Matematici speciale

(seminar 8 - S8)

10.04.2024

1. Să se scrie algoritmul de simulare a unui număr pseudo-aleator uniform distribuit pe mulţimea $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Rezolvare: Reamintim următorul rezultat:
Dacă U ~Unif[0,1) v.a. uniform distribuită pe $[0, 1)$, iar n este număr întreg, $n > 1$, atunci

$$X = [nU]$$

o variabilă aleatoare discretă ce are distribuţia uniformă pe mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, adică $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n-1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$. Variabila X se poate simula prin algoritmul:

```
Function SimDiscretU(n)
u=urand();
k=int(n*u);
return k;
end.
```

Mai mult, pentru $X = [(n-m+1)U]$ avem :

$$X = \begin{pmatrix} m & m+1 & \ldots & n \\ \frac{1}{n-m+1} & \frac{1}{n-m+1} & \ldots & \frac{1}{n-m+1} \end{pmatrix}.$$

iar algoritm de simulare a unei valori de observaţie este:

```
Function randint(m,n)
u=urand();  → nr. pseudo-aleatoare ∈ [0,1)
k=int((n-m+1)*u));//k in {0,1,2,...,n-m}
return k+m;
end.
```

In cazul ex 1) trebuie să determină numărul de valori ale variabilei X.

$m = -3$ capat inferior interval

$n = 3$ capat superior interval

$N = n - m + 1 = 7$ numar de elemente din interval

```
Function randint(-3,3)
u=urand();
k=int(7*u));//k in {0,1,2,...,6}
return k-3;
end.
```

2. Variabila aleatoare X este uniform distribuită pe mulţimea $\{5, 10, 15, 20, 25\}$. Să se determine distribuţia de probabilitate a variabilei $Y = X/5 - 1$ şi sa se descrie o modalitate de simulare a variabilelor X si Y.

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

```
Function SimDiscretU(n)
u=urand();
k=int(5*u)+1;// k in {1, 2, 3, 4, 5}
return 5*k;
end.
```

$$Y = \frac{X}{5} - 1 = \frac{X-5}{5} \Rightarrow X = 5Y+5$$

$$g^{-1}(y) = 5(y+1) \Rightarrow D_Y = \{0,1,2,3,4\}$$

$$P(Y=0) = P(X = g^{-1}(0)) = P(X \in \{5\}) = \frac{1}{5}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

```
Function RandY
u=urand();
k=int(5*u);// k in {0, 1, 2, 3, 4}
return k;
end.
```

3. Se ştie că funcţia urand() generează numere pseudo-aleatoare uniform distribuite pe $[0, 1)$.

a) Cum se pot genera numere aleatoare pe un interval $[a, b)$? $a + (b-a)*urand();$

b) Să se scrie un algoritm de generare a unui număr pseudo-aleator pe intervalul $[-1, 3)$.

c) Cum se poate genera un număr pseudo-aleator pe intervalul $(-1, 3)$

b)

```
Function rand1()
u=urand();
return -1 + 4 * u;
end function.
```

c)

```
Function rand1()
do
    u=urand();
while (u=0);
return -1 + 4 * u;
end function.
```

4. Fie o variabilă aleatoare $X \sim \text{Exp}(\theta)$. Să se arate că X se poate simula prin metoda inversării. Să se scrie algoritmul de simulare a unei valori de observaţie a variabilei aleatoare X.

Rezolvare:

Metoda inversării: se aplică pentru a genera numere pseudo–aleatoare ca valori de observaţie asupra unei variabile aleatoare X, ce are funcţia de repartiţie inversabilă.

Si anume, dacă $U \sim [0,1)$ şi F_X o funcţie de repartiţie strict crescătoare şi continuă pe intervalul de lungime minimă din $\mathbb{R}$, pe care variabila aleatoare X ia valori cu probabilitatea $\to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ 1, atunci variabila aleatoare

$$\boxed{Y = F_X^{-1}(U)}$$

are aceeaşi funcţie de repartiţie ca şi variabila X, adică Y şi X sunt identic distribuite şi nu se disting din punct de vedere probabilist (se simulează în acelaşi mod).

Pentru a aplica metoda inversării pentru ex 4. vom studia funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare $X \sim \text{Exp}(\theta)$. Avem următoarele rezultate:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{– s.c. pe } [0,\infty)$$

$$1 - e^{-\frac{x}{\theta}} = u \implies F^{-1}(u) = -\theta \ln(1-u)$$

$$e^{-\frac{x}{\theta}} = 1 - u$$

$$-\frac{x}{\theta} = \ln(1-u)$$

$$x = -\theta \ln(1-u)$$

$$\implies \forall\, u \in [0,1),\ F^{-1}(u) \in [0,\infty)$$

- O v. a. exponenţial distribuită ia valori pozitive cu probabilitatea 1 pe $I = [0,\infty)$
  $P(X \geq 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - F_X(0) = 1 - 0 = 1$

- prin metoda inversării putem simula X.

```
Function SimulExp(theta)
u=urand();
x = -theta * log(1 - u);
return x;
end
```

Obs.: În simularea unei variabile aleatoare $X \sim Exp(\theta)$ putem înlocui pe $1-u$ cu u.