

# Содержание

1	Слабое условие	2
2	Аппроксимационная задача	3
3	Доказательство теоремы 2.1	11

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_j} - \nu \Delta v - 2\kappa \operatorname{Div} \left( v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k} \right) -$$

$$- 2\kappa \operatorname{Div} \left( \mathcal{E}(v) W_p(v) - W_p(v) \mathcal{E}(v) \right) + \operatorname{grad} p = f, x \in \Omega \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, x \in \Omega \quad (2)$$

Для системы (1)-(2) рассмотрим краевую задачу с граничным условием

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

В настоящей работе исследуется существование слабого решения краевой задачи (1)-(3), описывающего движение слабых водных растворов полимеров, заполняющих ограниченную область  $\Omega \in R^n$ ,  $n = 2, 3$ , которое определяется реологическим соотношением со сглаженной производной Яуманна.

Для исследования используются аппроксимационные и топологические методы (см., например, [9], [10]). Краевая задача рассматривается как операторное уравнение. Используемые операторы часто не обладают хорошими свойствами, поэтому рассматривается некоторая аппроксимация этого уравнения. Затем разрешимость этого аппроксимирующего уравнения исследуется в более сглаженном пространстве. Для этого применяется техника топологической степени Лере-Шаудера. Последний шаг - предельный переход в аппроксимирующем уравнении, поскольку аппроксимирующие параметры стремятся к нулю, а решения аппроксимирующего уравнения сходятся к решению исходного уравнения.

## 1 Слабое условие

Обозначим через  $C_0^\infty(\Omega)^n$  пространство функций класса  $C^\infty$ , отображаемых  $\Omega$  в  $R^n$  с компактным носителем в  $\Omega$ . Также нам потребуется определение следующих функциональных пространств

$$\mathcal{V} = \{v(x) = (v_1, \dots, v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0;\}$$

$V$  - замыкание на  $\mathcal{V}$  по норме пространства  $W_2^1(\Omega)^n$  со скалярным произведением

$$((v, w)) = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla w dx.$$

Здесь символ  $\nabla v : \nabla w, v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n)$ , обозначает поком-  
пактное метрическое умножение

$$\nabla v : \nabla w = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$$

Пусть  $X$  - замыкание  $V$  относительно нормы пространства  $W_2^3(\Omega)^n$ . Рассмотрим пространство  $X$  с нормой:

$$\|v\|_X = \left( \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v) dx \right)^{1/2}$$

**Определение 1.1.** Пусть  $f$  принадлежит  $V^*$ . Слабым решением краевой задачи (1)-(3) называется функция  $v \in V$  такая, что для любого  $y \in X$  она удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla w dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k} dx - \\ & \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k} dx + \\ & + 2\varkappa \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v) W_p(v) - W_p(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

**Теорема 1.1.** Для любой  $f \in V^*$  краевая задача (1)-(3) имеет хотя бы одно слабое решение  $v_* \in V$

## 2 Аппроксимационная задача

При исследовании задачи (1)-(3) мы используем аппроксимационно-топологический подход к задачам гидродинамики [10]. Фактически мы

исследуем аппроксимирующую задачу с малым параметром  $\varepsilon > 0$ :

Аппроксимационная задача.

Найти функцию  $v \in X$ , которая для любого  $\varphi \in X$  удовлетворяет следующему равенству

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx \\ & - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\ & + 2\kappa \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что (5) отличается от (4) наличием члена

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx.$$

На первом шаге мы получаем априорную оценку равенства (5) в пространстве  $X$  и с помощью методов топологической степени показываем, что существует решение аппроксимирующей задачи в  $X$ . Также получаем в пространстве  $V$  оценку решения аппроксимирующей задачи, которая не зависит от параметра  $\varepsilon$ . Затем построим последовательность таких решений и покажем, что она допускает подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению краевой задачи (1)-(3) при стремлении параметра приближения  $\varepsilon$  к нулю.

Рассмотрим следующие операторы:

$$\begin{aligned} A : V &\rightarrow V^*, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx, \quad v, \varphi \in V; \\ N : X &\rightarrow X^*, \quad \langle Nv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx, \quad v, \varphi \in V; \end{aligned}$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \rightarrow V^*, \quad \langle B_1(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n, \quad \varphi \in V;$$

$$B_2 : V \rightarrow X^*, \quad \langle B_2(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \quad v \in V, \quad \varphi \in X;$$

$$B_3 : V \rightarrow X^*, \quad \langle B_3(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \quad v \in V, \quad \varphi \in X;$$

$$D : V \rightarrow X^*, \quad \langle D(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi \, dx, \\ v \in V, \quad \varphi \in X;$$

Поскольку в равенстве (5) функция  $\varphi \in X$  произвольна, это соотношение эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$\varepsilon Nv + \nu Av - B_1(v) - \kappa B_2(v) - \kappa B_3(v) + 2\kappa D(v) = f \quad (6)$$

Таким образом, слабым решением аппроксимирующей задачи является решение  $\varphi \in X$  операторного уравнения (6).

Мы также определяем следующие операторы:

$$L : X \rightarrow X^*, \quad L(v) = \varepsilon Nv;$$

$$K : X \rightarrow X^*, \quad K(v) = \nu Av - B_1(v) - \kappa B_2(v) - \kappa B_3(v) + 2\kappa D(v).$$

Задача нахождения решения уравнения (6) эквивалентна задаче нахождения решения для следующего операторного уравнения:

$$L(v) + K(v) = f \quad (7)$$

Мы будем использовать следующие утверждения (доказательства леммы (2.1) - леммы (2.4) можно найти, например, в [5]).

**Лемма 2.1.** *Оператор  $A : V \rightarrow V^*$  непрерывен и имеет место оценка*

$$\| Av \|_{V^*} \leq C_1 \| v \|_V .$$

*Более того, оператор  $A : X \rightarrow X^*$  вполне непрерывен.*

**Лемма 2.2.** *Оператор  $L : X \rightarrow X^*$  непрерывен, обратим и для него имеет место оценка:*

$$\| Lv \|_{X^*} \leq \varepsilon \| v \|_v .$$

*Более того, оператор  $L^{-1} : X^* \rightarrow X$  вполне непрерывен.*

**Лемма 2.3.** *Для оператора  $B_1 : L_4(\Omega)^n \rightarrow V^*$  непрерывен и имеет место следующая оценка:*

$$\| B_1 v \|_{V^*} \leq C_2 \| v \|_{L_4(\Omega)^n}^2 .$$

*Более того, оператор  $B_1 : X \rightarrow X^*$  вполне непрерывен.*

**Лемма 2.4.** *Отображение  $B_i : V \rightarrow X^*, i = 2, 3$  непрерывно и имеет место следующая оценка:*

$$\| B_i v \|_{X^*} \leq C_3 \| v \|_V^2 .$$

*Более того, оператор  $B_i : X \rightarrow X^*$  полностью непрерывен.*

**Лемма 2.5.** *Оператор  $D : V \rightarrow X^*$  непрерывен и подчиняется оценке:*

$$\| D(v) \|_{X^*} \leq C_4 \| v \|_V^2 . \quad (8)$$

*Доказательство.* Начнем с оценки  $\mathcal{E}$  and  $W_\rho$ .

$$\begin{aligned} \| \mathcal{E} \|_{L_2(\Omega)}^2 &= \sum_{i,j=1}^n \| \mathcal{E}_{i,j}(v) \|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 5 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 dx \\ &= C_5 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_5 \sum_{i,j=1}^n \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - 2 \int_{\Omega} v_i \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \right] \\
&= C_5 \left[ \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx + \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx \right] \leq 2C_5 \|v\|_V^2
\end{aligned}$$

Далее,  $\|\mathcal{E}\|_{L_2(\Omega)} \leq C_6 \|v\|_V$ .

$$\begin{aligned}
&\| (W_{\rho})_{ij}(v) \|_{L_2(\Omega)} \leq \| (W_{\rho})_{ij}(v) \|_{L_{\infty}(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega} \rho(x-y) \left( \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j(y)}{\partial y_i} \right) dy \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{x \in \Omega} \left| - \frac{\partial \rho(x-y)}{\partial y_j} v_i(y) + \frac{\partial \rho(x-y)}{\partial y_i} v_j(y) dy \right| \\
&\leq \| \text{grad} \rho \|_{L_2(\Omega)} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

По определению, для любого  $v \in V, \varphi \in X$  имеем

$$\begin{aligned}
|\langle D(v), \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E}(v) \right) : \nabla \varphi dx \right| \leq \\
&\leq C_7 \left[ \|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)} \|W_{\rho}(v)\|_{L_2(\Omega)} + \|W_{\rho}(v)\|_{L_2(\Omega)} \|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)} \right] \|\nabla \varphi\|_{C(\Omega)^n} \leq \\
&\leq C_8 \|v\|_V^2 \|\varphi\|_X
\end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку 7. Теперь докажем, что оператор  $D$  непрерывен.

Для любых  $v^m, v^0 \in V$ , имеем:

$$\begin{aligned}
&\left| \langle D(v^m), \varphi \rangle - \langle D(v^0), \varphi \rangle \right| = \left| \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v^m) W_{\rho}(v^m) - W_{\rho}(v^m) \mathcal{E}(v^m) \right) : \nabla \varphi \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v^0) W_{\rho}(v^0) - W_{\rho}(v^0) \mathcal{E}(v^0) \right) : \nabla \varphi dx \right| \leq C_9 \left| \int_{\Omega} \mathcal{E}(v^m) W_{\rho}(v^m) \right. \\
&\quad \left. - W_{\rho}(v^m) \mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0) W_{\rho}(v^0) + W_{\rho}(v^0) \mathcal{E}(v^0) dx \right| \|\varphi\|_X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_9 \left| \int_{\Omega} \mathcal{E}(v^m) \left( W_{\rho}(v^m) - W_{\rho}(v^0) \right) + \left( \mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0) \right) W_{\rho}(v^0) \right. \\
&\quad \left. - W_{\rho}(v^m) \left( \mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0) \right) - \left( W_{\rho}(v^m) - W_{\rho}(v^0) \right) \mathcal{E}(v^0) dx \right| \|\varphi\|_X \\
&\leq C_{10} \left[ \|\mathcal{E}(v^m)\|_{L_2(\Omega)} \|W_{\rho}(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathcal{E}(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)} \right. \\
&\quad \times \|W_{\rho}(v^0)\|_{L_2(\Omega)} + \|W_{\rho}(v^m)\|_{L_2(\Omega)} \|\mathcal{E}(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)} + \|W_{\rho}(v^m - v^0)\|_{L_2(\Omega)} \\
&\quad \times \|\mathcal{E}(v^0)\|_{L_2(\Omega)} \left. \right] \|\varphi\|_X \leq C_{11} \left[ \|v^m\|_V \|v^m - v^0\|_V + \|v^m - v^0\|_V \|v^0\|_V \right. \\
&\quad \left. + \|v^m\|_V \|v^m - v^0\|_V + \|v^m - v^0\|_V \|v^0\|_V \right] \|\varphi\|_X \\
&\leq C_{12} \left( \|v^m\|_V + \|v^0\|_V \right) \|v^m - v^0\|_V \|\varphi\|_X
\end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем  $\|D(v^m) - D(v^0)\|_X \leq C_{13}(\|v^m\|_V + \|v^0\|_V)\|v^m - v^0\|_V$ . Пусть последовательность  $v^m \subset V$  сходится к некоторой функции  $v^0 \in V$ . Тогда непрерывность отображения  $D : V \rightarrow X$  следует из предыдущего равенства.  $\square$

**Лемма 2.6.** *Оператор  $K : X \rightarrow X^*$  вполне непрерывен.*

*Доказательство.* Полная непрерывность оператора  $K : X \rightarrow X^*$  следует из полной непрерывности следующих операторов

$$A : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 2.1}$$

$$B_1 : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 2.3}$$

$$B_2 : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 2.4}$$

$$B_3 : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 2.4}$$

$$D : X \rightarrow X^* \quad \text{Лемма 2.5}$$

$\square$

На ряду с уравнением 7 рассмотрим следующее семейство операторных уравнений:

$$L(v) + \lambda K(v) = \lambda f, \lambda \in [0, 1] \quad (9)$$

что совпадает с уравнением 7 для  $\lambda = 1$ .



**Теорема 2.1.** Если  $v \in X$  является решением операторного уравнения 9 для некоторых  $\lambda \in [0, 1]$ , тогда справедлива следующая оценка:

$$\varepsilon \|v\|_X^2 \leq C_{14}, \text{ где } C_{14} = \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} \quad (10)$$

Более того, если  $\lambda = 1$ , тогда справедлива следующая оценка:

$$\nu \|v\|_X^2 \leq C_{15}, \text{ где } C_{15} = \frac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu} \quad (11)$$

*Доказательство.* Пусть  $X$  — решение 9. Тогда для любого  $\varphi \in X$  выполняется уравнение:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \lambda \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx \\ & - \lambda \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \lambda \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\ & + 2\lambda \varkappa \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v) W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v) \mathcal{E} \right) : \nabla \varphi dx = \lambda \langle f, v \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

Запишем, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\ & = 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t) \mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = -2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \\ & - 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = -2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx. \end{aligned}$$

Следовательно, 12 запишется в форме

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx$$

$$\begin{aligned}
& +\lambda\nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + 2\lambda\nu \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \\
& + 2\lambda\kappa \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v) \right) : \nabla \varphi dx = \lambda \langle f, v \rangle
\end{aligned}$$

Поскольку последнее равенство выполняется для всех  $\varphi \in X$ , это верно для  $\varphi = v$  так же:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \\
& + \lambda\nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi + 2\lambda\kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \\
& + 2\lambda\kappa \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v) \right) : \nabla v dx = \lambda \langle f, v \rangle.
\end{aligned} \tag{13}$$

Сведем слагаемые в левой части уравнения 13 следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx = \varepsilon \|v\|_X^2; \\
& \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i \frac{\partial(v_j v_j)}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} v_j v_j dx = 0 \\
& \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v) \right) : \nabla v dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v) \right) : \\
& : \left( \mathcal{E}(v) + W(v) \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v) \right) : \mathcal{E}(v) dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v) \right) : W(v) dx = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} \mathcal{E}_{ik} \\
& - (W_{\rho})_{jk} \mathcal{E}_{ki} \mathcal{E}_{ji} dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} W_{ik} - (W_{\rho})_{kj} \mathcal{E}_{ji} W_{ki} \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} \mathcal{E}_{ik} - \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} \mathcal{E}_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} W_{ik} \\
& - \mathcal{E}_{ij}(W_{\rho})_{jk} W_{ik} dx = 0; \\
& \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx \right. \\
& \left. + \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \right) = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial (\mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(v))}{\partial x_k} dx \\
& = - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \sum_{i,j=1}^n \mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(v) dx = 0.
\end{aligned}$$

Здесь указано, что тензор скорости деформации  $\mathcal{E}(u)$  симметричен, а тензоры  $W_{\rho}(v)$  и  $W(v)$  кососимметричны. Следовательно, уравнения 13 переписать в следующем виде:

$$\varepsilon \|v\|_X^2 + \lambda \nu \|v\|_V^2 = \lambda \langle f, v \rangle$$

Используя верхнюю оценку правой части последнего уравнения.

$$\lambda \langle f, v \rangle \leq \lambda |\langle f, v \rangle| \leq \lambda \|f\|_{V^*} \|v\|_V \leq \|f\|_{V^*} \|v\|_V \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\delta} + \lambda \frac{\delta \|v\|_V^2}{2}$$

для  $\delta = \nu$  имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon \|v\|_X^2 + \lambda \nu \|v\|_V^2 & \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} + \lambda \frac{\nu \|v\|_V^2}{2}, \\
\varepsilon \|v\|_X^2 + \lambda \frac{\nu \|v\|_V^2}{2} & \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}, \quad \varepsilon \|v\|_X^2 \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} \leq \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}
\end{aligned}$$

Аналогично для  $\lambda = 1$  имеем  $\nu \|v\|_V^2 \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu}$ . Это доказывает 10 и 11.  $\square$

### 3 Доказательство теоремы 2.1

*Доказательство.* В (4) возьмем  $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$ . Последовательность  $\{\varepsilon_m\}$  сходится к нулю при  $m \rightarrow +\infty$ . По теореме 3.2 для любого  $\varepsilon_m$  существует слабое решение  $v_m \in X \subset V$  задачи аппроксимации. Таким образом, каждое  $v_m$

удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_m \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v_m : \nabla \varphi dx \\
& - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \\
& + 2\kappa \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v_m) W_{\rho}(v_m) - W_{\rho}(v_m) \mathcal{E}(v_m) \right) : \nabla dx = \langle f, \varphi \rangle. \quad (14)
\end{aligned}$$

Тогда без ограничения общности (переходя при необходимости к последовательности) из (3.6) получаем, что

$$\begin{aligned}
& \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \varepsilon_m \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) dx \right| = \\
& = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\varepsilon_m} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sqrt{\varepsilon_m} \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) dx \right|
\end{aligned}$$

так что мы получаем

$$\varepsilon_m \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) dx \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty$$

Для остальных интегралов имеем

$$\begin{aligned}
& \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \rightarrow \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \\
& m \rightarrow +\infty;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \rightarrow \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \\
& m \rightarrow +\infty;
\end{aligned}$$

Действительно, здесь последовательность  $v_m$  сходится к  $v_*$  сильно в  $L_4(\Omega)^n$ , а  $\nabla(v_m)$  сходится к  $\nabla v_*$  слабо в  $L_2(\Omega)^{n^2}$ . Таким образом, результат сходится

к произведению пределов. В итоге мы имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v_m) W_{\rho}(v_m) - W_{\rho}(v_*) \mathcal{E}(v_*) \right) : \nabla \varphi dx \\
&= \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v_m) (W_{\rho}(v_m) - W_{\rho}(v_*)) + (\mathcal{E}(v_m) - \mathcal{E}(v_*)) W_{\rho}(v_*) \right) : \nabla \varphi dx \\
&\leq \| \mathcal{E}(v_m) \|_{L_2(\Omega)} \| \nabla \varphi \|_{L_2(\Omega)} \| W_{\rho}(v_m - v_*) \|_{L_{\infty}(\Omega)} + \\
&\quad + \| W_{\rho}(v_*) \|_{L_{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla \varphi dx \\
&\leq \| \mathcal{E}(v_m) \|_{L_2(\Omega)} \| \nabla \varphi \|_{L_2(\Omega)} \| (v_m - v_*) \|_{L_2(\Omega)} + \\
&\quad + \| W_{\rho}(v_*) \|_{L_{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla \varphi dx \\
&\leq \| \mathcal{E}(v_m) \|_{L_2(\Omega)} \| \nabla \varphi \|_{L_2(\Omega)} \| (v_m - v_*) \|_{L_4(\Omega)} + \\
&\quad + \| W_{\rho}(v_*) \|_{L_{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla \varphi dx.
\end{aligned}$$

Напомним, что последовательность  $v_m$  сходится к  $v_*$  сильно в  $L_4(\Omega)^n$ , а  $\nabla(v_m)$  сходится к  $\nabla v_*$  слабо в  $L_2(\Omega)^{n^2}$ . Следовательно, мы имеем

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(v_m) W_{\rho}(v_m) : \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{E}(v_*) W_{\rho}(v_*) : \nabla \varphi dx, \quad m \rightarrow +\infty$$

Аналогично получаем

$$\int_{\Omega} W_{\rho}(v_m) \mathcal{E}(v_m) : \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} W_{\rho}(v_*) \mathcal{E}(v_*) : \nabla \varphi dx, \quad m \rightarrow +\infty$$

Таким образом, переходя к пределу в уравнении (14) при  $m \rightarrow +\infty$ , мы видим, что предельная функция  $v_*$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\nu \int_{\Omega} \nabla v_* : \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx$$

$$\begin{aligned}
& -\varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + \\
& + 2\varkappa \int_{\Omega} \left( \mathcal{E}(v_*) W_{\rho}(v_*) - W_{\rho}(v_*) \mathcal{E}(v_*) \right) : \nabla \varphi dx
\end{aligned}$$

Это доказывает, что  $v_* \in V$ . Это завершает доказательство теоремы 2.1.  $\square$