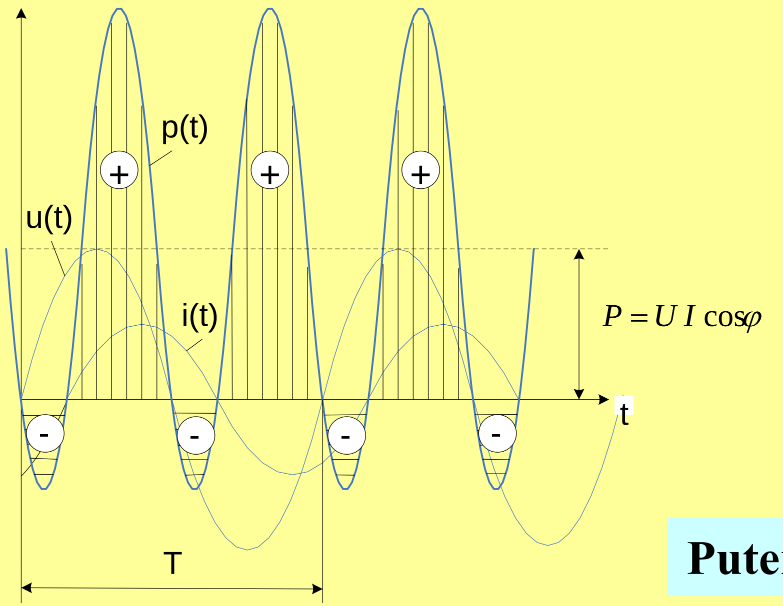
$$\underline{Z}_{p1} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} = 2+j2\,(\Omega) \Rightarrow \underline{Z}_{s1} = \underline{Z}_{p1} + \underline{Z}_3 = 2+j4\,(\Omega)$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{1}{\underline{Z}_{s1}} + \frac{1}{\underline{Z}_4} + \frac{1}{\underline{Z}_5} \Rightarrow \underline{Z}_{ab} = 3+j\,(\Omega)$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}^{*}_{ab} \Rightarrow \underline{Z} = 3-j\,(\Omega)$$

Puteri în regim sinusoidal





Puterea instantanee este:

$$p=u(t)\cdot i(t)=U\sqrt{2}\sin\omega t\; I\sqrt{2}\sin(\omega t-\varphi)$$

$$\sin a\,\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

$$p=U\,I\cos\varphi-U\,I\cos(2\omega t-\varphi)$$

$$W=\int_0^T p\,dt\quad [j] \qquad 1kwh=3600\,kj$$

Puterea activă:

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\,dt=U\,I\cos\varphi \qquad [W]$$

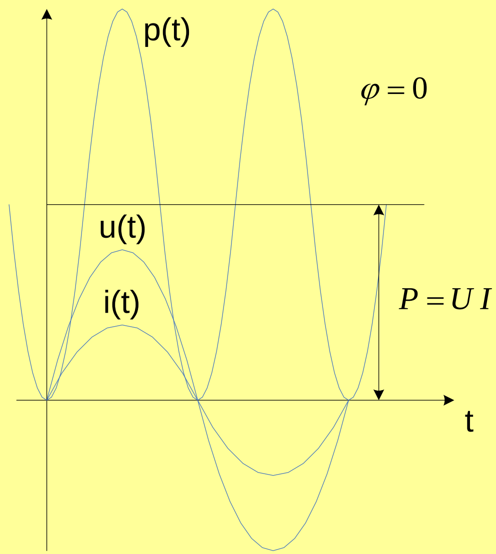
$$W_C=\int_{t_1}^{t_2} P\,dt$$

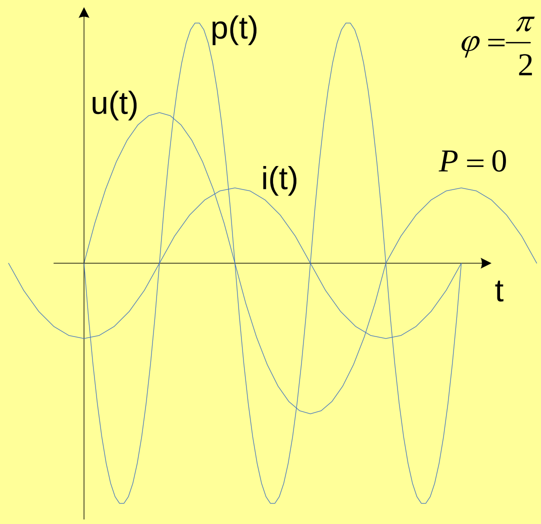
$$Z=\frac{U}{I} \qquad R=Z\cos\varphi \qquad P=I^2 Z\cos\varphi=I^2 R$$

Puterea aparentă: $S=U\,I \quad [VA]$ $\qquad S=I^2 Z$

Puterea reactivă: $Q=U\,I\sin\varphi \quad [VAR]$ $\qquad X=Z\sin\varphi \qquad Q=I^2 Z\sin\varphi=I^2 X$

$$Q_L=I^2 X_L=I^2\omega L>0 \qquad Q_C=-I^2 X_C=-I^2\frac{1}{\omega C}<0$$





$$\begin{cases} S^2 = P^2 + Q^2 \\ P = S\cos\varphi \\ Q = S\sin\varphi \end{cases}$$

$$u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \qquad \underline{U} = U\,e^{j\gamma}$$

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma - \varphi) \qquad \underline{I} = I\,e^{j(\gamma-\varphi)}$$

Complexul puterii aparente: $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^{*}$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^{*} = U\,e^{j\gamma}\,I\,e^{-j(\gamma-\varphi)} = U\,I\,e^{j\varphi} = U\,I\cos\varphi + jU\,I\sin\varphi = P + jQ$$

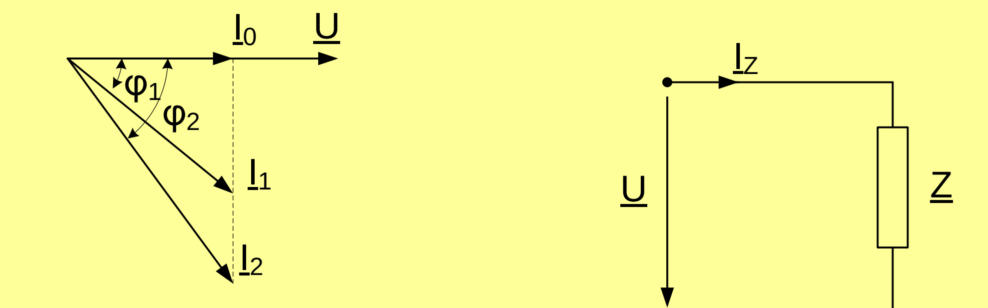
$$P = \mathrm{Re}(\underline{S}) = U\,I\cos\varphi \qquad Q = \mathrm{Im}(\underline{S}) = U\,I\sin\varphi \qquad S = |\underline{S}| = U\,I$$

Factorul de putere. Compensarea factorului de putere

- *Factorul de putere* este definit ca raport între puterea activă şi puterea aparentă:

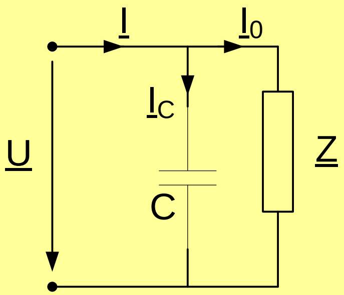
$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{U\,I}$$

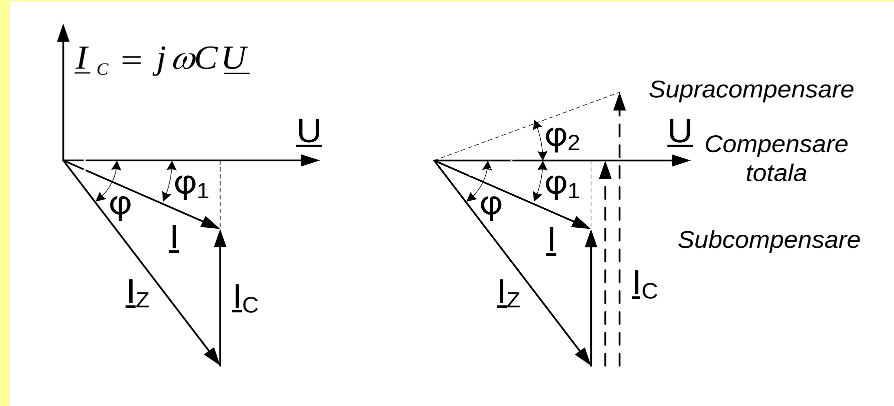
- Factorul de putere este o mărime adimensională subunitară.

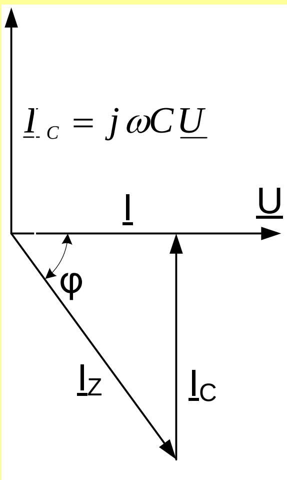


$$P = UI_1\cos\varphi_1 = UI_2\cos\varphi_2 = UI_0$$

- Orice factor de putere mai mic ca 1 presupune ca circuitul să transporte mai mult curent decât în cazul în care reactanţa este zero, pentru a transmite aceiaşi putere activă.
- Un factor de putere scăzut poate fi îmbunătăţit adăugând o sarcină de reactanţă opusă.
- Reactanţa inductivă poate fi compensată cu o reactanţă capacitivă.







$$I_C = I_Z \sin\varphi$$

$$U\,\omega C = I_Z \sin\varphi$$

$$C^* = \frac{I_Z \sin\varphi}{\omega U}$$