

Содержание

1	Слабое условие	2
2	Аппроксимационная задача	3
3	Доказательство теоремы 2.1	12

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_j} - \nu \Delta v - 2\kappa \operatorname{Div} \left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k} \right) -$$

$$- 2\kappa \operatorname{Div} \left(\mathcal{E}(v) W_p(v) - W_p(v) \mathcal{E}(v) \right) + \operatorname{grad} p = f, x \in \Omega \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, x \in \Omega \quad (2)$$

Для системы (1)-(2) рассмотрим краевую задачу с граничным условием

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

В настоящей работе исследуется существование слабого решения краевой задачи (1)-(3), описывающего движение слабых водных растворов полимеров, заполняющих ограниченную область $\Omega \in R^n$, $n = 2, 3$, которое определяется реологическим соотношением со сглаженной производной Яуманна.

Для исследования используются аппроксимационные и топологические методы (см., например, [9], [10]). Краевая задача рассматривается как операторное уравнение. Используемые операторы часто не обладают хорошими свойствами, поэтому рассматривается некоторая аппроксимация этого уравнения. Затем разрешимость этого аппроксимирующего уравнения исследуется в более сглаженном пространстве. Для этого применяется техника топологической степени Лере-Шаудера. Последний шаг - предельный переход в аппроксимирующем уравнении, поскольку аппроксимирующие параметры стремятся к нулю, а решения аппроксимирующего уравнения сходятся к решению исходного уравнения.

1 Слабое условие

Обозначим через $C_0^\infty(\Omega)^n$ пространство функций класса C^∞ , отображаемых Ω в R^n с компактным носителем в Ω . Также нам потребуется определение следующих функциональных пространств

$$\mathcal{V} = v(x) = (v_1, \dots, v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0;$$

V - замыкание на \mathcal{V} по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$ со скалярным произведением

$$((v, w)) = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla w dx.$$

Здесь символ $\nabla v : \nabla w, v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n)$, обозначает поком-
пактное метрическое умножение

$$\nabla v : \nabla w = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$$

Пусть X - замыкание V относительно нормы пространства $W_2^3(\Omega)^n$. Рассмотрим пространство X с нормой:

$$\|v\|_X = \left(\int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v) dx \right)^{1/2}$$

Определение 1.1. Пусть f принадлежит V^* . Слабым решением краевой задачи (1)-(3) называется функция $v \in V$ такая, что для любого $y \in X$ она удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla w dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k} dx - \\ & \quad \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k} dx + \\ & \quad + 2\kappa \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v) W_p(v) - W_p(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. Для любой $f \in V^*$ краевая задача (1)-(3) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$

2 Аппроксимационная задача

При исследовании задачи (1)-(3) мы используем аппроксимационно-топологический подход к задачам гидродинамики [10]. Фактически мы

исследуем аппроксимирующую задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$:

Аппроксимационная задача.

Найти функцию $v \in X$, которая для любого $\varphi \in X$ удовлетворяет следующему равенству

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx \\ & - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\ & + 2\kappa \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что (5) отличается от (4) наличием члена

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx.$$

На первом шаге мы получаем априорную оценку равенства (5) в пространстве X и с помощью методов топологической степени показываем, что существует решение аппроксимирующей задачи в X . Также получаем в пространстве V оценку решения аппроксимирующей задачи, которая не зависит от параметра ε . Затем построим последовательность таких решений и покажем, что она допускает подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению краевой задачи (1)-(3) при стремлении параметра приближения ε к нулю.

Рассмотрим следующие операторы:

$$\begin{aligned} A : V &\rightarrow V^*, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx, \quad v, \varphi \in V; \\ N : X &\rightarrow X^*, \quad \langle Nv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx, \quad v, \varphi \in V; \end{aligned}$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \rightarrow V^*, \quad \langle B_1(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n, \quad \varphi \in V;$$

$$B_2 : V \rightarrow X^*, \quad \langle B_2(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \quad v \in V, \quad \varphi \in X;$$

$$B_3 : V \rightarrow X^*, \quad \langle B_3(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \quad v \in V, \quad \varphi \in X;$$

$$D : V \rightarrow X^*, \quad \langle D(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi \, dx, \\ v \in V, \quad \varphi \in X;$$

Поскольку в равенстве (5) функция $\varphi \in X$ произвольна, это соотношение эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$\varepsilon Nv + \nu Av - B_1(v) - \kappa B_2(v) - \kappa B_3(v) + 2\kappa D(v) = f \quad (6)$$

Таким образом, слабым решением аппроксимирующей задачи является решение $\varphi \in X$ операторного уравнения (6).

Мы также определяем следующие операторы:

$$L : X \rightarrow X^*, \quad L(v) = \varepsilon Nv;$$

$$K : X \rightarrow X^*, \quad K(v) = \nu Av - B_1(v) - \kappa B_2(v) - \kappa B_3(v) + 2\kappa D(v).$$

Задача нахождения решения уравнения (6) эквивалентна задаче нахождения решения для следующего операторного уравнения:

$$L(v) + K(v) = f \quad (7)$$

Мы будем использовать следующие утверждения (доказательства леммы (2.1) - леммы (2.4) можно найти, например, в [5]).

Лемма 2.1. *Оператор $A : V \rightarrow V^*$ непрерывен и имеет место оценка*

$$\| Av \|_{V^*} \leq C_1 \| v \|_V .$$

Более того, оператор $A : X \rightarrow X^$ вполне непрерывен.*

Лемма 2.2. *Оператор $L : X \rightarrow X^*$ непрерывен, обратим и для него имеет место оценка:*

$$\| Lv \|_{X^*} \leq \varepsilon \| v \|_v .$$

Более того, оператор $L^{-1} : X^ \rightarrow X$ вполне непрерывен.*

Лемма 2.3. *Для оператора $B_1 : L_4(\Omega)^n \rightarrow V^*$ непрерывен и имеет место следующая оценка:*

$$\| B_1 v \|_{V^*} \leq C_2 \| v \|_{L_4(\Omega)^n}^2 .$$

Более того, оператор $B_1 : X \rightarrow X^$ вполне непрерывен.*

Лемма 2.4. *Отображение $B_i : V \rightarrow X^*, i = 2, 3$ непрерывно и имеет место следующая оценка:*

$$\| B_i v \|_{X^*} \leq C_3 \| v \|_V^2 .$$

Более того, оператор $B_i : X \rightarrow X^$ полностью непрерывен.*

Лемма 2.5. *Оператор $D : V \rightarrow X^*$ непрерывен и подчиняется оценке:*

$$\| D(v) \|_{X^*} \leq C_4 \| v \|_V^2 . \quad (8)$$

Доказательство. Начнем с оценки \mathcal{E} and W_ρ .

$$\begin{aligned} \| \mathcal{E} \|_{L_2(\Omega)}^2 &= \sum_{i,j=1}^n \| \mathcal{E}_{i,j}(v) \|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 5 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 dx \\ &= C_5 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_5 \sum_{i,j=1}^n \left[\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - 2 \int_{\Omega} v_i \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \right] \\
&= C_5 \left[\int_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx + \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx \right] \leq 2C_5 \|v\|_V^2
\end{aligned}$$

Далее, $\|\mathcal{E}\|_{L_2(\Omega)} \leq C_6 \|v\|_V$.

$$\begin{aligned}
&\| (W_{\rho})_{ij}(v) \|_{L_2(\Omega)} \leq \| (W_{\rho})_{ij}(v) \|_{L_{\infty}(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega} \rho(x-y) \left(\frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j(y)}{\partial y_i} \right) dy \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{x \in \Omega} \left| - \frac{\partial \rho(x-y)}{\partial y_j} v_i(y) + \frac{\partial \rho(x-y)}{\partial y_i} v_j(y) dy \right| \\
&\leq \| \text{grad} \rho \|_{L_2(\Omega)} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

По определению, для любого $v \in V, \varphi \in X$ имеем

$$\begin{aligned}
&|\langle D(v), \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E}(v) \right) : \nabla \varphi dx \right| \leq \\
&\leq C_7 \left[\|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)} \|W_{\rho}(v)\|_{L_2(\Omega)} + \|W_{\rho}(v)\|_{L_2(\Omega)} \|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)} \right] \|\nabla \varphi\|_{C(\Omega)^n} \leq \\
&\leq C_8 \|v\|_V^2 \|\varphi\|_X
\end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку 7. Теперь докажем, что оператор D непрерывен.

Для любых $v^m, v^0 \in V$, имеем:

$$\begin{aligned}
&\left| \langle D(v^m), \varphi \rangle - \langle D(v^0), \varphi \rangle \right| = \left| \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v^m) W_{\rho}(v^m) - W_{\rho}(v^m) \mathcal{E}(v^m) \right) : \nabla \varphi \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v^0) W_{\rho}(v^0) - W_{\rho}(v^0) \mathcal{E}(v^0) \right) : \nabla \varphi dx \right| \leq C_9 \left| \int_{\Omega} \mathcal{E}(v^m) W_{\rho}(v^m) \right. \\
&\quad \left. - W_{\rho}(v^m) \mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0) W_{\rho}(v^0) + W_{\rho}(v^0) \mathcal{E}(v^0) dx \right| \|\varphi\|_X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_9 \left| \int_{\Omega} \mathcal{E}(v^m) \left(W_{\rho}(v^m) - W_{\rho}(v^0) \right) + \left(\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0) \right) W_{\rho}(v^0) \right. \\
&\quad \left. - W_{\rho}(v^m) \left(\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0) \right) - \left(W_{\rho}(v^m) - W_{\rho}(v^0) \right) \mathcal{E}(v^0) dx \right| \|\varphi\|_X \\
&\leq C_{10} \left[\|\mathcal{E}(v^m)\|_{L_2(\Omega)} \|W_{\rho}(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathcal{E}(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)} \right. \\
&\quad \times \|W_{\rho}(v^0)\|_{L_2(\Omega)} + \|W_{\rho}(v^m)\|_{L_2(\Omega)} \|\mathcal{E}(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)} + \|W_{\rho}(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)} \\
&\quad \times \|\mathcal{E}(v^0)\|_{L_2(\Omega)} \left. \right] \|\varphi\|_X \leq C_{11} \left[\|v^m\|_V \|v^m - v^0\|_V + \|v^m - v^0\|_V \|v^0\|_V \right. \\
&\quad \left. + \|v^m\|_V \|v^m - v^0\|_V + \|v^m - v^0\|_V \|v^0\|_V \right] \|\varphi\|_X \\
&\leq C_{12} \left(\|v^m\|_V + \|v^0\|_V \right) \|v^m - v^0\|_V \|\varphi\|_X
\end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем $\|D(v^m) - D(v^0)\|_X \leq C_{13}(\|v^m\|_V + \|v^0\|_V)\|v^m - v^0\|_V$. Пусть последовательность $v^m \subset V$ сходится к некоторой функции $v^0 \in V$. Тогда непрерывность отображения $D : V \rightarrow X$ следует из предыдущего равенства. \square

Лемма 2.6. *Оператор $K : X \rightarrow X^*$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Полная непрерывность оператора $K : X \rightarrow X^*$ следует из полной непрерывности следующих операторов

$$A : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 2.1}$$

$$B_1 : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 2.3}$$

$$B_2 : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 2.4}$$

$$B_3 : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 2.4}$$

$$D : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 2.5}$$

\square

На ряду с уравнением 7 рассмотрим следующее семейство операторных уравнений:

$$L(v) + \lambda K(v) = \lambda f, \lambda \in [0, 1] \quad (9)$$

что совпадает с уравнением 7 для $\lambda = 1$.

Теорема 2.1. Если $v \in X$ является решением операторного уравнения 9 для некоторых $\lambda \in [0, 1]$, тогда справедлива следующая оценка:

$$\varepsilon \|v\|_X^2 \leq C_{14}, \text{ где } C_{14} = \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} \quad (10)$$

Более того, если $\lambda = 1$, тогда справедлива следующая оценка:

$$\nu \|v\|_X^2 \leq C_{15}, \text{ где } C_{15} = \frac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu} \quad (11)$$

Доказательство. Пусть X — решение 9. Тогда для любого $\varphi \in X$ выполняется уравнение:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \lambda \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx \\ & - \lambda \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \lambda \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\ & + 2\lambda \varkappa \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E} \right) : \nabla \varphi dx = \lambda \langle f, v \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

Запишем, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\ & = 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t) \mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = -2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \\ & - 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = -2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx. \end{aligned}$$

Следовательно, 12 запишется в форме

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx$$

$$\begin{aligned}
& +\lambda\nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + 2\lambda\nu \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \\
& + 2\lambda\kappa \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v) \right) : \nabla \varphi dx = \lambda \langle f, v \rangle
\end{aligned}$$

Поскольку последнее равенство выполняется для всех $\varphi \in X$, это верно для $\varphi = v$ так же:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \\
& + \lambda\nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi + 2\lambda\kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \\
& + 2\lambda\kappa \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v) \right) : \nabla v dx = \lambda \langle f, v \rangle.
\end{aligned} \tag{13}$$

Сведем слагаемые в левой части уравнения 13 следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx = \varepsilon \|v\|_X^2; \\
& \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i \frac{\partial(v_j v_j)}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} v_j v_j dx = 0 \\
& \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v) \right) : \nabla v dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v) \right) : \\
& : \left(\mathcal{E}(v) + W(v) \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v) \right) : \mathcal{E}(v) dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v) \right) : W(v) dx = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} \mathcal{E}_{ik} \\
& - (W_{\rho})_{jk} \mathcal{E}_{ki} \mathcal{E}_{ji} dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} W_{ik} - (W_{\rho})_{kj} \mathcal{E}_{ji} W_{ki} \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} \mathcal{E}_{ik} - \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} \mathcal{E}_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} W_{ik} \\
& \quad - \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} W_{ik} dx = 0; \\
& \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \right. \\
& \quad \left. + \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \right) = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial (\mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(v))}{\partial x_k} dx \\
& \quad = - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \sum_{i,j=1}^n \mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(v) dx = 0.
\end{aligned}$$

Здесь указано, что тензор скорости деформации $\mathcal{E}(u)$ симметричен, а тензоры $W_{\rho}(v)$ и $W(v)$ кососимметричны. Следовательно, уравнения 13 переписать в следующем виде:

$$\varepsilon \|v\|_X^2 + \lambda \nu \|v\|_V^2 = \lambda \langle f, v \rangle$$

Используя верхнюю оценку правой части последнего уравнения.

$$\lambda \langle f, v \rangle \leq \lambda |\langle f, v \rangle| \leq \lambda \|f\|_{V^*} \|v\|_V \leq \|f\|_{V^*} \|v\|_V \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\delta} + \lambda \frac{\delta \|v\|_V^2}{2}$$

для $\delta = \nu$ имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon \|v\|_X^2 + \lambda \nu \|v\|_V^2 & \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} + \lambda \frac{\nu \|v\|_V^2}{2}, \\
\varepsilon \|v\|_X^2 + \lambda \frac{\nu \|v\|_V^2}{2} & \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}, \quad \varepsilon \|v\|_X^2 \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} \leq \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}
\end{aligned}$$

Аналогично для $\lambda = 1$ имеем $\nu \|v\|_V^2 \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu}$. Это доказывает 10 и 11. \square

Теорема 2.2. *Операторное уравнение 7 имеет хотя бы одно слабое решение $v \in X$:*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы мы используем теорию степени Лере-Шаудера для вполне непрерывных векторных полей. В силу априорной оценки 10, все решения семейства уравнений 9 содержатся в шаре $B_R \subset X$ радиуса $R = C_{14} + 1$. По лемме 2.6 отображение $[-K(\cdot) + f] :$

$X \rightarrow X^*$ вполне непрерывно. В силу леммы 2.2 оператор $L^{-1} : X^* \rightarrow X$ непрерывен.

Таким образом, отображение $L^{-1}[-K(\cdot) + f] : X \rightarrow X$ вполне непрерывно. Тогда отображение $G : [0, 1] \times X \rightarrow X$, $G(\lambda, v) = \lambda L^{-1}[-K(v) + f]$ полностью непрерывно по двумерному аргументу (λ, v) . Из сказанного выше получаем, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi(\lambda, v) = v - G(\lambda, v)$ не обращается в нуль на границе B_R . По гомотопической инвариантности степени получаем

$$\deg_{LS}(\Phi(0, \cdot), B_R, 0) = \deg_{LS}(\Phi(1, \cdot), B_R, 0).$$

Напомним, что $\Phi(0, \cdot) = I$ и по свойству нормализации степени $\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$. Следовательно, $\deg_{LS}((1, \cdot), B_R, 0) = 1$.

Таким образом, мы видим, что существует по крайней мере решение $v \in X$ уравнение

$$v - L^{-1}[-K(v) + f] = 0$$

и следовательно уравнение 7.

Поскольку существует решение $v \in X$ уравнения 7, из сказанного выше следует, что аппроксимирующая задача имеет хотя бы одно слабое решение $v \in X$. \square

3 Доказательство теоремы 2.1

Доказательство. В (4) возьмем $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$. Последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \rightarrow +\infty$. По теореме 3.2 для любого ε_m существует слабое решение $v_m \in X \subset V$ задачи аппроксимации. Таким образом, каждое v_m удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_m \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v_m : \nabla \varphi dx \\
& - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\
& + 2\kappa \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v_m) W_{\rho}(v_m) - W_{\rho}(v_m) \mathcal{E}(v_m) \right) : \nabla dx = \langle f, \varphi \rangle.
\end{aligned} \tag{14}$$

Тогда без ограничения общности (переходя при необходимости к последовательности) из (3.6) получаем, что

$$\begin{aligned}
& \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \varepsilon_m \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) dx \right| = \\
& = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\varepsilon_m} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sqrt{\varepsilon_m} \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) dx \right|
\end{aligned}$$

так что мы получаем

$$\varepsilon_m \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) dx \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty$$

Для остальных интегралов имеем

$$\begin{aligned}
& \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \rightarrow \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \\
& m \rightarrow +\infty;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \rightarrow \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \\
& m \rightarrow +\infty;
\end{aligned}$$

Действительно, здесь последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^{n^2}$. Таким образом, результат сходится

к произведению пределов. В итоге мы имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v_m) W_{\rho}(v_m) - W_{\rho}(v_*) \mathcal{E}(v_*) \right) : \nabla \varphi dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v_m) (W_{\rho}(v_m) - W_{\rho}(v_*)) + (\mathcal{E}(v_m) - \mathcal{E}(v_*)) W_{\rho}(v_*) \right) : \nabla \varphi dx \\
&\leq \| \mathcal{E}(v_m) \|_{L_2(\Omega)} \| \nabla \varphi \|_{L_2(\Omega)} \| W_{\rho}(v_m - v_*) \|_{L_{\infty}(\Omega)} + \\
&\quad + \| W_{\rho}(v_*) \|_{L_{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla \varphi dx \\
&\leq \| \mathcal{E}(v_m) \|_{L_2(\Omega)} \| \nabla \varphi \|_{L_2(\Omega)} \| (v_m - v_*) \|_{L_2(\Omega)} + \\
&\quad + \| W_{\rho}(v_*) \|_{L_{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla \varphi dx \\
&\leq \| \mathcal{E}(v_m) \|_{L_2(\Omega)} \| \nabla \varphi \|_{L_2(\Omega)} \| (v_m - v_*) \|_{L_4(\Omega)} + \\
&\quad + \| W_{\rho}(v_*) \|_{L_{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla \varphi dx.
\end{aligned}$$

Напомним, что последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^{n^2}$. Следовательно, мы имеем

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(v_m) W_{\rho}(v_m) : \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{E}(v_*) W_{\rho}(v_*) : \nabla \varphi dx, \quad m \rightarrow +\infty$$

Аналогично получаем

$$\int_{\Omega} W_{\rho}(v_m) \mathcal{E}(v_m) : \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} W_{\rho}(v_*) \mathcal{E}(v_*) : \nabla \varphi dx, \quad m \rightarrow +\infty$$

Таким образом, переходя к пределу в уравнении (14) при $m \rightarrow +\infty$, мы видим, что предельная функция v_* удовлетворяет следующему уравнению:

$$\nu \int_{\Omega} \nabla v_* : \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx$$

$$\begin{aligned}
& -\varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + \\
& + 2\varkappa \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v_*) W_{\rho}(v_*) - W_{\rho}(v_*) \mathcal{E}(v_*) \right) : \nabla \varphi dx
\end{aligned}$$

Это доказывает, что $v_* \in V$. Это завершает доказательство теоремы 2.1. \square