Содержание

1 Введение

Движение несжимаемой жидкости с постоянной плотностью, имеющую ограниченную область $\Omega \subset R^n, n = 2, 3$ на временном интервале $[0, T), T > 0$, описывается системой уравнений Коши вида (см., пример [1]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + grad\ p = Div\ \sigma + f \tag{1}$$

$$divv = 0,\ (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \tag{2}$$

где $v(x, t) = (v_1, ..., v_n)$ — вектор скорости частицы в точке x в момент времени t, $(v_1, ..., v_n)$ — компоненты v, $p = p(x, t)$ — давление жидкости в точке x в момент времени t, а $f = f(x, t)$ — это плотность внешних сил (также называется объемом), действующих на жидкость. Символ Div о обозначает вектор

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j}, ..., \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{nj}}{\partial x_j} \right),$$

координаты которого представляют собой расходимость строк матрицы $\sigma = (\sigma_{ij}, (x))$, где σ — девиатор тензора напряжений.

Система 1 - 2 описывает потоки всех видов жидкостей, но содержит девиатор тензора напряжений, который не выражается явно через неизвестные системы. Как правило, для выражения девиатора тензора напряжений через неизвестные системы 1 - 2 используются соотношения между девиатором тензора напряжений и тензором скоростей деформации $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}(v))_{j=1,...,n}^{i=1,...,n}, \mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, и их производные по времени. Устанавливая связь между девиатором тензора напряжений и тензором скоростей деформации и их производных, мы определяем тип жидкости. Это отношение называется конститутивным или реологическим соотношением и обычно получается методом механистической модели (см., Например, [2]). В реологии реальная структура часто заменяется некоторой моделью, предполагая, что поведение этой модели аналогично поведению структуры. Эта модель состоит из элементов, которых нет в реальном корпусе: пружин, поршней, подъемников и т.д. Обратите внимание, что эти соотношения являются гипотезами, которые необходимо проверить для конкретных жидкостей экспериментальными данными.

Реологическое соотношение, описывающее движение вязкоупругой среды, имеет следующий вид:

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E} + 2\varkappa\,\dot{\mathcal{E}}, \tag{3}$$

где $v > 0$ — вязкость жидкости, а $\varkappa > 0$ — время замедления (задержки). Эта модель движения жидкости описывает движение вязкой неньютоновской жидкости, которой требуется время, чтобы начать движение под действием мгновенно приложенной силы.

В реологическом соотношении 3 мы имеем производную по времени $\dot{\mathcal{E}}$. К сожалению, метод механистических моделей не указывает, какой вывод мы должны использовать (полную, частную или любую специальную производную). Матерматические исследования начались с рассмотрения частной производной в 3. Соответствующая модель называется моделью Фойгта. Затем А.П. Осколков рассмотрел случай полной производной [3]. Но позже в его работе были обнаружены ошибки [4]. В работе [5] дано полное доказательство существования слабых решений в модели 1 - 2 с полной производной. Отметим, что стационарный случай этой задачи рассматривался в [6].

В последние годы рациональная механика [7] повлияла на ученых таким образом, что они начали исследовать реологические отношения, которые не зависят от наблюдателя, то есть они не изменяются при галилеевской замене переменных:

$$t^* = t + a, \tag{4}$$

$$x^* = x_0^*(t) + Q(t)(t - t_0), \tag{5}$$

где a — значение времени, x_0 — точка в пространстве, x_0^* — функция времени, функция со значениями в наборе ортогомальных тензоров.

Другими словами, если исходная тензорная функция изменяется по закону 4 - 5, будет ли реологическое соотношение одинаковым в разных системах отсчета? В случае частных и полных производных ответ отрицательный. Понятие объективной производной позволяет дать утвердительный ответ на этот вопрос.

Определение 1.1. *Пусть G — симметричная тензорнозначная функция двух тензорных аргументов, а $T(t,x)$ — симметричная тензорнозначная функция. Оператор формы*

$$\frac{DT(t,x)}{Dt} = \frac{dT(t,x)}{dt} + G(\nabla v(t,x), T(t,x))$$

называется объективной производной, если при любой замене системы отсчета 4 - 5 выполняется равенство

$$\frac{D^*T^*(t,x)}{Dt^*} = Q(t)\frac{DT(t,x)}{Dt}Q(t)^T$$

выполняется для всех симметричных тензорнозначных функций, не зависящих от репеременной $T(t,x)$.

Примером объективной производной тензора является сглаженная производная Яуманна (см. [8]):

$$\frac{DT(t,x)}{Dt} = \frac{dT(t,x)}{dt} + T(t,x)W_\rho(t,x) - W_\rho(t,x)T(t,x),$$

$$W_\rho(v)(t,x) = \int\limits_{R^n} \rho(x-y)W(x-y)dy,$$

где $\rho : R^n \to R$ — гладкая функция с компактным носителем такая, что $\int\limits_{R^n} \rho(y)dy = 1$ и $\rho(x) = \rho(v)$ для x и y с одинаковой Евклидовой нормой:

$$W(v) = (W_{ij}(v))_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n}, W_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

является тензором завихренности. Подставляя правую часть 3 со сглаженной производной Яуманна для o в уравнения 1 - 2 для стационарного случая, получаем

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - 2\varkappa Div\left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k}\right) - \\ -2\varkappa Div\left(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\right) + grad\ p = f,\ x \in \Omega,\end{gathered} \tag{6}$$

$$div\ v = 0,\ \ x \in \Omega. \tag{7}$$

Для системы (6)-(7) рассмотрим краевую задачу с граничным условием

$$v\ |_{\partial\Omega} = 0. \tag{8}$$

В настоящей работе исследуется существование слабого решения краевой задачи (6)-(8), описывающее движение слабых водных растворов полимеров, заполняющих ограниченную область $\Omega \in R^n$, $n = 2, 3$, которая определяется реологическим соотношением со сглаженной производной Яуманна.

Для исследования используются аппроксимационные и топологические методы (см., например, [9], [10]). Краевая задача рассматривается, как операторное уравнение. Используемые операторы часто не обладают хорошими свойствами, поэтому рассматривается некоторая аппроксимация этого уравнения. Затем разрешимость этого аппроксимирующего уравнения исследуется в более сглаженном пространстве. Для этого применяется техника топологической степени Лере-Шаудера. Последний шаг — предельный переход в аппроксимирующем уравнении, поскольку аппроксимирующие параметры стремятся к нулю, а решения аппроксимирующего уравнения сходятся к решению исходного уравнения.

2 Слабое решение

Обозначим через $C_0^\infty(\Omega)^n$ пространство функций класса C^∞, отображаемых из Ω в R^n с компактным носителем в Ω. Также нам потребуется определение следующего функционального пространства

$$\mathcal{V} = \{v(x) = (v_1, ..., v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : div\ v = 0\};$$

V - замыкание на $\mathcal{V}$ по норме пространсва $W_2^1(\Omega)^n$ со скалырным произведением

$$((v, w)) = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla w dx.$$

Здесь символ $\nabla v : \nabla w, v = (v_1, ..., v_n), w = (w_1, ..., w_n)$, определяется через покомпактное метрическое умножение

$$\nabla v : \nabla w = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$$

Пусть X - замыкание по V относительно нормы пространства $W_2^3(\Omega)^n$. Рассмотрим пространство X с нормой:

$$\| v \|_X = \left(\int_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v) dx \right)^{1/2}.$$

Определение 2.1. *Пусть f принадлежит V^*. Слабым решением краевой задачи (6)-(8) называется функция $v \in V$ такая, что для любого $\varphi \in X$ она удовлетворяет равенству*

$$\nu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx -$$
$$\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + \tag{9}$$
$$+ 2\varkappa \int_\Omega (\mathcal{E}(v) W_p(v) - W_p(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для любой $f \in V^*$ краевая задача (6)-(8) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.*

3 Аппроксимационная задача

При исследовании задачи (6)-(8) мы используем аппроксимационно-топологический подход к задачам гидродинамики [10]. Фактически мы исследуем аппроксимирующую задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$:

Аппроксимационная задача.

Найти функцию $v \in X$, которая для любого $\varphi \in X$ удовлетворяет следующему равенству

$$\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla(\Delta v):\ \nabla(\Delta\varphi)\,dx-\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx\ \nu\int\limits_\Omega\nabla v:\ \nabla\varphi\,dx$$

$$-\varkappa\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx-\varkappa\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx$$

$$+2\varkappa\int\limits_\Omega\Big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big):\ \nabla\varphi dx=\langle f,\varphi\rangle. \qquad (10)$$

Отметим, что (10) отличается от (9) наличием члена

$$\varepsilon\int\limits_\Omega\nabla(\Delta v):\ \nabla(\Delta\varphi)\,dx.$$

На первом шаге мы получаем априорную оценку равенства (10) в пространстве X и с помощью методов топологической степени показываем, что существует решение аппроксимирующей задачи в X. Также получаем в пространстве V оценку решения аппроксимирующей задачи, которая не зависит от параметра ε. Затем построим последовательность таких решений и покажем, что она имеет подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению краевой задачи (6)-(8) при стремлении параметра приближения ε к нулю.

Рассмотрим следующие операторы:

$$A: V\to V^*,\ \langle Av,\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\nabla v:\ \nabla\varphi\,dx,\ v,\varphi\in V;$$

$$N: X\to X^*,\ \langle Nv,\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\nabla(\Delta v):\ \nabla(\Delta\varphi)\,dx,\ v,\varphi\in X;$$

$$B_1: L_4(\Omega)^n\to V^*,\ \langle B_1(v),\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx,\ v\in L_4(\Omega)^n,\ \varphi\in V;$$

$$B_2 : V \to X^*,\ \langle B_2(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\ dx,\ v \in V,\ \varphi \in X;$$

$$B_3 : V \to X^*,\ \langle B_3(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\ dx,\ v \in V,\ \varphi \in X;$$

$$D : V \to X^*,\ \langle D(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) :\ \nabla\varphi\ dx,$$
$$v \in V,\ \varphi \in X;$$

Поскольку в равенстве (10) функция $\varphi \in X$ произвольна, это соотношение эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$\varepsilon N v + \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v) = f \tag{11}$$

Таким образом, слабым решением аппроксимирующей задачи является решение $\varphi \in X$ операторного уравнения (11).

Мы также определяем следующие операторы:

$$L : X \to X^*,\ L(v) = \varepsilon N v;$$
$$K : X \to X^*,\ K(v) = \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v).$$

Задача нахождения решения уравнения (11) эквивалентна задаче нахождения решения для следующего операторного уравнения:

$$L(v) + K(v) = f. \tag{12}$$

Мы будем использовать следующие утверждения (доказательства леммы (3.1) - леммы (3.4) можно найти, например, в [5]).

Лемма 3.1. *Оператор $A : V \to V^*$ непрерывен и имеет место оценка*

$$\| Av \|_{V^*} \leqslant C_1 \| v \|_V .$$

Более того, оператор $A : X \to X^*$ вполне непрерывен.

Лемма 3.2. *Оператор $L : X \to X^*$ непрерывен, обратим и для него имеет место оценка:*

$$\| Lv \|_{X^*} \leqslant \varepsilon \| v \|_X .$$

Более того, оператор $L^{-1} : X^* \to X$ вполне непрерывен.

Лемма 3.3. *Оператор $B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*$ непрерывен и имеет место следующая оценка:*

$$\| B_1 v \|_{V^*} \leqslant C_2 \| v \|^2_{L_4(\Omega)^n} .$$

Более того, оператор $B_1 : X \to X^*$ вполне непрерывен.

Лемма 3.4. *Отображение $B_i : V \to X^*, i = 2, 3$ непрерывно и имеет место следующая оценка:*

$$\| B_i v \|_{X^*} \leqslant C_3 \| v \|^2_V .$$

Боле того, оператор $B_i : X \to X^*$ полностью непрерывен.

Лемма 3.5. *Оператор $D : V \to X^*$ непрерывен и подчиняется оценке:*

$$\| D(v) \|_{X^*} \leqslant C_4 \| v \|^2_V . \tag{13}$$

Доказательство. Начнем о соценки $\mathcal{E}$ и W_ρ.

$$\| \mathcal{E}(v) \|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \| \mathcal{E}_{i,j}(v) \|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C_5 \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 dx$$

$$= C_5 \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx$$

$$= C_5 \sum_{i,j=1}^{n} \Bigg[\int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - 2 \int_\Omega v_i \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} dx + \int_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \Bigg]$$

$$= C_5\Big[\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v dx + \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v dx\Big] \leqslant 2C_5 \parallel v \parallel_V^2 .$$

Далее, $\parallel \mathcal{E} \parallel_{L_2(\Omega)} \leqslant C_6 \parallel v \parallel_V$.

$$\parallel (W_\rho)_{ij}(v) \parallel_{L_2(\Omega)} \leqslant \parallel (W_\rho)_{ij}(v) \parallel_{L_\infty(\Omega)}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sup_{x\in\Omega}\Big|\int\limits_\Omega \rho(x-y)(\frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j(y)}{\partial y_i})dy\Big|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sup_{x\in\Omega}\Big| - \frac{\partial\rho(x-y)}{\partial y_j}v_i(y) + \frac{\partial\rho(x-y)}{\partial y_i}v_j(y)dy\Big|$$

$$\leqslant \parallel grad\ \rho \parallel_{L_2(\Omega)} \parallel v(t) \parallel_{L_2(\Omega)} .$$

По определению, для любого $v \in V, \varphi \in X$ имеем

$$| \langle D(v), \varphi\rangle | = \Big|\int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) : \nabla\varphi dx\Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_7\Big[\|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)}\|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)} + \|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)}\|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)}\Big]\|\nabla\varphi\|_{C(\Omega)^n} \leqslant$$

$$\leqslant C_8\|v\|_V^2\|\varphi\|_X.$$

Отсюда получаем оценку 12. Теперь докажем, что оператор D непрерывен. Для любых $v^m, v^0 \in V$, имеем:

$$\Big|\langle D(v^m), \varphi\rangle - \langle D(v^0), \varphi\rangle\Big| = \Big|\int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v^m)W_\rho(v^m) - W_\rho(v^m)\mathcal{E}(v^m)\Big) : \nabla\varphi dx$$

$$-\int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v^0)W_\rho(v^0) - W_\rho(v^0)\mathcal{E}(v^0)\Big) : \nabla\varphi dx\Big| \leqslant C_9\Big|\int\limits_\Omega \mathcal{E}(v^m)W_\rho(v^m)$$

$$-W_\rho(v^m)\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0)W_\rho(v^0) + W_\rho(v^0)\mathcal{E}(v^0)dx\Big|\|\varphi\|_X$$

$$\leqslant C_9\Big|\int\limits_\Omega \mathcal{E}(v^m)\Big(W_\rho(v^m) - W_\rho(v^0)\Big) + \Big(\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0)\Big)W_\rho(v^0)$$

$$-W_\rho(v^m)\Big(\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0)\Big) - \Big(W_\rho(v^m) - W_\rho(v^0)\Big)\mathcal{E}(v^0)dx\Big|\|\varphi\|_X$$

$$
\leqslant C_{10}\Big[\|\mathcal{E}(v^m)\|_{L_2(\Omega)}\|W_\rho(v^m-v^0)\|_{L_2(\Omega)}+\|\mathcal{E}(v^m-v^0)\|_{L_2(\Omega)}
$$

$$
\times\|W_\rho(v^0)\|_{L_2(\Omega)}+\|W_\rho(v^m)\|_{L_2(\Omega)}\|\mathcal{E}(v^m-v^0)\|_{L_2(\Omega)}+\|W_\rho(v^m-v^0)\|_{L_2(\Omega)}
$$

$$
\times\|\mathcal{E}(v^0)\|_{L_2(\Omega)}\Big]\|\varphi\|_X\leqslant C_{11}\Big[\|v^m\|_V\|v^m-v^0\|_V+\|v^m-v^0\|_V\|v^0\|_V
$$

$$
+\|v^m\|_V\|v^m-v^0\|_V+\|v^m-v^0\|_V\|v^0\|_V\Big]\|\varphi\|_X
$$

$$
\leqslant C_{12}\Big(\|v^m\|_V+\|v^0\|_V\Big)\|v^m-v^0\|_V\|\varphi\|_X
$$

Таким образом, мы имеем $\|D(v^m)-D(v^0)\|_X\leqslant C_{13}(\|v^m\|_V+\|v^0\|_V)\|v^m-v^0\|_V$. Пусть последовательность $\{v^m\}\subset V$ сходится к некторой функции $v^0\in V$. Тогда непрерывность отображения $D:V\to X$ следует из предыдущего равенства. □

Лемма 3.6. *Оператор $K:X\to X^*$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Полная непрерывность оператора $K:X\to X^*$ следует из полной непрерывности следующих операторов

$A:X\to X^*$ Лемма 3.1
$B_1:X\to X^*$ Лемма 3.3
$B_2:X\to X^*$ Лемма 3.4
$B_3:X\to X^*$ Лемма 3.4
$D:X\to X^*$ Лемма 3.5

□

На ряду с уравнением 12 рассмотрим следующее семейство операторных уравнений:

$$
L(v)+\lambda K(v)=\lambda f,\ \lambda\in[0,1], \tag{14}
$$

что совпадает с уравнением 12 для $\lambda=1$.

Теорема 3.1. *Если $v\in X$ является решением операторного уравнения 14 для некоторых $\lambda\in[0,1]$, тогда справедлива следующая оценка:*

$$
\varepsilon\|v\|_X^2\leqslant C_{14},\ \text{где}\ C_{14}=\frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}. \tag{15}
$$

Более того, если $\lambda = 1$, тогда справедлива следующая оценка:

$$\nu\|v\|_V^2 \leqslant C_{15},\ \textit{где}\ C_{15} = \frac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu}. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $v \in X$ — решение 14. Тогда для любого $\varphi \in X$ выполняется уравнение:

$$\begin{gathered}
\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)dx - \lambda \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \lambda\nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx \\
-\lambda\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \lambda\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\
+2\lambda\varkappa \int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) :\ \nabla\varphi dx = \lambda\langle f, v\rangle
\end{gathered} \tag{17}$$

Запишем, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx$$

$$\begin{gathered}
= 2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = -2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \\
-2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = -2\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx.
\end{gathered}$$

Следовательно, 17 запишется в форме

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)dx - \lambda \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx$$

$$+\lambda\nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx + 2\lambda\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx$$

$$+2\lambda\varkappa \int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) : \nabla\varphi dx = \lambda\langle f, \varphi\rangle.$$

Поскольку последнее равенство выполняется для всех $\varphi \in X$, это верно для

$\varphi = v$ так же:

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi) dx - \lambda \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx$$
$$+\lambda\nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v dx + 2\lambda\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \tag{18}$$
$$+2\lambda\varkappa \int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) : \nabla v dx = \lambda\langle f, v\rangle.$$

Запишем слогаемое левой части уравнения 18 следующим образом:

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v) dx = \varepsilon \|v\|_X^2;$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i \frac{\partial (v_j v_j)}{\partial x_i} dx = -\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} v_j v_j dx = 0$$

$$\int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) : \nabla v dx = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) :$$
$$: \Big(\mathcal{E}(v) + W(v)\Big) dx = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) : \mathcal{E}(v) dx$$
$$+\frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) : W(v) dx = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int\limits_\Omega \mathcal{E}_{ij} (W_\rho)_{jk} \mathcal{E}_{ik}$$
$$-(W_\rho)_{jk} \mathcal{E}_{ki} \mathcal{E}_{ji}\Big) dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}_{ij} (W_\rho)_{jk} W_{ik} - (W_\rho)_{kj} \mathcal{E}_{ji} W_{ki}\Big) dx$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int\limits_\Omega \mathcal{E}_{ij} (W_\rho)_{jk} \mathcal{E}_{ik} - \mathcal{E}_{ij} (W_\rho)_{jk} \mathcal{E}_{ik} dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int\limits_\Omega \mathcal{E}_{ij} (W_\rho)_{jk} W_{ik}$$
$$-\mathcal{E}_{ij} (W_\rho)_{jk} W_{ik} dx = 0;$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx$$

$$+\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx\Bigg) = \int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial(\mathcal{E}_{ij}(v)\mathcal{E}_{ij}(v))}{\partial x_k}dx$$

$$= -\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{E}_{ij}(v)\mathcal{E}_{ij}(v)dx = 0.$$

Здесь указано, что тензор скорости дифформации $\mathcal{E}(u)$ симметричен, а тензоры $W_\rho(v)$ и $W(v)$ кососимметричны. Следовательно, уравнение 18 можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon\|v\|_X^2 + \lambda\nu\|v\|_V^2 = \lambda\langle f, v\rangle.$$

Используя верхнюю оценку правой части последнего уравнения.

$$\lambda\langle f, v\rangle \leqslant \lambda|\langle f, v\rangle| \leqslant \lambda\|f\|_{V^*}\|v\|_V \leqslant \|f\|_{V^*}\|v\|_V \leqslant \lambda\frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\delta} + \lambda\frac{\delta\|v\|_V^2}{2}$$

для $\delta = \nu$ имеем

$$\varepsilon\|v\|_X^2 + \lambda\nu\|v\|_V^2 \leqslant \lambda\frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} + \lambda\frac{\nu\|v\|_V^2}{2},$$

$$\varepsilon\|v\|_X^2 + \lambda\frac{\nu\|v\|_V^2}{2} \leqslant \lambda\frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}, \varepsilon\|v\|_X^2 \leqslant \lambda\frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} \leqslant \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}.$$

Аналогично для $\lambda = 1$ имеем $\nu\|v\|_V^2 \leqslant \lambda\frac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu}$. Это доказывает 15 и 16. □

Теорема 3.2. *Операторное уравнение 12 имеет хотя бы одно слабое решение* $v \in X$ *:*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы мы используем теорию степени Лере-Шаудера для вполне непрерывных векторных полей. В силу априорной оценки 15, все решения семейства уравнений 14 содержатся в шаре $B_R \subset X$ радиуса $R = C_{14} + 1$. По лемме 3.6 отображение $[-K(\cdot) + f] : X \to X^*$ вполне непрерывно. В силу леммы 3.2 оператор $L^{-1} : X^* \to X$ непрерывен.

Таким образом, отображение $L^{-1}[-K(\cdot) + f] : X \to X$ вполне непрерывно. Тогда отображение $G : [0, 1] \times X \to X, G(\lambda, v) = \lambda L^{-1}[-K(v) + f]$ полностью непрерывно по двумерному аргументу (λ, v). Из сказанного выше получаем, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi(\lambda, v) = v - G(\lambda, v)$

не обращается в нуль на границе B_R. По гомотопической инвариантности степени получаем

$$deg_{LS}(\Phi(0,\cdot), B_R, 0) = deg_{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0).$$

Напомним, что $\Phi(0,\cdot) = I$ и по свойству нормализации степени $deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$. Следовательно, $deg_{LS}((1,\cdot), BR.0) = 1$.

Таким образом, мы видим, что существует по крайней мере одно решение $v \in X$ уравнения

$$v - L^{-1}[-K(v) + f] = 0$$

и следовательно в уравнении 12.

Поскольку существует решение $v \in X$ уравнения 12, из сказанного выше следует, что аппроксимирующая задача имеет хотя бы одно слабое решение $v \in X$. □

4 Доказательство теоремы 2.1

Доказательство. В (9) возьмем $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$. Последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to +\infty$. По теореме 3.2 для любого ε_m существует слабое решение $v_m \in X \subset V$ задачи аппроксимации. Таким образом, каждое v_m удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon_m \int_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi) dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi dx$$
$$-\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx$$
$$+2\varkappa \int_\Omega \Big(\mathcal{E}(v_m) W_\rho(v_m) - W_\rho(v_m)\mathcal{E}(v_m) \Big) : \nabla\varphi dx = \langle f, \varphi \rangle. \tag{19}$$

Тогда по определению слабой сходимости

$$\nu \int_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi dx \to \nu \int_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi dx \text{ и } m \to +\infty,\ \varphi \in X.$$

Тогда без ограничения общности (переходя при необходимости к последовательности) из (3.6) получаем, что

$$\lim_{m\to\infty}\left|\varepsilon_m\int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m):\nabla(\Delta\varphi)dx\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sqrt{\varepsilon_m}\lim_{m\to\infty}\left|\sqrt{\varepsilon_m}\int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m):\nabla(\Delta\varphi)dx\right|$$

таким образом мы получаем

$$\varepsilon_m\int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m):\nabla(\Delta\varphi)dx\to 0,\ m\to+\infty.$$

Для остальных интегралов имеем

$$\varkappa\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k\frac{\partial(v_m)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx\to\varkappa\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k\frac{\partial(v_*)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx,$$
$$m\to+\infty;$$

$$\varkappa\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k\frac{\partial(v_m)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx\to\varkappa\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k\frac{\partial(v_*)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx,$$
$$m\to+\infty;$$

Действительно, последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$ и $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^{n^2}$. Таким образом, результат сходится к произведению пределов. В итоге мы имеем

$$\int\limits_{\Omega}\left(\mathcal{E}(v_m)W_\rho(v_m)-\mathcal{E}(v_*)W_\rho(v_*)\right):\nabla\varphi dx$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left(\mathcal{E}(v_m)(W_\rho(v_m)-W_\rho(v_*))+(\mathcal{E}(v_m)-\mathcal{E}(v_*))W_\rho(v_*)\right):\nabla\varphi dx$$

$$\leq ||\mathcal{E}(v_m)||_{L_2(\Omega)}||\nabla\varphi||_{L_2(\Omega)}||W_\rho(v_m-v_*)||_{L_\infty(\Omega)}+$$

$$+||W_\rho(v_*)||_{L_\infty(\Omega)}\int\limits_{\Omega}\mathcal{E}(v_m-v_*):\nabla\varphi dx$$

$$\leq ||\mathcal{E}(v_m)||_{L_2(\Omega)}||\nabla\varphi||_{L_2(\Omega)}||(v_m-v_*)||_{L_2(\Omega)}+$$

$$+||W_\rho(v_*)||_{L_\infty(\Omega)}\int\limits_{\Omega}\mathcal{E}(v_m-v_*):\nabla\varphi dx$$

$$\leq ||\mathcal{E}(v_m)||_{L_2(\Omega)}||\nabla\varphi||_{L_2(\Omega)}||(v_m-v_*)||_{L_4(\Omega)}+$$

$$+||W_\rho(v_*)||_{L_\infty(\Omega)}\int\limits_{\Omega}\mathcal{E}(v_m-v_*):\nabla\varphi dx.$$

Напомним, что последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$ и $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^{n^2}$. Следовательно, мы имеем

$$\int\limits_{\Omega}\mathcal{E}(v_m)W_\rho(v_m):\nabla\varphi dx\to\int\limits_{\Omega}\mathcal{E}(v_*)W_\rho(v_*):\nabla\varphi dx,\ m\to+\infty.$$

Аналогично получаем

$$\int\limits_{\Omega}W_\rho(v_m)\mathcal{E}(v_m):\nabla\varphi dx\to\int\limits_{\Omega}W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*):\nabla\varphi dx,\ m\to+\infty.$$

Таким образом, переходя к пределу в уравнении (19) при $m\to+\infty$, мы видим, что предельная функция v_* удовлетворяет следующему уравнению:

$$\nu \int\limits_{\Omega} \nabla v_* : \nabla \varphi dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx$$

$$-\varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx +$$

$$+2\varkappa \int\limits_{\Omega} \Big(\mathcal{E}(v_*) W_\rho(v_*) - W_\rho(v_*) \mathcal{E}(v_*) \Big) : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Это доказывает, что $v_* \in V$. Это завершает доказательство теоремы 2.1. $\square$