Michał Anczykowski Daria Grzelak Jan Ratajczyk

Projekt zespołowy — opracowanie zadania z prawdopodobieństwa

10 lutego 2024

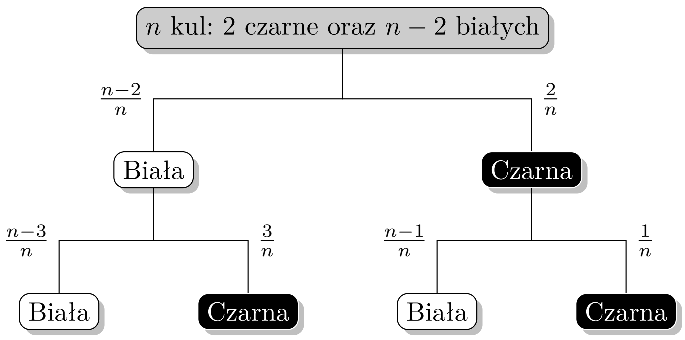
Celem niniejszego projektu jest opracowanie jednego ze starych zadań z matury rozszerzonej z matematyki. Jest to zadanie 11 z matury z 2 czerwca 2023 roku w formule 2015, a jego treść jest następująca:

> W pudełku umieszczono n kul ($n \geqslant 3$), wśród których dokładnie 2 kule są czarne, a pozostałe kule są białe. Z tego pudełka losujemy jedną kulę i odkładamy ją na bok. Jeżeli wylosowana kula jest biała, to do pudełka wrzucamy kulę czarną, a gdy wylosowana kula jest czarna, to do pudełka wrzucamy kulę białą. Po przeprowadzonej w ten sposób zmianie zawartości prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z tego pudełka jest równe $\frac{37}{50}$. Oblicz n[1].

1. Rozwiązanie dla ścisłej treści zadania

Ze względu na trudności związane z parametryzacją zadania, które opiszemy poniżej, najpierw przedstawimy rozwiązanie konkretnie dla treści tego zadania.

Na początek należy rozrysować drzewko przedstawiające wszystkie możliwości wylosowania kul.



Następnie należy sprawdzić, jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania w ostatecznym rozrachunku kuli białej. Aby to zrobić, należy pomnożyć prawdopodobieństwa na jednej gałęzi, a następnie dodać wszystkie z gałęzi.

$$\frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n^2-3n+4}{n^2} \tag{1}$$

Następnie należy rozwiązać równanie:

$$\frac{n^2-3n+4}{n^2} = \frac{37}{50} \tag{2}$$

Możemy je rozwiązać przy pomocy biblioteki Pythona Sympy. Zwrócone rozwiązania to: 1.53846153846154, 10.0

Następnie należy sprawdzić, które z rozwiązań są liczbami naturalnymi.

[1] Pełen arkusz można znaleźć na stronie Arkusze.pl.

Po sprawdzeniu przez Pythona wiadomo, że liczby naturalne stanowiące rozwiązanie równania to: 10.

Dla tego przykładu 10 to jedyna liczba naturalna stanowiąca rozwiązanie zadania, zatem $n = 10$.

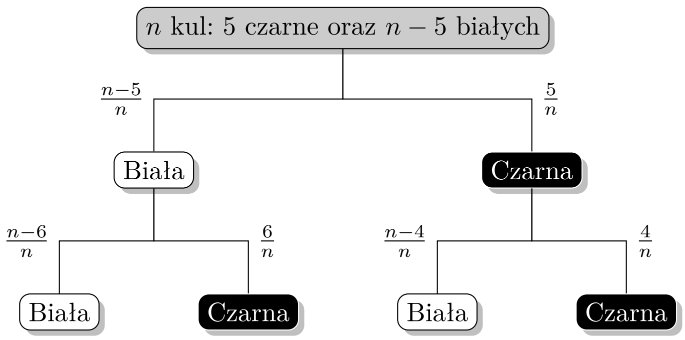
2. Parametryzacja zadania

Parametryzując treść zadania, umożliwimy użytkownikowi dodanie wybranej ilości kul czarnych oraz wybranego prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej. Liczba kul czarnych musi być liczbą naturalną równą minimum 1 (inaczej program automatycznie ustawi tę liczbę jako 2), a prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej musi być liczbą wymierną pomiędzy 0 i 1 (inaczej program automatycznie ustawi tę liczbę jako $\frac{37}{50}$).

Ustawione zmienne prezentują się następująco:

— liczba kul czarnych: 5,
— prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej: $\frac{1}{2}$

Następnie, tak jak wcześniej, rysujemy drzewko, tylko że z odpowiednią parametryzacją związaną z ilością czarnych kul:



Następnie należy ułożyć równanie, tak jak wcześniej:

$$\frac{n-5}{n} \cdot \frac{n-6}{n} + \frac{5}{n} \cdot \frac{n-4}{n} = \frac{1}{2} \tag{3}$$

Ponownie skorzystamy z biblioteki Sympy do rozwiązania równania.

Istnieją rzeczywiste rozwiązania równania i są to: 2.0, 10.0. Sprawdźmy, które z nich są liczbami naturalnymi nie mniejszymi od liczby kul czarnych. Jest jedno rozwiązanie spełniające warunki: 10. Tyle jest kul w pudełku.

3. Przedstawienie prawdopodobieństw, dla których zadanie ma rozwiązanie

Dla podanej wcześniej ilości kul czarnych można również wygenerować przykładowe prawdopodobieństwo, dla którego zadanie ma rozwiązanie. Wygenerujemy dane dla dziesięciu kolejnych n.

Przykłady w tym momencie można mnożyć, jednak to wystarczająco pokazuje koncepcję stojącą za rozwiązaniem zadania.

Ilość kul	**Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej**
5	$\frac{1}{5}$
6	$\frac{5}{18}$
7	$\frac{17}{49}$
8	$\frac{13}{32}$
9	$\frac{37}{81}$
10	$\frac{1}{2}$
11	$\frac{65}{121}$
12	$\frac{41}{72}$
13	$\frac{101}{169}$
14	$\frac{61}{98}$