

Projekt zespołowy — opracowanie zadania z prawdopodobieństwa

10 lutego 2024

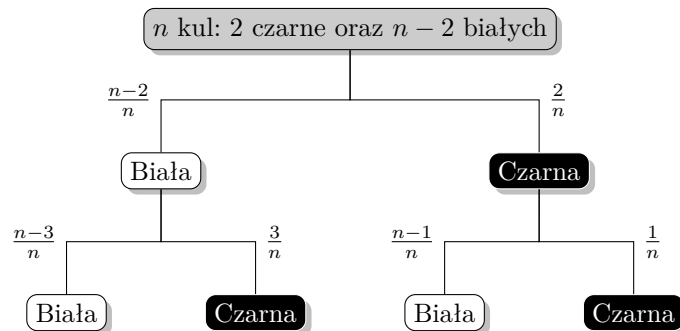
Celem niniejszego projektu jest opracowanie jednego ze starych zadań z matury rozszerzonej z matematyki. Jest to zadanie 11 z matury z 2 czerwca 2023 roku w formule 2015, a jego treść jest następująca:

W pudełku umieszczono n kul ($n \geq 3$), wśród których dokładnie 2 kule są czarne, a pozostałe kule są białe. Z tego pudełka losujemy jedną kulę i odkładamy ją na bok. Jeżeli wylosowana kula jest biała, to do pudełka wrzucamy kulę czarną, a gdy wylosowana kula jest czarna, to do pudełka wrzucamy kulę białą. Po przeprowadzonej w ten sposób zmianie zawartości prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z tego pudełka jest równe $\frac{37}{50}$. Oblicz n ¹.

1. Rozwiązanie dla ścisłej treści zadania

Ze względu na trudności związane z parametryzacją zadania, które opisujemy poniżej, najpierw przedstawimy rozwiązanie konkretnie dla treści tego zadania.

Na początek należy rozrysować drzewko przedstawiające wszystkie możliwości wylosowania kul.



Następnie należy sprawdzić, jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania w ostatecznym rozrachunku kuli białej. Aby to zrobić, należy pomnożyć prawdopodobieństwa na jednej gałęzi, a następnie dodać wszystkie z gałęzi.

$$\frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - 3n + 4}{n^2} \quad (1)$$

Następnie należy rozwiązać równanie:

$$\frac{n^2 - 3n + 4}{n^2} = \frac{37}{50} \quad (2)$$

Możemy je rozwiązać przy pomocy biblioteki Pythona Sympy. Zwrócone rozwiązania to: 1.53846153846154, 10.0

Następnie należy sprawdzić, które z rozwiązań są liczbami naturalnymi.

¹ Pelen arkusz można znaleźć na stronie Arkusze.pl.

Po sprawdzeniu przez Pythona wiadomo, że liczby naturalne stanowiące rozwiązanie równania to: 10.

Dla tego przykładu 10 to jedyna liczba naturalna stanowiąca rozwiązanie zadania, zatem $n = 10$.

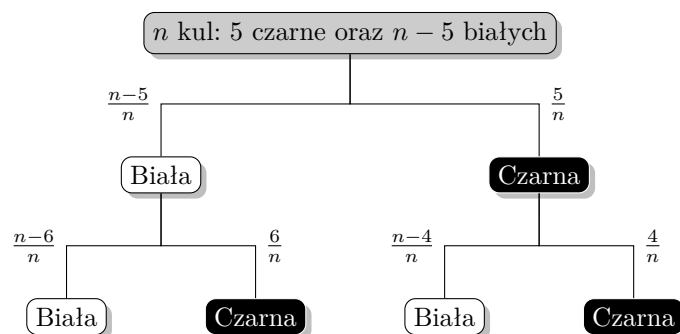
2. Parametryzacja zadania – wariant 1

W pierwszym wariantcie parametryzacji, bardziej zgodnym z treścią zadania, umożliwimy użytkownikowi dodanie wybranej ilości kul czarnych oraz wybranego prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej. Liczba kul czarnych musi być liczbą naturalną równą minimum 1 (inaczej program automatycznie ustawi tę liczbę jako 2), a prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej musi być liczbą wymierną pomiędzy 0 i 1 (inaczej program automatycznie ustawi tę liczbę jako $\frac{37}{50}$).

Ustawione zmienne prezentują się następująco:

- liczba kul czarnych: 5,
- prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej: $\frac{1}{2}$

Następnie, tak jak wcześniej, rysujemy drzewko, tylko że z odpowiednią parametryzacją związaną z ilością czarnych kul:



Następnie należy ułożyć równanie, tak jak wcześniej:

$$\frac{n-5}{n} \cdot \frac{n-6}{n} + \frac{5}{n} \cdot \frac{n-4}{n} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Ponownie skorzystamy z biblioteki Sympy do rozwiązania równania.

Istnieją rzeczywiste rozwiązania równania i są to: 2.0, 10.0. Sprawdźmy, które z nich są liczbami naturalnymi nie mniejszymi od liczby kul czarnych. Jest jedno rozwiązanie spełniające warunki: 10. Tyle jest kul w pudełku.