«Изучение единственности слабых решений системы Навье-Стокса»

Мукасеева Дарья Александровна

22.06.2020

Бакалаврская работа
Направление 01.03.01 Математика
Профиль Математическое моделирования

Понятие слабого решения

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n, где $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0; \tag{2}$$

$$v\big|_{t=0} = v_0; \tag{3}$$

$$v\big|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Определение сильного решения

Определение

Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций $v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ *и* $p \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$*, удовлетворяющих следующим условиям:*

1. обобщенные частные производные функций, содержащихся в равенствах (1)-(4), принадлежат пространству $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;
2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;
3. функция v удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Определение слабого решения

Определение

Пусть $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ *и* $v_0 \in H$. *Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция* $v \in L_2(0, T; V)$, *удовлетворяющая для всех* $\varphi \in V$ *и для почти всех значений* $t \in (0, T)$ *равенству*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi dx \qquad (5)$$

и условию

$$v(0) = v_0. \qquad (6)$$

Доказательство линейности и непрерывности оператора $\Delta : L_2(0, T; V) \to L_2(0, T; V^*)$

Лемма

1. *Оператор* $\Delta : L_2(0, T; V) \to L_2(0, T; V^*)$ *линейный и непрерывный, причем*

$$\|\Delta v\|_{L_2(0,T;V^*)} = \|v\|_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0, T; V^*). \tag{7}$$

2. *Оператор* $K : L_2(0, T; V) \to L_1(0, T; V^*)$ *непрерывен и справедлива оценка*

$$\|K(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_2 \|v\|^2_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0, T; V^*), \tag{8}$$

для некоторой константы C_2.

$$\langle K(v), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Полученные результаты

Лемма

Для $p_0 \geq 1,\ p_1 \geq 1$ *имеет место вложение* $W_{p_0,p_1} = \{v \in L_{p_0}(a,b,X_0),\ v' \in L_{p_0}(a,b,X_0)\} \subset C([a,b],X_1)$ *и это вложение непрерывно.*

Лемма

Пусть X *и* Y *— банаховы пространства, такие, что* X *— рефлективно и вложение* $X \subset Y$ *непрерывно. Если функция* $v \in L_\infty(a,b;X)$ *слабо непрерывна как функция со значениями в* Y*,то и слабо непрерывна и как функция со значениями в* X.

Определение слабого решения

Определение

Пусть $n \leq 4$, $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ *и* $v \in H$. *Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция* $v \in L_2(0, T; V) \cap L_\infty(0, T; H)$ *и условию* $v' \in L_1(0, T; V^*)$, *удовлетворяющая при почти всех значений* $t \in (0, T)$ *равенству*

$$v'(t) - \nu \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \tag{9}$$

и начальному условию

$$v(0) = v_0. \tag{10}$$

Для системы уравнений Навье-Стокса (1)-(4) Ж. Лере в 1934 был получен следующий результат:

Теорема

Пусть $n = 2, 3$. *Для каждой функции* $f \in L_2(0, T; V^*)$ *и* $v_0 \in H$ *начально-краевая задача (1)-(4) имеет хотя бы одно слабое решение* v.

Единственность слабого решения

Теорема

Пусть Ω ограниченная область в R^2 с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда слабое решение v решение задачи (1)-(4) единственно.

$$v'(t) - \nu\Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \tag{11}$$

Оценка из доказательства

$$w' - \nu \Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0 \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 + \nu\|w(t)\|_V^2 \leq \left|\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx\right|. \tag{13}$$

$$\|w(t)\|_H^2 \leq \|w(0)\|_H^2 \exp\left(\int_0^t \frac{1}{2^{1/2}\nu}\|v(s)\|_V ds\right). \tag{14}$$

Спасибо за внимание!