26.09.2023

Analiză matematică
(curs S1)

Bibliografie

1. Analiză matematică - șiruri și serii - L. Cădariu, N. Lupa, L. Manolescu, Ed. Politehnica, 2019
2. Probleme de matematică - calcul diferențial - P. Găvruță, D. Dăianu, L. Cădariu, S.A., Ed. Mirton, 2004

Capitolul 1. Șiruri și serii numerice

1. Șiruri numerice

Un șir de numere reale este o funcție $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui număr natural n numărul real x_n.

$x(n) \overset{not}{=} x_n$; $(x_n)_{n\geq 0} \to$ termenul general

$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$

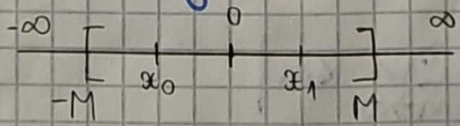
dar și $(x_n)_{n \geq n_0}$, unde $n_0 \in \mathbb{N}$ este fixat

ex: $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$y_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \geq 1$

Definiții

1. Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit dacă $\exists M>0$ a.î. $|x_n| \leq M, \forall n \geq 0$.

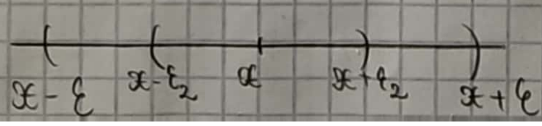


2. Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător dacă $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \geq 0$.

3. Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent la $x \in \mathbb{R}$ dacă $(\forall)\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon)$.

$-\varepsilon < x_n - x < \varepsilon$

$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$



* dacă $\exists x \to$ este unic și egal cu lim. șir.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$ (convergent)

ε - foarte mic (10^{-6}) $N(\varepsilon)$ - rang

Exemple: $x_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$ $\to$ mărginit pt. că $|\sin n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

dar $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ $\to$ nemărginit căci $\exists\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $n > M$, pt. orice $M > 0$
$(|x_n| > M)$

$x_n = \{\sqrt{n}\}$ - mărginit $\quad 0 \leq x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$

dar $x_n = [\sqrt{n}]$, $n \in \mathbb{N}$ - mărginit inferior $0 \leq x_n$
dar $\quad x_n = [\sqrt{n}] > \sqrt{n} - 1 \geq b$

Remarcă: Pentru a demonstra că un șir (x_n) converge la x este suficient să arătăm că pt. orice $\varepsilon \in (0, \underbrace{\varepsilon_0}_{\text{constantă} \in \mathbb{R}_+})$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î.

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x$$

(1) $\quad x_n = \frac{n}{3n+5}$ converge la $\frac{1}{3}$, $\quad \varepsilon \in \left(0, \frac{5}{6}\right]$

$$\left|\frac{n}{3n+5} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{3(3n+5)} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow n_0 = \left[\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)\right] + 1 \\ \varepsilon \in \left(0, \frac{5}{6}\right] \text{ și } [x] \leq x \leq [x] + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right) \geq -1 \Rightarrow n_0 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{și } n > \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)$$

$\Rightarrow$ ceea ce trebuia demonstrat

$$\lim_{n \to \infty} |x_n| = \left|\lim_{n \to \infty} x_n\right|$$

$$x_n \to 0 \Leftrightarrow |x_n| \to 0$$

Prop: Orice șir convergent este mărginit
Reciproca nu este adevărată.

A. Juratoni 28.09.2023

Analiză matematică

(seminar 1 - S1)

$N.F. = \frac{2 \cdot N.E + N.S.}{3}$

adina.juratoni@upt.ro

Recapitulare șiruri numerice

Criteriul rădăcinii/radicalului

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale pozitive. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0,\infty)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Fie $b_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \Rightarrow a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \overset{1^\infty}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{-n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$\overset{\text{crt. rad}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e}$

Lema Stolz - Cesàro

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de forma $x_n = \frac{a_n}{b_n}$; $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă
a) (b_n) - șir strict monoton
b) $b_n \to \infty$ sau $a_n \to 0, b_n \to 0$

atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \underset{\frac{a_n}{b_n}}{x_n} = x$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \overset{1}{=} \frac{1}{e}$

$a_n = \sqrt[n]{n!}$

$b_n = n \nearrow \infty$

Criteriul cleștelui

Fie (x_n) un șir de numere reale. Dacă $\exists$ două șiruri $(a_n)_{n \geq n_0}$ și $(b_n)_{n \geq n_0}$ care au aceeași limită, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$, a.î.

$a_n \leq x_n \leq b_n$, pt $n \geq n_0$, atunci șirul (x_n) are limită:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{\frac{1^2}{n^3+3} + \frac{2^2}{n^3+6} + \dots + \frac{n^2}{n^3+3n}}_{S_n} \Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^3+3k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+3} \geq S_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+3n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^3+3} \cdot \frac{\overset{2n^3}{n(n+1)(2n+1)}}{6} \geq S_n \geq \frac{1}{n^3+3n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$$

4. $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{49k^2+7k-12}$$

$$49k^2+7k-12 = (7k-3)(7k+4)$$

$$\frac{1}{(7k-3)(7k+4)} = \frac{A}{7k-3} + \frac{B}{7k+4} \quad \Big| \cdot (7k-3)(7k+4)$$

$$1 = A\cdot(7k+4) + B(7k-3) = k\cdot 7(A+B) + 4A - 3B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-A \\ 4A-3B=1 \end{cases} \Rightarrow 7A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{7} \Rightarrow B = -\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{7k-3} - \frac{1}{7k+4} = \frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{11}} + \cancel{\frac{1}{11}} - \cancel{\frac{1}{18}} + \dots + \cancel{\frac{1}{7n+3}} - \frac{1}{7n+4} \right)$$

$$= \frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{4} - \underbrace{\frac{1}{7n+4}}_{\to 0} \Big) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$$

(5.) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2^k(k+1)!}}_{S}$

$$\frac{2k+1}{2^k(k+1)!} = \frac{2k+2-1}{2^k(k+1)!} = \frac{2\cancel{(k+1)}}{2^k\cancel{(k+1)!}_{\,k!}} - \frac{1}{2^k(k+1)!} = \frac{1}{2^{k-1}\,k!} - \frac{1}{2^k(k+1)!}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1\cdot 1!} - \cancel{\frac{1}{2^1\cdot 2!}} + \cancel{\frac{1}{2^1\cdot 2!}} - \cancel{\frac{1}{2^2\cdot 3!}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2^{n-1}\cdot n!}} - \frac{1}{2^n(n+1)!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S = 1$

Criteriul majorării

Fie (x_n) un șir de numere reale.

(1) Dacă $\exists\, x \in \mathbb{R}$ și $\exists\, (y_n)_{n\geq n_0} \subset \mathbb{R}_+$ cu $y_n \to 0$ a.î.

$|x_n - x| \leq y_n$ atunci $x_n \to 0$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$)

(2) Dacă $\exists\, (y_n)_{n\geq n_0}$ cu $y_n \to \infty$ a.î.

$x_n \geq y_n$ atunci $x_n \to \infty$

(3) Dacă $\exists\, (y_n)_{n\geq n_0}$ cu $y_n \to -\infty$ a.î.

$x_n \leq y_n$ atunci $x_n \to -\infty$

Criteriul raportului

Fie (x_n) un șir de nr reale pozitive a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty)$

a) $l < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

b) $l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

c) $l = 1$ limita nu poate fi determinată cu acest criteriu

Criteriul raportului generalizat

Fie (x_n) un şir de nr. reale pozitive a.î. $\exists$

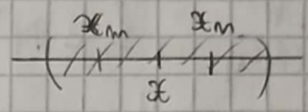
$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n\right] = l \in [0,\infty)$$

a) $l < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

b) $l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Analiză matematică

(curs S2) 03.10.2023



$\varepsilon_1 \quad N(\varepsilon_1)$; $\varepsilon_2 \quad N(\varepsilon_2)$

$x_{N(\varepsilon_1)}$

$$x_n = \frac{P_r(n)}{Q_s(n)} = \frac{a_r n^r + \ldots + a_1 n + a_0}{b_s n^s + \ldots + b_1 s + b_0}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n}{-n^3+1} = -\infty$$

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e \in (2,3)$$

Euler

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0$$

$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n = c \approx 0,1$ (Euler)

$|x_m - x_n| < \varepsilon \to 10^{-6}$ (de ex.) $\forall\, m, n > N(\varepsilon)$

Teoremă: Orice șir monoton și mărginit este convergent.

! În general, reciproca nu este adevărată.

de ex: $(x_n)_{n\geq 0} = \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$(x_n)_{n\geq 0}$ nu este monoton

Definiție: Șirul numeric $(x_n)_{n\geq 0}$. Șirul x_n se numește „șir Cauchy"/„șir fundamental" dacă $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \forall\, m, n \geq N(\varepsilon)$

sau a.î. $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \forall\, p \geq 1, \forall\, n \geq N(\varepsilon)$

Teoremă (Criteriul general de convergență a lui Cauchy)

Un șir $(x_n)_{n\geq 0}$ este Cauchy $\Leftrightarrow$ (x_n) = șir convergent

Propoziția 1: Orice șir Cauchy este mărginit.

Propoziția 2: Orice șir mărginit conține un subșir convergent.

ex: $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$ este convergent

Propoziția 3: Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este Cauchy dacă $\exists\, (a_n)_{n\geq 0}$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| \leq a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, p \geq 1, a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{1}{(n+1)n} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n} \overset{Not}{=} a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Cum $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \overset{P_3}{\Rightarrow} (x_n)_{n\geq 0}$ = şir Cauchy

$\overset{T}{\Rightarrow} (x_n)_{n\geq 0}$ = şir convergent

- $(x_n) = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$

$(y_n) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$

? x_n, y_n sunt mărg $\Rightarrow$ rezolvare pe foi

Remarcă $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ - convergent pt că $|x_n| = \frac{1}{n} \to 0 \to x_n \to 0$

- dar nu e monoton

Lema lui Newmann

Orice şir de numere reale conţine un subşir monoton

Teorema lui Bolzano-Weierstrass

Orice şir mărginit conţine un subşir convergent.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $\exists (x_n) \subset \mathbb{Q}$ şi $(y_n) \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a.î. $x_n \to x$ şi $y_n \to x$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^r - 1}{x_n} = r, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$x_n \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\cos x \sin\frac{x}{2} + \dots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right) =$$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{-x}{2} + \sin\frac{5x}{2} + \sin -\frac{3x}{2} + \sin\frac{7x}{2} + \sin\frac{-5x}{2} + \dots\right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{x}{2} + nx\right) + \sin\left(\frac{x}{2} - nx\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sin\frac{x}{2}} \cancel{2} \sin\frac{(2n+1-1)x}{4} \cdot \cos\frac{(2n+1+1)x}{4} =$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

$2\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{A+B}{2} =$

$= \cos A - \cos B$

$$y_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx =$$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}(y_n) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cancel{\cos\frac{3x}{2}} + \cancel{\cos\frac{3x}{2}} - \cancel{\cos\frac{5x}{2}} + \dots +\right.$$

$$\left. + \cancel{\cos\frac{2nx - x}{2}} - \cos\frac{2nx+x}{2}\right) =$$

$x(2n-1)$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x(2n+1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sin\frac{x}{2}} \cancel{2}\sin\frac{2nx + \cancel{x} - \cancel{x}}{4} \cdot \sin\frac{2nx + x + x}{4} =$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{x(n+1)}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| \le 1$$

Scanat cu CamScanner

Analiză matematică
(seminar 2 - S2)

05.10.2023

1. Constanta Euler - Mascheroni

$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \geq 2$? convergent

$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} \quad | \ln$

$\Leftrightarrow k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < 1 < (k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$\Leftrightarrow k < \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < k+1$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{k+1} < \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}}_{(1)} \quad \Big| \sum_{k=1}^{n-1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \cancel{\ln 2} - \ln 1 + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} + \dots + \ln n - \cancel{\ln(n-1)} <$

$< 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$

$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n < 0 \quad | +1 \Rightarrow \gamma_n < 1 \\ 0 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n \quad | + \frac{1}{n} \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \gamma_n \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_n \in (0,1)$

$\Rightarrow \gamma_n$ - mărginit (a)

$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{(1)}{<} 0$

$\Rightarrow \gamma_n$ - strict descrescător (b)

din (a) și (b) $\Rightarrow \gamma_n$ - convergent

Obs: $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n$

Criteriul raportului 2. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{2n!!}{(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1 \Rightarrow$ încercăm cu

Criteriul raportului generalizat

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{2n+2}\right)^{-(2n+2)}\right]^{\frac{-n}{2n+2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Şir Cauchy

(x_n) - şir fundamental (Cauchy) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

③ $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$

$$\frac{1}{k^4} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k}$$

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^4}\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^4} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n+p-1}} - \frac{1}{n+p} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Fie $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow x_n$ - şir fundamental

$\Rightarrow (x_n)$ - convergent

④ $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{2^k}$, $x \in \mathbb{R}$ $\qquad \cos^2 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos x \in [-1, 1]$ $\quad |\cos x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos kx}{2^k}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{\cos kx}{2^k}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon} \quad | \log_2$$

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$$

Fie $n_\varepsilon = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow y_n$ - şir fundamental

$\Rightarrow (y_n)$ - convergent

5. Dem că șirul $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ nu e fundamental

$$|x_{n+p} - x_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} > \underbrace{\frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p}}_{\text{de } p \text{ ori}} = \frac{p}{n+p}$$

pt. $p = n \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon$

$\Rightarrow$ șirul nu e fundamental

! $\exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $\forall\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n_\varepsilon$ și $\exists\, p \in \mathbb{N}^*$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| > \varepsilon$

Analiză matematică 10.10.2023
(curs 3 - S3)

Serii numerice

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ = șir numeric

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

x_n ↳ termenul general al seriei

Def 1: Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n, x \in \mathbb{R}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + \ldots + x_n \rightarrow \text{șirul sumelor parțiale}$$

Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e convergentă dacă șirul sumelor parțiale S_n / $(x_n)_{n\geq 0}$ e convergent, adică $\exists$ $S \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Dacă $\exists$ limită pt S_n, ea se numește suma seriei $\sum_{n\geq 0} x_n$ și se notează cu $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

Seria geometrică

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, $r \in \mathbb{R}$ este convergentă $\Leftrightarrow$ $r \in (-1, 1)$

În caz de convergență, suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ $(r \neq 1)$

Pt $r = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ - divergent

Pt $r \neq 1$ $S_n = 1 + r + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$, $r \neq 1$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \text{nu există}, & r \leq -1 \\ \infty, & r > 1 \end{cases}$

Propoziția 1: Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă $\Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Demonstrație:

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergent $\overset{def}{\Rightarrow} \underset{x_0+x_1+\ldots+x_n}{\underset{\shortparallel}{(S_n)_{n\geq 0}}}$ converge la $S \in \mathbb{R}$

Evident și $(S_{n-1})_{n\geq 0}$ converge la S

Dar $x_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = S - S = 0$

(Crit. de divergență)

Propoziția 2: Dacă $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ sau nu are limită atunci seria $\sum x_n$ - divergentă.

ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\infty}$ - divergentă

Seria armonică generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{convergentă}, & p > 1 \\ \text{divergentă}, & p \leq 1 \end{cases}$$

$\left\{ S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \right.$

$\left\{ \text{în contradicție cu } S_{2n} - S_n \to 0 \right.$

Criteriul general de convergență a lui Cauchy

O serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î.

$\Rightarrow (S_n)_{n\geq 0}$ - convergentă $\Leftrightarrow (S_n)_{n\geq 0}$ Cauchy $\Leftrightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \geq N$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$

O serie se numește absolut convergentă dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă.

Orice serie absolut convergentă este convergentă

Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

$(x_n) \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow S_n$ - crescător $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă $\Leftrightarrow S_n$ - mărginit superior

S_n poate fi sumă finită (mărg. sup) sau ∞ (S_n - nemărginit).

1. Criteriul comparației

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$; $x_n, y_n \geq 0$

Presupunem că $\exists\, c > 0$ a. î. $x_n \leq c \cdot y_n$, $\forall n$

Dacă: a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ - convergentă $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ - divergentă

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2n^3+1}}_{x_n} = ?$$

$$\underbrace{\frac{1}{2n^3+1}}_{x_n} \leq \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{y_n}$$

Știm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ - convergentă $\xrightarrow{\text{crit. comp}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă
(serie armonică)

2. Criteriul comparației la limită

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$; $x_n, y_n > 0$

Calculăm $l = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n}$ (și trebuie să aparțină) $\in [0, \infty)$

Dacă:

a) $l \in (0, \infty) \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ (au aceeași natură)

b) $l = 0$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ - convergentă

c) $l = \infty$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ - divergentă $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

ex: $x_n = \frac{n^{\frac{7}{3}}+1}{n^{\frac{43}{11}}+2}$; Fie $y_n = \frac{1}{n^{\frac{43}{11}-\frac{7}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{52}{33}}} \xrightarrow[\text{arm}]{\text{serie}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ - convergentă

$l = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^{\frac{43}{11}} + n^{\frac{52}{33}}}{n^{\frac{43}{11}}+2} = 1 \xrightarrow[\text{la limită}]{\text{crit comp}} \underbrace{\sum x_n \sim \sum y_n}_{\text{convergente}}$

3. Criteriul raportului a lui D'Alembert

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n > 0$

Calculăm $l = \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

Dacă: a) $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă

b) $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

c) $l = 1$ criteriul raportului nu decide natura seriei

ex: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ → divergentă (pt. că $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

sau $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cancel{!}}{2^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{n!}} = \infty \overset{\text{crit.}}{\underset{\text{rap}}{\Rightarrow}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = 0 < 1 \overset{\text{crit.}}{\underset{\text{rap}}{\Rightarrow}} \sum x_n$ - convergentă

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, $a > 0$

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\cancel{n+1}} \cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{a^n}\, \cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} a \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n =$

$= a \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{-n}\right]^{\frac{-n}{n}} = a \cdot e^{-1} = \frac{a}{e}$

4. Criteriul lui Raabe-Duhamel (mai puternic decât criteriul raportului; se aplică când $l=1$)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n > 0$

Calculăm $l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$

Dacă: a) $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

b) $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă

c) $l = 1$ natura seriei nu poate fi determinată cu acest criteriu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2n+2}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\xrightarrow[R-D]{crt.} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ - divergentă}$$

5. Criteriul rădăcinii (radicalului)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n > 0$

Calculăm $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$

Dacă: a) $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - convergentă

b) $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

c) $l = 1$ criteriul rădăcinii nu determină natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^2}, \quad a > 0$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-a}{n}\right)^n \stackrel{1^\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-a}{n}\right)^{inv}\right]^{\frac{-an}{n}} = e^{-a} = \frac{1}{e^a} < 1 \ (a>0)$$

$$\xrightarrow[răd]{crt} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ - convergentă}$$

Scanat cu CamScanner

6. Criteriul de condensare al lui Cauchy

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n > 0$ și $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 8/49 (a)

$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \cancel{2^n} \frac{\ln 2^n}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=2}^{\infty} n \ln 2 = \ln 2 \sum_{n=2}^{\infty} n$

dar $\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{n}_{a_n}$ - divergentă ($a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$)

$\Rightarrow \ln 2 \sum_{n=2}^{\infty} n$ - div. $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ - div $\overset{\text{condensare}}{\Rightarrow} \sum_{n=2}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n}$

Analiză matematică

17.10.2023

(curs 4 - S4)

Seria armonică generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{convergentă}, & p > 1 \\ \text{divergentă}, & p \le 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{n} \to$ div

$\frac{1}{n^2} \to$ conv.

(cazul 1) $p \le 0$ șirul $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ - divergentă

(cazul 2) $p > 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \xRightarrow[\text{Cauchy}]{\text{condensare}} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{np}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{2^{1-p}}_{q}\right)^n$ - convergentă (doar pt $p > 1$)

pt. $q = 2^{1-p}$ $\quad 2^{1-p} < 1 = 2^0 \Leftrightarrow 1-p < 0 \Leftrightarrow p > 1$

Seria geometrică

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ - convergentă pt $q \in (-1, 1)$

Analiză matematică (seminar 3 - S3)

12.10.2023

Obs: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \begin{cases} \exists \text{ și e finită} \Rightarrow \sum a_n \in \mathcal{C} \\ \nexists \text{ sau e } \pm\infty \Rightarrow \sum a_n \in \mathcal{D} \end{cases}$$

① $\sum_{n\ge 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \sum_{n\ge 2} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sum_{n\ge 2}\left[\ln(n-1) - \ln n\right] =$

$= \ln 1 - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 3} + \dots + \cancel{\ln(n-1)} - \ln n = -\ln n = S_n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} = -\infty \Rightarrow \sum_{n\ge 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{D}$

② $\sum_{n\ge 1}^{n} \sin\frac{3}{2^{n+2}} \sin\frac{1}{2^{n+2}}$ $\qquad$ $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)\ \cos(a+b)\right]$

$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{3}{2^3}\sin\frac{1}{2^3} + \sin\frac{3}{2^4}\cdot\sin\frac{1}{2^4} + \dots + \sin\frac{3}{2^{n+2}}\sin\frac{1}{2^{n+2}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2}{2^3} - \cos\frac{2^2}{2^3} + \cos\frac{2}{2^4} - \cos\frac{2^2}{2^4} + \cos\frac{2}{2^5} - \cos\frac{2^2}{2^5} + \dots + \cos\frac{2}{2^{n+2}} - \cos\frac{2^2}{2^{n+2}}\right] =$

$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\cancel{\cos\frac{1}{2^2}} - \cos\frac{1}{2} + \cancel{\cos\frac{1}{2^3}} - \cancel{\cos\frac{1}{2^2}} + \cancel{\cos\frac{1}{2^4}} - \cancel{\cos\frac{1}{2^3}} + \dots + \cos\frac{1}{2^{n+1}} - \cancel{\cos\frac{1}{2^n}}\right] =$

$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \underbrace{\cos \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}}}_{\to 0}}_{\to 1} - \cos\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\frac{1}{2}\right] \Rightarrow \sum a_n \in \mathcal{C}$

Să se studieze natura următoarelor serii folosind def. necesară de convergență a unei serii.

Condiția necesară de convergență a unei serii este ca termenul general să tindă la 0.

1) Dacă termenul general nu tinde la 0, seria este divergentă.

2) Dacă termenul general tinde la 0, nu putem afirma natura seriei (studiem fiecare caz în parte).

① $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln \cos\frac{2\pi}{3n}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{3n}\right) = \lim_{n\to\infty} \cancel{n^2} \frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{3n}\right)}{-2\sin^2\frac{\pi}{3n}} \cdot \frac{-2\sin^2\frac{\pi}{3n}}{\frac{\pi^2}{9n^2}} \cdot \frac{\pi^2}{9\cancel{n^2}} =$$

$$= -2\frac{\pi^2}{9} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - divergentă}$$

Deoarece nu este satisfăcută condiția necesară de convergență a unei serii, atunci seria este divergentă.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \sin\frac{\pi}{n}\right)^n$

$$1^\infty \quad \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}}\right]^{n\sin\frac{\pi}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \cancel{n} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{\cancel{n}}} = e^{\pi} \neq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - divergentă}$$

③ Folosind criteriul general de convergență a lui Cauchy, să se studieze natura seriei.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+n}$$

Condiția necesară și suficientă ca o serie să fie convergentă este ca șirul sumelor parțiale să fie șir fundamental.

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k^2+k}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cancel{\frac{1}{n+2}} - \cancel{\frac{1}{n+3}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{n+p}} - \frac{1}{n+p+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{pt } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Fie $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow S_n$ - șir fundamental $\Rightarrow \sum a_n$ - conv.

Studiați natura urm. serii folosind criteriile de comparație

↓ rad. / raport

① $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{\pi}{5^n}$

$\sin x \le x$

$0 < x_n < y_n$

$\sum x_n$

$\sum y_n$

a) Dacă $\sum y_n$ - conv $\Rightarrow$ $\sum x_n$ - conv.

b) Dacă $\sum x_n$ - div. $\Rightarrow$ $\sum y_n$ - div.

$$3^n \sin\frac{\pi}{5^n} \le \frac{\pi}{5^n}\cdot 3^n = \pi\left(\frac{3}{5}\right)^n \overset{not}{=} y_n$$

$\sum_{n\ge 1} \pi\left(\frac{3}{5}\right)^n$ - convergentă (s. geometrică cu $q = \frac{3}{5} < 1$)

$\overset{\text{crit. comp.}}{\Rightarrow} \sum x_n$ - conv.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{conv} & |q| < 1 \\ \text{div} & |q| > 1 \end{cases}$$ seria geometrică

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+7}{5n^4+3n+7}$

Fie $y_n = \frac{1}{n^3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+7n^3}{5n^4+3n+7} = \frac{3}{5} \in (0,\infty) \xRightarrow[\text{la lim}]{\text{crit. comp}} \sum x_n \sim \sum y_n$$

$\sum \frac{1}{n^3}$ - conv (seria armonică generalizată cu $p = 3$)

$\Rightarrow \sum x_n$ - conv

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{convergentă pt } p > 1 \\ \text{divergentă pt } p \le 1 \end{cases}$$ seria armonică generalizată

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^2} + 2\sqrt{n}}{3\sqrt[3]{n^2}+4n}$ $\qquad x_n = \frac{n^{\frac{2}{5}} + 2n^{\frac{1}{2}}}{3n^{\frac{2}{3}}+4n}$

$\frac{2}{5}+\frac{1}{2} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}$

$y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{9}{2}}+2n}{3n^{\frac{2}{3}}+4n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \in (0,\infty)$

$\overset{\text{CCL}}{\Rightarrow} \sum x_n \sim \sum y_n$

$\sum y_n$ - div $\Rightarrow \sum x_n$ - div

Studiați natura urm. serii folosind criterii de conv. adecvate

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n(n+a)} - n\right)^n, \ a>0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+a)-n^2}{\sqrt{n(n+a)}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\cdot a}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1\right)} = \frac{a}{2}$

Dacă $\frac{a}{2} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ - conv.

Dacă $\frac{a}{2} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ - div.

Daca $\frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow$ criteriul rap. generalizat ?

În acest caz seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right)^n =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{n-\sqrt{n^2+2n}}{n+\sqrt{n^2+2n}}\right)^{inv}\right]^{\frac{n\left(n-\sqrt{n^2+2n}\right)}{n+\sqrt{n^2+2n}}} =$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(\cancel{n^2}-\cancel{n^2}-2n)}{(n+\sqrt{n^2+2n})^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(1+2\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1+\frac{2}{n}\right)}} = e^{-\frac{2}{4}} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$

$\Rightarrow \sum a_n$ - divergentă

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow \sum x_n$ - conv.

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}, \ a>0$

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(a+1)\cdots(a+n)}} \cdot \frac{\cancel{(a+1)\cdots}(a+n+1)}{(n+1)\cancel{!}} - 1\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{a}{n+1} = a$

Dacă $a < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ - divergentă

Dacă $a > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ - convergentă

Pt $a = 1$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2 \cdot 3 \cdot \ldots (n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ - div

pt. că e serie armonică cu $p = 1$

Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

1. Criteriul raportului

(x_n) șir de numere reale nenule a.î.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = l \in [0,\infty)$

a) $l<1$ atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ - absolut convergentă

b) $l>1$ atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

2. Criteriul rădăcinii

$(x_n) > 0$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = l \in [0,\infty)$

a) $l<1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ - absolut convergentă

b) $l>1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ - divergentă

3. Criteriul lui Leibniz (serii alternante)

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$

Dacă $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$ - convergentă

ex: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$ - convergentă

+ Seria armonică alternantă

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \text{ - conv.}$$

este o serie semi-convergentă căci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1} \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ - divergentă}$$

a_n conv + $|a_n|$ conv $\rightarrow$ serie absolut convergentă

4. Criteriul lui Dirichlet

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n$, $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ - șiruri cu urm. proprietăți:

a) $u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (șir descrescător de nr. $\mathbb{R}_+$ care tinde la 0)

b) $t_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ - mărginit $\quad t_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \to (-1)^k$

șirul sumelor parțiale

$\Leftrightarrow \exists\, M \in \mathbb{R}_+^*$ a.î. $|t_n| \leq M \ (\forall) n \in \mathbb{N}$

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n$ - convergentă

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (1)$$

$$\alpha_n = \sin(nx)$$

$$|t_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right| \overset{x\neq 2k\pi}{\leq} \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \overset{not}{=} M$$

$\Rightarrow (t_n)_{n\geq 0}$ - șir mărginit (2)

$$\xrightarrow[\text{Crt. Dirichlet}]{\text{din (1), (2)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \text{ - convergentă}$$

5. Criteriul lui Abel

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n$

Dacă: a) (α_n) - șir cu proprietatea că $\sum_n \alpha_n$ - convergentă

b) (u_n) șir de nr. reale monoton și mărginit

Atunci seria $\sum_n \alpha_n u_n$ - convergentă

Capitolul 2. Șiruri și serii de funcții

§ 1. Șiruri de funcții

$$\underbrace{f_n(x)}_{f(n,x)} = x^n \xrightarrow[x\in[0,1]]{n\to\infty} \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xrightarrow{\text{extinde}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

$$a_n \xrightarrow{\text{extinde}} f_n(x)$$

$$f : \mathbb{N}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Def.: Fie $f_n, f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Șirul de funcții $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplu la funcția f dacă

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in D, \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon, x)$

notație: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} f, \forall x \in D$

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow{S} f(x) = \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

Def 2: Șirul $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniform la funcția $f \iff$

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in D, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon, x)$

ex: $f_n(x) = x^n$, $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{u} f(x) = 0$$

Convergența uniformă implică convergența simplă. Reciproca NU este adevărată.

Propoziția 1: Fie $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} f$ pe mulțimea D

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f \iff (\forall) x_n \in D \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Propoziția (2) Dacă $\exists\ (x_n) \in B$ a.î. $|f_n(x_n) - f(x_n)| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ atunci f_n nu converge uniform la f pe mulțimea B.

$$f_n \overset{U}{\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}} f$$

ex: $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{S} f(x) = x$$

$f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

? $x_n = ?$ a.î. $|f_n(x_n) - f(x_n)| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\frac{nx}{n+x} - x\right| = \frac{x^2}{n+x}$$

$$x_n = n \in [0,\infty) \Rightarrow |f_n(n) - f(n)| = \frac{n^2}{2n} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

$$f_n \overset{U}{\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}} f$$

19. 10. 2023

Analiza matematică
(seminar 4 - S4)

Să se studieze convergența absolută și convergența seriilor:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n}$

$x_n = \frac{2n+1}{n^2+n}$ $\quad y_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+n} = 2 > 1$

$\overset{\text{crit. comp.}}{\underset{\text{la lim}}{\Rightarrow}} \sum x_n \sim \sum y_n$

$\sum y_n$ - div $\Rightarrow \sum x_n$ - div.

$\Rightarrow \sum x_n$ - nu e absolut convergentă (1)

Crit. lui Leibniz $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$x_{2n+1} - x_{2n} = \frac{2(2n+1)+1}{(2n+1)2(n+1)} - \frac{2\cdot 2n+1}{2n(2n+1)} =$

$= \frac{4n^2+2n+n-4n^2-4n-n-1}{2n(n+1)(2n+1)} = \frac{-(\cancel{2n+1})}{2n(n+1)(\cancel{2n+1})} = -\frac{1}{2n(n+1)} < 0$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_n \text{ - descresc. } (*) \\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad (**) \end{array}\right\} \overset{\text{crit.}}{\underset{\text{Leibniz}}{\Rightarrow}}$ $\sum (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ este conv. (2)

din (1) și (2) $\Rightarrow \sum (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ semiconvergentă

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\xRightarrow[\text{cu } p>1]{\text{serie arm}}$ $\sum |a_n|$ - conv $\Rightarrow \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ - absolut conv.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ - conv.

Să se studieze conv. cu ajutorul Crit. lui Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 = \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 = \left(1 - \frac{1}{2n+2} \right)^2 < 1$$

$\Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow (x_n) \searrow$ (1)

Pt. $\lim_{n\to}$ putem face ca la ex 2) sau cu crit clestelui

$$x_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2$$

$$y_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$0 < y_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1} \Big| \cdot y_n$$

$$0 < x_n < \frac{1}{2n+1}$$

$\searrow \downarrow \swarrow$

$0 \xRightarrow[\text{clestelui}]{\text{crit.}} \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (2)

din (1) și (2) $\xRightarrow[\text{lui Leibniz}]{\text{crit.}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2$ - convergentă

3. Studiați natura seriei

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\dots+\frac{1}{\ln n}\right)\frac{\sin(n\cdot a)}{n-1}, \quad a\in\mathbb{R}$$

Fie $\alpha_n=\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\dots+\frac{1}{\ln n}\right)\cdot\frac{1}{n-1}$ (?) $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$u_n=\sin(n\cdot a)$ (?) $|t_n|<M$

$$\alpha_{n+1}-\alpha_n=\left(\frac{1}{\ln 2}+\dots+\frac{1}{\ln n}+\frac{1}{\ln(n+1)}\right)\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\ln 2}+\dots+\frac{1}{\ln n}\right)=$$

$$=\frac{1}{(n-1)n}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln(n+1)}+\frac{1}{\ln 3}-\frac{1}{\ln(n+1)}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)=$$

$$=\underset{<0}{\frac{-1}{(n-1)n}}\underbrace{\left(\frac{\ln\frac{n+1}{2}}{\ln 2\ln(n+1)}+\frac{\ln\frac{n+1}{3}}{\ln 3\ln(n+1)}+\dots+\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln n\ln(n+1)}\right)}_{>0}<0$$

$\ln$ - s.c.

$\Rightarrow \alpha_n \searrow$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\overset{S-C}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(n+1)}}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0$$

$\Rightarrow \alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (1)

$$S_n=\sum_{k=2}^{\infty}u_n$$

$$|\sin 2a+\dots+\sin na|=\left|\frac{\cancel{2}\sin\left(a\frac{n+2}{2}\right)\sin\left(a\frac{n-1}{2}\right)}{\cancel{2}\sin\frac{a}{2}}\right|\le\frac{1}{|\sin\frac{a}{2}|}=M$$

$\Rightarrow S_n$ - mărg. (2)

din (1) și (2) $\overset{crit.}{\underset{Dirichlet}{\Rightarrow}}$ $\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n u_n$ - convergentă

Șiruri și serii de funcții

Să se studieze conv. simplă și uniformă pt. urm. șiruri de funcții

① $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x+n}{x+n+1}$

$\lim_{n\to\infty} f_n = 1 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, $f(x) = 1$, $\forall x \in [0, \infty)$

$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{-1}{x+n+1} \right| = \frac{1}{x+n+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ Fie $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in [0, \infty)$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n > n_\varepsilon$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$

② $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ ~~f. lim~~ nu e cont $\Rightarrow f_n$ nu e u conv ~~ergent~~

Utilizând proprietatea limită uniformă a unui șir de funcții continue este o funcție continuă.

(f - nu e cont $\Rightarrow f_n$ - nu e uniform convergentă)

③ $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n}{x+n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x+n} = 1 \Rightarrow f_n \xrightarrow{s} f$, $f(x) = 1$

$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{-x}{x+n} \right| \underset{x>0}{=} \frac{x}{x+n}$

Folosim prop. 2 $\quad x_n = n$

$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{n}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \overset{P_2}{\Rightarrow} f_n \underset{n\to\infty}{\overset{u}{\not\to}} f$

(4.) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^2}{n^2 + x^4}$

$\lim\limits_{n \to \infty} f_n = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{s} f, \quad f(x) = 0$

$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^2}{n^2+x^4} \right| = \frac{x^2}{n^2+x^4} \leq \left| \frac{x^2}{2nx^2} \right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon$

$x^4 + n^2 \geq 2nx^2$

$(x^2 - n)^2 \geq 0$ ✓

$\Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}$

$\Rightarrow n_\varepsilon = \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right] + 1$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $n > n_\varepsilon$ $\quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$

S7 - lucrare seminar

Analiză matematică (curs 5 - S5)

24.10.2023

Criteriul majorării

Fie $f_n, f : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}_+$ a.î. (șir numeric)

(i) $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \forall n, \forall x \in B$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Transfer de proprietăți de la $(f_n)_{n\geq 0}$ la f pt. conv. uniform.

1. Transfer de trecere la limită

Fie $(f_n)_n$ - șir de funcții, $f_n : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in B'$ (mulțimea pct. de acumulare; punct de acumulare)

Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ și $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$, atunci șirul numeric $(l_n)_{n\geq 0}$ este conv. și

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

2. Transfer de continuitate

Fie $f_n : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $f : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe B

Dacă $(f_n)_{n\geq 0}$ este un șir de funcții continue pe B atunci f - continuă pe B.

ex: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

M.R.A.: Pp. că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe $[0,1]$
Dar $f_n(x) = x^n$ - continuă pe $[0,1]$ $\Bigg\}$ $\Rightarrow f$ - cont pe $[0,1]$ (F)

$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

③ Transfer de derivabilitate

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ şir de funcţii derivabile pe $B\subset\mathbb{R}$.

Dacă există două funcţii f, g definite pe $B\subset\mathbb{R}$ a.î.

(i) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe B

(ii) $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{u} g$ pe B

Atunci f este derivabilă pe B şi $f'=g$, adică $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

④ Transfer de integrabilitate

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ şir de funcţii integrabile pe $[a,b]$

Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe $[a,b]$ atunci f integrabilă pe $[a,b]$ şi

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$$

Serii de funcţii

Fie $(f_n)_{n\geq 0}$ şir de funcţii. Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad \text{pt } x\in B$$

se numeşte serie de funcţii cu termenul general f_n.

$f_n(x) = x^n$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

Fie $x_0\in B$ a.î. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ - convergentă.

$\Rightarrow x_0$ - punct de convergenţă

C = mulţimea tuturor punctelor de convergenţă pt seria $\sum f_n(x)$

pt. $\sum f_n(x) = \sum x^n \qquad C=(-1,1)$

Scanat cu CamScanner

$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$

Def 1: Seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este simplu convergentă pe mulțimea $C \subset D$, dacă șirul de funcții $S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$ este simplu convergent pe mulțimea C.

În plus: $\underset{\text{suma seriei}}{\underset{\parallel}{S(x)}} = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$, $x \in C$, $S : C \subset D \to \mathbb{R}$

Def 2: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ (converge) este uniform convergentă pe mulțimea C dacă $S_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{u} S(x)$, $\forall x \in C$

Criteriul lui Weierstrass

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in D$

Dacă $\exists (a_n)_{n \geq 0}$ un șir numeric și

(i) $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall x \in D$, $\forall n \geq n_0$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ = convergentă,

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ - uniform convergentă pe D

ex: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3+1}$, $x \in \mathbb{R}$

$|f_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n^3+1} \right| \leq \frac{1}{n^3+1} \overset{not}{=} a_n$

$\sum \frac{1}{n^3+1}$ conv $\overset{\text{Weierstrass}}{\Rightarrow} \sum \frac{\sin(nx)}{n^3+1}$ - u. conv.

Proprietăți ale seriilor de funcții

① Transfer de limită

$\ulcorner\!\to$ pct. de acumulare

Fie $f_n : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un șir de funcții și $x_0 \in B'$

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe $C \subset B$ și are suma funcția $S(x)$ atunci seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} S_n(x) \right)$ este convergentă și are suma $\lim_{x \to x_0} S(x)$. În plus, putem scrie că are loc relația

$$\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} S_n(x) \right)$$

② Transfer de continuitate

Fie $f_n : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un șir de funcții continue pe B.

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ uniform convergentă pe $C \subset B$

Atunci suma seriei de funcții $S(x)$ este o funcție continuă pe $C \subset B$.

S8 joi

altă sală

Analiză matematică

26.10.2023

(seminar 5 - S5)

Şiruri şi serii de funcţii

Să se arate că urm. şiruri sunt uniform convergente

1. i) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{e^{nx}}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f,\ f(x)=0,\ \forall x \in [0,\infty)$$

(exp > putere)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$f_n'(x) = (x^n e^{-nx})' = n x^{n-1} e^{-nx} - x^n e^{-nx} \cdot n =$$

$$= n e^{-nx} x^{n-1} (1-x)$$

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ sau } x = 1$$

x	0		1		∞
$f_n'(x)$	0	$+ +$	0	$- - - -$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^n}$	$\searrow$	

$$f_n(1) = \frac{1}{e^n}$$

$$\Rightarrow a = \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{e^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$$

ii) $f_n(x) = \sqrt{1+nx} - \sqrt{nx}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+nx}-\sqrt{nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+nx-nx}{\sqrt{1+nx}+\sqrt{nx}} = 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f, \quad f(x)=0, \ \forall x\in[1,\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x)-f(x)| = 0$$

$$|f_n(x)-f(x)| = |f_n(x)| = f_n(x)$$

$$f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+nx}}\cdot n - \frac{1}{2\sqrt{nx}}\cdot n = -\frac{n}{2\sqrt{1+nx}\sqrt{nx}\left(\sqrt{nx}+\sqrt{1+nx}\right)} < 0$$

x	1		∞
$f_n'(x)$	$-$	$-$ $-$ $-$	$-$
$f_n(x)$	0	$\searrow$	0

$$f(1) = \sqrt{1+n}-\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow a = \sup |f_n(x)-f(x)| = \sqrt{1+n}-\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n-n}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$$

(2) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_2^{10} e^{-nx^2}dx$

$$f_n(x) = e^{-nx^2} = \frac{1}{e^{nx^2}}, \quad x\in[2,10]$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f, \quad f(x)=0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[2,10]} |f_n(x)-f(x)|$$

$$f_n'(x) = -2nx\cdot e^{-nx^2} \quad f_n'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \notin [2,10]$$

x	2		10
$f_n'(x)$	$-$	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$	$-$
$f_n(x)$		$\searrow$	

$$f_n(2) = \frac{1}{e^{4n}} = \sup_{x\in[2,10]} |f_n(x)-f(x)|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(2) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f \text{ pe } [2,10]$$

Th. de integr. $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\left(\int_2^{10} e^{-nx^2}dx\right) = \int_2^{10}\left(\lim_{n\to\infty} e^{-nx^2}\right)dx = \int_2^{10} 0\,dx = 0$

Studiați convergența uniformă a urm. șirului de funcții

i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = e^{-nx^2} \sin(nx)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f,\ f(x) = 0$$

Fie $x_n = \frac{1}{n}$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|e^{-n\cdot\frac{1}{n^2}} \cdot \sin 1\right| = e^{-\frac{1}{n}} \sin 1 = \frac{\sin 1}{e^{\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 1}{e^{\frac{1}{n}}} = \sin 1 \neq 0 \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{u} f$$

ii) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \text{nu e cont}$$

$$\overset{T2.15}{\Rightarrow} f_n \not\xrightarrow{u} f$$

iii) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^{1+\frac{1}{n}},\ n \geq 1$ $\boxed{\text{cu derivata}}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^1 = x \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f,\ f(x) = x$$

$$f'(x) = x \cdot x^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} + \cancel{x}\,\frac{x^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{x^{\frac{1}{n}}(n+1)}{n} \geq 0$$

$f(x)$ - cont pe $[0,1]$

$$|f_n(x)| = |x \cdot x^{\frac{1}{n}}| = \underbrace{|x|}_{\in[0,1]} \cdot |x^{\frac{1}{n}}| \leq \underbrace{|x|}_{\in[0,1]} \leq 1 = g(x)$$

Fie $g(x) = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} g(x)$

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

crit. Weierstrass $\Rightarrow \sum_n f_n$ - u conv pe $[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} |x^{1+\frac{1}{n}} - 1| = x \neq 0$$

$$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{u} f$$

$x = 0$

x	0			1
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$			1

④ Fie seria de funcții:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+x^2+1}, x \in \mathbb{R} \quad \text{u.c. și abs conv.}$$

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2+x^2+1} \right| \leq \frac{1}{n^2+x^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \overset{not}{=} a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \text{ - conv (serie arm)}$$

$$\xRightarrow{\text{Weierstrass}} \sum \frac{\cos nx}{n^2+x^2+1} \text{ - u.c.}$$

și $|f_n| \leq \frac{1}{n^2+1} \rightarrow$ abs. conv.

⑤. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ este u.c. pe $(0, \infty)$

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) =$$

$$= \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \ldots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{x} = S(x)$$

$$\Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} S, \quad S(x) = \frac{1}{x}$$

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{1}{x+n+1} \right| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{sau } \frac{1}{n+1} = a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} S \overset{Def}{\Longrightarrow} \sum \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \text{ - u. conv.}$$

Scanat cu CamScanner

Analiză matematică 31.10.2023
(curs 6 - S 6)

3. Transfer de derivabilitate

Fie $f_n : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un șir de funcții derivabile. Dacă:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este u.c. pe B, având suma f la $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{u} f(x)$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ este u.c. pe B la $g: B \to \mathbb{R}$, având suma g $\quad S_n'(x) \xrightarrow[n\to\infty]{u} g(x)$

atunci avem că f - derivabilă pe B și $f' = g$

adică $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$, $\forall x \in B$

4. Transfer de integrabilitate

Fie $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ un șir de funcții integrabile

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este u.c. pe $[a,b]$ având suma funcția $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

f, atunci f este integrabilă pe $[a,b]$ și are loc relația:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Serii de puteri

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ - șir numeric și $x_0 \in B \subset \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

centrată în x_0

este o serie de puteri, unde:

$(a_n)_{n\geq 0}$ șir de numere reale

cu coeficient de rang n al seriei, $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n \qquad a_0 = 1, \ a_1 = \frac{1}{2}, \dots, a_n = \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{2n} = \underset{a_0}{1 \cdot x^0} + \underset{a_2}{\frac{1}{2} x^2} + \underset{a_4}{\frac{1}{3} x^4} + \dots$$

$a_7 = 0$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin x + n\frac{\pi}{2}$$

$$\sin x' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin x'' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \sin x + \pi$$

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $x_0 \in B \subset \mathbb{R}$ o serie de puteri

$$C = \{x \in B \text{ pt. care } a_n(x-x_0)^n \text{ este convergentă}\}$$

Seria geometrică: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $C = (-1, 1)$

$$S_n(x) = 1 + x + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1} \xrightarrow[n\to\infty]{x \in (-1,1)} \frac{1}{1-x}$$

C = mulțime de convergență a seriei de puteri

Orice serie de puteri centrată în x_0 e conv. în $x_0 \Rightarrow x_0 \in C$

$S(x_0) = x_0$

① $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$, $C = (-1, 1)$

② $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$, $C = (-1, 1)$ DE REȚINUT

③ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, $C = (-1, 1)$

$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Raza de convergență a seriei de puteri $R \in [0, \infty)$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{sau} \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ nu mai e nev de sup

Teorema I a lui Abel

-> oferă informații legate de modul de determinare a mulțimii C.

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ și $R \in [0, \infty)$ Atunci.

(i) $R = 0 \Rightarrow C = \{x_0\}$ seria e conv. doar în x_0

(ii) $R = \infty \Rightarrow C = \mathbb{R}$ seria e conv $\forall x \in \mathbb{R}$ -> $\sin x$

(iii) $R \in (0, \infty)$:

a) Seria e conv. $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

b) Seria e div. $\forall x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$

c) Seria e unif. conv. $\forall x \in [a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$

d) Dacă $x = x_0 + R$ sau $x = x_0 - R$ T.I. a lui Abel nu precizează natura seriei, dar seria se transformă într-o serie numerică

Scanat cu CamScanner

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \Rightarrow R=1$$

$x_0 = 0$

a) $\Rightarrow$ seria este conv. pt. $x \in (-1, 1)$

b) $\Rightarrow$ seria este div pt. $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

c) clar

d) $x=1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - conv.

$x=-1$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ - div

$\Rightarrow C = (-1, 1]$

Scanat cu CamScanner

(S6)

Det. mulțimea de conv și suma urm. serii de puteri

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$ ii) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1) x^{2n}}{n \cdot 3^n}$

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{n}}{n}$ v) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} x^{2n+1}$

vi) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1)(x-3)^n$

i) Dacă avem $(x-x_0)^{2n} \Rightarrow R^2 = \lim_{n\to} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (iii) abs. conv.

$a_n = \frac{1}{n \cdot 3^n} \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1) 3^{\cancel{n+1}}}{n \cdot \cancel{3^n}}\right| = 3$

$\Rightarrow C = (-3, 3)$ interval de conv.

T I Abel

$\Rightarrow$ · seria este abs. conv. pt. $x \in C$

· seria este div pt. $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

· $\forall [a,b] \subset C \Rightarrow$ seria este u.c.

· $x = -3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - conv (Leibniz)

· $x = 3 \Rightarrow \sum \frac{\cancel{3^n}}{n \cdot \cancel{3^n}} = \sum \frac{1}{n}$ - div. (serie arm.)

$\Rightarrow C = [-3, 3)$

Fie $S(x)$ = suma seriei

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$, $x \in [-3, 3)$

Th. de deriv. $S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n \cdot 3^n} = \frac{1}{3} \sum \left(\frac{x}{3}\right)^n$

$\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3-x}$

$\int S'(x)\,dx = \int \frac{1}{3-x}\,dx + C$

Scanat cu CamScanner

$S(x) = -\ln(3-x) + C$

$S(0) = 0$

$S(0) = -\ln 3 + C \Rightarrow C = \ln 3$

$\Rightarrow S(x) = -\ln(3-x) + \ln 3 = \ln \frac{3}{3-x}, \forall x \in [-3, 3)$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$

$a_n = n \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$

$\Rightarrow C = (-1, 1)$

Fie $S(x)$ - suma seriei, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$, $x \in (-1, 1)$

T I Abel

- abs conv. $\forall x \in (-1, 1)$
- div pt. $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- $\forall [a, b]$
- $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ - div ($\nexists \lim$) → nu e necesară îndepl cond
- $x = 1 \Rightarrow \sum n 1^n = \sum n$ - div

$C = (-1, 1)$

$(*) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad | \cdot x$

$\Rightarrow S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \forall x \in (-1, 1)$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^{2n}}{n\cdot 3^n}$

$R^2 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n-1}{n\cdot \cancel{3^n}} \cdot \frac{(n+1)3^{n+\cancel{1}}}{n} \right| = 3$

$\Rightarrow R = \sqrt{3}$

$I = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

T. I. Abel. abs. conv. pt. $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

div. pt. $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

$\forall [a,b] \subset (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ - u. c.

$x = -\sqrt{3} \Rightarrow \sum \frac{(n-1)(-1)^{2n}\cdot \cancel{(\sqrt{3})^{2n}}}{n\cdot \cancel{3^n}} = \sum \frac{n-1}{n}$ div $\quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x = \sqrt{3} \Rightarrow \sum \frac{(n-1)(\sqrt{3})^{2n}}{n\cdot 3^n} = \sum \frac{n-1}{n}$ div $\Rightarrow C = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Fie $S(x)$ - suma seriei, $S(x) = \sum \frac{(n-1)x^{2n}}{n\cdot 3^n}$, $\forall x \in -3$

$S(x) = \underbrace{\sum \frac{nx^{2n}}{n\cdot 3^n}}_{S_1} - \underbrace{\sum \frac{x^{2n}}{n\cdot 3^n}}_{S_2}$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$

$S_1(x) = \sum \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum \left(\frac{x^2}{3}\right)^n \overset{*}{=} \frac{1}{1+\frac{x^2}{3}} - 1 =$

$= \frac{3}{3-x^2} - 1 = \frac{x^2}{3-x^2}$

$S_2(x) = \sum \frac{x^{2n}}{n\cdot 3^n}$

$S_2'(x) = \sum \frac{2\cancel{n}x^{2n-1}}{\cancel{n}\cdot 3^n} = \frac{2x}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{3}\right)^{n-1} \overset{*}{=} \frac{2x}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{3}\right)^n =$

$= \frac{2x}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{3}} = \frac{2x}{3-x^2}$

$\int \frac{2x}{3-x^2}dx = -\ln(3-x^2) + C$

$$\left.\begin{aligned} S_2(0) &= -\ln 3 + C \\ S_2(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = \ln 3$$

$$\Rightarrow S_2(x) = -\ln(3-x^2) + \ln 3 = \ln \frac{3}{3-x^2}$$

$$S(x) = S_1(x) - S_2(x) = \frac{x^2}{3-x^2} - \ln \frac{3}{3-x^2}, \quad x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{n}$ $\quad x_0 = 5$

$$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow R^2 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1 \xRightarrow{R=1} J = (4, 6)$$

T I Abel:
- seria este abs conv pt $x \in (4, 6)$
- seria este div pt $x \in (-\infty, 4) \cup (6, \infty)$
- $\forall [a, b] \subset (4, 6)$ seria este u c
- $x = 4 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^{2n}}{n}$ - div.
- $x = 6 \Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ - div

$\Rightarrow C = (4, 6)$

Fie $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{n}, \forall x \in (4, 6)$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cancel{n}(x-5)^{2n-1}}{\cancel{n}} = 2(x-5) \sum_{n=1}^{\infty} (x-5)^{2n-2} = 2(x-5) \cdot \frac{1}{1-(x-5)^2}$$

$$S(x) = \int S'(x)\,dx = \int \frac{2(x-5)}{1-(x-5)^2}\,dx = -\ln\left(1-(x-5)^2\right) + C$$

$$\left.\begin{aligned} S(5) &= C \\ S(5) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow S(x) = -\ln\left(1-(x-5)^2\right)$$

v) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} x^{2n+1}$ $\qquad a_6 = 0$

$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{2^n} \quad R^2 = \lim_{n\to\infty} \left| \cancel{(-1)^n} \frac{n+1}{\cancel{2^n}} \cdot \frac{2^{\cancel{n+1}}}{n+2\,\cancel{(-1)^{n+1}}} \right| = 2$ ✓

$D = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

T I Abel $\quad$ abs conv. pt $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

div pt. $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

$\forall [a,b] \subset (-\sqrt{2}, 2) \Rightarrow$ serie u c

$x = \sqrt{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\cancel{2^n}} (-1)^{2n+1} \cancel{2^n} \cdot \sqrt{2}$ - div

$x = -2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\cancel{2^n}} (-1)^{2n+1} \cancel{2^n} \cdot \sqrt{2}$ - div

$C = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} x^{2n+1}, \forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$S(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{-x^2}{2}\right)^n$

$\int S(x)\,dx$

(1) vi) $R = \lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n (n-1) \cdot \frac{1}{n\cdot(-1)^{n+1}} \right| = 1$

$\Rightarrow J = (2, 4)$

$x = 2$

$C = (2, 4)$

$(-1)^n n (x-3)^n - (-1)^n (x-3)^n$

$n=0 = 1(x-3)^0 = 1$

$n=1 \; -(x-3)^1 = -(x-3)$

$S(x) = \sum (-1)^n (n-1)(x-3)^n \quad S_2(x)$

$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n (x-3)^n - \underbrace{\sum_{n=2} (-1)^n (x-3)^n}$ $\quad S(x) = \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2$

$S_2(x) = \frac{1}{1+(x-3)} - 1 + x - 3 = \frac{1}{x-2} + x - 4 = \frac{1+x^2-2x-4x+8}{x-2} = \frac{x^2-6x+9}{x-2}$

$(\cancel{x}x)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n (x)^{n-1} = \frac{-1}{(1+x)^2}$ $\quad 1 \cdot n \cdot (x-3)^{-1} = 0$

$n=0 \Rightarrow$

$S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n (x-3)^n = (x-3) \sum_{n=2} (-1)^n n (x-3)^{n-1} =$

$\hookrightarrow n=1 \rightarrow n-1 = -1$

$= (x-3)\left[\frac{-1}{(1+x-3)^2} - 0 + 1\right] = (x-3)\left[\frac{-1}{(x-2)^2} + 1\right] =$

$= \frac{(x-3)\left[-1 + x^2 - 4x + 4\right]}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)(x^2-4x+3)}{(x-2)}$

$S_1(x) - S_2(x) = \frac{\cancel{x^3} - 4x^2 + 3x - 3x^2 + 12x - 9 - (\cancel{x^3} - 6x^2 + 9x - 2x^2 + 12x - 18)}{(x-2)^2} =$

$= \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-2)^2} = \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2$

S7. AM

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = S(x)$$

$C = [-1,1)$

$S'(x) \overset{(-1,1)}{=} \sum x^{n-1} = 1 + x + \dots = \frac{1}{1-x},\ x \in (-1,1)$

$\Rightarrow S(x) = \int \frac{1}{1-x}\, dx,\ x \in (-1,1)$

Serii de puteri

T_2 - Abel

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ o serie de puteri cu raza de convergență $R \in (0,\infty)$

Dacă seria de puteri este convergentă în pct $x_0 - R$, respectiv $x_0 + R$, atunci suma seriei

$$S(x) = \sum_{n=0}^{x} a_n (x-x_0)^n$$

$$S(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} S(x)$$

este o funcție continuă în punctele $x_0 - R$, respectiv $x_0 + R$

pag. 102

Serii Taylor $f(x) \cong T_n f(x)$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2-i^2} = \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right) \cdot \frac{1}{2i}$$

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x^2-i^2}\right)^{n-1} = \left[\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)\frac{1}{2i}\right]^{n-i}$$

Fie $f: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in J$ a.î. f = derivabilă de $n \in \mathbb{N}^*$ ori în pct x_0.

$$(T_n f)(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

↳ funcție polinomială

se numește Polinomul Taylor de gradul n asociat funcției f în punctul x_0

Funcția $(R_n f)(x) = f(x) - (T_n f)(x)$

se numește Restul de tip Taylor

$\Leftrightarrow f(x) = (T_n f)(x) + (R_n f)(x)$

↑ Formula lui Taylor

$\lim_{x \to x_0} (R_n f)(x) = 0$

Teoremă Taylor

Fie $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f = derivabilă de $n+1$ ori pe I

Atunci $(R_n f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, unde $c \in (x_0, x)$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_n} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n}$$

Obs 1 Dacă $x_0 = 0$ f lui Taylor s.n. f lui Mac-Laurin

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{}$$

Obs 2: $f(x) \cong (T_n f)(x_0)$

Serii Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$f: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in J$, f = indefinit deriv. în x_0

MAC-LAURIN $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

ex 2.

$g(x) = \cos x, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 = 0$

ex 1: $h(x) = e^x, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 = 0$

$$h(x) = \overbrace{h(0)}^{1} + \frac{x}{1!}\overbrace{h'(0)}^{1} + \dots + \frac{x^n}{n!}\overbrace{h^{(n)}(0)}^{1}$$

!! $h(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

② $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

$$(\cos x)^{(n)}\Big|_{x=0} = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2m+1 \\ (-1)^m, & n = 2m \end{cases}$$

$$g(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \dots$$

TEMĂ: $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$

$h(x) = \frac{1}{x^2-4}$

$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$

106, 108

Teorema urm. exprimă leg. între o funcție f și suma seriei Taylor centrate în x_0 asociate funcției f.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

când ? ||
$f(x)$

T: Funcția $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dezvoltată în serie Taylor în pct. x_0 $\in B \cap I \Leftrightarrow$ Șirul de funcții $(R_n f)_{n \geq 0}$ este Restul Taylor asociat fct. f în pct x_0 convergent la 0 pe B

$$\lim_{n \to \infty} (R_n f)(x) = 0$$

! dacă restu tinde la 0 → dezvoltăm

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$\ln(1+x) = g(x)$ o dezvl. până la $n=2$

$$\ln(1+x) = 0 + 1\frac{x}{1!} + 0\frac{x^2}{2!} + \boxed{}\frac{x^3}{3!}$$

S7

1) Să se studieze

i) $f(x) = sh\,x$, $f_1(x) = ch\,x$, $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = \cos^3 x$, $x \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

i) $sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Fie $g(x) = e^x$

$g(x) = T_n(x) + R_n(x)$

$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x)$

pol de grad n Taylor $x_0 = 0$ Mac Laurin

$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$, $c \in (x, x_0)$

Dacă $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$ s.n. seria Taylor

$(e^x)^{(n)} = e^x$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$e^0 = 1$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

$sh\,x = \frac{1}{2} \sum \left[\frac{x^n}{n!} - (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(1 - (-1)^n\right) =$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \cancel{2} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$ch\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

ii) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos^3 x = \frac{\cos 3x - 3\cos x}{4}$

$\cos 3x = \sum (-1)^n \cdot \frac{3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$

$\cos^3 x = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \left[3^{2n} - 3 \right] =$

$= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \left[3^{2n-1} - 1 \right]$

iii) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

$f(x) = \frac{x^2}{e^x} = x^2 \cdot e^{-x} = x^2 \sum (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n!}$

Scanat cu CamScanner

2) Să se dezvolte după puterile lui

i) $x, x-3, x+2$: $f(x) = \frac{1}{2x+3}$, $x \neq \frac{3}{2}$

ii) $x, x-3$: $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$

i) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3}x} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot x^n =$

$= \frac{1}{3} \sum \left(-\frac{2}{3}\right)^n x^n$

$\frac{2x}{3} \in (-1, 1) \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$f(x) = \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{2(x-3)+3} = \frac{1}{2(x-3)+9} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{9}(x-3)} =$

$= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2(x-3)}{9}\right]^n$, $\left|\frac{2(x-3)}{9}\right| < 1$

$\Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$

$f(x) = \frac{1}{2(x+2-2)+3} = \frac{1}{2(x+2)-1} = -\frac{1}{1-2(x+2)} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[2(x+2)\right]}_{|\,|<1}{}^n$

$x \in \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

ii) $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$f(x) = \int \sum (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n dx = \sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$x \in (-1, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0) = C \end{array}\right\} \Rightarrow C = 0$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ |x| < 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+(x-3+3)} = \frac{1}{4+(x-3)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum (-1)^n \left(\frac{x-3}{4}\right)^n, \quad \left|\frac{x-3}{4}\right| < 1 \Rightarrow x \in (-1, 7)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \frac{(x-3)^n}{4^{n+1}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} (-1)^n \cdot \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = C \\ f(3) = \ln 4 \end{array}\right\} C = \ln 4$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{n+1}}{4^{n+1}} \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} + \ln 4$$

3. i) Folosind seria binomială să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcția

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$ precizând și dom de conv. $x > -1$

ii) Folosind rezultatul, să se det. suma seriei numerice

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n, \ |x|<1, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$$

seria binomială

i) pt. $\alpha=-\frac{1}{2} \Rightarrow 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1+2n-2}{2}\right)}{n!} x^n$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot x^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n, \ |x|<1$$

pt. $x=-1$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

R - ~~D~~ - div.

$x=1$ seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ - conv. (Leibniz)

$\Rightarrow C=(-1,1]$

ii) $x=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

$$\sum (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\sqrt{2}}{2}-1 \ \Big| \ (-1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Scanat cu CamScanner

4) Folosind formula lui Taylor respectiv Mac-Laurin să se calculeze urm limite:

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{24\ln x + 6x^4 - 32x^3 + 72x^2 - 96x + 50}{3(x-1)^5}$

Fie $f(x) = \ln x \simeq T_5(x, 1) = f(1) + \frac{x-1}{1!} f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!} f^{(3)}(1)$

$+ \frac{(x-1)^4}{4!} f^{(4)}(1) + \frac{(x-1)^5}{5!} f^{(5)}(1)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$ $\quad f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{x^4}$

$f^{(5)}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$

$f'(1) = 1$ $\quad f''(1) = -1$ $\quad f^{3}(1) = 2$ $\quad f^{(4)}(1) = -3!$ $\quad f^{(5)}(1) = 4!$

$\ln x \simeq x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2!}(-1) + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot 2 + \frac{(x-3)^4}{4!} \cdot (-3!) + \frac{(x-3)^5}{5!} \cdot 4! =$

$\ln x \simeq x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}$

fie $g(x) = 6x^4 - 32x^3 + 72x^2 - 96x + 50$

$g'(x) = 24x^3 - 96x^2 + 144x - 96$ $\quad g'(1) = -24$

168 − 192 = −24

$g''(x) = 72x^2 - 192x + 144$ $\quad g''(1) = 24$

$g'''(x) = 144x - 192$ $\quad g'''(1) = -48$

$g^{IV}(x) = 144$ $\quad g^{IV}(1) = 144$

$g(x) = -24 \cdot (x-1) + \frac{24}{2}(x-1)^2 - \frac{48}{3!}(x-1)^3 + \frac{144}{4!}(x-1)^4 =$

$= -24(x-1) + 12(x-1)^2 - 8(x-1)^3 + 6(x-1)^4$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{24(x-1) - 12(x-1)^2 + 8(x-1)^3 - 6(x-1)^4 + \frac{24}{5}(x-1)^5 - 24(x-1) + 12(x-1)^2 - 8(x-1)^3 + 6(x-1)^4}{3(x-1)^5}$

$= \frac{8}{5}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3} = 4$

$f(x) = \ln(1+2x) \simeq T_3(x,0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cancel{\frac{f^{IV}(c)}{(n+1)!}x^4}$

$f'(x) = \frac{1}{1+2x}\cdot 2 = \frac{2}{1+2x}$

$f''(x) = \frac{-2\cdot 2}{(1+2x)^2} = +\frac{2^2}{(1+2x)^2}$

$f'''(x) = \frac{2^2\cdot 2(1+2x)\cdot 2}{(1+2x)^4} = -\frac{16}{(1+2x)^3}$

$\cancel{f^{IV}(x) = -\frac{2^3\cdot 3(1+4x+4x^2)}{(1+2x)^6} = \frac{2^3\cdot 3\cdot 2(1+2x)^2}{(1+2x)^6} = -\frac{2^4\cdot 3}{(1+2x)^4}}$

$f'(0) = 2 \qquad f''(0) = -4 \qquad f'''(0) = 16$

$\ln(1+2x) \simeq 0 + \frac{x}{1!}\cdot 2 + \frac{x^2}{2!}\cdot(-4) + \frac{x^3}{3!}16 =$

$= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3$

$g(x) = \sin 2x \qquad g(0) = 0$

$g'(x) = 2\cos 2x \qquad g'(0) = 2$

$g''(x) = -4\sin 2x \qquad g''(0) = 0$

$g'''(x) = -8\cos 2x \qquad g'''(0) = -8$

$g(x) = \sin 2x \simeq g(0) + \frac{x}{1!}g'(0) + \frac{x^2}{2!}g''(0) + \frac{x^3}{3!}g'''(0) =$

$= 0 + 2x + 0 + \frac{4}{3}x^3$

$h(x) = 2x^2 \qquad h(0) = 0 \qquad 2x^2 \simeq h(0) + \frac{x}{1!}h'(0) + \frac{x^2}{2!}h''(0) =$

$h'(x) = 4x \qquad h'(0) = 0$

$= 2x^2$

$h''(x) = 4 \qquad h''(0) = 4$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{12}{3}x^3 + }{x^3} = 4$

$$\lim_{x \to \infty} x\left[3-4x+6x^2-12x^3+12x^4\left(\ln(1+x)-\ln x\right)\right] = \frac{12}{5}$$

$x = \frac{1}{y}$

$x \to \infty \quad y \to 0 > 0$

8) AM

curs

dez. Mac-Laurin sin, cos, sh, ch

TI Abel

Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$

i) Dezv. f în serie Taylor pt $x=0$ (Mac-Laurin)

$f(x)=\ln(1+x)$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $|x|<1$

f - se obține prin integrare

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(\sum(-1)^n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$, $|x|<1$

ii) Dezv. în serie Taylor în $x=-2$

$\frac{1}{1-y}=\sum_{n=0}^{\infty}y^n$, $|y|<1$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{(x+2)-1}=-\frac{1}{1-(x+2)}=$

$=-\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n$, $|x+2|<1 \iff -3<x<-1$

$\Rightarrow$ nu există dezvoltarea

(f nu poate fi dezvoltat în serie)

$f(x)=\frac{1}{4-x^2}$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad x_0=-1$

$f(x)=\frac{1}{(2-x)(2+x)}=\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}\right)\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{3-(x+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+1}{3}}\to J_1$

$\frac{1}{2+x}\qquad\to J_2$

$\Big\}\overset{\cap(-2,2)}{\Longrightarrow}$

$g(x)=\operatorname{arctg}x$ $\quad g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1) \rightarrow \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

dezv. seria binomială

↓

la rad

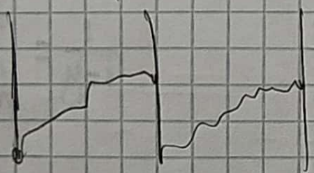
$$\frac{12 \ln x + 3x^4 - 16x^3 + 36x^2 - 48x + 25}{(x-1)^5}$$

$x - 1 = y \quad x = y + 1$

Seria binomială

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$$

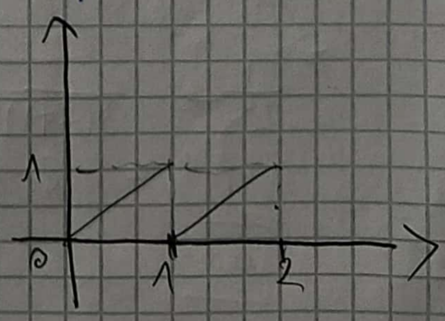
$x \in (-1,1)$



Serii Fourier trigonometrice (SFT)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(w n x) + b_n \sin(w n x)\right) = S(x)$$

Forma generală a unei SFT $a_k, k = \overline{0,n}$; $b_k, k = \overline{1,n}$ s.n. coef. SFT



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

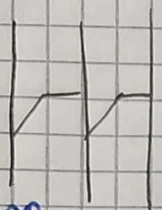
f - periodică pe $\mathbb{R}$, de perioadă T

$f(x+T) = f(x), \forall x$

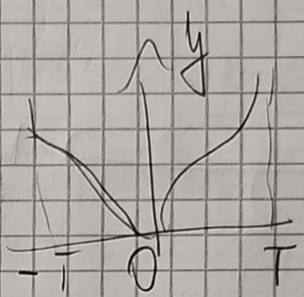
$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(\omega m x)\, dx \quad , m \geq 0$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\omega m x)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = S = \frac{\pi^2}{6}$$



Teorema lui Dirichlet

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodică, de perioada $T > 0$

Dacă i) f este mărginită pe $[a, a+T] \subset \mathbb{R}$

ii) f este monotonă pe porțiuni $[a, a+T)$

iii) f este continuă sau are un nr finit de puncte de discontinuitate de speța I pe $[a, a+T]$

atunci f este dezvoltabilă în SFT de forma ~~trigo~~:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos(\omega m x) + b_m \sin(\omega_m x)\right)$$

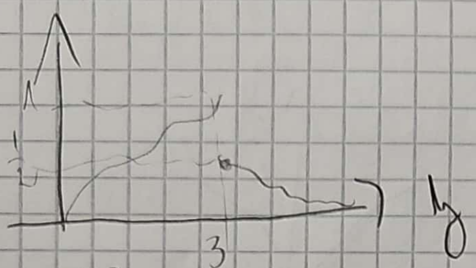
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_m = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \cos(\omega m x)\, dx \quad , m \geq 0$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \sin(\omega m x)\, dx$$

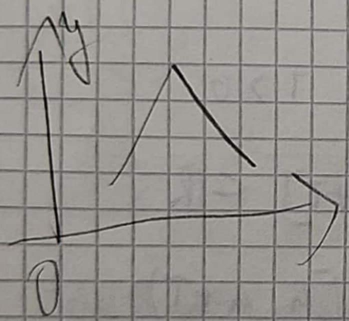
În plus :

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x = \text{pct. de cont.} \\ \dfrac{f_s(x) + f_d(x)}{2}, & x = \text{pct. de disc de speța I} \end{cases}$$



$f_s\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ $\quad \frac{3}{2}$

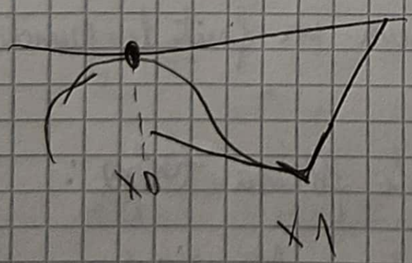
$f_d\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$



cont dar nu deriv.

$f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$

$y - y_0 = f_s(x - x_0)$



Seminar

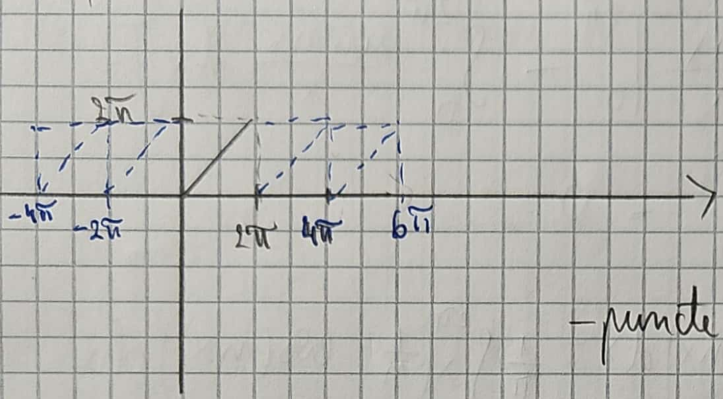
16.11.2023

S8 Serii Fourier

① $f(x) = x$, $0 \le x \le 2\pi$, $T = 2\pi$

a) să se det. coef. Fourier

b) să se scrie seria Fourier asociată funcției f



Prelungim funcția prin periodicitate pe $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ punctele $x_k = 2k\pi$ - puncte de disc. de speța I

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx, \quad n \ge 1$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx, \quad n \ge 1$$

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{b-a}$$

$f : [a, a+T] \to \mathbb{R}$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \cos(n\omega x)\,dx, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad n \ge 1$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \sin(n\omega x)\,dx, \quad n \ge 1$$

$$\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(4\pi^2\right) = 2\pi$$

$$a_m = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(m\omega x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\left(\frac{\sin mx}{m}\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\,\frac{\sin mx}{m}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin mx}{x}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos mx}{m^2}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$b_m = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(\omega m x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\left(-\frac{1}{m}\cos(mx)\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{m}\cos mx\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos mx}{m}\,dx\right) =$$

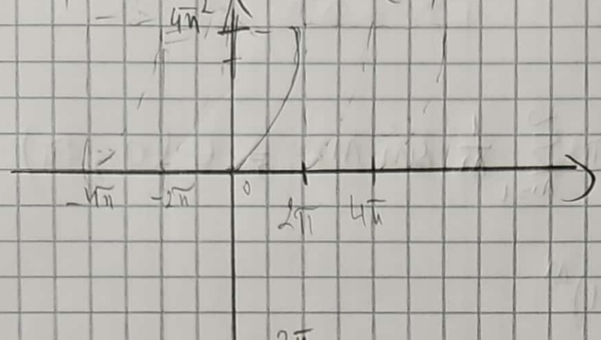
$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{m}\cos 2m\pi + \frac{\sin mx}{m}\Big|_0^{2\pi}\right) = -\frac{2}{m}$$

$$f(x) \to \pi + \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{2}{m}\sin mx \underset{\text{T. Dirichlet}}{=} \begin{cases} \tilde{f}(x), & x \neq 2k\pi \\ \frac{f(0+0)+f(2\pi-0)}{2} = \pi, & x = 2k\pi \end{cases}$$

2) $f(x) = x^2, \quad 0 \le x \le 2\pi, \quad T = 2\pi \qquad V(0,0)$

a) seria SFT

b) Fol. rezultatul, dem că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$



$$\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3\pi} 8\pi^3 = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int x^2 \left(\frac{\sin nx}{n}\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \int 2x \frac{\sin nx}{n} dx \right) =$$

$$\frac{1}{\pi} \left(0 + \frac{2}{n} \int x \left(\frac{\cos nx}{n}\right)' dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{n^2} x \cos nx \Big|_0^{2\pi} - \int \frac{\cos nx}{n} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{n^2} \cdot 2\pi + \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}\right.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \left(\frac{\cos nx}{n}\right)' dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(x^2 \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} x \left(\frac{\sin nx}{n}\right)' dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{4\pi^2}{n} - \frac{2}{n} \left(\underbrace{x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi}}_{0} + \underbrace{\frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi}}_{0} \right) \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{4\pi^2}{n} \right) = -\frac{4\pi}{n}$$

$$f(x) \to \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx =$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}\cos nx - 4\pi \sum_{n=1} \frac{1}{n}\sin nx =$$

$$\text{T Dirichlet} = \begin{cases} \widetilde{f(x)}, & x \neq 2k\pi \\ \frac{f(0+0)+f(2\pi-0)}{2} = 2\pi^2, & x = 2k\pi \end{cases}$$

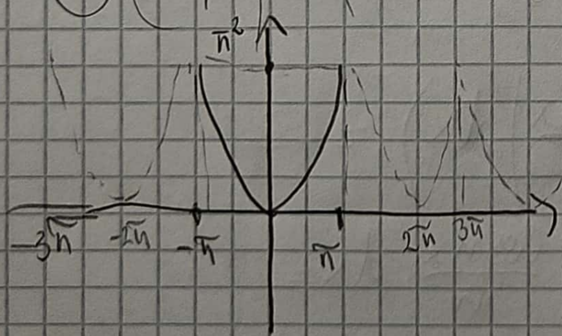
$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos nx - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin nx \quad \forall x \in (0, 2\pi)$$

$$x = \pi \quad \pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(-1)^n$$

$$-\frac{\pi^2}{3} = 4\sum \frac{1}{n^2}(-1)^n \quad \Big| \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(-1)^{n+1} = \frac{\pi^2}{12} \quad \checkmark$$

③ $(-\pi, \pi)$ $\quad f(x) = x^2 \quad T = 2\pi \quad \omega = 1$



$f(x) = \text{SFT}$

$a_0 =$

S9 23. 11. 2023

1 Să se dezvolte în serie de sinusuri, funcția periodică

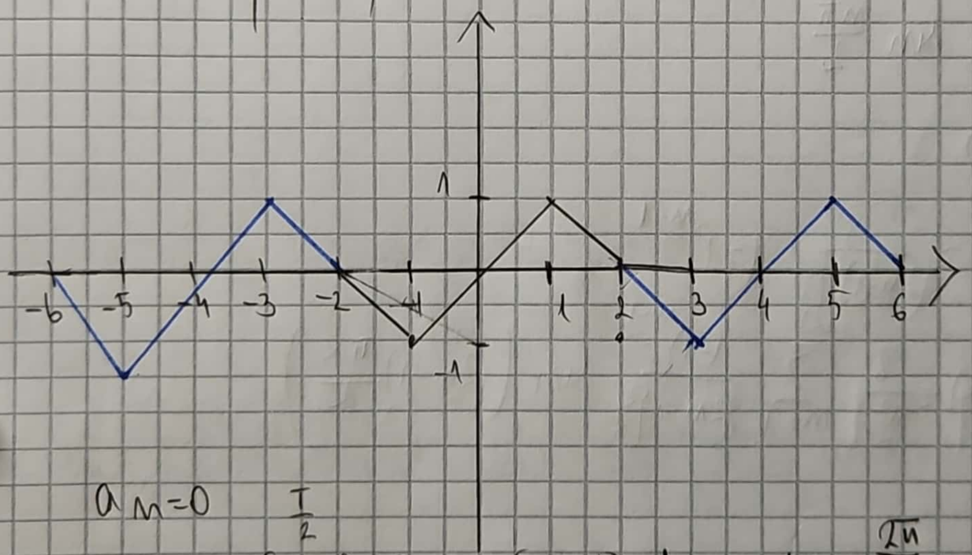
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$T = 4$

Prelungim funcția prin imparitate pe intervalul $[-2, 0]$, iar apoi prin periodicitate pe $\mathbb{R}$.

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,2] \\ -f(-x), & x \in [-2,0) \end{cases} = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \\ x, & -1 \le x < 0 \\ 2-x, & -2 \le x \le -1 \end{cases}$$

$$f(-x) = \begin{cases} -x, & 0 \le -x \le 1 \\ x-2, & 1 \le -x \le 2 \end{cases}$$



$a_n = 0$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(\omega n x)\, dx \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$b_n = \frac{4}{4} \int_0^2 f(x) \sin \frac{\pi n x}{2}\, dx$$

$$= \int_0^1 x \sin \frac{\pi n x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{\pi n x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \int_0^1 x \left(-\cos \frac{\pi n x}{2}\right)' dx + \left(-\frac{2}{\pi n}\right) \int_1^2 (2-x) \left(-\cos \frac{\pi n x}{2}\right) dx =$$

$$= + \frac{2}{\pi n}\left(-x\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos\frac{\pi n x}{2}\,dx\right) + \frac{2}{\pi n}\left[-(2-x)\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_1^2\right.$$

$$\left. + \int_1^2 -\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx\right] =$$

$$= + \frac{2}{\pi n}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^1\right) + \frac{2}{\pi n}\left[\cancel{+\cos\frac{\pi}{2}x} - \right.$$

$$\left. \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_1^2\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi}{2}n + \frac{2}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\left(\sin \pi n - \sin\frac{\pi}{2}n\right) =$$

$$\cancel{-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - 0 + \cancel{\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}}$$

$$- \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} =$$

$$= \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\Rightarrow b_{2n} = 0$$

$$\Rightarrow b_{2n-1} = \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n-1}$$

T. Dirichlet

$$\Rightarrow f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\left((2n-1)\frac{\pi x}{2}\right)$$

2) Să se dezvolte în serie Fourier de cosinus funcția periodică

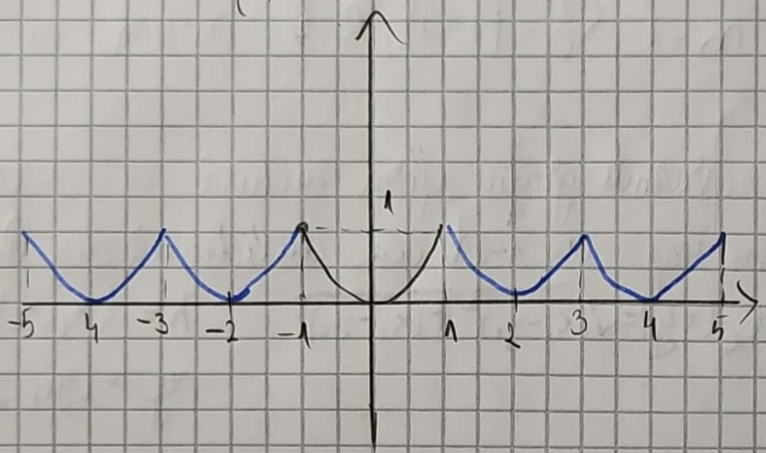
$f(x) = x^2, x \in [0,1]$ $\qquad f(-x) = x^2, \; -x \in [0,1]$

$x \in [-1, 0]$

$T = 2$

Deoarece f nu este pară o prelungim prin paritate

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,1] \\ f(-x), & x \in [-1,0] \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \\ (-x)^2, & x \in [-1,0] \end{cases}$$



$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx = 2 \int_0^1 x^2\,dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(n w x)\,dx \qquad w = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x)\,dx = \frac{2}{n\pi}\left(x^2 \sin n\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 2x \sin n\pi x\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\sin(n\pi) - 2 \cdot \frac{1}{n\pi}\left(x(-\cos n\pi x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos n\pi x\,dx\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\sin(n\pi) - \frac{2}{n\pi}\left(-\cos(n\pi) + \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x\Big|_0^1\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\sin(n\pi) + \frac{2}{n\pi} \cos(n\pi) - \right.$$

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2} \cos n\pi x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Scanat cu CamScanner

Spații metrice

1. Fie $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \,,\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

a) $(\mathbb{R}^n, d)$ - sp. metric

b) Să se det, iar apoi să se rep. grafic sfera închisă cu centrul x_0 de rază n) $n=2$, $x_0 = (1,-1)$, $R=2$ în rap cu metrica definită la a

c) Să se det și să se reprezinte grafic sfera închisă cu centrul x_0 și rază 2, $x_0 = (1,-1)$ în rap. cu metrica euclidiană din $\mathbb{R}^2$.

$d_e : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $d_e(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ $\quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

a) M_1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

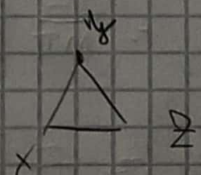
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0$$

$$|x_1-y_1| + |x_2-y_2| + \dots |x_n - y_n| = 0 \iff |x_i - y_i| = 0 \iff x_i = y_i$$

$$\iff x = y$$

M_2) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \quad \forall\ x,y \in \mathbb{R}^n$$



M_3) $d(x,y) = \sum |x_i - y_i| =$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| =$$

$$= d(x,z) + d(z,y),\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow d$ - sp. metric

b) $S_d(x_0, r) = \{x \in M \mid d(x, x_0) \le r\}$

$M = \mathbb{R}^2 \quad x_0 = (1, -1), \ r = 2$

$d((x_1, x_2), (1, -1)) = |x_1 - 1| + |x_2 + 1|$

$S_d(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - 1| + |x_2 + 1| \le 2\}$

$\cdot \ |x_1 - 1| = \begin{cases} x_1 - 1, & x_1 \ge 1 \\ 1 - x_1, & x_1 < 1 \end{cases}$

$|x_2 + 1| = \begin{cases} x_2 + 1, & x_2 \ge -1 \\ -1 - x_2, & x_2 < -1 \end{cases}$

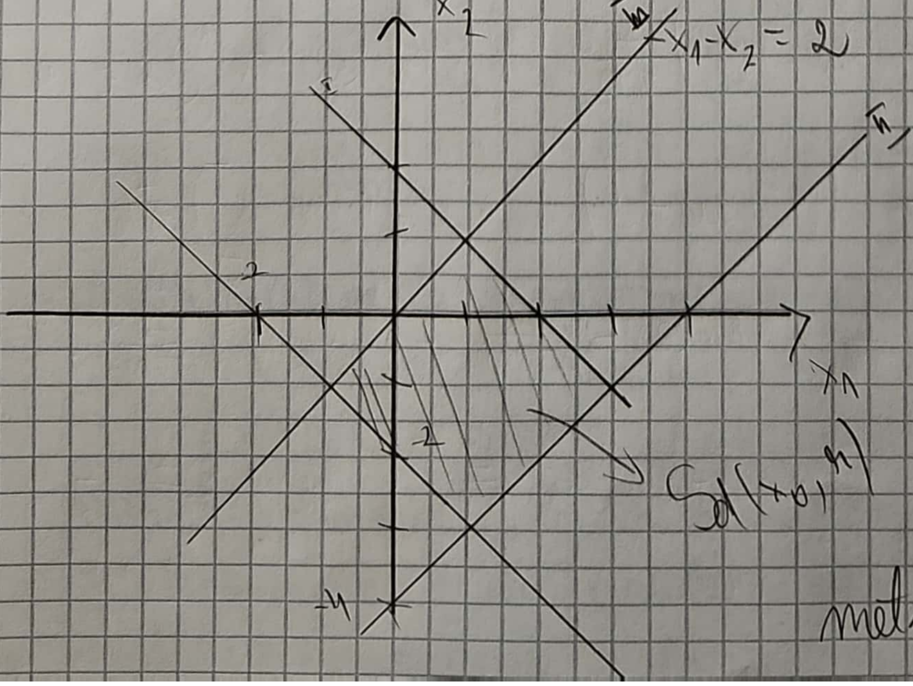
I. $x_1 \ge 1, \ x_2 \ge -1 \iff x_1 + x_2 = 2$

II $x_1 \ge 1, \ x_2 < -1 \quad x_1 - x_2 = 4$

III $x_1 < 1, \ x_2 \ge -1 \quad x_1 = x_2$

IV. $x_1 < 1, \ x_2 < -1 \quad -x_1 \cancel{+1} - x_2 \cancel{-1} = 2$

$-x_1 - x_2 = 2$



metrica modulului

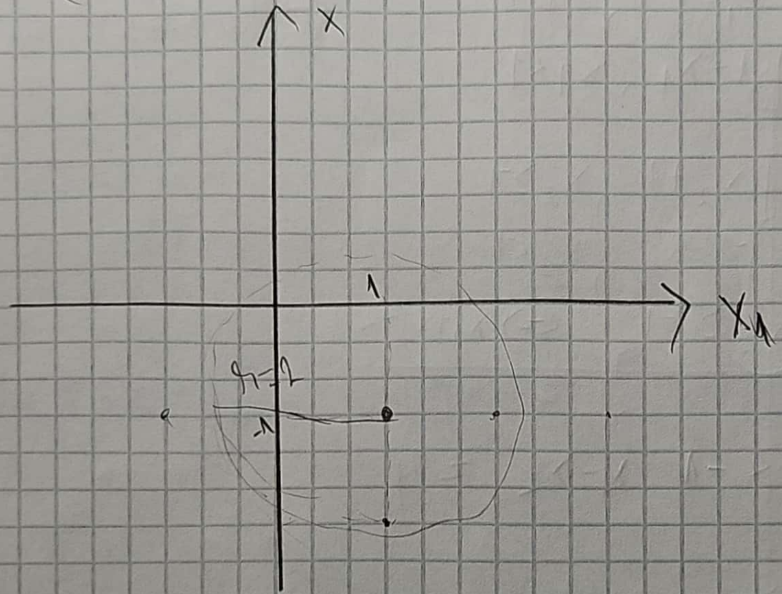
c) $d_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2, y_2)^2}$

$d(x - x_0) \le r$

$Sd(x_0, r) = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 / d((x_1, x_2), (1, -1)) \le 2\}$

$\sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2} \le 2 \quad |^2$

$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \le 4$ (int. cerc. cu centrul $(1, -1)$, $r = 2$)



Curs S10 28.11.2023

T. $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $x_0 \in A'$ u.a.s.e.

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ cu $\|x - x_0\| < \delta$

$\Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$

iii) $\forall x_n \in A \setminus \{x_0\}$ cu $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} l$

Obs: $|x - x_0| = \sqrt{(x_1 - x_0^1)^2 + (x_2 - x_0^2)^2 + \dots + (x_p - x_0^p)^2}$

Dacă o fct are limită într-un punct, atunci limita sa este unică

Remarcă: Studiul existenței limitei unei funcții vectoriale se reduce la existența limitei fiecărei componente reale în parte

$f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))$, $x \in A \subset \mathbb{R}^p$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (f_1(x), \dots, \lim\limits_{x \to x_0} f_q(x))$

Dacă $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f_i(x)$ $i = \overline{1,p}$ at. $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Limite relative la o mulțime, limite iterate

Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ $x_0 \in A'$ $B \subset A$ $x_0 \in B'$

$f_B: B \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ $f_B(x) - f(x)$ numită restricția funcției f la mulțimea B.

Se spune că f are limită relativă la mulțimea B în punctul ~~B~~ $x_0 \in B'$ dacă restricția la f_B are limită în punctul

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ 18 EXCLUS

Obs:

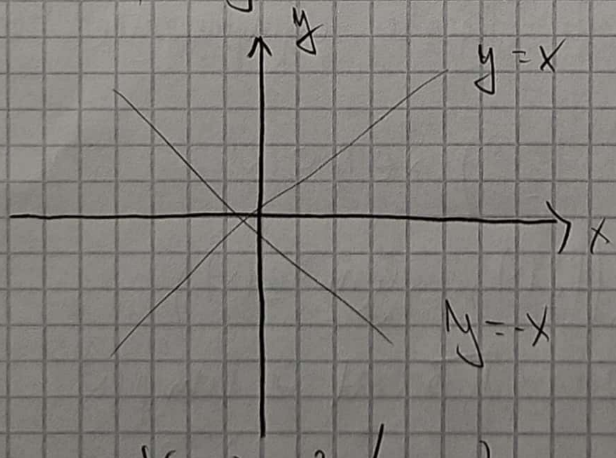
1) Limitele relative la o mulțime se folosesc pt. a arăta că o funcție nu are limită într-un punct

2) Dacă $\nexists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x)$ atunci f nu are lim în x_0

3) Dacă
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_1}} f(x) = l_1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_2}} f(x) = l_2 \\ l_1 \neq l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$$

ex. $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ nu are limită în $(0,0)$



Fie $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in B_1}} f(x,y) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \\ \text{Fie } B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\} \\ \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \dfrac{-x^2}{x^2+x^2} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ nu are lim în } x_0$$

Obs: Fie $B_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B_m}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Deoarece depinde de parametrul $m \Rightarrow f$ nu are lim în $(0,0)$

Limite iterate.

$f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x_0, y_0) \in A'$

$$l_{12} = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

$$l_{21} = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$ s.n. limite iterate

Obs 1) Limitele iterate ale unei funcții nu sunt neapărat egale, iar dacă sunt egale nu rezultă existența limitei f în raport cu ansamblul variabilelor

2) Dacă $l_{12} \neq l_{21}$ ($\exists$ și sunt dif) $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

3) Dacă o lim iterată $\exists$, iar cealaltă nu, se poate întâmpla ca limita globală să existe, caz în care, ea va fi egală cu val. limitei iterate care există

Crt. clestelui

Pt. a arăta că o limită are lim într-un punct utilizăm crt. majorării.

$f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$

$(a, b) \in A'$

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = 0$

$\exists\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $|f(x,y) - l| < g(x,y)$ pe $V_{(a,b)} \cap A$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$

ex. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3 y^5)}{x^2+y^2}$

$$\left| \frac{\sin(x^3y^5)}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{x^3y^5}{x^2+y^2} < \left| \frac{x^3 y^5}{2xy} \right| = \frac{x^2 y^4}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Continuitatea funcțiilor de mai multe variabile

Fie $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o f. de 2 variabile $(x_0, y_0) \in A$ funcția f este continuă în pct $(x_0, y_0) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ și aceasta este egală cu val f în pct. $= f(x_0, y_0)$

O funcție f este cont pe mulțimea A dacă este cont. în orice punct al său

Obs: f este cont parțial în (x_0, y_0) dacă

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$ (f cont. parțial în rap cu x)

$\lim\limits_{y \to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$ (f cont parțial în raport cu y)

Caracterizarea continuității punctuale

$f: A \subset X \to Y$ și $x_0 \in A \cap A'$: $\quad X = \mathbb{R}^p \quad Y = \mathbb{R}^q$

1) f cont în x_0

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0)$

3) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ a.î. $\forall\, x \in A\ |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

4) $\forall\, (x_n) \in A \quad x_n \xrightarrow[n \to \infty]{(\mathbb{R}^p, d)} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{(\mathbb{R}^q, \rho)} f(x_0)$

Prelungirea prin continuitate

$f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (a, b) \in A'$

- (a, b) situat în afara dom de def A

- $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = l$ $\exists$ și este finită

$\Rightarrow$ f se poate prelungi la $A \cup \{a, b\}$

$\tilde{f}: A \cup \{(a, b)\} \to \mathbb{R}, \ \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in A \\ l, & (x, y) = (a, b) \end{cases}$

Analiză matematică

05. 12. 2023

(curs 11 - S 11)

Derivate parțiale și diferențiabile de ordinul 1 pt. funcții de mai multe variabile

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$x_0 \in D \subset \mathbb{R}$

$f(x) = x^n \quad f'(x_0) = n x_0^{n-1}$

$f(x, y) = x^2 y - x \sin(x+y)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$

$\nexists\, f'(x, y)$ dar $\exists\, f'_x(x, y)$ și $f'_y(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x, y) = x^2 y - x \sin(x+y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cancel{x} \sin x}{\cancel{x}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy - \sin(x+y) - x\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = 2y - \cos(x+y) - \cos(x+y) + x\sin(x+y)$$

Def. $(x_0, y_0, z_0) \in B' \subset \mathbb{R}^3$, $f: B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

f - diferențiabilă în $(x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow \exists\ w: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continuă

și nulă în (x_0, y_0, z_0) a.î. $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) =$

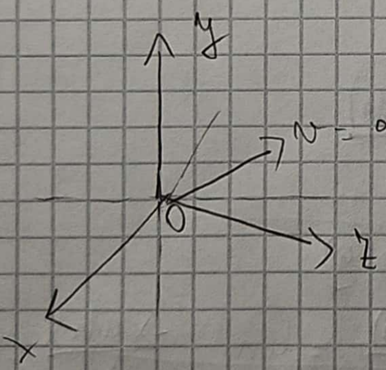
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - z_0) + w(x, y, z) \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\|(x,y,z) - (x_0, y_0, z_0)\|}_{= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

$$pr_x(x, y, z) = x \overset{not}{=} dx$$

$$pr_y(x, y, z) = y \overset{not}{=} dy$$

$$pr_{x_k}(\overline{x}) = x_k \qquad \overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$$



$$\vec{v} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

f - diferențiabilă în (x_0, y_0, z_0) dacă toate derivatele parțiale de ordinul 1 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ sunt funcții continue în (x_0, y_0, z_0)

ex: $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$

$! \; \omega(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{y}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$

$$d f'(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\,dz$$

$f(x, y, z) = (\square_1, \square_2, \square_3, \square_4)$

$f(x, y, z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z), f_4(x,y,z))$

$$Jf(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, \overset{a}{y_0}, z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & & \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & & \\ \frac{\partial f_4}{\partial y}(x_0, y_0, z_0 & & \end{pmatrix}$$

Obs: Dacă matricea J este pătratică și det ei se numește jacobianul sau det funcțional

$$\det J = \frac{D(f_1, f_2, \dots)}{D(x_1, x_2, \dots)} \quad (\bar{a})$$

S11. AM 07.12.2023

$f(x,y) = \frac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2} \quad (x,y) \neq (0,0)$

Met I) Dt. Heine

Fie $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2}} = \frac{1}{4}$

Fie $(x_n', y_n') = \left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right) \longrightarrow (0,0)$

$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right) = \frac{2\cdot\frac{4}{n^2} - \frac{9}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{27}{n^2}} = \lim \frac{-1}{n^2}\cdot\frac{n^2}{31} = -\frac{1}{31}$

T. Heine $\Rightarrow$ f nu are lim în $(0,0)$

Met II Limite relative la o mulțime

Fie $A_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = mx, \ m \in \mathbb{R}\}$

$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A_m}} f(x, mx) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{2x^2 - m^2x^2}{x^2+3m^2x^2} = \frac{2-m^2}{1+3m^2}$ $\quad x \to 0$

Deoarece lim. f rel la mulțimea A_m în punctul $(0,0)$ depinde de parametrul $m \Rightarrow f$ nu are lim în $(0,0)$

Met III Limite iterate

$l_{12} = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

$l_{21} = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{3y^2} = -\frac{1}{3}$

$l_{12} \neq l_{21}$ și ele $\exists \Rightarrow$ funcția nu are limită

Scanat cu CamScanner

ii) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ $\quad (x,y)\neq(0,0)$

T. Lim rel la o mulțime

$A_m=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=mx,\ m\in\mathbb{R}\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A_m}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{mx^2}{x^2+mx^2} \text{ dau factor } = \frac{m}{1+m}$$

$x\to 0$

Deoarece lim f. rel depinde de m => -||- nu are

iii) $f(x,y)=\frac{x^3y^2}{2x^6+y^4}$, $(x,y)\neq(0,0)$

$A_m=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=m\sqrt{x^3},\ m\in\mathbb{R}\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A_m}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{m^2x^6}{2x^6+x^6 6^4} = \frac{m^2}{3}$$

=> Deoarece lim f rel în (0,0) depinde de m

=> f nu are lim

și cu șiruri $\to \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}\right)$ și $\left(\frac{2}{n^2}, \frac{1}{n^3}\right)$

Să se studieze ② Existența limitelor iterate și a limitei globale a urm. funcții

i) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ $(x,y) \neq (0,0)$

ii) $f(x,y) = \frac{x^4y^5}{x^2+y^4}$ $(x,y) \neq (0,0)$

iii) $f(x,y) = x \sin\frac{1}{x} \cos\frac{1}{y}$, $(x,y) \neq (0,0)$

i) $l_{12} = l_{21} = 0 \Rightarrow$ nu știm

$y = m\sqrt{x}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0 \\ (x,y)\in A_m}} \frac{x^2m^2}{x^2+x^2m^4} = \frac{m^2}{1+m^4}$$

$\Rightarrow$ nu are lim

sau Fie $A_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = my^2, y \in \mathbb{R}\}$

ii) $l_{12} = l_{21} = 0$

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^4y^5}{x^2+y^4}\right| \leq \left|\frac{x^4y^5}{2xy^2}\right| =$$

$$= \frac{|x^3y^3|}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \overset{\text{crt}}{\underset{\text{maj}}{\Rightarrow}} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

iii) ~~$l_{12} = l_{21} = 0$~~

~~$|f(x,y) - 0| = |$~~

l_{12} lim nu există pt. că

$g(y) = \cos\frac{1}{y}$, $y \neq 0$

Fie $x_n = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi) = 1$

$y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n+1)\pi = -1$

crt Heine $\Rightarrow \nexists l_{12}$

l_{21} $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} \cos\frac{1}{y}\right) = 0$

$|x \sin\frac{1}{x}| = |x|\,|\sin\frac{1}{x}| \leq |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \overset{\text{crit.}}{\underset{\text{maj}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

lim globală $|x \sin\frac{1}{x} \cos\frac{1}{y}| = |x|\,|\sin\frac{1}{x}|\,|\cos\frac{1}{y}| \leq |x| \xrightarrow[x\to(0,0)]{} 0$

$\overset{\text{crit.}}{\underset{\text{maj}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

(3) Să se studieze continuitatea urm. funcții

a) $f(x,y) = \begin{cases} (1+3x^3y^4)^{\frac{1}{x^2+y^4}} & (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} tg\,\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to(0,0)} (1+3x^3y^4)^{\frac{1}{x^2+y^4}} = e^{\lim\limits_{x,y\to(0,0)} \frac{3x^3y^4}{x^2+y^4}}$

$g(x,y) = \frac{3x^3y^4}{x^2+y^4}$

$\left|\frac{3x^3y^4}{x^2+y^4} - 0\right| \leq \left|\frac{3x^3y^4}{2xy^2}\right| = \frac{|3x^2y^2|}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

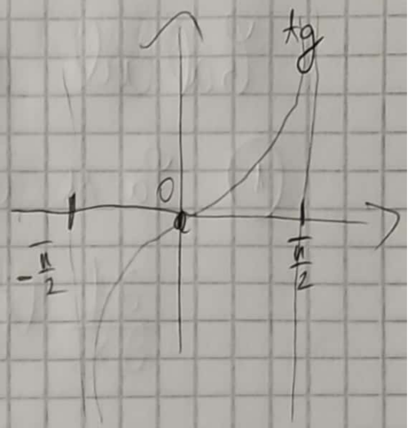
$\overset{\text{crit.}}{\underset{\text{maj}}{\Rightarrow}} \lim g(x,y) = 0$

$\Rightarrow e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)} = 1$

dacă $\alpha = 1 \Rightarrow f$ - poate fi prelungită prin cont. și f - cont. în $(0,0) \Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R}^2$

$\alpha \neq 1 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) \Rightarrow f$ nu e cont în $(0,0) \Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{tg(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \overset{\frac{0}{0}}{=}$



$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\dfrac{tg(x^3+y^3)}{x^3+y^3}}^{1} \cdot \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} =$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

$\left|\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\dfrac{y^3}{x^2+y^2}\right| = |x| \underbrace{\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right|}_{\leq 1} + |y| \underbrace{\left|\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right|}_{\leq 1} \leq$

$\leq |x| + |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

$\overset{crit.}{\underset{maj}{\Rightarrow}} \lim \dfrac{tg(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0$

pt. $\alpha = 0 \Rightarrow$ cont pe $\mathbb{R}^2$

$\alpha \neq 0 \Rightarrow$ cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Calcul diferențial în $\mathbb{R}^n$

① Să se calc cu def

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x,-1)-f(1,-1)}{x-1} = \qquad f(x,y) = x^2y^3\ln(x^2+y^2)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-x^2\ln(x^2+1)+\ln 2}{x-1} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2x \frac{1}{x^2+1} 2x}{1} = -4$$

∂

(2) Matricea Jacobi

$F: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y,z) = \Big(\underbrace{\frac{x}{yz}}_{f_1(x,y,z)};\ \underbrace{\Big(\ln \frac{x+y^2-z^3}{x^2 z+y}\Big)^x}_{f_2(x,y,z)}\Big)$$

$x_0 = (2,1,1)$

2×3

→ deriv de ordin 1

$$J_F(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1}{yz} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{x}{y^2 z} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = -\frac{x}{yz^2}$$

$$(2,1,1) = 1 \qquad (2,1,1) = -2 \qquad (2,1,1) = -2$$

$f_2(x,y,z) = x \ln(x+y^2-z^3) - x \ln(x^2 z+y)$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \ln(x+y^2-z^3) + x \frac{1}{x^2+y^2-z^3} - \ln(x^2 z+y) - x \frac{1}{x^2+z+y} 2x$$

$$(2,1,1) = \ln 2 + \frac{2}{3} - \ln 5 - \frac{8}{5}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = x \frac{1}{x^2+y^2-z^3} 2y - x \frac{1}{x^2 z+y}$$

$\frac{8}{5}$

$$(2,1,1) = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{3} - \frac{2}{5} = \frac{20-6}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = x \frac{1}{x^2+y^2-z^3} \cdot (-3z^2) - x \frac{1}{x^2 z+y} x^2$$

$$(2,1,1) = 2 \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot (-\cancel{3}) - 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 4 = -2 - \frac{8}{5} = -\frac{18}{5} \qquad -\frac{23}{5}$$

Derivata după o direcție

Curs S12

12.12.2020

$f'(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$x - x_0 = t \Rightarrow x = x_0 + t$

$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$

Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\bar{s} \in \mathbb{R}^3$ ↳ versor unitar

Se numește derivata fct. f în punctul $a(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ după direcția $\bar{s}$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{s}}(\bar{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{a} + t \cdot \bar{s}) - f(\bar{a})}{t}$$

Derivate și diferențiale de ordin superior

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \delta^0 \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$\frac{\partial \square}{\partial x}$ sau $(\square)'_x$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \overset{def.}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n}}$$

$$\sum_{i=1} n_i = m$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]\Bigg|_{(x_0, y_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]\Bigg|_{(x_0, y_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)}{y - y_0}$$

$$f(x,y,z)=e^{x-y^2+z}\ln(1-x^2+y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Teorema lui Schwarz

Fie $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x_0,y_0)\in D$

Sp. că există $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$

Dacă una din deriv. parțiale mixte de ord 2 continuă în (x_0,y_0)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$

fct pe ramuri, lim cu ansamblu variabil

$f: D\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$

$f(\bar{x})\overset{def}{=}(f_1(\bar{x}),f_2(\bar{x}),\dots,f_q(\bar{x}))$ $\quad\bar{x}=(x_1,x_2,\dots x_p)$

$f_i: D\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$

$i=\overline{1,q}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x_0})=\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(\bar{x_0}),\dots,\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(\bar{x_0})\right)$$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(\underset{f_1}{x-y},\ \underset{f_2}{y^2 z x})$

$$d^1_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy=$$

$$d^2_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)dy^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_0,y_0)dx^2dy$$

$$d^1_{(x_0,y_0,z_0)}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)dz$$

$$d^2_{(x_0,y_0,z_0)} =$$

Leibniz

$$(f \cdot g)^{n} = C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{n-1} g^1 + \dots + C_n^n f g^{(n)}$$

Seminar AM S12

Derivate parțiale și diferențiale de ordin superior

1\. Fie funcția $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

i) f - cont. în origine

ii) f - nu e diferențiabilă în origine

iii) $\dfrac{df}{ds}(0,0)$, unde $\bar{s} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

v) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \overset{\text{ineg. med.}}{\leq} \left|\frac{xy^2}{2xy}\right| = \frac{|y|}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

crit. maj $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ - cont în $(0,0)$

ii) f - dif în $(0,0)$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$

- $\exists\ \omega: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cont și nulă în $(0,0)$ a.î.

$(\forall) f(x,y) = f(0,0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) + \omega(x,y)\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$

$f(x,y) = \omega(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \omega(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Fie $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}} = 0$

Fie $(x_n', y_n') = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{n}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

crit. Heine $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \omega \Rightarrow \omega$ - nu e cont în $(0,0)$

$\Rightarrow f$ - nu e diferențiabilă în $(0,0)$

iii) $\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

! $f(x,y,z) = 2xy^2 - 3yz^3 + xyz$

$\bar{v} = -\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$

$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(1,2,-1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,-1)\cdot(-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-1)\cdot 3 + \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1)\cdot(-2)$

3. Calculați diferențiala $d_{x_0}f$, $d^2_{x_0}f$, $d^3_{x_0}f$

$f(x,y,z) = \frac{x-y}{z} + \frac{z^2}{xy}$ $\quad x_0 = (1,-1,-1)$

$d_{x_0}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)dz$

$f(x,y) = e^{2xy}$ $\quad x_0 = (0,1)$

$d_{x_0}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)dy$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y e^{2xy} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x e^{2xy} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$

$d_{x_0}f = 2\,dx$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2xy}2y\right) = 2y\cdot 2y e^{2xy} \to (0,1) = 4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2xy}2x\right) = 2x\cdot 2x e^{2xy} \to (0,1) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x e^{2xy}\right) = e^{2xy}\cdot 2x\cdot 2y + e^{2xy}\cdot 2 = e^{2xy}\cdot 2(1+2xy)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2xy}2y\right) = e^{2xy}\cdot 2y\cdot 2x + e^{2xy}\cdot 2 = e^{2xy}\cdot 2(1+2xy)$

$f \in C^2 \xRightarrow[\text{Schwarz}]{\text{Lema}} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)=4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=2$$

$$\Rightarrow d^2_{x_0} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0)dy^2$$

$$= 4dx^2 + 4dxdy$$

Matricea Hessiană

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^3_{x_0} f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0)dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0)dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0)dxdy^2$$

$$+ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0)dy$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \left(4y^2 e^{2xy}\right)'_x = 8y^3 e^{2xy}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \left[2e^{2xy}(1+2xy)\right]'_x = 2e^{2xy}\cdot 2y(1+2xy) + 2e^{2xy}\cdot 2y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \left(4x^2 e^{2xy}\right)'_x = 8xe^{2xy} + 4x^2 e^{2xy}\cdot 2y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \left(4x^2 e^{2xy}\right)'_y = 8x^3 e^{2xy}$$

în $(0,1)$: $4, 8, 0, 0$

$$d^3_{x_0} f = 8dx^3 + 8dx^2dy$$

4) Derivarea funcțiilor compuse

$f(x,y) = g(x\cos y;\ x^2 y^3)$ $g \in C_b^2$, $b \subset \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$u(x,y) = x\cos y$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin y$

$v(x,y) = x^2 y^3$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy^3 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2y^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y \frac{\partial g}{\partial u} + 2xy^3 \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y \frac{\partial g}{\partial u} + 3x^2y^2 \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta_x \cdot = \cos y \frac{\partial \cdot}{\partial u} + 2xy^3 \frac{\partial \cdot}{\partial v} \\ \delta_y \cdot = -x\sin y \frac{\partial \cdot}{\partial u} + 3x^2y^2 \frac{\partial \cdot}{\partial v} \end{array}\right\rangle$$ operatori de derivare pct înlocuim cu ab

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x\sin y \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + 3x^2y^2 \frac{\partial g}{\partial v}\right) =$$

$$= -\sin y \frac{\partial g}{\partial u} - x\sin y\, \delta_x \frac{\partial g}{\partial u} + 6xy^2 \frac{\partial g}{\partial u} + 3x^2y^2 \delta_x \frac{\partial g}{\partial v} =$$

$$= -\sin y \frac{\partial g}{\partial u} - x\sin y\left[\cos y \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2xy^3 \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\right] +$$

$$+ 6xy^2 \frac{\partial g}{\partial u} + 3x^2y^2\left[\cos y \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 2xy^3 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right] =$$

$$= -\sin y \frac{\partial g}{\partial u} - x\sin y \cos y \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - x\sin y\, 2xy^3 \frac{\partial g}{\partial v \partial u} + 6xy^2 \frac{\partial g}{\partial u} +$$

$$+ 3x^2y^2 \cos y \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 6x^3y^5 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-x \sin y \frac{\partial g}{\partial u} + 3x^2y^2 \frac{\partial g}{\partial v}\right)$$

$$= -x \cos y \frac{\partial g}{\partial u} - x \sin y\, \delta y \frac{\partial g}{\partial u} + 6x^2 y \frac{\partial g}{\partial v} + 3x^2y^2 \delta y \frac{\partial g}{\partial v} =$$

$$= -x \cos y \frac{\partial g}{\partial u} - x \sin y \left[-x \sin y \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) + 3x^2y^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right]$$

$$+ 6x^2 y \frac{\partial g}{\partial v} + 3x^2y^2\left[-x \sin y \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) + 3x^2y^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\right] =$$

$$= -x \cos y \frac{\partial g}{\partial u} + x^2 \sin^2 y \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 3x^3y^2 \sin y \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$$

6) Formula lui Leibniz

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \ldots + C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + C_n^n u \cdot v^{(n)}$$

$$f(x,y) = (y^2 - 2xy + x) \sin(x+y)$$

$$\frac{\partial^{15} f}{\partial x^{10} \partial y^5} = \frac{\partial^{10}}{\partial x^{10}}\left(\frac{\partial^5 f}{\partial y^5}\right)$$

Fie $u(y) = y^2 - 2xy + x$

$v_y = \sin(x+y)$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial y^5} = u^{(5)} v + C_5^1 u^{(4)} v' + \ldots + u\, v^{(5)}$$

$u'(y) = 2y - 2x$ $\qquad v'(y) = \cos(x+y)$ $\qquad v^{(4)} = \sin(x+y)$

$u''(y) = 2$ $\qquad v''(y) = -\sin(x+y)$ $\qquad v^{(5)} = \cos(x+y)$

$u''' = \ldots u^{(5)}(y) = 0$ $\qquad v'''(y) = -\cos(x+y)$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial y^5} = u\, v^{(5)} + C_5^4 u' v^{(4)} + C_5^3 u'' v^{(3)} =$$

$$= \underbrace{\cos(x+y)(y^2 - 2xy + x - 20)}_{g_1} + \underbrace{5(2y - 2x) \sin(x+y)}_{g_2}$$

$$\frac{\partial^{10}(g_1+g_2)}{\partial x^{10}} = \frac{\partial^{10} g_1}{\partial x^{10}} + \frac{\partial^{10} g_2}{\partial \cancel{y}^{10}}$$

$$g_1(x) = \underset{u(x)}{\cos(x+y)}\ \underset{v(x)}{(y^2-2xy+x-20)}$$

$$\frac{\partial^{10} g_1 x}{\partial \cancel{x}^{10}} = u^{(10)} \cdot v + C_{10}^{9} \cdot u^{(9)} v' + C_{10}^{8}\, u^{(8)} v'' + \dots + C_{10}^{10}\, u \cdot v^{(10)} =$$

$v'(x) = -2y+1$

$v^{(2)}(x) = 0 \ \dots \ v^{(10)}(x) = 0$

$$\cos(x+y)^{(n)} = \cos\left(x+y+n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x+y)^{(10)} = \cos\left(x+y+10\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x+y+4\pi+\pi) = \cos(x+y+\pi) =$$
$$= -\cos(x+y)$$

$$\cos(x+y)^{(9)} = \cos\left(x+y+9\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x+y)$$
$$= -\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial^{10} g_1}{\partial x^{10}} = -\cos(x+y)(y^2-2xy+x-20) - 10\sin(x+y)(-2y+1)$$

$$\sin(x+y)^{(n)} = \sin\left(x+y+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$f(x,y,z)$

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

C^2

- matrice simetrică

derivatele mixte sunt egale

(?) dif $\rightarrow$ def $\rightarrow$ deriv parțiale $\exists$ și sunt finite

$\rightarrow$ ω cont și nulă în pct. pt. relație

Curs AM S13 19.12.2023

$$\frac{\partial^{2023} f}{\partial x^{2000} \partial y^{23}} \qquad f(x,y) = \underset{g}{(x^2-y^2)} \, \underset{h}{\sin(x+y)}$$

$$(g \cdot h)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} g^{(n-k)} h^{(k)}$$

$$\frac{\partial^{2023} f}{\partial x^{2000} \partial y^{23}} = \frac{\partial^{2000}}{\partial x^{2000}} \left(\frac{\partial^{23} f}{\partial y^{23}} \right) =$$

$$= \underbrace{g^{(23)} h^{(0)} + \dots + g^{(2)} h^{(21)}}_{0} + g^{(1)} h^{(22)} + g^{(0)} h^{(23)} =$$

$$=$$

pt. $f(x,y) = (x+y) \ln(x+y)$

$$\left(\frac{1}{x+y} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+y)^{n+1}}$$

Funcții omogene. Relațiile lui Euler

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

f - se numește funcție omogenă de ordin p $\Leftrightarrow$

$f(tx, ty, tz) = t^p f(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\forall t > 0$, $p \in \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = \frac{x^4}{y} \ln\left(\frac{x^2 - y^2 + z^2}{y^2} \right), \; y \neq 0$$

$$f(tx, ty, tz) = t^{3} f(x,y,z)$$

$p = 3$

Teorema lui Euler

Dacă $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ este omogenă de ordin $p\in\mathbb{R}$ și are derivate parțiale continue în punctul (x,y,z) at. au loc relațiile lui Euler.

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=p\,f(x,y,z)$$

ordin 1

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)+z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)+$$

$$+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)+2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=p(p-1)f$$

ordin 2

$$\left(x\frac{\partial\square}{\partial x}+y\frac{\partial\square}{\partial y}+z\frac{\partial\square}{\partial z}\right)^{(k)}(f)=p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)f$$

$$z(x,y)=f\Big(\underbrace{\frac{y}{x}}_{u},\ \underbrace{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}_{v}\Big)\qquad f\in C^2(\mathbb{R}^2)$$

Calc. $E(x,y)=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

Formula lui Taylor puncte de extrem

Fie $f:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\bar a=(a_1,a_2,a_3)\in D$

$$(T_n f)(\bar a)+\frac{1}{1!}(d^1_{\bar a}f)(\bar x-\bar a)+\frac{1}{2!}(d^2_{\bar a}f)(\bar x-\bar a)+\dots+\frac{1}{n!}(d^n_{\bar a}f)(\bar x-\bar a)$$

$\bar x=(x_1,x_2,\dots,x_3)\in D\subset\mathbb{R}^3$

Fie $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ ordin 2

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\neq(0,0)$ în pct $\bar a(1,1)$

$$(T_2 f)(1,1) = f(1,1) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)(x-1)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(y-1)^2\right]$$

Formula lui Taylor

$f : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f - diferențiabilă de $n+1$ ori pe mulțimea B.

Atunci $f(\bar{x}) = (T_n f)(\bar{a}) + (R_n f)(\bar{a})$

$$R_n f = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f \Big|_{(\bar{x}-\bar{a})}$$

$f(\bar{x}) \approx T_n f$ dacă $R_n f \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Scanat cu CamScanner

S13. Analiză seminar

Formula lui Taylor

① Să se aproximeze printr-un polinom de gr. 2

în vecinătatea $(0,1)$

$f(x,y) = \text{arctg}\,\frac{x}{y}$

$f(x,y) \approx f(0,1) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1)\right.$

$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1)x(y-1)^2\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2} \longrightarrow 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)+x2x}{} =$$

$$= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow f(x,y) \approx x-(y-1)x$$

$x+1,\ y-1,\ z-2 \qquad f(x,y,z) = 2x^2-y^2-2z^2+xz-3xy+2z$

$$f(x,y,z) = f(-1,1,2) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,2)(x+1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1,2)(y-1) + \frac{\partial f}{\partial z}(-1,1,2)(z-2)\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1,2)(x+1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1,2)(y-1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\ )(z-2)^2\right.$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\ )(x+1)(y-1) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(-1,1,2)(y-1)(z-2)$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(-1,1,2)$$

3. Să se det. pct. de extrem local

a) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x, y \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{50}{x^2} \\ x = \frac{20}{y^2} \end{cases}$$

$x^2 y = 50$

$x y^2 = 20$

$\frac{x}{y} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x = 5y$

$M(5,2)$

Fie $r \stackrel{not}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(5,2) = \frac{100}{x^3}\Big|_{(5,2)} = \frac{4}{5}$

$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

t

Dacă i) $s^2 - rt < 0$ și $r > 0$ $\Rightarrow$ pct. de min

ii) $s^2 - rt < 0$ și $r < 0$ $\Rightarrow$ pct. de max

iii)

b) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

Val p.p.

Obs: Dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ $\rightarrow$ min

$\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ $\Rightarrow$ max

Dacă semnele minorilor Δ_i alternează în alt mod față de pct. prec. pct. staționar nu e pct. de extrem $\rightarrow$ șa

$\exists\, \Delta_i = 0 \Rightarrow$ nu putem aplica Sylvester

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad < \begin{array}{ll} 0 & n = 2k \\ (-1)^k & n = 2k+1 \end{array}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad < \begin{array}{ll} (-1)^k & n = 2k \\ 0 & n = 2k+1 \end{array}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff |f(x) - l| < \varepsilon$$

Heine:
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n \to \infty} y_n = a \\ \text{iar } \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l_1 \qquad l_1 \neq l_2 \\ \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{\substack{n \to \infty \\ x \to 0}} f(x)$$

limite relative → pt. dem că o funcție nu are limite într-un punct

Dacă $\nexists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x) \Rightarrow f$ nu are lim în x_0

$$\to \left.\begin{array}{l} l_1 = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_1}} f(x) \\ l_2 = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_2}} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$l_1 \neq l_2$

$$\left.\begin{array}{r} \text{dacă-s dif} \\ \text{sau depind de } n \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim$$

Cleste:
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 \\ |f(x) - l| \leq g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = l$$

Limite iterate

$$l_{12} = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x,y) \right)$$

$$l_{21} = \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right)$$

→ nu trb să fie neapărat egale, dacă sunt nu rezultă $\exists$ lim

→ $l_{12} \neq l_{21}$ și să existe $\Rightarrow \nexists$ lim

→ dacă una $\exists$ și cealaltă nu, se poate întâmpla să existe lim globală = cu val lim iterate

La funcții vectoriale se face lim pe fiecare componentă

Cont. $f(x,y)$ $\exists \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ și este egală cu $f(x_0,y_0)$

Parțiale cont

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y_0) = f(x_0,y_0)$ în raport cu x

$\lim\limits_{y \to y_0} f(x_0,y) = f(x_0,y_0)$ în raport cu y

Prelungire prin cont.

$$\left.\begin{array}{l} f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (a,b) \in A' \\ \lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = l \ \exists \text{ și e finită} \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{f} = \begin{cases} f(x,y), & x,y \in A \\ l, & (x,y) = (a,b) \end{cases}$$

Scanat cu CamScanner

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

$$f(x,y,z) - f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a})(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \dots + \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$+ w(x,y,z) \, \| (x,y,z) - (x_0, y_0, z_0) \|$$

$$= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$df'(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)dy) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

După o direcție

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{s}}(\bar{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{s}) - f(\bar{a})}{t}$$

dacă not $x - x_0 = t \Rightarrow x = x_0 + t \Rightarrow \frac{f(x_0+t) - f(t)}{t}$

Ordin superior.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{x - x_0} \qquad f''(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \lim_{y \to y_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{y \to y_0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Dacă una din deriv. e cont în $(x_0, y_0) \Rightarrow$ ele sunt egale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1}(\bar{x}_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}_0), \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}_0)\right)$$

$$d^1_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,dy$$

$$d^2_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\,dy^2$$

$$d^3_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0)\,dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\,dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0)\,dx\,dy^2 +$$

$$+ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0)$$

$$d^1_{(x_0,y_0,z_0)} f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,dz$$

$$d^2_{(x_0,y_0,z_0)} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0)\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0)\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0)\,dz +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0,z_0)\,dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0,y_0,z_0)\,dx\,dz +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0,y_0,z_0)\,dy\,dz$$

Leibniz:

$$(f\cdot g)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g^{(1)} + \ldots + C_n^n f \cdot g^{(n)}$$

Funcții compuse

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$