CURSUL 10:
Sfera şi cercul în spaţiu

Paragraful de mai jos este preluat din cartea scrisă cu dl. prof. Dăianu (acesta nu apare în fişierul de pe Campus):

Sfere. *O sferă este locul geometric al punctelor echidistante faţă de un punct fix.* Punctul fix se numeşte **centru**, iar distanţa punctelor de pe sferă la centru se numeşte **rază**.

- *Sfera cu centrul în origine şi raza R* are ecuaţia
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$
- *Sfera cu centrul în punctul $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ şi raza R* are ecuaţia
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2.$$
- *Ecuaţia generală a sferei* este:
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$
sau, echivalent,
$$(x + a_{14})^2 + (y + a_{24})^2 + (z + a_{34})^2 = a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44}.$$
Prin urmare, dacă $a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44} > 0$, raza ei este $\sqrt{a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44}}$, iar centrul ei este $Q(-a_{14}, -a_{24}, -a_{34})$.

- *Aria sferei* de rază R este $4\pi R^2$.
- *Volumul sferei* de rază R este $\frac{4}{3}\pi R^3$.
- Un *cerc în spaţiu* se poate descrie în mai multe feluri; de exemplu ca:
  - intersecţia dintre o sferă şi un plan, sau
  - intersecţia dintre două sfere.
- Dacă $\mathcal{C}$ este un cerc dat prin intersecţia a două sfere
$$\mathcal{C}: \begin{cases} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2 \\ (x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 + (z-\gamma_1)^2 = R_1^2, \end{cases}$$
atunci *fasciculul de sfere* care trec prin $\mathcal{C}$ are ecuaţia
$$\alpha\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - R^2\right] +$$
$$\beta\left[(x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 + (z-\gamma_1)^2 - R_1^2\right] = 0,$$
unde α, β sunt doi parametri reali (desigur $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$), iar *planul cercului se obţine prin scăderea membru cu membru a ecuaţiilor celor două sfere.*

- Dacă $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ este cercul (real) obţinut ca intersecţie a sferei $\mathcal{S}: \ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ cu planul $\mathcal{P}: \ Ax + By + Cz + D = 0$, atunci centrul cercului se obţine intersectând planul $\mathcal{P}$ cu dreapta care trece prin $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ şi este perpendiculară pe plan, adică

$$D: \ \frac{x-\alpha}{A} = \frac{y-\beta}{B} = \frac{z-\gamma}{C}.$$

Raza r a cercului se obţine din teorema lui Pitagora: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, unde d este distanţa de la originea sferei la plan.

Exemplul 11.2.1. Fie sfera

$$\mathcal{S}: \ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 0$$

şi planul

$$\pi: \ x - y + z = 0.$$

Se cer următoarele:

1. centrul Q şi raza R pentru sfera $\mathcal{S}$;

2. centrul Q_c şi raza r ale cercului $\mathcal{C} := \mathcal{S} \cap \pi$;

3. centrul şi raza sferei $\mathcal{S}'$ ce trece prin punctul $P(1, 2, 3)$ şi prin cercul $\mathcal{C}$.

Rezolvare.

1. Deoarece, prin reducere la forma canonică (adică grupare la pătrate), ecuaţia sferei este
$\mathcal{S}: \ (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 2$, rezultă că centrul este $Q(-1, 1, 0)$, iar raza este $R = \sqrt{2}$.

2. În planul ce trece prin Q şi este perpendicular pe planul π avem triunghiul dreptunghic (în Q_c) QQ_cA, unde $A \in \mathcal{S}$.
Atunci distanţa $d(Q, A) = R$, distanţa $d(Q_c, A) = r$ şi distanţa $d(Q, Q_c) = d(Q, \pi) = \dfrac{|-1-1+0|}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Din teorema lui Pitagora obţinem $r = \sqrt{R^2 - (d(Q, Q_c))^2} = \sqrt{2 - \dfrac{4}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Centrul Q_c al cercului nostru este chiar proiecţia lui Q pe planul π, proiecţie pe care o obţinem intersectând dreapta Q_cQ cu planul π. Normala la planul π ne furnizează un vector director pentru dreapta Q_cQ şi obţinem

$$Q_cQ: \ \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Cum $Q_c \in Q_cQ \cap \pi$, din rezolvarea sistemului asociat intersecţiei rezultă $Q_c\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

3. Este suficient să alegem din fascicolul de sfere ce trec prin C pe aceea care trece şi prin P. Fascicolul este dat de

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta}: \ \alpha\left(x^2+y^2+z^2+2x-2y\right)+\beta\left(x-y+z\right)=0.$$

Din $P \in \mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ obţinem $\beta=-6\alpha$, iar sfera căutată este

$$\mathcal{S}': \ x^2+y^2+z^2-4x+4y-6z=0.$$

Reducând la forma canonică obţinem $\mathcal{S}': \ (x-2)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=17$. În consecinţă centrul acestei sfere este $Q'\left(2,-2,3\right)$, iar raza sa este $\sqrt{17}$.