

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

**КУРСОВАЯ РАБОТА
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА»**

Выполнил
студент группы 3630102/70201

Крупкина Дарья

Проверил
к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2020

Содержание

1	Постановка задачи	2
1.1	Подготовка данных	2
1.2	Расчеты	2
1.3	Анализ	2
2	Теория	2
2.1	Выборочный коэффициент корреляции	2
2.1.1	Выборочный коэффициент корреляции Пирсона	2
2.2	Центр масс	3
3	Реализация	3
4	Результаты	3
4.1	Светимость областей выше и ниже экватора	3
4.2	Коэффициент корреляции и движение центра масс	4
4.3	Анализ	5
4.3.1	Анализ движения центра масс	5
4.3.2	Сравнение проекций	7
5	Обсуждение	8
6	Приложения	8

Список иллюстраций

1	Суммарная светимость частей плазмы выше("север") и ниже("юг") экватора	3
2	Графики светимости "северной"и "южной"частей плазмы в устойчивой фазе в течение временного окна	4
3	Коэффициент корреляции между светимостями областей выше и ниже экватора	4
4	Траектория движения центра масс в течение временного окна (без нормирования)	5
5	Траектория движения центра масс в течение временного окна	6
6	Точки, в которых кривая совершает движение по вертикали	7
7	Точки, в которых кривая совершает движение по вертикали, общий график	7
8	Разница между проекциями	8

1 Постановка задачи

1.1 Подготовка данных

- Считать данные из файла .mat;
- Выделить области светимости выше и ниже экватора.

1.2 Расчеты

- Ввести временное окно $[135.0, 175.0]$ мс;
- Рассчитать коэффициент корреляции между светимостями областей выше и ниже экватора;
- Рассмотреть движение центра масс системы областей выше и ниже экватора.

1.3 Анализ

Рассмотреть вопрос движения центра масс по вертикали в случае потери корреляции между севером и югом.

2 Теория

2.1 Выборочный коэффициент корреляции

Корреляционным моментом, иначе ковариацией, двух случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих случайных величин от их математических ожиданий [1, с. 141].

$$K = cov(X, Y) = M[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] \quad (1)$$

Коэффициентом корреляции ρ двух случайных величин X и Y называется отношение их корреляционного момента к произведению их средних квадратических отклонений:

$$\rho = \frac{K}{\sigma_x \sigma_y} \quad (2)$$

Коэффициент корреляции — это нормированная числовая характеристика, являющаяся мерой близости зависимости между случайными величинами к линейной [1, с. 150].

2.1.1 Выборочный коэффициент корреляции Пирсона

Пусть по выборке значений $\{x_i, y_i\}_1^n$ двумерной с.в. (X, Y) требуется оценить коэффициент корреляции $\rho = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{D_X D_Y}}$. Естественной оценкой для ρ служит его статистический аналог в виде выборочного коэффициента корреляции, предложенного

К.Пирсоном, —

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{K}{s_X s_Y}, \quad (3)$$

где K, s_X^2, s_Y^2 — выборочные ковариация и дисперсии с.в. X и Y [1, с. 535].

2.2 Центр масс

Центр масс - геометрическая точка, характеризующая движение тела или системы частиц как целого.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Python в среде разработки PyCharm. Используются библиотеки `scipy` для загрузки данных из файла, `numpy` для простоты использования различных статистических функций, `pandas` для обработки данных и `matplotlib`, `seaborn` для визуализации результатов. Исходный код лабораторной работы приведён в приложении в виде ссылки на репозиторий GitHub.

4 Результаты

4.1 Светимость областей выше и ниже экватора

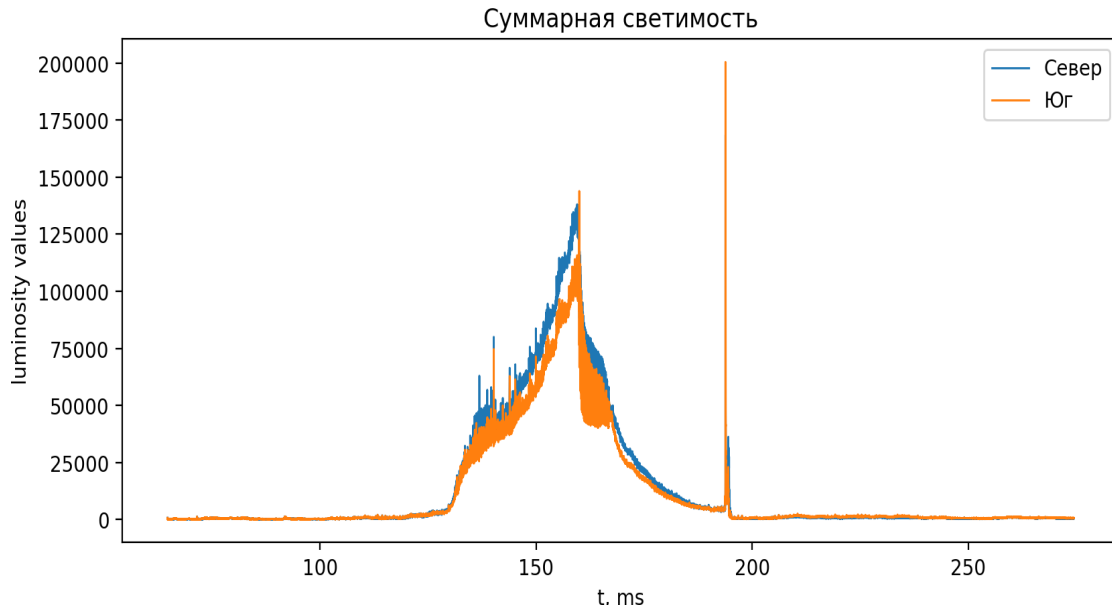


Рис. 1: Суммарная светимость частей плазмы выше("север") и ниже("юг") экватора

Выбран временной интервал от 135 мс до 175 мс. На нем приведены светимости "северной" и "южной" частей:

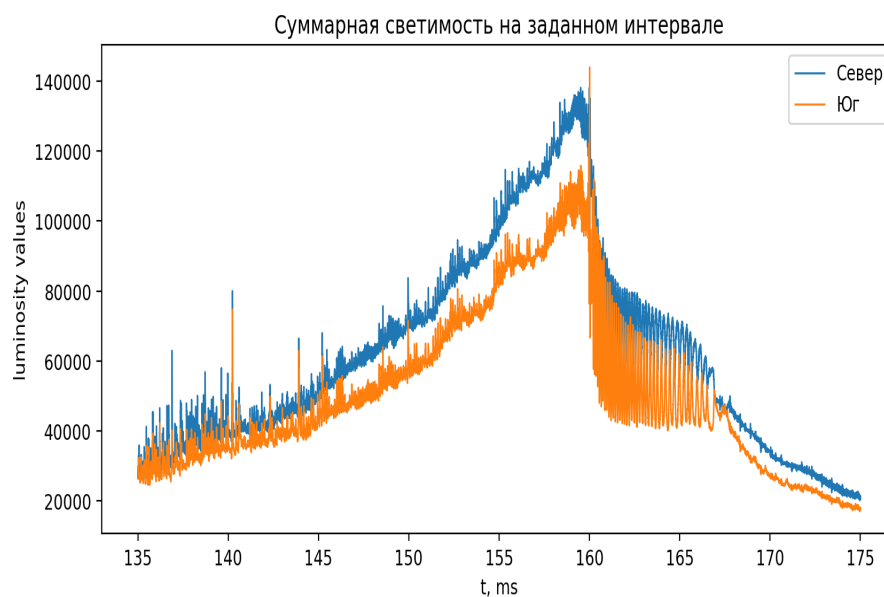


Рис. 2: Графики светимости "северной" и "южной" частей плазмы в устойчивой фазе в течение временного окна

4.2 Коэффициент корреляции и движение центра масс

Коэффициент корреляции между "севером" и "югом" рассчитан по формуле (3).



Рис. 3: Коэффициент корреляции между светимостями областей выше и ниже экватора

Центр масс системы областей выше и ниже экватора рассчитан как среднее значений "севера" и "юга".

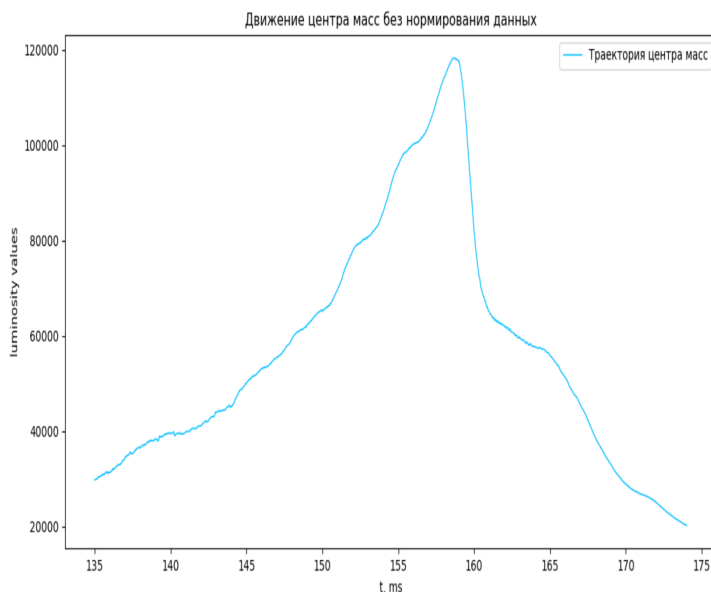


Рис. 4: Траектория движения центра масс в течение временного окна (без нормирования)

Стоит отметить, что предварительно данные не отнормированы, поэтому анализ в сопоставлении с коэффициентом корреляции, значения которого меняются от -1 до 1, затруднен.

Для этого воспользуемся нормированием данных. Так как соответствующие значения светимостей "северной" и "южной" частей сильно различаются, воспользуемся минмаксной нормализацией, где каждый элемент данных v вычисляется по формуле:

$$v'_i = \frac{v_i - \min(v)}{\max(v) - \min(v)} \quad (4)$$

На выходе по оси ординат получаем значения на промежутке $[0, 1]$.

4.3 Анализ

4.3.1 Анализ движения центра масс

После нормирования данных с помощью формулы (4) можем расположить два графика в одном окне.

Также отметим область, где наблюдается потеря корреляции, т.е., ту область, где коэффициент корреляции не превосходит 0.7.



Рис. 5: Траектория движения центра масс в течение временного окна

Из рисунков выше видно, что взаимосвязь между коэффициентом корреляции и центром масс существует, и есть участок траектории центра масс, который напоминает вертикальный. Он соответствует наиболее резкому отклонению коэффициента корреляции от 1.

Рассмотрим направление движения кривой центра масс между каждыми двумя соседними точками области. Для этого рассмотрим приращения по x и y между двумя точками и вычислим арктангенс отношения приращений и переведем его в градусную меру из радиан.

Точки, для которых модуль угла в градусной мере близок к 90° , в данной работе $|\hat{\alpha}| > 89.995$.

Эти точки отмечены на графике.



Рис. 6: Точки, в которых кривая совершает движение по вертикали



Рис. 7: Точки, в которых кривая совершает движение по вертикали, общий график

4.3.2 Сравнение проекций

Сравним проекции на границах полученной области: для того, чтобы оценить, какая область светится сильнее, построим разность между проекциями. Для того, чтобы оценить изменения проекции на всем промежутке, сгенерировано видео, которое можно найти во вложениях. Для того, чтобы рождение и затухание разряда были лучше видны, добавлено видео, где светимость нормирована на глобальный макси-

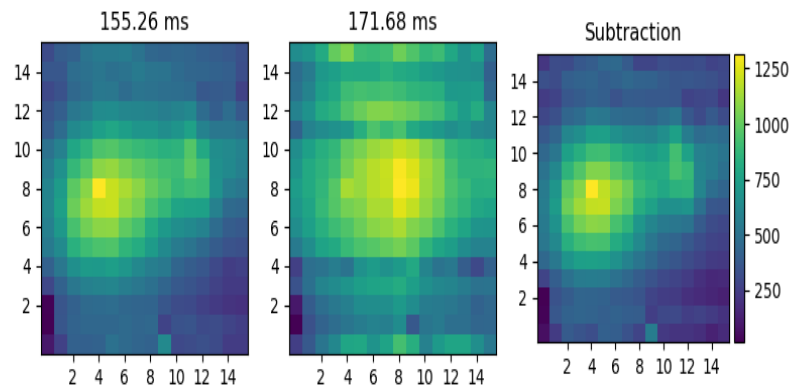


Рис. 8: Разница между проекциями

мум.

Также сгенерировано видео, отслеживающее проекции на всем временном интервале с нормированной светимостью.

5 Обсуждение

Из рисунка (7) видно, что все точки, в которых кривая центра масс совершает движение, подобное движению по вертикали, полностью находятся в области потери корреляции "северной" и "южной" частей плазмы.

Также такое движение соответствует наиболее резкому отклонению коэффициента корреляции.

Из видео можно сделать вывод, что светимость остается примерно на одном и том же уровне ближе к границам области; в тех местах, где наблюдается самая резкая потеря корреляции между "северной" и "южной" частями плазмы, движение напоминает круговое.

6 Приложения

Код программы на GitHub, URL: <https://github.com/DariaKrup/Statistics>

Видео, отражающие изменение проекций: полученные видео

Список литературы

- [1] Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений. //Под ред. Максимова Ю.Д. — Спб.: «Иван Федоров», 2001. — 592 с., илл.
- [2] Баженов А.Н., Затылкин П.А. Малоракурсная реконструкция светимости плазмы для сферического токамака. Вычислительные технологии. 2020; 25(1):5–38.