

## 2. MODELAREA MATEMATICĂ A PROCESELOR

### 2.1. Aspecte introductive

Descrierea cantitativă și calitativă a sistemelor (proceselor) are la bază **modele matematice (MM)** asociate acestora. Complexitatea unui MM depinde adeseori de scopul pentru care acesta este determinat. În acest context, MM aferent unui SF trebuie să satisfacă **cerințele** următoare:

- să fie suficient de general (generalitate);
- să conțină un număr limitat de parametri și acești parametri să poată fi determinați pe cale analitică sau experimentală.

Pentru ca MM aferent unui SF (PC) să fie **utilizabil** în dezvoltarea unui sistem de conducere automată (SCA), el trebuie să satisfacă două **cerințe**:

- să redea proprietățile esențiale pentru conducerea PC;
- să fie cât mai simplu.

MM utilizate în caracterizarea unui SF pot fi **încadrate în diferite categorii / clase**; în acest context:

- (a) *Dependent de modul de reprezentare*, se disting
  - *MM parametrice* (ecuații diferențiale, forme operaționale)
  - *MM neparametrice* (caracteristici grafice).
- (b) *Dependent de modul de tratare a timpului*, se disting
  - *MM cu timp continuu* (MM-C),
  - *MM cu timp discret* (MM-D);
- (c) *Dependent de invarianța structurii și valorilor parametrilor*, se disting
  - *MM cu structură sau / și parametri constanți în timp*
  - *MM cu structură sau / și parametri variabili în timp* ș.a.
- (d) *Dependent de numărul intrărilor și ieșirilor ce caracterizează SF*, MM aferente sunt categorisite în:
  - **MM monovariabile** care caracterizează sisteme cu o intrare și o ieșire (SISO) sau numai unul din canalele de transfer ale unui sistem multivariabil,  $u_i \rightarrow y_j$ ;
  - **MM multivariabile** (MIMO) care caracterizează global sistemul,  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{y}$ .

Caracterizarea completă prin MM trebuie să ia în considerare simultan toate punctele de vedere de categorisire.

MM asociat unui SF **poate fi determinat** [P2], [E1], [T1], [T2]:

- (1) pe cale analitică (construcția analitică a modelului),
- (2) pe cale experimentală (experimental-analitică, data-driven identification).

Determinarea MM aferent unui SF (PC) poartă și denumirea de **identificare, analitică (IA)** sau **experimentală (IE)**.

În tehnica reglării automate sunt importante **MM parametrice**, caracterizate prin:

## Capitolul 2

### Modelarea matematică a proceselor

- structură matematică care descrie relația intrare-ieșire:
  - explicit sub forma MM intrare-ieșire (MM-II),
  - implicit sub forma MM intrare-stare-ieșire (MM-ISI);
- prin parametri (coeficienți) care caracterizează structura.

Determinarea pe cale experimentală a valorilor parametrilor care descriu structura cunoscută a MM poartă denumirea de *estimarea parametrilor*.

#### 2.2. Determinarea modelelor matematice aferente proceselor conduse (PC). Identificarea PC

MM aferent unui PC poate fi determinat pe calea analizei teoretice (IA) sau pe calea experimental-analitică (IE). În fig.2.1 [P1] sunt sintetizate etapele unei astfel de determinări. Întotdeauna MM este construit pentru un anumit scop, care va putea determina și gradul de detaliere a MM.

Determinarea pe cale analitică a MM aferent unui PC presupune parcurgerea *etapelor* următoare:

**I. Definirea PC** din punctul de vedere al conducerii (intrări, ieșiri, stări) și al relațiilor sale cu mediul înconjurător; stabilirea ipotezelor simplificatoare care pot fi adoptate la scrierea MM.

**II. Scrierea ecuațiilor de bilanț de materie (mase, energii) aferente PC**, caracterizarea interconexiunilor din proces, întocmirea schemei bloc informaționale aferente; ca rezultat se obține **MM primar** aferent PC sub forma unor ecuații diferențiale; utilizarea nemijlocită a acestora se dovedește adeseori greoaie.

**III. Precizarea ipotezelor simplificatoare** în care MM primar poate fi adus la forme mai simple, prin:

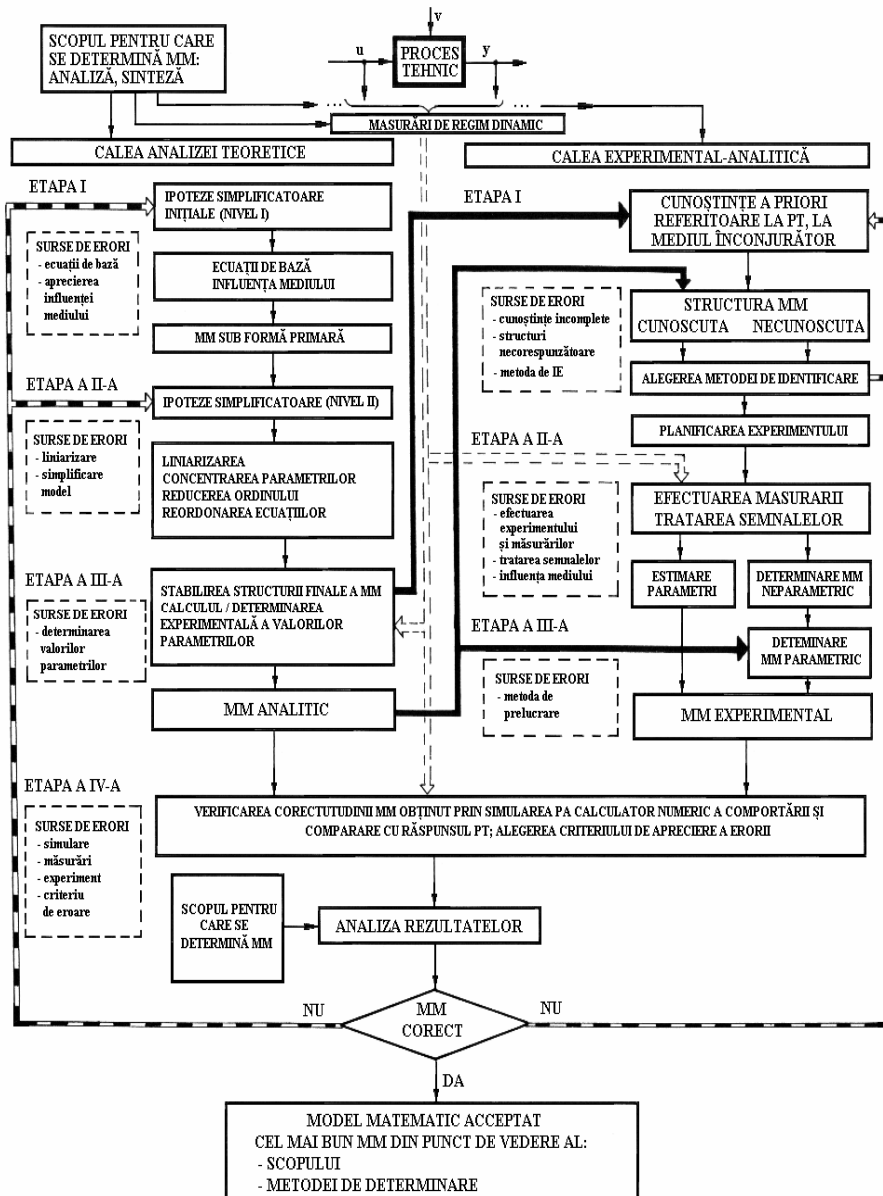
- liniarizarea ecuațiilor neliniare (liniarizabile) sau omiterea unor neliniarități neesențiale; concentrarea parametrilor;
- reducerea ordinului MM liniarizat prin renunțarea la evidențierea efectelor unor constante de timp foarte mici.

**IV. Reordonarea ecuațiilor în vederea stabilirii formei finale a MM**; adeseori se dovedește utilă întocmirea schemei bloc informaționale aferente. MM astfel obținut poate servi ca bază pentru: (a) determinarea valorilor parametrilor SF pe cale analitică sau experimental-analitică; (b) fundamentarea unor proceduri de IE a PC.

Procedeul de validare va depinde de informațiile disponibile relative la PC real.

**V. Verificarea corectitudinii MM și validarea acestuia.** Aceasta operație trebuie derulată în acord cu scopul pentru care a fost creat MM.

## Capitolul 2 Modelarea matematică a proceselor



**Fig.2.1. Identificarea analitică a unui PC**

## Capitolul 2

### Modelarea matematică a proceselor

#### 2.2.2. Identificarea experimentală a proceselor

*Identificarea experimentală* (IE) a PC reprezintă o etapă de cunoaștere a posteriori a MM. MM aferent PC va fi determinat prin IE pe bazele următoare:

- informațiile primare furnizate de o IA efectuată a-priori,
- rezultate strict experimentale; în acest caz cunoștințele primare despre PC sunt minimale (black box, grey box).

Metoda de identificare va fi adoptată dependent de cunoștințele primare despre proces, de aparatura disponibilă și de experiența de identificare. Reușita IE va depinde de buna planificare a experimentelor, de prelucrarea ulterioară a informației disponibile și de interpretarea rezultatelor.

Principalele *etapele ale unei IE* sunt:

**I. Alegerea metodei de IE**, a metodelor de prelucrare analitică și a echipamentelor de IE. Organizarea experimentelor de IE.

**II. Generarea semnalului de probă:** GST – generator de semnal de test  $u_T$ ; efectuarea măsurărilor de regim dinamic; înregistrarea simultană a mărimilor  $u$  și  $y$ , eventual și a altor mărimi, tratarea înregistrărilor (filtrarea de zgomote suprapuse, extragerea componentelor continue, extragerea trendurilor ș.a.).

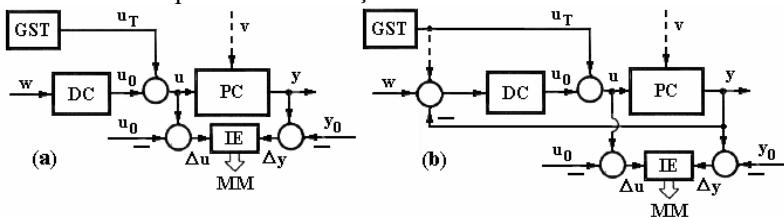
**III. Prelucrarea rezultatelor primare** bazat pe cunoștințele primare relative la structura MM valori orientative ale parametrilor, se prelucrează înregistrările pentru determinarea: (i) parametrilor MM la o structură acceptată a MM; (ii) MM neparametric, urmată de (iii) prelucrarea MM neparametric la forma MM parametric.

**IV. Verificarea corectitudinii și validarea MM obținut** în concordanță cu scopul pentru care a fost determinat MM.

Sunt utile *câteva precizări* (finale) referitoare la practica IE a PC:

(1) IE a unui PC poate fi efectuată cu funcționarea PC:

- *în circuit deschis*, în afara buclei de reglare, fig.2.2 (a);
- *conectat în bucla de reglare*, fig.2.2 (b); în acest caz însă, determinarea MM aferent PC este supusă unor restricții.



**Fig.2.2.** Schema bloc aferentă IE în circuit deschis (a) și IE în circuit închis (b).

## Capitolul 2

### Modelarea matematică a proceselor

(2) MM primare obținute prin IE sunt adeseori *MM neparametrice* și au **particularitățile** următoare:

- valabilitatea lor este limitată, legată de punctul de funcționare în care a fost efectuată IE;
- MM neparametrice sunt modele care caracterizează global PC în relația  $u \rightarrow y$ , fără evidențierea structurii interne a PC; ca efect, MM parametrice asociate vor avea parametri care pot să nu caracterizeze parametrii interni ai PC;
- MM parametrice care se construiesc sunt relativ simple; ele au adeseori structura construită orientat spre a fi ușor utilizabile în scopul propus.

(3) Identificarea experimentală presupune adeseori prelucrarea primară a semnalului preluat din proces; acest lucru presupune alegerea adecvată a perioadei de eșantionare, prefiltrarea semnalului (inclusiv extragerea unor componente continue legate de coordonatele punctului de funcționare ș.a.).

(4) MM obținut prin identificare poate fi în timp continuu sau în timp discret, dependent de tehnologia de identificare și în acord cu scopul pentru care a fost determinat MM. Conversia MM continuu în MM în timp discret și invers are la bază tehnici și relații bine precizate, valabile în anumite condiții specifice.

(5) MM determinat este validat în acord cu scopul propus prin **verificarea concordanței** dintre *evoluția MM* și evoluția *reală a PC*. În acest scop pot fi utilizate tehnicile următoare: (a) simularea pe calculator (analogic sau numeric) a comportamentului MM; (b) realizarea unor modele la scară redusă ale PC pe baza MM determinat și studiul comportamentului acestora ș.a.

(6) **Detalierea** de identificare și de modelare trebuie aduse întodeauna **în acord cu scopul** pentru care este construit MM. Acesta poate fi: (i) pur informativ, pentru o mai bună cunoaștere a PC și (eventual) îmbunătățirea calității conducerii; (ii) proiectarea structurilor și algoritmilor de conducere a PC; rezultatul proiectării și, în consecință, performanțele SCA, vor depinde de corectitudinea MM al PC.

### 2.3. Modele matematice cu timp continuu. MM liniare și MM neliniare.

#### Liniarizarea MM neliniare

În cele mai frecvente situații din practică, dependențele dintre mărimile caracteristice ale SF sunt neliniare. În anumite condiții, aceste dependențe pot fi caracterizate (local) prin dependențe de aproximare liniară. Operația de înlocuire a unui MM neliniar cu un MM liniarizat, de aproximare, poartă denumirea de **liniarizare**.

Un MM liniar presupune respectarea cerințelor impuse de **teorema generală a superpoziției** (aditivitate și omogenitate).

## Capitolul 2

### Modelarea matematică a proceselor

#### 2.3.1. Condiții de liniaritate a sistemelor neliniare continue. Sisteme liniare și liniarizate

MM aferent unui SF se numește *sistem liniar* (SL) atunci când, MM afferent, exprimat în forma generală (cazul SISO):

$$y(t)=f\{u(t); \Psi_0\} , \text{ cu } \Psi_0 - \text{vectorul condițiilor (stărilor) inițiale,} \quad (2.3.1)$$

satisfacă condiția (*aditivitate și omogenitate*):

$$f\{\alpha_1 u_{(1)}(t)+\alpha_2 u_{(2)}(t); \alpha_1 \Psi_{0(1)}+\alpha_2 \Psi_{0(2)}\}=\alpha_1 f\{u_{(1)}(t); \Psi_{0(1)}\} + \alpha_2 f\{u_{(2)}(t); \Psi_{0(2)}\} , \quad (2.3.2)$$

în care:  $\alpha_1, \alpha_2$  sunt constante arbitrare;  $u_{(1)}(t), u_{(2)}(t)$  sunt două funcții (semnale) de intrare posibile;  $\Psi_{0(1)}, \Psi_{0(2)}$  sunt două condiții (stări) inițiale posibile.

Relația (2.3.2) evidențiază două aspecte esențiale:

□ Un regim oarecare al SL este obținut prin suprapunerea comportărilor sale particulare:

- de *regim liber* – caracterizată prin  $u(t) = 0$  pentru  $t \geq 0$  și  $\Psi_0 \neq 0$  dat , și
- de *regim forțat* – caracterizată prin  $u(t)$  dat pentru  $t \geq 0$  și  $\Psi_0 = 0$  – adică:

$$f\{u(t); \Psi_0\} = f\{0; \Psi_0\} + f\{u(t); 0\} . \quad (2.3.3)$$

□ Fiecare din aceste regimuri poate fi studiat prin superpoziția unor regimuri particulare cu intrările sau stările inițiale convenabil alese.

Proprietatea de liniaritate se referă și poate fi verificată pentru fiecare din MM (-II sau -ISI) aferente unui SL invariant cu timp continuu:

**MM-ISI:**

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \cdot u(t) , \quad (2.3.4)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(t) + d \cdot u(t) ,$$

în care:  $\dim \mathbf{A} = (n \times n)$  ,  $\dim \mathbf{b} = (n \times 1)$  ,  $\dim \mathbf{c}^T = (1 \times n)$  ,  $\dim d = (1 \times 1)$ ;

**MM-II:**

$$\sum_{v=0}^n a_v y^{(v)}(t) = \sum_{\mu=0}^m b_\mu u^{(\mu)}(t) , \quad t \in R, \text{ cu } m \leq n , \quad (2.3.5)$$

sau:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t) . \quad (2.3.6)$$

#### 2.3.2. Sisteme neliniare cu timp continuu

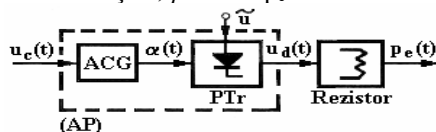
Sistemele neliniare (SNL) sunt caracterizate prin *dependențe neliniare dintre mărimile lor caracteristice*. Un exemplu de SNL este *elementul de execuție (E)*

## Capitolul 2

### Modelarea matematică a proceselor

(amplificator de putere) care constă dintr-o punte cu tiristoare ce debitează energie pe un circuit electric, de exemplu: (a) înfășurarea de excitație a unui generator sincron (GS); (b) un element de încălzire cu rezistor; (c) indusul unui motor de curent continuu (c.c.) ș.a. Pentru exemplificare, în fig.2.3 este prezentată situația unui element de încălzire cu rezistor alimentat printr-o punte cu tiristoare (PTr) comandată printr-un dispozitiv de comandă (ACG).

Elementul de execuție astfel realizat are ca mărime de *intrare*, *tensiunea de comandă*  $u_c$ , iar ca mărime de *ieșire*, *puterea*  $p_e$ .



**Fig.2.3.** Un element de execuție văzut ca exemplu de sistem neliniar.

Dependența intrare-ieșire este neliniară; ea este dictată atât de comportarea amplificatorului de putere (AP) cât și de procesul de conversie a energiei în rezistor. Se pot scrie următoarele relații de funcționare (caracterul relației L-liniar, NL-neliniar):

- valoarea unghiului de comandă este (L):

$$\alpha(t) = k \cdot u_c(t) ; \quad (2.3.7)$$

- valoarea medie a tensiunii redresate  $u_d(t)$  este (NL)

$$u_d(t) = u_{d0} \cdot \sin \alpha(t) ; \quad (2.3.8)$$

- în procesul de redresare sunt generate armonici; valoarea efectivă a tensiunii este definită în raport cu acestea (NL):

$$u_{def}(t) = [u_d^2(t) + u_{d1}^2(t) + u_{d2}^2(t) + \dots]^{1/2} ; \quad (2.3.9)$$

- puterea disipată pe rezistor este caracterizată de relația (NL):

$$p_e(t) = u_{def}^2(t)/R(t) , \text{ cu } R(t) = R_0[1 + \alpha(t) \cdot \Delta\theta] . \quad (2.3.10)$$

Un sistem care conține cel puțin o neliniaritate se numește **sistem neliniar** (SNL). Neliniaritățile sunt datorate **cauzelor** următoare:

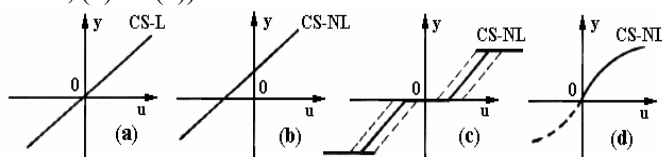
- *caracteristici statice* (CS) neliniare ale blocurilor din cadrul SF; aceste CS pot fi explicitate analitic sau grafic;
- *operații neliniare* ce caracterizează fenomenele din SF (în formă analitică).

**Caracteristica statică (CS) a unui SF.** Un SF (SD) se află în regim staționar constant (**RSC**) atunci când mărimile sale caracteristice nu variază în timp (au valoare *constantă*). CS a unui SF reprezintă dependența grafică (de RSC) dintre mărimile sale caracteristice ( $u \rightarrow y$  sau, după caz, altele).

## Capitolul 2

### Modelarea matematică a proceselor

În fig.2.4 sunt exemplificate o CS liniară (CS-L, (a)) și diferite aluri de CS neliniare (CS-NL, (b) ... (d)).



**Fig.2.4.** Exemple de caracteristici statice: liniară (a) și neliniare (b) ... (d).

Trebuie însă reținut faptul că – de regulă – prezența neliniarităților în structura PC îngreunează (adeseori semnificativ) condițiile de conducere (reglare).

#### 2.3.3. Liniarizarea MM neliniare (MM-NL)

În anumite situații, unele tipuri de neliniarități pot fi caracterizate, *pe porțiuni și cu oarecare aproximare*, prin MM liniare, care sunt obținute prin *liniarizarea MM-NL* de bază. Atașarea la un SNL a unui *MM de aproximare liniar* poartă denumirea de **liniarizare** iar MM astfel obținut **MM liniarizat (MM-Ln)**.

Adeseori valabilitatea MM-Ln este restrânsă la domenii din jurul unor puncte de funcționare sau – mai general – unor traiectorii de funcționare în care s-a efectuat liniarizarea. Obșnuit, punctele de liniarizare corespund unor regimuri reprezentative de funcționare ale sistemului, numite **puncte de funcționare staționară constantă (p.d.f.s.c.)**. P.d.f.s.c. caracterizează ansamblul valorilor mărimilor caracteristice care corespund funcționării SF (SD) în **regimul staționar constant (RSC)** specificat. P.d.f.s.c. ale unui SF sunt marcate prin coordonatele lor, în forma uzuală  $A_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0)$  sau  $A(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{y}_\infty, \mathbf{x}_\infty)$ .

Un SF (SD) se află în **RSC** atunci când mărimile sale caracteristice nu variază în timp (au valoare *constantă*). Din punct de vedere matematic, stabilirea RSC revine la anularea efectelor de derivare și de integrare din sistem.

Referitor la MM-ISI și MM-II de forma (2.3.4) și (2.3.5), aceasta revine la asigurarea condițiilor următoare:

$$(2.3.4): \quad u = \text{const}, \quad y = \text{const} \quad \text{și} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{0} \quad \text{pentru} \quad t \geq t_f; \quad (2.3.11)$$

$$(2.3.5): \quad \begin{aligned} \text{toți} \quad y^{(v)}(t) &= 0, & v &= 1, \dots, n, \\ \text{toți} \quad u^{(\mu)}(t) &= 0, & \mu &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Ca urmare, în RSC, MM-II (2.3.4) și (2.3.5) se transformă în dependențe:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}, & \mathbf{x} &= -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \\ y &= \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} + d \cdot u(t), & y &= [-\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} + d] \cdot u \end{aligned} \quad (2.3.13')$$



## Capitolul 2

### Modelarea matematică a proceselor

respectiv:

$$y = (b_0/a_0) \cdot u, \quad \text{cu condiția} \quad a_0 \neq 0 \quad \text{și} \quad b_0 \neq 0. \quad (2.3.13'')$$

**Important:** Prezintă CS doar sistemele care satisfac condițiile:  $a_0 \neq 0$  și  $b_0 \neq 0$ . Cazurile  $b_0 = 0$  și  $a_0 = 0$  constituie cazuri aparte care vor fi discutate ulterior.

În general, plecând de la MM-NL cu variabilele caracteristice  $\{u, y, x\}$ , prin liniarizare va fi determinat un MM liniarizat (MM-Ln) care va avea ca variabile proprii, **creșterile variabilelor** de bază în raport cu coordonatele p.d.f.s.c. de liniarizare, notate prin:

$$\Delta u(t) = u(t) - u_0, \quad \Delta y(t) = y(t) - y_0, \quad \Delta x(t) = x(t) - x_0. \quad (2.3.14)$$

*Observații:* 1. În cazul particular  $A_0(0, 0, 0)$  (punctul de repaus al sistemului), se obține:

$$\Delta u(t) = u(t), \quad \Delta y(t) = y(t), \quad \Delta x(t) = x(t). \quad (2.3.15)$$

2. După cum s-a menționat, liniarizarea poate fi efectuată și în jurul unor puncte de echilibru dinamic, caracterizate, de exemplu, prin viteză constantă sau prin accelerație constantă (traectorii de liniarizare).

#### **Aplicarea procedurii de liniarizare.**

În practică apar diverse situații tipice de aplicare a procedurii de liniarizare. În prima fază se presupune că neliniaritatea SNL este caracterizată printr-un MM-NL analitic. În acest context, MM-Ln se obține prin dezvoltarea MM-NL în serie Taylor, în vecinătatea p.d.f.s.c. de liniarizare  $A_0$  și neglijarea termenilor care conțin creșterile de ordin superior ale variabilelor.

#### **Cazuri remarcabile de liniarizare.**

**A. Liniarizarea MM-NL aferent unui sistem monovariabil,** pentru care MM-NL:

$$y(t) = f(u(t)) \quad (2.3.16)$$

este cunoscut sub formă analitică neliniară dar derivabilă pe porțiuni.

Un caz particular remarcabil care va rezulta din procedeul general descris este și cel în care MM-NL este cunoscut sub formă grafică a CS neliniare aferente SF.

Prin dezvoltarea în serie Taylor, în jurul p.d.f.s.c.  $A_0(u_0, y_0)$ , a relației (2.3.16), se obține:

$$y(t) - y_0 = \left. \frac{df}{du} \right|_{A_0} [u(t) - u_0] + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{du^2} \right|_{A_0} [u(t) - u_0]^2 + \dots \quad (2.3.17)$$

$L \rightarrow$  termeni care se neglijează.

Cu notațiile (2.3.14), relația devine:

## Capitolul 2

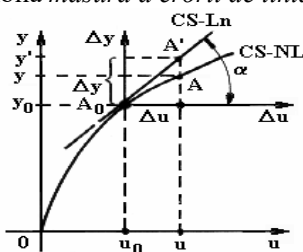
### Modelarea matematică a proceselor

$$\Delta y(t) = k \cdot \Delta u(t), \text{ cu } k = \left. \frac{df}{du} \right|_{A_0} - \text{coeficientul de transfer.} \quad (2.3.18)$$

Interpretarea grafică a relației (2.3.18) este ilustrată în fig.2.5, în care  $k$  este o mărime cu dimensiune:

$$k = \tan \alpha \quad (2.3.19) \quad \langle k \rangle = \langle \Delta y \rangle / \langle \Delta u \rangle \quad (2.3.20)$$

$A_0(u_0, y_0)$ , este punctul de liniarizare iar  $A(u, y)$  punctul curent de funcționare a sistemului. Prin liniarizare, punctul de funcționare este *translatat* în  $A'(u, y')$ , segmentul  $AA'$  fiind o posibilă măsură a erorii de liniarizare.



**Fig.2.5.** Interpretarea grafică a liniarizării.

**B. Liniarizarea MM-NL pentru care în dependența neliniară intervin două sau mai multe variabile.** Relațiile de liniarizare vor fi prezentate pentru un SNL cu două intrări,  $u_1$  și  $u_2$ , și o ieșire  $y$ , în două variante de explicitare a MM-NL:

(a) **Forma explicită** a dependenței neliniare (MM-NL):

$$y(t) = f\{u_1(t), u_2(t)\}. \quad (2.3.21)$$

(b) **Forma implicită** a dependenței neliniare (MM-NL):

$$g\{u_1(t), u_2(t), y(t)\} = 0. \quad (2.3.22)$$

P.d.f.s.c. de liniarizare este  $A_0(u_{10}, u_{20}, y_0)$ .

Urmărind procedura de liniarizare indicată, se obține imediat:

$$\Delta y(t) = K_1 \Delta u_1(t) + K_2 \Delta u_2(t) \quad (2.3.23)$$

în care, pentru cele două variante, rezultă:

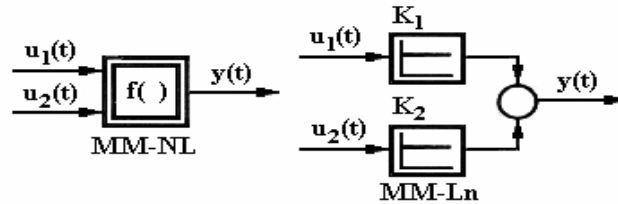
$$(a) \quad K_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial u_1} \right|_{A_0}, \quad K_2 = \left. \frac{\partial f}{\partial u_2} \right|_{A_0}, \quad (2.3.24)$$

$$(b) \quad K_1 = - \frac{\partial g / \partial u_1}{\partial g / \partial y} \Big|_{A_0}, \quad K_2 = - \frac{\partial g / \partial u_2}{\partial g / \partial y} \Big|_{A_0}. \quad (2.3.25)$$

## Capitolul 2

### Modelarea matematică a proceselor

Utilizând reprezentarea prin scheme bloc, liniarizarea poate fi evidențiată în fig.2.6.



**Fig.2.6.** Schema bloc pentru MM neliniar și MM liniarizat.

**Exemplul 2.1:** Liniarizarea MM-NL din exemplul prezentat în fig.2.3; p.d.f.s.c. de liniarizare  $A_0(u_{c0}, \alpha_0, u_{d0}, R_0)$ :

$$(2.3.7) \quad (L) \Rightarrow \Delta \alpha(t) = k \cdot \Delta u_c(t); \quad (2.3.26)$$

$$(2.3.8) \quad \xrightarrow{(Ln)} \Delta u_d(t) = -u_{d0}(\cos \alpha_0) \cdot k \cdot \Delta u_c(t); \quad (2.3.27)$$

$$(2.3.9) \quad (L) \Rightarrow \Delta u_{def}(t) = K \cdot \Delta u_d(t); \quad (2.3.28)$$

$$(2.3.10) \quad \xrightarrow{(Ln)} \Delta p_c(t) = -k_{E1} \Delta R(t) + k_{E2} \Delta u_{def}(t).$$

**C. Liniarizarea MM-ISI-NL** explicitate sub formă matricială:

$$\begin{aligned} (a) - \text{forma explicită} & \quad (b) - \text{forma implicită} \\ \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}_1\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\}, & \quad \mathbf{g}_1\{\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}_2\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\}; & \quad \mathbf{g}_2\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)\} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

Liniarizarea va fi exemplificată pentru una din ecuațiile de stare ale modelului (a), în jurul unui p.d.f.s.c.  $A_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0)$ :

$$\mathbf{x}_i'(t) = \mathbf{f}_{1i}\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\}, \quad i = 1 \dots n. \quad (2.3.31)$$

Conform procedurii de liniarizare prezentat, se obține:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i'(t) - \mathbf{f}_{1i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = & \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}_{1i}}{\partial \mathbf{x}_j} \bigg|_{A_0} [\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j0}] + \sum_{k=1}^r \frac{\partial \mathbf{f}_{1i}}{\partial \mathbf{u}_k} \bigg|_{A_0} [\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{u}_{k0}], \\ & \text{cu } i=1 \dots n. \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Cu notațiile (2.3.15), se obține:

$$\Delta \mathbf{x}_i'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}_{1i}}{\partial \mathbf{x}_j} \bigg|_{A_0} \Delta \mathbf{x}_j(t) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial \mathbf{f}_{1i}}{\partial \mathbf{u}_k} \bigg|_{A_0} \Delta \mathbf{u}_k(t), \quad i=1, \dots, n. \quad (2.3.33)$$

(similar și pentru ecuația ieșirii).

Prin generalizare se obține apoi **MM-ISI liniarizat** în forma:

## Modelarea matematică a proceselor

$$\Delta \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}_1 \bullet \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \bullet \mathbf{u}(t), \quad (2.3.34)$$

$$\Delta \mathbf{v}(t) = \mathbf{C}_1 \bullet \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_1 \bullet \mathbf{u}(t) ,$$

în care  $A_1, B_1, C_1$  și  $D_1$  sunt matrice de tip Jacobian și au expresiile:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{A}_0} ; \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{A}_0} ; \quad \mathbf{C}_1 = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{A}_0} ; \quad \mathbf{D}_1 = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{A}_0} . \quad (2.3.35)$$

**Observații:** 1. În urma liniarizării – în jurul unui p.d.f.s.c. de liniarizare – proprietățile SLn pot fi analizate prin metode specifice analizei SL.

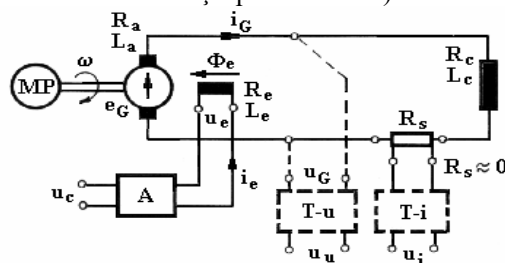
2. Dacă în cadrul unui MM-Ln coexistă ecuații liniare și liniarizate, pentru evitarea confuziilor de reprezentare, este bine ca *toate variabilele* care apar în MM-Ln să fie explicitate *în creșteri*.

3. Valorile absolute ale variabilelor MM-Ln pot fi calculate pe baza relației:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y}_0, \quad (2.3.36)$$

în care  $\Delta \mathbf{u}_0$ ,  $\Delta \mathbf{x}_0$  și  $\Delta \mathbf{y}_0$  sunt valori calculate pe baza MM-Ln.

**Exemplul 2.2** [P3]: Este considerat SF cu timp continuu “generator de c.c. (g.c.c.) antrenat de un motor primar (MP)”, fig.2.7. Generatorul debitează peste un consumator caracterizat prin rezistența  $R_c$  și inductanța  $L_c$  (aplicația poate fi văzută ca excitatricea unui sistem de excitație pentru un GS).



**Fig.2.7.** Procesul condus “generator de curent continuu”.

**Mărimile de intrare** ale sistemului sunt:  $u_c$  – tensiunea de comandă la amplificator (A) (tensiunea de excitație va fi considerată ca fiind proporțională cu mărimea de comandă,  $u_c = k_F \cdot u_c$ );  $\omega$  – viteza unghiulară cu care este antrenat g.c.c.

**Mărimea de ieșire** este tensiunea la bornele g.c.c.,  $u_G$ . În fig.2.7 a fost marcată și prezența traductoarelor de tensiune (T-u) și de curent (T-i) care pot servi la funcționarea unui SCA mai complex.

Se cere: 1. Să se scrie ecuațiile primare care caracterizează funcționarea sistemului și să se explice MM-ISI primar NL asociat SF. 2. Să se liniarizeze ecuațiile primare și, pe această bază, să se determine: - MM-ISI liniarizat; - MM-II liniarizate, ce caracterizează dependența  $u_G(t) = f_1 \{u_e(t), \omega(t)\}$ .

## Capitolul 2

### Modelarea matematică a proceselor

*Soluție* [P4]: 1. Ecuațiile primare aferente funcționării g.c.c. sunt:

- pentru circuitul de excitație:

$$u_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt}, \quad (2.3.37)$$

- pentru circuitul de indus și sarcină:

$$u_G(t) = e_G(t) - R_a i_G(t) - L_a \frac{di_G(t)}{dt} = R_c i_G(t) + L_c \frac{di_G(t)}{dt}, \quad (2.3.38)$$

- tensiunea electromotoare (t.e.m.) indusă în g.c.c. este:

$$e_G(t) = K_\omega \cdot e(t) \cdot \omega(t). \quad (2.3.39)$$

Pentru explicitarea MM-ISI sunt alese ca *mărimi de stare*  $i_e(t) = x_1(t)$  și  $i_G(t) = x_2(t)$  și se obține MM-ISI neliniar cu ieșirea  $u_G(t) = y(t)$ , de forma:

$$x_1'(t) = -\frac{R_e}{L_e} x_1(t) + \frac{k_E}{L_e} u_e(t), \quad (2.3.40)$$

$$x_2'(t) = \frac{K_\omega}{L_a + L_c} x_1(t) \cdot \omega(t) - \frac{R_a + R_c}{L_a + L_c} x_2(t), \quad (2.3.41)$$

$$y(t) = \frac{K_\omega L_c}{L_a + L_c} x_1(t) \cdot \omega(t) + \frac{L_a R_c - R_a L_c}{L_a + L_c} x_2(t). \quad (2.3.42)$$

2. Liniarizând ecuațiile MM-ISI (2.3.40) ... (2.3.42), se obține MM-ISI liniarizat (pentru simplificarea scrierii, se omite variabila timp, t):

$$\Delta x_1' = -\frac{R_e}{L_e} \Delta x_1 + \frac{k_E}{L_e} \Delta u_e, \quad (2.3.43)$$

$$\Delta x_2' = \frac{K_\omega \omega_0}{L_a + L_c} \Delta x_1 - \frac{R_a + R_c}{L_a + L_c} \Delta x_2 + \frac{K_\omega i_{e0}}{L_a + L_c} \Delta \omega, \quad (2.3.44)$$

$$\Delta y = \frac{K_\omega L_c \omega_0}{L_a + L_c} \Delta x_1 + \frac{L_a R_c - R_a L_c}{L_a + L_c} \Delta x_2 + \frac{K_\omega L_c i_{e0}}{L_a + L_c} \Delta \omega. \quad (2.3.45)$$

Prin eliminarea variabilelor intermediare sunt obținute două MM-II-Ln în raport cu cele două intrări:

• MM-II-Ln  $\Delta u_e(t) \rightarrow \Delta u_G(t)$  în cazul  $\Delta \omega(t) = 0$ :

$$T_{ac} T_{el} \Delta u_G'' + (T_{ac} + T_{el}) \Delta u_G' + \Delta u_G = K_{uc} [T_c \Delta u_e' + \Delta u_e] \quad (2.3.46)$$

## Capitolul 2

### Modelarea matematică a proceselor

- MM-II-Ln  $\Delta\omega(t) \rightarrow \Delta u_G(t)$  în cazul  $\Delta u_c(t) = 0$ :  

$$T_{ac}T_{cl}\Delta u_G'' + (T_{ac} + T_{cl})\Delta u_G' + \Delta u_G = K_{\omega l}[T_{ac}T_{cl}\Delta\omega'' + (T_{ac} + T_{cl})\Delta\omega' + (T_{ac}/T_c)\Delta\omega] \quad (2.3.47)$$
- cu:  $T_a = L_a/R_a$ ,  $T_{ac} = (L_a + L_c)/(R_a + R_c)$ ,  $T_c = L_c/R_c$ ,  $(2.3.48)$   

$$K_{uc} = k_E K_{\omega} \omega_0 R_c / R_c' (R_a + R_c), \quad K_{\omega l} = K_{\omega} i_{c0} L_c / (L_a + L_c).$$

## 3. CARACTERIZAREA SISTEMELOR ÎN DOMENIUL OPERAȚIONAL

Dependent de modul de tratare a timpului, caracterizarea matematică în domeniul operațional a SL (SLn) are la bază două transformări operaționale:

- transformarea Laplace, pentru cazul sistemelor cu timp continuu (-C),
- transformarea Laplace discretă, sau transformarea Z, pentru cazul sistemelor cu timp discret (-D).

### 3.1. Transformarea Laplace. Definirea matematică

**Definirea transformării Laplace:** Dacă o funcție  $u(t): R \rightarrow R$  are proprietățile următoare:

- $u(t) = 0$ ,  $\forall t < 0$ ,
- este derivabilă pe porțiuni,
- $\exists M > 0$  și  $\sigma_0 \geq 0$  astfel încât:

$$|u(t)| \leq M \cdot e^{\sigma_0 t}, \quad \forall t \geq 0,$$

atunci, ea admite o **transformată Laplace** unilaterală definită prin relația ([P1], [D1], [V1]):

$$u(s) = L\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t) \cdot e^{-st} dt, \quad (3.1.1)$$

cu  $u(s): \Delta_0 \rightarrow C$ , în care  $\Delta_0 = \{s \in C \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$ .

Funcția  $u(s)$  este numită  **imaginea Laplace**  a funcției  $u(t)$ . Invers, funcția  $u(t)$  este numită **originalul** lui  $u(s)$  sau **funcția original** a lui  $u(s)$ . Numărul  $\sigma_0$  este numit **indice de creștere**. Funcția complexă de variabilă complexă  $u(s)$  este peste

## Capitolul 2

### Caracterizarea sistemelor în domeniul operațional

tot definită în semiplanul  $\Delta_0$  al planului complex. **Transformarea Laplace** este o aplicație liniară.

Originalul  $u(t)$  se determină pe baza lui  $u(s)$  cu **formula de inversiune Mellin-Fourier**:

$$u(t) = L^{-1}\{u(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} u(s) \cdot e^{ts} ds, \quad c > \sigma_0, \quad (3.1.2)$$

valabilă în punctele de continuitate ale lui  $u(t)$ .

În tabelul 3.1 sunt sintetizate principalele proprietăți ale transformării Laplace, utilizate în calculele legate de studiul SCA. În tabelul A.1.1 sunt prezentate transformatele Laplace aferente unor funcții de timp utilizate frecvent în aplicațiile de conducere automată.

**Tabelul 3.1.** Proprietățile de bază ale transformării Laplace.

Nr. crt.	Proprietate	Enunț
1.	Liniaritate	$L\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 f(s) + c_2 g(s), \quad \forall c_1, c_2 \in R$
2.	Teorema derivării originalului	$L\{f'(t)\} = sf(s) - f(0_+),$ $L\{f^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1} f(0_+) - s^{n-2} f'(0_+) - \dots - s f^{(n-2)}(0_+) - f^{(n-1)}(0_+)$
3.	Teorema integrării originalului	$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = (1/s) \cdot f(s)$
4.	Teorema întârzierii	$L\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau} \cdot f(s), \quad \tau \in R$
5.	Teorema deplasării	$L\{f(t)e^{at}\} = f(s-a), \quad a \in R$
6.	Transformata produsului de convoluție (Borel)	$L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = f(s) \cdot g(s)$
7.	Teorema valorii inițiale	Dacă există $f(0_+)$ atunci: $f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s)$
8.	Teorema valorii finale	Dacă există $f(\infty)$ atunci: $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s)$
9.	Teorema derivării imaginii	$L\{tf(t)\} = -f'(s),$ $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n f^{(n)}(s)$

**Capitolul 2**  
**Caracterizarea sistemelor în domeniul operațional**

***Tabelul A.1.1. Tabel de transformate Laplace uzuale.***

Nr. crt.	Funcția original $f(t)$	Transformata Laplace $f(s) = L\{f(t)\}$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$t \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$(t^2/2) \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{s^3}$
5.	$e^{-at} \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{s + a}$
6.	$t \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{(s + a)^2}$
7.	$(1 - e^{-at}) \cdot \sigma(t)$	$\frac{a}{s(s + a)}$
8.	$[t - (1 - e^{-at})/a] \cdot \sigma(t)$	$\frac{a}{s^2(s + a)}$
9.	$e^{-at} \cdot \sin(bt) \cdot \sigma(t)$	$\frac{b}{(s + a)^2 + b^2}$
10.	$e^{-at} \cdot \cos(bt) \cdot \sigma(t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}$



## Capitolul 2

### Caracterizarea sistemelor în domeniul operațional

#### 3.3. Semnale, secvențe și funcții de intrare deterministe tipice

În caracterizarea comportării sistemelor este utilizat răspunsul acestora la semnale (secvențe) de intrare deterministe considerate tipice. Folosirea acestor semnale prezintă două avantaje:

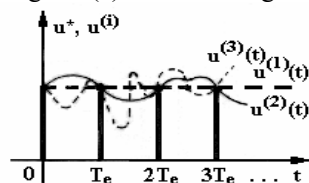
- *în studiul analitic*: prin aceea că astfel de semnale prezintă caracterizări matematice relativ simple;
- *practice*: prin aceea că aceste semnale sunt ușor de generat și ușor reproductibile.

În continuare sunt enumerate și caracterizate principalele semnale / secvențe de funcții de intrare tipice.

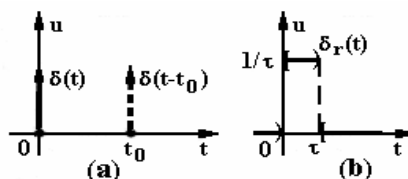
**A. Funcția Dirac, semnalul impuls unitate  $\delta(t)$** ; este definită prin relația:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t \neq 0, \\ \infty, & \text{pentru } t = 0; \end{cases} \quad \text{cu proprietatea} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.3.1)$$

În fig.3.4 (a) este ilustrat graficul funcției Dirac.



**Fig.3.3.** Referitoare la neunivocitatea dintre  $u^*(t)$  și  $u(t)$ .



**Fig.3.4.** Graficul funcției Dirac și semnalul impuls unitate real.

Realizarea fizică a funcției Dirac este semnalul impuls unitate real,  $\delta_r(t)$ , de durată finită  $\tau$  și amplitudine  $1/\tau$ , fig.3.4 (b). În calculele analitice prezintă interes *convoluția cu funcția Dirac*, care respectă următoarele relații formale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t) \quad \text{sau} \quad f(t) * \delta(t) = f(t), \quad (3.3.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta^{(n)}(t-\tau) d\tau = f^{(n)}(t) \quad \text{sau} \quad f(t) * \delta^{(n)}(t) = f^{(n)}(t).$$

Imaginea Laplace a funcției Dirac este:

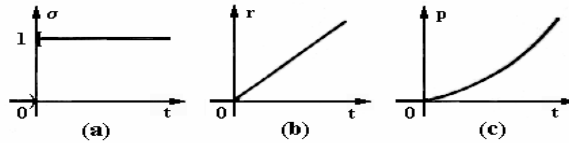
$$\delta(s) = 1. \quad (3.3.3)$$

## Capitolul 2

### Caracterizarea sistemelor în domeniul operațional

**B. Semnale și secvențe de intrare și funcții de intrare cu variație polinomială de ordin redus.** Pentru o mai ușoară urmărire, aceste semnale vor fi definite separat pentru cazul continuu și separat pentru cazul discret.

**(a) Cazul semnalelor cu timp continuu.** Semnalele și funcțiile de intrare cu variație polinomială de ordin redus sunt reprezentate în fig.3.5 și au transformatele Laplace atașate:



**Fig.3.5.** Semnale de tip treaptă, rampă și parabolă unitate.

♦ **semnalul treaptă unitate (a) (funcția Heaviside),  $\sigma(t)$ :**

$$\sigma(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < 0, \\ 1, & \text{pentru } t \geq 0; \end{cases} \quad \text{cu} \quad \sigma(s) = 1/s \quad (3.3.4)$$

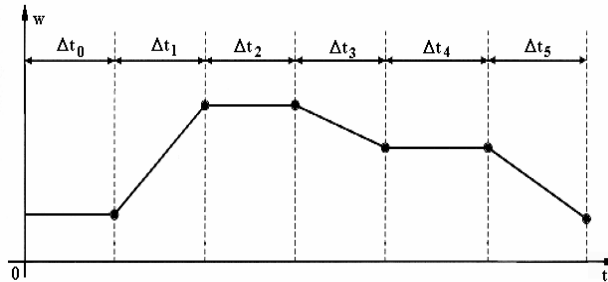
♦ **semnalul rampă unitate (b),  $r(t)$ :**

$$r(t) = t \cdot 1(t); \quad \text{cu} \quad r(s) = 1/s^2 \quad (3.3.5)$$

♦ **semnalul parabolă unitate(c),  $p(t)$ :**

$$p(t) = (t^2/2) \cdot 1(t). \quad \text{cu} \quad p(s) = 1/s^3. \quad (3.3.6)$$

Utilitatea acestor funcții rezultă și în aceea că mărimile de intrare ale SRA pot fi approximate pe intervale de timp, prin funcții treaptă, rampă și parabolă, fig.3.6.



**Fig.3.6.** Aproximarea unei referințe  $w(t)$  ca succesiune de secvențe treaptă și rampă.

**(b) Cazul secvențelor în timp discret.** Va fi tratat în unul din capitolele următoare.

Semnalele și secvențele treaptă, rampă sau parabolă neunitate sunt obținute apoi în baza relațiilor:

## Capitolul 2

### Caracterizarea sistemelor în domeniul operațional

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{\infty} \sigma(t), & u^*(t) &= u_{\infty} \sigma^*(t), \\ u(t) &= u_{\infty} r(t), & u^*(t) &= u_{\infty} r^*(t), \\ u(t) &= u_{\infty} p(t), & u^*(t) &= u_{\infty} p^*(t). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

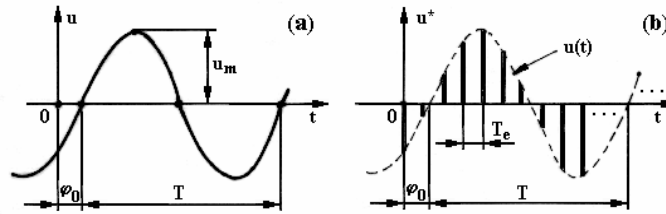
Semnalul/secvența treaptă este utilizat(ă) în studiul **SRA cu referință constantă**. În cazul sistemelor stabile, în urma variației treaptă a intrărilor în sistem se stabilește (la  $t \rightarrow \infty$ ) un regim denumit regim staționar constant (RSC).

**C. Funcții și semnale secvențe de intrare cu variație armonică în timp** (definire separată în cazul continuu și cel discret).

**(a) Cazul cu timp continuu.** Semnalul armonic de bază este *semnalul sinusoidal*, fig.3.8-a:

$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \text{cu } \omega > 0, \quad (3.3.11)$$

în care:  $u_m$  – amplitudinea,  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  – pulsația,  $f$  – frecvența,  $T$  – perioada semnalului sinusoidal,  $\varphi_0$  – faza inițială; obișnuit se poate considera  $\varphi_0 = 0$ .



**Fig.3.8. Semnal sinusoidal (a) și secvența sinusoidală (b).**

**(b) Cazul cu timp discret.** Va fi tratat în unul din capitolele următoare.

**Regimul permanent armonic** reprezintă *regimul permanent* care se stabilește într-un sistem (stabil) ca urmare aplicării unui semnal / secvență armonică. Acest regim poate oferi suport pentru studiul analitic și experimental al sistemelor în *domeniul pulsație sau frecvență*.

### 3.5. MM în domeniul operațional: funcția de transfer, matricea de transfer

**A. Cazul sistemelor cu timp continuu (SD-C).** Se consideră un SLI monovariabil, cu timp continuu, *aflat în condiții inițiale nule* și caracterizat prin MM-II de forma:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t), \quad m \leq n. \quad (3.5.1)$$

Aplicând transformarea Laplace membru cu membru și termen cu termen și ținând seama că sistemul se află în condiții inițiale nule:

$$\Psi_0 = (u_0, u_0', \dots, u_0^{(m-1)}; y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})^T = \mathbf{0}, \quad (3.5.2)$$

## Capitolul 2

### Caracterizarea sistemelor în domeniul operațional

se obține (a se vedea și tabelul 3.1):

$$a_n s^n y(s) + \dots + a_1 s y(s) + a_0 y(s) = b_m s^m u(s) + \dots + b_1 s u(s) + b_0 u(s) . \quad (3.5.3)$$

Separând variabila  $y(s)$  ca funcție de  $u(s)$ , rezultă:

$$y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \cdot u(s) . \quad (3.5.4)$$

În baza relației (3.5.4) se introduce prin **definiție** conceptul de funcție de transfer (f.d.t.):

**Funcția de transfer (f.d.t.)** a unui sistem liniar, notată  $H(s)$ , este definită ca raportul dintre imaginea Laplace a mărimii de ieșire  $y(s)$  și imaginea Laplace a mărimii de intrare  $u(s)$ , sistemul fiind considerat în condiții inițiale nule:

$$H(s) = \left. \frac{y(s)}{u(s)} \right|_{\Psi_0=0} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} . \quad (3.5.5)$$

Corespunzător, relația (3.5.4) poate fi rescrisă în forma:

$$y(s) = H(s) \cdot u(s) ; \quad (3.5.6)$$

relația stă la baza unei metode de calcul al răspunsului SLI.

Pentru caracterizarea dinamicii SF (PC) continue sunt utilizate *constantele de timp*, notate de regula cu  $T$ . Evidențierea acestora în MM din domeniul timp și din domeniul operațional (f.d.t.) este foarte utilă.

În vederea exemplificării acestei evidențieri este considerat SF cu MM de forma:

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) ; \quad (3.5.7)$$

prin împărțire cu  $a_0$  și reordonare se obține:

$$(a_1/a_0) y'(t) + y(t) = (b_0/a_0) u(t) \rightarrow T y'(t) + y(t) = k u(t) , \quad (3.5.8)$$

în care:  $a_1/a_0 = T$  – constanta de timp a SF (are dimensiunea <sec>) iar  $b_0/a_0 = k$  – coeficientul de transfer al SF (sau factorul de amplificare).

În operațional se obține:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{1 + sT} . \quad (3.5.9)$$

În general, operând în manieră similară, relația (3.5.5) poate fi rescrisă în forma:

## Capitolul 2

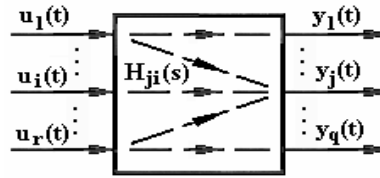
### Caracterizarea sistemelor în domeniul operațional

$$H(s) = \frac{b_0 (b_m/b_0)s^m + \dots + b_1/b_0 s + b_0}{a_0 (a_n/a_0)s^n + \dots + a_1/a_0 s + a_0}, \quad (3.5.10)$$

în care:  $b_0/a_0 = k$  –coeficientul de transfer, iar coeficienții  $(b_\mu/b_0)$  respectiv  $(a_\nu/a_0)$  au dimensiunea de constantă de timp la puterea  $\mu$ ,  $\mu = 1 \dots m$ , respectiv  $\nu$ ,  $\nu = 1 \dots n$ .

Dacă **sistemul este multivariabil (MIMO)**, cu  $r$  intrări și  $q$  ieșiri (fig.3.10), atunci între fiecare intrare  $u_i(t)$ ,  $i = 1 \dots r$ , și fiecare ieșire  $y_j(t)$ ,  $j = 1 \dots q$  poate fi stabilit câte un MM-II  $u_i(t) \rightarrow y_j(t)$  sub forma unei f.d.t.  $H_{ji}(s)$  definită prin relația:

$$H_{ji}(s) = \left. \frac{y_j(s)}{u_i(s)} \right|_{\Psi_0=0}, \quad j = 1 \dots q, \quad i = 1 \dots r, \quad u_k = 0, \quad k \neq i. \quad (3.5.11)$$



**Fig.3.10.** Definierea matricei de transfer în cazul sistemelor multivariabile.

Ansamblul funcțiilor de transfer ( $q \times r$ ) care caracterizează un sistem multivariabil, aflat în condiții inițiale nule, poartă denumirea de **matrice de transfer (m.d.t.)**:

$$\mathbf{H}(s) = [H_{ji}(s)] \Big|_{\substack{j=1,\dots,q \\ i=1,\dots,r}} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & \dots & H_{1r}(s) \\ \dots & & \dots \\ H_{j1}(s) & \dots & H_{jr}(s) \\ \dots & & \dots \\ H_{q1}(s) & \dots & H_{qr}(s) \end{bmatrix}, \quad \text{și} \quad \mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{u}(s) \quad (3.5.12)$$

**B. Cazul sistemelor cu timp discret (SD-D).** Va fi tratat în unul din capitolele următoare.

**Observații.** 1. Analogia relațiilor (3.5.5) cu cea în z aferentă SD-D permite **caracterizarea într-o formă unitară** a ambelor f.d.t. (categorii de SD), ca fiind:

$$H(\lambda) = \left. \frac{y(\lambda)}{u(\lambda)} \right|_{\Psi_0=0} = \frac{b_n \lambda^n + \dots + b_1 \lambda + b_0}{a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0}. \quad \text{în care} \quad (3.5.20)$$

$$\lambda = \begin{cases} s, & \text{în cazul SL-C} \\ z, & \text{în cazul SL-D} \end{cases}, \quad (3.5.21)$$

## Capitolul 2

### Caracterizarea sistemelor în domeniul operațional

Generalizarea are avantaje în formalizarea matematică unitară a SL-C și SL-D.

2. Numitorul f.d.t.,  $A(\lambda)$ , este **polinomul caracteristic al SL**; rădăcinile ecuației caracteristice:

$$A(\lambda) = 0 \rightarrow a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (3.5.22)$$

poartă denumirea de **polii sistemului** și se notează cu  $p_v$ ,  $v = 1, \dots, n$ ; gradul  $n$  al polinomului caracteristic definește **ordinul sistemului**.

3. Rădăcinile numărătorului f.d.t.:

$$B(\lambda) = 0 \rightarrow b_n \lambda^n + \dots + b_1 \lambda + b_0 = 0, \quad (3.5.23)$$

poartă denumirea de **zerourile sistemului** și se notează cu  $z_\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, m$ .

4. Polii și zerourile unui sistem se numesc **puncte critice** ale sistemului; pe baza repartiției în planul complex a polilor și zerourilor unui sistem se pot aprecia proprietățile sistemului. Astfel [B2]:

- ♦ *repartiția polilor* va avea implicații asupra stabilității și asupra comportării de regim dinamic a sistemului;
- ♦ *repartiția zerourilor* va avea implicații numai asupra comportării de regim dinamic a sistemului.

Pe baza repartiției poli-zerouri este posibil un studiu eficient al proprietăților sistemului [D1]. Prin explicitarea polilor și zerourilor, f.d.t. (3.5.20) se scrie astfel:

$$H(\lambda) = \frac{b_m \prod_{\mu=1}^m (\lambda - z_\mu)}{a_n \prod_{v=1}^n (\lambda - p_v)}, \quad (3.5.24)$$

**C. Calculul răspunsului sistemului aflat în condiții inițiale nule.** În baza relației (3.5.6) respectiv celei în  $z$  aferente SD-D se poate calcula răspunsul sistemului la un semnal de intrare cunoscut sau la o secvență de intrare cunoscută.

**a) Cazul SL-C (continuu).** Se consideră un SL cu f.d.t.  $H(s)$ ; semnalul de intrare  $u(t)$  este cunoscut (formă analitică), cu  $u(t) = 0$  pentru  $t < 0$ . Acceptând că  $u(t)$  are transformata Laplace  $u(s)$  cunoscută (de exemplu din tabelele de transformate), aplicând relația (3.5.5), se poate calcula expresia operațională a ieșirii,  $y(s)$  (răspunsul în operațional al sistemului).

Originalul  $y(t)$  (răspunsul în domeniul timp) se obține apoi în forma:

$$y(t) = L^{-1}\{y(s)\} = \dots \quad (\text{din tabele de transformate}). \quad (3.5.25)$$

## Capitolul 2

### Caracterizarea sistemelor în domeniul operațional

Expresiile operaționale ale semnalelor și secvențelor de intrare impuls, treaptă și rampă sunt următoarele:

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta(t), & u(s) &= 1; & u^*(t) &= \delta(t), & u(z) &= 1; & (3.5.26) \\ u(t) &= u_{\infty} \sigma(t), & u(s) &= (1/s)u_{\infty}; & u^*(t) &= u_{\infty} \sigma^*(t), & u(z) &= (z/(z-1))u_{\infty}; \\ u(t) &= u_{\infty} t \sigma(t), & u(s) &= (1/s^2)u_{\infty}; & u^*(t) &= u_{\infty} r^*(t), & u(z) &= (T_c z/(z-1)^2)u_{\infty}. \end{aligned}$$

**b) Cazul SL-D (discret).** Va fi tratat în unul din capitolele următoare.

### 3.6. Legătura dintre MM-ISI și MM-II aferente unui SLI

Între cele două MM ale unui același SLI se pot realiza conexiuni care în operațional, cu utilizarea variabilei comune  $\lambda$ , se pot scrie unitar pentru:

$$\lambda = \begin{cases} s, & \text{pentru sistemele liniare cu timp continuu, SD-C} \\ z, & \text{pentru sistemele liniare cu timp discret, SD-D.} \end{cases} \quad (3.6.1)$$

• **Cazul SLI monovariabil cu timp continuu** cu MM-ISI:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \cdot u(t), \quad (3.6.2)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(t).$$

Aplicând transformarea Laplace pentru  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , se poate scrie:

$$s \cdot \mathbf{x}(s) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(s) + \mathbf{b} \cdot u(s), \quad (3.6.3)$$

$$y(s) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(s).$$

Operând, se obține în final expresia f.d.t.:

$$H(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{b} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{b}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}, \quad \text{cu} \quad (3.6.3)$$

$$A(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad B(s) = \mathbf{c}^T \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{b} \quad \text{și} \quad (3.6.4)$$

$$y(s) = \mathbf{c}^T \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot u(s). \quad (3.6.5)$$

• **Cazul SLI cu timp discret.** Va fi tratat în unul din capitolele următoare.

## 6. CONEXIUNI DE SISTEME

Sistemele fizice (SF) sunt realizate prin interconectarea unor sisteme mai simple, numite subsisteme. Proprietățile de ansamblu ale sistemului pot fi

## Capitolul 2

### Conexiuni de sisteme

determinate relativ ușor pe baza proprietăților subsistemelor componente și a proprietăților suplimentare obținute prin interconectare.

#### 6.1. Conexiuni de sisteme (subsisteme)

Prin *sistem echivalent unei conexiuni de subsisteme* se înțelege sistemul care prezintă aceleași intrări, aceleași ieșiri și aceleași proprietăți ca și conexiunea. Sistemul în ansamblu (conexiunea) poate fi caracterizată din punct de vedere informațional pe baza MM aferente subsistemelor și a relațiilor de legătură care sunt realizate prin conexiune. **Interconectarea funcțională a unor SF** – și a blocurilor informaționale aferente – trebuie să respecte **cerințele** următoare:

- SF se pot cupla numai prin mărimi de aceeași natură fizică și domeniu de variație/
- În cazul cuplării unor sisteme la care nivelul energetic al semnalelor este diferit, la nivelul cuplajului trebuie asigurată o adaptare corespunzătoare.
- Sistemele cu timp continuu și sistemele cu timp discret se pot interconecta numai prin interfațare corespunzătoare, în speță convertor analog-numeric (CAN) sau convertor numeric-analogic (CNA).

Prezentările din acest capitol sunt efectuate relativ la cazul sistemelor monovariabile. Cazul multivariabil se tratează principial în aceeași manieră cu respectarea compatibilității dimensionale a vectorilor mărimilor prin care este realizată interconectarea.

Conexiunile de sisteme pot fi caracterizate din punct de vedere informațional în toate domeniile (timp, operațional, pulsație) și în ambele forme de reprezentare matematică, MM-II sau MM-ISI. Caracterizarea în domeniul timp a transferului intrare-ieșire al informației printr-un SF (SD) face apel la integrale (sume) de convoluție a căror tratare este însă greoaie.

Din acest motiv, se preferă aproape exclusiv caracterizarea în domeniul:

- **Operațional**, prin MM-II sub forma f.d.t. (exemplificare în cazul continuu):  
$$y(s)=H(s)u(s) \text{ , cu } H(s)=B(s)/A(s) \text{ (forma rațională) ,} \quad (6.1.1)$$
- **Pulsație**, prin utilizarea c.d.p. aferente,  $(H(j\omega) \text{ , } h\{H(j\omega)\} \text{ , } |H(j\omega)|_{dB} \text{ , } \angle H(j\omega))$ .

La utilizarea caracterizării prin MM-ISI a SF sunt utilizate atât reprezentările din domeniul timp:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) \text{ ,} \quad y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + d u(t) \text{ ,} \quad (6.1.2)$$

cât și reprezentările din domeniul operațional.

Un sistem cu o intrare  $u(t)$  și o ieșire  $y(t)$  de ordin relativ redus poartă denumirea de **element de transfer (ET)**.

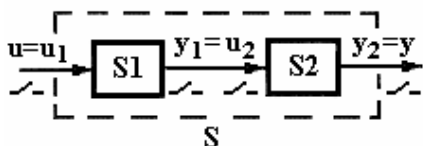
Conexiunile de sisteme omogene (timp continuu, timp discret) sunt tratate în manieră similară pentru ambele categorii de sisteme. Trebuie însă reținut faptul că



## Capitolul 2 Conexiuni de sisteme

interconectarea sistemelor cu timp discret impune eșantionarea semnalelor implicate în conexiune (intrări, ieșiri, stări).

**A) Conexiunea serie de sisteme.** Două sisteme conectate ca în fig.6.1 constituie o conexiune serie de sisteme.



**Fig.6.1.** Conexiunea serie.

Caracterizarea informațională a conexiunii are la bază următoarele relații:

$$S1: y_1(\lambda) = H_1(\lambda)u_1(\lambda), \quad S2: y_2(\lambda) = H_2(\lambda)u_1(\lambda), \quad (6.1.3)$$

$$\begin{aligned} \lambda = s \text{ pentru SL-C} \quad \text{sau} \quad \lambda = z \text{ pentru SL-D}, \\ u(\lambda) = u_1(\lambda), \quad y_1(\lambda) = u_2(\lambda), \quad y(\lambda) = y_2(\lambda) \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

$$y(\lambda) = H(\lambda)u(\lambda). \quad (6.1.5)$$

Pe baza relațiilor (6.1.3) ... (6.1.5) se obține (cu particularizarea  $\lambda = s$ ):

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)} \frac{B_2(s)}{A_2(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (6.1.6)$$

*Reprezentarea în domeniul pulsație:* expresiile componentelor f.r.p.  $H(j\omega)$  se calculează imediat, și anume:

$$|H(j\omega)| = |H_1(j\omega)| |H_2(j\omega)|, \quad \angle H(j\omega) = \angle H_1(j\omega) + \angle H_2(j\omega), \quad (6.1.7)$$

respectiv, expresiile analitice ale caracteristicilor logaritmice:

$$|H|_{dB} = |H_1|_{dB} + |H_2|_{dB}, \quad \angle H = \angle H_1 + \angle H_2. \quad (6.1.8)$$

Importanța practică a relațiilor (6.1.8) apare la trasarea grafică a caracteristicilor logaritmice de pulsație (c.l.p.) aferente SD de ordin mare. În acest caz, f.d.t.  $H(s)$  poate fi descompusă în factori sub forma:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \prod_i \frac{B_i(s)}{A_i(s)}. \quad (6.1.9)$$

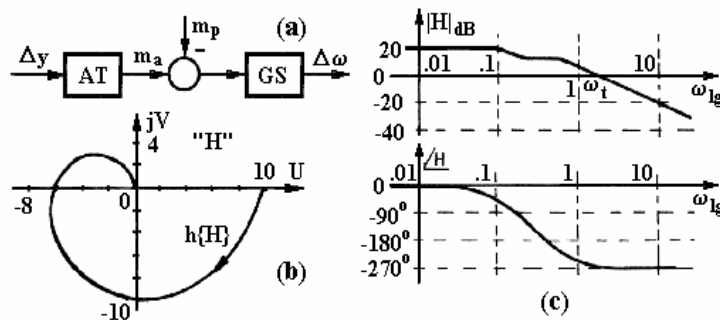
Factorii  $B_i(s)/A_i(s)$  pot fi reprezentați separat prin c.l.p. proprii, iar c.l.p. aferentă sistemului rezultă prin însumarea c.l.p. parțiale (relația (6.1.8)).

**Exemplul 6.1:** Este considerat PC sistem aducțiune-turbină (AT) -generator sincron (GS) caracterizat prin schema bloc din fig.6.2 (a) și f.d.t. (de aproximare):

## Capitolul 2 Conexiuni de sisteme

$$H_{AT}(s) = 5 \frac{1-4s}{1+2s} \quad \text{și} \quad H_{GS}(s) = \frac{2}{1+10s} . \quad (6.1.10)$$

Să se determine f.d.t. aferentă PC și să se traseze c.l.p. aferente sistemului.



**Fig.6.2.** Exemplu de tratare a unei conexiuni serie de ET.

*Soluție:* Fiind vorba de o conexiune serie de subsisteme, se poate scrie:

$$H_{PC}(s) = H_{AT}(s)H_{GS}(s) = \frac{10(1-4s)}{(1+2s)(1+4s)} . \quad (6.1.11)$$

Inversele constantelor de timp,  $T_d = 4$  sec  $T_w = 2$  sec și  $T_m = 10$  sec care apar sunt pulsațiile de frângere ale c.l.p.; domeniul valorilor  $\omega$  pentru care se calculează punctele c.d.p.,  $D_\omega$ , se determină ținând seama de aceste pulsații:  $\omega_{01}=1/2 = 0.5$ ,  $\omega_{0d}=1/4 = 0.25$ ,  $\omega_{02}=1/10 = 0.1$ . Se va alege  $D_\omega = [0.01, 10]$ ; acesta acoperă trei decade, pentru fiecare decadă alegându-se 5 valori ale pulsației (echidistanțate logaritmice). Expresiile c.d.p. aferente sistemului analizat sunt:

$$|H(j\omega)| = \frac{10(1+(4\omega)^2)^{1/2}}{(1+(2\omega)^2)^{1/2}(1+(10\omega)^2)^{1/2}} , \quad (6.1.12)$$

$$\angle H(j\omega) = -\arctg(2\omega) - \arctg(4\omega) - \arctg(10\omega) , \quad (6.1.13)$$

respectiv c.l.p.:

$$|H|_{dB} = 20\lg(1+(4\omega)^2)^{1/2} - 20\lg(1+(2\omega)^2)^{1/2} - 20\lg(1+(10\omega)^2)^{1/2} + 20\lg 10 . \quad (6.1.14)$$

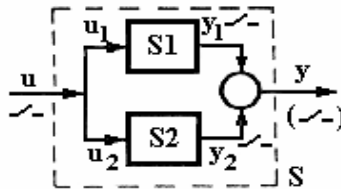
Valorile numerice calculate sunt sintetizate în tabelul 6.1. Alurile principale ale hodografului și ale c.l.p. sunt redată în fig.6.2 (b) și (c).

**B) Conexiunea paralel de sisteme.** Două sisteme conectate ca în fig.6.3 constituie o conexiune paralel de (sub)sisteme. Caracterizarea informațională a conexiunii are la bază relațiile (6.1.3) și relațiile specifice conexiunii:

## Capitolul 2 Conexiuni de sisteme

**Tabelul 6.1.** Datele calculate pentru c.d.p. din exemplul 6.1.

$\omega$	$\lg \omega$	$U(\omega)$	$V(\omega)$	$ H(j\omega) $	$ H(j\omega) _{dB}$	$\angle H(j\omega) [^\circ]$
.01	-2	9.82	-1.58	9.95	19.96	-9.14
.0158	-1.8	9.58	-2.46	9.89	19.9	-14.4
.0251	-1.6	8.98	-3.75	9.73	19.76	-22.69
.0398	-1.4	7.65	-5.41	9.38	19.44	-35.3
.0631	-1.2	5.13	-6.96	8.65	18.74	-53.61
.1	-1	1.53	-7.3	7.46	17.46	-78.11
.158	-.8	-1.81	-5.75	6.03	15.61	-107.83
.251	-.6	-3.59	-3	4.68	13.41	-140.05
.398	-.4	-3.55	-.48	3.58	11.08	-172.28
.631	-.2	-2.46	0.94	2.64	8.43	-201.0
1	0	-1.32	1.26	1.83	5.27	-223.68
1.58	.2	-.61	1.05	1.21	1.72	-239.82
2.51	.4	-.25	.74	.78	-2.1	-250.76
3.98	.6	-.1	.48	.5	-6.03	-257.8
6.31	.8	-.04	.31	.31	-10.0	-262.29
10	1	-.01	.19	.2	-13.98	-265.13



**Fig. 6.3.** Conexiunea paralel a două sisteme.

$$u(\lambda) = u_1(\lambda) = u_2(\lambda), \quad y(\lambda) = y_1(\lambda) + y_2(\lambda). \quad (6.1.15)$$

Particularizand cazul continuu, în baza relațiilor (6.1.3) și (6.1.15), se obține:

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) = \frac{B_1(s)A_2(s) + B_2(s)A_1(s)}{A_1(s)A_2(s)}. \quad (6.1.16)$$

## Capitolul 2 Conexiuni de sisteme

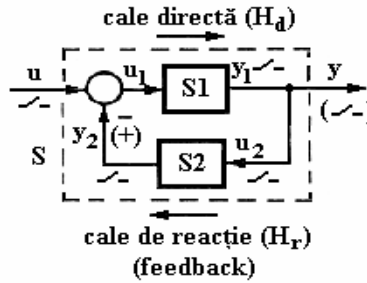
În domeniul pulsație se obține f.r.p. aferentă sistemului echivalent:

$$H(j\omega) = \sum_i \{ |H_i(j\omega)| e^{j\angle H_i(j\omega)} \} \quad (6.1.17)$$

Relația (6.1.17) evidențiază faptul că c.d.p. și c.l.p. aferente sistemului echivalent trebuie calculate “punct cu punct”, nefiind valabile aspectele practice evidențiate la conexiunea serie (relația (6.1.8)).

**C) Conexiunea cu reacție a două sisteme.** Două sisteme conectate conform fig.6.4 constituie o conexiune cu **reacție** (sau în conexiune inversă, **feedback**). Principial, reacția poate fi:

- **negativă** “-”, cu caracter stabilizator și esențialmente utilizată în practica de conducere automată;
- **pozitivă** “+”, destabilizatoare, utilizată numai în aplicații speciale.



**Fig.6.4.** Conexiunea cu reacție.

Relațiile sunt prezentate în cazul **reacției negative** (-); relațiile specifice conexiunii sunt:

$$\begin{aligned} u_1(\lambda) &= u(\lambda) - y_2(\lambda) \quad \text{sau} \quad u(\lambda) = u_1(\lambda) + y_2(\lambda), \\ y(\lambda) &= y_1(\lambda) = u_2(\lambda). \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

Pentru sistemul echivalent, conexiunea S, rezultă imediat (cazul continuu):

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}. \quad (6.1.19)$$

și, în continuare:

$$H(s) = \frac{B_1(s)B_2(s)}{A_1(s)A_2(s) + B_1(s)B_2(s)}. \quad (6.1.20)$$

## Capitolul 2 Conexiuni de sisteme

În aplicațiile practice legate de analiza stabilității, proiectarea sistemelor cu reglare automată ș.a.m.d. prezintă interes cunoașterea *f.d.t. a sistemului deschis*,  $H_0(s)$ , definită conform relației:

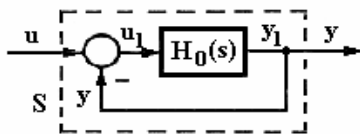
$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)} \cdot \frac{B_2(s)}{A_2(s)} . \quad (6.1.21)$$

În baza relației (6.1.19), în domeniul pulsație se obține:

$$H(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)} , \quad (6.1.22)$$

Relația (6.1.22) indică necesitatea calculului “punct cu punct” al c.d.p. și c.l.p.. În literatură sunt prezentate și metode grafo-analitice de determinare a punctelor c.d.p.  $H(j\omega)$  bazat pe c.d.p.  $H_0(j\omega)$ .

În cazul conexiunii inverse directe (reacție unitate), fig.6.5,  $H_2(s) = 1$  și corespunzător, se poate scrie:



**Fig.6.5.** Conexiunea inversă directă.

$$H_0(s) = H_d(s) = H_1(s) , \quad \text{respectiv:} \quad H(s) = \frac{H_0(s)}{1 + H_0(s)} \quad (6.1.23)$$

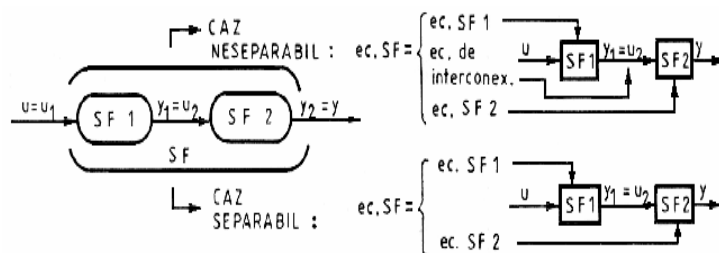
### 6.2. Interconectarea sistemelor fizice

Fie, pentru exemplificare (fig.6.6), două subsisteme SF1 și SF2 conectate în serie. Dacă se analizează funcționalitatea sistemului, se constată că pentru caracterizarea completă a comportării sistemului realizat prin interconectare, ansamblul MM ale SF1 și SF2 considerate independente – ca și cum ar funcționa “în gol” – nu este suficient, fiind necesară luarea în considerare a ecuațiilor de legătură care caracterizează interinfluențele dintre sistemele cuplate.

În măsura în care ecuațiile de legătură (efectul acestora) pot fi neglijate, regimul de funcționare “în sarcină” al subsistemelor poate fi aproximat prin regimul de funcționare “în gol” și ansamblul MM ale sistemelor componente va aproxima suficient de bine comportarea SF realizat prin interconectare. În aceste

## Capitolul 2 Conexiuni de sisteme

situații se vorbește despre *separabilitatea informațională* a SF pe subsistemele SF1 și SF2.



**Fig.6.6.** Aspecte legate de separabilitatea informațională a sistemelor fizice.

### 6.6. Studiul sistemelor pe baza schemelor bloc informaționale

Reprezentarea prin *scheme bloc informaționale a sistemelor* constituie o metodă cu transparență maximă de studiu al structurii și proprietăților acestora. În cele ce urmează sunt tratate două aspecte esențiale:

- aspecte referitoare la întocmirea schemelor bloc;
- aspecte referitoare la transformarea și reducerea (complexității) schemelor bloc.

*Schema bloc informațională* poate fi întocmită atât pentru SD-C cât și pentru SD-D. Cum procesele conduse care prezintă interes în cadrul cărții sunt procese continue, aspectele de bază legate de întocmirea schemelor bloc vor fi analizate pentru această categorie de sisteme. Câteva din *particularitățile specifice sistemelor cu timp discret* vor fi însă evidențiate în continuare:

- În cazul conducerii în timp discret, PC continuu va fi reprezentat de o schemă bloc continuă și interfațat cu DC prin CAN (ES + ER) și CAN (ES).
- Conținutul informațional al schemelor bloc aferente algoritmilor de reglare numerică servește implementării lor pe un echipament de conducere numerică.

**A) Întocmirea schemelor bloc aferente sistemelor continue.** La întocmirea schemei bloc aferente unui sistem se presupune că intrările și ieșirile acestuia au fost fixate în prealabil pe baza principiilor constructiv-funcționale, ținând seama de transferul cauzal din sistem. Acest lucru este important din două motive:

- Un același sistem poate avea aceleași mărimi fizice, fie mărimi de intrare fie mărimi de ieșire, dependent de regimul în care sistemul este pus să funcționeze. De exemplu, o mașină electrică poate funcționa în regim de generator, când are loc conversia “energie mecanică → energie electrică”, sau în regim de motor, când are loc conversia “energie electrică → energie mecanică”.

## Capitolul 2 Conexiuni de sisteme

- Chiar în timpul funcționării este posibilă schimbarea regimului de funcționare (de exemplu, din regim de motor în regim de generator sau invers), ceea ce impune ca în schema bloc informațională să se evidențieze posibilitățile de modificare a caracterului acestor mărimi (intrare ↔ ieșire) și a structurii.

Schema bloc aferentă unui sistem se întocmește pe baza MM atașat - ecuații primare sau ecuații obținute prin simplificarea, reordonarea sau rearanjarea adecvată a acestora - cu **parcurgerea următoarelor etape:**

(1) Atașarea blocurilor la ecuațiile ce compun MM al sistemului:

- se analizează fiecare ecuație a MM și – ținând seama de sensul de transfer al informației – se fixează mărimea de ieșire, iar celelalte mărimi vor apare ca mărimi de intrare;
- se separă mărimea de ieșire și derivatele acesteia în membrul stâng al ecuației, iar în membrul drept mărimile de intrare și – după caz – și derivatele acestora;
- se asociază fiecărei ecuații unul sau mai multe blocuri, după cum în noua expresie se recunosc sau nu subsisteme tipizate; aspecte aparte apar în cazul ecuațiilor neliniare, când atașarea schemei bloc poate ridica dificultăți.

(2) Întocmirea schemei bloc:

- blocurile anterior atașate se interconectează prin unirea tuturor intrărilor cu ieșirea de același nume;
- se reordonează schema astfel obținută într-formă cât mai ușor interpretabilă.

Referitor la atașarea schemei bloc informațională la un SF se mai fac două **precizări:**

- mărimile de intrare și cele de ieșire din sistem trebuie să-și păstreze semnificația (pentru un regim de funcționare a SF);
- celelalte mărimi ale SF trebuie să apară cel puțin o dată ca intrări ale unor blocuri și o dată ca ieșire dintr-un bloc.

Schema bloc astfel obținută poate conține atât blocuri liniare cât și blocuri neliniare. Simplificarea unui MM (primar sau chiar redus) poate fi efectuată cu mult mai mare încredere dacă se dispune de schema bloc informațională aferentă.

**Exemplul 6.3:** Să se întocmească schema bloc aferentă PC “sistem de acționare cu motor de curent continuu” descris de următoarele ecuații primare:

$$u_a = K_A u_c, \quad (6.6.1)$$

$$T_a \frac{di_a}{dt} + i_a = \frac{1}{R_a} (u_a - e_M) \quad \text{cu} \quad T_a = \frac{L_a}{R_a}, \quad (6.6.2)$$

$$m = K_m i_a, \quad (6.6.3)$$

## Capitolul 2 Conexiuni de sisteme

$$J \frac{d\omega}{dt} = m - m_s - m_f, \quad (6.6.4)$$

$$e_M = K_e \omega, \quad (6.6.5) \quad m_f = K_f \omega, \quad (6.6.6)$$

$$u_i = K_{Ti} i_c, \quad (6.6.7) \quad u_\omega = K_{T\omega} \omega. \quad (6.6.8)$$

*Soluție:* În aceste ecuații sunt recunoscute ET tipizate, după cum urmează (se renunță la cifrele corespunzătoare paragrafului):

P: (1), (3), (5), (6), (7), (8),

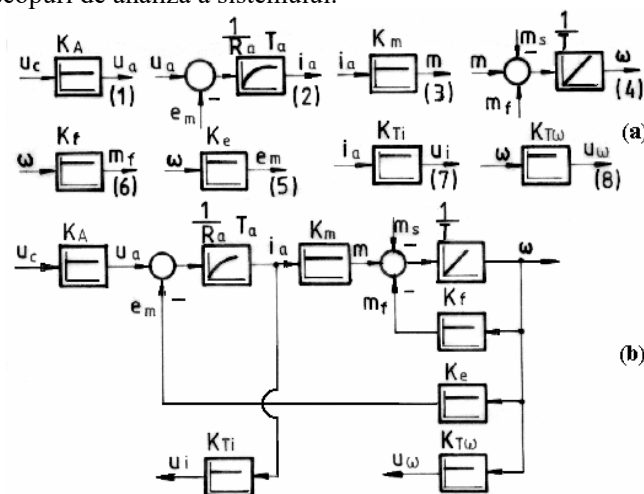
I: (4),

PT1: (2),

pentru care pot fi atașate simbolizările cunoscute, fig.6.12 (a). Prin interconectarea blocurilor atașate și rearanjarea convenabilă a schemei, se obține schema bloc din fig.6.12 (b).

**B) Transformarea și reducerea schemelor bloc.** Asigurarea unei imagini cât mai concludente asupra structurii sistemului necesită adeseori transformarea schemelor bloc informaționale primare. Mai mult, pe baza schemelor bloc, prin operații de transformare se poate asigura *transformarea* și *reducerea* schemei la forme adecvate. Această reducere poate fi solicitată:

- pentru compactizarea schemei,
- pentru determinarea f.d.t.,
- în alte scopuri de analiză a sistemului.



**Fig.6.12.** Exemplu de întocmire a unei scheme bloc pentru un sistem cu timp continuu.



## Capitolul 2

### Conexiuni de sisteme

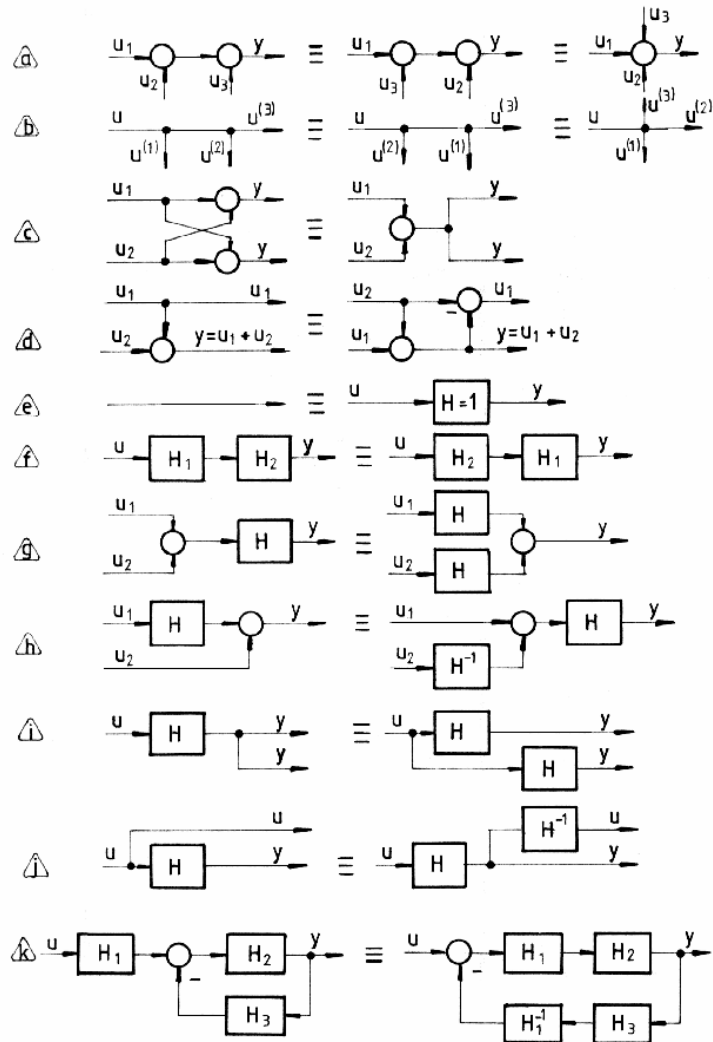
- **Transformarea schemei bloc:** reprezintă operația de reșezare convenabilă a MM / schemei bloc aferente unui sistem. Ea se bazează pe principalele reguli de transformare indicate în fig.6.13, reguli cunoscute și sub denumirea de *regulile algebrei schemelor bloc*.
- **Reducerea schemei bloc:** reprezintă operația de aducere a schemei bloc la o formă cât mai simplă sau mai convenabilă (dintr-un anumit punct de vedere). Ea se bazează pe regulile de transformare a schemelor bloc precum și pe recunoașterea celor trei tipuri de conexiuni de bază de subsisteme și înlocuirea acestora cu subsisteme echivalente.

*Observație:* Operațiile cu schemele bloc pot conduce în unele situații greșit tratate la modificarea artificială a ordinului sistemului, lucru care nu este acceptabil; din acest motiv, în urma efectuării transformărilor și reducerilor din schemele bloc este strict necesară **verificarea conservării ordinului sistemului**.

**Exemplul 6.4:** Se consideră PC “generator sincron + turbină hidraulică” cu schema bloc dată în fig.6.14. Utilizând regulile de transformare și de reducere a schemelor bloc, să se determine f.d.t. aferente PC:

$$\begin{aligned}
 H_{\Delta\omega\Delta C_m}(s) &= \frac{\Delta\omega(s)}{\Delta C_m(s)} \Big|_{\Delta u_E=0}, \quad H_{\Delta\omega\Delta u_E}(s) = \frac{\Delta\omega(s)}{\Delta u_E(s)} \Big|_{\Delta C_m=0}, \\
 H_{\Delta u_G\Delta C_m}(s) &= \frac{\Delta u_G(s)}{\Delta C_m(s)} \Big|_{\Delta u_E=0}, \quad H_{\Delta u_G\Delta u_E}(s) = \frac{\Delta u_G(s)}{\Delta u_E(s)} \Big|_{\Delta C_m=0}.
 \end{aligned} \tag{6.6.9}$$

## Capitolul 2 Conexiuni de sisteme

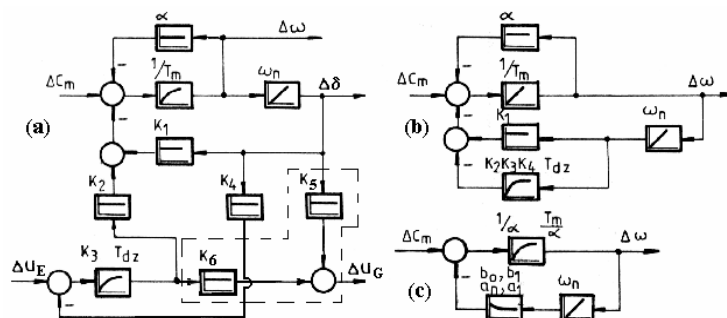


**Fig.6.13.** Principalele reguli de transformare a schemelor bloc.

*Soluție:* Pentru exemplificare se consideră doar determinarea f.d.t.  $H_{\Delta\omega\Delta C_m}(s)$ , celelalte rămânând ca exercițiu pentru cititor. În acest scop, din schema bloc prezentată în fig.6.13-a se “decupează” doar canalul de transfer care prezintă

## Capitolul 2 Conexiuni de sisteme

interes, fig.6.13 (a) exclusiv partea încadrată, care poate fi transformat succesiv la formele din fig.6.13 (b) și (c).



**Fig.6.14.** Exemplu privind reducerea schemelor bloc.

În final, f.d.t. căutată obține forma următoare:

$$H_{\Delta\omega\Delta C_m}(s) = \frac{(1/T_m) s (s+1/T_{dz})}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (6.6.10)$$

cu:

$$\begin{aligned} a_0 &= \omega_n(K_1 - K_2 K_3 K_4)/(T_m T_{dz}), & a_1 &= (\alpha + K_1 T_{dz} \omega_n)/(T_m T_{dz}), \\ a_2 &= \alpha/T_m + 1/T_{dz}. \end{aligned} \quad (6.6.11)$$

## BIBLIOGRAFIE

- [A1] Åström, K.J. și B. Wittenmark: Computer Controlled Systems – Theory and Design, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [A2] Åström, K.J. și T. Häggglund: „Benchmark Systems for PID Control”, Preprints of IFAC Workshop on Digital Control: Past, Present and Future of PID Control”, editori: J. Quevedo și T. Escobet, Terassa, Spain, pp. 181-182, 2000.
- [A3] Åström, K.J. și T. Häggglund: PID Controllers: Theory, Design, and Tuning, 2<sup>nd</sup> edition, Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1995.

## Capitolul 2

### Bibliografie

- [A4] Arnautovic, D.B. și D.M. Skataric: „Suboptimal Design of Hydroturbine Governors”, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 6, no. 3, pp. 438 – 444, 1991.
- [A5] Anderson, B.D.O. și J.B. Moore: Optimal Control. Linear Quadratic Methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [B1] Barbu, V.: Ecuații diferențiale, Editura Junimea, Iași, 1985.
- [C1] Coleman, T., M.A. Branch și A. Grace: MATLAB Optimization Toolbox User's Guide, Mathworks Inc., Natick, MA, 1999.
- [C2] Călin, S., M. Tertișco, I. Dumitrache, C. Popeea și D. Popescu: Optimizări în automatizări industriale, Editura Tehnică, București, 1979.
- [D1] Dumitrache, I., S. Dumitriu, I. Mihu, F. Munteanu, Gh. Muscă și G. Calcev: Automatizări electronice, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.
- [D2] Dragomir, T.-L. și St. Preitl: Elemente de teoria sistemelor și reglaj automat, curs, vol. 1 și 2, Lito I.P.T.V. Timișoara, 1979.
- [D3] DIN 40719, Deutsche Industrie Normen, 1978.
- [D4] Dragomir, T.-L.: Tehnici de optimizare, Curs, vol. 1, Litografia I.P.T.V.T., Timișoara, 1987.
- [D5] Dorato, P., C.-L. Shen și W. Yang: Robust Control Systems Design, China Aviation Industry Press, Beijing, 1996.
- [E1] Eykhoff, P.: Identificarea sistemelor, Editura Tehnică, București, 1977.
- [F1] Franklin, G.F., J.D Powell și M.L. Workman: Digital Control of Dynamic Systems, Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1998.
- [H1] Hoppe, M. și S. Tešnjak: „Modellbildung und Simulation des dynamischen Verhaltens von Wasserkraftanlagen”, Schriftenreihe des Lehrstuhls für Mess- und Regelungstechnik, Abt. Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, Heft 20, Bochum, 1983.
- [I1] Ionescu, Vl.: Teoria sistemelor. Sisteme liniare, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
- [I2] Isermann, R.: Digitale Regelungssysteme, vol. I, II, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [I3] IEEE Working Group on Prime Mover and Energy Models for System Dynamic Performance Studies: „Hydraulic Turbine and Turbine Control Models for System Dynamic Studies”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 7, no. 1, pp. 167 – 178, 1992.
- [I4] Ionescu, Vl. și C. Popeea: Optimizarea sistemelor, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [K1] Kessler, C.: „Über die Vorausberechnung optimal abgestimmter Regelkreise. Teil III. Die optimale Einstellung des Reglers nach dem Betragsoptimum”, Regelungstechnik, vol. 3, pp. 40 – 49, 1955.

## **Capitolul 2**

### **Bibliografie**

- [L1] Landau, I.D.: Identificarea și comanda sistemelor, Editura Tehnică, București, 1997.
- [M1] Matlab. User's Guide, Mathworks Inc., Natick, MA, 1988.
- [M2] Marlin, T.E.: Process Control. Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance, McGraw-Hill, 1995.
- [M3] Middleton, R.H. și G.C. Goodwin: Digital Control and Estimation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
- [M4] Müller, H.-W.: „Algorithmen für die digitale Drehzahlregelung von Wasserturbinen”, Schriftenreihe des Lehrstuhls für Mess- und Regelungstechnik, Abt. Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, Heft 23, Bochum, 1984.
- [N1] Nourescu, Al. și Al. Vasiliu: „Valorificarea energetică a resurselor hidraulice din România”, Energetica, vol. 22, no. 6-7, pp. 224 – 240, 1974.
- [P1] Preitl, St. și R.-E. Precup: Introducere în ingineria reglării automate, Editura Politehnica, Timișoara, 2001.
- [P2] Preitl, St.: Teoria sistemelor și reglaj automat, curs, vol. 1, partea 1 Teoria sistemelor, Lito U.T. Timișoara, 1992.
- [P3] Penescu, C., G. Ionescu, M. Tertișco și E. Ceangă: Identificarea experimentală a proceselor automatizate, Editura Tehnică, București, 1971.
- [P4] Preitl, St., A. Fogarași și R.-E. Precup: Teoria sistemelor și reglaj automat. Ingineria reglării automate, culegere de probleme, vol. 1, partea 1, Lito U.T. Timișoara, 1994.
- [P5] Preitl, St., A. Fogarași și R.-E. Precup: Teoria sistemelor și reglaj automat. Ingineria reglării automate, probleme rezolvate și comentate, vol. 2, Lito U.T. Timișoara, 1994.
- [P6] Preitl, St., R.-E. Precup și A. Porumb: Elemente de reglare automată, curs, vol. 1, Lito U.P. Timișoara, 1996.
- [P7] Precup, R.-E., St. Preitl, St. Kilyeni, St. și B. Luștea: „Fuzzy Speed and Voltage Control of a Hydrogenerator”, Preprints of Fifth Symposium on Application of Multivariable System Techniques – AMST'94, editor: R. Whalley, Mechanical Engineering Publications Limited, London, pp. 151-158, 1994.
- [P8] Preitl, St., R.-E. Precup și A. Porumb: „Behaviour of ARW Structures in the Case of Control Systems with Essential Delays”, Fourth International Symposium on Automatic Control and Computer Science – SACCS'93, Iași, vol. 1, pp. 222-227, 1993.
- [P9] Precup, R.-E. și St. Preitl: Sisteme de reglare avansată, Curs, vol. 1, Litografia U.T.T., Timișoara, 1995.

## **Capitolul 2**

### **Bibliografie**

- [P10] Precup, R.-E.: Soluții de conducere fuzzy a sistemelor cu fază neminimă. Aplicații la conducerea hidrogenatoarelor, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2000.
- [P11] Pivovarov, V.A.: Proiectare și proiectare sistem reglării ghidroturbin, Mașinostroenie, Leningrad, 1973.
- [R1] Rășvan, Vl.: Teoria stabilității, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1987.
- [S1] Stănășilă, O.: Analiză matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [S2] Simulink. Dynamic System Simulator for Use with Matlab, Mathworks Inc., Natick, MA, 1988.
- [S3] Sângeorzan, D.: Regulate adaptiv, Editura Militară, București, 1992.
- [S4] Sima, V. și A. Varga: Practica optimizării asistate de calculator, Editura Tehnică, București, 1986.
- [T1] Terțîșco, M. și P. Stoica: Identificarea și estimarea parametrilor sistemelor, Editura Academiei, București, 1987.
- [T2] Terțîșco, M., P. Stoica și Th. Popescu: Identificarea asistată de calculator a sistemelor, Editura Tehnică, București, 1987.
- [V1] Voicu, M.: Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate, Editura Tehnică, București, 1986.
- [V2] Varga, A. și V. Sima: Ingineria asistată de calculator a sistemelor automate, Editura Tehnică, București, 1997.