1 Введение

Движение несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset R^n$, $n = 2, 3$, на промежутке времени $[0, T]$ $(T < \infty)$ описывается следующей начально-краевой задачей:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f, \tag{1.1}$$

$$\text{div } v = 0,\ x \in \Omega,\ v|_{t=0} = v_0,\ v|_{\partial\Omega=0}. \tag{1.2}$$

Здесь $v(x)$ — вектор-функция скорости частицы жидкости в точке $x \in \Omega$; p — функция давления в жидкости; ν — вязкость жидкости, $\nu > 0$; f — плотность внешних сил, $f = f(x)$;

Для произвольных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ используется символ $A : B = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$. Символ Div M обозначающий дивергенцию тензора $M = (m_{ij})$, т.е. вектор

$$\text{Div } M = (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial m_{1j}}{\partial x_j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial m_{nj}}{\partial x_j}).$$

Данная математическая модель подробно исследовалась в работах профессора В.Г. Литвинова (см. [1]), где приведены естественные ограничения на вязкость рассматриваемой среды через свойства функции $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$: $\mu(s)$ должна быть определенная при $s \geq 0$ непрерывно дифференцируемая скалярная функция, для которой выполнены неравенства

a) $0 < c_1 \leq \mu(s) \leq C_2 < \infty$;

b) $-s\mu'(s) \leq \mu(s)$ при $\mu'(s) < 0$;

c) $|s\mu'(s)| \leq C_3 < \infty$.

Здесь и далее через C_i обозначаются различные константы.

2 Постановка задачи и основные результаты

Сначала введем основные обозначения и вспомогательные утверждения.

Через $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать множество измеримых вектор-функций $\mu : \Omega \to \mathbb{R}^n$, суммируемых с p-ой степенью. Через $W_p^m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, будем обозначать пространства Соболева. Через $C_0^\infty(\Omega)^n$ обозначим пространство бесконечно-дифференцируемых вектор-функций из Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω, Обозначим через $\mathcal{V}$ множество $\{v \in C_0^\infty(\Omega)^n,\ \mathrm{div}\, v = 0\}$, Через H мы обозначим замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$, через V — по норме $W_2^1(\Omega)$.

Введем основное пространство, в котором будут изучаться слабые решения изучаемой задачи:

$$W_1 = \{v : v \in L_2(0,T,V) \cap L_\infty(0,T,H), v' \in L_1(0,T,V^*)\}.$$

Пространство W_1 снабжено нормой $||v||_{W_1} = ||v||_{L_2(0,T,V)} + ||v||_{L_\infty(0,T,H)} + ||v'||_{L_1(0,T,V^*)}$.

Определение 2.1. *Слабым решением задачи (1.1)-(1.2) называется функция $v \in V^1$, удовлетворяющая при всех $\varphi \in V^1$ равенству*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle, \tag{2.1}$$

начальному условию $v(0) = v_0$.

Здесь и далее $\langle \varphi \rangle = (\frac{\partial v}{\partial t} \varphi)$.

Теорема 2.1. *Пусть $f \in V^{-1}$, $v_0 \in H$ и вязкость рассматриваемой среды μ удовлетворяет условиям a)—c). Тогда существует хотя бы одно решение $v_* \in V^1$ начально-краевой задачи (1.1)-(1.2).*

3 Операторная трактовка

Дадим операторную трактовку рассматриваемой задачи. Введем операторы при помощи следующих равенств:

$$K : V \to V^*,\ \langle K(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx,\ v \in V,\ \varphi \in V;$$

$$D\,:\,V\to V^*,\;\langle D(v),\varphi\rangle = 2\int\limits_\Omega \mu(I_2(v))\varepsilon(v)\,:\,\varepsilon(\varphi)dx,\; v\in V,\;\varphi\in V.$$

Тогда из (2.1) в силу произвольности функции φ получаем следующее операторное уравнение:

$$D(v)-K(v)=f. \tag{3.1}$$

Таким образом, слабое решение начально-краевой задачи (1.1)-(1.2) — это решение $v\in V^1$ операторного уравнения (3.1), удовлетворяющее начальному условию $v|_{t=0}=v_0$.

Отметим некоторые свойства введенных выше операторов.

Лемма 3.1. *Отображение $D\,:\,L_2(0,T;V)\to L_2(0,T;V^*)$ непрерывно и монотонно.*

Доказательство. Покажем непрерывность оператора D. Положив $z=v-u$ и используя теорему Лагранжа на интервале $[0,1]$ для функции

$$f(\delta)=\mu(I_2(u+\delta z))\varepsilon(u+\delta z)\,:\,\varepsilon(w),$$

$$\langle D(v)-D(u),w\rangle = 2\int\limits_\Omega [\mu(I_2(v))\varepsilon(v)-\mu(I_2(u))\varepsilon(u)]\,:\,\varepsilon(w)dx =$$

$$=2\int\limits_\Omega \frac{d}{d\delta}[\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(u+\delta_0 z)]\,:\,\varepsilon(w)dx =$$

$$=2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(z)+\frac{d}{d\delta}\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(u+\delta_0 z)\right]\,:\,\varepsilon(w)dx =$$

$$=2\int\limits_\Omega \Bigg[\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(z)\,:\,\varepsilon(w)+$$

$$+\frac{\varepsilon(u+\delta_0 z)\,:\,\varepsilon(z)}{(\varepsilon(u+\delta_0 z)\,:\,\varepsilon(u+\delta_0 z))^{\frac12}}\frac{d\mu(I_2(u+\delta_0 z))}{dI_2(u+\delta_0 z)}\varepsilon(u+\delta_0 z)\,:\,\varepsilon(w)\Bigg]dx =$$

$$=2\int\limits_\Omega \Bigg[\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(z)\,:\,\varepsilon(w)+$$

$$+\frac{1}{I_2(u+\delta_0 z)}\frac{d\mu(I_2(u+\delta_0 z))}{dI_2(u+\delta_0 z)}(\varepsilon(u+\delta_0 z)\,:\,\varepsilon(z))(\varepsilon(u+\delta_0 z)\,:\,\varepsilon(w))\Bigg]dx.$$

Следовательно

$$|\langle D(v)-D(u),w\rangle| \le 2\left|\int\limits_{\Omega}\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(w)dx\right|+$$

$$+2\left|\int\limits_{\Omega} I_2(u+\delta_0 z)\frac{d\mu(I_2(u+\delta_0 z))}{dI_2(u+\delta_0 z)}I_2(z)I_2(w)dx\right| \le$$

$$\le 2C_5\Bigg(\int\limits_{\Omega} I_2^2(z)dx\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg(\int\limits_{\Omega} I_2^2(w)dx\Bigg)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+2C_5\Bigg(\int\limits_{\Omega} I_2^2(z)dx\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg(\int\limits_{\Omega} I_2^2(w)dx\Bigg)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C_6||z||_{L_2(\Omega)}||w||_{L_2(\Omega)} \le C_7||z||_V||w||_V.$$

Следовательно, $||D(v)-D(u)||_{V^*} \le C_7||v-u||_V$. Таким образом, оператор $D : V \to V^*$ непрепывен. Последнее неравенство выполнено почти для всех $t \in (0,T)$, возведем его в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T, получим

$$\int\limits_0^T ||D(v)-D(u)||^2_{V^*}dx \le C_7\int\limits_0^T ||v-u||^2_V dx.$$

Так как $||v-u||_V \in L_2(0,T)$, то $||D(v)-D(u)||_{V^*} \in L_2(0,T)$ и, следовательно, $D(v)-D(u) \in L_2(0,T;V^*)$. Из последней оценки следует требуемое неравенство:

$$||D(v)-D(u)||_{L_2(0,T;V*)} \le C_7||v-u||_{L_2(0,T;V)}.$$

Теперь покажем монотонность оператора $D(v)$. Здесь также применим теорему Лагранжа к той же функции, что и выше.

$$\langle D(v) - D(u), v - u\rangle = 2\int\limits_{\Omega} [\mu(I_2(v))\varepsilon(v) - \mu(I_2(u))\varepsilon(u)] : \varepsilon(v-u)dx =$$

$$= 2\int\limits_{\Omega} \frac{d}{d\delta}[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(v+\delta_0 z)] : \varepsilon(z)dx =$$

$$= 2\int\limits_{\Omega} \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) + \frac{d}{d\delta}\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(v+\delta_0 z)\right] : \varepsilon(z)dx =$$

$$= 2\int\limits_{\Omega} \Bigg[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(z)+$$

$$+\frac{d}{d\delta}\mu((\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(v+\delta_0 z))^{\frac{1}{2}})\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(z)\Bigg]dx =$$

$$= 2\int\limits_{\Omega} \Bigg[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(z)+$$

$$+\frac{\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(z)}{(\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(v+\delta_0 z))^{\frac{1}{2}}}\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(z)\Bigg]dx =$$

$$= 2\int\limits_{\Omega} \Bigg[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(z)+$$

$$+\frac{1}{I_2(v+\delta_0 z)}\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}(\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(z))^2\Bigg]dx.$$

Если $\frac{d\mu(s)}{ds} \geq 0$, тогда подынтегральная функция больше либо равна нулю. Следовательно

$$\langle D(u) - D(v), u - v\rangle \geq 0.$$

Если $\frac{d\mu(s)}{ds} \le 0$, используя $s\frac{d\mu(s)}{ds} \ge -\mu(s)$, получим требуемое неравенство:

$$2\int\limits_\Omega \Big[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(z)+$$

$$+\frac{1}{I_2(v+\delta_0 z)}\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}(\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(z))^2\Big]dx \ge$$

$$\ge 2\int\limits_\Omega \Big[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(z)+$$

$$+\frac{I_2(v+\delta_0 z)}{I_2^2(v+\delta_0 z)}\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}I_2^2(v+\delta_0 z)I_2^2(z)\Big]dx \ge$$

$$\ge 2\int\limits_\Omega \Big[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(z) + I_2(v+\delta_0 z)\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}I_2^2(z)\Big]dx \ge$$

$$\ge 2\int\limits_\Omega [\mu(I_2(v+\delta_0 z))I_2^2(z) + \mu(I_2(v+\delta_0 z))I_2^2(z)]dx \ge 0,$$

что и завершает доказательство данной леммы. □

4 Аппроксимационная задача

Рассмотрим оператор $K_\delta(v)$, аппроксимирующий оператор $K(v)$:

$$K_\delta : V \to V^*, \ \langle K_\delta(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i v_j}{1+\delta|v|^2}\frac{\delta\varphi_j}{\delta x_i}dx, \ v \in V, \varphi \in V.$$

Здесь $|v|^2 = \sum_{i=1}^n v_i v_i$ и δ — положительная константа.

Рассмотрим аппроксимационную задачу, заменяя в операторном уравнении (3.1) оператор $K(v)$ на оператор $K_\delta(v)$. По аналогии определения слабого решения исходной задачи, дадим определение слабого решения аппроксимационной задачи. Для этого введем пространство

$$W = \{v : v \in L_2(0,T;V), \ v' \in L_2(0,T;V^*)\}$$

с нормой $||v||_W = ||v||_{L_2(0,T;V)} + ||v'||_{L_2(0,T;V^*)}$.

Определение 4.1. *Пара функций $(v,f) \in W \times L_2(0,T;V^*)$ называется слабым решением аппроксимационной задачи с обратной связью, если она* *удовлетворяет операторному равенству*

$$v'(t) + D(v) - K_\delta(v) = f, \tag{4.1}$$

начальному условию $v(0) = v_0$ *и условию обратной связи*

$$f \in \Psi(v). \tag{4.2}$$

Приведем свойства аппроксимационного оператора $K_\delta(v)$, доказанные в монографии [14]:

Лемма 4.1. *1. Для любого* $\delta > 0$ *отображение* $K_\delta : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ *корректно определена, непрерывно и справедлива оценка*

$$||K_\delta(v)||_{L_2(0,T;V^*)} \leq \frac{C_8}{\delta}. \tag{4.3}$$

с некоторой константой C_8*, не зависящей от* v*.*

2. *Для любого* $\delta > 0$ *отображение* $K_\delta : W \to L_2(0,T;V^*)$ *вполне непрерывно.*

3. *Для любого* $\delta > 0$ *справедлива оценка*

$$||K_\delta(v)||_{L_1(0,T;V^*)} \leq {}_9|v||^2_{L_2(0,T;V)}$$

с некоторой константой C_9*, не зависящей от* v *и* δ*.*

Для дальнейшего исследования введем новые операторы:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{L} : W \to L_2(0,T;V^*) \times H, && \boldsymbol{L}(v) = (v' + D(v), v|_{t=0});\\
&\boldsymbol{K_\delta} : W \subset L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*) \times H, && \boldsymbol{K_\delta}(v) = (K_\delta(v), 0);\\
&\boldsymbol{\Psi} : W \to L_2(0,T;V^*) \times H, && \boldsymbol{\Psi}(v) = (\Psi(v), v_0)
\end{aligned}$$

и запишем аппроксимационную задачу в более компактном виде:

$$\boldsymbol{L}(v) - \boldsymbol{K_\delta}(v) \in \boldsymbol{\Psi}(v). \tag{4.4}$$

Исследуем свойства оператора $\boldsymbol{L}$.

Лемма 4.2. *Нелинейное отображение* $\boldsymbol{L} : W \to L_2(0,T;V^*) \times H$*, корректно определено, обратимо и справедлива оценка*

$$||v||_W \leq C_{10}||\boldsymbol{L}(v)||_{L_2(0,T;V^*)\times H}, \tag{4.5}$$

для любых $v \in W$ *и некоторой константы* C_{10}*. Обратный оператор* $\boldsymbol{L}^{-1} : L_2(0,T;V^*) \times H \to W$ *непрерывен и*

$$||\boldsymbol{L}^{-1}(f,v_0)||_W \leq C_{11}(||v_0||_H + ||f||_{L_2(0,T;V^*)}).$$

Доказательство. Оператор взятия производной непрерывен, это следует из определения пространства W, оператор $D(v)$ непрерывен по доказанному выше. Так как вложение $W \subset C([0,T],H)$ непрерывно (см. [13]), то оператор взятия следа функции $v|_{t=0}$ корректно определен и непрерывен, а следовательно, корректно определен и непрерывен оператор $\boldsymbol{L}$.

Докажем оценку (4.5). Для $v \in W$ обозначим $\boldsymbol{L}(v) = (\hat{f}, \hat{v}_0)$. При каждом фиксированном $t \in [0,T]$ применим функционалы $v' + D(v) = \hat{f}$ к функции $v(t) \in V$

$$\langle v'(t), v(t)\rangle + \langle D(v), v(t)\rangle = \langle \hat{f}(t), v(t)\rangle.$$

Так как

$$\langle v'(t), v(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v(t)||_H^2;$$
$$\langle \hat{f}(t), v(t)\rangle_V \leq ||\hat{f}(t)||_{V^*}||v(t)||_V;$$
$$\langle D(v), v(t)\rangle =$$
$$= 2\int\limits_\Omega \mu(I_2(v))\varepsilon(v) : \varepsilon(v)dx \geq 2C_{12}\int\limits_\Omega \varepsilon(v) : \varepsilon(v)dx \geq C_{12}||v||_V^2.$$

Последнее неравенство выполнено в силу первого неравенства Корна (см. [15], Часть 1, Пункт 12).

Проинтегрируем полученное неравенство по переменной t на отрезке $[0,t]$. Используя начальное условие для функции $v(t)$ и неравенство Коши

$a \cdot b \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2 (\forall \varepsilon, a, b > 0)$, приходим к оценке:

$$\frac{1}{2}||v(t)||_H^2 - \frac{1}{2}||\hat{v}^0||_H^2 + C_{12}\int\limits_0^t ||v(\tau)||_V^2 d\tau \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^t ||\hat{f}(t)||_{V^*}^2 d\tau + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t ||v(\tau)||_V^2 d\tau$$

теперь выбирая $\varepsilon = C_{12}$, получаем

$$\frac{1}{2}||v(t)||_H^2 + \frac{1}{2}C_{12}\int\limits_0^t ||v(\tau)||_V^2 d\tau \leq \frac{1}{2}||\hat{v}^0||_H^2 + \frac{1}{2C_{12}}\int\limits_0^t ||\hat{f}(t)||_{V^*}^2 d\tau,$$

умножим обе части неравенства на 2 и вычислим максимум по $t \in [0, T]$, получим

$$\max_{t\in[0,T]} ||v(t)||_H^2 + C_{12}||v||_{L_2(0,T;V)}^2 \leq ||\hat{v}^0||_H^2 + \frac{1}{C_{12}}||\hat{f}||_{L_2(0,T;V^*)}^2$$

Используя неравенсво $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, $a, b > 0$, отсюда нетрудно получить итоговую оценку

$$\max_{t\in[0,T]} ||v(t)||_H + ||v||_{L_2(0,T;V)} \leq C_{13}(||\hat{v}^0||_H + ||\hat{f}||_{L_2(0,T;V^*)})$$

с некоторой константой C_{13}.

Для того, чтобы оценить $||v'||_{L_2(0,T;V^*)}$, воспользуемся равенством $v' = -D(v) + \hat{f}$, оценкой $||D(v)||_{L_2(0,T;V^*)} \leq C_{14}||v||_{L_2(0,T;V)}$ и полученной выше оценкой

$$||v'||_{L_2(0,T;V^*)} \leq ||\hat{f}||_{L_2(0,T;V^*)} + ||D(v)||_{L_2(0,T;V^*)} \leq$$
$$\leq ||\hat{f}||_{L_2(0,T;V^*)} + C_{14}||v||_{L_2(0,T;V)} \leq C_{15}||\hat{v}^0||_H + ||\hat{f}||_{L_2(0,T;V^*)}).$$

Таким образом, мы получаем требуемую оценку

$$||v||_W = ||v||_{L_2(0,T;V)} + ||v'||_{L_2(0,T;V^*)} \leq$$
$$\leq C_{15}\Big(||\hat{v}_0||_H + ||\hat{f}||_{L_2(0,T;V^*)}\Big) = C_{15}||\boldsymbol{L}(v)||_{L_2(0,T;V^*)\times H}$$

с некоторой константой C_{15}.

Для доказательства обратимости отображения $\boldsymbol{L}$ достаточно применить теорему (см [16], Глава 4, Теорема 1.1). Так как, оператор $D : V \to V^*$ непрерывен и монотонен, то все условия теоремы выполнены. Применение теоремы показывает, что для каждого $(\hat{f}, \hat{v}_0)$ существует решение $v \in L_2(0, T; V)$, а следовательно, $v \in W$. Таким образом, оператор $\boldsymbol{L}$ обратим. Переписывая оценку (4.5) в виде

$$||\boldsymbol{L}^{-1}(\hat{f}, \hat{v}_0)||_W \leq C_{10}(||\hat{v}^0||_H + ||\hat{f}||_{L_2(0,T;V^*)})$$

получаем, что оператор $\boldsymbol{L}^{-1}$ непрерывен. □

Из последней леммы следует, что изучение операторного включения (4.4) эквивалентно исследованию задачи о неподвижной точке следующего включения:

$$v \in F(v), \tag{4.6}$$

где $F : W \to W$ и определен:

$$F(v) = \boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{K}_\delta(v) + \boldsymbol{\Psi}(v)).$$

5 Разрешимость аппроксимационной задачи

Теорема 5.1. *Операторное включение (4.6) имеет хотя бы одно решение $v \in W$.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы рассмотрим семейство аппроксимационных задач:

$$v' + D(v) - \lambda K_\delta(v) \in \lambda \Psi(v),\ \lambda \in [0, 1], \tag{5.1}$$

или в компактной форме:

$$v \in G(v), \tag{5.2}$$

где $G(v) = \boldsymbol{L}^{-1}(\lambda \boldsymbol{K}_\delta(v) + \lambda \boldsymbol{\Psi}(v))$. Заметим, что данное семейство совпадает с изучаемой задачей (4.6) при $\lambda = 1$.

Покажем, что определена топологическая степень $\deg\,(G, \bar{B}_R, 0)$ (см. [17])

для многозначного отображения G на шаре $\bar{B}_R \subset W$ достаточно большого радиуса R и отлична от нуля.

Если $v \in W$ — решение одного из уравнений (5.1), то в силу оценок (4.3) и 4.5) и условий $\mathbf{\Psi}1 - \mathbf{\Psi}4$ имеем

$$||v||_W \leq C_{11}||(\boldsymbol{K}_\delta(v) + (f, v_0))||_{L_2(0,T;V^*)\times H} \leq$$
$$\leq C_{11}||(\boldsymbol{K}_\delta(v)||_{L_2(0,T;V^*)} + ||f||_{L_2(0,T;V^*)} + ||v_0||_H \leq C_{11}\left(\frac{C_8}{\delta} + C_{16} + ||v_0||_H\right).$$

Выберем $R > C_{11}(\frac{C_8}{\delta} + C_{16} + ||v_0||_H)$, тогда ни одно решение включения (5.2) не принадлежит границе шара $B_R \subset W$. Поэтому отображение $G : W \times [0,1] \to W$ определяет гомотопию многозначных отображений на B_R. Следовательно, топологическая степень $deg(G, \bar{B}_R, 0)$ определена для каждого значения $\lambda \in [0,1]$ и в силу свойства гомотопической инвариантности степени имеем

$$deg(G, \bar{B}_R, 0) = deg(F, \bar{B}_R, 0) = deg(I, \bar{B}_R, 0) = 1.$$

так как $0 \in B_R$. Отличие от нуля степени отображения F обеспечивает существование решения операторного включения (4.6), а, следовательно, существование решения включения (4.4) и аппроксимационной задачи. $\square$

Теорема 5.2. *Для любого решения $v_\delta \in W$, $\delta > 0$, операторного включения (4.6) справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} ||v_\delta(t)||_H + ||v_\delta||_{L_2(0,T;V)} \leq C_{17}(||f||_{L_2(0,T;V^*)} + ||v_{\delta_0}||_H), \tag{5.3}$$

$$||v'_\delta||_{L_1(0,T;V^*)} \leq C_{18}(1 + ||f||_{L_2(0,T;V^*)} + ||v_{\delta_0}||_H)^2, \tag{5.4}$$

с константами C_{17} и C_{18}, не зависящими от δ.

Доказательство. Пусть $v_\delta \in W$ решение операторного включения (4.6), существующего по предыдущей теореме для некоторого $\delta > 0$. Повторяя рассуждения доказательства оценки (4.5) и используя тот факт, что $\langle K_\delta(v_\delta(t)), v_\delta(t)\rangle = 0$ для всех $t \in [0,T]$, отсюда нетрудно получить требуемую оценку:

$$\max_{t\in[0,T]} ||v_\delta(t)||_H + ||v_\delta||_{L_2(0,T;V)} \le C_{17}(||f||_{L_2(0,T;V^*)} + ||v_{\delta_0}||_H).$$

Для того, чтобы оценить $||v'_\delta||_{L_1(0,T;V^*)}$, воспользуемся равенством $v'_\delta = -D(v_\delta) + K_\delta(v_\delta) + f$. Отсюда

$$||v'_\delta||_{L_1(0,T;V^*)} \le ||D(v_\delta)||_{L_1(0,T;V^*)} + ||K_\delta(v_\delta)||_{L_1(0,T;V^*)} + ||f||_{L_1(0,T;V^*)}. \quad (5.5)$$

Используя непрерывность вложения $L_2(0,T;V^*) \subset L_1(0,T;V^*)$, с помощью неравенства Коши и оценки $||D(v_\delta)||_{L_1(0,T;V^*)} \le C_{14}||v_\delta||_{L_2(0,T;V)}$ получим

$$||D(v_\delta)||_{L_1(0,T;V^*)} \le C_{14}||D(v_\delta)||_{L_2(0,T;V^*)} \le C_{19}||v_\delta||_{L_2(0,T;V)},$$
$$||f||_{L_1(0,T;V^*)} \le \sqrt{T}||f||_{L_2(0,T;V^*)}.$$

Кроме того, для $||K_\delta(v_\delta)||_{L_1(0,T;V^*)}$ имеет оценку:

$$||K_\delta(v_\delta)||_{L_1(0,T;V^*)} \le C_{20}||v_\delta||^2_{L_2(0,T;V)}.$$

Подставляя полученные оценки в неравенство (5.5) и используя оценку (5.3), получим:

$$||v'_\delta||_{L_1(0,T;V^*)} \le C_{19}||v_\delta||_{L_2(0,T;V)} + C_{20}||v_\delta||^2_{L_2(0,T;V)} + \sqrt{T}||f||_{L_2(0,T;V^*)} \le$$
$$\le C_{21}(1 + ||f||_{L_2(0,T;V^*)} + ||v_{\delta_0}||_H)^2.$$

□

6 Доказательство теоремы 2.1

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 2.1 о существовании слабых решений исходной задачи, сформулируем утверждение о предельном переходе для оператора K_δ.

Лемма 6.1. *Если последовательность* $\{v_l\}_{l=1}^\infty$, $v_l \in L_2(0,T;V)$ *удовлетво-*

ряет условиям:

$$v_l \rightharpoonup v_* \textit{ слабо в } L_2(0,T;V),$$
$$v_l \to v_* \textit{ почти всюду } Q_T,$$
$$v_l \to v_* \textit{ сильно в } L_2(Q_T),$$

тогда

$$K_\delta(v_l) \to K(v_*) \textit{ в смысле распределений при } l \to \infty,\ \delta \to 0.$$

Доказательство данной леммы можно найти в [14] (Глава 5, Лемма 5.3).

Итак, докажем теорему 2.1 о существование решений задачи управления с обратной связью (1.1) — (1.2), (??).

Возьмем произвольную последовательность положительных чисел $\{\delta_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\delta_l \to 0$. Для каждого δ_l известно, что соответствующая аппроксимационная задача (4.6) имеет, по крайней мере, одно решение $v_l \in W$.

Из оценки (5.3) следует, что $\{v_l\}$ ограничена по норме $||\cdot||_{L_2(0,T;V)}$ и $||\cdot||_{L_\infty(0,T;H)}$, а из оценки (5.4) последовательность $\{v_l'\}$ ограничена по норме пространства $L_1(0,T;V^*)$. Тогда, не уменьшая общности рассуждений, будем полагать что:

$$v_l \rightharpoonup v_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V),$$
$$v_l \rightharpoonup *\_ \text{ слабо в } L_\infty(0,T;H),$$
$$v_l \to v_* \text{ сильно в } L_2(Q_T),$$
$$v_l \to v_* \text{ сильно в } Q_T,$$
$$v_l' \rightharpoonup v_*' \text{ в смысле распределений.}$$

Так как оператор D слабо непрерывен, то будем полагать, что $D(v_i) \rightharpoonup D(v_*)$ слабо в $L_2(0,T;V^*)$, а следовательно, в смысле распределений со значениями в V^*. В силу леммы 6.1 выполнена следующая сходимость:

$$K_{\delta_l}(v_l) \to K(v_*) \text{ в смысле распределений.}$$

Принимая во внимание оценки (5.3), (5.4) и условия $\mathbf{\Psi}1 - \mathbf{\Psi}4$, без ограничения общности можем предположить, что существует $f_* \in L_2(0,T;V^*)$ такое, что $f_l \to f_* \in \mathbf{\Psi}(v_*)$ при $l \to \infty$.

Таким образом, переходя в каждом из членов равенства

$$v_l' + D(v_l) - K_{\delta_l}(v_l) = f_l \in \Psi(v_l)$$

к пределу при $l \to \infty$, получим, что предельные функции (v_*, f_*) удовлетворяют равенству

$$v_*' + D(v_*) - K_{\delta_l}(v_*) = f_* \in \Psi(v_*)$$

а также переходя в начальном условии $v_l(0) = v_0$ к пределу при $l \to \infty$, получим что v_* удовлетворяет начальному условию $v_*(0) = v_0$.

Следовательно, (v_*, f_*) — слабое решение задачи управления с обратной связью (1.1) — (1.2), (??). Заметим, что так как $v_* \in L_2(0,T;V) \cap L_\infty(0,T;H)$, то из равенства (3.1) следует, что $v_*' \in L_1(0,T;V^*)$.