MAC

(curs 3 - S2)

28.02.2024

3. Sisteme de ecuații

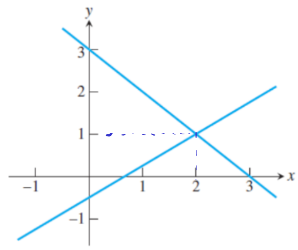
-> sisteme liniare <-> eliminarea gaussiană

-> sisteme neliniare <-> alte metode

3.1. Eliminarea gaussiană

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$$

- din perspectivă geometrică, fiecare ecuaţie liniară reprezintă o dreaptă în planul xy, după cum se prezintă în Figura 1



(2,1) -> sol.

Figura 1: **Soluţia geometrică a unui sistem de ecuaţii.** Fiecare ecuaţie din (1) corespunde unei drepte din plan. Punctul de intersecţie reprezintă soluţia.

-> perspectiva geometrică ne ajută să vizualizăm soluțiile

-> el. gaussiană -> potrivită pt. rezolvarea sistemelor de n ecuații cu n necunoscute

3.1.1. Eliminarea gaussiană naivă

- scăzând $3 \cdot [x + y = 3]$ din a doua ecuaţie, obţinem sistemul echivalent

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ -7y &= -7. \end{aligned} \qquad (2)$$

=> y = 1 => x = 2

=> soluția este (2,1)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{scădem } 3\times\text{rândul 1 din rândul 2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \end{array}\right]. \qquad (3)$$

- avantajul formei tabulare este acela că necunoscutele sunt ascunse în timpul eliminării
- când matricea pătratică din stânga tabloului este triunghiulară, putem rezolva de jos în sus sistemul pentru a găsi soluţia

Exemplul 1

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ -3x + y + z = -6 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right] \underset{L_3+3L_1}{\overset{L_2-2L_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & 3 \end{array}\right] \overset{L_3-\frac{7}{3}L_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -3y = -3 \\ -2z = -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 3,\ y = 1,\ z = 2$

- forma generală a unui tablou pentru n ecuaţii cu n necunoscute este

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

- pentru a efectua pasul de eliminare, trebuie să facem zerouri în triunghiul de jos, folosind operaţiile permise între rânduri

- putem scrie pasul de eliminare sub forma buclei

  for $j = 1, \dots, n-1$
  eliminăm coloana j
  end

- unde, „eliminăm coloana j", înseamnă „folosim operaţii între rânduri pentru a face zero în fiecare locaţie de sub diagonala principală, adică în locaţiile $a_{j+1,j}, a_{j+2,j}, \dots, a_{nj}$"
- de exemplu, pentru a efectua eliminarea pentru coloana 1, trebuie să facem zerouri în $a_{21}, \dots, a_{n1}$

- acest lucru poate fi scris ca următoarea buclă în interiorul buclei anterioare:

  for $j = 1, \dots, n-1$
  for $i = j+1, \dots, n$
  eliminăm intrarea a_{ij}
  end
  end

- mai rămâne să completăm pasul interior al buclei duble, pentru a aplica o operaţie între rânduri care face intrarea a_{ij} să fie zero
- de exemplu, prima intrare care va fi eliminată va fi a_{21}
- pentru a realiza aceasta, scădem a_{21}/a_{11} înmulţit cu rândul 1 din rândul 2, presupunând că $a_{11} \neq 0$
- mai exact, primele două rânduri se transformă din

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \end{array}$$

în

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n} & b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \end{array}.$$

- operaţia de rânduri folosită pentru a elimina intrarea a_{i1} a primei coloane, şi anume,

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{12} & \dots & a_{in} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1n} & b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 \end{array},$$

  se face într-o manieră similară
- procedura pe care tocmai am descris-o funcţionează cât timp numărul a_{11} este nenul
- acest număr şi alte numere a_{ii} care vor deveni la un moment dat divizori în eliminarea gaussiană se numesc **pivoţi**
- un pivot egal cu zero va determina oprirea algoritmului, după cum am explicat până acum
- această problemă va fi ignorată deocamdată, şi discutată mai pe larg în Secţiunea 3.3
- după eliminarea primei coloane, pivotul a_{22} este utilizat pentru a elimina cea de-a doua coloană în aceeaşi manieră, precum şi coloanele rămase după aceea

- de exemplu, operaţia de rânduri folosită pentru a elimina intrarea a_{ij} este

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & a_{jj} & a_{j,j+1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{i,j+1} - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} a_{j,j+1} & \dots & a_{in} - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} a_{jn} & b_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} b_j \end{array}.$$

- în notaţia noastră, a_{22}, de exemplu, se referă la noul număr aflat în acea poziţie după eliminarea coloanei 1, şi nu la valoarea iniţială a lui a_{22}

Algoritmul 1 (Eliminarea gaussiană)

for $j = 1, \dots, n-1$
  if $a_{jj} = 0$, **stop**, **end**
  for $i = j+1, \dots, n$
    for $k = j+1, \dots, n$
      $a_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} a_{jk}$
    end
    $b_i = b_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} b_j$
  end
end

- două comentarii în legătură cu acest algoritm trebuie făcute: în primul rând, făcând indexul k să se deplaseze de la j la n va face zero în locaţia a_{ij}; totuşi, deplasarea de la $j+1$ la n este mai eficientă
- ultima variantă nu va face zero în locaţia a_{ij}, care a fost intrarea pe care încercăm să o eliminăm

```
function [A, x] = gauss(A, b)

n = length(A);

for j = 1 : n-1
    if abs(A(j, j)) == 0
        error('zero pivot encountered');
    end
    for i = j + 1 : n
        mult = A(i, j) / A(j, j);
        for k = j : n
            A(i , k) = A (i, k) - mult * A(j, k);
        end
        b(i) = b(i) - mult * b(j);
    end
end

for i=n:-1:1
    for j=i+1:n
        b(i)=b(i)-A(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=b(i)/A(i,i);
end
```

← Alg2

- deşi aceasta pare a fi o greşeală, observăm că nu ne vom mai întoarce la această intrare în continuarea eliminării gaussiene sau a procesului de substituţie înapoi, ceea ce înseamnă că a pune un zero în acea poziţie reprezintă un pas irosit din punctul de vedere al eficienţei
- în al doilea rând, facem algoritmul să se oprească dacă un pivot egal cu zero este întâlnit
- după cum s-a menţionat deja, această posibilitate va fi luată în considerare mai serios atunci când vom discuta interschimbările de rânduri în Secţiunea 3.3
- după terminarea eliminării, tabloul este superior triangular:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

- scris sub formă de ecuaţie, avem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

  unde, din nou, a_{ij} se referă la noile intrări, şi nu la cele iniţiale
- pentru a încheia calculul soluţiei x, trebuie să facem pasul de substituţie înapoi, care este o simplă rescriere a lui (8):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}}. \end{aligned}$$

- sub formă de algoritm, pasul de substituţie înapoi este

Algoritmul 2 (Substituţia înapoi pentru eliminarea gaussiană)

for $i = n, \dots, 1$
  for $j = i+1, \dots, n$
    $b_i = b_i - a_{ij}x_j$
  end
  $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$
end

3.2. Factorizarea LU

3.2.1. Forma matricială a eliminării gaussiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{m. coef.}}{A} \cdot X = \underset{\text{m. coef. liberi}}{b}$$

L – matrice inferior triunghiulară $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

U – matrice superior triunghiulară $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Definiţia 1

O matrice L de dimensiune $m \times n$ este **inferior triangulară** dacă intrările sale satisfac $l_{ij} = 0$ pentru $i < j$. O matrice U de dimensiune $m \times n$ este **superior triangulară** dacă intrările sale satisfac $u_{ij} = 0$ pentru $i > j$.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Exemplul 2

LU pt $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$A \overset{L_2 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$ multiplicatorul 3 în locaţia (2,1)

Verificare:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = A \checkmark$$

Exemplul 3

LU pt.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3 + 3L_1}{\overset{L_2 - 2L_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix} \overset{L_3 + \frac{7}{3}L_2}{\sim} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{U}$$

→ L se formează prin plasarea de 1-uri pe diagonala principală şi a multiplicatorilor în triunghi inferior unde au fost folosiţi pt. modificări

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

→ pt. verificare $L \cdot U = A$ ✓

Faptul 1

Notăm cu $L_{ij}(-c)$ matricea inferior triunghiulară ale cărei intrări nenule sunt 1-uri pe diagonala principală şi $-c$ în poziţia (i,j). Atunci $A \to L_{ij}(-c)A$ reprezintă operaţia de rânduri „scădem c înmulţit cu rândul j din rândul i".

- de exemplu, înmulţirea cu $L_{21}(-c)$ ne dă

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - ca_{11} & a_{22} - ca_{12} & a_{23} - ca_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Faptul 2

$L_{ij}(-c)^{-1} = L_{ij}(c)$.

- de exemplu,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- folosind Faptele 1 şi 2, putem înţelege factorizarea LU din Exemplul 2
- deoarece pasul de eliminare poate fi reprezentat ca

$$L_{21}(-3)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix},$$

putem înmulţi ambele părţi la stânga cu $L_{21}(-3)^{-1}$ pentru a obţine

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix},$$

care este factorizarea LU a lui A

- pentru a trata matrici de dimensiune $n \times n$ cu $n > 2$, mai avem nevoie de încă un fapt

Faptul 3

Are loc următoarea ecuaţie:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ c_1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ c_2 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & c_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ c_1 & 1 & \\ c_2 & c_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- acest fapt ne permite să colectăm L_{ij}-urile inversate într-o singură matrice, care devine matricea L din factorizarea LU
- pentru Exemplul 3, aceasta revine la

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 3 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -3 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = LU. \tag{16}$$

3.2.2. Substituţia înapoi pentru factorizarea LU

- acum că am exprimat pasul de eliminare din eliminarea gaussiană ca un produs matricial LU, cum traducem pasul de substituţie înapoi?
- mai important, cum obţinem soluţia x?
- odată ce L şi U sunt cunoscute, problema $Ax = b$ poate fi scrisă ca $LUx = b$
- definim un nou vector auxiliar $c = Ux$
- atunci substituţia înapoi este o procedură în doi paşi:
  - (a) Rezolvăm $Lc = b$ pentru a găsi c.
  - (b) Rezolvăm $Ux = c$ pentru a găsi x.
- ambii paşi sunt simplu de realizat deoarece L şi U sunt matrici triangulare
- ilustrăm acest fapt pe cele două exemple folosite anterior

Exemplul 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + 0 \cdot c_2 = 3 \\ 3c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = 3 \Rightarrow c_2 = -7 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -7x_2 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Exemplul 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow Lc = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = 3, \ c_2 = -3, \ c_3 = -4$

$\rightarrow U \cdot x = c$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_1 = 3, \ x_2 = 1, \ x_3 = 2$

Exemplul 6 (nu orice matrice admite LU)

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nu are LU

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ ab & ac + d \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow b = 0, \ ab = 1$ ceea ce nu se poate întâmpla

3.3. Factorizarea $PA = LU$

- forma eliminării gaussiene discutată până acum este adesea numită naivă, deoarece are o dificultate serioasă: descoperirea unui pivot egal cu zero
- pentru o matrice nesingulară, această problemă poate fi evitată folosind un algoritm îmbunătăţit
- cheia acestei îmbunătăţiri o reprezintă un protocol eficient pentru interschimbarea rândurilor matricii coeficienţilor numit pivotare parţială

3.3.1. Pivotarea parțială

- la începutul eliminării gaussiene clasice pentru un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute, primul pas este să folosim elementul de pe diagonala principală a_{11} ca pivot pentru a elimina prima coloană
- protocolul de **pivotare parţială** constă din compararea numerelor înainte de a efectua fiecare pas de eliminare
- cea mai mare intrare a primei coloane este localizată, şi rândul pe care ea se află este interschimbat cu rândul pivot, în acest caz cu primul rând
- cu alte cuvinte, la începutul eliminării gaussiene, pivotarea parţială presupune selectarea rândului p, unde

$$|a_{p1}| \geq |a_{i1}|, \tag{17}$$

  pentru orice $1 \leq i \leq n$, şi interschimbarea rândurilor 1 şi p
- apoi, eliminarea coloanei 1 se face ca de obicei, folosind noua versiune a lui a_{11} pe post de pivot
- multiplicatorul folosit pentru a elimina a_{i1} va fi

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

  şi $|m_{i1}| \leq 1$

- aceeaşi verificare este aplicată fiecărei alegeri a pivotului pe tot parcursul algoritmului
- atunci când se decide al doilea pivot, vom începe cu valoarea curentă a lui a_{22} şi vom verifica toate intrările care se află direct sub aceasta
- selectăm rândul p astfel încât

$$|a_{p2}| \geq |a_{i2}|,$$

  pentru orice $2 \leq i \leq n$, şi dacă $p \neq 2$, rândurile 2 şi p vor fi interschimbate
- rândul 1 nu este niciodată implicat în acest pas
- dacă $|a_{22}|$ este deja cel mai mare, nu are loc nicio interschimbare
- protocolul se aplică fiecărei coloane pe parcursul eliminării
- înaintea eliminării coloanei k, acel p cu $k \leq p \leq n$ şi cea mai mare valoare a lui $|a_{pk}|$ este localizat, şi rândurile p şi k sunt interschimbate, dacă este necesar, înaintea continuării eliminării
- observăm că pivotarea parţială asigură faptul că toţi multiplicatorii, adică toate intrările lui L, nu vor fi mai mari decât 1 în valoare absolută

Exemplul 7

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ comparăm $|a_{11}| = 1$ cu toate intrările de sub el, aici doar cu $a_{21} = 3$

$|a_{21}| > |a_{11}| \Rightarrow$ trebuie să interschimbăm L_1 şi L_2

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - \frac{1}{3}L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow x_2 = 1, \quad x_1 = 2$

Obs: nu mai avem multiplicatorul 3

Exemplul 8

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ -x_1 \quad - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$|a_{11}| = 1$, $|a_{21}| = 1$, $|a_{31}| = 2$ -> noul pivot $\Rightarrow L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{array}\right] \underset{L_3 - \frac{1}{2}L_1}{\xrightarrow{L_2 + \frac{1}{2}L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

* Înainte de a elimina C2

$|a_{22}| < |a_{32}| \Rightarrow L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 + \frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

- observăm că pivotarea parţială rezolvă şi problema pivoţilor egali cu zero
- când un potenţial pivot egal cu zero este întâlnit, spre exemplu, dacă $a_{11} = 0$, acesta este imediat înlocuit cu un pivot nenul de undeva din coloana în care se află
- dacă nu există o astfel de intrare pe sau sub diagonala principală, atunci matricea este singulară şi eliminarea gaussiană oricum nu va putea oferi o soluţie

3.3.2. Matrici de permutare

înainte de a arăta cum se poate folosi interschimbarea rândurilor cu factorizarea LU pentru eliminare gaussiană, vom discuta proprietăţile fundamentale ale matricilor de permutare

Definiţia 2

O **matrice de permutare** este o matrice $n \times n$ ale cărei intrări sunt toate zerouri, cu excepţia unui singur 1 pe fiecare rând şi pe fiecare coloană.

echivalent, o matrice de permutare P se poate crea aplicând interschimbări arbitrare de rânduri matricii identitate de dimensiune $n \times n$ (sau interschimbări arbitrare de coloane)

- de exemplu,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  sunt singurele matrici de permutare de dimensiune 2×2, şi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  sunt cele şase matrici de permutare de dimensiune 3×3
- următoarea teoremă ne spune ce acţiune cauzează o matrice de permutare când este înmulţită la stânga cu o altă matrice

Teorema 1 (Teorema fundamentală a matricilor de permutare)

Fie P o matrice de permutare de dimensiune $n \times n$ formată printr-un anumit set de interschimbări de rânduri aplicate matricii identitate. Atunci, pentru orice matrice A de dimensiune $n \times n$, PA este matricea obţinută prin aplicarea exact aceluiaşi set de interschimbări de rânduri matricii A.

- de exemplu, matricea de permutare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  este formată prin interschimbarea rândurilor 2 şi 3 ale matricii identitate

- înmulţind o matrice arbitrară la stânga cu P are efectul interschimbării rândurilor 2 şi 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

- o bună metodă de a reţine Teorema 1 este de a ne imagina înmulţirea lui P cu matricea identitate I:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- există două moduri diferite de a privi această egalitate: în primul rând, ca o înmulţire cu matricea identitate (astfel că obţinem matricea de permutare în dreapta); în al doilea rând, ca acţiunea matricii de permutare asupra rândurilor matricii identitate
- conţinutul Teoremei 1 este acela că interschimbările de rânduri cauzate de înmulţirea cu P sunt exact cele implicate în construcţia lui P

3.3.3. Factorizarea PA = LU

- aceasta este formularea matricială a eliminării gaussiene cu pivotare parţială
- factorizarea PA=LU este abordarea standard pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare
- după cum îi spune şi numele, factorizarea PA=LU este pur şi simplu factorizarea LU a unei versiuni cu rândurile interschimbate a matricii A
- sub acţiunea pivotării parţiale, rândurile care necesită interschimbare nu sunt ştiute de la început, deci trebuie să fim atenţi cu introducerea informaţiei despre interschimbare în factorizare
- în particular, trebuie să ţinem evidenţa multiplicatorilor anteriori când se face o interschimbare de rânduri

Exemplul 9

- găsiţi factorizarea PA = LU

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$L1 \leftrightarrow L2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 - \frac{1}{2} L_1} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - \frac{1}{4} L_1} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 & 7 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- am făcut ceva inedit—în loc să plasăm doar un zero în poziţia eliminată, am făcut zero o locaţie de stocare
- în interiorul zero-ului de la poziţia (i, j), stocăm multiplicatorul m_{ij} pe care l-am folosit pentru eliminarea acelei poziţii
- facem acest lucru pentru un motiv: acesta este mecanismul prin care multiplicatorii vor rămâne pe rândul lor în cazul efectuării unor interschimbări viitoare
- în continuare, trebuie să facem o comparaţie pentru a alege al doilea pivot
- deoarece $|a_{22}| = 1 < 2 = |a_{32}|$, o interschimbare de rânduri este necesară înaintea eliminării celei de-a doua coloane

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + \frac{1}{2} \cdot L_2} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 8 \end{bmatrix}$$

- cu aceasta, eliminarea este terminată
- acum putem citi factorizarea PA=LU:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{U}. \qquad (18)$$

- intrările lui L se află în interiorul zerourilor din triunghiul inferior al matricii (sub diagonala principală), şi U este format de triunghiul superior
- permutarea finală (cumulativă) reprezintă matricea P

- folosirea factorizării PA=LU pentru a rezolva sistemul de ecuaţii $Ax = b$ reprezintă doar o mică variaţie a versiunii A=LU
- înmulţim ecuaţia $Ax = b$ cu P la stânga, şi apoi continuăm ca mai înainte:

$$\begin{aligned} PAx &= Pb \\ LUx &= Pb \end{aligned} \qquad (19)$$

- rezolvăm

$$\begin{aligned} &1. \quad Lc = Pb \text{ pentru a găsi } c. \\ &2. \quad Ux = c \text{ pentru a găsi } x. \end{aligned} \qquad (20)$$

- cel mai important aspect este că, aşa cum am menţionat mai devreme, partea cea mai dificilă a calculului, şi anume determinarea factorizării PA=LU, poate fi făcută fără a cunoaşte pe b
- deoarece factorizarea LU rezultată este a lui PA, o versiune cu rândurile interschimbate a matricii coeficienţilor sistemului, este necesară o permutare a vectorului coeficienţilor liberi b în acelaşi fel, înainte de a se trece la etapa de substituţie înapoi
- acest lucru se realizează prin folosirea lui Pb în primul pas al substituţiei înapoi
- valoarea formulării matriciale a eliminării gaussiene este evidentă: toate detaliile eliminării şi pivotării sunt automate şi sunt cuprinse în ecuaţii matriciale

Exemplul 10

PA=LU pt. Ax=b

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

În exemplul anterior, am realizat PA=LU:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$\Downarrow$$

1. $L \cdot c = P \cdot b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = 0$

$\frac{1}{4} \cdot 0 + c_2 = 6 \Rightarrow c_2 = 6$

$\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 6 + c_3 = 5 \Rightarrow c_3 = 8$

2. $U \cdot x = c$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 8x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 1$

$2x_2 + 2 \cdot 1 = 6 \Rightarrow x_2 = 2$

$4x_1 + 4 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

$x = [-1, 2, 1]^T$

Exemplul 11

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$ cu $PA = LU$ cu pivotare parțială

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$|a_{21}| > |a_{11}| \Rightarrow L_1 \Leftrightarrow L_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - \frac{2}{3} L_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow PA = LU$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\quad P \qquad\qquad A \qquad\qquad L \qquad\qquad U$$

$LC = Pb$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$C_1 = 1$

$\frac{2}{3} \cdot 1 + C_2 = 4 \Rightarrow C_2 = \frac{10}{3}$

$UX = C$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$\frac{5}{3} x_2 = \frac{10}{3} \Rightarrow x_2 = 2$

$3x_1 + 2 \cdot 2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$

$\Rightarrow X = [-1, 2]^T$

- orice matrice $n \times n$ are o factorizare PA=LU
- pur şi simplu urmăm regula pivotării parţiale, iar dacă pivotul care rezultă este zero, înseamnă că toate intrările care trebuie eliminate sunt deja zero, deci coloana este terminată