9. Hausaufgabe zur Vorlesung: Mihăilă Daria 712

(H14)

$$x^k = \left(\left(\frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \right)^{\sqrt{k}}, \left(-\frac{1}{5}\right)^k, \frac{1+2^2+3^3+\ldots+k^k}{k^k} \right)$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \right)^{\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1+\sqrt{k}}{\sqrt{k}} \right)^{-\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty} \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^{\sqrt{k}}}_{e} \Bigg]^{\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{k}}} =$$

$$= e^{\lim_{k\to\infty} \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{k}}} = \frac{1}{e} \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^k$$

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^k$ die Summe der geometrischen Reihe mit

$q = -\frac{1}{5} \in (-1, 1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^k$ konvergent $\Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^k$ (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^k = \frac{-\frac{1}{5}}{}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1+2^2+3^3+\ldots+k^k}{k^k}$$

sei $y_k = k^k$ mit $\lim_{k\to\infty} y_k = \infty$ und $z_k = 1+2^2+3^3+\ldots+k^k$

$$\longrightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{z_{k+1}-z_k}{y_{k+1}-y_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(1+2^2+\ldots+k^k+(k+1)^{k+1})-(1+2^2+3^3+\ldots+k^k)}{(k+1)^{k+1}-k^k} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}-k^k} = 1 \xrightarrow{\text{Stolz-Cesaro}} \lim_{k\to\infty} \frac{z_k}{y_k} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{1+2^2+3^3+\ldots+k^k}{k^k} = 1 \in \mathbb{R} \quad (3)$$

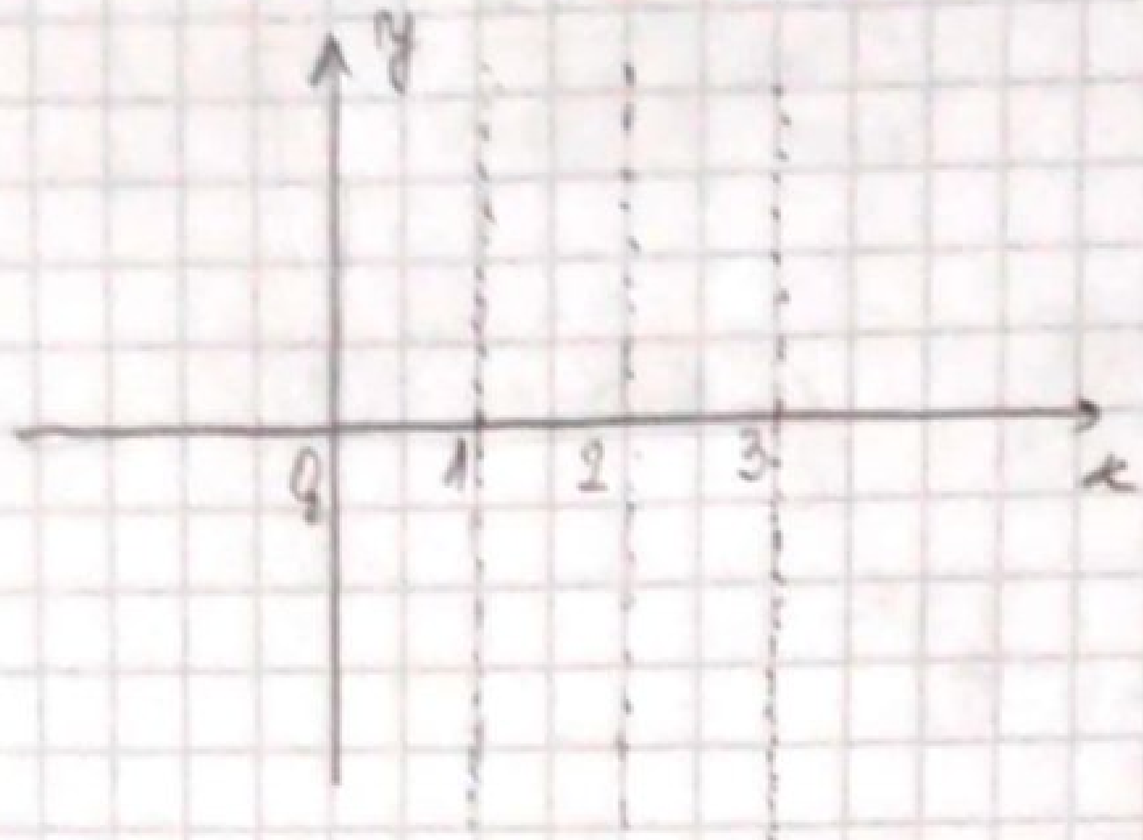
$(1)+(2)+(3) \longrightarrow (x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ konvergent mit

$$\lim_{k\to\infty} x^k = \left(\frac{1}{e}, \quad , 1\right)$$

(H15) a) $A=(-\infty,1) \times \mathbb{R} \Rightarrow A' = [-\infty, 1] \times \mathbb{R}$

b) $A=\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Rightarrow A'=\emptyset$ wegen der Dichtheitseigensch.

c) $A=\mathbb{N} \times \mathbb{R} \Rightarrow A'=\emptyset$ wegen der Dichtheitseigensch



(H16) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{2(x^4+y^4)}, & (x,y) \neq 0_2 \\ 0, & (x,y)=0_2 \end{cases}$

f stetig $\Leftrightarrow$ f stetig in 0_2 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4-y^4}{2(x^4+y^4)} = f(0_2)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4-y^4}{2(x^4+y^4)} =$

Sei $a^k = (0, \frac{1}{k}) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(a^k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{-\frac{1}{k^4}}{2 \cdot \frac{1}{k^4}} = -\frac{1}{2}$

und $b^k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(b^k) =$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \frac{0}{2\frac{1}{k^4}} = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{k\to\infty} a^k + \lim\limits_{k\to\infty} b^k \\ \lim\limits_{k\to\infty} a^k \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ ist nicht stetig in $0_2 \Rightarrow$

$\rightarrow f$ nicht stetig

Mihăilă Daria 712