Soluţii Tema 1: Recapitulare: Metode de numărare

Exerciţiul. 1 *Câte parole de 8 caractere se pot forma din mulţimea* $C = \{a, b, c, ..., x, y, z, 0, 1, ..., 8, 9\}$ *astfel încât să conţină cel puţin o cifră şi să se termine cu o literă?*

Soluţie: Numărul total de caractere din mulţimea C este reprezentat de 26 de litere şi 10 cifre, în total fiind 36 de caractere ($|C| = 26 + 10 = 36$).
Mulţimea tuturor parolelor de 8 caractere din mulţimea C se poate descompune in felul următor: $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, unde

- P_1 sunt parolele conţină cel puţin o cifră şi să se termine cu o literă
- P_2 sunt parolele ce nu conţin cifre
- P_3 sunt parolele ce se termine cu o cifră

Se observă ca $|P| = |P_1| + |P_2| + |P_3|$, unde P_i sunt mulţimi disjuncte.
i) **Mulţimea tuturor parolelor de 8 caractere** P este mulţimea 8-listelor ce se pot forma cu caractere din C. Intr-adevăr, dacă $Pass : \{1, 2, 3, ..., 8\} \to C$, atunci observăm că $i \to c_i$, $\forall i = \overline{1, 8}$. Deci, $|P| = |C|^8 = 36^8$.
(ii) **Mulţimea parolelor care nu au cifre (adică au doar litere)** P_2 este mulţimea 8-listelor ce se pot forma cu caractere din C', unde C' este submulţimea literelor din C(avem $|C'| = 26$).

$$NLPass : \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 8\} \to C^{'}.$$

Observăm că $i \to c_i$, $\forall i = \overline{1, 8}$. Deci, $|P_2 = |C|^8 = 26^8$.

(iii) **Mulţimea parolelor ce nu au pe ultima poziţie o literă (au cifră)** este mulţimea 7-listelor ce se pot forma cu caractere din C

$$NCPass : \{1, 2, 3, ..., 8\} \to C,$$

$\underbrace{c_1c_2c_3...c_7}_{\text{orice}}\underbrace{c_8}_{\text{cifră}}$. Avem $|P_3| = 10 \cdot 36^7$, pentru ca sunt 10 cifre şi oricare dintre ele se poate afla pe ultima poziţie.
Răspuns problemă: Din totalul posibilităţilor prin care se formează mulţimea parolelor de 8 caractere, scădem mulţimea parolelor care nu au cifre şi a celor care nu au pe ultima poziţie o literă şi astfel aflăm mulţimea parolelor care conţin cel puţin o cifră şi se termină cu o literă.
Deci, $|P_1| = |P| - |P_2| - |P_3| = 36^8 - (26^8 + 10 \cdot 36^7) = 36^7 \cdot 26 - 26^8$.

Exerciţiul. 2 *O magistrală a plăcii de bază este un circuit specializat ce comunică cuvinte. In cazul de faţă, un cuvânt este un string binar de 8 biţi.*

a) Câte cuvinte distincte poate comunica magistrala?
b) În modul de lucru redus cel mult 6 biţi dintr-un cuvânt pot fi setatţi simultan pe 1. Câte cuvinte diferite poate să comunice magistrala în modul redus?

Soluţie: a) Cuvânt = string binar de 8 biţi.
Un cuvânt din 8 biţi este o 8-listă cu elemente din mulţimea $A = \{0, 1\}$. Aşadar există în total $2^8 = 256$ cuvinte pe care magistrala le poate comunica.

b) În modul de lucru redus cel mult 6 biţi sunt setaţi pe 1, deci restul biţilor din totalul stringului sunt setaţi pe 0 (cel puţin 2 biţi de 0). Vom calcula numărul cuvintelor în modul de calcul redus ca fiind numărul total de cuvinte ce se poate forma din care eliminam cuvintele ce au cel mult 2 biţi fixaţi pe 0, sau, altfel spus, numărul cuvintelor fără cele care au 8 biţi de 1, adică 1 caz, sau 7 biţi de 1 şi 1 bit de 0, adică 8 cazuri. Aşadar avem $256 - 1 - 8 = 247$ astfel de cuvinte.

Exerciţiul. 3 *Există 128 de caractere ASCII. Câte din stringurile de 5 caractere ASCII conţin caracterul @?*

Soluţie: Notăm: A_i- mulţimea stringurilor ce conţin pe poziţia i caracterul @ (pe celelalte poziţii poate fi orice caracter din cele 128).

$$|\bigcup_{i=1}^{5} A_i| = \sum_{1\le i_1\le 5} |A_{i_1}| - \sum_{1\le i_1\le i_2\le 5} |A_{i_1}\cap A_{i_2}| + \sum_{1\le i_1\le i_2\le i_3\le 5} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| -$$

$$- \sum_{1\le i_1\le i_2\le i_3\le i_4\le 5} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\cap A_{i_4}| + |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|$$

Vom determina cardinalul fiecărei mulţimi.
Evident, A_1 : $@c_2c_3c_4c_5, \ldots, A_5$: $c_1c_2c_3c_4@$ sunt 4-liste a cu elemente din cele 128 caractere, deci $|A_i| = 128^4$.
Mulţimile de forma $A_i \cap A_j$ sunt cele care conţin stringuri de 5 elemente, care au pe poziţiile i şi j caracterul @. Aceste stringuri sunt deci 3-liste cu elemente din cele 128 caractere ASCII. Evident exista C_5^2 modalităţi de a aseza caracterul @ pe două din cele 5 poziţii intr-o 5-lista, deci avem $|A_i\cap A_j| = 128^3$, şi în total vom avea $C_5^2 128^3$ stringuri de acest fel. Continuând in acelaşi mod obţinem:

$$|\bigcup_{i=1}^{5} A_i| =$$

$$= 5\cdot 128^4 - C_5^2\cdot 128^3 + C_5^3\cdot 128^2 - C_5^4\cdot 128 + C_5^5\cdot 128^0 = 5\cdot 128^4 - 10\cdot 128^3 + 10\cdot 128^2 - 5\cdot 128 + 1\cdot 1.$$

Exerciţiul. 4 *Un sistem de parolare a încuitorii la geamantan foloseşte cifrele $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Câte combinaţii distincte se pot forma din câte 4 cifre ce nu se repetă?*

Soluţie: Evident $|A| = 10$. Combinaţiile distincte de 4 cifre sunt 4-liste cu elemente distincte din A şi sunt în număr de $A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 5040$.

Exerciţiul. 5 *Oricărui device ce se conectează la internet i se atribuie o adresă de identificare. Pentru IPv4(Internet Protocol versiunea 4) o adresă este reprezentată pe 32 de biţi. Aceasta începe cu un număr numit netid (identificatorul reţelei), ce este apoi urmat de hostid (identificatorul locaţiei device-lui) în reţea. Se folosesc 3 tipuri de adrese cu numă diferit de biţi alocaţi pentru netid şi hostid:*

- *Clasa A de adrese se foloseşte pentru reţele foarte mari şi o adresă constă din 0, urmat de 7 biţi pentru netid şi 24 pentru hostid.*
- *Clasa B de adrese se foloseşte pentru reţele de mărime medie. Adresa începe cu biţii 10, apoi 14 biţi pentru netid şi 16 pentru hostid.*
- *Clasa C conţine adrese pentru reţele mici. O adresă începe cu biţii 110, urmaţi d 21 biţi pentru netid şi 8 biţi pentru hostid.*

Există şi câteva restricţii pentru adrese:

- *pentrul clasa A nu se admite 0-1111111 ca netid;*
- *nu se permite pentru nicio reţea un hostid care sa aibă toţi biţii 0 sau toţi 1;*
- *un device conectat la intrenet primeşte fie adresă A, fie de clasă B, fie de clasă B.*

Câte adrese IPv4 diferite sunt disponibile pentru device-uri unice conectate la internet?

Soluţie: Se observă că adresele din clasele A, B şi C formează mulţimi disjuncte, deci numărul adreselor IPv4 diferite ce sunt disponibile pentru device-uri unice conectate la internet se calculează cu formula

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C|$$

Vom calcula pentru fiecare clasă numărul adreselor disponibile, luând in fiecare caz în parte restricţiile impuse de enunţ.
i) Se observă ca adresele din clasa A fac parte din clasa adreselor notate cu R, de forma

$$0 n_1 n_3 ... n_7 h_1 h_2 ... h_{24}, \quad n_i, h_i \in \{0, 1\}$$

Aceste adrese se identifica cu 31-liste cu elemente din mulţimea $\{0, 1\}$, deci există $2^7 \cdot 2^{24} = 2^{31}$ stringuri. Această clasa de reţele se poate scrie $R = A \cup R_1 \cup R_2$, unde R_i sunt restricţiile din problemă asupra reţelelor de tip A, şi anume R_1 : reţelele de tip R, care au netid $\underbrace{1...1}_{\text{de 7 ori}}$, iar R_2 : reţelele de tip R, care au hostid $\underbrace{0...0}_{\text{de 24 ori}}$ sau $\underbrace{1...1}_{\text{de 24 ori}}$.
Avem $|R| = |A \cup R_1 \cup R_2| = |A| + |R_1| + |R_2| - |A \cap R_1| - |A \cap R_2| - |R_1 \cap R_2| + |A \cap R_1 \cap R_2|$.
Avem urmatoarele cazuri de analizat:

a) Reţelele de tip R_1 sunt de forma $0 \underbrace{1...1}_{\text{de 7 ori}} h_1 ... h_{24}$, adică 24-liste cu elemente din mulţimea $\{0, 1\}$, în număr de 2^{24}

b) Reţelele de tip R_2 sunt de forma $0 n_1 n_2 ... n_7 \underbrace{1...1}_{\text{de 24 ori}}$ şi $0 n_1 n_2 ... n_7 \underbrace{0...0}_{\text{de 24 ori}}$ adică $2\times$ numărul 7-listelor cu elemente din $\{0, 1\}$, deci 2×2^7.

c) Mulţimile A, R_1(respectiv A şi R_2) sunt disjuncte două câte două, prin constructie, deci $|A \cap R_1| = 0$, $|A \cap R_2| = 0$

d) Mulţimea $R_1 \cap R_2$ conţine stringurile ce incep cu 0, au netid $\underbrace{1...1}_{\text{de 7 ori}}$ şi hostid $\underbrace{0...0}_{\text{de 24 ori}}$ sau $\underbrace{1...1}_{\text{de 24 ori}}$. Deci, $|R_1 \cap R_2| = 2$.

d) Mulţimea $A \cap R_1 \cap R_2 = \emptyset$, deci $|A \cap R_1 \cap R_2| = 0$.

In total, avem $|A| = 2^{31} - 2^{24} - 2 \times 2^7 - 2$.

ii) In mod analog, $|B| = 2^{30} - 2 \times 2^{14}$
iii) $|C| = 2^{29} - 2 \times 2^{21}$

Deci $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$.