

## 9. INTEGRARE NUMERICĂ. REZOLVAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ȘI A SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

### Obiectivele lucrării:

- fixarea cunoștințelor privitoare la calculul integralei definite a unei funcții prin metoda trapezelor, respectiv metoda lui Simpson,
- familiarizarea cu modalități de calcul a integralei definite a unei funcții folosind mediul Matlab,
- fixarea de cunoștințe privitoare la rezolvarea ecuațiilor diferențiale ordinare și a sistemelor de ecuații diferențiale ordinare folosind mediul de programare Matlab,
- însușirea modului de a aduce ecuațiile diferențiale ordinare, respectiv sistemele de ecuații diferențiale ordinare de ordin superior, la o formă echivalentă cu cea a sistemelor de ecuații diferențiale de ordinul I,

prin studierea unor exemple și prin rezolvarea unor probleme.

Se recomandă parcurgerea anexei M9 înaintea studierii paragrafelor 9.1 și 9.2.

### 9.1. Elemente despre integrarea numerică în Matlab. Elemente despre rezolvarea ecuațiilor diferențiale și a sistemelor de ecuații diferențiale în Matlab

#### *Integrare numerică*

Pentru calculul integralelor definite prin **metoda trapezelor**, în Matlab se utilizează funcția `trapz`. Această funcție presupune că funcția de integrat  $f$  este precizată sub formă de valori numerice,  $\{y_k = f(x_k)\}_{k=1,\dots,n}$ , în puncte echidistante  $\{x_k\}_{k=1,\dots,n}$  ( $x_1=a$ ,  $x_n=b$ ) ale intervalului de integrare  $[a, b]$ . Sintaxa de apel a funcției `trapz` este:

```
I=trapz(x,y)
```

unde:

- $x$  reprezintă vectorul valorilor  $\{x_k\}$ ;
- $y$  reprezintă vectorul valorilor  $\{y_k = f(x_k)\}$ ;
- $I$  reprezintă aproximarea cu metoda trapezelor a integralei definite  $\int_a^b f(x) dx$

*Comentariu:*  $n$  reprezintă aici numărul de puncte. Prin urmare pasul de integrare – care este calculat implicit- este dat de:

$$h = \frac{b-a}{n-1}$$

Funcția Matlab `quad` realizează calculul integralei definite a unei funcții prin **metoda adaptativ-recursivă Simpson** (o variantă mai performantă a metodei lui Simpson, pasul de parcurgere a intervalului de integrare este calculat implicit de către funcția Matlab). Funcția `quad` presupune că funcția de integrat  $f$  este cunoscută prin expresia sa analitică,  $y = f(x)$ . Două sintaxe de apel ale funcției `quad` sunt:

```
I=quad(ume_fisier,a,b)
I=quad(ume_fisier,a,b,precizia)
```

unde:

- `ume_fisier` reprezintă un șir de caractere care conține numele fișierului-funcție în care a fost scrisă expresia funcției de integrat  $f$ ;
- `a` și `b` reprezintă limitele de integrare (capetele intervalului  $[a, b]$  pe care se realizează integrarea);
- `precizia` este un argument opțional prin care se poate modifica precizia implicită  $10^{-6}$ ;
- $I$  reprezintă aproximarea integralei definite  $\int_a^b f(x) dx$ .

### **Rezolvarea ecuațiilor diferențiale și a sistemelor de ecuații diferențiale**

Matlab pune la dispoziția utilizatorului mai multe funcții Matlab de rezolvare a ecuațiilor diferențiale și a sistemelor de ecuații diferențiale de diferite ordine. Aceste funcții implementează diverse metode numerice. Astfel:

- funcția Matlab `ode23` folosește o combinație a metodelor Runge-Kutta de ordinele 2, respectiv 3;
- funcția Matlab `ode45` are implementată o combinație a metodelor Runge-Kutta de ordinele 4, respectiv 5;
- funcția Matlab `ode113` implementează o variantă a metodei Adams-Bashforth-Moulton.

Cele trei funcții Matlab menționate mai sus au aceleași sintaxe de apel. Două din aceste sintaxe sunt:

```
[xval,yval] = functie_Matlab(ume_fisier,dom,y0)
[xval,yval] = functie_Matlab(ume_fisier,dom,y0,optiuni)
```

unde:

- `functie_Matlab` este una din funcțiile `ode23`, `ode45`, `ode113`;
- `ume_fisier` reprezintă un șir de caractere care conține numele fișierului-funcție în care a fost definită expresia derivatei funcției-necunoscute, în

cazul unei ecuații diferențiale de ordinul I, respectiv, vectorul expresiilor derivatelor de ordin I al funcțiilor-necunoscute, în cazul sistemelor de ecuații diferențiale de ordinul I sau al ecuațiilor și sistemelor de ecuații diferențiale de ordin superior, care au fost aduse în prealabil la o formă echivalentă cu un sistem de ordinul I;

- dom reprezintă vectorul capetelor intervalului  $[a, b]$  al variabilei independente (a se vedea anexa M9);
- y0 reprezintă valoarea funcției-necunoscute din condiția inițială în cazul unei ecuații diferențiale de ordinul I, respectiv, vectorul valorilor funcțiilor-necunoscute din condițiile inițiale, în celelalte cazuri;
- optiuni reprezintă o structură care conține opțiuni de optimizare a calculării soluției / soluțiilor; este un argument opțional; opțiunile de optimizare pot fi schimbate folosind funcția Matlab `optimset` (paragraful 6.1);
- xval reprezintă un vector ce conține valorile variabilei independente, în care se determină valorile soluției / soluțiilor;
- yval reprezintă vectorul valorilor funcției soluție în punctele xval, în cazul unei ecuații diferențiale de ordinul I, respectiv o matrice ale cărei coloane reprezintă valorile funcțiilor soluție în punctele xval, în celelalte cazuri.

## 9.2. Exemple de studiat

**Exemplul 9.1:** Fie funcția  $f$  dată prin puncte de relațiile

$$f(x_i) = \frac{\sin(x_i)}{i^2 + 1} \cdot \cos\left(\frac{i}{x_i}\right), \quad x_i = \pi + i \cdot \frac{\pi}{30}, \quad i = 1, 2, \dots, 150. \text{ Să se calculeze } \int_{\pi + \frac{\pi}{30}}^{6\pi} f(x) dx.$$

**Soluție:** Funcția fiind cunoscută prin puncte, se va folosi metoda trapezelor pentru calculul integralei cerute. Se execută următoarea secvență Matlab:

```
% generarea vectorilor x si y
for i=1:150
    x(i)=pi+i*pi/30;
    y(i)=sin(x(i))/(i^2+1)*cos(i/x(i));
end

% calculul integralei folosind metoda trapezelor
I=trapez(x,y)
```

rezultând următoarea valoare a integralei:

$$I = -0.0025$$

**Exemplul 9.2:** Să se calculeze  $\int_0^{\pi} \ln(x+1) \cdot \sin(x) dx$ .

**Soluție:** Funcția de integrat având expresia cunoscută, integrala ei va fi calculată cu ajutorul metodei lui Simpson.

Se definește expresia funcției de integrat într-un fișier-funcție (de exemplu, `f.m`):

```
function y=f(x)
y=log(x+1).*sin(x);
```

Pentru calculul integralei se apelează funcția Matlab *quad*:

```
I=quad('f',0,pi)
```

rezultând valoarea:

```
I =      1.8113
```

**Exemplul 9.3:** Să se rezolve prin metoda Runge-Kutta de ordinul 2-3 ecuația diferențială de ordinul I:

$$y' = x^2 \cdot (y+1)$$

cu condiția inițială  $y(1)=1$ , pe intervalul  $[1,2]$ .

Soluție: Se parcurg următoarele două etape:

- se definește expresia derivatei funcției necunoscute  $y$  într-un fișier-funcție, de exemplu *ecdif1.m*:

```
function dy=ecdif1(x,y)
dy=x.^2.*(y+1);
```

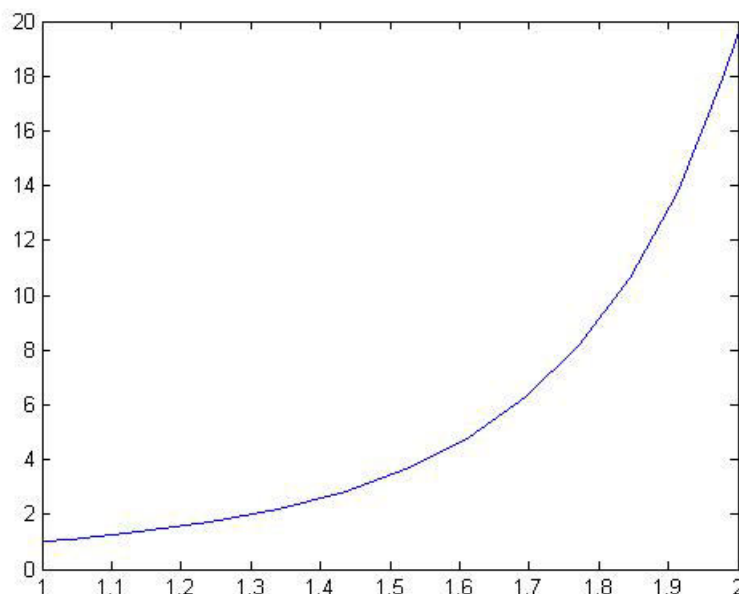
- se rezolvă ecuația diferențială folosind funcția Matlab *ode23*, executând următoarea secvență Matlab (de exemplu, fișier script):

```
% conditia initiala
y0=1;
% domeniul (intervalul)
dom=[1,2];
% rezolvarea ecuatiei diferentiale
[xval,yval]=ode23('ecdif1',dom,y0)
% reprezentarea grafica a solutiei
plot(xval,yval)
```

Se obține soluția sub formă de seturi de valori:

```
xval =
    1.0000    1.0400    1.1400    1.2400    1.3400    1.4368
    1.5280    1.6140    1.6950    1.7717    1.8443    1.9133
    1.9789    2.0000
yval =
    1.0000    1.0850    1.3482    1.7055    2.1955    2.8512
    3.7058    4.8171    6.2622    8.1423   10.5908   13.7830
   17.9494   19.6011
```

Soluția este reprezentată grafic în figura 9.1.



**Fig.9.1.** Graficul soluției ecuației diferențiale din exemplul 9.3.

**Exemplul 9.4:** Să se rezolve prin metoda Adams-Bashforth-Moulton următoarea ecuație diferențială de ordinul II:

$$y'' = 2 \cdot y' - 3 \cdot x^2 \cdot y$$

cu condițiile inițiale  $y(0)=-1$ ,  $y'(0)=2$ , pe intervalul  $[1, 2.5]$ .

Soluție: Se rescrie ecuația sub forma unui sistem de 2 ecuații diferențiale de ordinul I, prin introducerea notațiilor  $y_1=y$ ,  $y_2=y'$ . Se obține sistemul:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 2 \cdot y_2 - 3 \cdot x^2 \cdot y_1 \end{cases}$$

cu condițiile inițiale  $y_1(0)=-1$ ,  $y_2(0)=2$ .

Rezolvarea sistemului de mai sus presupune parcurgerea celor două etape descrise la exemplul 9.3.:

- se definește vectorul expresiilor derivatelor funcțiilor  $y_1$  și  $y_2$  într-un fișier-funcție (de exemplu `ecdif2.m`):

```
function dy=ecdif2(x,y)
dy=zeros(2,1); % initializarea vectorului
dy(1)=y(2);
dy(2)= 2*y(2)-3*x.^2.*y(1);
```

- se rezolvă ecuația diferențială executând următoarea secvență Matlab (de exemplu, fișier script):

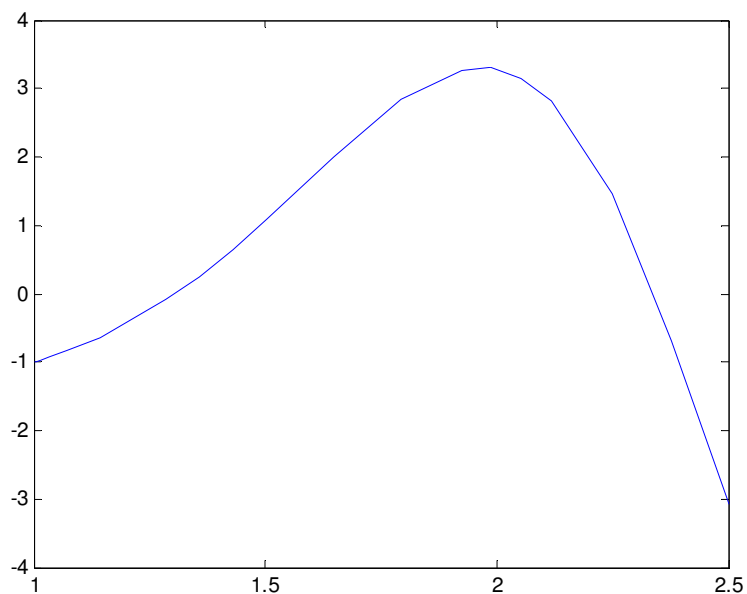
```
% condițiile initiale
y0=[-1; 2];
% domeniul (intervalul)
dom=[1,2.5];
```

```
% rezolvarea ecuatiei diferentiale
[xval,yval]=ode113('ecdif2',dom,y0)
% reprezentarea grafica a solutiei
plot(xval,yval(:,1))
```

Se obține soluția (prima coloană a matricei `yval`) și derivata sa (a doua coloană a matricei `yval`) sub formă de seturi de valori:

xval =	yval =	
1.0000	-1.0000	2.0000
1.0023	-0.9955	2.0158
1.0068	-0.9863	2.0478
1.0158	-0.9675	2.1124
1.0339	-0.9281	2.2451
1.0700	-0.8420	2.5236
1.1423	-0.6381	3.1282
1.2869	-0.0908	4.4597
1.3591	0.2558	5.1217
1.4314	0.6480	5.7155
1.5037	1.0787	6.1732
1.6483	1.9980	6.3409
1.7928	2.8318	4.8694
1.9229	3.2723	1.5840
1.9880	3.2996	-0.8232
2.0530	3.1549	-3.6957
2.1181	2.8109	-6.9292
2.2482	1.4658	-13.7100
2.3783	-0.6870	-18.9046
2.5000	-3.0793	-19.5740

Soluția este reprezentată grafic în figura 9.2.



**Fig.9.2.** Graficul soluției ecuației diferențiale din exemplul 9.4.

**Exemplul 9.5:** Să se rezolve prin metoda Runge-Kutta de ordinul 4-5 sistemul de ecuații diferențiale de ordinul I:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = x - y_1 \end{cases}$$

cu condițiile inițiale  $y_1(0)=0.1$ ,  $y_2(0)=0.2$ , pe intervalul  $[0,10]$ .

Soluție: Se parcurg etapele:

- se definește vectorul expresiilor derivatelor într-un fișier-funcție (de exemplu `sistdif.m`):

```
function dy=sistdif(x,y)
dy=zeros(2,1); % initializarea vectorului
dy=[y(1)+y(2); x-y(1)];
```

- se rezolvă sistemul de ecuații diferențiale prin execuția următorului set de instrucțiuni Matlab (fișier script):

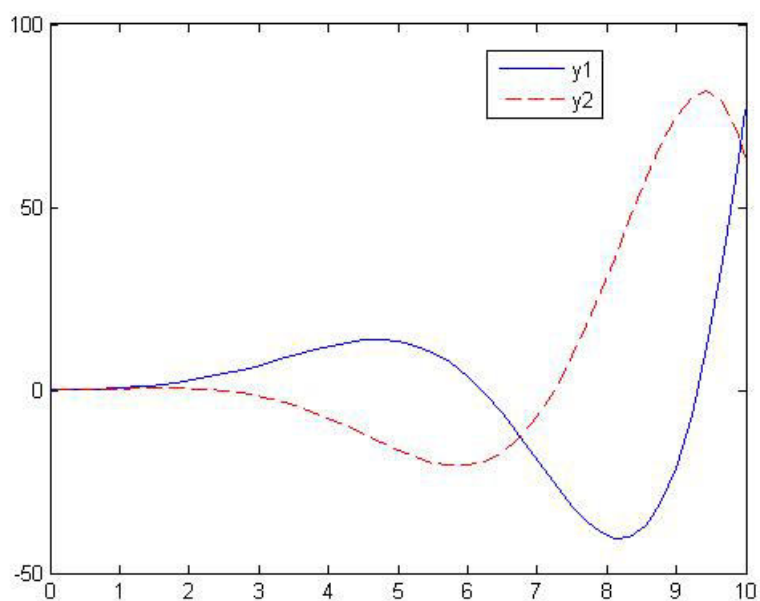
```
% conditiile initiale
y0=[0.1; 0.2];
% domeniul (intervalul)
dom=[0,10];
% rezolvarea ecuatiei diferentiale
[xval,yval]=ode45('sistdif',dom,y0)
% reprezentarea grafica a solutiei
plot(xval,yval(:,1),'b',xval,yval(:,2),'r--')
legend('y1','y2')
```

obținând soluțiile sub formă de puncte (prima coloană a matricei `yval` reprezintă funcția soluție  $y_1$ , a doua coloană reprezintă funcția soluție  $y_2$ ):

xval =	0	yval =	0.1000	0.2000
	0.0167		0.1051	0.1984
	0.0335		0.1102	0.1970
	0.0502		0.1153	0.1959
	0.0670		0.1206	0.1949
	0.1507		0.1480	0.1927
	0.2344		0.1778	0.1952
	0.3182		0.2107	0.2021
	0.4019		0.2472	0.2131
	0.5658		0.3317	0.2452
	0.7296		0.4381	0.2886
	0.8935		0.5718	0.3393
	1.0573		0.7386	0.3922
	1.2445		0.9770	0.4479
	1.4317		1.2747	0.4886
	1.6188		1.6396	0.5024
	1.8060		2.0787	0.4763
	2.0402		2.7407	0.3648
	2.2744		3.5344	0.1375
	2.5087		4.4600	-0.2361
	2.7429		5.5095	-0.7860
	2.9548		6.5508	-1.4585
	3.1667		7.6588	-2.3146
	3.3787		8.8049	-3.3654
	3.5906		9.9509	-4.6147
	3.8182		11.1274	-6.1710

4.0458	12.1810	-7.9312
4.2734	13.0335	-9.8593
4.5010	13.5968	-11.8983
4.7510	13.7696	-14.1717
5.0010	13.3529	-16.3547
5.2510	12.2286	-18.2881
5.5010	10.2933	-19.7796
5.7510	7.4709	-20.6124
6.0010	3.7225	-20.5593
6.2510	-0.9331	-19.3946
6.5010	-6.4021	-16.9022
6.7027	-11.2909	-13.7945
6.9043	-16.4650	-9.6271
7.1060	-21.7488	-4.3594
7.3077	-26.9177	2.0060
7.5085	-31.6833	9.3849
7.7094	-35.7634	17.6997
7.9103	-38.8186	26.7816
8.1111	-40.4739	36.3831
8.3315	-40.2090	47.1212
8.5518	-37.2497	57.5623
8.7721	-31.0862	67.0658
8.9924	-21.2531	74.8667
9.2185	-6.9471	80.1954
9.4446	11.9206	81.8218
9.6706	35.4431	78.7156
9.8967	63.4540	69.8396
9.9225	66.9222	68.4123
9.9484	70.4427	66.8955
9.9742	74.0143	65.2878
10.0000	77.6362	63.5879

Graficul soluțiilor este redat în figura 9.3.:



**Fig.9.3.** Graficul soluțiilor sistemului de ecuații diferențiale din exemplul 9.5.



### 9.3. Probleme de rezolvat

**P9.1.** Să se calculeze  $\int_{-1}^0 f(x)dx$ , unde funcția  $f$  este dată prin relațiile:

$$f(x_j) = \frac{j \cdot x_j^2}{x_j - 1} - \frac{2}{j + 1}, \quad x_j = -1.1 + 0.1 \cdot j, \quad j = 1, 2, \dots, 11$$

**P9.2.** Să se calculeze integrala  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)} dx$ .

**P9.3.** Să se rezolve următoarele probleme Cauchy pe intervalele menționate. Soluția / soluțiile se va / vor reprezenta grafic (în cazul sistemelor, reprezentarea soluțiilor se va face în aceeași fereastră grafică):

- a)  $y' + y^2 = 3 \cdot x$ ,  $y(-1) = 2$ , pe  $[-1, 5]$ ;
- b)  $y'' - y' = 2 \cdot y \cdot \sin(t)$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 2$ , pe  $[0, 6]$ ;
- c)  $-y''' + y'' - x \cdot y' + 2 \cdot y \cdot \sin(x) - x^3 = 0$ ,  $y(1) = 0.5$ ,  $y'(1) = -0.5$ ,  $y''(1) = 0.3$ , pe  $[1, 4]$ ;
- d) 
$$\begin{cases} x' + 2x = y - 2z + \sin(t), & x(0) = 0 \\ y' + 2y = x + 2z - \cos(t), & y(0) = 0.2, \text{ pe } [0, 3]. \\ z' - 5z = 3x - 3y, & z(0) = -0.1 \end{cases}$$

**P9.4.** Să se aproximeze valorile funcțiilor-soluție obținute la problema P9.3. în punctele menționate mai jos:

- a) -1, -0.5, 0, 1, 2.3, 5 pentru soluția de la P9.3.a);
- b) 0, 1.5, 2.3, 3.7, 4, 5.45, 6 pentru soluția de la P9.3.b);
- c) 1, 2.2, 3.5, 4 pentru soluția de la P9.3.c);
- d) 0, 0.75, 1.1, 1.16, 2, 3 pentru soluțiile de la P9.3.d).

**P9.5.** Se consideră un robot cu trei grade de libertate de tip translație-translație- rotație, ale cărui ecuații dinamice ale mișcării sunt:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{q}_1 = F_1 \\ (m_2 + m_3) \ddot{q}_2 = F_2 - m_2 g - m_3 g, \\ J_3 \ddot{q}_3 = M_3 \end{cases}$$

în care au fost utilizate următoarele notații:

- $q_1, q_2, q_3$  - coordonatele generalizate (funcții de timp,  $t$ );

- $m_1, m_2, m_3$  - masele ansamblelor element-cuplă ale robotului;
- $F_1, F_2$  - forțele care produc mișcările cuplelor de translație;
- $M_3$  - momentul care produce mișcarea cuplei de rotație;
- $J_3$  - momentul de inerție axial al ansamblului cuplă 3 - element 3.

Cunoscând masele ( $m_1=10$  kg,  $m_2=4.15$  kg,  $m_3=0.5$  kg), momentul de inerție axial ( $J_3=0.015$  kgm<sup>2</sup>), expresiile analitice ale forțelor și momentului:

$$F_1(t)=-58.6 \cdot \sin(2 \cdot t) \quad F_2(t)=23.25 \cdot e^{-t} \cdot (\sin(4 \cdot t)-3 \cos(4 \cdot t))+45.601 \quad M_3(t)=0.004 \cdot t^2$$

și condițiile inițiale  $q_1(0)=0$ ,  $q'_1(0)=2$ ,  $q_2(0)=1$ ,  $q'_2(0)=-1$ ,  $q_3(0)=-0.5$ ,  $q'_3(0)=0$ , să se determine și să se reprezinte grafic variația coordonatelor cuplelor cinematice în intervalul de timp  $[0,3]$  (secunde).

## 9.4. Întrebări recapitulative

Î9.1. Definiți *problema integrării numerice a unei funcții*  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Î9.2. Precizați ce funcții Matlab destinate calculului integralelor numerice cunoașteți (denumire) și care sunt metodele numerice care stau la baza acestor funcții.

Î9.3. Descrieți principiul metodei trapezelor pentru calculul aproximativ al integralelor definite.

Î9.4. Descrieți principiul metodei lui Simpson pentru calculul aproximativ al integralelor definite.

Î9.5. Definiți *problema de rezolvare a unei ecuații diferențiale de ordinul I cu condiții inițiale*.

Î9.6. Precizați care sunt etapele de rezolvare în Matlab a ecuațiilor diferențiale / sistemelor de ecuații diferențiale.

Î9.7. Precizați ce funcții Matlab destinate rezolvării ecuațiilor diferențiale cunoașteți (denumire, metoda numerică care stă la baza funcției, cea mai simplă sintaxă).

Î9.8. Scrieți sistemul de ecuații diferențiale de ordinul I care reprezintă o formă echivalentă a ecuației diferențiale de ordinul III:  $x''' + 2 \cdot x'' + x' - x + 2 \cdot t^2 = 1$ .

Î9.9. Scrieți sistemul de ecuații diferențiale de ordinul I care reprezintă o formă echivalentă a sistemului de ecuații diferențiale de ordinul II: 
$$\begin{cases} x'' + y = \sin(u) \\ x' - y' + u = 0 \end{cases}.$$

# ANEXA M9. ELEMENTE DESPRE INTEGRAREA NUMERICĂ. ELEMENTE DESPRE REZOLVAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ȘI A SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

## M9.1. Integrare numerică

**Problema integrării numerice** se enunță astfel: Se consideră o funcție reală de variabilă reală  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , integrabilă pe intervalul  $[a, b]$ . Se cere să se calculeze integrala definită:

$$I_f = \int_a^b f(x) dx.$$

Modalitățile de calcul numeric a integralei de mai sus se bazează de regulă pe aproximarea funcției  $f$  printr-o altă funcție  $g$ , a cărei integrală poate fi ușor calculată. În continuare vor fi prezentate două metode bazate pe această modalitate: metoda trapezelor și metoda lui Simpson.

### Metoda trapezelor

Intervalul pe care se calculează integrala,  $[a, b]$ , este împărțit în  $n$  secțiuni egale, pasul și abscisa curentă fiind:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k \cdot h, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

În cazul **metodei trapezelor**, funcția de integrat  $f$  se aproximează cu o funcție  $g$  afină pe porțiuni, având proprietatea că  $g(x_k) = f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Metoda trapezelor constă în folosirea formulei de aproximare:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) dx = \frac{[f(x_{k+1}) + f(x_k)] \cdot h}{2}$$

În final se obține expresia:

$$I_f = \frac{h}{2} \left[ y_a + y_b + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} y_k \right],$$

unde  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ ,  $y_a = f(a)$ ,  $y_b = f(b)$ .

### Metoda lui Simpson

Intervalul pe care se calculează integrala,  $[a, b]$ , este divizat în  $2 \cdot n$  secțiuni egale, pasul și abscisa curentă fiind:

$$h = \frac{b-a}{2 \cdot n}, \quad x_k = a + k \cdot h, \quad k = 0, 1, \dots, 2 \cdot n$$

În cazul **metodei lui Simpson**, aproximarea funcției  $f$  se face cu o funcție  $g$  pătratică pe porțiuni, cu proprietatea că  $g(x_k) = f(x_k)$ ,  $k=0, 1, \dots, 2 \cdot n$ . Metoda lui Simpson constă în folosirea formulei de aproximare:

$$\int_{x_{2 \cdot k}}^{x_{2 \cdot k+2}} f(x) dx \approx \int_{x_{2 \cdot k}}^{x_{2 \cdot k+2}} g(x) dx = \frac{h}{3} \cdot [f(x_{2 \cdot k}) + 4 \cdot f(x_{2 \cdot k+1}) + f(x_{2 \cdot k+2})]$$

În final, integrala poate fi exprimată prin următoarea expresie, cunoscută sub denumirea de **formula generalizată a lui Simpson**:

$$I_f = \frac{h}{3} [y_a + y_b + 4 \cdot (y_1 + y_3 + \dots + y_{2 \cdot n-1}) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + \dots + y_{2 \cdot n-2})],$$

unde  $y_k = f(x_k)$ ,  $k=1, \dots, n-1$ ,  $y_a = f(a)$ ,  $y_b = f(b)$ .

Dintre cele două metode prezentate, metoda lui Simpson are pentru același număr de secțiuni ale intervalului  $[a, b]$  o precizie mai bună decât metoda trapezelor.

## M9.2. Ecuații diferențiale

**Problema rezolvării unei ecuații diferențiale de ordinul I cu condiție inițială** se pune astfel:

Fiind dată ecuația diferențială:

$$y' = f(x, y), \quad f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbf{R}, \quad [a, b], I \subset \mathbf{R}$$

( $I$  fiind un interval) și condiția inițială:

$$y(x_0) = y_0, \quad x_0 = a$$

să se determine funcția  $y : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \rightarrow y(x)$ , care verifică relațiile de mai sus.

Problema rezolvării unei ecuații diferențiale cu condiție inițială se mai numește **problemă Cauchy**.

Prin utilizarea metodelor numerice pentru rezolvarea problemei enunțate, se obțin valorile  $y_1, y_2, \dots, y_n$  care aproximează valorile  $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$  ale funcției-soluție  $y$  într-un set de  $n$  puncte ale intervalului  $[a, b]$ ,  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_n = b$ .

În funcție de numărul de puncte anterior calculate utilizate în determinarea punctului curent  $(x_i, y_i)$ , metodele numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale se împart în două categorii:

- i) metode monopas (numite și metode cu pași separați), care utilizează doar valorile corespunzătoare punctului precedent  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ;
- ii) metode multipas (numite și metode cu pași legați), care utilizează valorile corespunzătoare mai multor puncte anterior determinate,  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $(x_{i-2}, y_{i-2}), \dots$ .

Din prima categorie face parte metoda **Runge-Kutta**.



$$y'(x_0) = y_{01}, y''(x_0) = y_{02}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n}, x_0 = a$$

Pentru rezolvarea problemei, se introduc notațiile  $y_i = y^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Se observă că  $y'_i = (y^{(i)})' = y^{(i+1)} = y_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Prin urmare, ecuația diferențială de ordinul  $n$  cu condiții inițiale este echivalentă cu următorul sistem de  $n$  ecuații diferențiale de ordinul I:

[illegible]

cu condițiile inițiale:

$$y_1(x_0) = y_{01}, y_2(x_0) = y_{02}, \dots, y_n(x_0) = y_{0n}.$$