Dan NICULA

ELECTRONICĂ DIGITALĂ
Carte de învăţătură 2.0

Editura Universităţii *TRANSILVANIA* din Braşov
ISBN 978-606-19-0563-8

2015

Lecţia 4

Reprezentarea funcţiilor logice cu forme standard

4.1 Noţiuni teoretice

Funcţiile logice pot fi reprezentate în două forme standard:

Forma Canonică Normală Disjunctivă (FCND), sumă de produse (Engl. *"Sum Of Products", SOP*):

$$F = \sum_{i=0}^{2^N-1} (d_i \cdot m_i)$$

Forma Canonică Normală Conjunctivă (FCNC), produs de sume (Engl. *"Product of Sums", POS*):

$$F = \prod_{i=0}^{2^N-1} (d_i + M_i)$$

S-au notat:
d_i = coeficienţii care definesc funcţia;
m_i = *minterm*, produs al tuturor variabilelor de intrare, negate sau nenegate.
M_i = *maxterm*, sumă a tuturor variabilelor de intrare, negate sau nenegate.

Dacă $d_i = 1, \forall i$, rezultă că suma tuturor mintermilor este egală cu 1:

$$\sum_{i=0}^{2^N-1} m_i = 1$$

,

Dacă $d_i = 0, \forall i$, rezultă că produsul tuturor maxtermilor este egal cu 0:

$$\prod_{i=0}^{2^N-1} M_i = 0$$

,

Exemplu: $F = A \oplus B$

index i	A	B	$F = A \oplus B$	Coeficienţi	Minterm	Maxterm
0	0	0	0	$d_0 = 0$	$m_0 = \overline{A} \cdot \overline{B}$	$M_0 = A + B$
1	0	1	1	$d_1 = 1$	$m_1 = \overline{A} \cdot B$	$M_1 = A + \overline{B}$
2	1	0	1	$d_2 = 1$	$m_2 = A \cdot \overline{B}$	$M_2 = \overline{A} + B$
3	1	1	0	$d_3 = 0$	$m_3 = A \cdot B$	$M_3 = \overline{A} + \overline{B}$

SOP: $F_{SOP} = \sum(d_i \cdot m_i) = 0 \cdot m_0 + 1 \cdot m_1 + 1 \cdot m_2 + 0 \cdot m_3 = m_1 + m_2 = \sum(1,2)$
POS: $F_{POS} = \prod(d_i + M_i) = (0 + M_0) \cdot (1 + M_1) \cdot (1 + M_2) \cdot (0 + M_3) = M_0 \cdot M_3 = \prod(0,3)$

Exemplu: $F = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot C$

index i	A	B	C	$F = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot C$	Coeficienţi	Minterm	Maxterm
0	0	0	0	1	$d_0 = 1$	$m_0 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$M_0 = A + B + C$
1	0	0	1	1	$d_1 = 1$	$m_1 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$	$M_1 = A + B + \overline{C}$
2	0	1	0	0	$d_2 = 0$	$m_2 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$	$M_2 = A + \overline{B} + C$
3	0	1	1	0	$d_3 = 0$	$m_3 = \overline{A} \cdot B \cdot C$	$M_3 = A + \overline{B} + \overline{C}$
4	1	0	0	0	$d_4 = 0$	$m_4 = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$	$M_4 = \overline{A} + B + C$
5	1	0	1	0	$d_5 = 0$	$m_5 = A \cdot \overline{B} \cdot C$	$M_5 = \overline{A} + B + \overline{C}$
6	1	1	0	0	$d_6 = 0$	$m_6 = A \cdot B \cdot \overline{C}$	$M_6 = \overline{A} + \overline{B} + C$
7	1	1	1	1	$d_7 = 1$	$m_7 = A \cdot B \cdot C$	$M_7 = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

SOP: $F_{SOP} = \sum(d_i \cdot m_i) = 1 \cdot m_0 + 1 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 + 0 \cdot m_3 + 0 \cdot m_4 + 0 \cdot m_5 + 0 \cdot m_6 + 1 \cdot m_7 = m_0 + m_1 + m_7 = \sum(0,1,7)$
POS: $F_{POS} = \prod(d_i + M_i) = (1 + M_0) \cdot (1 + M_1) \cdot (0 + M_2) \cdot (0 + M_3) \cdot (0 + M_4) \cdot (0 + M_5) \cdot (0 + M_6) \cdot (1 + M_7) =$
$= M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6 = \prod(2,3,4,5,6)$

4.2 Pentru cei ce vor doar să promoveze examenul

1. Scrieţi următoarele funcţii ca sumă de mintermi:
   a) $F_1(A,B,C) = A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C}$
   b) $F_2(A,B,C) = \overline{A} \cdot C + \overline{B} + A \cdot B \cdot \overline{C}$
   c) $F_3(A,B,C) = A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
   d) $F_4(A,B,C) = \overline{A} \cdot \overline{C} + C + A \cdot \overline{B} \cdot C$

   Soluţie

   a) Expresia funcţiei este sub forma unei sume de produse în care apar toate variabilele de intrare.

   Reprezentarea binară a indicelui unui minterm se deduce cu regula:
   - dacă variabila este ne-negată, bitul corespunzător este egal cu 1,
   - dacă variabila este negată, atunci bitul corespunzător este egal cu 0.

   Indexul minterm-ului $A \cdot B \cdot C$ este $111|_2 = 7|_{10}$.
   Indexul minterm-ului $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$ este $001|_2 = 1|_{10}$.
   Indexul minterm-ului $A \cdot B \cdot \overline{C}$ este $110|_2 = 6|_{10}$.

   Rezultă: $F_1(A,B,C) = \sum(7,1,6) = \sum(1,6,7)$

   b) Expresia funcţiei este sub forma unei sume de produse în care nu apar toate variabilele de intrare. Forma cu produse cu toate variabilele de intrare se obţine prin completarea fiecărui produs cu expresia $(X + \overline{X}) = 1$ cu variabila (sau variabilele lipsă). Ulterior, se reface forma de sumă de produse prin aplicarea distributivităţii. Prin această prelucrare este posibilă apariţiei în sumă a aceluiaşi minterm. Unul dintre ei se va elimina, deoarece $m_i \cdot m_i = m_i$.

$F_2(A,B,C) = \overline{A}\cdot C + \overline{B} + A\cdot B\cdot\overline{C} = \overline{A}\cdot(B+\overline{B})\cdot C + (A+\overline{A})\cdot\overline{B}\cdot(C+\overline{C}) + A\cdot B\cdot\overline{C} =$
$= \overline{A}\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot\overline{C} = \sum(3,1,5,4,1,0,6) = \sum(0,1,3,4,5,6)$

2. Scrieţi următoarele funcţii ca produs de maxtermi:
a) $F_1(A,B,C) = (A+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(A+B+\overline{C})$
b) $F_2(A,B,C) = (\overline{A}+C)\cdot\overline{B}\cdot(A+B+\overline{C})$
c) $F_3(A,B,C) = (A+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$
d) $F_4(A,B,C) = (\overline{A}+\overline{C})\cdot C\cdot(A+\overline{B}+C)$

Soluţie

a) Expresia funcţiei este sub forma unui produs de sume în care apar toate variabilele de intrare.

Reprezentarea binară a indicelui unui minterm se deduce cu regula:
- dacă variabila este ne-negată, bitul corespunzător este egal cu 0,
- dacă variabila este negată, atunci bitul corespunzător este egal cu 1.

Indexul maxterm-ului $A+B+C$ este $000|_2 = 0|_{10}$.
Indexul maxterm-ului $\overline{A}+\overline{B}+C$ este $110|_2 = 6|_{10}$.
Indexul maxterm-ului $A+B+\overline{C}$ este $001|_2 = 1|_{10}$.

Rezultă: $F_1(A,B,C) = \prod(0,6,1) = \prod(0,1,6)$

b) Expresia funcţiei este sub forma unui produs de sume în care nu apar toate variabilele de intrare. Forma cu sume cu toate variabilele de intrare se obţine prin completarea fiecărei sume cu expresia $(X\cdot\overline{X}) = 0$ cu variabila (sau variabilele lipsă). Ulterior, se reface forma de produse de sume prin aplicarea distributivităţii. Prin această prelucrare este posibilă apariţiei în produs a aceluiaşi maxterm. Unul dintre ei se va elimina, deoarece $M_i + M_i = M_i$.

$F_2(A,B,C) = (\overline{A}+C)\cdot\overline{B}\cdot(A+B+\overline{C}) = (\overline{A}+B\cdot\overline{B}+C)\cdot(A\cdot\overline{A}+\overline{B}+C\cdot\overline{C})\cdot(A+B+\overline{C}) =$
$= (\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\cdot(A+B+\overline{C}) =$
$= \prod(4,6,2,3,6,7,1) = \prod(1,2,3,4,6,7)$

3. Scrieţi expresiile mintermilor m_i şi maxtermilor M_i cu indicii precizaţi asociaţi următoarelor funcţii:
a) m_3, M_4, m_7, M_7 pentru $F(X,Y,Z)$
b) m_3, M_4, m_7, M_7, m_{13} şi M_{11} pentru $F(A,B,C,D)$

Soluţie

Se scrie indexul în baza 2 şi se asociază cifrele binare cu variablele de intrare (prin poziţie).

Pentru minterm:
- dacă variabila este asociată cu 1 apare în minterm ne-negată,
- dacă variabila este asociată cu 0 apare în minterm negată.

Pentru maxterm:
- dacă variabila este asociată cu 0 apare în minterm ne-negată,
- dacă variabila este asociată cu 1 apare în minterm negată.

a) $F(X,Y,Z)$:
$m_3 = \overline{X}\cdot Y\cdot Z$,
$M_4 = \overline{X}+Y+Z$.

b) $F(A,B,C,D)$:
$m_3 = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D$,
$M_4 = A+\overline{B}+C+D$,
$m_{13} = A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$,
$M_{11} = \overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}$

4. Scrieţi expresiile funcţiilor negate exprimate în ambele forme canonice:
a) $F_1 = \sum(0,1,5,6,7)$
b) $F_2 = \sum(2,4,6,11,14)$
c) $F_3 = \prod(0,3,5,7)$
d) $F_4 = \prod(1,2,3,12,13)$

Soluţie

Expresia funcţiei negate, în aceeaşi formă canonică se obţine considerând indecşii care nu apar în expresia directă. Expresia funcţiei negate, în formă canonică complementară se obţine considerând aceeaşi indecşii care apar în expresia directă.

a) $\overline{F_1} = \overline{\sum(0,1,5,6,7)} = \prod(0,1,5,6,7) = \sum(2,3,4)$
d) $\overline{F_4} = \overline{\prod(1,2,3,12,13)} = \sum(1,2,3,12,13) = \prod(0,4,5,6,7,8,9,10,11,14,15)$

5. Realizaţi tabelul de adevăr al funcţiilor:
a) $F_1 = \sum(0,1,5,6,7)$
b) $F_2 = \sum(2,4,6,11,14)$
c) $F_3 = \prod(0,3,5,7)$
d) $F_4 = \prod(1,2,3,12,13)$

Soluţie

Coloana funcţiei exprimată ca SOP prezintă valoarea 1 pe rândurile ale căror index apare în expresia FCND. În rest, valorile sunt 0.

Coloana funcţiei exprimată ca POS prezintă valoarea 0 pe rândurile ale căror index apare în expresia FCNC. În rest, valorile sunt 1.

index i	A	B	C	$F_1 = \sum(0,1,5,6,7)$	$F_3 = \prod(0,3,5,7)$
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	0	0	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	1	1
7	1	1	0	1	0

4.3 Pentru cei ce vor să înveţe

1. Determinaţi tabelul de adevăr al următoarelor funcţii şi apoi exprimaţi-le în formele standard FCND şi FCNC:
a) $F_1 = (X \cdot Y + Z) \cdot (Y + X \cdot Z)$
b) $F_2 = \overline{Y} \cdot Z + W \cdot X \cdot \overline{Y} + W \cdot X \cdot \overline{Z} + \overline{W} \cdot \overline{X} \cdot Z$
c) $F_3 = (\overline{X} + Y) \cdot (\overline{Y} + Z)$

Soluţie

a) Prin prelucrări analitice se obţine:
$F_1 = (X \cdot Y + Z) \cdot (Y + X \cdot Z) = X \cdot Y \cdot Y + X \cdot Y \cdot X \cdot Z + Z \cdot Y + Z \cdot X \cdot Z = X \cdot Y + X \cdot Y \cdot Z + Y \cdot Z + X \cdot Z =$
$= X \cdot Y \cdot (1 + Z) + Y \cdot Z + X \cdot Z = X \cdot Y + Y \cdot Z + X \cdot Z$

Din această formă se deduce coloana de adevăr a funcţiei F_1: funcţia este egală cu 1 dacă $X = Y = 1$ sau $Y = Z = 1$ sau $X = Z = 1$.

X	Y	Z	$F_1 = (X \cdot Y + Z) \cdot (Y + X \cdot Z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Funcţia se exprimă ca sumă de produse (mintermi) astfel:
$F_1 = \overline{X} \cdot Y \cdot Z + X \cdot \overline{Y} \cdot Z + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + X \cdot Y \cdot Z$
Funcţia se exprimă ca produs de sume (maxtermi) astfel:
$F_1 = (X + Y + Z) \cdot (X + Y + \overline{Z}) \cdot (X + \overline{Y} + Z) \cdot (\overline{X} + Y + Z)$

b) Din expresia dată se obţine direct tabelul de adevăr. Coloana funcţiei va fi 1 dacă va fi îndeplinită orice condiţie astfel încât un produs din expresia funcţiei să fie 1 ($Y = 0$ şi $Z = 1$, sau $W = X = 1$ şi $Y = 0$, $W = X = 1$ şi $Z = 0$, sau $W = X = 0$ şi $Z = 1$).

W	X	Y	Z	$F_2 = \overline{Y} \cdot Z + W \cdot X \cdot \overline{Y} + W \cdot X \cdot \overline{Z} + \overline{W} \cdot \overline{X} \cdot Z$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Funcţia se exprimă ca sumă de produse (mintermi) astfel:
$F_2 = \overline{W} \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z + \overline{W} \cdot \overline{X} \cdot Y \cdot Z + \overline{W} \cdot X \cdot \overline{Y} \cdot Z + W \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z + W \cdot X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} + W \cdot X \cdot \overline{Y} \cdot Z + W \cdot X \cdot Y \cdot \overline{Z}$
Funcţia se exprimă ca produs de sume (maxtermi) astfel:
$F_2 = (W + X + Y + Z) \cdot (W + X + \overline{Y} + Z) \cdot (W + \overline{X} + Y + Z) \cdot (W + \overline{X} + \overline{Y} + Z) \cdot (W + \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}) \cdot (\overline{W} + X + Y + Z) \cdot (\overline{W} + X + \overline{Y} + Z) \cdot (\overline{W} + X + \overline{Y} + \overline{Z}) \cdot (\overline{W} + \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})$

2. Scrieţi următoarele funcţii ca sumă de mintermi:
a) $F_1(A, B, C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C}$
b) $F_2(W, X, Y, Z) = W \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} + \overline{W} \cdot \overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z} + W \cdot X \cdot Y \cdot \overline{Z}$
c) $F_3(U, V, W, X, Y, Z) = \overline{U} \cdot V \cdot \overline{W} \cdot X \cdot Y \cdot \overline{Z} + U \cdot \overline{V} \cdot \overline{W} \cdot X \cdot Y \cdot Z + U \cdot V \cdot W \cdot X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$

Scrieţi aceleaşi funcţii ca sume de mintermi cu variabilele în altă ordine:
$F_1(B, A, C)$, $F_2(X, Y, Z, W)$, $F_3(X, Y, Z, U, V, W)$.

Soluţie

$F_1(A, B, C) = \sum(3, 5, 6)$
$F_1(B, A, C) = B \cdot \overline{A} \cdot C + \overline{B} \cdot A \cdot C + B \cdot A \cdot \overline{C} = \sum(5, 3, 6) = \sum(3, 5, 6)$
$F_2(W, X, Y, Z) = \sum(8, 2, 14)$
$F_2(X, Y, Z, W) = \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} \cdot W + \overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z} \cdot \overline{W} + X \cdot Y \cdot \overline{Z} \cdot W = \sum(1, 4, 13)$

Se concluzionează că modificarea ordinii variabilelor modifică indicii mintermilor care apar în expresia unei funcţii (nu şi numărul acestora). Pe un caz particular, indicii mintermilor pot rămâne aceeaşi.

3. Scrieţi următoarele funcţii ca produs de maxtermi:
a) $F_1(A, B, C) = (\overline{A} + B + C) \cdot (A + \overline{B} + C) \cdot (A + B + \overline{C})$
b) $F_2(W, X, Y, Z) = (W + \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}) \cdot (\overline{W} + \overline{X} + Y + \overline{Z}) \cdot (W + X + Y + \overline{Z})$
c) $F_3(U, V, W, X, Y, Z) = (\overline{U} + V + \overline{W} + X + Y + \overline{Z}) \cdot (U + \overline{V} + \overline{W} + X + Y + Z) \cdot (U + V + W + X + \overline{Y} + \overline{Z})$

Scrieţi aceleaşi funcţii ca produse de maxtermi cu variabilele în altă ordine:
$F_1(B, A, C)$, $F_2(X, Y, Z, W)$, $F_3(X, Y, Z, U, V, W)$.

Soluţie

$F_1(A, B, C) = (\overline{A} + B + C) \cdot (A + \overline{B} + C) \cdot (A + B + \overline{C}) = \prod(4, 2, 1)$
$F_1(B, A, C) = (B + \overline{A} + C) \cdot (\overline{B} + A + C) \cdot (B + A + \overline{C}) = \prod(2, 4, 1)$
$F_2(W, X, Y, Z) = (W + \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}) \cdot (\overline{W} + \overline{X} + Y + \overline{Z}) \cdot (W + X + Y + \overline{Z}) = \prod(7, 13, 1)$
$F_2(X, Y, Z, W) = (\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z} + W) \cdot (\overline{X} + Y + \overline{Z} + \overline{W}) \cdot (X + Y + \overline{Z} + W) = \prod(14, 11, 2)$

4. Scrieţi expresiile mintermilor m_i şi maxtermilor M_i cu indicii precizaţi asociaţi următoarelor funcţii:
a) m_2, M_2 pentru $F(X, Y, Z)$
b) m_5, M_5, m_{12}, M_{12}, m_7, M_7, m_{14} şi M_{14} pentru $F(A, B, C, D)$

c) m_4, M_4, m_{10}, M_{10}, m_{23}, M_{23}, m_{29} şi M_{29} pentru $F(V,W,X,Y,Z)$
d) m_1, M_1, m_9, M_9, m_{27}, M_{27}, m_{31} şi M_{31} pentru $F(A,B,C,D,E)$

Soluţie

a) $F(X,Y,Z)$: $m_2 = \overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z}$, $M_2 = X + \overline{Y} + Z$.

b) $F(A,B,C,D)$: $m_5 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$, $M_5 = A + \overline{B} + C + \overline{D}$, $m_{12} = A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$, $M_{12} = \overline{A} + \overline{B} + C + D$, $m_7 = \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D$, $M_7 = A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}$, $m_{14} = A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$, $M_{14} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D$.

5. Scrieţi complementara funcţiei $F(A,B,C,D) = \prod(0,3,7,13)$ în formă canonică normală disjunctivă.

Soluţie

$\overline{F(A,B,C,D)} = \overline{\prod(0,3,7,13)} = \sum(0,3,7,13) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$

6. Expandaţi expresiile funcţiilor pentru a ajunge la formele standard de sume de produse.
a) $F_a(X,Y,Z) = Y + \overline{X} \cdot \overline{Z}$
b) $F_b(X,Y,Z) = Y + Z$
c) $F_c(X,Y,Z) = \overline{Z} + \overline{X} \cdot Y$

Soluţie

a) Se adaugă variabilele lipsă din produse, în expresia $X + \overline{X} = 1$:
$F_a(X,Y,Z) = Y + \overline{X} \cdot \overline{Z} = (X + \overline{X}) \cdot Y \cdot (Z + \overline{Z}) + \overline{X} \cdot (Y + \overline{Y}) \cdot \overline{Z} =$
$(X \cdot Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + \overline{X} \cdot Y \cdot Z + \overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z}) + (\overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z} + \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}) = \sum(7,6,3,2,2,0) = \sum(0,2,3,6,7)$

7. Expandaţi expresiile funcţiilor pentru a ajunge la formele standard de produse de sume.
a) $F_a(X,Y,Z) = Y \cdot (\overline{X} + \overline{Z})$
b) $F_b(X,Y,Z) = Y \cdot Z$
c) $F_c(X,Y,Z) = \overline{Z} \cdot (\overline{X} + Y)$

Soluţie

a) Se adaugă variabilele lipsă din sume, în expresia $X \cdot \overline{X} = 0$:
$F_a(X,Y,Z) = Y \cdot (\overline{X} + \overline{Z}) = (X \cdot \overline{X} + Y + Z \cdot \overline{Z}) \cdot (\overline{X} + Y \cdot \overline{Y} + \overline{Z}) = (X + Y + Z) \cdot (X + Y + \overline{Z}) \cdot (\overline{X} + Y + Z) \cdot$
$(\overline{X} + Y + \overline{Z}) \cdot (\overline{X} + Y + \overline{Z}) \cdot (\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}) = \prod(0,1,4,5,5,7) = \prod(0,1,4,5,7)$

8. Se consideră funcţiile logice exprimate prin tabelul de adevăr următor:

A	B	C	X	Y	Z	W
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

a) Să se reprezinte fiecare funcţie în formele standard.
b) Să se deducă formele standard ale funcţiilor complementate.
c) Să se simplifice funcţiile prin prelucrări algebrice.

Soluţie

a) $X = \sum(0,1,2)$, $Y = \sum(3,4,5,6,7)$, $Z = \sum(0,1,2,5)$, $W = \sum(2,3,6,7)$.

b) $\overline{X} = \sum(3,4,5,6,7)$, $\overline{Y} = \sum(0,1,2)$, $\overline{Z} = \sum(3,4,6,7)$, $\overline{W} = \sum(0,1,4,5)$.

c) $X = \sum(0,1,2) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{C} + C) + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} =$
$\overline{A} \cdot (\overline{B} + B \cdot \overline{C}) = \overline{A} \cdot (\overline{B} + \overline{C}) = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C}$

$Y = \sum(3,4,5,6,7) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C = (\overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C) + (A \cdot \overline{B} \cdot$
$\overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C) + A \cdot B \cdot \overline{C} = B \cdot C + (A \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot \overline{C}) = B \cdot C + A(\overline{B} + B \cdot \overline{C}) = B \cdot C + A \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{C}$

$Z = \sum(0,1,2,5) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C = (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C) + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C =$
$(\overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}) + A \cdot \overline{B} \cdot C = \overline{A}(\overline{B} + \overline{C}) + A \cdot \overline{B} \cdot C = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C$

$W = \sum(2,3,6,7) = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$

9. Aflaţi expresiile complementare (negate), exprimate ca sumă de mintermi:
a) $F(A,B,C,D) = \sum(0,2,6,11,13,14)$ **b)** $F(A,B,C) = \prod(0,3,6,7)$

Soluţie

a) Funcţia complementară prezintă suma mintermilor care nu apar în expresia iniţială de "sumă de produse":
$\overline{F}(A,B,C,D) = \sum(1,3,4,5,7,8,9,10,12,15)$

b) Funcţia complementară prezintă suma mintermilor corespunzători maxtermilor care apar în forma iniţială de "produs de sume":
$\overline{F}(A,B,C) = \sum(0,3,6,7)$

10. Convertiţi funcţiile în forma standard complementară celei prezentate:
a) $F(A,B,C,D) = \sum(1,3,7,10)$ **b)** $F(A,B,C,D) = \prod(0,1,2,3,4,5,6,12)$

Soluţie

Forma standard complementară se obţine prin interschimbarea simbolurilor $\sum$ şi $\prod$ (din "sumă de produse" în "produs de sume") şi considerarea indecşilor care nu apar în expresia iniţială.
a) $F(A,B,C,D) = \prod(0,1,2,4,5,6,8,9,11,12,13,14,15)$

b) $F(A,B,C,D) = \sum(7,8,9,10,11,13,14,15)$

11. Convertiţi funcţiile în forme standard:
a) $(A \cdot B + C) \cdot (B + \overline{C} \cdot D)$
b) $\overline{A} + A \cdot (A + \overline{B}) \cdot (B + \overline{C})$
c) $(A + B \cdot \overline{C} + C \cdot D) \cdot (\overline{B} + E \cdot F)$

12. Determinaţi tabelul de adevăr, forma canonică conjunctivă şi forma canonică disjunctivă pentru următoarele expresii logice:

a) $F_a = (X \cdot Y + Z) \cdot (Y + X \cdot Z)$
b) $F_b = W \cdot X \cdot \overline{Y} + W \cdot X \cdot \overline{Z} + W \cdot X \cdot Z + Y \cdot \overline{Z}$
c) $F_c = X \cdot Y + X \cdot Z$
d) $F_d = (\overline{A} + B) \cdot (\overline{B} + C)$
e) $F_e = X + X \cdot Y$
f) $F_f = X \cdot Y \cdot \overline{Z} + \overline{X} \cdot Y + Z$

Soluţie

a) $F_a(X,Y,Z) = \prod(0,1,2,4) = \sum(3,5,6,7)$

X	Y	Z	$X \cdot Y$	$X \cdot Y + Z$	$X \cdot Z$	$Y + X \cdot Z$	F_a
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

b) $F_b(X,Y,Z,W) = \sum(4,5,9,11,12,13,15) = \prod(0,1,2,3,6,7,8,10,14)$

X	Y	Z	W	$\overline{Y}$	$\overline{Z}$	$W \cdot X \cdot \overline{Y}$	$W \cdot X \cdot \overline{Z}$	$W \cdot X \cdot Z$	$Y \cdot \overline{Z}$	F_b
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1

c) $F_c(X,Y,Z) = \prod(0,1,2,3,4) = \sum(5,6,7)$

X	Y	Z	$X \cdot Y$	$X \cdot Z$	F_c
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

d) $F_d(A,B,C) = \prod(2,4,5,6) = \sum(0,1,3,7)$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{B}+C$	F_d
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1

e) $F_e = \prod(0,1) = \sum(2,3)$

X	Y	$X \cdot Y$	F_e
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

f) $F_f = \prod(0,4) = \sum(1,2,3,5,6,7)$

X	Y	Z	$\overline{X}$	$\overline{Z}$	$X \cdot Y \cdot \overline{Z}$	$\overline{X} \cdot Y$	F_f
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

13. Scrieţi funcţiile următoare ca sumă de mintermi (forma canonică disjunctivă).
$F(A,B,C) = \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
$F(A,B,C,D) = \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$
$F(A,B,C,D,E) = \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D\cdot E + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}\cdot E + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot E + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}\cdot\overline{E}$

14. Scrieţi funcţiile următoare ca produse de maxtermi (forma canonică conjunctivă).
$F(A,B,C) = (\overline{A}+B+C)\cdot(A+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$
$F(A,B,C,D) = (\overline{A}+B+C+D)\cdot(A+B+C+\overline{D})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})\cdot(A+B+C+\overline{D})$
$F(A,B,C,D,E) = (\overline{A}+B+C+D+E)\cdot(A+B+C+\overline{D}+E)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}+\overline{E})\cdot(A+B+C+\overline{D}+\overline{E})\cdot$
$(A+B+\overline{C}+\overline{D}+E)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D}+\overline{E})$

4.4 Pentru cei ce vor să devină profesionişti

1. Aplicaţi teorema lui DeMorgan pentru a scrie funcţia $F = \overline{(A+B)\cdot C + D\cdot E}$ în formă standard de sumă de produse. Convertiţi-o apoi în formă de produs de sume.

   Soluţie

   Se aplică teorema lui DeMorgan pentru a se obţine o expresie care să nu conţină negări asupra unor expresii complexe (doar asupra variabilelor simple):
   $F = \overline{(A+B)\cdot C + D\cdot E} = \overline{(A+B)\cdot C}\cdot\overline{D\cdot E} = (\overline{A+B}+\overline{C})\cdot(\overline{D}+\overline{E}) = (\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{D}+\overline{E}) =$
   $= \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{E} + \overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{C}\cdot\overline{E}$

   În termenii produs se adaugă variabilele lipsă astfel:
   $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{D} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot(C+\overline{C})\cdot\overline{D}\cdot(E+\overline{E}) = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}\cdot E + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot E + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} =$
   $= m_5 + m_4 + m_1 + m_0 = \sum(0,1,4,5)$

   $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{E} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot(C+\overline{C})\cdot(D+\overline{D})\cdot\overline{E} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D\cdot\overline{E} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D\cdot\overline{E} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} =$
   $= m_6 + m_4 + m_2 + m_0 = \sum(0,2,4,6)$

   $\overline{C}\cdot\overline{D} = (A+\overline{A})\cdot(B+\overline{B})\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot(E+\overline{E}) = A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot E + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot E + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} +$
   $+ \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot E + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot E + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} =$
   $= m_{25} + m_{24} + m_{17} + m_{16} + m_9 + m_8 + m_1 + m_0 = \sum(0,1,8,9,16,17,24,25)$

   $\overline{C}\cdot\overline{E} = (A+\overline{A})\cdot(B+\overline{B})\cdot\overline{C}\cdot(D+\overline{D})\cdot\overline{E} = A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D\cdot\overline{E} + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D\cdot\overline{E} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D\cdot\overline{E} +$
   $+ \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D\cdot\overline{E} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot\overline{E} =$
   $= m_{26} + m_{24} + m_{18} + m_{16} + m_{10} + m_8 + m_2 + m_0 = \sum(0,2,8,10,16,18,24,26)$

   Expresia finală a funcţiei rezultă după reuniunea (însumarea) mintermilor şi excluderea celor dublaţi, astfel:
   $F = \sum(0,1,4,5) + \sum(0,2,4,6) + \sum(0,1,8,9,16,17,24,25) + \sum(0,2,8,10,16,18,24,26) =$
   $= \sum(0,1,2,4,5,6,8,9,10,16,17,18,24,25,26)$

   Forma de produs de sume se obţine prin considerarea maxtermilor cu index absent din forma de sumă de produse:
   $F = \prod(3,7,11,12,13,14,15,19,20,21,22,23,27,28,29,30,31)$

2. Se consideră două funcţii logice $F_1 = \sum(0,1,3)$ şi $F_2 = \sum(0,1,4,5)$. Arătaţi că:
   a) funcţia $E = F_1 + F_2$ conţine reuniunea mintermilor aparţinând funcţiilor F_1 şi F_2,
   b) funcţia $G = F_1\cdot F_2$ conţine intersecţia mintermilor funcţiilor F_1 şi F_2.

   Soluţie

   a) $E = F_1 + F_2 = \sum(0,1,3) + \sum(0,1,4,5) = \sum(0,1,3,0,1,4,5) = \sum(0,1,3,4,5)$

   Deci, dacă $F_1 = \sum(0,1,3)$ şi $F_2 = \sum(0,1,4,5)$ atunci $F_1 + F_2 = F_1 \cup F_2 = \sum(0,1,3,4,5)$.

   b) $G = F_1\cdot F_2 = \sum(0,1,3)\cdot\sum(0,1,4,5) = (P_0+P_1+P_3)\cdot(P_0+P_1+P_4+P_5) = (P_0\cdot P_0+P_0\cdot P_1+P_0\cdot P_4+P_0\cdot P_5)+$
   $(P_1\cdot P_0+P_1\cdot P_1+P_1\cdot P_4+P_1\cdot P_5)+(P_3\cdot P_0+P_3\cdot P_1+P_3\cdot P_4+P_3\cdot P_5) = (P_0+0+0+0)+(0+P_1+0+0)+(0+0+0+0) =$
   $P_0 + P_1 = \sum(0,1)$

   Deci, dacă $F_1 = \sum(0,1,3)$ şi $F_2 = \sum(0,1,4,5)$ atunci $F_1\cdot F_2 = F_1 \cap F_2 = \sum(0,1)$.