

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

**ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ
КОМПЛЕКСЫ»**

Выполнил
студент группы 3630102/70201

Крупкина Дарья

Проверил
к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2020

Содержание

1	Постановка задачи	2
1.1	Задача 1	2
1.2	Задача 2	2
2	Теория	2
2.1	Признак Бека	2
2.2	Теорема	2
2.3	Теорема Адамара	2
3	Реализация	3
4	Результаты	3
4.1	Задача 1	3
4.2	Задача 2	4
5	Приложения	5

Список иллюстраций

1	Проверка правильности решения задачи 1 критерием Бека	3
2	Проверка правильности решения задачи 1	4
3	Критерий Бека для задачи размерности 3	4
4	Вычислительный эксперимент для задачи размерности 3	4
5	Критерий Бека для задачи размерности 4	5
6	Вычислительный эксперимент для задачи размерности 4	5

1 Постановка задачи

1.1 Задача 1

Имеем 2x2 матрицу A : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}$

Пусть все элементы матрицы a_{ij} имеют теперь радиус ϵ : $rada_{ij} = \epsilon$.

Получаем $\begin{pmatrix} [1-\epsilon, 1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \\ [1.1-\epsilon, 1.1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \end{pmatrix}$

Определить, при каком радиусе ϵ матрица (1.1) содержит особенные матрицы.

1.2 Задача 2

Имеем $n \times n$ матрицу A : $\begin{pmatrix} 1 & [0, \epsilon] & \dots & [0, \epsilon] \\ [0, \epsilon] & 1 & \dots & [0, \epsilon] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, \epsilon] & [0, \epsilon] & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Определить, при каком радиусе ϵ матрица (1.2) содержит особенные матрицы.

2 Теория

Интервальная матрица $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется неособенной, если неособенны все точечные матрицы $A \in A$. Интервальная матрица называется особенной, если она содержит особенную точечную матрицу.

2.1 Признак Бека

Пусть интервальная матрица $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что ее середина $\text{mid } A$ неособенна и

$$\rho(|(\text{mid } A)|^{-1} \cdot \text{rad } A) < 1 \quad (1)$$

Тогда A неособенна.

2.2 Теорема

Пусть интервальная матрица $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что ее середина $\text{mid } A$ неособенна и

$$\max_{i \leq j \leq n} (\text{rad } A \cdot |(\text{mid } A)|^{-1})_{jj} \geq 1 \quad (2)$$

Тогда A - особенная.

2.3 Теорема Адамара

Интервальная матрица с диагональным преобладанием является неособенной.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Python в среде разработки PyCharm. Используются библиотеки numpy для реализации вычислений. Исходный код лабораторной работы приведён в приложении в виде ссылки на репозиторий GitHub.

4 Результаты

4.1 Задача 1

Воспользуемся для решения теоремой о максимальном элементе диагонали. Имеем интервальную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1-\epsilon, 1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \\ [1.1-\epsilon, 1.1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \end{pmatrix} \quad (3)$$

Рассчитаем для нее середину:

$$\text{mid}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

а также радиус:

$$\text{rad}A = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \quad (5)$$

Определитель середины отличен от 0, т.е. матрица не вырождена и можно применить теорему.

Имеем:

$$\text{rad}A \cdot |(\text{mid}A)|^{-1} = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21\epsilon & 20\epsilon \\ 21\epsilon & 20\epsilon \end{pmatrix} \quad (6)$$

Среди элементов диагонали ищем максимальный и применяем (2): $\epsilon \geq \frac{1}{21}$.

Проверим с помощью программы. В ней реализованы критерий Бека и данная теорема. На вход подается ϵ и далее выдается результат:

```
Task first.  
Enter epsilon:  
0.048  
Beck criteria result: undefined ; rho = 1.968  
Diag max criteria result: true, special matrix ; max in diagonal = 1.008
```

Рис. 1: Проверка правильности решения задачи 1 критерием Бека

Попробуем улучшить оценку.

Введем $\delta = 0.1$ - разность неединичного элемента исходной матрицы и 1.

Имеем оценку $\epsilon = \frac{\delta}{n^2}$.
Тогда получаем $\epsilon = 0.025$.
Проверим:

```
Task first.  
Enter epsilon:  
0.025  
Determinant: ( -0.2025 ,  0.0025 )
```

Рис. 2: Проверка правильности решения задачи 1

4.2 Задача 2

С помощью критерия Бека и теоремы о максимальном элементе диагонали получим для размерности $n = 3$ следующие значения.

```
Task second.  
Enter dimension:  
3  
Found epsilon: 1.29  
Beck criteria result: undefined ; rho =  4.657  
Diag max criteria result: true, special matrix ; max in diagonal =  1.023
```

Рис. 3: Критерий Бека для задачи размерности 3

Однако оценка является грубой и не включает 1, которая очевидно приводит к тому, что матрица является особенной. Можно попробовать уточнить ее.

Построим численный эксперимент: ϵ будет меняться от 0 с шагом 0.01. На каждой итерации вычисляется определитель матрицы и в случае, если 0 входит в интервал, матрицу считаем особенной.

Посмотрим результаты для матрицы размером 3x3.

```
Task second.  
Enter dimension:  
3  
Determinant: ( -0.0092 ,  1.39022 )  
Found epsilon: 0.58
```

Рис. 4: Вычислительный эксперимент для задачи размерности 3

Видим, что нижняя граница интервала существенно уменьшилась и теперь подходят $\epsilon \geq 0.58$.

Аналогично рассмотрим для матрицы 4x4. Критерий Бека и теорема о максимальном элементе диагонали приводят к результату:

```
Task second.  
Enter dimension:  
4  
Found epsilon: 1.22  
Beck criteria result: undefined ; rho = 6.715  
Diag max criteria result: true, special matrix ; max in diagonal = 1.011
```

Рис. 5: Критерий Бека для задачи размерности 4

Результат снова не включает 1. Поэтому проведем аналогичный численный эксперимент.

```
Task second.  
Enter dimension:  
4  
Determinant: ( -0.05141 , 1.52082 )  
Found epsilon: 0.39
```

Рис. 6: Вычислительный эксперимент для задачи размерности 4

Результат, полученный в ходе эксперимента: $\epsilon \geq 0.39$.

Можно заметить, что результаты (4) и (6) близки к нарушению диагонального преобладания (т. Адамара): $\epsilon > \frac{1}{n-1}$, так как максимальная сумма элементов вне диагонали равна $\epsilon * (n - 1)$. Полученный при эксперименте отрезок входит в $(\frac{1}{n-1}, +\infty)$.

5 Приложения

Код программы на GitHub, URL: https://github.com/DariaKrup/Computational_complexes