Seminar Nr. 4

Serii numerice

$\boxed{1.}$ *Studiaţi absolut convergenţa şi convergenţa seriilor:*

i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$; **ii)** $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$; **iii)** $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Soluţie. i)

- (convergenţa absolută)

  Avem $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left|(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$, iar ultima serie este divergentă fiind comparabilă cu seria armonică, deci seria $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ nu este absolut convergentă.

- (convergenţa)

  Deoarece şirul $\displaystyle\frac{2n+1}{n(n+1)}$ este descrescător şi are limita 0 din criteriul lui Leibniz rezultă că seria alternantă $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ este convergentă. Prin urmare această serie este semiconvergentă.

ii)

- (convergenţa absolută)

  Avem $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt{n}}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ care e convergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$), deci seria dată în enunţ este absolut convergentă.

- (convergenţa)

  Deoarece seria este absolut convergentă rezultă că este convergentă.

  iii) Seria dată poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n-1}.$$

Cum seria $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n-1}$ este divergentă rezultă seria $\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ este tot divergentă deci nu este nici absolut convergentă.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ *Să se studieze natura seriilor:*

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$, $x\in\mathbb{R}$; **ii)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{\ln(n+1)}$.

Soluţie. **i)** Dacă notăm $\alpha_n=\frac{1}{n}$, atunci şirul $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ este monoton, descrescător şi convergent la zero. Şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)$, este $S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)$. Înmulţind această egalitate cu $2\sin\frac{x}{2}$ obţinem

$2\sin\frac{x}{2}S_n=\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin(kx)$. Folosind formulele trigonometrice

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)],$$

$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

obţinem succesiv

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin(kx) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{(2k-1)x}{2}-\cos\frac{(2k+1)x}{2}\right)\\ &= \cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}=2\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2},\end{aligned}$$

deci

$$S_n = \frac{\sin \dfrac{(n+1)x}{2} \sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}$$

şi verifică inegalitatea $|S_n| \leq \dfrac{1}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, deci (S_n) este mărginit. Conform criteriului lui Dirichlet seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ este convergentă.

ii) Şirul $\alpha_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ este monoton descrescător şi convergent la zero. Seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{6}$ are şirul sumelor parţiale

$$S_n = \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{2\pi}{6} + ... + \cos \frac{n\pi}{6} = \frac{\sin \dfrac{n\pi}{12} \cos (n+1) \dfrac{\pi}{12}}{\sin \dfrac{\pi}{12}},$$

şi verifică condiţia, $|S_n| = \dfrac{\left|\sin \dfrac{n\pi}{12} \cos (n+1) \dfrac{\pi}{12}\right|}{\left|\sin \dfrac{\pi}{12}\right|} \leq \dfrac{1}{\sin \dfrac{\pi}{12}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, deci (S_n) este mărginit şi potrivit criteriului lui Dirichlet, seria este convergentă.

$\boxed{3.}$ *Să se studieze cu ajutorul criteriului lui Leibniz natura seriei*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2.$$

Indicaţie. Se arată că şirul $x_n = \left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2$ este descrescător şi are limita 0.