

Содержание

1	Введение	2
2	Слабое решение	5
3	Аппроксимационная задача	6
4	Доказательство теоремы 2.1	15
5	Список литературы	18

1 Введение

Движение несжимаемой жидкости с постоянной плотностью, имеющую ограниченную область $\Omega \subset R^n, n = 2, 3$ на временном интервале $[0, T), T > 0$, описывается системой уравнений Коши вида (см., пример [1]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + grad p = Div \sigma + f \quad (1)$$

$$div v = 0, (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \quad (2)$$

где $v(x, t) = (v_1, \dots, v_n)$ — вектор скорости частицы в точке x в момент времени t , (v_1, \dots, v_n) — компоненты v , $p = p(x, t)$ — давление жидкости в точке x в момент времени t , а $f = f(x, t)$ — это плотность внешних сил (также называется объемом), действующих на жидкость. Символ Div обозначает вектор

$$\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{nj}}{\partial x_j} \right),$$

координаты которого представляют собой расхожимость строк матрицы $\sigma = (\sigma_{ij}, (x))$, где σ — девиатор тензора напряжений.

Система 1 - 2 описывает потоки всех видов жидкостей, но содержит девиатор тензора напряжений, который не выражается явно через неизвестные системы. Как правило, для выражения девиатора тензора напряжений через неизвестные системы 1 - 2 используются соотношения между девиатором тензора напряжений и тензором скоростей деформации $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}(v))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}, \mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, и их производные по времени. Устанавливая связь между девиатором тензора напряжений и тензором скоростей деформации и их производных, мы определяем тип жидкости. Это отношение называется конститутивным или реологическим соотношением и обычно получается методом механистической модели (см., Например, [2]). В реологии реальная структура часто заменяется некоторой моделью, предполагая, что поведение этой модели аналогично поведению структуры. Эта модель состоит из элементов, которых нет в реальном корпусе: пружин, поршней, подъемников и т.д. Обратите внимание, что эти соотноше-

ния являются гипотезами, которые необходимо проверить для конкретных жидкостей экспериментальными данными.

Реологическое соотношение, описывающее движение вязкоупругой среды, имеет следующий вид:

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E} + 2\kappa\dot{\mathcal{E}}, \quad (3)$$

где $\nu > 0$ — вязкость жидкости, а $\kappa > 0$ — время замедления (задержки). Эта модель движения жидкости описывает движение вязкой неньютоновской жидкости, которой требуется время, чтобы начать движение под действием мгновенно приложенной силы.

В реологическом соотношении 3 мы имеем производную по времени $\dot{\mathcal{E}}$. К сожалению, метод механистических моделей не указывает, какой вывод мы должны использовать (полную, частную или любую специальную производную). Матерматические исследования начались с рассмотрения частной производной в 3. Соответствующая модель называется моделью Фойгта. Затем А.П. Осколков рассмотрел случай полной производной [3]. Но позже в его работе были обнаружены ошибки [4]. В работе [5] дано полное доказательство существования слабых решений в модели 1 - 2 с полной производной. Отметим, что стационарный случай этой задачи рассматривался в [6].

В последние годы рациональная механика [7] повлияла на ученых таким образом, что они начали исследовать реологические отношения, которые не зависят от наблюдателя, то есть они не изменяются при галилеевской замене переменных:

$$t^* = t + a, \quad (4)$$

$$x^* = x_0^*(t) + Q(t)(t - t_0), \quad (5)$$

где a — значение времени, x_0 — точка в пространстве, x_0^* — функция времени, функция со значениями в наборе ортогомальных тензоров.

Другими словами, если исходная тензорная функция изменяется по закону 4 - 5, будет ли реологическое соотношение одинаковым в разных системах отсчета? В случае частных и полных производных ответ отрицательный. Понятие объективной производной позволяет дать утвердительный ответ на этот вопрос.

Определение 1.1. Пусть G — симметричная тензорнозначная функция двух тензорных аргументов, а $T(t, x)$ — симметричная тензорнозначная функция. Оператор формы

$$\frac{DT(t, x)}{Dt} = \frac{dT(t, x)}{dt} + G(\nabla v(t, x), T(t, x))$$

называется объективной производной, если при любой замене системы отсчета 4 - 5 выполняется равенство

$$\frac{D^*T^*(t, x)}{Dt^*} = Q(t)\frac{DT(t, x)}{Dt}Q(t)^T$$

выполняется для всех симметричных тензорнозначных функций, не зависящих от реперименной $T(t, x)$.

Примером объективной производной тензора является сглаженная производная Яуманна (см. [8]):

$$\frac{DT(t, x)}{Dt} = \frac{dT(t, x)}{dt} + T(t, x)W_\rho(t, x) - W_\rho(t, x)T(t, x),$$

$$W_\rho(v)(t, x) = \int_{R^n} \rho(x - y)W(x - y)dy,$$

где $\rho : R^n \rightarrow R$ — гладкая функция с компактным носителем такая, что $\int_{R^n} \rho(y)dy = 1$ и $\rho(x) = \rho(v)$ для x и y с одинаковой Евклидовой нормой:

$$W(v) = (W_{ij}(v))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}, W_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

является тензором завихренности. Подставляя правую часть 3 со сглаженной производной Яуманна для v в уравнения 1 - 2 для стационарного случая, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - 2\kappa \text{Div} \left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k} \right) - \\ & - 2\kappa \text{Div} \left(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v) \right) + \text{grad } p = f, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega. \quad (7)$$

Для системы (6)-(7) рассмотрим краевую задачу с граничным условием

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (8)$$

В настоящей работе исследуется существование слабого решения краевой задачи (6)-(8), описывающее движение слабых водных растворов полимеров, заполняющих ограниченную область $\Omega \in R^n$, $n = 2, 3$, которая определяется реологическим соотношением со сглаженной производной Яуманна.

Для исследования используются аппроксимационные и топологические методы (см., например, [9], [10]). Краевая задача рассматривается, как операторное уравнение. Используемые операторы часто не обладают хорошими свойствами, поэтому рассматривается некоторая аппроксимация этого уравнения. Затем разрешимость этого аппроксимирующего уравнения исследуется в более сглаженном пространстве. Для этого применяется техника топологической степени Лере-Шаудера. Последний шаг — предельный переход в аппроксимирующем уравнении, поскольку аппроксимирующие параметры стремятся к нулю, а решения аппроксимирующего уравнения сходятся к решению исходного уравнения.

2 Слабое решение

Обозначим через $C_0^\infty(\Omega)^n$ пространство функций класса C^∞ , отображаемых из Ω в R^n с компактным носителем в Ω . Также нам потребуется определение следующего функционального пространства

$$\mathcal{V} = \{v(x) = (v_1, \dots, v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\};$$

V - замыкание на \mathcal{V} по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$ со скалярным произведением

$$((v, w)) = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla w dx.$$

Здесь символ $\nabla v : \nabla w, v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n)$, определяется через покомпактное метрическое умножение

$$\nabla v : \nabla w = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$$

Пусть X - замыкание по V относительно нормы пространства $W_2^3(\Omega)^n$. Рассмотрим пространство X с нормой:

$$\|v\|_X = \left(\int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v) dx \right)^{1/2}.$$

Определение 2.1. Пусть f принадлежит V^* . Слабым решением краевой задачи (6)-(8) называется функция $v \in V$ такая, что для любого $\varphi \in X$ она удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \\ \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + \\ + 2\kappa \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v) W_p(v) - W_p(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 2.1. Для любой $f \in V^*$ краевая задача (6)-(8) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.

3 Аппроксимационная задача

При исследовании задачи (6)-(8) мы используем аппроксимационно-топологический подход к задачам гидродинамики [10]. Фактически мы исследуем аппроксимирующую задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$:

Аппроксимационная задача.

Найти функцию $v \in X$, которая для любого $\varphi \in X$ удовлетворяет

следующему равенству

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx \\
& - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\
& + 2\kappa \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E}(v) \right) : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle. \tag{10}
\end{aligned}$$

Отметим, что (10) отличается от (9) наличием члена

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx.$$

На первом шаге мы получаем априорную оценку равенства (10) в пространстве X и с помощью методов топологической степени показываем, что существует решение аппроксимирующей задачи в X . Также получаем в пространстве V оценку решения аппроксимирующей задачи, которая не зависит от параметра ε . Затем построим последовательность таких решений и покажем, что она имеет подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению краевой задачи (6)-(8) при стремлении параметра приближения ε к нулю.

Рассмотрим следующие операторы:

$$A : V \rightarrow V^*, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx, \quad v, \varphi \in V;$$

$$N : X \rightarrow X^*, \quad \langle Nv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx, \quad v, \varphi \in X;$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \rightarrow V^*, \quad \langle B_1(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n, \quad \varphi \in V;$$

$$B_2 : V \rightarrow X^*, \langle B_2(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \quad v \in V, \quad \varphi \in X;$$

$$B_3 : V \rightarrow X^*, \langle B_3(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \quad v \in V, \quad \varphi \in X;$$

$$D : V \rightarrow X^*, \langle D(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E}(v) \right) : \nabla \varphi \, dx, \\ v \in V, \quad \varphi \in X;$$

Поскольку в равенстве (10) функция $\varphi \in X$ произвольна, это соотношение эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$\varepsilon Nv + \nu Av - B_1(v) - \kappa B_2(v) - \kappa B_3(v) + 2\kappa D(v) = f \quad (11)$$

Таким образом, слабым решением аппроксимирующей задачи является решение $\varphi \in X$ операторного уравнения (11).

Мы также определяем следующие операторы:

$$L : X \rightarrow X^*, \quad L(v) = \varepsilon Nv; \\ K : X \rightarrow X^*, \quad K(v) = \nu Av - B_1(v) - \kappa B_2(v) - \kappa B_3(v) + 2\kappa D(v).$$

Задача нахождения решения уравнения (11) эквивалентна задаче нахождения решения для следующего операторного уравнения:

$$L(v) + K(v) = f. \quad (12)$$

Мы будем использовать следующие утверждения (доказательства леммы (3.1) - леммы (3.4) можно найти, например, в [5]).

Лемма 3.1. Оператор $A : V \rightarrow V^*$ непрерывен и имеет место оценка

$$\| Av \|_{V^*} \leq C_1 \| v \|_V .$$

Более того, оператор $A : X \rightarrow X^*$ вполне непрерывен.

Лемма 3.2. Оператор $L : X \rightarrow X^*$ непрерывен, обратим и для него имеет место оценка:

$$\| Lv \|_{X^*} \leq \varepsilon \| v \|_X .$$

Более того, оператор $L^{-1} : X^* \rightarrow X$ вполне непрерывен.

Лемма 3.3. Оператор $B_1 : L_4(\Omega)^n \rightarrow V^*$ непрерывен и имеет место следующая оценка:

$$\| B_1 v \|_{V^*} \leq C_2 \| v \|_{L_4(\Omega)^n}^2 .$$

Более того, оператор $B_1 : X \rightarrow X^*$ вполне непрерывен.

Лемма 3.4. Отображение $B_i : V \rightarrow X^*, i = 2, 3$ непрерывно и имеет место следующая оценка:

$$\| B_i v \|_{X^*} \leq C_3 \| v \|_V^2 .$$

Более того, оператор $B_i : X \rightarrow X^*$ полностью непрерывен.

Лемма 3.5. Оператор $D : V \rightarrow X^*$ непрерывен и подчиняется оценке:

$$\| D(v) \|_{X^*} \leq C_4 \| v \|_V^2 . \quad (13)$$

Доказательство. Начнем с оценки \mathcal{E} и W_ρ .

$$\begin{aligned} \| \mathcal{E}(v) \|_{L_2(\Omega)}^2 &= \sum_{i,j=1}^n \| \mathcal{E}_{i,j}(v) \|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_5 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 dx \\ &= C_5 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx \\ &= C_5 \sum_{i,j=1}^n \left[\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - 2 \int_{\Omega} v_i \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \right] \end{aligned}$$

$$= C_5 \left[\int_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx + \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx \right] \leq 2C_5 \|v\|_V^2.$$

Далее, $\|\mathcal{E}\|_{L_2(\Omega)} \leq C_6 \|v\|_V$.

$$\begin{aligned} & \| (W_\rho)_{ij}(v) \|_{L_2(\Omega)} \leq \| (W_\rho)_{ij}(v) \|_{L_\infty(\Omega)} \\ & \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega} \rho(x-y) \left(\frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j(y)}{\partial y_i} \right) dy \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in \Omega} \left| - \frac{\partial \rho(x-y)}{\partial y_j} v_i(y) + \frac{\partial \rho(x-y)}{\partial y_i} v_j(y) dy \right| \\ & \leq \| \text{grad } \rho \|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

По определению, для любого $v \in V, \varphi \in X$ имеем

$$\begin{aligned} |\langle D(v), \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v) \right) : \nabla \varphi dx \right| \leq \\ & \leq C_7 \left[\|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)} \|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)} + \|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)} \|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)} \right] \|\nabla \varphi\|_{C(\Omega)^n} \leq \\ & \leq C_8 \|v\|_V^2 \|\varphi\|_X. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку 12. Теперь докажем, что оператор D непрерывен.

Для любых $v^m, v^0 \in V$, имеем:

$$\begin{aligned} \left| \langle D(v^m), \varphi \rangle - \langle D(v^0), \varphi \rangle \right| &= \left| \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v^m) W_\rho(v^m) - W_\rho(v^m) \mathcal{E}(v^m) \right) : \nabla \varphi dx \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v^0) W_\rho(v^0) - W_\rho(v^0) \mathcal{E}(v^0) \right) : \nabla \varphi dx \right| \leq C_9 \left| \int_{\Omega} \mathcal{E}(v^m) W_\rho(v^m) \right. \\ & \quad \left. - W_\rho(v^m) \mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0) W_\rho(v^0) + W_\rho(v^0) \mathcal{E}(v^0) dx \right| \|\varphi\|_X \\ & \leq C_9 \left| \int_{\Omega} \mathcal{E}(v^m) \left(W_\rho(v^m) - W_\rho(v^0) \right) + \left(\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0) \right) W_\rho(v^0) \right. \\ & \quad \left. - W_\rho(v^m) \left(\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0) \right) - \left(W_\rho(v^m) - W_\rho(v^0) \right) \mathcal{E}(v^0) dx \right| \|\varphi\|_X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_{10} \left[\|\mathcal{E}(v^m)\|_{L_2(\Omega)} \|W_\rho(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathcal{E}(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)} \right. \\
&\times \|W_\rho(v^0)\|_{L_2(\Omega)} + \|W_\rho(v^m)\|_{L_2(\Omega)} \|\mathcal{E}(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)} + \|W_\rho(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)} \\
&\times \left. \|\mathcal{E}(v^0)\|_{L_2(\Omega)} \right] \|\varphi\|_X \leq C_{11} \left[\|v^m\|_V \|v^m - v^0\|_V + \|v^m - v^0\|_V \|v^0\|_V \right. \\
&\quad \left. + \|v^m\|_V \|v^m - v^0\|_V + \|v^m - v^0\|_V \|v^0\|_V \right] \|\varphi\|_X \\
&\leq C_{12} \left(\|v^m\|_V + \|v^0\|_V \right) \|v^m - v^0\|_V \|\varphi\|_X
\end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем $\|D(v^m) - D(v^0)\|_X \leq C_{13}(\|v^m\|_V + \|v^0\|_V)\|v^m - v^0\|_V$. Пусть последовательность $\{v^m\} \subset V$ сходится к некоторой функции $v^0 \in V$. Тогда непрерывность отображения $D : V \rightarrow X$ следует из предыдущего равенства. \square

Лемма 3.6. *Оператор $K : X \rightarrow X^*$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Полная непрерывность оператора $K : X \rightarrow X^*$ следует из полной непрерывности следующих операторов

$$A : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 3.1}$$

$$B_1 : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 3.3}$$

$$B_2 : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 3.4}$$

$$B_3 : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 3.4}$$

$$D : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 3.5}$$

\square

На ряду с уравнением 12 рассмотрим следующее семейство операторных уравнений:

$$L(v) + \lambda K(v) = \lambda f, \quad \lambda \in [0, 1], \quad (14)$$

что совпадает с уравнением 12 для $\lambda = 1$.

Теорема 3.1. *Если $v \in X$ является решением операторного уравнения 14 для некоторых $\lambda \in [0, 1]$, тогда справедлива следующая оценка:*

$$\varepsilon \|v\|_X^2 \leq C_{14}, \quad \text{где } C_{14} = \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}. \quad (15)$$

Более того, если $\lambda = 1$, тогда справедлива следующая оценка:

$$\nu \|v\|_V^2 \leq C_{15}, \text{ где } C_{15} = \frac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu}. \quad (16)$$

Доказательство. Пусть $v \in X$ — решение 14. Тогда для любого $\varphi \in X$ выполняется уравнение:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \lambda \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx \\ & - \lambda \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \lambda \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\ & + 2\lambda \varkappa \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E}(v) \right) : \nabla \varphi dx = \lambda \langle f, v \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

Запишем, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\ & = 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t) \mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = -2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \\ & - 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = -2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx. \end{aligned}$$

Следовательно, 17 запишется в форме

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \\ & + \lambda \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + 2\lambda \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \\ & + 2\lambda \varkappa \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E}(v) \right) : \nabla \varphi dx = \lambda \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку последнее равенство выполняется для всех $\varphi \in X$, это верно для

$\varphi = v$ так же:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \\
& + \lambda \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx + 2\lambda \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \\
& + 2\lambda \varkappa \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E}(v) \right) : \nabla v dx = \lambda \langle f, v \rangle.
\end{aligned} \tag{18}$$

Запишем слогаемое левой части уравнения 18 следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v) dx = \varepsilon \|v\|_X^2; \\
& \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i \frac{\partial(v_j v_j)}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} v_j v_j dx = 0 \\
& \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E}(v) \right) : \nabla v dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E}(v) \right) : \\
& : \left(\mathcal{E}(v) + W(v) \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E}(v) \right) : \mathcal{E}(v) dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E}(v) \right) : W(v) dx = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} \mathcal{E}_{ik} \\
& - (W_{\rho})_{jk} \mathcal{E}_{ki} \mathcal{E}_{ji} dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} W_{ik} - (W_{\rho})_{kj} \mathcal{E}_{ji} W_{ki} \right) dx \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} \mathcal{E}_{ik} - \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} \mathcal{E}_{ik} dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} W_{ik} \\
& - \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} W_{ik} dx = 0; \\
& \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \Big) = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial (\mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(v))}{\partial x_k} dx \\
& = - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \sum_{i,j=1}^n \mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(v) dx = 0.
\end{aligned}$$

Здесь указано, что тензор скорости деформации $\mathcal{E}(u)$ симметричен, а тензоры $W_{\rho}(v)$ и $W(v)$ кососимметричны. Следовательно, уравнение 18 можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon \|v\|_X^2 + \lambda \nu \|v\|_V^2 = \lambda \langle f, v \rangle.$$

Используя верхнюю оценку правой части последнего уравнения.

$$\lambda \langle f, v \rangle \leq \lambda |\langle f, v \rangle| \leq \lambda \|f\|_{V^*} \|v\|_V \leq \|f\|_{V^*} \|v\|_V \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\delta} + \lambda \frac{\delta \|v\|_V^2}{2}$$

для $\delta = \nu$ имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon \|v\|_X^2 + \lambda \nu \|v\|_V^2 & \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} + \lambda \frac{\nu \|v\|_V^2}{2}, \\
\varepsilon \|v\|_X^2 + \lambda \frac{\nu \|v\|_V^2}{2} & \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}, \quad \varepsilon \|v\|_X^2 \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} \leq \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}.
\end{aligned}$$

Аналогично для $\lambda = 1$ имеем $\nu \|v\|_V^2 \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu}$. Это доказывает 15 и 16. \square

Теорема 3.2. *Операторное уравнение 12 имеет хотя бы одно слабое решение $v \in X$:*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы мы используем теорию степени Лере-Шаудера для вполне непрерывных векторных полей. В силу априорной оценки 15, все решения семейства уравнений 14 содержатся в шаре $B_R \subset X$ радиуса $R = C_{14} + 1$. По лемме 3.6 отображение $[-K(\cdot) + f] : X \rightarrow X^*$ вполне непрерывно. В силу леммы 3.2 оператор $L^{-1} : X^* \rightarrow X$ непрерывен.

Таким образом, отображение $L^{-1}[-K(\cdot) + f] : X \rightarrow X$ вполне непрерывно. Тогда отображение $G : [0, 1] \times X \rightarrow X$, $G(\lambda, v) = \lambda L^{-1}[-K(v) + f]$ полностью непрерывно по двумерному аргументу (λ, v) . Из сказанного выше получаем, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi(\lambda, v) = v - G(\lambda, v)$

не обращается в нуль на границе B_R . По гомотопической инвариантности степени получаем

$$\deg_{LS}(\Phi(0, \cdot), B_R, 0) = \deg_{LS}(\Phi(1, \cdot), B_R, 0).$$

Напомним, что $\Phi(0, \cdot) = I$ и по свойству нормализации степени $\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$. Следовательно, $\deg_{LS}((1, \cdot), B_R, 0) = 1$.

Таким образом, мы видим, что существует по крайней мере одно решение $v \in X$ уравнения

$$v - L^{-1}[-K(v) + f] = 0$$

и следовательно в уравнении 12.

Поскольку существует решение $v \in X$ уравнения 12, из сказанного выше следует, что аппроксимирующая задача имеет хотя бы одно слабое решение $v \in X$. \square

4 Доказательство теоремы 2.1

Доказательство. В (9) возьмем $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$. Последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \rightarrow +\infty$. По теореме 3.2 для любого ε_m существует слабое решение $v_m \in X \subset V$ задачи аппроксимации. Таким образом, каждое v_m удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \varepsilon_m \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v_m : \nabla \varphi dx \\ - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\ + 2\kappa \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v_m) W_{\rho}(v_m) - W_{\rho}(v_m) \mathcal{E}(v_m) \right) : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда по определению слабой сходимости

$$\nu \int_{\Omega} \nabla v_m : \nabla \varphi dx \rightarrow \nu \int_{\Omega} \nabla v_* : \nabla \varphi dx \text{ и } m \rightarrow +\infty, \varphi \in X.$$

Тогда без ограничения общности (переходя при необходимости к последовательности) из (3.6) получаем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \varepsilon_m \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) dx \right| = \\ & = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\varepsilon_m} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sqrt{\varepsilon_m} \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) dx \right| \end{aligned}$$

таким образом мы получаем

$$\varepsilon_m \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) dx \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty.$$

Для остальных интегралов имеем

$$\begin{aligned} \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial(v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx & \rightarrow \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial(v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \\ & m \rightarrow +\infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial(v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx & \rightarrow \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial(v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \\ & m \rightarrow +\infty; \end{aligned}$$

Действительно, последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$ и $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^{n^2}$. Таким образом, результат сходится

к произведению пределов. В итоге мы имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v_m) W_{\rho}(v_m) - \mathcal{E}(v_*) W_{\rho}(v_*) \right) : \nabla \varphi dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v_m) (W_{\rho}(v_m) - W_{\rho}(v_*)) + (\mathcal{E}(v_m) - \mathcal{E}(v_*)) W_{\rho}(v_*) \right) : \nabla \varphi dx \\
&\leq \| \mathcal{E}(v_m) \|_{L_2(\Omega)} \| \nabla \varphi \|_{L_2(\Omega)} \| W_{\rho}(v_m - v_*) \|_{L_{\infty}(\Omega)} + \\
&\quad + \| W_{\rho}(v_*) \|_{L_{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla \varphi dx \\
&\leq \| \mathcal{E}(v_m) \|_{L_2(\Omega)} \| \nabla \varphi \|_{L_2(\Omega)} \| (v_m - v_*) \|_{L_2(\Omega)} + \\
&\quad + \| W_{\rho}(v_*) \|_{L_{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla \varphi dx \\
&\leq \| \mathcal{E}(v_m) \|_{L_2(\Omega)} \| \nabla \varphi \|_{L_2(\Omega)} \| (v_m - v_*) \|_{L_4(\Omega)} + \\
&\quad + \| W_{\rho}(v_*) \|_{L_{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla \varphi dx.
\end{aligned}$$

Напомним, что последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$ и $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^{n^2}$. Следовательно, мы имеем

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(v_m) W_{\rho}(v_m) : \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{E}(v_*) W_{\rho}(v_*) : \nabla \varphi dx, \quad m \rightarrow +\infty.$$

Аналогично получаем

$$\int_{\Omega} W_{\rho}(v_m) \mathcal{E}(v_m) : \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} W_{\rho}(v_*) \mathcal{E}(v_*) : \nabla \varphi dx, \quad m \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, переходя к пределу в уравнении (19) при $m \rightarrow +\infty$, мы

видим, что предельная функция v_* удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \nabla v_* : \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\ - \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + \\ + 2\varkappa \int_{\Omega} \left(\mathcal{E}(v_*) W_{\rho}(v_*) - W_{\rho}(v_*) \mathcal{E}(v_*) \right) : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Это доказывает, что $v_* \in V$. Это завершает доказательство теоремы 2.1. \square

5 Список литературы

[1] R.V.Goldstein, V.A. Gorodtsov, Mechanics of Continuous Media, Part 1; Fundamentals and Classical Models of Fluids, Nauka, Fizmatlit, Moscow, 2000, (in Russian).

[2] M. Reiner, Rheology, Handbuch der Physik, S, Flugge (Ed.), Bd. VI, Springer, 1958.

[3] A.P. Oskolkov, On some quasilinear systems occuring in the study of motion of viscous fluids, Zap. Nauchn. Semin. Leningr, Otd. Mat. Inst. Steklova, 52(1975), 128-157, (in Russian).

[4] O.A. Ladyzhenskaya, On some gaps in two of my papers on the Navier-Stokes equations and the way of closing them, Zap. Nauchn. Semin, POMI, 271(2000), 151-155, (in Russian).

[5] V.G. Zvyagin, M.V. Turbin, Mathematical problems of viscoelastic media hydrodynamics, Krasand (URSS), Moscow, 2012, (in Russian).

[6] A.V. Zvyagin, Solvability of a stationary model of motion of weak aqueous polymer solutions, Russian Mathematics (Iz. VUZ), 55(2011), no. 2, 90-92.

[7] C. Truesdell, A First Course in Rational Continuum Mechanics, The John Hopkins University, Baltimore, 1972.

[8] V.G. Zvyagin, D.A. Vorotnikov, Approximating-topological methods in some problems of hydrodynamics, J. Fixed Point Theory Appl., 3(2008), no. 1, 23-49.

[9] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces, De Gruyter Series In Nonlinear Anal. Appl., 7, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2001.

[10] V.G. Zvyagin, D.A. Vorotnikov, Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics, De Gruyter Series in Nonlinear Anal. Appl., 12, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2008.