Mihăilă Daria - 712

8. Hausaufgabe zur Vorlesung:

(H12)

a) $\langle (4t,-4,1),(t,t,3)\rangle = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4t\cdot t+(-4)\cdot t+3=2 \Rightarrow 4t^2-4t+1=0 \Rightarrow (2t-1)^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=\frac{1}{2}$

b)

$t\in\mathbb{R}$ Vektor $x:=(t-1,-3,-1)\in\mathbb{R}^3$

$x\notin B(0_3,|t|) \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}^n \ \|y-x\|\geq|t| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\langle y-x, y-x\rangle}$

$\langle y-x, y-x\rangle = y-t$

(H13) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x}$ $n\in\mathbb{N}$

a) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}=-1\cdot x^{-2}=-x^{-1-1}=-x^{-(1+1)}$

$f''(x)=-1\cdot(-2)\cdot\frac{1}{x^3}=2\cdot x^{-3}=2\cdot x^{-2-1}=2\cdot x^{-(2+1)}=\frac{2}{x^{(2+1)}}$

$f'''(x)=2(-3)\frac{1}{x^4}=\underbrace{2\cdot(-3)}_{<0}\cdot x^{-(3+1)}=\frac{2(-3)}{x^{(3+1)}}$

$f^{(4)}(x)=\underbrace{2\cdot(-3)\cdot(-4)}_{>0}\frac{1}{x^5}=2\cdot(-3)\cdot(-4)\,x^{-(4+1)}=\frac{2\cdot(-3)\cdot(-4)}{x^{(4+1)}}$

Wir nehmen an $P(n) := \begin{cases} -n! \cdot x^{-(n+1)}, & n = 2k+1 \\ +n! \cdot x^{-(n+1)}, & n = 2k \end{cases}$

wahr

Wir beweisen, dass $P(n+1)$ wahr ist

$$P(n+1) = (-1)^{n+1} (n+1)! \cdot x^{-(n+1+1)}$$

I. $n+1 = 2k+1$

$$P(n+1) = (-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot x^{-(n+1+1)} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{n} \cdot n! \cdot (n+1)! \cdot x^{-(n+1)} \cdot x^{-1} =$$

$$= (-1) \cdot (n+1) \cdot x^{-1} \cdot P(n) = \frac{-(n+1)}{x} \cdot P(n)$$

II. $n+1 = 2k$

$$P(n+1) = (n+1)! \cdot x^{-(n+1+1)} =$$

$$= n! \cdot (n+1) \cdot x^{-(n+1)} \cdot x^{-1} = (n+1) x^{-1} \cdot P(n) =$$

$$= \frac{n+1}{x} \cdot P(n) =$$

b) $T_n(x,1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$

I. ist $n = 2m+1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_n(x,1) = \sum_{k=0}^{2m+1} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k =$$

$$= \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{f^{(2m+1)}(1)}{(2m+1)!}(x-1)^{2m+1} =$$

$$= -1! \cdot (x-1) + \frac{-(3)!}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{-(2m+1)!}{(2m+1)!}(x-1)^{2m+1} =$$

$$= -\left[(x-1)^{2m+1} + \dots + (x-1)^3 + (x-1)\right]$$

Mihăilă Daria 712

II. ist $n=2m \Rightarrow$

$$\to T_n(x,1) \Rightarrow \sum_{k=0}^{2m} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} = \frac{f(1)}{0!} + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(2m)}(1)}{2m!}(x-1)^{2m} =$$

$$= 1 + \frac{2!}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{2m!}{2m!}(x-1)^{2m} =$$

$$= 1 + (x-1)^2 + (x-1)^4 + \dots + (x-1)^{2m}$$

Sei $x \in R$ nach TH7 Vorl $\Rightarrow \exists c$ zw. x u. 1

sodass $R_n(x,1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-0)^{n+1} =$

$$= \frac{\frac{1}{c^{n+1}}}{(n+1)!} \cdot (x+1)^{n+1} = \frac{1}{c^{n+1} \cdot (n+1)!} (x-0)^{n+1}$$

Mihăilă Daria - 712