Задача 1

Необходимо переместить центр СК в точку $A(a, b)$, затем повернуть плоскость на угол φ и вернуть центр СК в первоначальный.

Параллельный перенос $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$

Поворот $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & +\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Итого $M = T^{-1} \cdot R_\varphi \cdot T$

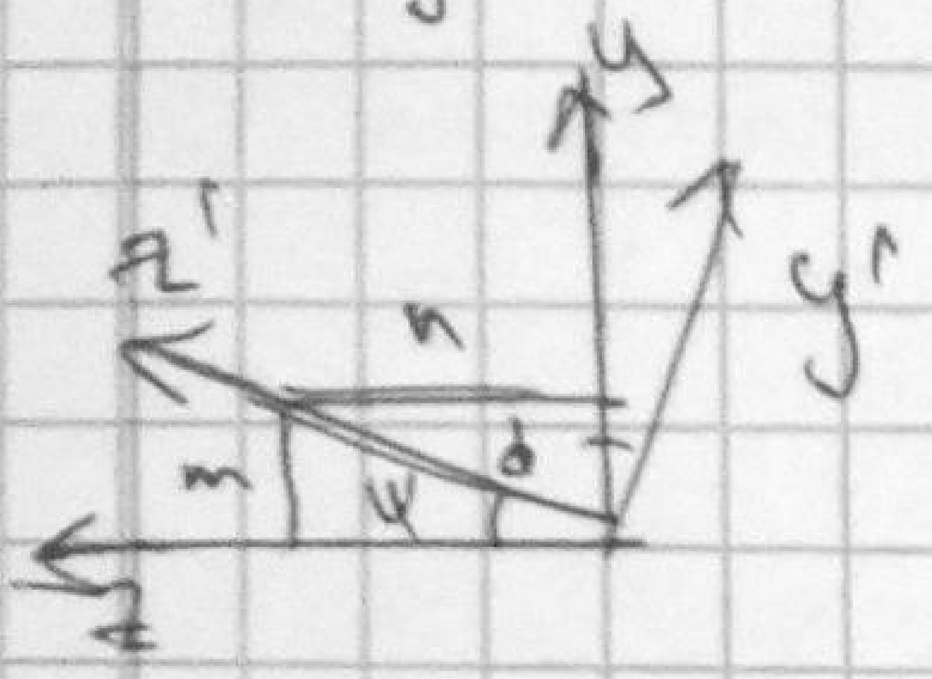
Задача 3

Порядок действий: ~~изменением~~ переводим в новую СК, где Oz совпадает с (l, m, n), а центр - с точкой $A(a, b, c)$, в новой СК поворачиваем на угол φ и возвращаемся в старую СК.

$M = Q^{-1} R_\varphi Q.$

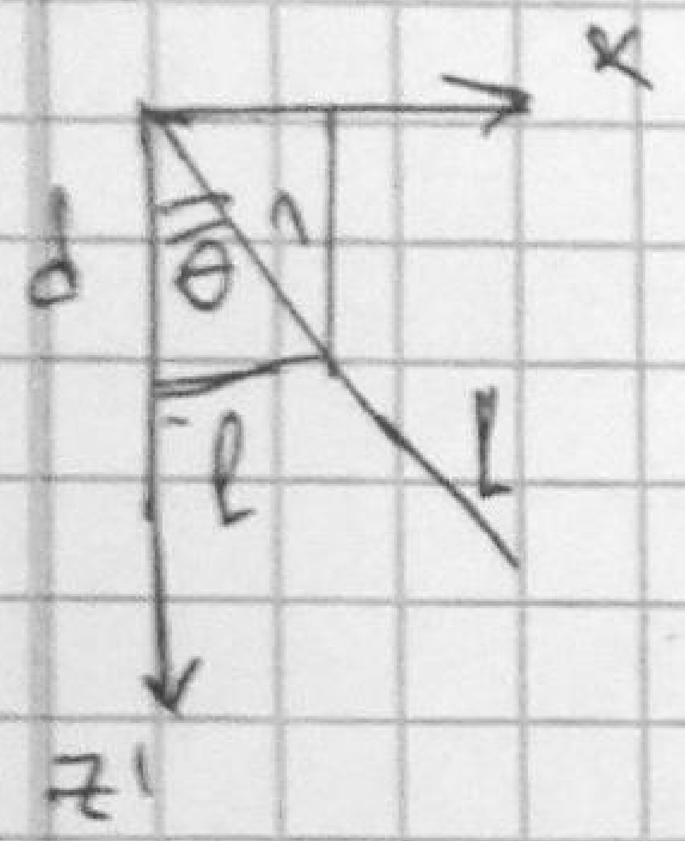
По т. Эйлера достаточно 2 поворотов, чтобы совместить 2 СК с одинаковым центром. Итого сперва поворачиваем вокруг x на угол ψ, затем вокруг y на угол θ, затем смещаем

Центр координат в A. Итого $Q = R_x(-\varphi) \cdot$
$\cdot R_y(\theta) \cdot T(a, b, c)$



поворот на φ по часовой стр. ⇒
⇒ взят со знаком "−"

$\sqrt{m^2+n^2} = d$, $\sin\varphi = \frac{m}{d}$, $\cos\varphi = \frac{n}{d}$



поворот на θ против часовой ⇒
⇒ взят со знаком "+"

$\sin\theta = l$, $\cos\varphi = d$

Итого: $M = Q^{-1} \cdot R_\varphi \cdot Q$, $Q = R_x(-\varphi) \cdot R_y(\theta) \cdot T(a, b, c)$

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(-\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/d & -m/d & 0 \\ 0 & m/d & n/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} d & 0 & -l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 8

Исходя из следствия из т. 2, необходимо вычислить v и φ такие, что $\cos\frac{\varphi}{2} + v\sin\frac{\varphi}{2} = q_2 q_1$, где $q_i = \cos\frac{\varphi_i}{2} + v_i \sin\frac{\varphi_i}{2}$, $i = 1, 2$

$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $v_1 = i$, $v_2 = j$; $j \circ i = -k$

Тогда $q_2 q_1 = \cos^2 \frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + j \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} - k\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(i + j - k) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{i+j-k}{\sqrt{3}}$

$\left\| \frac{i+j-k}{\sqrt{3}} \right\| = \sqrt{\frac{1+1+1}{3}} = 1.$

$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

Итого $v = \frac{i+j-k}{\sqrt{3}}$ и напр. вектор оси вращения $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ => поворот на 120°