Capitolul 4

Serii Fourier trigonometrice

4.1 Breviar teoretic

Definiţia 4.1.1 Fie $\omega > 0$. O serie de funcţii de forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x)\right], \ x \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

unde $a_n \in \mathbb{R}$, pentru $n \in \mathbb{N}$, respectiv $b_n \in \mathbb{R}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, se numeşte *serie trigonometrică*, iar termenul general de rang $n \in \mathbb{N}^*$ al şirului sumelor parţiale asociat acestei serii,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(\omega k x) + b_k \sin(\omega k x)\right], \ x \in \mathbb{R},$$

se numeşte *polinom trigonometric* de ordinul n.

Reamintim mai întâi că o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică dacă există $T > 0$ astfel încât

$$f(x + T) = f(x), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Cel mai mic număr real pozitiv T care verifică relaţia precedentă se numeşte *perioada principală*. În continuare, ori de câte ori ne referim la perioada unei funcţii, referirea se va face la perioada principală.

Cele mai utilizate şi cunoscute funcţii periodice sunt funcţiile trigonometrice $\cos, \sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, perioada lor principală fiind $T = 2\pi$, adică

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Figura 4.1: Funcţia $f(x) = \sin(3x)$ are perioada principală $T = 2\pi/3$.

În cele ce urmează vom presupune că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie periodică de perioadă principală T a cărei expresie analitică este dată pe un interval de lungime T, de exemplu presupunem că f este cunoscută pe un interval de forma $[a, a+T)$ sau $[a, a+T]$, $a \in \mathbb{R}$. Cum f este periodică de perioadă T, se obţine că $f(a+T) = f(a)$, adică dacă ştim valoarea funcţiei f în punctul a, vom putea determina şi valoarea lui f în $a+T$, cele două valori fiind egale.

Remarcăm faptul că graficul unei funcţii periodice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de perioadă principală T, deasupra intervalului $[a, a+T)$, de lungime T, se repetă deasupra intervalelor $[a+kT, a+(k+1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$ (vezi Fig. 4.1). De aceea, este suficient să analizăm restricţia funcţiei f pe un interval de lungime T, de exemplu pe un interval de forma $[a, a+T)$, $a \in \mathbb{R}$; oricărei funcţii f definită pe un interval de forma $[a, a+T)$ îi putem asocia o funcţie periodică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de periodă principală T, obţinută prin prelungire periodică.

Teorema 4.1.1 (Teorema lui Dirichlet) *Dacă au loc următoarele condiţii:*

- f *este mărginită pe intervalul* $[a, a+T)$,
- f *este continuă pe intervalul* $[a, a+T)$ *sau admite un număr finit de puncte de discontinuitate în acest interval, care sunt puncte de discontinuitate de speţa întâi,*
- f *este monotonă pe porţiuni pe intervalul* $[a, a+T)$,

atunci se poate defini suma unei serii trigonometrice,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x)\right], \text{ pentru } x \in [a, a+T], \tag{4.2}$$

unde $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ *şi*

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \cos(\omega n x) dx, \ n \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

respectiv

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \sin(\omega n x) dx, \ n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.4}$$

Mai mult, are loc

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & \text{dacă } x \in (a, a+T), \\ \\ \dfrac{f(a+0) + f(a+T-0)}{2}, & \text{dacă } x \in \{a, a+T\}. \end{cases}$$

În particular, dacă f este o funcţie continuă în punctul $x \in (a, a+T)$, atunci $S(x) = f(x)$.

Coeficienţii a_n şi b_n se numesc *coeficienţii Fourier* ai funcţiei f, iar seria trigonometrică corespunzătoare se numeşte *seria Fourier* asociată funcţiei f pe intervalul $[a, a+T]$.

Numărul ω se numeşte *pulsaţie.* În teoria semnalelor ω reprezintă frecvenţa unghiulară a unui semnal periodic şi se măsoară în radiani/secundă.

Dacă $f(x) = S(x)$, atunci se spune că f este *dezvoltabilă în serie Fourier* în punctul x, iar mulţimea punctelor $x \in [a, a+T]$ în care f este dezvoltabilă în serie Fourier se numeşte *domeniul de dezvoltabilitate* al funcţie f în serie Fourier, notat în cele ce urmează cu D.

Geometric, relaţia $f(x) = S(x)$, pentru $x \in D$, semnifică faptul că graficul funcţiei f pe mulţimea D este aproximat de graficul polinomului trigonometric de ordinul n corespunzător seriei Fourier asociate funcţiei f pentru n suficient de mare (vezi Fig. 4.2).

Figura 4.2: Sus (cu albastru), graficul funcţiei $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$, prelungit prin periodicitate pe intervalul $[-3\pi, 3\pi]$. Jos (cu roşu), graficele polinoamelor trigonometrice de ordinul 10, 20, 30 desenate pe intervalul $[-3\pi, 3\pi]$, asociate funcţiei $f(x) = x$.

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime simetrică faţă de origine, adică

$$x \in A \Longrightarrow -x \in A.$$

Reamintim că o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte *funcţie pară* dacă

$$f(-x) = f(x), \text{ pentru orice } x \in A,$$

respectiv *funcţie impară* dacă

$$f(-x) = -f(x), \text{ pentru orice } x \in A.$$

În cazul particular în care expresia analitică a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată pe un **interval centrat în origine**, de lungime T, adică dacă ştim expresia analitică a lui f pe intervalul $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, atunci se poate pune problema parităţii restricţiei funcţiei f pe intervalul deschis $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ sau pe intervalul închis $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, respectiv a imparităţii restricţiei funcţiei f pe intervalul deschis $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

Remarcăm faptul că nu putem vorbi, în general, de imparitatea unei funcţii periodice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de perioadă principală T, pe intervalul închis $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, căci $f\left(-\frac{T}{2}\right) = f\left(\frac{T}{2}\right) \neq -f\left(\frac{T}{2}\right)$, dacă $f\left(\frac{T}{2}\right) \neq 0$.

În condiţiile teoremei lui Dirichlet, au loc următoarele consecinţe:

Corolarul 4.1.1 *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie pară pe intervalul $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, atunci $b_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi*

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(\omega n x) dx, \; n \in \mathbb{N},$$

caz în care relaţia (4.2) *devine*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega n x), \; x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]. \tag{4.5}$$

Seria Forier corespunzătoare sumei (4.5) *se numeşte* **serie de cosinusuri**.

Corolarul 4.1.2 *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie impară pe intervalul $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$, atunci $a_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi*

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(\omega n x) dx, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

În acest caz, se obţine

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega n x), \ x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \tag{4.6}$$

iar seria Fourier corespunzătoare se numeşte **serie de sinusuri**.

Remarca 4.1.1 Dacă o funcţie $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, satisface condiţiile din teorema lui Dirichlet pe intervalul $[0, a]$, atunci f poate fi prelungită la o funcţie periodică $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de perioadă principală $T = 2a$, care este fie funcţie pară pe intervalul închis $[-a, a]$, fie funcţie impară pe intervalul deschis $(-a, a)$. În acest caz, $\widetilde{f}$ este dezvoltabilă în serie de cosinusuri, respectiv în serie de sinusuri pe o mulţime $D \subset [-a, a]$.

Prelungita prin paritate a funcţiei $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ pe intervalul $[-a, a]$ este

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in [0, a], \\ f(-x), & \text{dacă } x \in [-a, 0). \end{cases}$$

Într-adevăr, cum f este definită pe intervalul $[0, a]$ şi $\widetilde{f}$ prelungeşte funcţia f, rezultă că $\widetilde{f}(x) = f(x)$, pentru orice $x \in [0, a]$. Pe de altă parte, dacă $x \in [-a, 0)$, atunci $-x \in (0, a]$, deci

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(-(-x)) = \widetilde{f}(-x) = f(-x).$$

În relaţia precedentă ne-am folosit de paritatea funcţiei $\widetilde{f}$.

Graficul funcţiei $\widetilde{f}$ este simetric faţă de axa Oy a sistemului de axe de coordonate carteziene xOy (vezi Fig. 4.3 şi Fig. 4.4).

Prelungita prin imparitate a funcţiei $f : [0, a) \to \mathbb{R}$ pe intervalul $(-a, a)$ este

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in [0, a), \\ -f(-x), & \text{dacă } x \in (-a, 0). \end{cases}$$

Într-adevăr, pentru $x \in (-a, 0)$, folosind imparitatea funcţiei $\hat{f}$, se obţine

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(-(-x)) = -\hat{f}(-x) = -f(-x).$$

Graficul funcţiei $\hat{f}$ este simetric faţă de originea sistemului de axe de coordonate carteziene xOy (vezi Fig. 4.5).

4.2 Probleme rezolvate

Exerciţiul 1 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă principală $T = 2$ cu

$$f(x) = |x|, \text{ pentru } x \in [-1, 1].$$

a) Să se determine suma seriei Fourier corespunzătoare funcţiei f pe intervalul $[-1, 1]$ şi domeniul de dezvoltabilitate în serie Fourier a acestei funcţii.

b) Să se arate că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ şi } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soluţie. a) Verificăm mai întâi condiţiile din teorema lui Dirichlet. Cum f este continuă pe intervalul compact $[-1, 1]$, rezultă că f este mărginită pe $[-1, 1]$ (**orice funcţie continuă transformă un interval compact într-un interval compact**, în particular mărginit; în cazul nostru $f([-1, 1]) = [0, 1]$). Pe de altă parte, f este descrescătoare pe intervalul $[-1, 0]$ şi crescătoare pe $(0, 1]$, deci f este monotonă pe porţiuni pe intervalul $[-1, 1]$.

Pulsaţia este $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$. Cum $[-1, 1]$ este un interval centrat în origine, are sens să studiem paritatea funcţiei f pe acest interval. Astfel, relaţia

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x), \text{ pentru orice } x \in [-1, 1],$$

Figura 4.3: Graficul funcţiei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

implică faptul că f este o funcţie pară pe $[-1, 1]$ (graficul funcţiei f pe intervalul $[-1, 1]$ este prezentat în Fig. 4.3). Din Corolarul 4.1.1 rezultă $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, iar

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(\omega n x)\, dx = 2 \int_0^1 x \cos(\pi n x)\, dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Pentru $n = 0$ se obţine

$$a_0 = 2 \int_0^1 x\, dx = 2\, \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1,$$

iar pentru $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 x \cos(\pi n x)\, dx = 2 \int_0^1 x \left[\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]' dx \\ &= \frac{2}{\pi n} \left[x \sin(\pi n x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(\pi n x)\, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi n}\, \frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi^2 n^2} \left[\cos(\pi n) - 1\right] \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2} \left[(-1)^n - 1\right]. \end{aligned}$$

Deci, suma seriei Fourier (care, de fapt, este o serie de cosinusuri) este

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos(\pi n x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(\pi(2k-1)x),$$

pentru orice $x \in [-1, 1]$. Cum f este continuă pe $(-1, 1)$, rezultă $S(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (-1, 1)$. Pe de altă parte,

$$S(-1) = S(1) = \frac{f(-1+0) + f(1-0)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1,$$

deci $S(-1) = f(1)$ şi $S(1) = f(1)$. Astfel, am obţinut că f este dezvoltabilă în serie Fourier pe întreg intervalul $[-1, 1]$.
b) Avem că

$$S(0) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Pe de altă parte, $S(0) = f(0) = 0$, deci

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Notăm cu $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Ţinând cont de suma precedentă, se obţine

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S,$$

de unde rezultă că

$$\frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8} \iff S = \frac{\pi^2}{6},$$

ceea ce trebuia să arătăm.

$\square$

Exerciţiul 2 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică, de perioadă principală $T = 2$, a cărei restricţie pe intervalul $[0, 2)$ este

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in [0, 1], \\ 1, & x \in (1, 2). \end{cases}$$

a) Să se dezvolte funcţia f în serie Fourier şi să se determine domeniul de dezvoltabilitate.

b) Să se dezvolte restricţia funcţiei f pe intervalul $[0, 2]$ în serie de cosinusuri, respectiv în serie de sinusuri.

Remarca 4.2.1 Dacă ştim valoarea funcţiei f în punctul $x = 0$, atunci putem determina valoarea acestei funcţii şi în punctul $x = 2$, căci f este periodică de perioadă principală $T = 2$, adică $f(x + T) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, în particular, $f(2) = f(0) = -1$.

Soluţie. a) Studiem mai întâi dacă f satisface condiţiile din teorema lui Dirichlet pe intervalul $[0, 2)$. Cum

$$f([0,2)) = f([0,1]) \cup f((1,2)) = [-1,0] \cup \{1\},$$

rezultă că f este mărginită pe $[0, 2)$ (imaginea sa fiind o mulţime mărginită). Pe de altă parte, funcţia f este discontinuă doar în punctul $x_0 = 1$ şi este crescătoare pe $[0, 2)$, deci f satisface condiţiile din teorema lui Dirichlet pe $[0, 2)$.
Cum $T = 2$, rezultă $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Calculăm coeficienţii Fourier:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 f(x)\cos(\pi n x)\,dx = \int_0^1 f(x)\cos(\pi n x)\,dx + \int_1^2 f(x)\cos(\pi n x)\,dx \\ &= \int_0^1 (x^2-1)\cos(\pi n x)\,dx + \int_1^2 \cos(\pi n x)\,dx, \end{aligned}$$

care, în cazul particular $n = 0$, devine

$$a_0 = \int_0^1 x^2 - 1\,dx + \int_1^2 1\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_0^1 + x\Big|_1^2 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3},$$

iar pentru $n \in \mathbb{N}^*$, se obţine

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 (x^2-1)\left(\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right)' dx + \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{\pi n}\left[(x^2-1)\sin(\pi n x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2x\sin(\pi n x)\,dx\right] + \frac{1}{\pi n}\left[\sin(2\pi n) - \sin(\pi n)\right] \\ &= -\frac{2}{\pi n}\int_0^1 x\left(-\frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\right)' dx = \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[x\cos(\pi n x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos(\pi n x)\,dx\right] \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\Big|_0^1\right] = \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}, \end{aligned}$$

respectiv

$$
\begin{aligned}
b_n &= \int_0^2 f(x)\sin(\pi nx)\,dx = \int_0^1 (x^2-1)\sin(\pi nx)\,dx + \int_1^2 \sin(\pi nx)\,dx \\
&= \int_0^1 (x^2-1)\left(-\frac{\cos(\pi nx)}{\pi n}\right)' dx - \frac{\cos(\pi nx)}{\pi n}\Big|_1^2 \\
&= -\frac{1}{\pi n}\left[(x^2-1)\cos(\pi nx)\Big|_0^1 - \int_0^1 2x\cos(\pi nx)\,dx\right] - \frac{1}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right] \\
&= -\frac{1}{\pi n}\left[1 - 2\int_0^1 x\left(\frac{\sin(\pi nx)}{\pi n}\right)' dx\right] - \frac{1}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right] \\
&= -\frac{1}{\pi n} + \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[x\sin(\pi nx)\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(\pi nx)\,dx\right] + \frac{1}{\pi n}\left[(-1)^n-1\right] \\
&= -\frac{1}{\pi n} + \frac{2}{\pi^2 n^2}\,\frac{\cos(\pi nx)}{\pi n}\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi n}\left[(-1)^n-1\right] \\
&= -\frac{1}{\pi n} + \frac{2}{\pi^3 n^3}\left[(-1)^n-1\right] + \frac{1}{\pi n}\left[(-1)^n-1\right] \\
&= \frac{2}{\pi^3 n^3}\left[(-1)^n-1\right] - \frac{2}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

Suma seriei Fourier trigonometrice este

$$
S(x) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(\pi nx) + b_n\sin(\pi nx)\right],
$$

pentru orice $x \in [0,2]$, unde coeficienţii Fourier a_n, b_n sunt determinaţi mai sus. Cum f este continuă pe intervalul $(0,1)\cup(1,2)$, rezultă că $S(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (0,1)\cup(1,2)$. Pe de altă parte, avem

$$
S(1) = \frac{f(1-0)+f(1+0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(1),
$$

respectiv

$$
S(0) = S(2) = \frac{f(0+0)+f(2-0)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 \neq -1 = f(0) = f(2),
$$

deci f este dezvoltabilă în serie Fourier pe $(0,1)\cup(1,2)$.

Figura 4.4: Graficul funcţiei $\widetilde{f}$ pe intervalul $(-2, 2)$ (graficul funcţiei iniţiale pe intervalul $[0, 2)$ este colorat cu albastru, iar a restricţiei prelungitei pe intervalul (-2, 0] este desenat cu roşu).

b) Pentru a obţine o serie de cosinusuri corespunzătoare restricţiei funcţiei f pe intervalul $[0, 2]$, prelungim această funcţie prin paritate pe intervalul $[-2, 2]$ (vezi Fig. 4.4) şi apoi extindem funcţia obţinută prin periodicitate, de perioadă principală $T = 4$, pe întreaga axă reală, $\mathbb{R}$. Obţinem astfel funcţia $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a cărei restricţie pe intervalul $[-2, 2]$ este definită prin

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in [-1, 1], \\ \ \ 1, & x \in (-2, -1) \cup (1, 2), \\ -1, & x \in \{-2, 2\}. \end{cases}$$

Într-adevăr, pentru $x \in [-1, 0)$, rezultă că $-x \in (0, 1]$, iar din paritatea funcţiei $\widetilde{f}$ pe intervalul $[-2, 2]$ se obţine

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(-(-x)) = \widetilde{f}(-x) = f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1.$$

Dacă $x \in (-2, -1)$, atunci

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(-(-x)) = \widetilde{f}(-x) = f(-x) = 1,$$

iar $\widetilde{f}(-2) = \widetilde{f}(2) = f(2) = -1$.

Figura 4.5: Graficul funcţiei $\hat{f}$ pe intervalul $(-2,2)$ (graficul funcţiei f pe $[0,2)$ este colorat cu albastru, iar a restricţiei prelungitei pe intervalul (-2, 0] cu roşu).

Pulsaţia corespunzătoare perioadei $T=4$ este $\omega=\frac{\pi}{2}$. Mai mult, cum $\widetilde{f}$ este o funcţie pară pe intervalul $[-2,2]$ rezultă că $b_n=0$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, respectiv

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\widetilde{f}(x)\cos\frac{\pi nx}{2}\,dx=\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}\,dx,\ n\in\mathbb{N}.$$

Pentru a obţine o serie de sinusuri, prelungim mai întâi restricţia funcţiei f pe intervalul $[0,2)$ prin imparitate pe intervalul $(-2,2)$ (vezi Fig. 4.5). Obţinem astfel funcţia $\hat{f}:(-2,2)\to\mathbb{R}$, definită prin

$$\hat{f}(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-2,-1),\\ 1-x^2, & x\in[-1,0),\\ x^2-1, & x\in[0,1],\\ \ \ 1, & x\in(1,2),\end{cases}$$

pe care o extindem pe intervalul $[-2,2]$ considerând $\hat{f}(-2)=\hat{f}(2)=f(2)=-1$. Această funcţie o extindem apoi prin periodicitate, de perioadă principală $T=4$, pe întreaga axă reală. Cum $\hat{f}$ este o funcţie impară pe intervalul $(-2,2)$, rezultă că $a_n=0$ pentru $n\in\mathbb{N}$, respectiv

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\hat{f}(x)\sin\frac{\pi nx}{2}\,dx=\int_0^2 f(x)\sin\frac{\pi nx}{2}\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

□

4.3 Probleme propuse

Exerciţiul 1 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică, de perioadă principală $T = \pi$, a cărei restricţie este

$$f(x) = x + 1, \text{ pentru } x \in [0, \pi).$$

Se cere:

a) Să se dezvolte funcţia f în serie Fourier.

b) Să se dezvolte restricţia funcţiei f pe intervalul $[0, \pi]$ în serie de cosinusuri, respectiv în serie de sinusuri.

c) Să se calculeze sumele următoarelor serii numerice:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Exerciţiul 2 Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de perioadă principală $T = 2\pi$, a cărei restricţie pe intervalul $[0, 2\pi]$ este

$$f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$$

şi apoi să se calculeze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}.$$

Exerciţiul 3 Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de perioadă principală $T = 2\pi$, unde

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0], \\ 1, & x \in (0, \pi), \end{cases}$

b) $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$,

c) $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi)$,

şi să se determine domeniul de dezvoltabilitate.