12. Hausaufgabe zur Vorlesung:

(H22)

a) $f: [0, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{(x+3)(x+4)}$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{1}{(x+3)(x+4)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{x+3}\,dx - \int \frac{1}{x+4}\,dx = \ln(x+3) - \ln(x+4) \stackrel{+C}{=}$$

$$= \ln\left(\frac{x+3}{x+4}\right) + C$$

$F(x)$ ist Stammfunktion von $f \quad F: [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+3}{x+4}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x+4}\right) =$$

$= \ln 1 = 0 \underset{Th.2}{\Rightarrow} f$ uneigentlich integrierbar auf $[0, \infty)$ und $\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(0) =$

$= -\ln\frac{3}{4}$

b) $f: (0, 3] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + x}$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + x}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{(1 + x^{\frac{2}{3}})}\,dx = \int \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{1 + x^{\frac{2}{3}}}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(1 + x^{\frac{2}{3}})'}{1 + x^{\frac{2}{3}}}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left|(1 + x^{\frac{2}{3}})\right| + C$$

$F: (0, 3] \to \mathbb{R}$ def durch $F(x) = \frac{3\ln(1 + x^{\frac{2}{3}})}{2} + C$ ist eine Stammfunktion von f

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = \frac{3}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(1 + x^{\frac{2}{3}}) = \frac{3}{2}\ln\left(\lim_{x\to 0}(1 + x^{\frac{2}{3}})\right) =$$

$= \frac{3}{2} \cdot \ln 1 = 0 \in \mathbb{R} \to f$ uneigentlich integrierbar auf $(0, 3]$ und

$$I = \int_{0+}^{3} f(x)\,dx = F(3) - \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} F(x) = \frac{3\ln(1+3^{\frac{2}{3}})}{2}$$

das uneigentliche Integrall von f auf $(0, 3]$

c) $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$

$$F(x) = \int \frac{1}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}} \longmapsto \int \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt = \int t^{-\frac{3}{2}}\,dt = \frac{1}{-2\sqrt{t}} + C =$$

$t = \ln x$
$dt = \frac{1}{x}\,dx$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{\ln x}} + C \qquad F : [2, \infty) \to \mathbb{R} \text{ def durch } F(x) = \frac{1}{-2\sqrt{\ln x}} + C$$

ist eine Stammfunkt. von f

$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-2\sqrt{\ln x}} = 0 \Rightarrow f$ ist uneigentlich integrierbar auf $[2; \infty)$ und

$$I = \int_{2}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(2) = +\frac{1}{2\sqrt{\ln 2}}$$

ist das uneigentliche Integrall von f

d) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2}$

$$\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2}\,dx \longmapsto \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2 + 2t + 2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2 + 1}\,dt =$$

$t = x^2$
$dt = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2 + 1) + C$$

$F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ def durch $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2+1) + C$

eine Stammfunktion von f

$\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x^2+1) = \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R} \underset{Th_2}{\Rightarrow} f$ ist uneigentlich integrierbar auf $[0; \infty)$

$$\Longrightarrow I = \int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

das uneigentliche Integral von f auf $[0,\infty)$