Содержание

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_j} - \nu \Delta v - 2\varkappa Div\Bigg(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k}\Bigg) - \\
-2\varkappa Div\Bigg(\mathcal{E}(v)W_p(v) - W_p(v)\mathcal{E}(v)\Bigg) + gradp = f, x \in \Omega
\end{gathered} \tag{1}
$$

$$
div\ v = 0, x \in \Omega \tag{2}
$$

Для системы (1)-(2) рассмотрим краевую задачу с граничным условием

$$
v\ |_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}
$$

В настоящей работе исследуется существование слабого решения краевой задачи (1)-(3), описывающего движение слабых водных растворов полимеров, заполняющих ограниченную область $\Omega \in R^n$, $n = 2, 3$, которое определяется реологическим соотношением со сглаженной производной Яуманна.

Для исследования используются аппроксимационные и топологические методы (см., например, [9], [10]). Краевая задача рассматривается как операторное уравнение. Используемые операторы часто не обладают хорошими свойствами , поэтому рассматривается некоторая аппроксимация этого уравнения. Затем разрешимость этого аппроксимирующего уравнения исследуется в более сглаженном пространстве. Для этого применяется техника топологической степени Лере-Шаудера. Последний шаг - предельный переход в аппроксимирующем уравнении, поскольку аппроксимирующие параметры стремятся к нулю, а решения аппроксимирующего уравнения сходятся к решению исходного уравнения.

1 Слабое условие

Обозначим через $C_0^\infty(\Omega)^n$ пространство функций класса C^∞, отображаемых Ω в R^n с компактным носителем в Ω. Также нам потребуется определение следующих функциональных пространств

$$
\mathcal{V} = v(x) = (v_1, ..., v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : div\ v = 0;
$$

V - замыкание на $\mathcal{V}$ по норме пространсва $W_2^1(\Omega)^n$ со скалырным произведением

$$((v, w)) = \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla w dx.$$

Здесь символ $\nabla v : \nabla w, v = (v_1, ..., v_n), w = (w_1, ..., w_n)$, обозначает покомпактное метрическое умножение

$$\nabla v : \nabla w = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$$

Пусть X - замыкание V относительно нормы пространства $W_2^3(\Omega)^n$. Рассмотрим пространство X с нормой:

$$\| v \|_X = \left(\int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v) dx \right)^{1/2}$$

Определение 1.1. *Пусть f принадлежит V^*. Слабым решением краевой задачи (1)-(3) называется функция $v \in V$ такая, что для любого $y \in X$ она удовлетворяет равенству*

$$\nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla w dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k} dx -$$
$$\varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k} dx + 2\varkappa \int\limits_{\Omega} (\mathcal{E}(v) W_p(v) - W_p(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle \tag{4}$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для любой $f \in V^*$ краевая задача (1)-(3) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$*

2 Аппроксимационная задача

При исследовании задачи (1)-(3) мы используем аппроксимационно-топологический подход к задачам гидродинамики [10]. Фактически мы исследуем аппроксимирующую задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$:

Аппроксимационная задача.

Найти функцию $v \in X$, которая для любого $\varphi \in X$ удовлетворяет следующему равенству

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx\ \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx$$

$$-\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx$$

$$+2\varkappa \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle. \tag{5}$$

Отметим, что (5) отличается от (4) наличием члена

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx.$$

На первом шаге мы получаем априорную оценку равенства (5) в пространстве X и с помощью методов топологической степени показываем, что существует решение аппроксимирующей задачи в X. Также получаем в пространстве V оценку решения аппроксимирующей задачи, которая не зависит от параметра ε. Затем простроим последовательность таких решений и покажем, что она допускает подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению краевой задачи (1)-(3) при стремлении параметра приближения ε к нулю.

Рассмотрим следующие операторы:

$$A : V \to V^*,\ \langle Av, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx,\ v, \varphi \in V;$$

$$N : X \to X^*,\ \langle Nv, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx,\ v, \varphi \in V;$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*,\ \langle B_1(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx,\ v \in L_4(\Omega)^n,\ \varphi \in V;$$

$$B_2 : V \to X^*,\ \langle B_2(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\ dx,\ v \in V,\ \varphi \in X;$$

$$B_3 : V \to X^*,\ \langle B_3(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\ dx,\ v \in V,\ \varphi \in X;$$

$$D : V \to X^*,\ \langle D(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) :\ \nabla\varphi\ dx,$$
$$v \in V,\ \varphi \in X;$$

Поскольку в равенстве (5) функция $\varphi \in X$ произвольна, это соотношение эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$\varepsilon N v + \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v) = f \tag{6}$$

Таким образом, слабым решением аппроксимирующей задачи является решение $\varphi \in X$ операторного уравнения (6).

Мы также определяем следующие операторы:

$$L : X \to X^*,\ L(v) = \varepsilon N v;$$
$$K : X \to X^*,\ K(v) = \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v).$$

Задача нахождения решения уравнения (6) эквивалентна задаче нахождения решения для следующего операторного уравнения:

$$L(v) + K(v) = f \tag{7}$$

Мы будем использовать следующие утверждения (доказательства леммы (2.1) - леммы (2.4) можно найти, например, в [5]).

Лемма 2.1. *Оператор* $A : V \to V^*$ *непрерывен и имеет место оценка*

$$\| Av \|_{V^*} \leqslant C_1 \| v \|_V .$$

Более того, оператор $A : X \to X^*$ *вполне непрерывеню*

Лемма 2.2. *Оператор* $L : X \to X^*$ *непрерывен, обратим и для него имеет место оценка:*

$$\| Lv \|_{X^*} \leqslant \varepsilon \| v \|_v .$$

Лемма 2.3. *Для опреатора* $B_1 : L_4(\Omega)^n \varepsilon V^*$ *непрерывен и имеет место следующая оценка:*

$$\| B_1 v \|_{V^*} \leqslant C_2 \| v \|^2_{L_4(\Omega)^n} .$$

Более того, оператор $B_1 : X \to X^*$ *вполне непрерывен.*

Лемма 2.4. *Отображение* $B_i : V \to X^*, i = 2, 3$ *непрерывно и имеет место следующая оценка:*

$$\| B_i v \|_{X^*} \leqslant C_3 \| v \|^2_V .$$

Боле того, оператор $B_i : X \to X^*$ *полностью непрерывен.*