26.09.2023

Analiză matematică
(curs S1)

Bibliografie

1. Analiză matematică - șiruri și serii - L. Cădariu, N. Lupa, L. Manolescu
Ed. Politehnica, 2019

2. Probleme de matematică - calcul diferențial - P. Găvruță, D. Dăianu, L. Cădariu, S.A., Ed. Mirton, 2004

Capitolul 1. Șiruri și serii numerice

1. Șiruri numerice

Un șir de numere reale este o funcție $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui număr natural n numărul real x_n.

$x(n) \overset{not}{=} x_n$; $(x_n)_{n\geq 0} \to$ termenul general

$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$

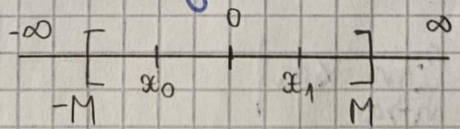
dar și $(x_n)_{n \geq n_0}$, unde $n_0 \in \mathbb{N}$ este fixat

ex: $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$y_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \geq 1$

Definiții

1. Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit dacă $\exists M>0$ a.î. $|x_n| \leq M, \forall n \geq 0$.



2. Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător dacă $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \geq 0$.

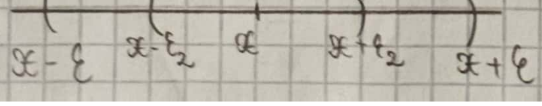
3. Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent la $x \in \mathbb{R}$ dacă $(\forall) \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon)$.

$-\varepsilon < x_n - x < \varepsilon$

$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$

* dacă $\exists x \to$ este unic și egal cu lim. șir

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$ (convergent)



ε - foarte mic (10^{-6}) $N(\varepsilon)$ - ran

Exemple: $x_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$ $\to$ mărginit pt. că $|\sin n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

dar $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ $\to$ nemărginit căci $\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $n > M$, pt. orice $M >$
$(|x_n| > M)$

$x_n = \{\sqrt{n}\}$ - mărginit $0 \leq x_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

dar $x_n = [\sqrt{n}]$, $n \in \mathbb{N}$ - mărginit inferior $0 \leq x_n$

dar $x_n = [\sqrt{n}] > \sqrt{n} - 1 \geq b$

Remarcă: Pentru a demonstra că un șir (x_n) converge la x este suficient să arătăm că pt. orice $\varepsilon \in (0, \underbrace{\varepsilon_0}_{\text{constantă} \in \mathbb{R}_+})$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î.

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x$$

① $x_n = \frac{n}{3n+5}$ converge la $\frac{1}{3}$, $\varepsilon \in (0, \frac{5}{6}]$

$$\left|\frac{n}{3n+5} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{3(3n+5)} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow n_0 = \left[\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)\right] + 1 \\ &\varepsilon \in \left(0, \frac{5}{6}\right] \text{ și } [x] \leq x \leq [x] + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right) \geq -1 \Rightarrow n_0 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{și } n > \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)$$

$\Rightarrow$ ceea ce trebuia demonstrat

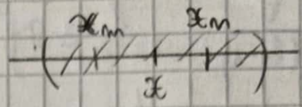
$$\lim_{n \to \infty} |x_n| = \left|\lim_{n \to \infty} x_n\right|$$

$$x_n \to 0 \Leftrightarrow |x_n| \to 0$$

Prop. Orice șir convergent este mărginit.
Reciproca nu este adevărată.

Analiză matematică (curs S2)

03.10.2023



$\varepsilon_1 \quad N(\varepsilon_1)$; $\varepsilon_2 \quad N(\varepsilon_2)$

$x_{N(\varepsilon_1)}$

$$x_n = \frac{P_k(n)}{Q_s(n)} = \frac{a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0}{b_s n^s + \ldots + b_1 s + b_0}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^4 + n}{-n^3 + 1} = -\infty$$

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e \in (2, 3)$$

$\downarrow$
Euler

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 0$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n = c \approx 0{,}1 \text{ (Euler)}$$

$|x_m - x_n| < \varepsilon \to 10^{-6}$ (de ex.) $\forall m, n > N(\varepsilon)$

Teoremă: Orice șir monoton și mărginit este convergent.

! În general, reciproca nu este adevărată.

de ex: $(x_n)_{n \geq 0} = \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$(x_n)_{n \geq 0}$ nu este monoton

Definiție: Șirul numeric $(x_n)_{n \geq 0}$. Șirul x_n se numește „șir Cauchy"/„șir fundamental" dacă $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N(\varepsilon)$

sau a.î. $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \forall p \geq 1, \forall n \geq N(\varepsilon)$

Teoremă (Criteriul general de convergență a lui Cauchy)

Un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ este Cauchy $\Leftrightarrow$ (x_n) = șir convergent

Propoziția 1: Orice șir Cauchy este mărginit.

Propoziția 2: Orice șir mărginit conține un subșir convergent.

ex: $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$ este convergent

Propoziția 3: Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este Cauchy dacă $\exists (a_n)_{n \geq 0}$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq 1$, $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$$\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k(k-1)}, \ k \in \mathbb{N}^*$$

$$|x_{n+p} - x_n| \le \frac{1}{(n+1)n} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \le \frac{1}{n} \overset{Not}{=} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Cum $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \overset{P_3}{\Rightarrow} (x_n)_{n\ge 0}$ = şir Cauchy

$\overset{T}{\Rightarrow} (x_n)_{n\ge0}$ = şir convergent

- $(x_n) = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$

$(y_n) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$

? x_n, y_n sunt mărg $\Rightarrow$ rezolvare pe foi

Remarcă $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ – convergent pt că $|x_n| = \frac{1}{n} \to 0 \to x_n \to 0$

– dar nu e monoton

Lema lui Newmann

Orice şir de numere reale conţine un subşir monoton

Teorema lui Bolzano-Weierstrass

Orice şir mărginit conţine un subşir convergent.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $\exists (x_n) \subset \mathbb{Q}$ şi $(y_n) \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a.î. $x_n \to x$ şi $y_n \to x$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^r - 1}{x_n} = r, \ r \in \mathbb{R}$$

$$x_n \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\cos x \sin\frac{x}{2} + \dots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right) = \qquad \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{-x}{2} + \sin\frac{5x}{2} + \sin\frac{-3x}{2} + \sin\frac{7x}{2} + \sin\frac{-5x}{2} + \dots\right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{x}{2}+nx\right) + \sin\left(\frac{x}{2}-nx\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sin\frac{x}{2}} \cdot \cancel{2}\sin\frac{(2n+1-1)x}{4} \cdot \cos\frac{(2n+1+1)x}{4} =$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

$$2\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{A+B}{2} = \cos A - \cos B$$

$$y_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx =$$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}(y_n) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cancel{\cos\frac{3x}{2}} + \cancel{\cos\frac{3x}{2}} - \cancel{\cos\frac{5x}{2}} + \dots +\right.$$

$$\left. + \cancel{\cos\frac{\overset{x(2n-1)}{2nx-x}}{2}} - \cos\frac{2nx+x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x(2n+1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sin\frac{x}{2}}\cancel{2}\sin\frac{2nx+\cancel{x}-\cancel{x}}{4} \cdot \sin\frac{2nx+x+x}{4} =$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{x(n+1)}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| \le 1$$

$(x_n) = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$

$(y_n) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$

x_n, y_n sunt mărg.

Moivre $z^n = (\cos\alpha + i \sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$

$$x_n + i y_n = (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx) =$$

$$= \cos x + i \sin x + (\cos x + i \sin x)^2 + \dots + (\cos x + i \sin x)^n =$$

$$= (\cos x + i \sin x) \frac{(\cos x + i \sin x)^n - 1}{\cos x + i \sin x - 1}$$

$\sin x = 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}$

$\cos x - 1 = \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2}$

$(\cos A + i \sin A)(\cos B + i \sin B) = \cos A+B + i \sin A+B$

$\frac{(2n-2)x + x}{2}$ $\frac{(2n-1)x}{2}$

$$i S_2 \rightarrow S_2 = \frac{\sin\frac{nx}{2} \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Analiză matematică
(curs 3 - S3)

10.10.2023

Serii numerice

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ = șir numeric

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

x_n → termenul general al seriei

Def 1: Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n, x \in \mathbb{R}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + \dots + x_n \rightarrow \text{șirul sumelor parțiale}$$

Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ e convergentă dacă șirul sumelor parțiale S_n / $(x_n)_{n\geq 0}$ e convergent, adică $\exists\ S \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Dacă $\exists$ limită pt S_n, ea se numește suma seriei $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ și se notează cu $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$.

Seria geometrică

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$, $r \in \mathbb{R}$ este convergentă $\Leftrightarrow r \in (-1, 1)$

În caz de convergență, suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ $(r \neq 1)$

Pt $r = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1^n$ - divergent

Pt $r \neq 1$ $\quad S_n = 1 + r + \dots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}, r \neq 1$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \text{nu există}, & r \leq -1 \\ \infty, & r > 1 \end{cases}$

Propoziția 1: Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă $\Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Demonstrație:

Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergent $\overset{def}{\Rightarrow} \underset{x_0+x_1+\dots+x_n}{\overset{\shortparallel}{(S_n)_{n\geq 0}}}$ converge la $S \in \mathbb{R}$

Evident și $(S_{n-1})_{n\geq 0}$ converge la S

Dar $x_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = S - S = 0$

(Crit. de divergență)

Propoziția 2: Dacă $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ sau nu are limită atunci seria $\sum x_n$ - divergentă.

ex: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\infty}$ - divergentă

Seria armonică generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{convergentă}, & p > 1 \\ \text{divergentă}, & p \leq 1 \end{cases}$$

$\left\{ S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \right.$

$\left\{ \text{în contradicție cu } S_{2n} - S_n \to 0 \right.$

Criterial general de convergență a lui Cauchy

O serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î.

$\overset{def}{\Leftrightarrow} (S_n)_{n\geq 0}$ - convergentă $\Leftrightarrow (S_n)_{n\geq 0}$ Cauchy $\Leftrightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \geq N$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$

O serie se numește absolut convergentă dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă.

Orice serie absolut convergentă este convergentă

Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

$(x_n) \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow S_n$ - crescător $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă $\Leftrightarrow S_n$ - mărginit superior

S_n poate fi sumă finită (mărg. sup) sau ∞ (S_n - nemărginit).

1. Criteriul comparației

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$; $x_n, y_n \geq 0$

Presupunem că $\exists\, c > 0$ a. î. $x_n \leq c \cdot y_n$, $\forall n$

Dacă: a) $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ - convergentă $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă

b) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ - divergentă

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{1}{2n^3+1}}^{x_n} = ?$$

$$\underbrace{\frac{1}{2n^3+1}}_{x_n} \leq \overbrace{\frac{1}{n^3}}^{y_n}$$

Știm $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ - convergentă $\xrightarrow{\text{crt. comp}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă

(serie armonică)

2. Criteriul comparației la limită

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$; $x_n, y_n > 0$

Calculăm $l = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n}$ (și trebuie să aparțină) $\in [0, \infty)$

Dacă:

a) $l \in (0, \infty) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ (au aceeași natură)

b) $l = 0$ și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ - convergentă

c) $l = \infty$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ - divergentă $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

ex: $x_n = \frac{n^{\frac{7}{3}}+1}{n^{\frac{43}{11}}+2}$; Fie $y_n = \frac{1}{n^{\frac{43}{11}-\frac{7}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{52}{33}}} \xrightarrow[\text{știm}]{\text{serie}} \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ - convergentă

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\frac{43}{11}} + n^{\frac{52}{33}}}{n^{\frac{43}{11}}+2} = 1 \xrightarrow[\text{la limită}]{\text{crt. comp}} \underbrace{\sum x_n \sim \sum y_n}_{\text{convergente}}$$

3. Criteriul raportului a lui D'Alembert

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n > 0$

Calculăm $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

Dacă: a) $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă

b) $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

c) $l = 1$ criteriul raportului nu decide natura seriei

ex: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} \to$ divergentă (pt. că $x_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

sau $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cancel{!}}{2^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{n!}} = \infty \overset{\text{crit.}}{\underset{\text{rap}}{\Rightarrow}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = 0 < 1 \overset{\text{crit}}{\underset{\text{rap}}{\Rightarrow}} \sum^{\infty} x_n$ - convergentă

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, $a > 0$

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\cancel{n+1}} (\cancel{n+1})!}{(n+1)^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{a^n}\, \cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} a \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n =$

$= a \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{-n}\right]^{\frac{-n}{n}} = a \cdot e^{-1} = \frac{a}{e}$

4. Criteriul lui Raabe-Duhamel (mai puternic decât criteriul raportului; se aplică când $l=1$)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n>0$

Calculăm $l=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)$

Dacă: a) $l<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

b) $l>1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă

c) $l=1$ natura seriei nu poate fi determinată cu acest criteriu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2n+2}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$l=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\xrightarrow[R-D]{crt.} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ - divergentă}$$

5. Criteriul rădăcinii (radicalului)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n>0$

Calculăm $l=\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$

Dacă: a) $l<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă

b) $l>1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

c) $l=1$ criteriul rădăcinii nu determină natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n^2},\ a>0$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-a}{n}\right)^{n} \overset{1^\infty}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-a}{n}\right)^{inv}\right]^{\frac{-an}{n}} = e^{-a} = \frac{1}{e^a} < 1 \ (a>0)$$

$$\xrightarrow[răd]{crt} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ - convergentă}$$

6. Criteriul de condensare al lui Cauchy

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n > 0$ și $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (descrescător)

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 8/49 (a)

$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \cancel{2^n} \frac{\ln 2^n}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=2}^{\infty} n \ln 2 = \ln 2 \sum_{n=2}^{\infty} n$

dar $\sum_{n=2}^{\infty} n$ - divergentă ($a_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

$\Rightarrow \ln 2 \sum_{n=2}^{\infty} n$ - div. $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ - div $\xRightarrow{\text{condensare}} \sum_{n=2}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n}$

Analiză matematică

17.10.2023

(curs 4 - S4)

Seria armonică generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{convergentă}, & p > 1 \\ \text{divergentă}, & p \le 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{n} \to$ div

$\frac{1}{n^2} \to$ conv.

(cazul 1) $p \le 0$ șirul $x_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ - divergentă

(cazul 2) $p > 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \xRightarrow[\text{Cauchy}]{\text{condensare}} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{np}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{2^{1-p}}_{q}\right)^n$ - convergentă (doar pt $p > 1$)

pt. $q = 2^{1-p}$ $\quad 2^{1-p} < 1 = 2^0 \Leftrightarrow 1-p < 0 \Leftrightarrow p > 1$

Seria geometrică

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ - convergentă pt $q \in (-1, 1)$

Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

1. Criteriul raportului

(x_n) șir de numere reale nenule a.î.

$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = l \in [0,\infty)$

a) $l<1$ atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - absolut convergentă

b) $l>1$ atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

2. Criteriul rădăcinii

$(x_n) > 0$ a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = l \in [0,\infty)$

a) $l<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - absolut convergentă

b) $l>1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

3. Criteriul lui Leibniz (serii alternante)

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$

Dacă $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$ - convergentă

ex: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$ - convergentă

+ Seria armonică alternantă

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \text{ - conv.}$$

este o serie semi-convergentă căci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1} \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ - divergentă}$$

a_n conv + $|a_n|$ conv $\rightarrow$ serie absolut convergentă

4. Criteriul lui Dirichlet

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n$, $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ - șiruri cu urm. proprietăți:

a) $u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (șir descrescător de nr. $\mathbb{R}_+$ care tinde la 0)

b) $t_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ - mărginit $\quad t_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \to (-1)^k$

șirul sumelor parțiale

$\Leftrightarrow \exists\, M \in \mathbb{R}_+^*$ a.î. $|t_n| \leq M \; (\forall) n \in \mathbb{N}$

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n$ - convergentă

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \searrow_{n\to\infty} 0 \quad (1)$$

$$\alpha_n = \sin(nx)$$

$$|t_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right| \overset{x\neq 2k\pi}{\leq} \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \overset{not}{=} M$$

$\Rightarrow (t_n)_{n\geq 0}$ - șir mărginit (2)

$$\xrightarrow[\text{Crt. Dirichlet}]{\text{din } (1),(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \text{ - convergentă}$$

5. Criteriul lui Abel

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n$

Dacă: a) (α_n) - șir cu proprietatea că $\sum_n \alpha_n$ - convergentă

b) (u_n) șir de nr. reale monoton și mărginit

Atunci seria $\sum_n \alpha_n u_n$ - convergentă

Scanat cu CamScanner

Capitolul 2. Șiruri și serii de funcții

§ 1. Șiruri de funcții

$$\underbrace{f_n(x)}_{f(n,x)} = x^n \xrightarrow[x \in [0,1]]{n \to \infty} \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{extinde}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

$$a_n \xrightarrow{\text{extinde}} f_n(x)$$

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Def: Fie $f_n, f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Șirul de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplu la funcția f dacă

$\exists\, \varepsilon > 0, \forall x \in D \ \exists\, N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon, x)$

notație: $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{S} f, \forall x \in D$

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow{S} f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Def 2: Șirul $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniform la funcția $f \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in D, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon, x)$

ex: $f_n(x) = x^n$, $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{u} f(x) = 0$$

Convergența uniformă implică convergența simplă. Reciproca NU este adevărată.

Propoziția 1 Fie $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{S} f$ pe mulțimea D

$$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f \Leftrightarrow (\forall) x_n \in D \ |f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Propoziția (2) Dacă $\exists\ (x_n) \in B$ a.î. $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ atunci f_n nu converge uniform la f pe mulțimea B.

$$f_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{u} f$$

ex: $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{S} f(x) = x$$

$f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

(?) $x_n = ?$ a.î. $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \frac{nx}{n+x} - x \right| = \frac{x^2}{n+x}$$

$$x_n = n \in [0,\infty) \Rightarrow |f_n(n) - f(n)| = \frac{n^2}{2n} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$f_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{u} f$$

S7 - lucrare seminar

Analiză matematică (curs 5 - S5)

24.10.2023

Criteriul majorării

Fie $f_n, f : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}_+$ a.î. (sir numeric)

(i) $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \forall n, \forall x \in B$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Transfer de proprietăți de la $(f_n)_{n\geq 0}$ la f pt. conv. uniform.

1. Transfer de trecere la limită

Fie $(f_n)_n$ - sir de funcții, $f_n : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in B'$ (mulțimea pct. de acumulare; punct de acumulare)

Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ și $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$, atunci șirul numeric $(l_n)_{n\geq 0}$ este conv. și

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

2. Transfer de continuitate

Fie $f_n : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $f : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe B

Dacă $(f_n)_{n\geq 0}$ este un șir de funcții continue pe B atunci f - continuă pe B.

ex: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

M.R.A.: $\left.\begin{array}{l} \text{Pp. că } f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f \text{ pe } [0,1] \\ \text{Dar } f_n(x) = x^n \text{ - continuă pe } [0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow f$ - cont pe $[0,1]$ (F)

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u}\!\!\!\!\!\!\!/\;\; f$

3. Transfer de derivabilitate

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ șir de funcții derivabile pe $B \subset \mathbb{R}$.

Dacă există două funcții f, g definite pe $B \subset \mathbb{R}$ a.î.

(i) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe B

(ii) $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{u} g$ pe B

Atunci f este derivabilă pe B și $f' = g$, adică $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

4. Transfer de integrabilitate

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ șir de funcții integrabile pe $[a, b]$

Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe $[a,b]$ atunci f integrabilă pe $[a,b]$ și

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$$

Serii de funcții

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ șir de funcții. Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \quad \text{pt } x \in B$$

se numește serie de funcții cu termenul general f_n.

$f_n(x) = x^n$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

Fie $x_0 \in B$ a.î. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ - convergentă.

$\Rightarrow x_0$ - punct de convergență

C = mulțimea tuturor punctelor de convergență pt seria $\sum f_n(x)$

pt. $\sum f_n(x) - \sum x^n \qquad C = (-1, 1)$

$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$

Def 1: Seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este simplu convergentă pe mulțimea $C \subset D$, dacă șirul de funcții $S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$ este simplu convergent pe mulțimea C.

În plus: $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$, $x \in C$

$\parallel$ suma seriei, $S : C \subset D \to \mathbb{R}$

Def 2: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ (converge) este uniform convergentă pe mulțimea C dacă $S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{u} S(x)$, $\forall x \in C$

Criteriul lui Weierstrass

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in D$

Dacă $\exists (a_n)_{n\geq 0}$ un șir numeric și

(i) $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall x \in D$, $\forall n \geq n_0$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ = convergentă,

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ - uniform convergentă pe D

ex: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3+1}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\left| f_n(x) \right| = \left| \frac{\sin nx}{n^3+1} \right| \leq \frac{1}{n^3+1} \overset{not}{=} a_n$$

$$\sum \frac{1}{n^3+1} \text{ conv } \overset{\text{Weierstrass}}{\Longrightarrow} \sum \frac{\sin(nx)}{n^3+1} \text{ - u. conv.}$$

Scanat cu CamScanner

Proprietăți ale seriilor de funcții

① Transfer de limită

pct. de acumulare

Fie $f_n : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un șir de funcții și $x_0 \in B'$

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe $C \subset B$ și are suma funcția $S(x)$ atunci seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} S_n(x) \right)$ este convergentă și are suma $\lim_{x \to x_0} S(x)$. În plus, putem scrie că are loc relația

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} S_n(x) \right)$$

② Transfer de continuitate

Fie $f_n : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un șir de funcții continue pe B.

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ uniform convergentă pe $C \subset B$

Atunci suma seriei de funcții $S(x)$ este o funcție continuă pe $C \subset B$.

Analiză matematică 31.10.2023

(curs 6 - S 6)

3. Transfer de derivabilitate

Fie $f_n : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un șir de funcții derivabile. Dacă:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este u.c. pe B, având suma f $S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{u} f(x)$
la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ este u.c. pe B la $g : B \to \mathbb{R}$, având suma g $S'_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{u} g(x)$

atunci avem că f - derivabilă pe B și $f' = g$

adică $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$, $\forall x \in B$

4. Transfer de integrabilitate

Fie $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ un șir de funcții integrabile

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este u.c. pe $[a,b]$ având suma funcția $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f, atunci f este integrabilă pe $[a,b]$ și are loc relația:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\, dx \right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Scanat cu CamScanner

Serii de puteri

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ - șir numeric și $x_0 \in B \subset \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

centrată în x_0

este o serie de puteri, unde:

$(a_n)_{n\geq 0}$ șir de numere reale

cu coeficient de rang n al seriei, $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n \qquad a_0 = 1, \ a_1 = \frac{1}{2}, \dots, a_n = \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{2n} = \overset{a_0}{1 \cdot x^0} + \overset{a_2}{\frac{1}{2} x^2} + \overset{a_4}{\frac{1}{3} x^4} + \dots$$

$a_7 = 0$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin x + n\frac{\pi}{2}$$

$$\sin x' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin x'' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \sin x + \pi$$

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $x_0 \in B \subset \mathbb{R}$ o serie de puteri

$C = \{x \in B$ pt. care $a_n(x-x_0)^n$ este convergentă$\}$

Seria geometrică: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $C = (-1, 1)$

$$S_n(x) = 1 + x + \dots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \xrightarrow[n\to\infty]{x\in(-1,1)} \frac{1}{1-x}$$

C = mulțime de convergență a seriei de puteri

Orice serie de puteri centrată în x_0 e conv. în $x_0 \Rightarrow x_0 \in C$

$S(x_0) = x_0$

S7. Am

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{x}^n}{n} = S(x)$$

$C = [-1,1)$

$(-1,1)$

$S'(x) = \sum x^{n-1} = 1 + \dots + x + \dots = \frac{1}{1-x}, x \in (-$

$\Rightarrow S(x) = \int \frac{1}{1-x} dx, x \in (-1,1)$

Serii de puteri

T_2 - Abel

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ o serie de puteri cu raza de convergentă $R \in (0,\infty)$

Dacă seria de puteri este convergentă în pct $x_0 - R$, respectiv $x_0 + R$, atunci suma seriei

$$S(x) = \sum_{n=0}^{x} a_n (x-x_0)^n \qquad S(-1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > -1}} S(x)$$

este o funcție continuă în punctele $x_0 - R$, respectiv $x_0 + R$

pag. 102

Serii Taylor $f(x) \cong T_n f(x)$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2-i^2} = \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right) \cdot \frac{1}{2i}$$

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x^2-i^2}\right)^{n-1} = \left[\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)\frac{1}{2i}\right]^{n-1}$$

Fie $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ a.î. f = derivabilă de $n \in \mathbb{N}^*$ ori în pct x_0.

$$(T_n f)(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

↳ funcție polinomială

se numește Polinomul Taylor de gradul n asociat funcției f în punctul x_0

Scanat cu CamScanner

Teorema urm. exprimă leg. între o funcție f și suma seriei Taylor centrate în x_0 asociate funcției f.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

când ? ||
$f(x)$

T: Funcția $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dezvoltată în serie Taylor în pct. x_0 $\in B \cap I \iff$ Șirul de funcții $(R_n f)_{n\geq 0}$ este Restul Taylor asociat fct. f în pct x_0 convergent la $\overset{?}{0}$ pe B

$$\lim_{n\to\infty} (R_n f)(x) = 0$$

! dacă restu tinde la 0 → dezvoltăm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$\ln(1+x) = g(x)$ o dezvl până la $n=2$

$$\ln(1+x) = 0 + 1\frac{x}{1!} + 0\frac{x^2}{2!} + \boxed{}\frac{x^3}{3!}$$

(S8) AM

curs

dez. Mac-Laurin sin, cos, sh, ch

TI Abel

Fi $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$

i) Dezv. f în serie Taylor pt $x=0$ (Mac-Laurin)

$$f(x)=\ln(1+x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad, |x|<1$$

f - se obține prin integrare

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(\sum(-1)^n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \quad, |x|<1$$

ii) Dezv. în serie Taylor în $x=-2$

$$\frac{1}{1-y}=\sum_{n=0}^{\infty}y^n \quad, |y|<1$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{(x+2)-1}=-\frac{1}{1-(x+2)}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n \quad, |x+2|<1 \iff -3<x<-1$$

$\Rightarrow$ nu există dezvoltarea

(f nu poate fi dezvoltat în serie)

$$f(x)=\frac{1}{4-x^2} \qquad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad x_0=-1$$

$$f(x)=\frac{1}{(2-x)(2+x)}=\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}\right)\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{3(x+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+1}{3}} \longrightarrow I_1$$

$$\frac{1}{2+x} \longrightarrow I_2$$

$I_1, I_2 \overset{\cap (-2,2)}{\Longrightarrow}$

$$g(x)=\operatorname{arctg}x \qquad g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1) \rightarrow (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

dezv. seria binomială

$\downarrow$

la grad

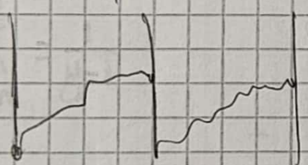
$$\frac{12\ln x + 3x^4 - 16x^3 + 36x^2 - 48x + 25}{(x-1)^5}$$

$x-1=y \quad x=y+1$

Seria binomială

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$$

$x \in (-1,1)$



Serii Fourier trigonometrice (SFT)

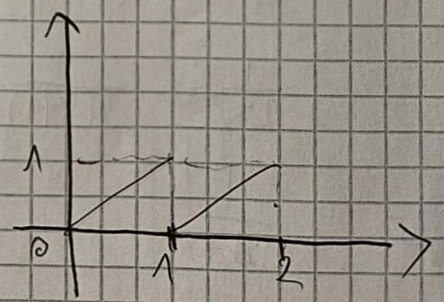
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x) \right) = S(x)$$

Forma generală a unei SFT $\quad a_k, k=\overline{0,n}$, $b_k, k=\overline{1,n}$ s.n. coef. SFT

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f - periodică pe $\mathbb{R}$, de perioadă T

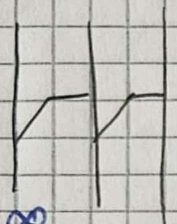
$f(x+T) = f(x), \forall x$

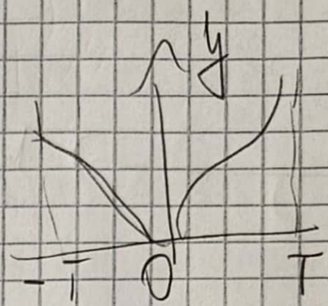


$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(w n x)\,dx \quad , n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(w n x)$$

$$w = \frac{2\pi}{T}$$





$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S = \frac{\pi^2}{6}$$

Teorema lui Dirichlet

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, periodică, de perioada $T>0$

Dacă i) f este mărginită pe $[a, a+T] \subset \mathbb{R}$

ii) f este monotonă pe porțiuni $[a, a+T)$

iii) f este continuă sau are un nr finit de puncte de discontinuitate de speța I pe $[a, a+T]$

atunci f este dezvoltabilă în SFT de forma ~~trigo~~:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(w n x) + b_n \sin(w n x)\right)$$

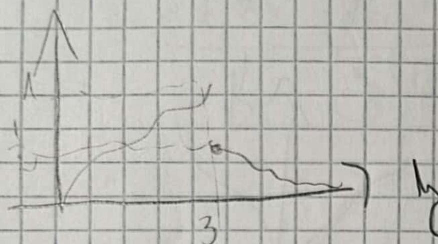
$$w = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos(w n x)\,dx \quad , n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\sin(w n x)\,dx$$

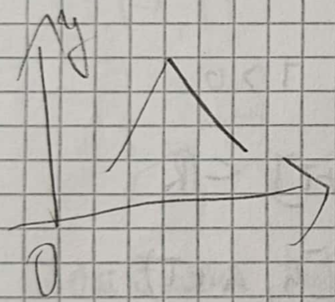
În plus:

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x = \text{pct. de cont.} \\ \dfrac{f_s(x) + f_d(x)}{2}, & x = \text{pct. de disc. de speța I} \end{cases}$$



$f_s\left(\frac{3}{2}\right) = 1^{\frac{3}{2}}$

$f_d\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$



cont dar nu deriv.

$f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$

$y - y_0 = f_s(x - x_0)$