MS

Tema 12 - 2

2. Considerăm un lanţ Markov ce are spaţiul stărilor $S = \{1, 2, 3\}$ şi matricea de tranziţie:

$Q =$

	1	2	3
1	0	4/5	1/5
2	1/6	2/3	1/6
3	0	0	1

a) Să se arate că lanţul Markov este absorbant.
b) Să se scrie matricea de tranzitie în forma standard şi să se precizeze matricile T şi R.
c) Să se calculeze matricea fundamentală N.
d) Să se calculeze probabilitatea ca lanţul Markov ce porneşte din starea 2 să fie absorbit de starea 3. $b_{2,3}$

a) 3 - stare absorbantă

$$p_{ij} = P(X_{m+1} = 3 \mid X_m = 3) = 1$$
altfel $= 0$

b) $Q' =$

	3	1	2
3	1	0	0
1	0,2	0	0,8
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

$$Q = \begin{pmatrix} I_1 & 0_{1\times2} \\ R_{2\times1} & T_{2\times2} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} Q'(1,3) \\ Q'_{\to R}(2,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 1/6 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 \\ 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

c) $$N = (I - T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,8 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{30} \\ \frac{4}{25} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \overset{5)}{\frac{1}{3}} - \frac{2}{15} = \frac{3}{15} \qquad m_{11} = \frac{3}{15} \cdot (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

$$m_{12} = \frac{\cancel{3}}{15} (-1)^{1+2} \left(-\frac{1}{\cancel{6}_2}\right) = \frac{1}{30}$$

$$m_{21} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{15}_5} (-1)^{2+1} \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{25}$$

$$m_{22} = \frac{1}{5} (-1)^4 \cdot 1 = \frac{1}{5}$$

$St = \{1, 2\}$

d) $$b_{ij} = \sum_{k \in St} N(i,k) \cdot R(k,j)$$

$$b_{23} = N(2,1) \cdot R(1,3) + N(2,2) \cdot R(2,3) = \frac{4}{21} \cdot 0,2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$$

3. Considerăm un lanţ Markov ce are spaţiul stărilor $S = \{1, 2, 3, 4\}$ şi matricea de tranziţie:

$$Q = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 3 & 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 4 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{array}$$

a) Să se arate că lanţul Markov este absorbant.
b) Să se precizeze matricea de trecere, T, între stările tranzitorii şi matricea de trecere, R, de la stările tranzitorii la starea absorbantă.
c) Să se calculeze probabilitatea ca lanţul Markov ce porneşte din starea 3 să facă 2 paşi în mulţimea stărilor tranzitorii înainte de absorbire.
d) Ştiind că linia 3 a matricei fundamentale N a lanţului Markov este

$$N[3, :] = [1.52,\ \ 3.7,\ \ 2.4],$$

să se precizeze ce reprezintă elementul 3.7 din această linie. Să se interpreteze suma elementelor acestei linii.
Atenţie! Linia 3 a matricei N corespunde stării tranzitorii 4.

a) starea 1 - absorbantă

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) = 1$$
$$\text{altfel} \qquad = 0$$

b) $$Q' = Q = \begin{pmatrix} I_{1\times1} & 0_{1\times3} \\ R_{3\times1} & T_{3\times3} \end{pmatrix}$$

c) N(i, j) - reprezinta nr mediu de vizite pe care lantul il face starii j, stiind ca pornim din starea i inainte de a fi absorbit

$$N = (I - T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,5 & -0,2 \\ -0,2 & 0,4 & -0,1 \\ -0,2 & -0,3 & 0,7 \end{pmatrix}^{-1}$$

=

	B_1	B_2	B_3
1	2.7173913043478260868	4.4565217391304347823	1.4130434782608695651
2	1.7391304347826086955	5.6521739130434782606	1.3043478260869565216
3	1.5217391304347826086	3.6956521739130434478	2.3913043478260869564

$$b_{31} = \sum_{k \in S_t} N(i,k) \cdot R(k,j) = N(3,2) \cdot R(2,1) + N(3,3) \cdot R(3,1) + $$
$$+ N(3,4) \cdot R(4,1)$$

d) $N(3,2)$ – nr. mediu de vizite făcute stării 3, plecând din starea 4

Suma liniei 3 reprezinta nr mediu de pasi ai lantului Markov absorbant ce pleaca din st 4 inainte sa fie absorbit

4. Considerăm un lanţ Markov absorbant ce are spaţiul stărilor $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ şi matricea de tranziţie:

$Q =$

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1/2	0	1/6	1/6	1/6
3	1/3	2/3	0	0	0
4	1/3	2/3	0	0	0
5	0	0	0	0	1

a)

$$Q_t = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 3 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 4 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{array}$$

$I_{2\times2}$ $\quad O_{2\times3}$

$R_{3\times2}$ $\quad T_{3\times3}$

a) Să se scrie matricea Q în forma standard şi să se expliciteze matricile T şi R.
b) Ştiind că lanţul porneşte din starea 2, adică $X_0 = 2$, să se calculeze probabilitatea ca la momentul $n = 2$ să se ajungă în starea 1.
c) Să se calculeze probabilitatea ca absorţia lanţului ce porneşte din starea 2 să se producă la momentul $n = 3$.
d) Ştiind că matricea fundamentală a lanţului este

$N =$

	2	3	4
2	1.28	0.21	0.21
3	0.85	1.14	0.14
4	0.85	0.41	1.41

$N = (I - T)^{-1}$

să se scrie relaţia dintre N şi T. Ce reprezintă elementele de pe linia a treia a matricii N?
e) Să se determine numărul mediu de vizite pe care lanţul îl face stării tranzitorii 2, dacă porneşte din starea 4. $\longrightarrow N(4,2) = 0,85$

b) $P(X_2 = 1 \mid X_0 = 2)$

$Q^2(2,1)$

c) $Q^3(2,1) + Q^3(2,5)$

d) Suma liniei 3 reprezinta nr mediu de pasi ai lantului Markov absorbant ce pleaca din st 4 inainte sa fie absorbit

e) $N(4,2) = 0,85$

5. Considerăm un lanţ Markov ce are spaţiul stărilor $S = \{1, 2, 3, 4\}$ şi matricea de tranziţie:

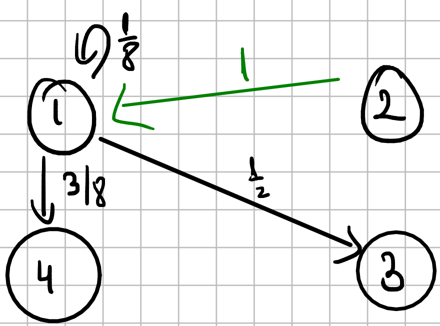
$$Q = \begin{array}{c||c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1/8 & 0 & 1/2 & 3/8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

a) Să se studieze dacă este un lanţ Markov absorbant.
b) Să se calculeze probabilitatea ca lanţul să evolueze pe traiectoria 4,3,2,1,3, ştiind că distribuţia iniţială este $\pi_0 = [5/12 \quad 1/6 \quad 1/4 \quad 1/6]$.
c) Să se deseneze graful asociat matricii de tranziţie.
d) Să se calculeze $P(X_7 = 3/X_2 = 4)$.

a)

b) $P = \pi_0(4) Q(4,3) \cdot Q(3,2) \cdot Q(2,1) \cdot Q(1,3) = 0$

c)



d) $P(X_7 = 3 | X_2 = 4) = Q^5(4,3) = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{32768} & 0 & \frac{1}{8192} & \frac{3}{32768} \\ \frac{1}{4096} & 0 & \frac{1}{1024} & \frac{3}{4096} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Starea unui student la CTI poate fi: student în anul I, student în anul II, student în anul III, student în anul IV, absolvent sau exmatriculat. Codificăm aceste stări prin `I, II, III, IV, Ex, Ab`. Matricea de tranziţie este:

$\pi = \frac{1}{6}$

	Ab	Ex	I	II	III	IV
Ab	1	0	0	0	0	0
Ex	0	1	0	0	0	0
I	0	0.1	0.1	0.8	0	0
II	0	0.05	0	0.1	0.85	0
III	0	0.05	0	0	0.05	0.9
IV	0.9	0.05	0	0	0	0.05

a) Ştiind ca distribuţia iniţială de probabiliate este distribuţia uniformă, să se calculeze probabilitea ca un student să aibă următoarea traiectorie: `II, III, III, Ex`.

b) Care este probabilitatea ca un student ce "porneşte" din anul `III` să treacă prin două stări tranzitorii înainte de absorbire (fie ea exmatriculare sau absolvire).

c) Ştiind că matricea fundamentală a acestui lanţ Markov absorbant este

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.1111 & 0.9877 & 0.8837 & 0.8372 \\ 0 & 1.1111 & 0.9942 & 0.9418 \\ 0 & 0 & 1.0526 & 0.9972 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0526 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array}$$

să se calculeze probabilitatea ca un student ce porneşte din anul `I` să fie absorbit de `Ab`solvire.

a) $P = \frac{1}{6} \cdot Q(\mathrm{II}, \mathrm{III}) \cdot Q(\mathrm{III}, \mathrm{III}) \cdot Q(\mathrm{III}, Ex) = \frac{1}{6} \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}05$

b) $Q^{2 \text{ sau } 3\ ?}(\mathrm{III}, Ab) + Q^{2|3}(\mathrm{III}, Ex)$

c) $b_{\mathrm{I}, Ab} = \sum_{k \in St = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}\}} N(\mathrm{I}, k) \cdot R(k, Ab) \longrightarrow$ se fac calcule