Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа по вычислительной математике №3

Численное интегрирование

Преподаватель: Малышева Татьяна Алексеевна

Выполнила: Голованова Дарья Владимировна

Группа: P3222

Санкт-Петербург,
2022г

Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Вычислительная реализация задачи

Метод прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f\left(\frac{x_0}{2}\right)+f\left(\frac{x_1}{2}\right)+\dots f\left(\frac{x_7}{2}\right)\right)$$

$$h=\frac{b-a}{n}=0,25$$

$$= 0,25(f(0,125)+f(0,375)+f(0,625)+$$
$$+f(0,875)+f(1,125)+f(1,375)+$$
$$+f(1,625)+f(1,875))=$$
$$=0,25(-6,3203+(-5.2421)-4,2265-$$
$$-2,8984-0,8828+2,1953+6.7109+$$
$$+13,039)=0,25\cdot 2,3751\approx 0,5937$$

Ф-ла Ньютона - Котеса:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx -7\cdot\frac{989\cdot 2}{28350}+17\,\frac{989\cdot 2}{28350}-$$
$$-5,75\cdot\frac{5888\cdot 2}{28350}+9,625\cdot\frac{5888\cdot 2}{28350}-$$
$$-4,75\left(-\frac{928\cdot 2}{28356}\right)+4,25\left(\frac{-928\cdot 2}{28350}\right)-$$
$$-3,625\left(\frac{10496\cdot 2}{28350}\right)+0,5\left(\frac{10496\cdot 2}{28850}\right)-$$
$$-2\left(-\frac{4540\cdot 2}{28350}\right)=\frac{2}{3}$$

Вычислить точно:

а) $\int_0^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)\,dx =$

$= x^4 - \frac{5x^3}{3} + 3x^2 - 7x \Big|_0^2 = 16 - \frac{5\cdot 8}{3} + 12 - 14 = \frac{2}{3}$

Ответ: 2/3

Метод Симпсона:

$a = 0,\ b = 2,\ n = 8,\ h = 0{,}25$

$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2h}{6}(y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) +$

$+ 2(y_2 + y_4 + y_6))$

$\int_0^2 \approx \frac{2\cdot 0{,}25}{6}(-7 + 17 + 4\cdot 0{,}75 + 2(-2{,}5)) =$

$= \frac{0{,}25}{3}\cdot 8 \approx 0{,}66667$

Метод трапеций:

$h = 0{,}25,\ n = 8$

$I_{трап} = \int_0^2 f(x)\,dx = h\left(\frac{y_0 + y_8}{2} + \sum_{i=1}^{7} y_i\right) =$

$= 0{,}25\cdot\left(\frac{-7 + 17}{2} + (-5{,}75) - 4{,}75 -\right.$

$\left. - 3{,}625 - 2 + 0{,}5 + 4{,}25 + 9{,}625)\right) =$

$= 0{,}25 \cdot 3{,}25 = 0{,}8125$

Программная реализация задачи

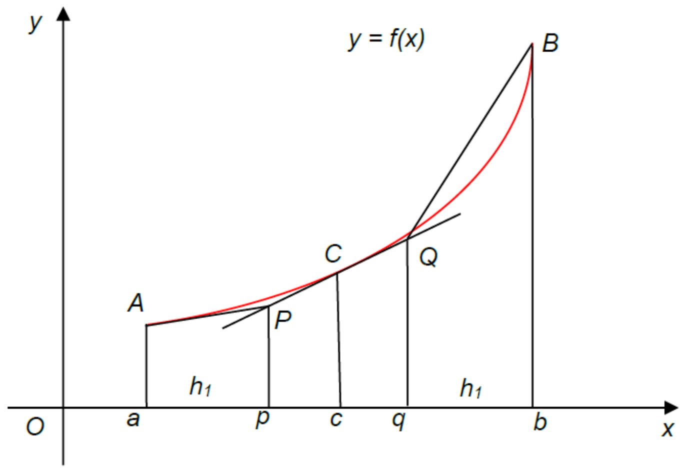
Описание использованного метода

Метод Симпсона:

Суть метода заключается в том, что на определенном промежутке дуга некоторой параболы в общем случае теснее прилегает кривой y = f(x), чем хорда, соединяющая концы дуги этой кривой (как в методе трапеций).

В связи с этим значения площадей соответствующих элементарных трапеций, ограниченных сверху дугами парабол, являются более близкими к значениям площадей соответствующих частичных криволинейных трапеций, ограниченных сверху дугой кривой y = f(x), чем значения площадей соответствующих прямолинейных трапеций.

Рис1. Геометрическая интерпретация метода парабол.



Рассмотрим функцию *y = f(x)* такую, что на отрезке [a; b] она положительна и непрерывна. Найдем площадь криволинейной трапеции aABb (Рис1.).

Разобьём отрезок [*a, b*] точкой *c = (a+b)/2* пополам и в точке *C*(*c*, *f(c)*) и проведем касательную к графику *y = f(x).*

После этого разделим [*a, b*] точками *p* и *q* на три равные части и проведем через них прямые *x* = *p* и *x* = *q*.

Пусть *P* и *Q* – точки пересечения этих прямых с касательной. Соединив *A* с *P* и *B* с *Q*, получим три трапеции *aAPp, pPQq, qQBb*. Тогда площадь трапеции *aABb* можно приближенно посчитать по следующей формуле

$$I \approx \frac{aA + pP}{2} \cdot h_1 + \frac{pP + qQ}{2} \cdot h_1 + \frac{qQ + bB}{2} \cdot h_1 \text{, где } \quad h_1 = \frac{b-a}{3}.$$

Откуда получаем

$$I \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(aA + 2\left(pP + qQ\right) + bB\right)$$

Заметим, что *aA* = *f(a), bB* = *f(b), а pP* + *qQ* = 2*f(c)* (как средняя линия трапеции), в итоге получаем формулу Симпсона:

$$I \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4f(c) + f(b)\right)$$

Общий вид формулы Симпсона:

Если кратко, то суть метода заключается в том, что мы делим подынтегральную функцию на n(четное) равных отрезков, на каждом из которых аппроксимируем значение этой функции параболой, затем можем вычислить искомый интеграл по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{k=1,2}^{n-1}\left(f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + f(x_{k+1})\right)$$

При этом мы вычисляем значение интеграла по формуле для разбиения на n и 2n отрезков, после чего вычисляем погрешность по формуле Рунге.

$$\Delta_{2n} \approx \theta|I_{2n} - I_n|,$$

где для метода Симпсона θ = 1/15

При этом если найденная погрешность оказывается больше заданной точности, то увеличиваем *n* в два раза и снова вычисляем интегралы. Затем повторяем увеличение *n* до тех пор погрешность не окажется меньше нужной точности.

Метод прямоугольников:

Пусть есть функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, тогда можем вычислить значение интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Воспользуемся заменой определенного интеграла интегральной суммой. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей $[x_{i-1}; x_i]$ где i ∈ $[1; n]$ и выбираем точку со значением ς_i. Существует определенный тип интегральных сумм при бесконечном уменьшении длины такой части. Это выражается формулой λ = $\max\limits_{i=1,2,\dots,n}(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$, тогда получаем, что любая из таких интегральных сумм – приближенное значение интеграла $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$

Суть метода прямоугольников заключается в том, что приближенное значение считается интегральной суммой.

В качестве точек ς_i могут выбираться левые, правые или средние точки отрезков, то получаем формулы левых, правых и средних прямоугольников.

Обозначаем $f(x_i) = y_i, f(a) = y_0,\ f(b) = y_n,\ h = \frac{b-a}{n}$

Метод левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\cdot\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}.$$

Метод правых прямоугольников:

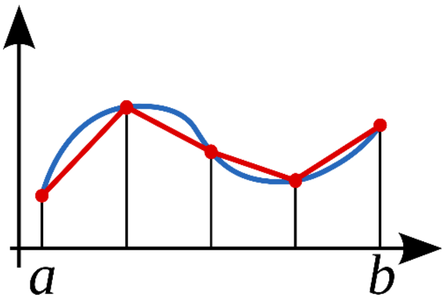
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Метод средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2}).$$

Метод трапеций:

Метод трапеций – метод численного интегрирования функции от одной переменной. Суть данного метода заключается в замене на каждом элементарном отрезке подынтегральной функции на линейную функцию. Площадь под графиком функции аппроксимируется прямоугольными трапециями.



Если отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ является элементарным и не подвергается дальнейшему разбиению, значение интеграла можно найти по формуле:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h + E(f), \qquad E(f) - \text{остаточный член}$$

$$|E(f)| \le \frac{h^3}{12} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f''(x)|$$

Это простое применение формулы для площади трапеции – произведение полусуммы оснований, которыми в данном случае являются значения функции в крайних точках отрезка, на высоту (длину отрезка интегрирования). Погрешность аппроксимации можно оценить через максимум второй производной

Тогда формула для интегрирования на всё отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1} + y_i)h + R(f), \quad R(f) - \text{остаточный член}$$

$$|R(f)| \le \ |E(f)| * n \le \frac{nh^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

При этом мы вычисляем значение интеграла по формуле для разбиения на n и $2n$ отрезков, после чего вычисляем погрешность по формуле Рунге.

$$\Delta_{2n} \approx \ \theta |I_{2n} - \ I_n\ |, \qquad \theta = \frac{1}{2^k - 1}, \text{где } k - \text{порядок точности квадратурной формулы}$$

$$\Delta_{2n} = \frac{|I_{2n} - \ I_n\ |}{3} \text{ для метода трапеций}$$

При этом если найденная погрешность оказывается больше заданной точности, то увеличиваем n в два раза и снова вычисляем интегралы. Затем повторяем увеличение n до тех пор погрешность не окажется меньше нужной точности.

Выводы

Выполнив данную лабораторную работу, я пришла к выводу, что все приведенные в вариантах методы интегрирования схожи между собой в том, что всегда производится разбиение функции на *n* отрезков, а затем интерполирование на каждом из них.

Рассмотрю подробнее все три метода, чтобы это доказать.

1. Метод прямоугольников:

1.1 Метод левых прямоугольников

1.2 Метод средних прямоугольников

1.3 Метод правых прямоугольников

Метод заключается в том, что мы разбиваем фигуру под графиком на прямоугольники и считаем интеграл как сумму площадей этих прямоугольников с учетом значения функции в левой точке (метод левых прямоугольников) в средней точке (метод средних прямоугольников) и в правой точке (метод правых прямоугольников). В силу того, что в методе средних прямоугольников симметрия не нарушается, то погрешность у данного метода будет меньше, чем у левых и правых прямоугольников.

2. Метод трапеций:

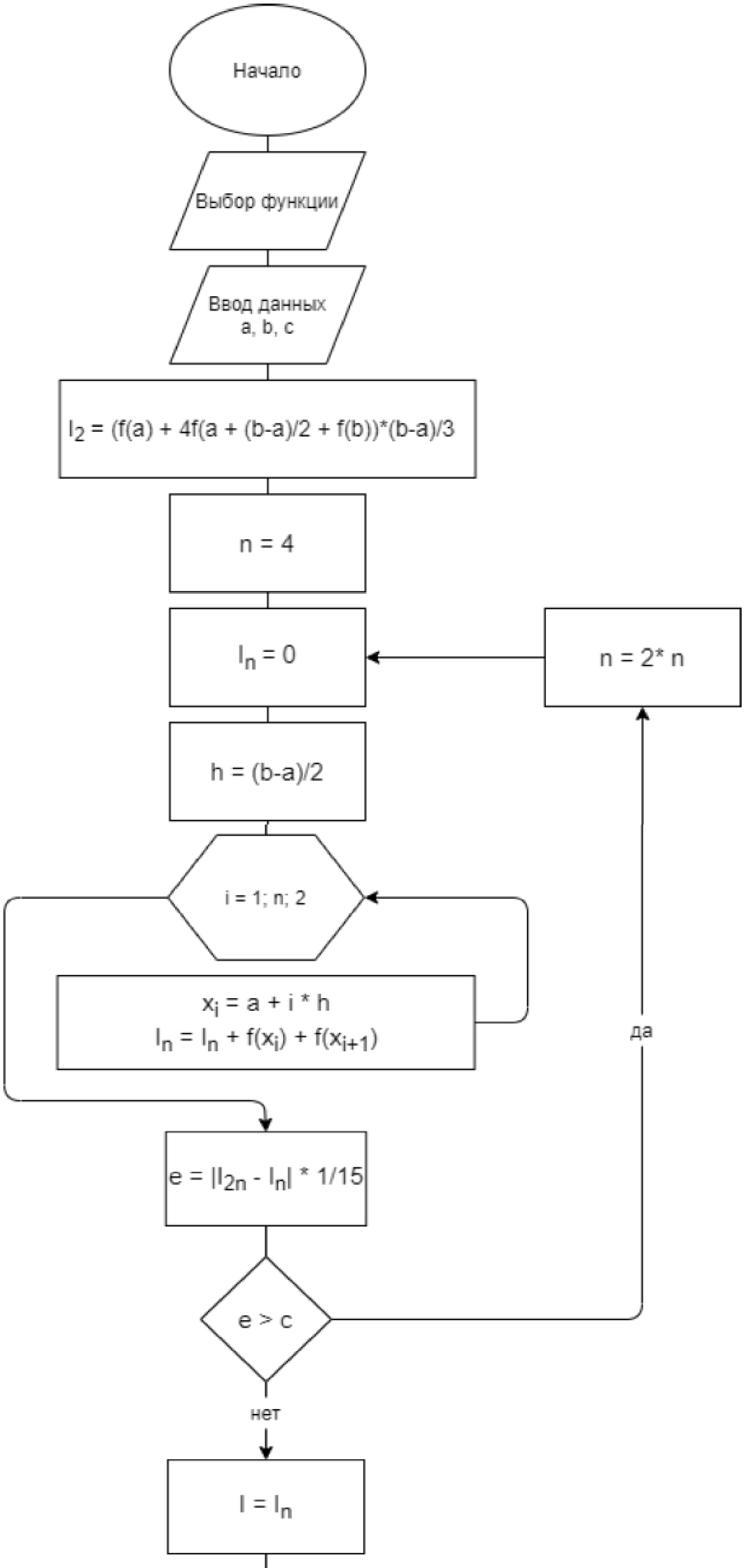
В данном методе мы аппроксимируем функцию к прямой и считаем интеграл как площадь многоугольника, образованного получившимися трапециями. Данный метод менее точный чем средние прямоугольники так как значение в средней точке точнее, чем полусумма значений на концах.

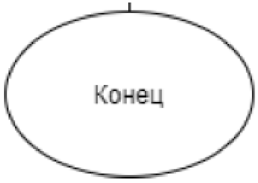
3. Метод Симпсона:

Метод Симпсона является самым точным из всех представленных методов, так как мы аппроксимируем функцию параболой (которая зачастую находится гораздо ближе к графику (в сравнении с прямой)).

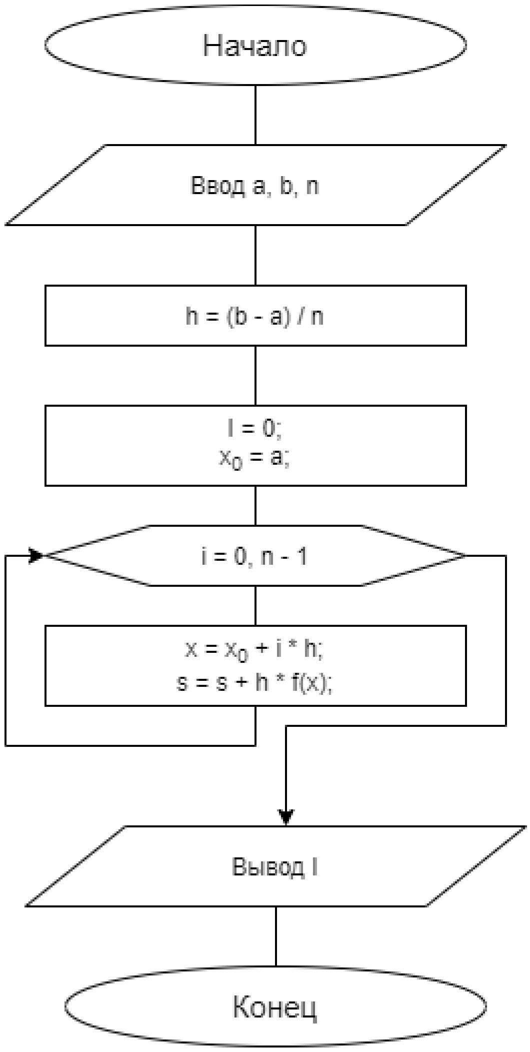
Блок-схемы

Метод Симпсона:

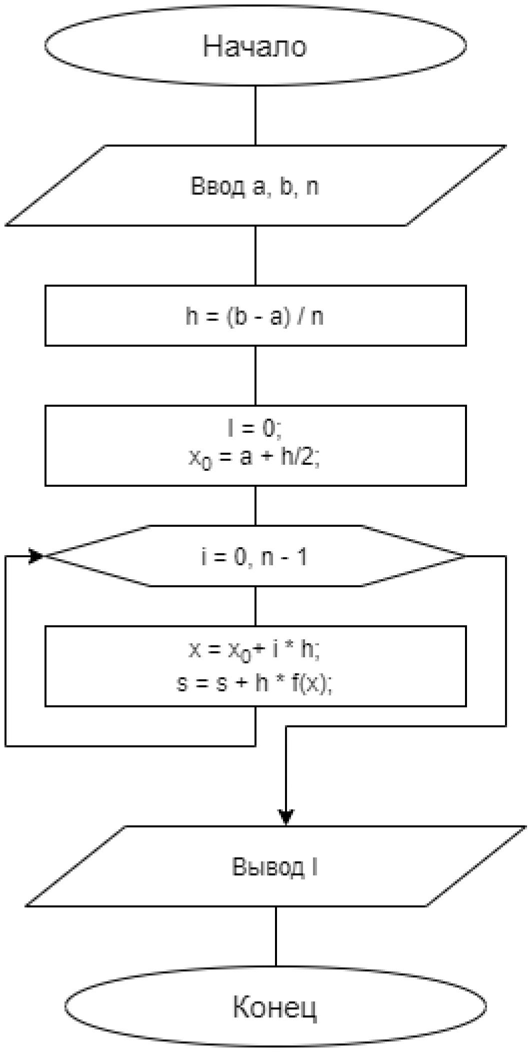




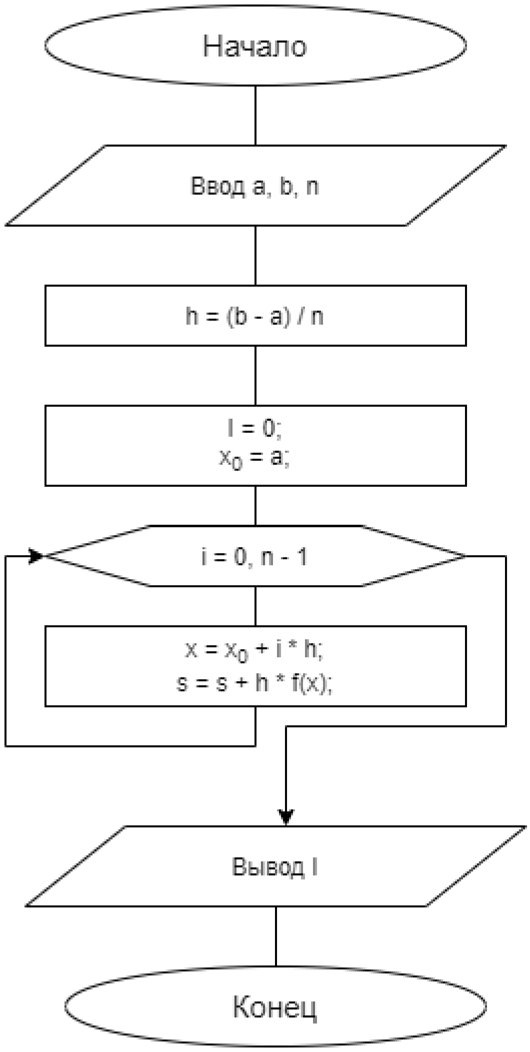
Метод левых прямоугольников:



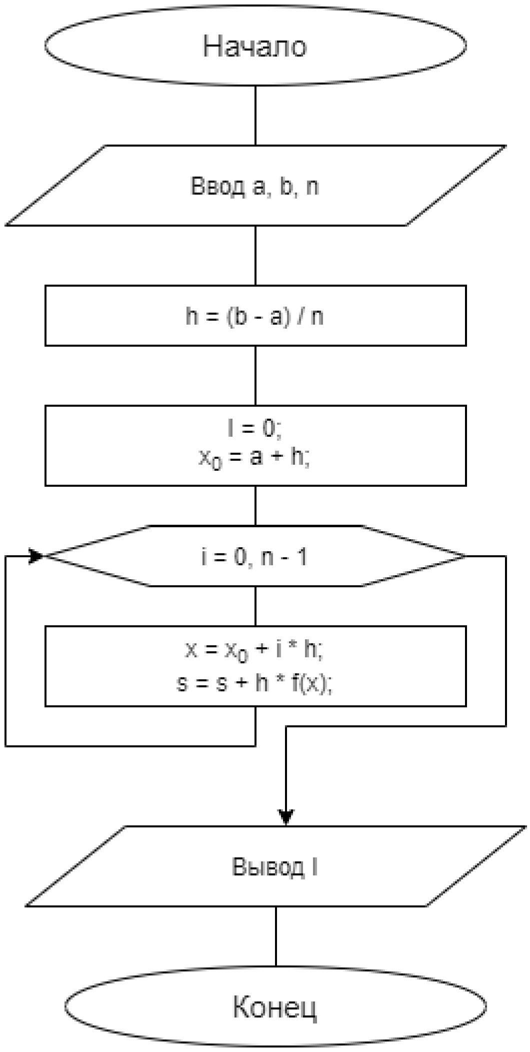
Метод средних прямоугольников:



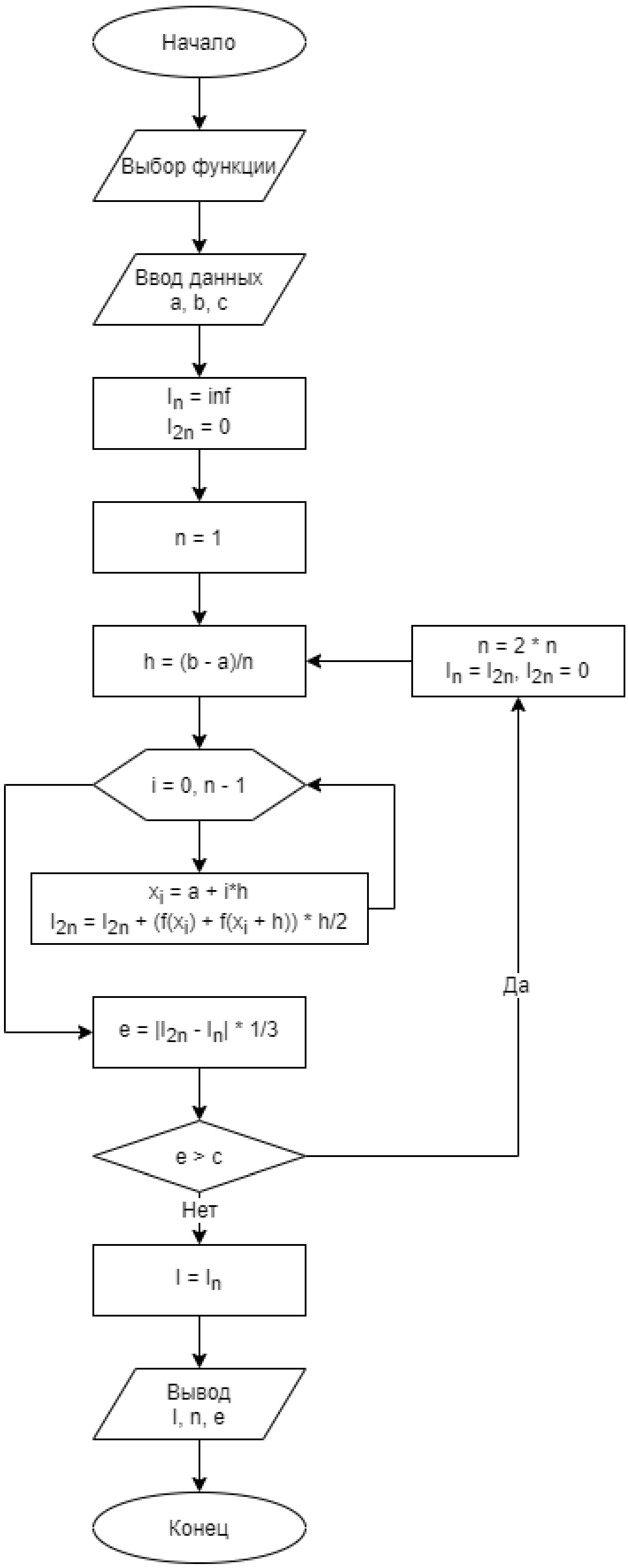
Метод левых прямоугольников:



Метод правых прямоугольников:



Метод трапеций:



Листинг численных методов:

Проверка точности методом Руне

```
def count_abstract_integral_rune_check(result_formula, a, b, e):
    num_of_intervals = 4
    h = interval_width(a, b, num_of_intervals)

    result = result_formula(h)
    prev_result = float('inf')
    while(abs(result - prev_result) > e):
        num_of_intervals *= 2
        h = interval_width(a, b, num_of_intervals)
        prev_result = result
        result = result_formula(h)
    return result, num_of_intervals


def interval_width(a, b, num_of_intervals):
    return abs(b - a) / num_of_intervals
```

Метод Прямоугольников

```
def count_integral_start(f, a, b, e):
    result_start = lambda h : sum([f(i) for i in np.arange(a, b, h)]) * h
    return count_abstract_integral_rune_check(result_start, a, b, e * 3)

def count_integral_middle(f, a, b, e):
    result_middle = lambda h : sum([f(i) for i in np.arange(a + h/2, b, h)]) * h
    return count_abstract_integral_rune_check(result_middle, a, b, e * 3)

def count_integral_stop(f, a, b, e):
    result_stop = lambda h : sum([f(i) for i in np.arange(a + h, b, h)]) * h
    return count_abstract_integral_rune_check(result_stop, a, b, e * 3)
```

Метод Трапеции

```
result_formula = lambda h : (sum([f(i) for i in np.arange(a + h, b, h)]) + (f(a) +
f(b)) / 2)* h
    integral, num_of_intervals =
count_abstract_integral_rune_check(result_formula, a, b, e * 3)
```

Метод Симпсона

```
def calculate_integral_simpson_method(f, a, b, e):
    result_formula = lambda h: simpson_formula(h, a, b, f)
    result, num_of_intervals =  count_abstract_integral_rune_check(result_formula,
a, b, e * 15)

    print(f"simpson integral={result}, while the number of intervals
was={num_of_intervals}")

def simpson_formula(h, a, b, f):
    num_of_intervals = abs(b - a) / h
    odd_sum = count_odd_sum(f, a, b, num_of_intervals)
    even_sum = count_even_sum(f, a, b, num_of_intervals)
    return h/3 * (f(a) + 4 * odd_sum + 2 * even_sum + f(b))

def count_even_sum(f, a, b, num_of_intervals):
```

```
    h = count_interval_width(a, b, num_of_intervals)
    return sum([f(i) for i in np.arange(a + h, b, 2*h)])

def count_odd_sum(f, a, b, num_of_intervals):
    h = count_interval_width(a, b, num_of_intervals)
    return sum([f(i) for i in np.arange(a + 2*h, b, 2*h)])

def count_interval_width(a, b, num_of_intervals):
    return abs(b-a) / num_of_intervals
```

Примеры и результаты работы программы

Пример 1

```
Choose one of five equations:
1 -------- sin(x) (defalut)
2 -------- -x^3 +  7*x^2 - 3*x - 2
3 -------- x^3 - 2
4 -------- 2x^3 - 5x^2 - 3x + 21
1
Enter the interval start float value
1
Enter the interval stop float value (notice, it has to be greater then start)
3
Enter accuracy:
0.01
rectangles start integral=1.5391428988956193, with num of intervals=16
rectangles middle integral=1.5342872217542525, with num of intervals=8
rectangles stop integral=1.5148172804681945, with num of intervals=64
trapeze integral=1.5223162022843377, where num of ineral was=8
simpson integral=1.5303282607178545, while the number of intervals was=8
```