S⓮MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 144–144 (2015) УДК 519.165
DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx MSC 05A17

О КРАТЧАЙШИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В РЕШЕТКЕ РАЗБИЕНИЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В.А. БАРАНСКИЙ AND Т.А. СЕНЬЧОНОК

Abstract. A partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ is a sequence of non-negative integers (the parts) in non-increasing order $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ with a finite number of non-zero elements. A *weight* of λ is the sum of parts, denoted by $\mathrm{sum}(\lambda)$. We define two types of elementary transformations of the partition lattice NPL. The first one is a box transference, the second one is a box destroying. Note that a partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ dominates a partition $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$, denoted by $\lambda \geq \mu$, iff μ is obtained from λ by a finite sequence of elementary transformations.

Let λ and μ be two partitions such that $\lambda \geq \mu$. The *height* of λ over μ is the number of transformations in a shortest sequence of elementary transformations which transforms λ to μ, denoted by $\mathrm{height}(\lambda, \mu)$. The aim is to prove that

$$\mathrm{height}(\lambda, \mu) = \sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^{\infty} (\lambda_j - \mu_j) = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j - \mu_j|.$$

where $C = \mathrm{sum}(\lambda) - \mathrm{sum}(\mu)$. Also we found an algorithm that builds some useful shortest sequences of elementary transformations from λ to μ.

Keywords: integer partition, lattice, Ferrer's diagram.

Под графами мы будем понимать обыкновенные графы, т. е. графы без петель и кратных рёбер. Для графов будем придерживаться терминологии и обозначений из [1].

Разбиением [2] называется последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ целых неотрицательных чисел такая, что λ содержит лишь конечное число ненулевых

Baransky V.A., Senchonok T.A., On the shortest sequences of elementary transformations in the partition lattice.

Поступила 10 августа 2018 г., опубликована 30 сентября 2018 г.

компонент, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ и $\Sigma_{i=1}^{\infty}\lambda_i = m$, где m — натуральное число. Говорят, что λ является разбиением числа m, а m называют *весом* разбиения λ, также пишут $m = \mathrm{sum}(\lambda)$. Натуральное число $l = l(\lambda)$ такое, что $\lambda_l > 0$ и $\lambda_{l+1} = \lambda_{l+2} = \cdots = 0$, называют *длиной* разбиения λ. Для удобства разбиение λ будем иногда записывать в виде конечной последовательности следующих типов:

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{t+1}) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{t+2}) = \ldots,$$

где $t = l(\lambda)$, т. е. будем опускать нули, начиная с некоторой компоненты, но при этом будем помнить, что рассматривается бесконечная последовательность.

Через NPL будем обозначать множество всех разбиений всех натуральных чисел, а через $NPL(m)$ — множество всех разбиений заданного натурального числа m. На множествах NPL и $NPL(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, будем рассматривать известное *отношение доминирования* $\trianglelefteq$ [3], полагая $\lambda \trianglelefteq \mu$, если

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_1 & \leq & \mu_1, \\
\lambda_1 + \lambda_2 & \leq & \mu_1 + \mu_2, \\
 & \cdots & \\
\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i & \leq & \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i, \\
 & \cdots &
\end{array}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$.

Разбиение удобно изображать в виде его диаграммы Ферре, которую можно представлять себе как конечный набор квадратных *блоков* одинакового размера, составляющих “ступенчатую” фигуру. Например, на рис. 1 представлена диаграмма Ферре разбиения $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ длины 8 и веса 26.

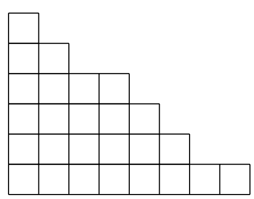

Рис. 1

Определим *элементарные преобразования* разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ (см. [3]–[5]).

Пусть для натуральных чисел $i, j \in \{1, \ldots, t\}$ таких, что $i < j \leq t = l(\lambda) + 1$, выполняются условия:

1) $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$,
2) $\lambda_{j-1} \geq \lambda_j + 1$,
3) $\lambda_i \geq 2 + \lambda_j$.

Будем говорить, что разбиение $\mu = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i - 1, \ldots, \lambda_j + 1, \ldots, \lambda_t)$ получено из разбиения $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_t)$ *элементарным преобразованием первого типа* (или *перекидыванием блока*, см. рис. 2). Отметим, что μ отличается от λ точно на двух компонентах с номерами i и j. Для диаграммы Ферре разбиения λ такое преобразование означает перемещение верхнего блока из

i-го столбца вправо на верх j-го столбца. Условия 1) и 2) гарантируют, что после такого перемещения снова получится разбиение. Очевидно, элементарные преобразования первого типа сохраняют вес разбиения.

Пусть для некоторого числа i такого, что $1 \le i \le l(\lambda)$ выполняется условие $\lambda_i - 1 \ge \lambda_{i+1}$. Преобразование, заменяющее разбиение λ на разбиение $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots)$, будем называть *элементарным преобразованием второго типа* (или *удалением блока*, см. рис. 2). Очевидно, удаление блока уменьшает вес разбиения на 1.

Если разбиение μ получено из разбиения λ с помощью элементарного преобразования первого или второго типа, то кратко будем писать $\lambda \to \mu$.

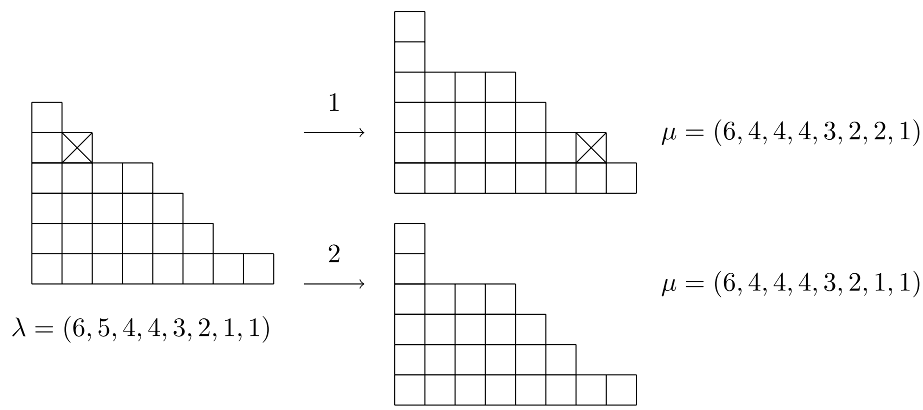

Рис. 2

На множествах NPL и $NPL(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, определим отношение $\ge$, полагая $\lambda \ge \mu$, если разбиение μ можно получить из разбиения λ с помощью последовательного применения конечного числа (возможно нулевого) элементарных преобразований указанных типов. Ясно, что в случае множеств $NPL(m)$ можно использовать только элементарные преобразования первого типа, которые не меняют веса разбиений. В [4] и [5] показано, что отношения $\le$ и $\trianglelefteq$ совпадают на каждом из рассматриваемых множеств.

Отметим, что множества $NPL(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, и NPL (см. [6] и [3]–[5]) являются решётками относительно $\le$. В [5] показано, что решётка NPL является дизъюнктным объединением решёток $NPL(m)$, где m пробегает $\mathbb{N}$, отвечающим некоторой естественной транзитивной системе вложений. В [4] и [5] указаны алгоритмы вычисления пересечения $\wedge$ и объединения $\vee$ в указанных решётках.

Пусть λ и μ — два произвольных разбиения и $\lambda \ge \mu$, т. е. λ и μ сравнимы. *Высотой* $\mathrm{height}(\lambda, \mu)$ *разбиения* λ *над разбиением* μ будем называть число преобразований в кратчайшей последовательности элементарных преобразований (любых типов), преобразующей λ в μ.

Основная цель данной работы состоит в построении алгоритма (см. Алгоритм 1), который для двух произвольных разбиений λ и μ таких, что $\lambda \ge \mu$, находит некоторые кратчайшие последовательности элементарных преобразований от λ до μ, удобные для применения. Кроме того, мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda \geq \mu$ *в* NPL *и* $C = \mathrm{sum}(\lambda) - \mathrm{sum}(\mu)$. *Тогда*

$$\mathrm{height}(\lambda,\mu) = \sum_{j=1,\lambda_j>\mu_j}^{\infty} (\lambda_j - \mu_j) = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j - \mu_j|.$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_t)$ и $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_t)$ — два произвольных разбиения, где t — максимальная из длин λ и μ.

Заметим, что если $\lambda \geq \mu$, то $\mathrm{sum}(\lambda) \geq \mathrm{sum}(\mu)$ и число $C = \mathrm{sum}(\lambda) - \mathrm{sum}(\mu)$ является целым и неотрицательным.

Условие $\lambda \geq \mu$ по определению задаётся системой неравенств

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geq \mu_1 + \cdots + \mu_k \ \ (k = 1,\ldots,t).$$

Эту систему неравенств перепишем в следующей эквивалентной форме:

$$\sum_{j=1,\lambda_j>\mu_j}^{k} (\lambda_j - \mu_j) \geq \sum_{j=1,\lambda_j<\mu_j}^{k} (\mu_j - \lambda_j) \ \ (k = 1,\ldots,t). \tag{1}$$

(Здесь и в дальнейшем в случае, когда условию суммирования не удовлетворяет ни один индекс, будем считать, что соответствующая сумма равна 0.)

Условие $\lambda \geq \mu$ можно задать также следующей системой:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_t = \mu_1 + \cdots + \mu_t + C, \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} \geq \mu_1 + \cdots + \mu_{k-1} \ \ (k = 2,\ldots,t), \end{cases}$$

где C — некоторое неотрицательное целое число. Поскольку для любого $k = 2,\ldots,t$ выполняется

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} + \lambda_k + \cdots + \lambda_t = \mu_1 + \cdots + \mu_{k-1} + \mu_k + \cdots + \mu_t + C,$$

последняя из рассмотренных систем эквивалентна системе:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_t = \mu_1 + \cdots + \mu_t + C, \\ \lambda_k + \cdots + \lambda_t \leq \mu_k + \cdots + \mu_t + C \ \ (k = 2,\ldots,t). \end{cases}$$

Полученную систему перепишем в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1,\lambda_j>\mu_j}^{t} (\lambda_j - \mu_j) = \sum_{j=1,\lambda_j<\mu_j}^{t} (\mu_j - \lambda_j) + C, & (2) \\ \displaystyle\sum_{j=k,\lambda_j>\mu_j}^{t} (\lambda_j - \mu_j) \leq \sum_{j=k,\lambda_j<\mu_j}^{t} (\mu_j - \lambda_j) + C \ \ (k = 2,\ldots,t). & (3) \end{cases}$$

Для $j = 1,2,\ldots,t$ будем говорить, что j-компонента разбиения λ имеет *j-горку* (или просто *горку*) *относительно разбиения* μ, если $\lambda_j > \mu_j$. В случае, когда выполняется условие $\lambda_j > \mu_j$, будем считать, что верхние $\lambda_j - \mu_j$ блоков j-столбца диаграммы Ферре разбиения λ образуют j-горку *высоты* $\lambda_j - \mu_j$.

Для $j = 1,2,\ldots,t$ будем говорить, что j-компонента разбиения λ имеет *j-ямку* (или просто *ямку*) *относительно разбиения* μ, если $\lambda_j < \mu_j$. В случае, когда выполняется условие $\lambda_j < \mu_j$, будем считать, что над j-столбцом диаграммы Ферре разбиения λ имеется j-ямка *глубины* $\mu_j - \lambda_j$.

Отметим, что условие $\lambda_j = \mu_j$ равносильно тому, что в j-столбце разбиения λ нет j-горки и нет j-ямки.

Условия (1) можно переформулировать в следующем виде: для любого $k = 1, \dots, t$ сумма высот всех j-горок, таких, что $1 \leq j \leq k$, больше или равна суммы глубин всех j-ямок таких, что $1 \leq j \leq k$.

Условия (2) и (3) можно переформулировать соответственно в следующем виде:

- сумма высот всех горок равна сумме числа C и суммы глубин всех ямок,
- для любого $k = 2, \dots, t$ сумма высот всех j-горок таких, что $j \geq k$, не превосходит суммы числа C и суммы глубин всех j-ямок таких, что $j \geq k$,

где C — некоторое целое неотрицательное число.

Предположим теперь, что $\lambda \geq \mu$.

Пусть λ имеет i-ямку для некоторого $i \in \{1, \dots, t\}$ относительно разбиения μ. Тогда в силу условий (1) существует ближайшая к ней слева (по диаграмме Ферре) i'-горка такая, что $1 \leq i' < i$. Тогда между i'-горкой и i-ямкой нет горок (т. е. s-горок таких, что $i' < s < i$).

Заметим, что $\lambda_{i'} > \mu_{i'} \geq \mu_{i'+1} \geq \lambda_{i'+1}$, т. е. $\lambda_{i'} > \lambda_{i'+1}$ (будем говорить, что в i'-столбце диаграммы Ферре разбиения λ имеется *уступ*). Кроме того, $\lambda_{i'} > \mu_{i'} \geq \mu_i > \lambda_i$, поэтому $\lambda_{i'} \geq 2 + \lambda_i$.

Будем говорить, что i-ямка *допустима*, если $\lambda_{i-1} > \lambda_i$. Очевидно, что ближайшая справа к i'-горке ямка допустима. Действительно, пусть такая ямка расположена в k-столбце. Тогда $\lambda_{k-1} \geq \mu_{k-1} \geq \mu_k > \lambda_k$, т. е. $\lambda_{k-1} > \lambda_k$.

Таким образом, если имеется хотя бы одна ямка, то имеется и допустимая ямка.

Пусть рассматриваемая i-ямка допустима. Тогда к разбиению λ можно применить (i', i)-*перекидывание* блока, т. е. перекидывание верхнего блока i'-столбца на верх i-столбца. Полученное таким перекидыванием разбиение обозначим через λ'. Указанное преобразование будем называть *перекидыванием верхнего блока в допустимую ямку из ближайшей к ней слева горки.*

Отметим, что для полученного разбиения λ' сохраняются условия (1), т. е. $\lambda' \geq \mu$. Действительно, если $k < i'$, то соответствующее k условие из (1) для λ совпадает с соответствующим k условием для λ'; в случае $k \geq i$ из левой и правой части соответствующего k условия (1) вычитается по 1. Предположим теперь, что $i' \leq k < i$. Тогда

$$\sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^{k} (\lambda_j - \mu_j) = \sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^{i} (\lambda_j - \mu_j) \geq \sum_{j=1, \lambda_j < \mu_j}^{i} (\mu_j - \lambda_j) > \sum_{j=1, \lambda_j < \mu_j}^{k} (\mu_j - \lambda_j),$$

т. е. соответствующее числу k условие из (1) является для разбиения λ строгим неравенством. при переходе к разбиению λ' левая часть неравенства уменьшается на 1, а правая — не изменяется, поэтому при переходе к λ' неравенство сохранится, но может стать нестрогим.

Таким образом, если λ' получено из λ с помощью перекидывания верхнего блока в допустимую ямку из ближайшей к ней слева горки, то $\lambda' \geq \mu$.

Рассмотрим теперь последнюю горку разбиения λ относительно разбиения μ, т. е. i-горку с наибольшим значением индекса i. Тогда $\lambda_i > \mu_i \geq \mu_{i+1} \geq \lambda_{i+1}$, т. е. в i-столбце имеется уступ. Поэтому при $C > 0$ к λ можно применить элементарное преобразование второго типа, состоящее в удалении верхнего блока из i-столбца диаграммы Ферре разбиения λ. Будем называть такое преобразование *удалением верхнего блока из последнего горки*. Ясно, что для полученного разбиения λ' выполняется $\mathrm{sum}(\lambda') - \mathrm{sum}(\mu) = C - 1$ и для λ' сохраняются условия вида (2) и (3), т. е. $\lambda' \geq \mu$.

Таким образом, если разбиение λ' получено из разбиения λ с помощью удаления верхнего блока из последней горки, то $\lambda' \geq \mu$.

Следующий алгоритм строит некоторые кратчайшие последовательности длины $\mathrm{height}(\lambda, \mu)$ элементарных преобразований от λ до μ в случае, когда $\lambda \geq \mu$.

Алгоритм 1. Пусть $\lambda \geq \mu$ и $C = \mathrm{sum}(\lambda) - \mathrm{sum}(\mu)$.

1) Полагаем $\lambda' = \lambda$ и $C' = C$.
2) К текущим значениям разбиения λ' и числа C' применяем любое из следующих возможных элементарных преобразований:
   - если λ' имеет ямку, то заменяем λ' на разбиение, полученное из λ' с помощью перекидывания верхнего блока в некоторую допустимую ямку из ближайшей к ней слева горки;
   - если $C' > 0$, то заменяем C' на $C' - 1$, а разбиение λ' — на разбиение, полученное из λ' с помощью удаления верхнего блока из последней горки.
3) Выполняем 2) до тех пор, пока это возможно. Процесс обязательно завершится. Выполненные преобразования составят кратчайшую последовательность элементарных преобразований от λ до μ.

Доказательство корректности алгоритма. В силу сделанных ранее замечаний справедливы следующие утверждения:

- если у текущего разбиения λ' имеется ямка, то имеется и допустимая ямка;
- при каждом выполнении (2) сумма высот всех горок уменьшается точно на 1;
- для каждого очередного значения разбиения λ' выполняется $\lambda' \geq \mu$.

В силу этих утверждений и условия (2) на шаге выполнения 2) с номером

$$\sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^{\infty} (\lambda_j - \mu_j) \tag{4}$$

у полученного разбиения λ' не будет горок, не будет ямок и будет выполняться равенство $C' = 0$, поэтому будет выполняться равенство $\lambda' = \mu$. Отметим, что число (4) равно сумме высот всех горок разбиения λ и оно же в силу условия (2) равно сумме числа C и суммы глубин всех ямок разбиения λ.

С другой стороны, если некоторая последовательность элементарных преобразований преобразует λ в μ, то каждый блок, содержащийся в какой-либо из горок, обязательно должен быть перемещён (перекинут или удалён). Поэтому число элементарных преобразований в такой последовательности не меньше суммы высот всех горок. □

Докажем теперь Теорему 1. Поскольку

$$\sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^{\infty} (\lambda_j - \mu_j) = C + \sum_{j=1, \lambda_j < \mu_j}^{\infty} (\mu_j - \lambda_j),$$

мы получаем

$$
\begin{aligned}
\operatorname{height}(\lambda,\mu) &= \sum_{j=1,\lambda_j>\mu_j}^{\infty}(\lambda_j-\mu_j) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1,\lambda_j>\mu_j}^{\infty}(\lambda_j-\mu_j) + C + \sum_{j=1,\lambda_j<\mu_j}^{\infty}(\mu_j-\lambda_j)\Big) = \\
&= \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j-\mu_j|.
\end{aligned}
$$

□

<u>Пример.</u> Пусть $\lambda = (14, 9, 7, 6, 1, 1)$ и $\mu = (10, 10, 6, 3, 3, 1, 1, 1)$.

Докажем сначала, что $\lambda \geq \mu$. Действительно, применяя алгоритм вычисления пересечения $\lambda \wedge \mu$ [5], получаем

$$
\begin{array}{r|cccccccccccccccccccc}
 & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 4} & & {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 4} & & {\scriptstyle 7} & & {\scriptstyle 5} & & {\scriptstyle 5} & & {\scriptstyle 4} & & {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 3} & \\
\lambda = & & 14 & & 9 & & 7 & & 6 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
\mu = & & 10 & & 10 & & 6 & & 3 & & 3 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & \\
 & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & \\
\hline
\lambda \wedge \mu = & & 10 & & 10 & & 6 & & 3 & & 3 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & = \mu,
\end{array}
$$

т. е. $\lambda \wedge \mu = \mu$ и, следовательно, $\lambda \geq \mu$. Мы имеем $\operatorname{sum}(\lambda) = 38$, $\operatorname{sum}(\mu) = 35$ и $C = 3$.

Рассмотрим покомпонентную разность λ и μ:

$$
\begin{array}{rccccccccc}
\lambda = & 14 & 9 & 7 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\mu = & 10 & 10 & 6 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
\lambda - \mu = & +4 & -1 & +1 & +3 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{array}
$$

Мы имеем здесь три горки, четыре ямки и

$$
\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j-\mu_j| = 4+1+1+3+2+1+1 = 13.
$$

Следовательно, $\operatorname{height}(\lambda,\mu) = \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 13 = 8$, т. е. равно сумме высот всех горок.

Применим теперь Алгоритм 1 и построим последовательность из 8 элементарных преобразований от λ до μ.

Отметим, что удаление любого из трёх блоков можно совершить на любом из шагов выполнения алгоритма.

1) 4-удаление блока (4-горка является последней горкой).

$$
\begin{array}{rccccccccc}
\lambda' = & 14 & 9 & 7 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0^{\;2} \\
\mu = & 10 & 10 & 6 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
\lambda' - \mu = & +4 & -1 & +1 & +2 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{array}
$$

2) (4, 7)-перекидывание блока (из 4-горки блок перекидывается в допустимую 7-ямку; отметим, что 8-ямка не является допустимой).

$$
\begin{array}{ccccccccc}
14 & 9 & 7 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0^{\;2} \\
10 & 10 & 6 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
+4 & -1 & +1 & +1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}
$$

3) (1, 2)-перекидывание блока.

$$\begin{array}{ccccccccc}
13 & 10 & 7 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0^{\,2} \\
10 & 10 & 6 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
+3 & 0 & +1 & +1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}$$

4) (4, 5)-перекидывание блока.

$$\begin{array}{ccccccccc}
13 & 10 & 7 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0^{\,2} \\
10 & 10 & 6 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
+3 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}$$

5) 3-удаление блока.

$$\begin{array}{ccccccccc}
13 & 10 & 6 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0^{\,1} \\
10 & 10 & 6 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
+3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}$$

6) (1, 8)-перекидывание блока (8-ямка теперь допустима).

$$\begin{array}{ccccccccc}
12 & 10 & 6 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0^{\,1} \\
10 & 10 & 6 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
+2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

7) (1, 5)-перекидывание блока.

$$\begin{array}{ccccccccc}
11 & 10 & 6 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0^{\,1} \\
10 & 10 & 6 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

8) 1-удаление блока.

$$\begin{array}{ccccccccc}
10 & 10 & 6 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0^{\,0} \\
10 & 10 & 6 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Заметим, что с помощью Алгоритма 1 можно получить не каждую кратчайшую последовательность элементарных преобразований от λ до μ. Действительно, сначала совершим 1-удаление блока в λ. Получим разбиение λ', которое больше μ:

$$\begin{array}{rccccccccccccccccccccl}
 & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 2} & & {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 6} & & {\scriptstyle 4} & & {\scriptstyle 4} & & {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 2} & & {\scriptstyle 2} & \\
\lambda' = & & 13 & & 9 & & 7 & & 6 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
\mu = & & 10 & & 10 & & 6 & & 3 & & 3 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & \\
 & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 0} & \\
\hline
\lambda' \wedge \mu = & & 10 & & 10 & & 6 & & 3 & & 3 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & = \mu.
\end{array}$$

Применяя далее Алгоритм 1 к разбиению λ', мы получим кратчайшую последовательность элементарных преобразований от λ через λ' до μ. Ясно, что полученная последовательность элементарных преобразований не может быть получена с помощью Алгоритма 1. $\square$

References

[1] M.O. Asanov, V.A. Baransky, V.V. Rasin, *Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy*, Lan', SPb, 2010. [In Russian]

[2] G.E. Andrews, *The theory of partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976. MR1634067

[3] V.A. Baransky, T.A. Koroleva, *The lattice of partitions of a positive integer*, Doklady Math., **77(1)** (2008), 72–75. MR2479430

[4] V.A. Baransky, T.A. Koroleva, T.A. Senchonok, *O reshetke razbieniy natural'nogo chisla*, Trudy Instituta matematiki i mehaniki UrO PAN, **21(3)** (2015), 30–36. [In Russian] MR3468086

[5] V.A. Baransky, T.A. Koroleva, T.A. Senchonok, *On the partition lattice of all integers*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 744–753. MR3553165

[6] T. Brylawski, *The lattice of integer partitions*, Discrete Math, **6** (1973), 210–219. MR0325405

Vitaly Anatolievich Baransky
Ural Federal University,
pr. Lenina, 51,
620083, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: vitaly.baransky@urfu.ru

Tatiana Alexandrovna Senchonok
Ural Federal University,
pr. Lenina, 51,
620083, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: tatiana.senchonok@urfu.ru