C9

miercuri, 24 ianuarie 2024 23:24

Demonstrațiile logice se reduc la *calcule* (*algoritmi*, *programe*)

Demonstrația este o verificare a unei propoziții prinun set de deducții logice dintr-o mulțime de axiome.

Multe *probleme* din *informatică*
se pot reduce la *logică*
și rezolva apoi *automat*

O *propoziție* (logică) e o afirmație care e fie *adevărată*, fie *falsă*, dar nu ~~ambele simultan~~.

Sunt sau nu propoziții?

$2 + 2 = 5$

$x + 2 = 4$

Toate numerele prime mai mari ca 2 sunt impare.

$x^n + y^n = z^n$ nu are soluții întregi nenule pentru niciun $n > 2$

$x^n + y^n = z^n$ nu are soluții întregi nenule pentru niciun $n > 2$

Dacă $x < 2$, atunci $x^2 < 4$

Logica ne permite să raționăm *precis*.
⇒ pentru aceasta trebuie să o definim *precis*
sintaxa (cum arată/e formată) și *semantica* (ce înseamnă)

Un *limbaj* e definit prin
simbolurile sale
și *regulile* după care combinăm corect simbolurile (*sintaxa*)

Simbolurile logicii propoziționale:
propoziții: notate deobicei cu litere p, q, r , etc.
operatori (conectori logici): negație $\neg$, implicație $\rightarrow$, paranteze ( )

Formulele logicii propoziționale: definite prin *inducție structurală*
(construim formule complexe din altele mai simple)

O formulă e:
orice *propoziție* (numită și formulă atomică)
$(\neg\alpha)$ dacă α este o formulă
$(\alpha \rightarrow \beta)$ dacă α și β sunt formule
(α, β numite *subformule*)

Sintaxa: o mulțime de *reguli* care definește construcțiile unui limbaj
(dacă ceva nu e construit corect nu putem să-i definim înțelesul)

Sintaxa: o mulțime de *reguli* care definește construcțiile unui limbaj (dacă ceva nu e construit corect nu putem să-i definim înțelesul)

Sintaxa *concretă* precizează modul *exact* de scriere.

prop $\neg$ *formulă* *formulă* $\wedge$ *formulă* *formulă* $\vee$ *formula*

Sintaxa *abstractă*: interesează *structura* formulei din subformule (propoziție, negația unei formule, conjuncția/disjuncția a 2 formule) nu contează simbolurile concrete ($\wedge$, $\vee$), scrierea infix / prefix,...

$p \to q$ numită și *condițional(ă)*
p: *antecedent* (în raționamente: *ipoteză*, *premisă*)
q: *consecvent* (în raționamente: *concluzie*)

Înțelesul: *dacă* p e adevărat, *atunci* q e adevărat (if-then)
dacă p nu e adevărat, nu știm nimic despre q (poate fi oricum)

Deci, $p \to q$ e fals doar când p e adevărat, dar q e fals

Tabelul de adevăr:

	$p \to q$	q = F	q = T
p	F	T	T
p	T	F	T

Exprimat cu conectorii uzuali: $\boxed{p \to q = \neg p \vee q}$

Exprimat cu conectorii uzuali: $\boxed{p \to q \;=\; \neg p \vee q}$

Negația: $\neg(p \to q) = p \wedge \neg q$

Fiind dată o implicație $A \to B$, definim:

reciproca: $B \to A$

inversa: $\neg A \to \neg B$

contrapozitiva: $\neg B \to \neg A$

Contrapozitiva e *echivalentă* cu formula inițială (directa).

$$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$$

Inversa e echivalentă cu reciproca.

$$B \to A \Leftrightarrow \neg A \to \neg B$$

$A \to B$ ~~NU e echivalent~~ cu $B \to A$ (reciproca)

Semantica unei formule: funcții de adevăr

Definim riguros cum calculăm valoarea de adevăr a unei formule = dăm o *semantică* (înțeles) formulei (formula=noțiune *sintactică*)

O *funcție de adevăr* v atribuie oricărei formule o *valoare de adevăr* $\in \{T, F\}$ astfel încât:

$v(p)$ e definită pentru fiecare *propoziție* atomică p.

$$v(\neg a) = \begin{cases} T & \text{dacă } v(a) = F \\ F & \text{dacă } v(a) = T \end{cases}$$

$v(p)$ e definită pentru fiecare *propoziție* atomică p.

$$v(\neg\alpha) = \begin{cases} \text{T} & \text{dacă } v(\alpha) = \text{F} \\ \text{F} & \text{dacă } v(\alpha) = \text{T} \end{cases}$$

$$v(\alpha \rightarrow \beta) = \begin{cases} \text{F} & \text{dacă } v(\alpha) = \text{T și } v(\beta) = \text{F} \\ \text{T} & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Exemplu: $v((a \rightarrow b) \rightarrow c)$ pentru $v(a) = \text{T}$, $v(b) = \text{F}$, $v(c) = \text{T}$

avem $v(a \rightarrow b) = \text{F}$ pentru că $v(a) = \text{T}$ și $v(b) = \text{F}$ (cazul 1)

și atunci $v((a \rightarrow b) \rightarrow c) = \text{T}$ (cazul 2: premisă falsă)

Interpretări ale unei formule

O *interpretare* a unei formule = o evaluare pentru propozițiile ei

O interpretare *satisface* o formulă dacă o evaluează la T. Spunem că interpretarea e un *model* pentru formula respectivă.

Exemplu: pentru formula $a \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee c)$

interpretarea $v(a) = \text{T}$, $v(b) = \text{F}$, $v(c) = \text{T}$ o satisface

interpretarea $v(a) = \text{T}$, $v(b) = \text{T}$, $v(c) = \text{T}$ nu o satisface.

O formulă poate fi:

tautologie (*validă*): adevărată în *toate* interpretările

realizabilă (en. *satisfiable*): adevărată în *cel puțin o* interpretare

contradicție (nerealizabilă): nu e adevărată în *nicio* interpretare

contingentă: adevărată în unele interpretări, falsă în altele

(nici tautologie, nici contradicție)

Algebra Booleană

Algebra Booleană

Pe mulțimi, $\cup$, $\cap$ și complementul formează o algebră booleană.
Tot o algebră booleană formează în logică și $\wedge$, $\vee$ și $\neg$:

Comutativitate: $A \vee B = B \vee A \qquad A \wedge B = B \wedge A$

Asociativitate: $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ și
$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

Distributivitate: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ și
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Identitate: există două valori (aici F și T) astfel ca:
$$A \vee \mathrm{F} = A \qquad A \wedge \mathrm{T} = A$$

Complement: $A \vee \neg A = \mathrm{T} \qquad A \wedge \neg A = \mathrm{F}$

Alte proprietăți (pot fi deduse din cele de mai sus):
Idempotență: $A \wedge A = A \qquad A \vee A = A$

Absorbție: $A \vee (A \wedge B) = A \qquad A \wedge (A \vee B) = A$
$\neg A \vee (A \wedge B) = \neg A \vee B$ *simplifică formula!*

Exemple de tautologii

$a \vee \neg a \qquad\qquad \neg\neg a \leftrightarrow a$

Regulile lui de Morgan
$$\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$$
$$\neg(a \wedge b) \leftrightarrow \neg a \vee \neg b$$

$(a \rightarrow b) \wedge (\neg a \rightarrow c) \leftrightarrow (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge c)$

$a \rightarrow (b \rightarrow c) \leftrightarrow (a \wedge b) \rightarrow c$

$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q \qquad\qquad (p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$

$a \rightarrow (b \rightarrow c) \leftrightarrow (a \wedge b) \rightarrow c$

$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ $\qquad$ $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$

$p \wedge q \rightarrow p$ $\qquad$ $(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$

$(p \rightarrow q) \rightarrow q$

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

E bine ca o reprezentare să fie:

canonică (un obiect să fie reprezentat într-un *singur* fel)
avem egalitate dacă și numai dacă au aceeași reprezentare

simplă și *compactă* (ușor de implementat / stocat)

ușor de prelucrat (algoritmi simpli / eficienți)

O astfel de reprezentare: *diagrame de decizie binare* (Bryant, 1986)

Forma normală conjunctivă (conjunctive normal form)

folosită pentru a determina dacă o formulă e *realizabilă* (poate fi *T*)

Def: *Forma normală conjunctivă* = *conjuncție* $\wedge$ de *clauze*
clauză = *disjuncție* $\vee$ de *literali*
literal = propoziție sau negația ei (p sau $\neg p$)

$(a \vee \neg b \vee \neg d)$ clauză
$\wedge (\neg a \vee \neg b)$ clauză
$\wedge (\neg a \vee c \vee \neg d)$ ...
$\wedge (\neg a \vee b \vee c)$ clauză

clauză = *disjuncție* ∨ de *literali* $\wedge (\neg a \vee c \vee \neg d)$ ...

literal = propoziție sau negația ei $\wedge (\neg a \vee b \vee c)$ clauză
(p sau $\neg p$)

Similar: forma normală *disjunctivă* (disjuncție de conjuncții)

Transformarea în formă normală conjunctivă

1) ducem (repetat) negația înăuntru *regulile lui de Morgan*
$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B \quad \neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

2) ducem (repetat) disjuncția înăuntru *distributivitate*
$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

Exemplu: forma normală conjunctivă

Lucrăm *din exterior* – evităm muncă inutilă

1) ducem *negațiile înăuntru* până la propoziții r. *de Morgan*
dubla negație dispare $\neg\neg A = A$
înlocuim implicațiile dinspre exterior când ajungem la ele
$p \to q = \neg p \vee q \qquad \neg(p \to q) = p \wedge \neg q$

2) ducem disjuncția ∨ înăuntrul conjuncției ∧ *distributivitate*

$$\begin{aligned}
& \neg((r \vee \neg(p \to (q \wedge r))) \vee (p \wedge q)) \\
= \; & \neg(r \vee \neg(p \to (q \wedge r))) \wedge \neg(p \wedge q) \\
= \; & \neg r \wedge (p \to (q \wedge r)) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\
= \; & \neg r \wedge (\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\
= \; & \neg r \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q)
\end{aligned}$$