

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

**ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ
КОМПЛЕКСЫ»**

Выполнил
студент группы 3630102/70201

Крупкина Дарья

Проверил
к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2020

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Конкретизация задачи и теория	2
3	Реализация	3
4	Результаты	3
4.1	Переопределенная ИСЛАУ	3
4.2	Недоопределенная ИСЛАУ	4
5	Приложения	6

Список иллюстраций

1	Допусковое множество решений для переопределенной ИСЛАУ	3
2	График распознающего функционала $Tol(x_1, x_2)$	4
3	Допусковое множество решений для недоопределенной ИСЛАУ	5
4	Допусковое множество в проекции	5

1 Постановка задачи

Требуется решить недоопределённую интервальную систему линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) с матрицей 3×2 и переопределённую ИСЛАУ с матрицей 2×3 . Используемые матрицы должны совпадать с точностью до транспонирования.

Для случая 3×2 построить график распознающего функционала $Tol(x_1, x_2)$.

Для случая 2×3 проанализируйте решение. Постройте 3-мерный образ допустимого множества или его проекции на плоскости $(x_i \text{ О } x_j)$.

2 Конкретизация задачи и теория

В качестве исходной матрицы СЛАУ была выбрана точечная матрица A и вектор x :

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 18 & 19 \\ 23 & 12 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Таким образом, правая часть СЛАУ была определена значениями A и x :

$$b = A \cdot x = \begin{pmatrix} 9.5 \\ 12.8 \\ 13.9 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Далее, положим величины радиусов элементов $radA$, $radx$ равными:

$$radA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, radx = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) имеем переопределённую ИСЛАУ 2×3 :

$$\begin{pmatrix} [11, 15] & [13, 17] \\ [15, 21] & [17, 21] \\ [21, 25] & [10, 14] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [7, 12] \\ [10.8, 14.8] \\ [11.9, 15.9] \end{pmatrix} \quad (4)$$

Для исследования разрешимости этих интервальной ИСЛАУ использовался распознающий функционал $Tol(x)$:

$$Tol(x) = \min_{1 \leq i \leq n} (radb_i - |midb_i - \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j|) \quad (5)$$

Допусковое множество решений ИСЛАУ при этом задаётся условием $Tol(x) \geq 0$. Таким образом для нахождения допустимого множества и проверки разрешимости системы удобно найти точку x , максимизирующую распознающий функционал, и рассмотреть её окрестность.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Matlab и Python. Использованы библиотеки IntLab для интервальной арифметики, IntLinIncR2 и IntLinIncR3 для отображения допускового множества решений.

Также привлечена библиотека tolsolvty на Python для визуализации (5) и одноименная функция для нахождения решения в Matlab. Исходный код лабораторной работы приведён в приложении в виде ссылки на репозиторий GitHub.

4 Результаты

4.1 Переопределенная ИСЛАУ

С помощью программы tolsolvty были найдены максимум функционала распознающего функционала $maxTol$ и значение аргумента, в которой он достигался ($argmaxTol$).

$$maxTol = 0.1437; argmaxTol = \begin{pmatrix} 0.4604 \\ 0.2375 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Формула для оценки меры вариабельности ive :

$$ive(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \sqrt{n}(\min_{\mathbf{A} \in \mathbf{A}} cond \mathbf{A}) \cdot \|\mathbf{argmaxTol}\| \cdot \frac{maxTol}{\|\mathbf{b}\|} \quad (7)$$

По формуле (7) получено: $ive = 0.1902$.

Получен график множества решений:

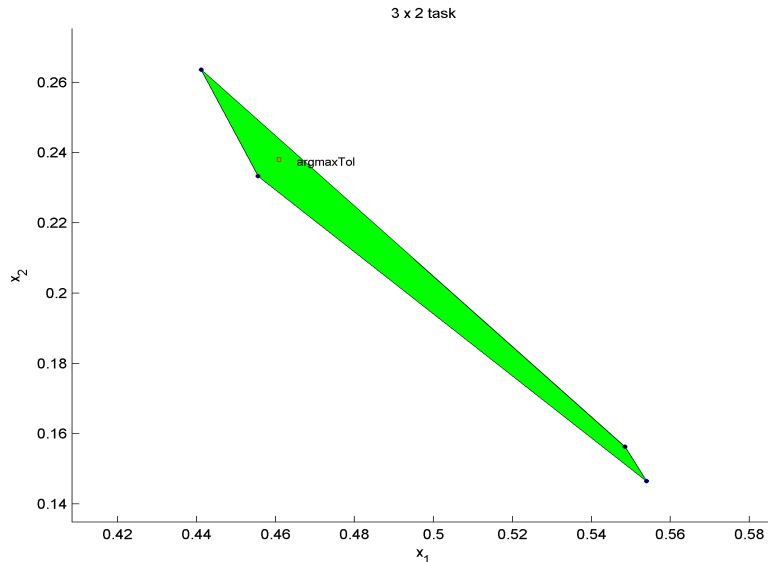


Рис. 1: Допусковое множество решений для переопределенной ИСЛАУ

Построен распознающий функционал по формуле (5):

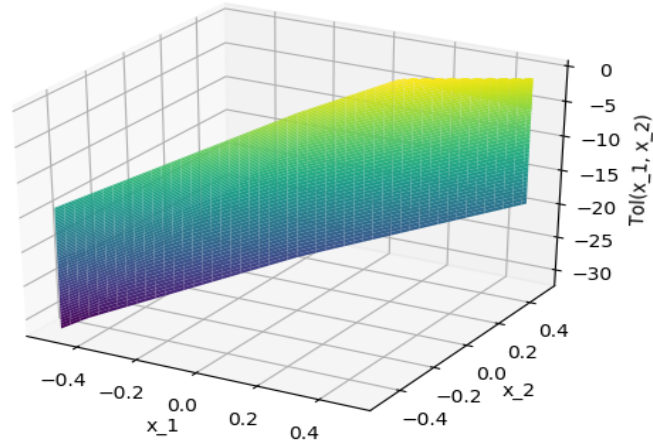


Рис. 2: График распознающего функционала $Tol(x_1, x_2)$

4.2 Недоопределенная ИСЛАУ

Матрицы недоопределенной и переопределенной ИСЛАУ должны совпадать с точностью до транспонирования, поэтому определим:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 23 \\ 15 & 19 & 12 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Для них была определена правая часть:

$$b = A \cdot x = \begin{pmatrix} 12.4 \\ 12.5 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Из (8) и (9) получена недоопределенная ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [11, 15] & [15, 21] & [21, 25] \\ [13, 17] & [17, 21] & [10, 14] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [10.4, 14.4] \\ [10, 15] \end{pmatrix} \quad (10)$$

С помощью программы `tolsolvty` были найдены максимум функционала распознающего функционала $maxTol$ и значение аргумента, в которой он достигался ($argmaxTol$).

$$maxTol = 0.3365; argmaxTol = \begin{pmatrix} 0.673 \\ 0.00 \\ 0.1587 \end{pmatrix} \quad (11)$$

По формуле (7) получено: $ive = 0.8581$.

Построим допусковое множество в объеме:

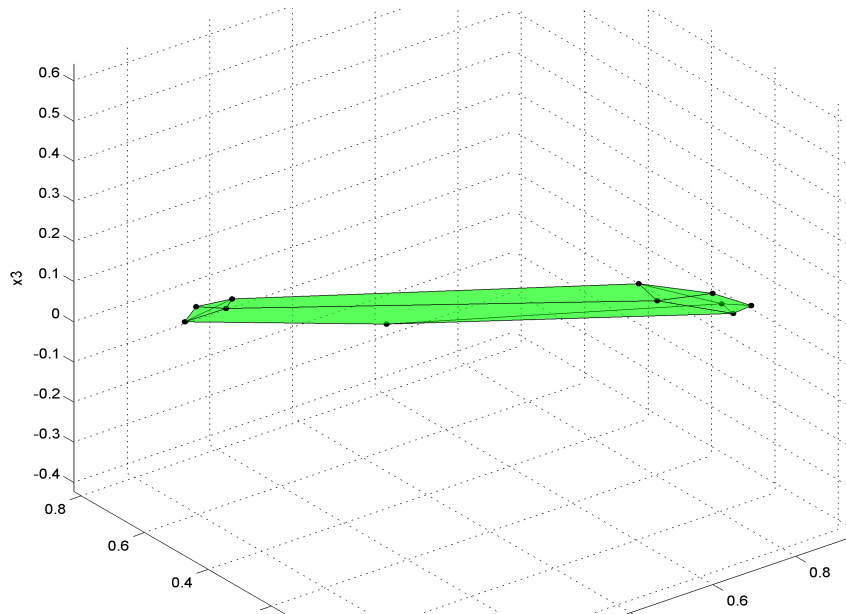


Рис. 3: Допусковое множество решений для недоопределенной ИСЛАУ

Рассмотрим также проекцию на x_1Ox_3 , так как в решении именно вторая координата обращается в 0.

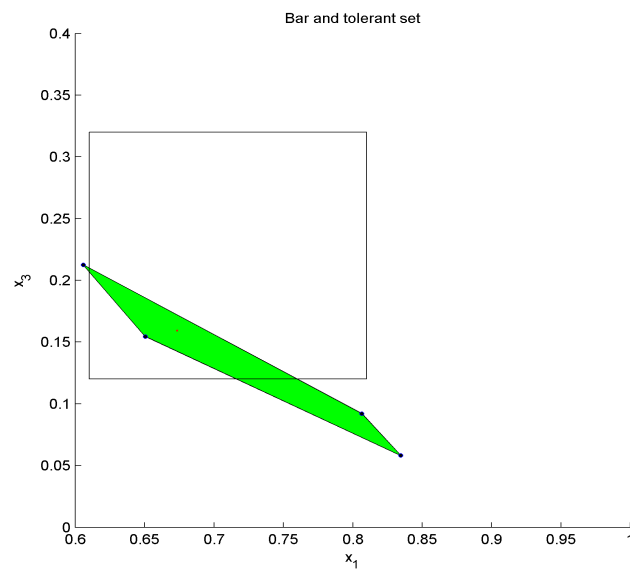


Рис. 4: Допусковое множество в проекции

Точка, соответствующая решению, находится на периферии, в связи с чем брус покрывает не все допустимое множество, а лишь часть, где находится точка. Проанализируем исходное(8) и полученное(11) решения.

Абсолютная погрешность составляет:

$$|x - \mathit{argmaxTol}| = \begin{pmatrix} 0.173 \\ 0.2 \\ 0.0587 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Норма разности:

$$||x - \mathit{argmaxTol}|| = 0.2708 \quad (13)$$

Такой результат, на мой взгляд, можно обосновать тем, что при использовании интервальных арифметических операций внутри решения погрешность вычисления возрастает в силу изменения границ интервала. Кроме того, при решении недоопределенной СЛАУ мы добиваем несколько переменных произвольными значениями, что может влиять на результат.

5 Приложения

Код программы на GitHub, URL: https://github.com/DariaKrup/Computational_complexes