Material 3 – aplicații, continuare M3

Exemplu: Estimarea erorilor cumulate în cazul determinării valorii unei mărimi pe baza unor măsurări indirecte – legea de propagare a erorilor.

O metodă des întâlnită în calculul incertitudinii pentru măsurările indirecte este numită *propagarea incertitudinilor sau erorilor*. Metoda permite calculul incertitudinii dacă măsurandul $Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$. Cu alte cuvinte, relația pentru calculul măsurandului Y include alți parametri, fiecare contribuind în calculul final cu o anumită incertitudine relativă. Însă este important să știm că acest caz este cel al mărimilor independente. Practic, nu există o corelație între parametrii funcției *f*.

$$(\delta Y)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot \delta X_i \right)^2. \tag{1}$$

În relația (2) întâlnim coeficienții de sensibilitate $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ (derivatele parțiale ale funcției *f*), și incertitudinile individuale δX_i asociate fiecărui măsurand considerat în calculul mărimii *Y*.

În general, procedurile de măsurare pot fi catalogate ca *directe, indirecte* sau *combinate* (nu fac obiectul prezentei publicații).

Măsurările directe presupun utilizarea unor instrumente de măsurare care interacționează cu măsurandul. Valoarea măsurandului este citită de pe indicația/panoul/ecranul instrumentului și, eventual, ajustată cu un factor de corecție.

Măsurările indirecte presupun estimarea valorii măsurandului prin calcule în care intervin diferite argumente. Aceste argumente sunt determinate în mod direct sau indirect, iar cu ajutorul unei relații cunoscute putem determina valoarea măsurandului vizat. Spre exemplu, dorim să aflăm rezistivitatea unui cablu pentru care am măsurat lungimea *L*, aria secțiunii *A* și rezistența *R*. Astfel, rezistivitatea cablului $\boldsymbol{\rho} = \frac{R \cdot A}{L}$ $(\Omega \cdot \boldsymbol{m})$ se calculează în mod indirect pe baza argumentelor *L*, *A* și *R*.

Problemă rezolvată la curs.

Exemplu: Dorim să estimăm puterea consumată de un circuit. Am măsurat I = (30±0,5)mA și U = (12±0,8)V. Precizați valoarea δ_P cu ajutorul *legii de propagare a erorilor*, cu ajutorul calculului *erorii globală posibilă/verosimilă (sau calcul în cuadratură)* și cu ajutorul *supraestimării*.

Exemplu: Dorim să estimăm puterea consumată de un circuit. Un voltmetru conectat indică U = 70V și este setat pe domeniul de măsură 100V. Un ampermetru conectat indică I = 80mA și este setat pe domeniul de măsură 150mA. Ambele aparate au caracteristicile de acuratețe specificate ca ±1,5% din domeniul de măsură. Prezentați valoarea puterii P consumată de circuit.

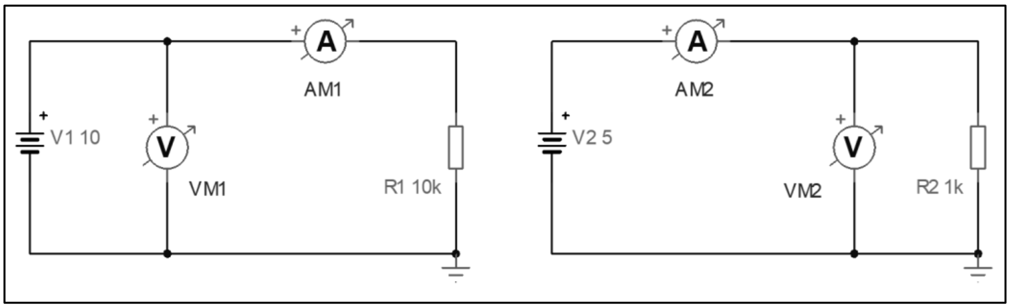
Exemplu: Într-un circuit măsurăm 2 valori de tensiune. Astfel, x_{m1}=0,81V și x_{m2}=6,95V. Cunoaștem valorile convențional adevărate pentru cele două tensiuni ca fiind X_1=0,8V și X_2=7V.

a) Determinați valoarea măsurată cu acuratețe mai bună. Justificați alegerea făcută.

b) Pentru masurarea celor două valori utilizăm un voltmetru analogic având domeniul de măsură setat pe 10V și o caracteristică de acuratețe de ±2% FSR. În aceste condiții, reluați cerința de la punctul a).

c) Pentru masurarea celor două valori utilizăm un voltmetru analogic având domeniul de măsură setat pe 8V și o caracteristică de acuratețe de ±1,5% FSR. În aceste condiții, reluați cerința de la punctul a).

Exemplu: Vom prezenta specificul *erorilor sistematice de metodă* prin măsurarea rezistenţelor prin aşa-numita *metodă voltampermetrică.* Denumirea acestui procedeu vine de la faptul că, pentru a determina valoarea rezistenţei, se folosesc două instrumente, un voltmetru şi un ampermetru. În principiu, metoda de măsurare se bazează pe legea lui Ohm: valoarea rezistenţei necunoscute se determină ca raportul dintre valoarea măsurată a tensiunii la bornele rezistenţei şi valoarea măsurată a curentului care trece prin ea. Putem aprecia faptul că utilizăm un tip de măsurare indirectă. Cu ajutorul argumentelor *tensiune* și *curent*, determinăm valoarea rezistenței necunoscute.



Cele două variante ale metodei voltampermetrice de măsurare a rezistenţelor.

În prima variantă a metodei voltampermetrice (stânga), ampermetrul AM1 este conectat nemijlocit în serie cu rezistenţa de măsurat ($R1$), astfel încât curentul I_a măsurat de acesta este chiar curentul prin rezistenţa $R1$; în schimb tensiunea $V_v = V1$ ($V1$ este o sursă ideală, cu rezistenţă internă nulă) măsurată de voltmetrul VM1 cuprinde pe lângă tensiunea pe $R1$ şi căderea de tensiune pe rezistenţa internă a ampermetrului ($R_a = 100\Omega = 0{,}1\text{k}\Omega$). Dacă ampermetrul ar fi un instrument ideal, rezistenţa lui internă R_a ar fi nulă, iar raportul (V_v/I_a) ar determina valoarea rezistenţei necunoscute ($R1$). Cum însă $R_a > 0$, raportul dintre tensiunea măsurată şi curentul măsurat va fi: $V_v/I_a = R1 + R_a$, iar pentru a obţine valoarea adevărată a rezistenţei $R1$, din raportul valorilor măsurate (V_v/I_a) trebuie *să scădem sistematic valoarea rezistenţei interne a ampermetrului*:

$$R1 = (V_v/I_a) - R_a. \tag{2}$$

Astfel, metoda voltampermetrică prezintă o *eroare absolută sistematică de metodă:*

$$\Delta_a = \frac{V_v}{I_a} - R1. \tag{3}$$

Dacă am considera raportul (V_v/I_a) drept valoarea rezistenţei calculate, rezultatul ar fi *sistematic mai mare* decât valoarea adevărată a lui $R1$. Scăzând însă din raport valoarea adiţională $\Delta_a = R_a = 0{,}1k\Omega$, *corectăm eroarea sistematică de metodă*.

Eroarea relativă în cazul prezentat mai sus este $\delta_{a\%} = (\Delta_a/R1) \cdot 100 = (R_a/R1) \cdot 100[\%] = (0{,}1k\Omega/10k\Omega) \cdot 100[\%] = 1\%$. Aceasta ar fi fost o eroare acceptabilă. Dacă însă rezistenţa de măsurat $R1$ ar fi avut o valoare mult mai mică, $\delta_{a\%}$ ar fi crescut mult. De exemplu, pentru $R1 = 1k\Omega$, ar fi rezultat $\delta_{a\%} = 10\%$, eroare inacceptabilă. Concluzia este că această variantă a metodei voltampermetrice este *potrivită pentru măsurarea rezistenţelor relativ mari* ($R1 \gg R_a$).

Pentru *rezistenţe de valori relativ mici*, este adecvată varianta prezentată în figura din dreapta, în care voltmetrul VM2 este conectat direct în paralel cu rezistenţa de măsurat ($R2$). Curentul I_a măsurat de ampermetrul AM2 nu trece integral prin rezistenţa de măsurat, $R2$. O parte va trece prin voltmetrul VM2, a cărui rezistenţă internă presupunem că este $R_v = 5k\Omega$. La modul ideal, rezistenţa internă a voltmetrului ar trebui să fie infinită petru ca prin el să nu treacă deloc curent. Practic însă, rezistenţa internă este de ordinul câtorva kΩ la voltmetrele analogice şi, mult mai mare, de ordinul a (10÷40)MΩ pentru voltmetrele digitale. În această variantă, tensiunea măsurată de voltmetru (V_v) este mai mică decât tensiunea sursei V2, ca efect al căderii de tensiune pe ampermetrul AM2 (ne amintim că $R_a > 0$). Oricum, raportul dintre tensiunea măsurată (V_v) şi curentul măsurat (I_a) nu este nici în cazul acestei variante, egal cu valoarea rezistenţei necunoscute ($V_v/I_a \neq R2$), ci cu rezistenţa echivalentă rezistenţei necunoscute ($R2$) conectată în paralel cu rezistenţa voltmetrului (R_v):

$$\frac{V_v}{I_a} = R_v \| \mathrm{R2} = \frac{R_v \cdot R2}{R_v + R2}. \tag{4}$$

Din această relaţie putem exprima valoarea adevărată a rezistenţei necunoscute:

$$R2 = \frac{V_v \cdot R_v}{R_v \cdot I_a - V_v}\ . \tag{5}$$

Se constată că şi în cazul acestei variante a metodei voltampermetrice apare o *eroare absolută sistematică de metodă:*

$$\Delta_b = \frac{V_v}{I_a} - R2 = -\frac{(R2)^2}{R2 + R_v}. \tag{6}$$

Dacă în cazul primei variante a metodei eroarea absolută era $\Delta_a = R_a$ pozitivă, conform relaţiei (3), de data aceasta eroarea absolută este negativă, în sensul că rezultatul indirect al măsurării, conform relaţiei (4), este sistematic mai mic decât valoarea adevărată a rezistenţei R2. Cu ajutorul valorilor măsurate (Vv şi Ia), dar şi cunoscând valoarea rezistenţei interne a voltmetrului (Rv), valoarea adevărată a rezistenţei necunoscute se poate determina cu ajutorul relaţiei (5), care implementează implicit corectarea erorii sistematice de metodă.

Pentru a ilustra clar întregul proces de măsurare, este util să considerăm un caz numeric, pornind de la o valoare cunoscută a rezistenţei ce trebuie măsurată. Astfel, dacă $R_2 = 1k\Omega$ şi $R_v = 5k\Omega$, valoarea măsurată conform relaţiei (4) va fi $R_v \| R_2 \cong 0{,}83k\Omega$. Considerând că sursa ce furnizează tensiunea $V_2 = 5V$ este o sursă ideală (cu rezistenţă internă nulă), pe când ampermetrul are rezistenţa internă $R_a = 0{,}1k\Omega$, curentul indicat de AM2 va fi $I_a = V_2/(R_v \| R_2 + R_a) \cong 5{,}36mA$. Ca urmare, putem calcula tensiunea care va fi măsurată de voltmetrul VM2, ca fiind $V_v = I_a \cdot (R_v \| R_2) \cong 4{,}46V$. Cu aceste valori cunoscute, se poate aplica formula (5) pentru a obţine valoarea rezistenţei care s-a presupus a fi necunoscută. Din cauza aproximărilor făcute la calculul curentului I_a şi al tensiunii V_v, valoarea adevărată a rezistenţei se obţine tot cu o uşoară aproximare, $R_2 \cong 1k\Omega$.

Cu valorile aproximative obţinute mai sus pentru rezistenţa R2 măsurată şi, respectiv, adevărată, ar rezulta o valoare aproximativă şi pentru *eroarea absolută sistematică de metodă*: $\Delta_b \cong 0{,}83k\Omega - 1\mathrm{k}\Omega = -170\Omega$. O valoare mai exactă a acestei erori se poate obţine cu ajutorul formulei (6):

$$\Delta_b = -\frac{(1k\Omega)^2}{1k\Omega + 5k\Omega} = -0{,}1666k\Omega \cong -167\Omega.$$

Ca şi în cazul primei variante a metodei, mai semnificativă este şi de această dată *eroarea relativă de măsurare*, exprimată pe baza relaţiei:

$$\delta_{b\%} = \left(\frac{\Delta_b}{R2}\right) \cdot 100 = -\frac{R2}{R2+R_v} \cdot 100[\%] = -\frac{1}{1+(R_v/R2)} \cdot 100[\%]. \qquad (7)$$

Relaţia (7) arată că eroarea relativă de măsurare este cu atât mai mică cu cât raportul $(R_v/R2)$ este mai mare. În concluzie, această variantă a metodei volt-ampermetrice este potrivită pentru măsurarea rezistenţelor relativ mici $(R2 \ll R_v)$. Pentru o rezistenţă R2 dată, este bine ca rezistenţa internă a voltmetrului (R_v) să fie cât mai mare. De exemplu, în cazul considerat, raportul $(R_v/R2)$ are valoare mică (5) şi ca urmare eroarea relativă de măsurare conform relaţiei (7) este mare: $\delta_{b\%} \cong -17\%$. Dacă s-ar fi folosit un voltmetru numeric cu rezistenţa internă $R_v = 10M\Omega$, raportul $(R_v/R2)$ foarte mare (10000) ar fi condus la o eroare relativă cu totul neglijabilă (-0,01%).

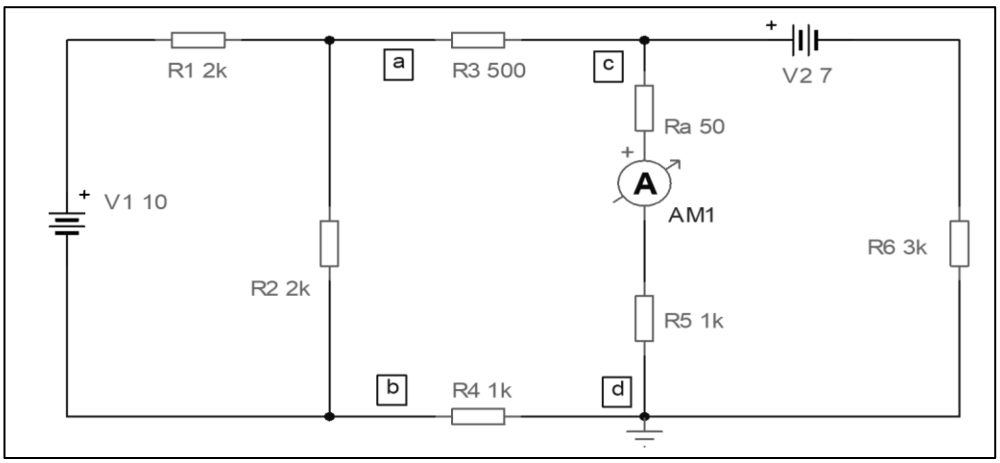
Exemplu: Un circuit serie este format din sursa de tensiune continuă E = 5V și rezistența R = 0,1kΩ. Un ampermetru inserat în circuit pentru măsurarea curentului indică I = 47,3mA. Determinați R_a și precizați valoarea erorii relative de măsurare.

Ca o concluzie generală, se constată că erorile sistematice, absolute sau relative, pot fi ori negative, ori pozitive, iar rezultatele măsurărilor repetate se situează toate, după caz, fie sub valoarea adevărată a măsurandului, fie peste această valoare. Metoda de măsurare trebuie aleasă şi în funcţie de valoarea aşteptată a măsurandului. Calitatea instrumentelor de măsurat este esenţială. În exemplul menționat, un ampermetru cu rezistenţă internă mică (ideal nulă), respectiv un voltmetru cu rezistenţă internă mare (ideal infinită) ar fi asigurat erori relative de măsurare neglijabile.

Pe lângă *erorile sistematice de metodă* de genul celor ilustrate prin exemplul anterior, în funcţie de cauzele care le generează există şi alte tipuri de erori sistematice. De pildă, modificarea în timp a caracteristicilor instrumentelor de măsurare duce la apariţia *erorilor sistematice instrumentale*. Pentru reducerea acestora se impune calibrarea periodică a instrumentelor. Modificarea condiţiilor de mediu (temperatură, presiune, câmp electromagnetic etc.) faţă de cele în care instrumentul de măsurare a fost calibrat determină apariţia *erorilor sistematice de influenţă*. Pentru reducerea erorilor de acest tip, la realizarea aparatelor trebuie să se folosească materiale cât mai puţin sensibile la parametrii de mediu (de exemplu, materiale cu coeficienţi de temperatură mici), iar dacă se impune, semnalele de măsură trebuiesc filtrate (de exemplu, pentru o componentă perturbatoare de 50Hz). Există instrumente inteligente care au senzori pentru anumiţi parametri de mediu şi se adaptează pentru reducerea influenţei acestora. Drept *erori sistematice de model* ar putea introduce chiar şi firele de conexiune, dacă ele prezintă o rezistenţă electrică de natură să conteze, nu egală cu zero, cum s-a presupus la modelare. *Erorile sistematice de interacţiune* merită o atenţie specială şi sunt ilustrate prin exemplele care urmează.

Exemplu: Într-un circuit cu schema de mai jos dorim să măsurăm curentul care trece prin rezistența R5. În acest scop, conectăm în serie cu rezistența R5 ampermetrul AM1 având rezistența internă $R_a = 50\Omega$. Cele două surse din circuit au rezistenţele interne nule şi prezintă tensiunile constante $V_1 = 10V$, respectiv $V_2 = 7V$. Rezistenţele au valorile: $R_1 = R_2 = 2k\Omega, R_3 = 500\Omega$; $R_4 = R_5 = 1k\Omega$; $R_6 = 3k\Omega$. Se pune întrebarea dacă introducerea ampermetrului AM1 pentru măsurarea curentului prin rezistenţa R5 modifică valoarea acestui curent şi în ce măsură?

Obs: Teorema lui Thévenin este foarte utilă pentru analiza reţelelor electrice relativ complexe. Astfel, în cazul unei reţele care cuprinde surse de tensiune, surse de curent, voltmetre, ampermetre şi rezistenţe, teorema permite înlocuirea unei părţi a circuitului situată între două puncte a şi b cu o singură sursă de tensiune (Etab) şi o rezistenţă înseriată (Rtab). Elementele înseriate, după Thévenin, între punctele a şi b (Etab şi Rtab) trebuie să aibă acelaşi efect asupra restului circuitului ca şi porţiunea de reţea înlocuită. În acest scop, sursa de tensiune echivalentă Etab se determină ca fiind tensiunea produsă între punctele a şi b de porţiunea de circuit ce urmează a fi înlocuită, atunci când acea porţiune ar fi decuplată de restul circuitului. La rândul ei, rezistenţa echivalentă Rtab se determină ca fiind egală cu rezistenţa prezentată între punctele a şi b de porţiunea de circuit ce urmează a fi înlocuită şi în care oricare sursă de curent este tratată ca circuit deschis şi oricare sursă de tensiune este considerată ca scurtcircuit.



Schemă pentru ilustrarea erorilor sistematice de interacţiune.

Pentru a răspunde la întrebarea propusă, vom determina prin calcul analitic valoarea curentului prin rezistenţa R5 atât pentru situaţia că ampermetrul nu este introdus în circuit, cât şi pentru situaţia că el măsoară valoarea curentului. Pentru a facilita calculul analitic, vom folosi teorema lui Thévenin.

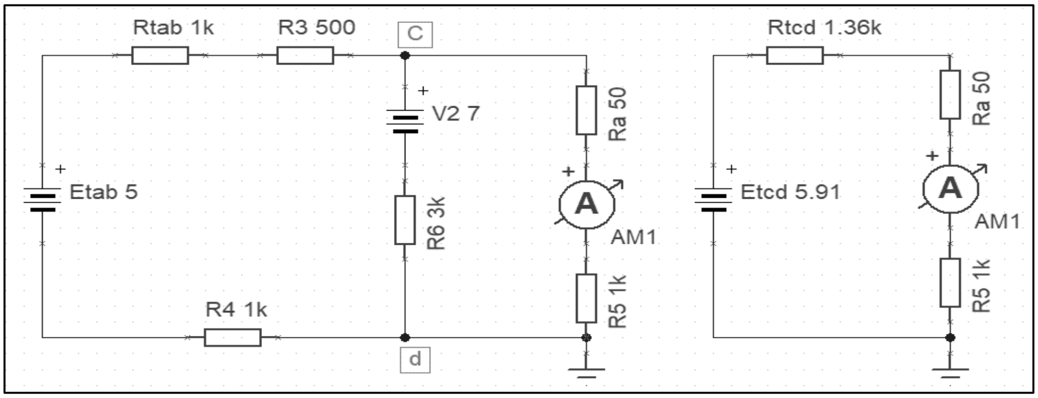
Ca un prim pas, vom înlocui, după Thévenin, porţiunea de circuit formată din elementele V1, R1 şi R2. Astfel, dacă scurtcircuităm sursa V1, rezistenţa echivalentă între punctele *a* şi *b* va fi formată din R1 şi R2 conectate în paralel:

$$Rtab = (R1 \cdot R2)/(R1 + R2) = (2k\Omega \cdot 2k\Omega)/(2k\Omega + 2k\Omega) = 1k\Omega.$$

Dacă am decupla de restul circuitului porţiunea ce urmează a fi înlocuită, între punctele *a* şi *b* ar apărea căderea de tensiune:

$$Etab = (V1 \cdot R2)/(R1 + R2) = 10V \cdot 2k\Omega/4k\,\Omega = 5\text{V}.$$

Introducând, conform teoremei, elementele *Etab* şi *Rtab* înseriate, circuitul din figura inițială capătă forma din figura următoare (stânga). Se observă că s-a modificat uşor topologia circuitului, astfel încât R5 să fie plasată în exterior, ca rezistenţă de sarcină, păstrând în serie cu ea rezistenţa internă (Ra) a ampermetrului AM1.



Transformări pentru determinarea analitică a curentului prin R5.

Este necesară o nouă aplicare a teoremei lui Thévenin pentru circuitul format din elementele *Etab*, *Rtab*, R3, R4, R6 şi V2. Astfel, scurtcircuitând sursele *Etab* şi V2, rezistenţa echivalentă între punctele c şi d va fi:

$$Rtcd = \frac{(R4+Rtab+R3)\cdot R6}{R4+Rtab+R3+R6} = \frac{2{,}5k\Omega\cdot 3k\Omega}{5{,}5k\Omega} \cong 1364\Omega.$$

Considerând că porţiunea de circuit ce urmează a fi înlocuită este decuplată de la rezistenţa de sarcină (R5 în serie cu Ra), curentul prin rezistenţa R6 este:

$$I = \frac{Etab-V2}{R4+Rtab+R3+R6} = \frac{-2V}{5{,}5k\Omega} \cong -0{,}364mA.$$

Ca urmare, tensiunea echivalentă după Thévenin între punctele c şi d va fi:

$$Etcd = V2 + I\cdot R6 \cong 7V - 0{,}364mA\cdot 3k\Omega = 5{,}908\text{V}.$$

Înlocuind cu elementele *Etcd* şi *Rtcd* porţiunea de circuit echivalată, schema capătă forma simplă din dreapta după care se poate calcula uşor valoarea curentului *I5a* prin rezistenţele R5 şi Ra înseriate:

$$I5a = Etcd/(R5+Ra+Rtcd) \cong 5{,}908V/2{,}414k\Omega \cong 2{,}45\text{mA}.$$

Aceasta este valoarea curentului prin rezistenţa R5 în situaţia că ampermetrul AM1 este conectat în circuit. Dacă ampermetrul nu ar fi introdus în circuit, curentul prin rezistenţa R5 ar avea o valoare uşor mai mare:

$$I5b = Etcd/(R5+Rtcd) \cong 5{,}908V/2{,}364k\Omega \cong 2{,}5\text{mA}.$$

Constatăm că introducerea instrumentului pentru măsurarea curentului a determinat modificarea măsurandului. Se manifestă o eroare *sistematică de interacţiune*, care ca eroare relativă exprimată în procente este:

$$\delta_{\%} = \frac{I5a-I5b}{I5b}\cdot 100 \cong -2\%.$$

Eroarea relativă este negativă pentru că valoarea curentului măsurat de instrument va fi *sistematic* mai mică decât curentul care ar circula prin R5 în lipsa ampermetrului.

Pentru *a aprecia erorile sistematice* care pot interveni într-un proces de măsurare, este necesară consultarea fişelor tehnice ale instrumentelor folosite. Totuşi, utilizatorul trebuie să ţină seama că eroarea posibilă indicată de produ-cătorul unui anumit instrument este certificată pentru anumite condiţii, care ar putea să nu fie îndeplinite la momentul şi locul măsurării. Este posibil ca într-un proces de măsurare să se manifeste mai multe tipuri de erori sitematice şi se pune problema *evaluării erorii sistematice globale*. Astfel, la modul simplist, însă des întâlnit în cadrul aplicațiilor industriale, *eroarea sistematică globală maximă* ($\delta_{max\%}$) se obţine prin *adunarea erorilor sistematice individuale*. Iar rezultatul reprezintă o estimare maximală (sau worst-case) a efectului erorilor sistematice asupra procesului de măsurare.

Totuşi, este puţin probabil ca toate cauzele producătoare de erori sistematice să se manifeste simultan cu maximă intensitate. Din acest motiv se foloseşte şi *eroarea sistematică globală posibilă/verosimilă* ($\delta_{ver\%}$), obţinută ca radical din suma pătratelor erorilor sistematice individuale. De exemplu, dacă într-un proces de măsurare s-ar manifesta o *eroare sistematică instrumentală* $\delta_{1\%} = \pm 0{,}5\%$, o *eroare sistematică de influenţă* $\delta_{2\%} = \pm 0{,}7\%$ şi o *eroare sistematică de interacţiune* $\delta_{3\%} = \pm 2\%$, eroarea sistematică globală *maximă* se obţine ca:

$$\delta_{max\%} = \pm(\delta_{1\%} + \delta_{2\%} + \delta_{3\%}) = \pm(0{,}5 + 0{,}7 + 2)\% = \pm 3{,}2\%,$$

iar *eroarea sistematică globală posibilă/verosimilă* se defineşte prin relaţia:

$$\delta_{ver\%} = \pm\sqrt{\delta_{1\%}^2 + \delta_{2\%}^2 + \delta_{3\%}^2}[\%] = \pm\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}7^2 + 2^2}\ [\%] \cong \pm 2{,}2\%.$$