

(R.-E. Precup, UPT, 2024)

1. DESCRIERE ȘI PROPRIETĂȚI GENERALE ALE SISTEMELOR

1.1. Sisteme fizice. Caracterizarea matematică a sistemelor

Procesul fizic (PF) reprezintă un ansamblu de transformări care caracterizează obiecte și fenomene interconectate – potrivit unei anumite structuri – și care sunt văzute în evoluția lor temporală. Desfășurarea unui PF implică fenomene de transfer de materie (masă și energie). **Sistemul fizic (SF)** reprezintă ansamblul material în care se desfășoară un PF. În relația sa cu mediul înconjurător, SF va fi caracterizat prin două categorii de mărimi, fig.1.5:

- **mărimi de intrare**, notate cu $u(t)$, prin intermediul cărora este influențată din exterior evoluția în timp a SF;
- **mărimi de ieșire**, notate cu $y(t)$, prin intermediul cărora este caracterizată evoluția în timp a SF.

Evoluția în timp (t) a unui SF, văzută prin evoluția celor două categorii de mărimi, este supusă **principiului cauzalității**, conform căruia:

- evoluția sistemului este direcționată în sensul trecut – prezent – viitor;
- evoluția ieșirilor $y(t)$ este cauzată de evoluția intrărilor $u(t)$ și a stării inițiale în care se află sistemul și nu invers.

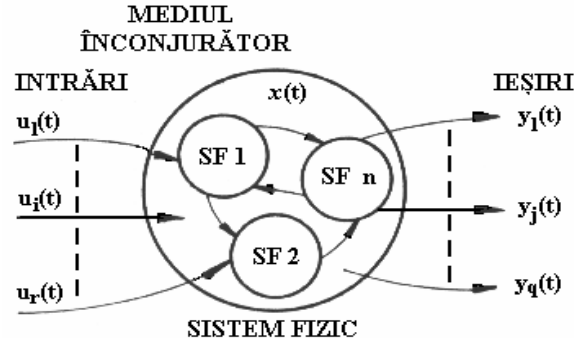


Fig.1.5. Reprezentarea unui sistem fizic.

Procesele de transfer care au loc în SF sunt însoțite de *fenomene de acumulare, de transfer și de disipare a materiei și energiei*, fenomene care se derulează în timp; se spune că SF prezintă o **dinamică** proprie. Aceste fenomene pot fi caracterizate prin intermediul **mărimilor de stare** ale SF; evoluția **mărimilor de stare** va fi caracterizată prin intermediul **variabilelor de stare**, notate cu $x(t)$.

Mărimile de stare ale SF sunt acele mărimi care prin valorile lor momentane definesc *situația sau starea* în care se află SF în acel moment de timp. Cunoașterea stării SF la un moment dat (t_0), $x(t_0)$, permite și aprecierea tendințelor de evoluție ulterioară a SF. Cum trecerea de la o stare la alta a SF nu poate fi instantanee, rezultă

că mărimile de stare ale SF trebuie să fie mărimi continue în timp și cu valoare continuă.

Ansamblul mărimilor de intrare $\mathbf{u}(t)$, de stare $\mathbf{x}(t)$ și de ieșire $\mathbf{y}(t)$ ale unui SF poartă denumirea de **mărimi caracteristice ale SF**, notate cu $\{\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)\}$.

Dacă numărul intrărilor, al ieșirilor și al stărilor unui sistem este mai mare decât unu, atunci aceste mărimi vor fi caracterizate prin vectorii (coloană) aferenți:

- vectorul mărimilor de intrare $\mathbf{u}(t)$, cu r componente,
- vectorul mărimilor de stare $\mathbf{x}(t)$, cu n componente,
- vectorul mărimilor de ieșire $\mathbf{y}(t)$, cu q componente:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_q(t) \end{bmatrix}; \quad (1.1)$$

indicele n definește **ordinul sistemului**.

Convenții de notație: - vectorii vor fi notați cu caractere aldine (bold);

- marcarea cu majuscule și caractere aldine va fi aplicată și matricelor;

- un vector (o matrice linie) se va considera ca *transpusa unei matricei coloană*:

$$\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]. \quad (1.2)$$

Construcția modelului matematic (MM) aferent unui SF are la bază alegerea **mărimilor de stare**, care trebuie să respecte **cerințele** următoare:

- mărimile să aibă variație continuă în timp;
- mărimile să caracterizeze fenomenele de transfer, de acumulare, de transformare și de disipare a materiei în SF.

În tabelul 1.1 sunt sintetizate recomandări generale privind alegerea mărimilor de stare în sistemele tehnice. În practica inginerescă prezintă interes analogiile care pot fi definite între diferitele domenii ale tehnicii, ilustrate în tabelul 1.2.

Un SF “văzut” prin intermediul modelului său matematic (MM) conduce la conceptul de **sistem dinamic (SD)** sau de **sistem abstract**. În acest context, SD este un concept matematic definit prin axiome referitoare la:

- **categorii de mulțimi** și **clase de funcții**, prin intermediul cărora se caracterizează variabila independentă t și mărimile caracteristice ale SF;
- **operatori (funcționale)** prin intermediul cărora sunt caracterizate dependențele structurale dintre mărimile caracteristice ale SF (a se vedea dependențele dintre subsistemele fizice SF 1, SF2 și SF n din fig.1.5).

În cazul unui sistem cu o singură intrare și o singură ieșire, legătura dintre SF și MM asociat (SD) este dată în fig.1.6.

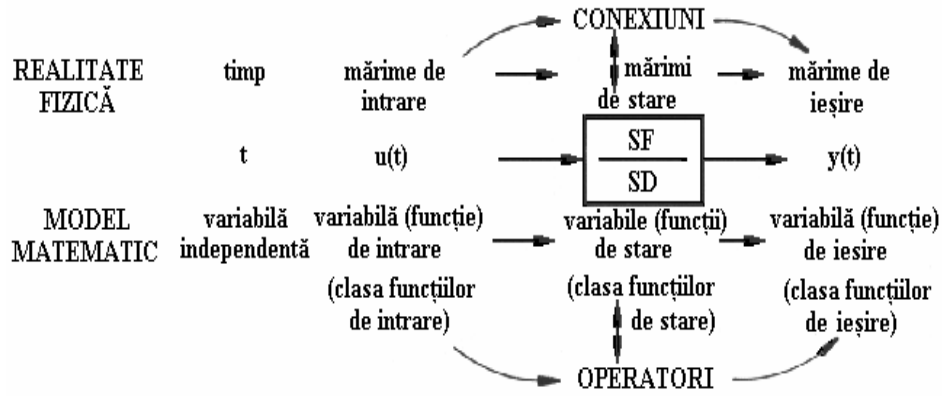


Fig.1.6. Legătura dintre conceptele de SF și SD.

Există două categorii de bază de MM asociabile unui SF (SD): - MM intrare-stare-ieșire (MM-ISI); - MM intrare-ieșire (MM-II).

MM-ISI evidențiază *structura internă* a SD (SF) sub forma unei reprezentări compuse de forma $u(t) \rightarrow x(t) \rightarrow y(t)$; această reprezentare poartă și denumirea de **reprezentare structurală a SD**. Forma generală a MM-ISI aferentă unui SD cu timp continuu cu o intrare $u(t)$ și o ieșire $y(t)$ (sistem SI-SO, Single Interface – Single Output) este dată de relația

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) - \text{ecuația de stare,} \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + d u(t) - \text{ecuația ieșirii.} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Mărimile de stare $\mathbf{x}(t)$ sunt mărimi interne ale SF (SD).

Eliminând în relația (1.3) mărimile interne $\mathbf{x}(t)$, poagte fi explicitată dependența nemijlocită intrare - ieșire aferentă (SD) SF:

$$\text{intrare } [u(t)] \rightarrow \text{ieșire } [y(t)], \quad (1.4)$$

care corespunde unui **model matematic intrare-ieșire (MM-II)**.

În cazul *sistemelor cu timp continuu, liniare, invariante, cu parametri constanți, cu o intrare și o ieșire*, reprezentarea (1.4) are forma generală dată de relația

$$\sum_{v=0}^n a_v y^{(v)}(t) = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} u^{(\mu)}(t), \quad (1.5)$$

cu condiția $m \leq n$ denumită *condiția de cauzalitate* a sistemului.

Reprezentările (1.4) respectiv (1.5) corespund așa-numitei **reprezentări funcționale** a SD.

4 Descriere și proprietăți generale ale sistemelor – 1 (R.-E. Precup, UPT, 2024)

Tabelul 1.1. Recomandări pentru alegerea mărimilor de stare în sistemele fizice.

Tipul procesului de transfer	Mărimi de stare	Exemple de ecuații de stare	Exemple de elemente acumulate
Substanță	Masa m	$m' = Q_m$, Q_m – debit de masă	Rezervor hidrolic
Sarcină electrică	Sarcina electrică q	$q' = i$, i – curent electric (intensitatea)	Armăturile unui condensator
Impuls	Impulsul de translație $p = mv$	$p' = \sum F_i$, F_i – forță	Un corp supus unei mișcări de translație sau de rotație
	Impulsul de rotație	$p_{\omega}' = \sum M_i$, M_i – moment de rotație	
Energie cinetică	Viteza liniară v	$v' = (1/m)\sum F_i$, $v' = a$ (a – accelerație liniară)	Idem
	Viteza unghiulară ω	$\omega' = (1/J)\sum M_i$, $\omega' = a_{\omega}$ (a_{ω} – accelerație unghiulară)	
Energie potențială	Spațiul s	$s' = v$, v – viteză liniară	Idem
	Unghiul de rotație α	$\alpha' = \omega$, ω – viteză unghiulară	
Energie înmagazinată într-un sistem elastic	Forța deforma-toare F	$F' = k_r v$, k_r – constantă de elasticitate	Resort material elastic sau resort spiral supus deformării
	Momentul deformatoare M	$M' = k_r \omega$, k_r – constantă de elasticitate	
Căldură	Tempera-tura θ	$\theta' = (1/C_{\theta})q_{\theta}$, q_{θ} – flux termic	Corp omogen de capacitate calorică C_{θ}
Energie electro-magn.: - în câmpul electric al unui con-densator - în câmpul magnetic al unei bobine	Tensiunea la bornele condensa-torului u_C	$u_C' = (1/C) \cdot i$	Condensator de capacitate C
	Curentul prin bobină i_L	$i_L' = (1/L) \cdot u$	Bobină de inductanță L

(R.-E. Precup, UPT, 2024)

Tabelul 1.2. Analogii între diferite mărimi fizice și diferiți parametri implicate / implicați în procese de transfer.

Nr. crt.	Circuit electric serie	Circuit electric paralel	Sistem mecanic în mișcare de translație	Sistem mecanic în mișcare de rotație	Sistem termic	Sistem hidraulic	Sistem pneumatic
0	1	2	3	4	5	6	7
1	Tensiune electrică, u	Curent electric i	Forță F	Momentul M	Diferență de temperatură $\Delta\theta$	Diferență de presiune, Δp	---
2	Sarcină electrică q	Flux magnetic Φ	Deplasare liniară s	Unghi de rotație α	Cantitate de căldură, Q_θ	Cantitate de fluid, Q_f	Cantitate de gaz, Q_g
3	Curent electric i	Tensiune electrică, u	Viteză liniară v	Viteză unghiulară ω	Flux termic, q_θ	Debit de fluid q_f	Debit de gaz, q_g
4	Inductanță L	Capacitate C	Masă m	Moment de inerție J	---	Coefficient de inerție hidraulică	---
5	Rezistență R	Conductanță $1/R$	Coefficient de frecare vâscoasă μ		Rezistență termică, R_θ	Rezistență hidraulică, R_h	Rezistență pneumatică R_p
6	Capacitate C	Inductanță L	Constantă elastică, k_e		Capacitate calorică, C_θ	Capacitate hidraulică, C_h	Capacitate pneumatică C_p

1.2. Clasificarea sistemelor dinamice și sistemelor fizice

Pentru *definirea și clasificarea SF*, a SD, este necesară *clasificarea* prealabilă *semnalelor, a variabilelor* prin intermediul cărora este caracterizat sistemul.

1.2.1. Clasificarea semnalelor și variabilelor

Prin *semnal* se înțelege o mărime fizică văzută ca *suport purtător al informației referitoare la un sistem*. Semnalele sunt caracterizate prin intermediul unor funcții, u , de variabila timp t . Funcția u este o aplicație de forma:

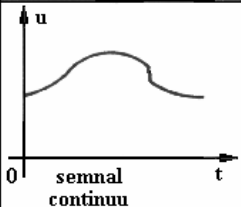
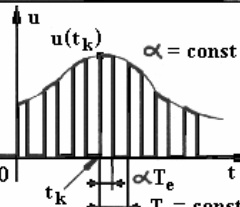
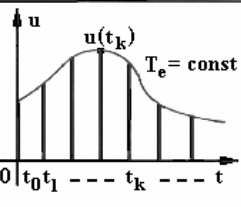
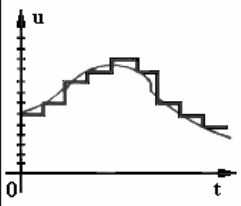
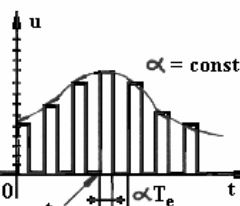
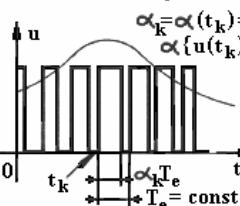
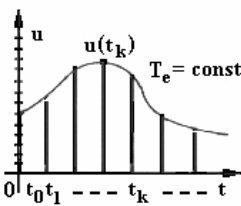
$$u : T \rightarrow U, \quad (1.6)$$

care asociază fiecărui moment de timp $t \in T$, T – mulțimea momentelor de timp, un element $u(t)$ din mulțimea U a valorilor funcției de timp. Ansamblul funcțiilor de intrare, de stare sau de ieșire posibile notate cu U :

$$U = \{u \mid u : T \rightarrow U\} \quad (1.7)$$

constituie *clasa funcțiilor* de intrare, de stare sau de ieșire. În tabelul 1.3 este prezentată o clasificare semnalelor funcție de caracterul mulțimilor din relația (1.7):

Tabelul 1.3. Clasificarea semnalelor necodificate.

U \ T		După caracterul mulțimii T		
		Continue în timp (cu timp continuu)	Discontinue în timp	Discrete în timp (cu timp discret)
		(1)	(2)	(3)
După caracterul mulțimii U	Cu valoare continuă	(1) 		
	Cu valoare cuantizată	(2) 	 	

A) După caracterul mulțimii T a momentelor de timp se disting (tabelul 1.3, coloanele (1), (2), (3)):

- **semnale continue în timp (cu timp continuu)**, pentru care T este un segment compact,
- **semnale discontinue în timp**, pentru care:

$$u(t) = \begin{cases} \neq 0 & \text{for } t \in [(k-1)T_e, (k-\alpha)T_e], \quad k = 1, 2, \dots, \\ 0 < \alpha < 1, \quad \alpha = \text{const sau nu}, \\ = 0 & \text{in caz contrar;} \end{cases} \quad (1.8)$$

- **semnale discrete în timp (cu timp discret)**, pentru care T este o mulțime de valori discrete.

B) După caracterul mulțimii U se disting (tabelul 1.3, linia (2)):

- **semnale cu valoare continuă**, pentru care U este un segment compact (tabelul 1.3, linia (1));
- **semnale cu valoare cuantizată**, pentru care U este o mulțime numărabilă, cu valori discrete.

*Semnalele continue în timp și cu valoare continuă se numesc **semnale continue**; ele sunt specifice sistemelor fizice continue și DC realizate cu echipamente “clasice” (electrice, electronice, mecanice, hidraulice, pneumatice).*

Semnalele cu timp discret cu valoare cuantizată (și apoi codificată) sunt specifice DC cu timp discret, numerice (digitale).

Semnalele cu timp continuu cu valoare cuantizată sunt prezente în cadrul SCA cu DC cu timp discret ca extensii continue ale semnalelor cu timp discret.

Semnalele discontinue în timp sunt prezente în construcții de DC electronice.

C) După modul de prezentare a informației conținute în semnal se disting:

- **semnale necodificate**: purtătoarea conținutului informației este “valoarea semnalului” la un moment dat (semnale modulate în amplitudine) sau durata lui (la o amplitudine constantă) (semnale modulate în durată, tabelul 1.3);
- **semnale codificate**: purtătoarea conținutului informației îl poate reprezenta:
 1. numărul de impulsuri într-un interval de timp dat (reprezentarea (1)),
 2. codificarea modului de succesiune a impulsurilor la un moment de timp dat (reprezentarea paralel, (2-a)) sau într-un interval de timp dat (T_q) (reprezentarea serie, (2-b)).

În fig.1.7 sunt redate diferite modalități de codificare a informației cuprinse în eșantionul de la momentul t_k ($u(t_k)=u_k$) al semnalului continuu $u(t)$; $\bar{u}(t_k)$ reprezintă valoarea cuantizată a eșantionului, iar $\bar{u}(t_k)$ este “valoarea” codificată aferentă.

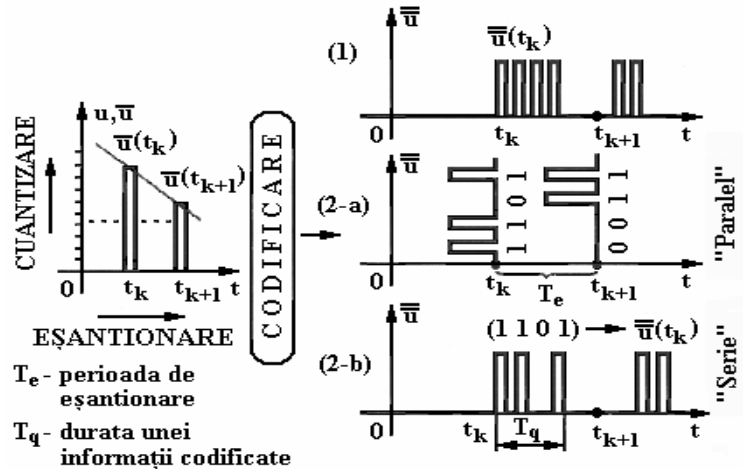


Fig.1.7. Exemple de codificare a informației la un DC cu timp discret.

Semnalele discrete în timp, cu valoarea cuantizată și apoi codificată sunt specifice prelucrării numerice a informației la utilizarea în conducere a calculatoarelor numerice.

1.2.2. Detalii suplimentare privind conceptul de system dinamic

Conceptul de sistem dinamic (SD) este legat de caracterul mulțimii momentelor de timp, T . Astfel, sunt definite separat conceptele de:

- *sistem dinamic cu timp continuu (SD-C);*
- *sistem dinamic cu timp discret (SD-D).*

A) Sistemul dinamic cu timp continuu (SD-C). Conceptul de SD-C se poate definiște prin generalizarea dimensională a reprezentării prin MM-ISI a unui SF, a relației (1.3) în forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \text{ecuația de stare,} \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \text{ecuația ieșirii,}\end{aligned}\tag{1.9}$$

în care \mathbf{f} și \mathbf{g} sunt funcționale vectoriale de variabile vectoriale care caracterizează conexiunile din sistem; \mathbf{u} , \mathbf{x} și \mathbf{y} semnifică variabilele SD,

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_q(t) \end{bmatrix},\tag{1.10}$$

cu r – numărul variabilelor de intrare, n – numărul variabilelor de stare, q – numărul variabilelor de ieșire, t – variabila independentă timp,

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R}^r, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \subset \mathbf{R}^q.\tag{1.11}$$

Evoluția stării sistemului $\mathbf{x}(t)$ este dată de soluția ecuației de stare, iar $\mathbf{y}(t)$ caracterizează evoluția ieșirii sub acțiunea intrării $\mathbf{u}(t)$; vectorul $\mathbf{x}(t)$ caracterizează *starea sistemului* la momentul de timp curent, iar n -uplul $\{t; \mathbf{x}(t)\}$ caracterizează *faza sistemului*. Pentru un interval de timp $[t_0, t_f]$ traiectoria descrisă de $\mathbf{x}(t)$ în spațiul stărilor \mathbf{X} este denumită *traiectorie de stare*, iar traiectoria $\mathbf{x}(t)$ în spațiul $T \times \mathbf{X}$ poartă denumirea de *traiectorie de fază*. Similar, traiectoria $\mathbf{y}(t)$ în spațiul $T \times \mathbf{Y}$ este denumită *traiectoria ieșirii*.

MM-ISI descris prin relația (1.9) caracterizează sistemele cu mai multe intrări și mai multe ieșiri, denumite *sisteme multivariabile la intrare și ieșire (Multi Input-Multi Output, MIMO-systems)*. Sistemele cu o intrare și o ieșire (relația (1.3)) sunt denumite *sisteme monovariabile la intrare și ieșire (Single Input-Single Output, SISO-systems)*.

B) Sistemul dinamic cu timp discret (SD-D). Mărimile caracteristice ale unui SF (SD-C) pot fi văzute de către un “observator extern” la momente discrete ale timpului, t_k , (k

$= 0, 1, 2, \dots$ sau $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$), care sunt de regulă echidistanțate pe intervalul de timp T_e numit **perioadă de eșantionare**, fig.1.8. “Observatorul extern” poate fi, după caz:

- ♦ un echipament de prelucrare numerică a informației (analizor de semnal),
- ♦ un DC numerică prin care se asigură conducerea sistemului.

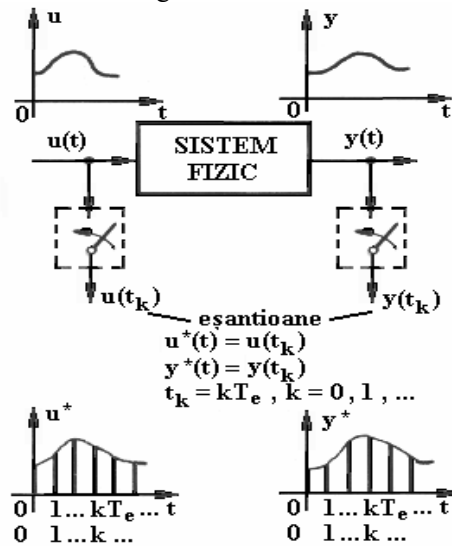


Fig.1.8. Ilustrarea procesului de eșantionare.

Componentele $u(t_k) = u_k$, $y(t_k) = y_k$, $x(t_k) = x_k$ ale secvențelor de valori $u^*(t)$, $y^*(t)$, $x^*(t)$ cu sunt denumite **eșantioane ale semnalului continuu** $u(t)$, $y(t)$ $x(t)$.

În cazul *conducerii unui PC continuu de către un DC numerică*, fig.1.9, $u(t)$ și $y(t)$ sunt mărimi continue; mărimile w^* , y^* și u^* sunt mărimi cu timp discret, cuantizate și codificate; în tratarea informației apar astfel două fenomene:

- la “observarea” evoluției PC de către DC prin $y(t)$ are loc *operația de eșantionare urmată de cuantizare și codificare*; similar și pentru mărimea de referință, $w(t)$;
- comanda discretă, cuantizată (și codificată) $u(t_k)$ elaborată de către DC la momentele de timp $t_k = kT_e$ este transmisă către PC; în vederea conducerii PC, devine necesară “construirea” unui semnal continuu $u_c(t)$ pe baza eșantioanelor u_k ; cel mai simplu mod de construire a unui astfel de semnal constă în *reținerea valorii eșantionului pe întreaga durată a perioadei de eșantionare*.

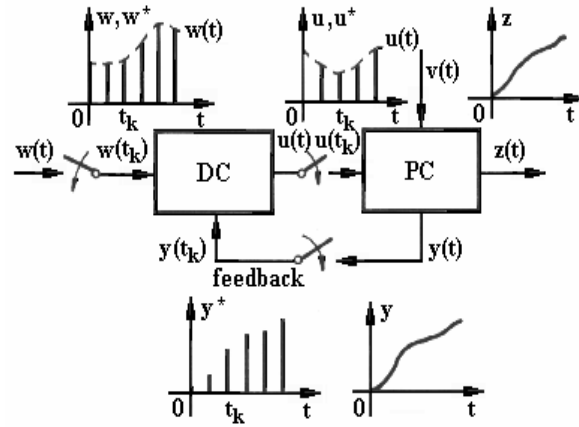


Fig.1.9. Semnale care apar la conducerea numerică a unui PC continuu.

Pentru caracterizarea matematică a SF pentru care informația este disponibilă la momente discrete și echidistanțate ale timpului, se apelează la reprezentarea de **sistem dinamic cu timp discret (SD-D)**, sub forma relațiilor:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(k, \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad - \text{ecuația de stare}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(k, \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad - \text{ecuația ieșirii}, \quad (1.13)$$

în care $k \in \mathbb{Z}(N)$ reprezintă contorul momentelor de timp discret $t_k = kT_e$.

Ecuația (1.12) este o **ecuație recurentă**, în care orice nouă valoare a variabilei de stare, $\mathbf{x}(k+1)$, se calculează pe baza *valorilor actuale ale stării $\mathbf{x}(k)$ și intrării $\mathbf{u}(k)$* ; ecuația ieșirii (1.13) oferă valorile actuale ale ieșirii, $\mathbf{y}(k)$. Astfel, dacă se cunosc:

- starea inițială a sistemului (pentru $k=0$), $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,
- secvența valorilor de intrare, $\mathbf{u}(k)$, cu $k \in N$,

atunci, pe baza ecuațiilor (1.13) și (1.14) se obțin succesiv:

- la $k = 0$ $\mathbf{x}(0)$ – cunoscută, $\mathbf{u}(0)$ – dată,
- la $k = 1$ $\mathbf{x}(1) = \mathbf{f}(0, \mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0))$ – se calculează, (1.14)
- la $k = 2$ $\mathbf{x}(2) = \mathbf{f}(1, \mathbf{x}(1), \mathbf{u}(1)) = \mathbf{f}(1, \mathbf{f}(0, \mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)), \mathbf{u}(1))$, ... – se calculează.

În cazul în care contorul momentelor de timp k se notează cu t (în acest caz el nu trebuie confundat cu timpul curent t din cazul SD-C) atunci relațiile (1.12) și (1.13) pot fi scrise în forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Comparând relațiile (1.9) și (1.15) se poate da următoarea **reprezentare unitară** a MM-ISI aferent unui SD:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),\end{aligned}\tag{1.16}$$

în care $\mathbf{x}'(t)$ va avea, după caz, semnificația:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t), & t \in T \subset \mathbf{R} \text{ în cazul SD-C,} \\ \mathbf{x}(t+1), & t \in \mathbf{Z}(\mathbf{N}) \text{ în cazul SD-D.} \end{cases}\tag{1.17}$$

Remarcă: Valorile la momentele de timp t_k ale variabilelor în timp discret $\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{x}(k)$ și $\mathbf{y}(k)$ sunt exprimate adeseori după cum este exemplificat în continuare pentru o singură variabilă de intrare:

$$u(k) \Leftrightarrow u(t_k) \Leftrightarrow \left. u(t) \right|_{t=t_k}.$$

1.2.3 Principii de categorisire a sistemelor dinamice

Categorisirea SD trebuie să țină seama de tipurile de semnale vehiculate / prelucrate de sistem și de caracterul funcționalelor \mathbf{f} și \mathbf{g} ce caracterizează structura sistemului. În forma generală (1.16), conceptele de SD-C și respectiv SD-D diferențiază sistemele numai după modul de tratare în timp a mărimilor / variabilelor caracteristice ale SD, relația (1.17). Proprietățile structurale particulare ale SF din practică, sunt reflectate în formele particulare ale funcționalelor (operatorilor) \mathbf{f} și \mathbf{g} din relația (1.16) (Ionescu, 1975), (Belea, 1985), (Ionescu, 1985), (Preitl, 1992). În continuare, aria prezentărilor se va restrânge în principal la **clasa sistemelor liniare cu coeficienți constanți**, pentru care metodele analitice de studiu sunt relative simple.

În acest context, un sistem dinamic în timp continuu (SD-C) sau în timp discret (SD-D) este **liniar cu coeficienți constanți** dacă funcționalele \mathbf{f} și \mathbf{g} sunt liniare, iar parametrii care caracterizează funcționalele sunt constanți (invarianti în timp); **sistemele liniare și invariante** sunt simbolizate **SLI**.

MM-ISI aferent unui SLI se poate scrie în forma generală:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t).\end{aligned}\tag{1.18}$$

\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} și \mathbf{D} sunt matrice cu coeficienți constanți în timp, cu dimensiunile bine precizate și cu denumiri consacrate:

- $\dim \mathbf{A} = (n \times n)$, \mathbf{A} – matricea sistemului,
- $\dim \mathbf{B} = (n \times r)$, \mathbf{B} – matricea de controlabilitate,
- $\dim \mathbf{C} = (q \times n)$, \mathbf{C} – matricea de observabilitate,
- $\dim \mathbf{D} = (q \times r)$, \mathbf{D} – matricea de interconexiune.

(1.19)

Cum transferul instantaneu al materiei de la intrare către ieșire SF nu este posibil, matricea \mathbf{D} va fi matrice cu elemente nule.

În practică, dependențele liniare dintre mărimile SF sunt rare și cu domeniu limitat de valabilitate. Dacă variațiile mărimilor caracteristice ale unui SF se restrâng la domenii în care *proprietatea de liniaritate* se păstrează (mai mult sau mai puțin riguros), atunci folosirea MM liniare poate fi justificată. Atașarea la un SF cu neliniarități a unui MM liniar (sau liniarizat) nu este întodeauna posibilă.

Pentru cazul particular al SLI *monovariabil*, reprezentarea prin MM-ISI (1.18) poate fi rescrisă în forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + d u(t), \end{aligned} \quad (1.20)$$

în care matricele \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T și d ($d=0$) au dimensiunile adaptate corespunzător.

1.3. Modele matematice intrare-ieșire

Un sistem poate fi “văzut” numai din punctul de vedere al dependenței cauzale dintre *intrările* și *ieșirile* sale (direcționată în sensul evoluției trecut \rightarrow prezent \rightarrow viitor). Se vorbește despre *caracterizarea intrare-ieșire* a sistemului. Pentru această caracterizare se apelează *modelele matematice intrare-ieșire* (MM-II). Definirea riguroasă a caracterizării prin MM-II este de asemenea axiomatizată (Ionescu, 1985; Preitl, 1992). În cazul SLI monovariabil (SISO), fig.1.10, MM-II aferente sunt explicitate după cum urmează.

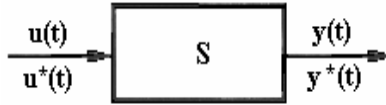


Fig.1.10. Sistem monovariabil la intrare și ieșire (SISO).

A) În cazul SD-C liniar și invariant, MM-II este o ecuație diferențială (liniară cu coeficienți constanți) de forma:

$$\sum_{v=0}^n a_v y^{(v)}(t) = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} u^{(\mu)}(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1.21)$$

cu

$$m \leq n. \quad (1.22)$$

B) În cazul SD-D liniar și invariant, MM-II este o ecuație recurentă (cu timp discret) cu coeficienți constanți de forma:

$$\sum_{v=0}^n a_v y(k+v) = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} u(k+\mu), \quad k \in \mathbf{N}, \quad (1.23)$$

cu

$$m \leq n. \quad (1.24)$$

Condiția (1.22) sau (1.24) reprezintă o formă de explicitare a **condiția de cauzalitate** a sistemului.

Precizări referitoare la conceptele de teoria sistemelor introduse:

1. Cele două caracterizări matematice – MM-ISI și respectiv MM-II – trebuie să aibă același conținut. Acest lucru este valabil (cel puțin din punct de vedere matematic) în redarea directă a conexiunii intrare \rightarrow ieșire. Există însă și condiții particulare în care cele două reprezentări nu sunt echivalente, reprezentarea prin MM-ISI fiind mai cuprinzătoare.
2. Adeseori tratarea matematică a SF bazată pe MM-II este mai simplă decât tratarea prin MM-ISI și caracterizarea prin MM-II satisface cerințele de realizare a unui SCA după ieșire. Abordarea problematicii conducerii automate bazată pe reprezentarea intrare-ieșire corespunde *abordării clasice a reglării automate*.
3. În cazul reprezentării intrare-ieșire a sistemelor se vorbește și de conceptul de **cutie neagră (black box)**. La acest concept se asociază și determinarea unui MM-II pe baza prelucrării măsurărilor legate de evoluția în regim dinamic a intrării și ieșirii (*identificarea experimentală* a procesului, *data-driven identification*).

1.4. Reprezentarea grafică a sistemelor prin scheme bloc

Pentru caracterizarea intuitivă dar și de detaliu a structurii unui sistem – SF sau SD – sunt utilizate reprezentările prin **scheme bloc**. În automatică sunt folosite următoarele **două tipuri de scheme bloc**, detaliate în funcție de scopul lor:

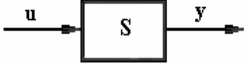
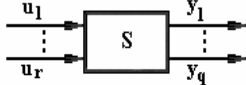
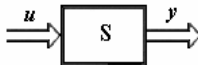
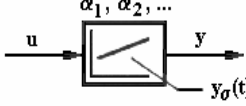
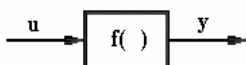
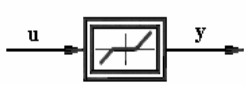

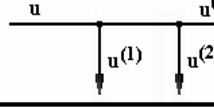
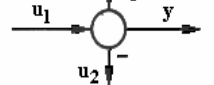
A) Schemele bloc funcționale: redau, prin reprezentări specifice diferitelor domenii ale tehnicii, structura funcțională și parțial constructivă a sistemului. Pe baza unor astfel de scheme pot fi deduse principiile funcționale ale sistemului și uneori pot fi chiar construite chiar și MM aferente SF.

B) Schemele bloc informaționale: redau, prin reprezentări specifice domeniului automaticii, structura informațională a sistemului. Aceste scheme au utilitate deosebită în analiza și dezvoltarea sistemelor de conducere automată (SCA). În tabelul 1.4 sunt sintetizate reprezentări specifice utilizate în cazul *schemelor bloc informaționale*, în care:

- mărimile (variabilele) sistemului sunt redade prin segmente orientate în sensul transmiterii informației,

- dependențele structurale sunt redată prin blocuri însoțite de diferite moduri de precizare a proprietăților.

Tabelul 1.4. Reprezentarea sistemelor prin scheme bloc informaționale.

CONȚINUTUL REPREZENTĂRII	REPREZENTAREA PRIN SCHEMĂ BLOC	OBSERVAȚII
SISTEM MONOVARIABIL LA INTRARE ȘI IEȘIRE (SISO)		reprezentare generală
SISTEM MULTIVARIABIL LA INTRARE ȘI IEȘIRE (MIMO)	 	reprezentare generală $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$
SISTEM MONOVARIABIL LINIAR $y = f(u)$ $f(\cdot)$ - operator caracterizat de parametri $\alpha_1, \alpha_2, \dots$	 	$y_0(t)$ - curba de răspuns la o variație particulară a intrării (treaptă)
SISTEM MONOVARIABIL NELINIAR $y = f(u)$ sau SISTEM MULTIVARIABIL LA INTRARE NELINIAR $y = f(u_1, u_2)$	 	în interiorul blocului se marchează: - caracterul neliniarității $f(u)$ - operația neliniară efectuată: $\times, \div, \sqrt{}, \dots$
PUNCT (NOD) DE RAMIFICARE A INFORMAȚIEI		$u = u^{(1)} = u^{(2)} = u^{(3)}$ (\cdot) - direcții de ramificație
PUNCT DE ÎNSUMARE A INFORMAȚIEI		$y = u_1 - u_2 + u_3$

Schemele bloc informaționale ale unui SF sunt întocmite pe baza ecuațiilor primare care caracterizează fenomenele din system. Ele trebuie să evidențieze:

- mărimile SF care sunt accesibile măsurărilor și după care poate fi asigurată conducerea;
- mărimile prelucrate în cadrul DC.

Exemplul 1.2 (Preitl, 1992): Se consideră procesul de încălzire electrică a unei camere de locuit cu capacitatea calorică C_i . Încălzirea se face prin pardoseală, fig.1.11 (a). Puterea disipată în rezistoarele de încălzire (R), notată cu p_e , este furnizată prin intermediul unui amplificator de putere (ansamblul de comandă pe grilă ACG și puntea cu tiristoare PTr) și modificabilă prin intermediul tensiunii de comandă u_c . Ipoteze simplificatoare:

1. Sistemul este considerat cu parametri concentrați. Camera și mediul exterior se consideră, fiecare în parte, medii omogene și izotrope între care schimbul de caldură are loc prin convecție și radiație.
2. Cantitatea de caldură schimbată între interior-exterior este proporțională cu diferența de temperatură.
3. Schimbul de caldură dintre cameră și camerele învecinate este nesemnificativ.
4. Puterea disipată în rezistoarele R , p_e , este independentă de procesele din incintă; ea este cedată integral blocului încălzitor BI de capacitate calorică C_m care apoi o cedează mai departe către incintă.

Ca **mărimi de intrare** în SF pot fi considerate:

- *puterea disipată* p_e prin care este asigurată temperatura dorită în cameră (mărime de comandă) și
- *temperatura exterioară* θ_e (cu caracter perturbator), a cărei evoluție abate (prin schimbul de caldură interior-exterior) temperatura în incintă θ_i (*ieșire de apreciere*) de la valoarea dorită θ_{i0} ($\theta_e < \theta_{i0}$). Temperatura exterioară θ_e (*perturbația*) se măsoară cu traductorul de temperatură TT2 (elementul de măsură M2), măsura acesteia fiind curentul i_{θ_e} .

Ieșirile procesului sunt:

- *ieșirea de apreciere* care este temperatura din incintă θ_i și
- *ieșirea de măsură* este curentul i_θ dat de traductorul de temperatură TT1 (elementul de măsură M1);

Se cere:

- (1) Să se determine MM-II și MM-ISI prin care pot fi caracterizate fenomenele din incintă.
- (2) Să se întocmească schema bloc aferentă procesului.

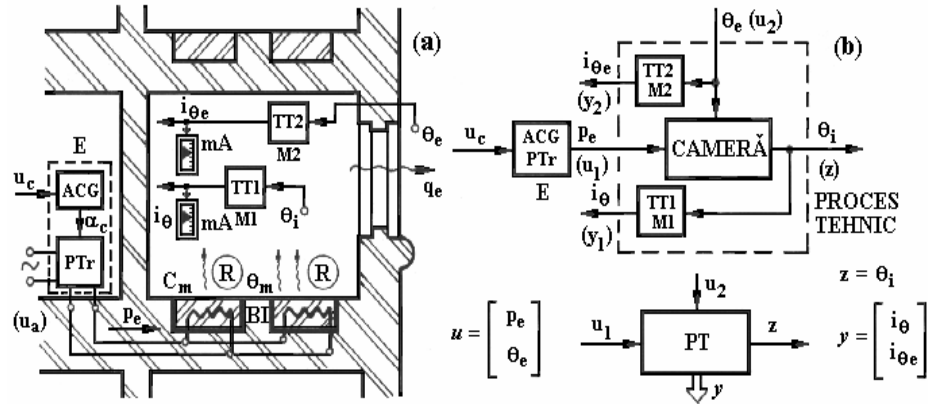


Fig. 1.11. Schema bloc funcțională (a) și informațională (b) pentru procesul tehnic “încălzirea unei camere de locuit”.

Soluție: Ecuațiile de bilanț termic relative la PC se scriu în următoarea formă simplificată:

$$\begin{aligned} C_m \dot{\theta}_m &= p_e - K_m (\theta_m - \theta_i), \\ C_i \dot{\theta}_i &= K_m (\theta_m - \theta_i) - K_p (\theta_i - \theta_e), \\ i_{\theta} &= K_{M1} \theta_i, \\ i_{\theta_e} &= K_{M2} \theta_e. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Se notează cu \$T_m\$ și \$T_i\$ constantele de timp care caracterizează inerția termică a blocului încălzitor respectiv incintei:

$$T_m = C_m / K_m, \quad T_i = C_i / K_p. \quad (1.26)$$

Drept variabile de stare sunt alese mărimile continui \$\theta_m\$ și \$\theta_i\$. Prin ordonarea corespunzătoare a ecuațiilor (1.25) sunt obținute:

- MM-ISI aferent procesului (realizarea sistemică) rezultă în forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} \text{ – pentru iesirile masurate,} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{f}^T \mathbf{x} \text{ – pentru iesirea de apreciere,} \end{aligned} \quad (1.27)$$

în care:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} p_e \\ \theta_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_m \\ \theta_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} i_\theta \\ i_{\theta_e} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -1/T_m & 1/T_m \\ K_m K_p / T_i & -(1 + K_m K_p) / T_i \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1/(T_m K_m) & 0 \\ 0 & 1/T_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & K_{M1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{M2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^T = [0 \quad 1].
\end{aligned} \tag{1.28}$$

- Operând asupra MM-ISI, poate fi explicitate MM-II în raport cu cele două intrări, p_e și θ_e , în forma:

$$T_m T_i \ddot{\theta}_i + [T_i + T_m (1 + K_m / K_p)] \dot{\theta}_i + \theta_i = p_e / K_p + \theta_e + T \dot{\theta}_e. \tag{1.29}$$

Dacă în sistem se anulează variațiile în timp ale tuturor mărimilor caracteristice, se vorbește de faptul că sistemul se află în **regim staționar constant** (RSC). În RSC este valabilă următoarea dependență următoare între valorile de **regim staționar constant** (VRSC, cu indicele inferior 0):

$$\theta_{i0} = p_{e0} / K_p + \theta_{e0}. \tag{1.30}$$

O primă schemă bloc aferentă PC poate fi reprezentarea dată în fig.1.11 (b), citită împreună cu expresiile vectorilor de intrare și ieșire.

1.5. Introducere în conducerea proceselor

Complexitatea **proceselor (tehnice)**, cu abrevierea PT) din diverse domenii, cerințele de calitate impuse desfășurării acestora precum și interinfluența care apare între procese și între procese și mediul înconjurător - impun necesitatea conducerii proceselor.

Principal procesele tehnice pot fi conduse, fig.1.12:

- **manual (a)**, prin intervenția adeseori continuă și nemijlocită a unui *operator uman* și
- **automat (b)**, cu utilizarea unor echipamente specializate dedicate conducerii, denumite *echipamente de automatizare* (EA).

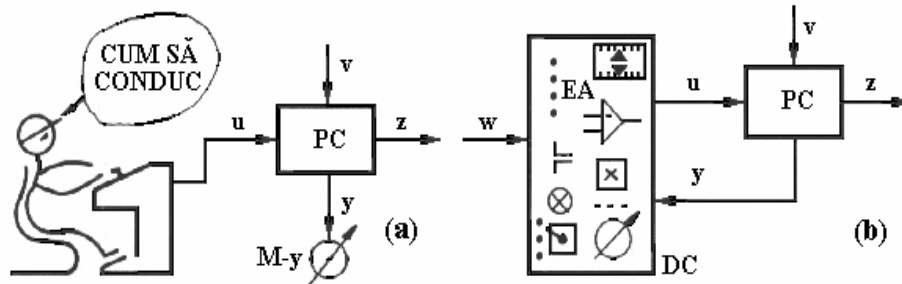


Fig.1.12. Conducerea manuală (a) și automată (b) a unui proproces.

Ansamblul de **EA interconectate constructiv și funcțional** destinat conducerii unui proces, denumit în continuare **proces condus (PC)**, poartă denumirea de **dispozitiv de conducere (DC) (automată, DCA)**. Ansamblul constructiv-funcțional compus din DC și PC și realizat în vederea conducerii PC poartă denumirea de **sistem de conducere automată (SCA)**.

Conducerea manuală sau automată a unui PC (fig.1.13) se poate desfășura:

(a) *Fără urmărirea nemijlocită a desfășurării PC sau **conducerea în circuit deschis** a PC (fără buclă de reacție).* Un astfel de SCA poartă denumirea de **SCA în circuit deschis (SCA-CD)** și are schema bloc principală redată în fig.1.13 (a).

(b) *Cu urmărirea nemijlocită și adeseori continuă de către DC a desfășurării PC, sau **conducere în circuit închis** (cu buclă de reacție sau “feedback”).* SCA astfel creat poartă denumirea de **SCA în circuit închis (SCA-CI)**, fig.1.13 (b).

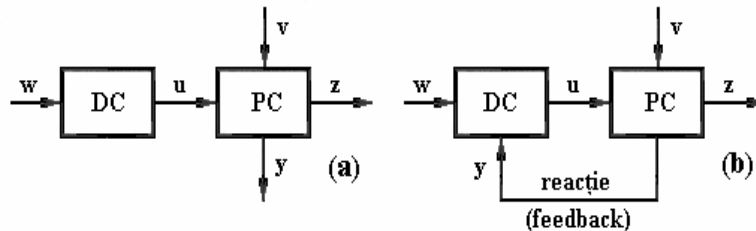


Fig.1.13. SCA în circuit deschis(a) și SCA în circuit închis (b).

Structura de **SCA-CD** poate fi utilizată numai în situațiile în care nu sunt impuse condiții de calitate deosebite asupra desfășurării PC și *procesul este stabil*. **Dezavantajul** esențial al conducerii prin SCA-CD constă în faptul că, chiar și în condițiile urmăririi atente de către un operator uman a desfășurării PC, prezența perturbațiilor va determina abaterea PC de la desfășurarea dorită.

Sarcinile de conducere ale DCA a unui **SCA-CI** sunt:

- asigurarea prescrierii (reținerii, memorării) informației privind modul în care trebuie să se desfășoare PC, prin intermediul mărimii de referință w ;

- urmărirea desfășurării PC – prin mărimea măsurată y – și, comparând evoluția efectivă (y) cu cea dorită (w), să ia decizia de intervenție în desfășurarea PC prin elaborarea **comenzii** u și transmiterea ei către PC.

Semnificația mărimilor care apar în schemele bloc din fig.1.13 este: w - *mărime de referință* (de prescriere sau consemn); u – *mărime de comandă*; z – *mărime de ieșire de apreciere* (caracterizează calitatea desfășurării procesului); y – *mărime de ieșire de măsură* necesară în vederea realizării unui SCA (CI); v – *mărime de perturbație*. În schemele bloc prezentate, sensul de transmitere a mărimilor (materie, energie) se marchează prin segmentele orientate ce leagă blocurile; aceste mărimi sunt și purtătoare de informație referitoare la fenomenele din cadrul SCA. Mărimile u și y – prin care se realizează interfațarea DC-PC – trebuie să fie reciproc acceptate atât de către PC cât și de către DC (aceeași natură fizică, același domeniu de variație și același nivel energetic).

În vederea intervenției în proces, mărimea de comandă u furnizată de DC este convertită și amplificată de către **elementul de execuție** (E). În multe situații ieșirea de măsură y este măsura ieșirii de apreciere z , obținută prin intermediul unui **element de măsură** (M), fig.1.14 (a). Ea poate fi însă și măsura altor mărimi din cadrul procesului (z_a), fig.1.14 (b). În conducerea automată a PC, pentru ansamblul funcțional {E+PT+M} se utilizează denumirea de **proces condus** (PC) sau de **parte fixă** (PF) a sistemului.

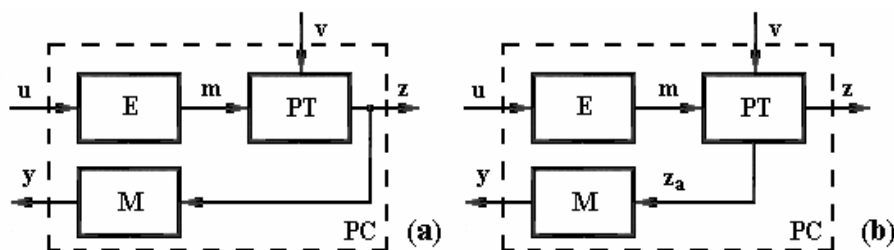


Fig.1.14. Scheme bloc detaliate pentru procesul condus.

Dezvoltarea și realizarea unui SCA necesită atât cunoștințe aparținând diferitelor ramuri ale tehnicii cât și cunoștințe specifice domeniului conducerii automate. Acestea din urmă pot fi grupate în două categorii:

- *Cunoștințe privind procesul condus (PC)*: ele se referă la proprietățile naturale ale procesului și la proprietățile pe care trebuie să le manifeste (PC), încadrat în structura de SCA. Aceste proprietăți constituie informații a priori în realizarea SCA.
- *Cunoștințe privind structurile de SCA*: funcționalitatea acestor structuri, metode de calculul a DCA, posibilități de realizare și de implementare a DCA, metode de verificare și de apreciere a performanțelor SCA ș.a.

Bibliografie

- (Åström and Murray, 2008) K. J. Åström, R. M. Murray, Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
- (Belea, 1985) V. Belea, Teoria sistemelor. Sisteme neliniare, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
- (Bemporad, 2011) A. Bemporad, Automatic Control 1, Lecture Notes, University of Trento, Trento, Italy, 2011.
- (Ionescu, 1975) Vl. Ionescu, Introducere în teoria structurală a sistemelor liniare, Editura Academiei, București, 1975.
- (Ionescu, 1985) Vl. Ionescu, Teoria sistemelor. Sisteme liniare, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
- (Preitl, 1992) St. Preitl, Teoria sistemelor și reglaj automat, curs, vol. 1, partea 1 Teoria sistemelor, Lecture Notes, Lito U.T. Timisoara, Timișoara, 1992.
- (Preitl and Precup, 2001a) St. Preitl and R.-E. Precup, Introduction to Control Engineering (in Romanian: Introducere în ingineria reglării automate), Editura Politehnica, Timișoara, 2001.
- (Preitl and Precup, 2001b) St. Preitl and R.-E. Precup, Automatic Control (in Romanian: Automatizari), Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2001.