Hausafgabe:

3.2 40. (1) $v_1 = [1, -2, 0]$, $v_2 = [2, 1, 1]$, $v_3 = [0, a, 1]$

1) durch Definition der Basis

$$V = [v_1, v_2, v_3]^t \text{ Basis} \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ v_1, v_2, v_3 \text{ liniarunabhängig} \\ \bullet\ \langle V \rangle = R^3 \end{cases}$$

• v_1, v_2, v_3 liniarunabhängig:

wir nehmen an, dass $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

$$S: \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \cdot 0 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 a = 0 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta_S \neq 0$

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a + 4 = 5 - a$$

$\Delta_S \neq 0 \Rightarrow 5 - a \neq 0 \Rightarrow a \neq 5 \Rightarrow a \in R / \{5\}$

für $\forall a \in R/\{5\}$ $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ liniar unabhängig

(a)

• $\langle V \rangle = R^3$:

$\langle V \rangle = R^3 \Leftrightarrow \forall x \in R^3$, $x = [x_1, x_2, x_3] \in R$, und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ und eindeutig sodass $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \cdot 0 = x_1 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 a = x_2 \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eindeutig $\Leftrightarrow \Delta \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 5$ (b)

(a) + (b) $\longrightarrow V = [v_1, v_2, v_3]^t$ Basis

(2) $v_1=[2,1,-1]$, $v_2=[0,3,-1]$ $v_3=[1,a,1]$

$v=[v_1, v_2, v_3]^t$ Basis $\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ v_1, v_2, v_3 \text{ liniarunabhängig} \\ \bullet\ \langle v\rangle = R^3 \end{cases}$

1) durch Def. Basis:

• v_1, v_2, v_3 liniarunabhängig:

wir nehmen an: $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=0 \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0 \Leftrightarrow \Delta s\neq 0$

$$S:\begin{cases} 2\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + a\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6-1+3+2a = 8+2a$$

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0 \Leftrightarrow \Delta s\neq 0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0 \Leftrightarrow 8+2a\neq 0$

$8+2a\neq 0 \Rightarrow a\neq -4$

$\forall a\in R/\{-4\}$ v_1, v_2, v_3 linear unabhängig (a)

• $\langle v\rangle - R^3$:

$\langle v\rangle = R^3 \Leftrightarrow \forall x\in R^3, x=[x_1, x_2, x_3]\in R$ und

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ eindeutig sodass $x=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3$

$$x=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_3 = x_1 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + a\alpha_3 = x_2 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & a \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eindeutig $\Leftrightarrow \Delta\neq 0 \Leftrightarrow a\neq -4$ (b)

(a) + (b) $\longrightarrow v=[v_1, v_2, v_3]^t$ Basis