Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.

АППРОКСИМАЦИОННО -ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ. СИСТЕМА НАВЬЕ-СТОКСА

В книге излагается метод исследования эволюционных и стационарных задач гидродинамики на примере системы Навье-Стокса, основанный на аппроксимации этих задач более простыми и использовании теории степени отображений бесконечномерных пространств.

Изложенный метод исследования задач гидродинамики неоднократно излагался в лекциях по гидродинамики студентам и аспирантам математического факультета Воронежского государственного университета, а также слушателям Научно-образовательного центра "Волновые процессы в неоднородных и нелинейных средах" Воронежского государственного университета.

Содержание

Введение

Гидродинамика издавна была источником постановки серьезных математических задач, при решении которых как создавались новые, так совершенствовались и старые, классические математические методы. При этом основным объектом исследования для математиков являлись, как правило, краевые и начально-краевые задачи для системы уравнений Навье-Стокса. Исследованию этих задач посвящен целый ряд известных монографий как нескольких последних десятилетий (см., например, [3], [12], [15], [22], [28], [37]), так и последних лет [24], [33].

В качестве математического аппарата исследования эволюционных задач в этих книгах используются различные методы такие, как метод Фаэдо-Галеркина, итерационный метод или метод теории полугрупп.

В настоящей книге предлагается иной метод исследования стационарных и эволюционных задач гидродинамики (на примере системы уравнений Навье-Стокса), основанный на аппроксимации этих задач в каком-то смысле более простыми задачами и использовании теории степени отображений бесконечномерных пространств. Общая схема этого метода для эволюционных задач такова:

1) вначале дается операторная интерпретация рассматриваемых начально-краевых задач в некоторых, естественных для данной задачи, функциональных пространствах;

2) затем приводятся аппроксимации полученных операторных уравнений уравнениями, обладающими более лучшими топологическими свойствами и определенными в своих функциональных пространствах;

3) далее на основе априорных оценок решений аппроксимационных уравнений в новых функциональных пространствах и теории степени отображений бесконечномерных пространств доказывается разрешимость аппроксимационных уравнений;

4) и наконец, на основе априорных оценок решений аппроксимационных уравнений уже в исходных функциональных пространствах с помощью предельного перехода, доказывается разрешимость первоначальных операторных уравнений.

Как уже отмечалось, в этой книге вышеописанный метод применяется к исследованию разрешимости как стационарной, так и эволюционной системы уравнений Навье-Стокса, однако он может быть использован и для различных задач неньютоновской гидродинамики. В частности, этим методом был исследован ряд задач, возникающих в моделях течения вязкоупругой жидкости (см., например, [7], [8], [9], [27], [29], [30], [32], [36]). Использование метода степени отображений банаховых пространств (как правило степени Лере-Шаудера) традиционно для исследования стационарных задача. Однако и здесь предлагаемый в книге подход отличается от традиционного. Кроме того, отличие точки зрения настоящей книги от других состоит в исследовании разрешимости стационарных задач не в подпространствах соленоидальных вектор-функций, а во всем функциональном пространстве, т.е. одновременно доказывается существование и вектор-функции скорости, и функции давления.

Книга помимо введения содержит шесть глав.

В первой главе дано описание основного объекта, изучаемого в этой книге,— системы уравнений Навье-Стокса, а также вводятся основные функциональные пространства, пространства соленоидальных функций H и V, изучаются их характеристики, базовое для системы уравнений Навье-Стокса разложение функциональных пространств $(L_q(\Omega))^n$, $1 < q < \infty$, в прямую сумму подпространств — разложение функции на соленоидальную и градиентную составляющие, и соответствующие проекторы.

Во второй главе рассмотрены вариационные формулировки краевой задачи для стационарной системы уравнений Стокса, вводятся понятия слабого и полного слабого решений, устанавливается их связь и существование. Ключевыми для этого раздела являются разложения пространств $(H_0^1(\Omega))^n$ и $(H^{-1}(\Omega))^n$, обоснование которых составляет основную часть главы.

В третьей главе аналогичные вопросы рассмотрены для стационарной системы уравнений Навье-Стокса.

Четверная глава содержит сведения о функциональных пространствах, состоящих из функций, определенных на интервале и принимающих значения в банаховом пространстве. Здесь же приводятся понятия непрерывности, слабой непрерывности, дифференцируемости, измеримости и интегрируемости по Бохнеру таких функций, а также простейшие свойства эти понятий. Среди свойств выделены теоремы вложения таких пространств и теоремы о компактности вложений.

В пятой главе рассмотрена вариационная формулировка начально-краевой задачи для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса, вводятся понятия слабого и полного слабого решений и устанавливается их связь и существование. Показано, что в случае двумерного пространства слабое и полное слабое решение задачи единственно.

В шестой главе рассматривается понятие сильного решения начально-краевой задачи для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса. Здесь содержатся необходимые сведения об анизотропных пространствах Соболева. Приведено простейшее доказательство существования сильного решения для случая малых данных. Для случая двумерного пространства доказано существование сильного решения без дополнительных ограничений на величину исходных данных.

В книге используется общая нумерация всех определений, теорем, лемм двумя числами — номером главы и номером объекта в главе. Формулы имеют самостоятельную нумерацию — нумеруются в скобках двумя аналогичными числами.

Список литературы по проблемам исследования системы уравнений Навье-Стокса является далеко не полным, в него включены в основном те статьи и монографии, материалы которых существенно использованы при написании данной книги. По поводу более полного библиографического описания рассматриваемой проблемы мы отсылаем к монографиям [22], [24].

1 Система уравнений Навье-Стокса. Основные функциональные пространства и теоремы вложения

Данная глава содержит основные обозначения, описание основного объекта данной книги — системы уравнений Навье-Стокса, а также основных функциональных пространств, теоремы вложения и ключевые утверждения о разложении этих пространств.

1.1 Система уравнений Навье-Стокса

Введем основной объект изучения данной книги — систему уравнений Навье-Стокса.

Движение однородной несжимаемой жидкости в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ на отрезке времени $[0,T]$, $T>0$, определяется системой дифференциальных уравнений в форме Коши (см., например,[6])

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)+\mathrm{grad}\ p=\mathrm{Div}\,\sigma+\rho f, \quad (t,x)\in(0,T)\times\Omega, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\ v=0, \quad (t,x)\in(0,T)\times\Omega, \tag{1.2}$$

где $\sigma=(\sigma_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ — девиатор тензора напряжений, $v=(v_1,...,v_n)$ — скорость, p — давление жидкости, f — плотность внешних сил и $\rho = const$ — плотность жидкости. Вывод уравнений и описание используемых понятий можно найти в [6].

Здесь и далее используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, изменяющимся от 1 до n. В частности запись $v_i\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ подразумевает суммирование по повторяющемуся индексу i и, следовательно, это выражение равно $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$.

Система уравнений (1.1),(1.2) состоит из $n+1$-го уравнения и содержит неизвестные v_i, p, σ_{ij}, $i,j=1,2,\ldots,n$. Число уравнений меньше числа неизвестных. Такая система не является замкнутой и поэтому дополняется соотношением между тензором $\sigma=(\sigma_{ij})$ и тензором скоростей деформаций

$$\mathcal{E}=(\mathcal{E}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, \qquad \mathcal{E}_{ij}=\mathcal{E}_{ij}(v)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Это соотношение в литературе называется определяющим соотношением или уравнением состояния.

В качестве уравнения состояния рассмотрим уравнение

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E}.$$

Данная зависимость наблюдается в эксперименте и отражает тот факт, что касательные напряжения (или силы трения между частицами жидкости) пропорциональны изменению характера движения жидкости (изменению тензора скоростей движения). Соотношение не носит общего характера закона сохранения и выделяет лишь отдельный класс жидкостей, называемых ньютоновскими.

Подстановка определяющего соотношения в уравнения движения приводит к вычислению выражения $\mathrm{Div}\,\sigma$:

$$\mathrm{Div}\,\sigma = 2\nu\mathrm{Div}\,\mathcal{E} = 2\nu \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\mathcal{E}_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\mathcal{E}_{12}}{\partial x_2} + \ldots + \dfrac{\partial\mathcal{E}_{1n}}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\mathcal{E}_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\mathcal{E}_{22}}{\partial x_2} + \ldots + \dfrac{\partial\mathcal{E}_{2n}}{\partial x_n} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{\partial\mathcal{E}_{n1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\mathcal{E}_{n2}}{\partial x_2} + \ldots + \dfrac{\partial\mathcal{E}_{nn}}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим i-тую координату полученного вектора

$$\frac{\partial\mathcal{E}_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathcal{E}_{i2}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial\mathcal{E}_{in}}{\partial x_n} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_i}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_n} + \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_i} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_i} + \ldots + \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_n \partial x_i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\triangle v_i + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}\right) = \frac{1}{2}\triangle v_i + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{div}\,v.$$

В силу условия (1.2) второе слагаемое равно нулю. Аналогичные преобразования справедливы и для других координат вектора, поэтому

$$\mathrm{Div}\,\sigma = \nu\Delta v.$$

Подставляя это выражение в систему уравнений (1.1), (1.2) получаем следующую систему уравнений

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \nu\Delta v + \mathrm{grad}\,p = \rho f, \tag{1.3}$$

$$\mathrm{div}\,v = 0, \tag{1.4}$$

Эта система называется системой уравнений Навье-Стокса. Она состоит из $n+1$-го уравнения и содержит $n+1$ неизвестное $v_1, v_2, \ldots, v_n$, p.

Для системы (1.3),(1.4) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей Γ, рассмотрим начально-краевую задачу с начальным условием

$$v(t,x)\mid_{t=0} = v^0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.5}$$

и граничным условием

$$v\mid_{[0,T]\times\Gamma} = 0. \tag{1.6}$$

Теория вязких течений несжимаемой жидкости представляет собой один из наиболее важных для практики и наиболее интересный для математических исследований раздел гидродинамики. Именно в задачах динамики вязких течений Лере и Шаудер сделали первые шаги по применению методов функционального анализа. В последнее время усилился интерес к изучению системы уравнений Навье-Стокса численными методами. Интерес к изучению задач динамики вязких жидкостей объясняется еще тем, что многие из них вплоть до настоящего времени не решены и настоятельно требуют своего решения.

Система уравнений Навье-Стокса нестандартна, так как не входит ни в один из известных классов систем параболических уравнений. Однако многие подходы и методы, используемые при исследовании систем параболических уравнений применимы и для системы уравнений Навье-Стокса.

При решении систем уравнений одним из возможных методов решения систем уравнений является метод исключения переменной. В случае системы уравнений Навье-Стокса такой подход оказался трудно применимым. Поэтому здесь исключают не неизвестное из системы, а уравнение. Чтобы исключить последнее уравнение системы, заметим, что уравнение $\operatorname{div}\ v = 0$ линейное. Множество решений этого уравнения образует линейное пространство - пространство соленоидальных функций. Исключение этого уравнения возможно, если первые уравнения системы рассматривать на пространстве соленоидальных функций. Однако и в этом случае оставшаяся система содержит "лишнее" неизвестное p. Поэтому к ней неприменима теорема Коши-Ковалевской.

Для того, чтобы исключить неизвестное p из уравнения, используется разложение пространства образов на соленоидальную и градиентную составляющие. Это равносильно применению к системе уравнений оператора проектирования на подпространство соленоидальных функций. Полученная в результате система уравнений содержит только неизвестную вектор-функцию v. Однако в систему входят нелинейные квадратичные слагаемые. Это позволяет установить лишь локальную разрешимость системы (исключая случай $n=2$).

1.2 Основные обозначения, теоремы вложения и неравенства

Пусть $\mathbb{R}^n$— n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим через

$$u \cdot v = u_i v_i, \quad |u| = \sqrt{u \cdot u},$$

соответственно, скалярное произведение и норму вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$. При этом здесь и далее мы применяем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, изменяющимся от 1 до n. Обозначим через M^n пространство всех вещественных матриц размера $n \times n$. Для $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij}) \in M^n$ полагаем $A : B = A_{ij} B_{ij}$.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ. Назовем Ω областью класса C^2, если граница Γ является C^2-подмногообразием. Это значит, что для каждой точки границы найдутся окрестность U и евклидова система координат $O', y_1, y_2, \ldots, y_n$ такие, что $\Gamma \cap U$ допускает представление в виде поверхности $y_n = \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$, где φ—функция класса C^2. Аналогично назовем область Ω локально-липшицевой, если функции φ липшицевы. Всюду далее будем считать, что рассматриваемые области Ω локально-липшицевы, если в тексте не указаны другие условия на область. Примерами локально-липшицевых областей могут служить круг, плоское круговое кольцо, области, ограниченные треугольником, квадратом на плоскости, куб в пространстве.

Введем пространства скалярных функций, определенных на Ω.

Пусть $\mathfrak{D}(\Omega)$ — пространство вещественных функций на $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем в Ω и $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ — пространство функций класса C^∞ с компактным носителем в $\overline{\Omega}$ — замыкании области Ω. Обозначение $\mathfrak{D}(\Omega)$ введено Лораном Шварцем и заменяет обозначение $C_0^\infty(\Omega)$. Пространство $\mathfrak{D}(\Omega)$ не нормировано и предполагается наделенным топологией, порождаемой полунормами из пространств $C_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$.

Распределением на Ω называется линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$. Множество всех распределений на Ω обозначается через $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Действие функционала $\varphi \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ на функцию $v \in \mathfrak{D}(\Omega)$ обозначим через $\langle \varphi, v \rangle$. Отметим, что для каждого распределения φ определены обобщенные производные $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, с помощью следующего равенства

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, v \right\rangle = - \left\langle \varphi, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\rangle,$$

где $v \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Таким же образом определяются производные любого конечного порядка. Каждая измеримая функция на Ω, интегрируемая по мере Лебега $dx = dx_1 dx_2 \cdot \ldots \cdot dx_n$, является распределением на Ω и поэтому имеет обобщенные производные любого конечного порядка. Подробнее с теорией распределений или обобщенных функций можно познакомиться в работах [5], [26].

Через $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, обозначим пространство измеримых по мере Лебега вещественных функций на Ω абсолютно интегрируемых с p-ой степенью. Пространство $L_p(\Omega)$ является банаховым с нормой

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

В случае $p = 2$ пространство $L_2(\Omega)$ — гильбертово со скалярным произведением

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(x) v(x) \, dx.$$

Для любых функций $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, справедливо неравенство Гельдера

$$\left| \int\limits_{\Omega} u(x) v(x) \, dx \right| \le \|u\|_{L_p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L_q(\Omega)}.$$

Для $p = q = 2$ неравенство называют неравенством Шварца.

Для $T > 0$ через $Q_T = (0, T) \times \Omega$ обозначается пространственно-временной цилиндр и через (t, x) — точки Q_T. Пространства $L_p(Q_T)$, $L_2(Q_T)$ вещественных функций, определенных на Q_T вводятся аналогично пространствам $L_q(\Omega)$, $L_2(\Omega)$.

Для интегрируемых в Ω или Q_T скалярных, векторнозначных и матричнозначных функций, с компонентами, рассматриваемыми как распределения, введем обозначения следующих дифференциальных операторов,

$$\partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \partial_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \qquad \mathrm{div}\ u = \partial_i u_i,$$

$$\nabla u = (\partial_j u_i) = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \ldots & \partial_n u_1 \\ \partial_1 u_2 & \partial_2 u_2 & \ldots & \partial_n u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_1 u_n & \partial_2 u_n & \ldots & \partial_n u_n \end{pmatrix},$$

$$\nabla u : \nabla v = \partial_j u_i \cdot \partial_j v_i, \qquad \mathrm{Div}\ \sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) = (\partial_j \sigma_{1j}, \partial_j \sigma_{2j}, \ldots, \partial_j \sigma_{nj}),$$

$\operatorname{grad} p = (\partial_i p) = (\partial_1 p, \partial_2 p, \ldots, \partial_n p), \quad \Delta u = (\Delta u_i) = (\Delta u_1, \Delta u_2, \ldots, \Delta u_n)$, где индексы i, j изменяются от 1 до n и x_i— декартовы координаты точки $x \in \Omega$.

Пусть m - целое и $1 \le p < \infty$. Пространство Соболева $W_p^m(\Omega)$ — это множество функций из $L_p(\Omega)$, все обобщенные частные производные которых до порядка m включительно принадлежат пространству $L_p(\Omega)$. Пространство Соболева $W_p^m(\Omega)$ снабжено нормой

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, α_j — целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = \partial^{\alpha_1}_{x_1} \partial^{\alpha_2}_{x_2} \ldots \partial^{\alpha_n}_{x_n}$, причем производные понимаются в смысле теории обобщенных функций. Так в пространстве $W_p^2(\Omega)$ введена норма

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|^p_{L_p(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \|\partial_i \partial_j u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

Для $0 < s < 1$ пространство Соболева $W_p^s(\Omega)$ состоит из функций $u \in L_p(\Omega)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L_p(\Omega)} + \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} \, dx \, dy \right)^{1/p}.$$

Для $s > 1$ положим $s = m + \sigma$, где m — целая часть числа s. Пространство $W_p^s(\Omega)$ состоит из элементов $u \in W_p^m(\Omega)$, имеющих производные порядка m $D^\alpha u \in W_p^\sigma(\Omega)$, $|\alpha| = m$. Пространство снабжено нормой

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{W_p^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|^p_{W_p^\sigma(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

Известно, что для $s > 0$, $1 \le p < \infty$, пространство $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ плотно в $W_p^s(\Omega)$.

При $p = 2$ для пространства $W_2^s(\Omega)$ используют обозначение $H^s(\Omega)$, $W_2^s(\Omega) = H^s(\Omega)$. Для целых неотрицательных $s = m$ пространство $H^m(\Omega)$ гильбертово. Мы будем использовать пространство $W_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega u(x) v(x) \, dx + \int\limits_\Omega \partial_i u(x) \partial_i v(x) \, dx.$$

Обозначим также через $H_0^m(\Omega)$ замыкание $\mathfrak{D}(\Omega)$ в норме пространства $H^m(\Omega)$ и через $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ замыкание $\mathfrak{D}(\Omega)$ в норме пространства $W_p^1(\Omega)$.

Особое значение для теории функциональных пространств имеют теоремы вложения Соболева и теоремы о компактном вложении Реллиха - Кондрашова [20], [22, стр.130].

Теорема 1.1. *Пусть Ω — ограниченная локально-липшицева область в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

а) если $m \geq 1$, $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = \frac{1}{q} > 0$, то $W_p^m(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ и

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq c(m, p, n, \Omega)\|u\|_{W_p^m(\Omega)};$$

(Запись $c(m, p, n, \Omega)$ показывает, что константа с зависит от величин и объектов перечисленных в скобках.)

б) если $1 \leq p < \infty$ и $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, то $W_p^m(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ для любого q, $1 \leq q < \infty$, и

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq c(m, p, n, q, \Omega)\|u\|_{W_p^m(\Omega)};$$

в) если $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, то $W_p^m(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ и

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq c(m, p, n, \Omega)\|u\|_{W_p^m(\Omega)}.$$

Теорема 1.2. *Пусть Ω — ограниченная локально-липшицева область в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

а) вложение $W_p^1(\Omega) \subset L_{q_1}(\Omega)$ компактно для любого q_1, $1 \leq q_1 < \infty$, если $p \geq n$, и для любого q_1, $1 \leq q_1 < q$, где q определяется условием $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} = \frac{1}{q}$, если $1 \leq p < n$;

б) вложение пространства $W_p^s(\Omega)$ в пространство $C(\overline{\Omega})$ вполне непрерывно, если $1 < p < \infty$ и $n < sp$.

Приведем также неравенство Гальярдо-Ниренберга, часто используемое при получении априорных оценок решений [2, гл.III, §15, п.15.1, стр.237].

Теорема 1.3. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей. Тогда для любых $u \in W_q^l(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \leq c\|u\|_{L_{p_1}(\Omega)}^{1-\theta} \left(\sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha u\|_{L_{p_2}(\Omega)} \right)^\theta$$

с некоторой константой с при соотношении параметров

$$1 \leq p_1 \leq \infty, \qquad 1 \leq p_2 \leq q, \qquad 0 \leq r < l,$$

$$\frac{n}{p} - r = (1-\theta)\frac{n}{p_1} + \theta(\frac{n}{p_2} - l), \qquad \frac{r}{l} \le \theta \le 1,$$

исключая случаи $r = 0$, $l < \dfrac{n}{p_2}$, $p_1 = \infty$ *и* $1 < p_2 \le q$, $l - r - \dfrac{n}{p_2} \ge 0$ — *целое,* $\theta = 1$.

Частным случаем неравенства Гальярдо-Ниренберга является неравенство

$$\|u\|_{L_4(\Omega)} \le 2^{1/4}\|u\|^{1/2}_{L_2(\Omega)}\|\mathrm{grad}\, u\|^{1/2}_{L_2(\Omega)}, \tag{1.7}$$

справедливое для любой функции $u \in H^1_0(\Omega)$ в случае произвольной открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Это неравенство было установлено О.А.Ладыженской [12, гл.1, §1б стр.19].

Для векторнозначных функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ используются следующие обозначения $(\mathfrak{D}(\Omega))^n$, $(\mathfrak{D}(\overline{\Omega}))^n$, $(\mathfrak{D}'(\Omega))^n$, $(L_p(\Omega))^n$, $(L_p(Q_T))^n$, $(W^m_p(\Omega))^n$, $(H^m(\Omega))^n$. При этом предполагается, что компоненты u_i функции $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ принадлежат соответственно пространствам $\mathfrak{D}(\Omega)$, $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$, $\mathfrak{D}'(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $L_p(Q_T)$, $W^m_p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$. Введенные пространства снабжены обычной нормой произведения пространств или какой-либо эквивалентной нормой (исключая ненормированные пространства $(\mathfrak{D}(\Omega))^n$, $(\mathfrak{D}(\overline{\Omega}))^n$ и $(\mathfrak{D}'(\Omega))^n$). Так пространство $(L_2(\Omega))^n$ — гильбертово со скалярным произведением

$$(u, v)_{(L_2(\Omega))^n} = \int\limits_\Omega u(x) \cdot v(x)\, dx.$$

и норма функции u в пространстве $(L_2(\Omega))^n$ определяется равенством

$$\|u\|_{(L_2(\Omega))^n} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Обозначим через $(H^1_0(\Omega))^n$ замыкание $(\mathfrak{D}(\Omega))^n$ в норме пространства $(H^1(\Omega))^n$. Пространство $(H^1_0(\Omega))^n$ — гильбертово со скалярным произведением

$$((u, v)) = \int\limits_\Omega \nabla u(x) : \nabla v(x) dx, \qquad u, v \in (H^1_0(\Omega))^n.$$

Приведенное выражение действительно определяет скалярное произведение на пространстве $(H^1_0(\Omega))^n$. Из аксиом скалярного произведения проверим выполнение лишь одной аксиомы:

$$((u, u)) = 0, \quad u \in (H^1_0(\Omega))^n \quad \Leftrightarrow \quad u = 0.$$

Так как область Ω ограничена, то для функций $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ справедливо следующее неравенство, называемое неравенством Пуанкаре (см. [22, стр.12])

$$\|u\|_{(L_2(\Omega))^n} \le c(\Omega)\|\partial_i u\|_{(L_2(\Omega))^n} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $c(\Omega)$ — константа, зависящая только от области Ω. Поэтому из равенства $((u, u)) = 0$ следует, что $\|u\|_{(L_2(\Omega))^n} = 0$ и $\|u\|_{(H^1(\Omega))^n} = 0$. Таким образом, из свойств нормы следует, что $u = 0$, и все аксиомы скалярного произведения для билинейной формы $((u, v))$ выполнены.

Отметим, что теорема вложения Соболева и теорема о компактности вложения Реллиха-Кондрашова справедливы и для случая пространств Соболева векторнозначных функций. Достаточно применить сформулированные выше теоремы к каждой компоненте векторной функции.

Обозначим через $H^{-1}(\Omega)$ — пространство сопряженное к $H_0^1(\Omega)$. Элементами этого пространства являются линейные непрерывные функционалы на $H_0^1(\Omega)$. Каждый функционал $\xi \in H^{-1}(\Omega)$ является функционалом и на $\mathfrak{D}(\Omega)$, т.е. $\xi \in \mathfrak{D}'(\Omega)$. Поэтому действие функционала ξ на функцию $u \in H_0^1(\Omega)$ обозначим через $\langle \xi, u\rangle$ или $\langle \xi, u\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}$, чтобы уточнить функционалы над каким пространством рассматриваются. Аналогичным образом мы будем обозначать действия функционалов над другими функциональными пространствами. Указание пространств в качестве нижних индексов будет использоваться лишь в том случае, когда нужно подчеркнуть какие именно пространства использованы. В том случае, когда из контекста ясно какие пространства рассматриваются, нижние индексы в обозначениях опускаются.

Пусть $\left((H_0^1(\Omega))^n\right)^*$ — пространство сопряженное к $(H_0^1(\Omega))^n$. Его элементами являются линейные непрерывные функционалы на пространстве $(H_0^1(\Omega))^n$. Каждый элемент $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in (H^{-1}(\Omega))^n$ определяет функционал на пространстве $(H_0^1(\Omega))^n$ по следующему правилу

$$\langle \xi, u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = \langle \xi_i, u_i\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}$$

для $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in (H_0^1(\Omega))^n$. Поэтому $\xi \in \left((H_0^1(\Omega))^n\right)^*$.

С другой стороны каждый функционал $\xi \in \left((H_0^1(\Omega))^n\right)^*$ определяет набор функционалов $\xi_i \in H^{-1}(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, по следующему правилу:
для $v \in H_0^1(\Omega)$ и $u = (0, \ldots, 0, v, 0, \ldots, 0)$ с $u_i = v$, $u_j = 0$ для $j \ne i$,

$$\langle \xi_i, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \langle \xi, u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n}.$$

Нетрудно видеть, что для $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in (H_0^1(\Omega))^n$

$$\langle \xi, u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = \sum_{i=1}^{n}\langle \xi_i, u_i\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}.$$

Таким образом ξ можно отождествить с $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in (H^{-1}(\Omega))^n$ и далее пространство $(H^{-1}(\Omega))^n$ мы будем отождествлять с пространством $\left((H_0^1(\Omega))^n\right)^*$.

Кроме того, по теореме Рисса [18, теорема 8.8, гл.8, стр.107] для функционала $\xi \in (H^{-1}(\Omega))^n$ существует элемент $\varphi \in (H_0^1(\Omega))^n$ такой, что

$$\langle \xi, u \rangle = ((\varphi, u)), \quad \forall u \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

При этом норма ξ в пространстве $(H^{-1}(\Omega))^n$, определяемая как норма линейного оператора

$$\|\xi\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} = \sup_{u \in (H_0^1(\Omega))^n} \frac{|\langle \xi, u \rangle|}{\|u\|_{(H_0^1(\Omega))^n}},$$

равна $\|\xi\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} = \|\varphi\|_{(H_0^1(\Omega))^n} = \left(\sum\limits_{i=1}^n \| \, \partial_i \varphi\|^2_{L_2(\Omega)^n} \right)^{1/2}$.

Аналогично пространство, сопряженное к $(\mathfrak{D}(\Omega))^n$, можно отождествить с $(\mathfrak{D}'(\Omega))^n$. Действие элемента $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in (\mathfrak{D}'(\Omega))^n$ на вектор-функцию $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in (\mathfrak{D}(\Omega))^n$ обозначается $\langle \xi, u \rangle = \langle \xi, u \rangle_{(\mathfrak{D}'(\Omega))^n \times (\mathfrak{D}(\Omega))^n}$ и определяется равенством

$$\langle \xi, u \rangle_{(\mathfrak{D}'(\Omega))^n \times (\mathfrak{D}(\Omega))^n} = \langle \xi_i, u_i \rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega) \times \mathfrak{D}(\Omega)}.$$

Пусть $L_2(\Gamma)$ — пространство измеримых функций, определенных на Γ и интегрируемых с квадратом и $(L_2(\Gamma))^n$ — пространство вектор-функций с компонентами из $L_2(\Gamma)$. Для каждой непрерывно дифференцируемой функции u на $\overline{\Omega}$ определено ее сужение на границу области Γ. Его обозначают $\gamma_0(u) = u\,|_\Gamma$. Оператор сужения на границу линейный и продолжается (единственным образом) до непрерывного линейного оператора $\gamma_0 : W_2^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ такого, что $\gamma_0(u) = u\,|_\Gamma$ для любой непрерывно дифференцируемой функции u на $\overline{\Omega}$. Этот оператор называют оператором следа функции на границе области. (Более точное и детальное определение следа функции можно найти в работах [18], [23].) Ядро оператора γ_0 состоит из функций, имеющих "нулевой след" на Γ, и совпадает с пространством $H_0^1(\Omega)$. Образ оператора $\gamma_0(W_2^1(\Omega))$— плотное линейное подпространство в $L_2(\Gamma)$. Его обозначают $H^{1/2}(\Gamma)$ и наделяют нормой, порождаемой оператором γ_0 из $W_2^1(\Omega)$. Это значит, что для функции $\varphi = \gamma_0(u)$ норма определяется равенством

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \inf\{\|u\|_{W_2^1(\Omega)} : u \in W_2^1(\Omega), \, \varphi = \gamma_0(u)\},$$

т.е. инфимум рассматривается по всему множеству тех функций, для которых $\varphi = \gamma_0(u)$. Таким образом, оператор взятия следа функции на границе области $\gamma_0 : W_2^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ определен на пространстве $W_2^1(\Omega)$, принимает значения в $H^{1/2}(\Gamma)$ и является в указанных нормах непрерывным. Кроме того, существует оператор $l_\Omega : H^{1/2}(\Gamma) \to W_2^1(\Omega)$ — оператор поднятия (продолжения функции), являющийся линейным и непрерывным, такой, что $\gamma_0 \circ l_\Omega = I$ — тождественный оператор.

Пусть $(H^{1/2}(\Gamma))^n$ — пространство вектор-функций с компонентами из $H^{1/2}(\Gamma)$. Оператор сужения на границу определен на $(W_2^1(\Omega))^n$, принимает значения в $(H^{1/2}(\Gamma))^n$ и непрерывен

$$\gamma_0 : (W_2^1(\Omega))^n \to (H^{1/2}(\Gamma))^n.$$

Оператор поднятия (продолжения функции) $l_\Omega : (H^{1/2}(\Gamma))^n \to (W_2^1(\Omega))^n$, такой, что $\gamma_0 \circ l_\Omega = I$, является линейным и непрерывным.

Через $H^{-1/2}(\Gamma)$ обозначим пространство, сопряженное к $H^{1/2}(\Gamma)$. Действие функционала $\xi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ на функцию $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ обозначим $\langle \xi, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}$.

Пусть $(H^{-1/2}(\Gamma))^n$ — пространство вектор-функций с компонентами из $H^{-1/2}(\Gamma)$. Как и выше отождествим пространство $(H^{-1/2}(\Gamma))^n$ с пространством сопряженным к $(H^{1/2}(\Gamma))^n$. Действие функционала $\xi \in (H^{-1/2}(\Gamma))^n$ на функцию $\varphi \in (H^{1/2}(\Gamma))^n$ обозначим $\langle \xi, \varphi \rangle_{(H^{-1/2}(\Gamma))^n\times (H^{1/2}(\Gamma))^n}$.

1.3 Пространство $E(\Omega)$ и его свойства.

В этом разделе рассматривается пространство $E(\Omega)$, состоящее из функций из $(L_2(\Omega))^n$, для которых дивергенция, понимаемая в смысле распределений, принадлежит пространству $L_2(\Omega)$:

$$E(\Omega) = \{u \in (L_2(\Omega))^n : \quad \text{div } u \in L_2(\Omega)\}.$$

Это множество со скалярным произведением

$$(u, v)_{E(\Omega)} = (u, v)_{(L_2(\Omega))^n} + (\text{div } u, \text{div } v)_{L_2(\Omega)}$$

образует гильбертово пространство.

Теорема 1.4. *Если Ω — открытая ограниченная локально-липшицева область в $\mathbb{R}^n$, то множество функций из $(\mathfrak{D}(\overline{\Omega}))^n$ плотно в $E(\Omega)$.*

Доказательство проводится с помощью построения сглаживающего оператора. Одна из конструкций такого оператора предложена в работе [22, стр.14-15].

Если Ω — область с локально-липшицевой границей Γ, то на Γ почти всюду определен единичный вектор внешней нормали ν. Его компоненты $\nu_1(s), \nu_2(s), \dots, \nu_n(s)$, где $s \in \Gamma$, являются ограниченными функциями, измеримыми на Γ. В этом случае для вектор-функций $u \in (\mathfrak{D}(\overline{\Omega}))^n$ можно ввести оператор γ_ν, определяющий нормальную компоненту вектора u на границе Γ:

$$\gamma_\nu(u) = (u\,|_\Gamma) \cdot \nu,$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к границе области Γ. Оператор γ_ν продолжается до непрерывного оператора на множестве $E(\Omega)$. Таким образом, его можно определить на $E(\Omega)$. Приведем точную формулировку этого утверждения.

Теорема 1.5. *Если* Ω *— открытая ограниченная локально-липшицева область в* $\mathbb{R}^n$*, то существует оператор* $\gamma_\nu : E(\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ *линейный, непрерывный и такой, что* $\gamma_\nu(u) = (u\,|_\Gamma) \cdot \nu$ *для каждого* $u \in (\mathfrak{D}(\overline{\Omega}))^n$*. Кроме того, для любых функций* $u \in E(\Omega)$ *и* $w \in W_2^1(\Omega)$ *справедлива следующая обобщенная формула Стокса*

$$(u, \text{grad } w)_{(L_2(\Omega))^n} + (\text{div } u, w)_{L_2(\Omega)} = \langle \gamma_\nu(u), \gamma_0(w) \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}. \quad (1.8)$$

Доказательство. Для каждой функции $u \in E(\Omega)$ определим линейный функционал X_u на пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$. Пусть $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $w \in W_2^1(\Omega)$ такая функция, что $\gamma_0(w) = \varphi$. Значение функционала X_u на φ определим равенством

$$X_u(\varphi) = \int\limits_\Omega [(\text{div }\ u(x))\, w(x) + u(x) \cdot \text{grad }\ w(x)]\, dx =$$
$$= (\text{div }\ u, w)_{L_2(\Omega)} + (u, \text{grad }\ w)_{(L_2(\Omega))^n}$$

Покажем, что определение корректно и не зависит от выбора функции w для φ. Действительно, пусть $w_1, w_2 \in W_2^1(\Omega)$ и $\gamma_0(w_1) = \gamma_0(w_2) = \varphi$. Покажем, что

$$(\text{div }\ u, w_1)_{L_2(\Omega)} + (u, \text{grad }\ w_1)_{(L_2(\Omega))^n} = (\text{div }\ u, w_2)_{L_2(\Omega)} + (u, \text{grad }\ w_2)_{(L_2(\Omega))^n},$$

т.е. что $(\text{div }\ u, \tilde{w})_{L_2(\Omega)} + (u, \text{grad }\ \tilde{w})_{(L_2(\Omega))^n} = 0$ для $\tilde{w} = w_1 - w_2$.
Так как $\tilde{w} \in W_2^1(\Omega)$ и $\gamma_0 \tilde{w} = 0$, то $\tilde{w} \in H_0^1(\Omega)$. Множество $\mathfrak{D}(\Omega)$ плотно вложено в $H_0^1(\Omega)$, поэтому существует последовательность $w^m \in \mathfrak{D}(\Omega)$ такая, что $\tilde{w} = \lim_{m\to\infty} w^m$. Для функций w^m имеем

$$X_u(\gamma_0(w^m)) = (\text{div }\ u, w^m)_{L_2(\Omega)} + (u, \text{grad } w^m)_{(L_2(\Omega))^n} = 0,$$

так как по определению оператора div в обобщенном смысле

$$(\text{div }\ u, w^m)_{L_2(\Omega)} = -(u, \text{grad } w^m)_{(L_2(\Omega))^n}$$

для любых функций $w^m \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

Выполним предельный переход при $m \to \infty$ в полученном равенстве

$$(\operatorname{div}\, u, w^m)_{L_2(\Omega)} + (u, \operatorname{grad}\, w^m)_{(L_2(\Omega))^n} = 0. \tag{1.9}$$

Так как div $u \in L_2(\Omega)$ и $w^m \to \tilde{w}$ в пространстве $L_2(\Omega)$, то по неравенству Шварца

$$|(\operatorname{div}\, u, w^m - \tilde{w})_{L_2(\Omega)}| \leq \|\operatorname{div}\, u\|_{L_2(\Omega)} \|w^m - \tilde{w}\|_{L_2(\Omega)} \to 0$$

и

$$(\operatorname{div}\, u, w^m)_{L_2(\Omega)} - (\operatorname{div}\, , \tilde{w})_{L_2(\Omega)} \to 0 \qquad \text{при}\, m \to \infty.$$

Таким образом, $\lim\limits_{m\to 0} (\operatorname{div}\, u, w^m)_{L_2(\Omega)} = (\operatorname{div}\, u, w)_{L_2(\Omega)}$.

Аналогичным образом устанавливается, что

$$\lim_{m\to 0} (u, \operatorname{grad}\, w^m)_{(L_2(\Omega))^n} = (u, \operatorname{grad}\, w)_{(L_2(\Omega))^n}.$$

Таким образом, предельный переход при $m \to \infty$ в равенстве (1.9) приводит к требуемому равенству

$$X_u(\gamma_0(\tilde{w})) = (\operatorname{div}\, u, \tilde{w})_{L_2(\Omega)} + (u, \operatorname{grad}\, \tilde{w})_{(L_2(\Omega))^n} = 0.$$

Следовательно, значение функционала $X_u(\varphi)$ не зависит от выбора w для заданного значения φ.

Выберем $w = l_\Omega(\varphi)$. Тогда в силу неравенства Шварца

$$\begin{aligned} |X_u(\varphi)| &\leq \|\operatorname{div} u\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|w\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{(L_2(\Omega))^n} \cdot \|\operatorname{grad}\, w\|_{(L_2(\Omega))^n} \leq \\ &\leq \|u\|_{E(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0 \|u\|_{E(\Omega)} \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где c_0 — норма оператора продолжения l_Ω. Следовательно, отображение $\varphi \mapsto X_u(\varphi)$ определяет линейный непрерывный оператор из пространства $H^{1/2}(\Gamma)$ в $\mathbb{R}$, не зависящий от выбора w. Таким образом существует функционал $g = g(u) \in H^{-1/2}(\Gamma)$, такой что $X_u(\varphi) = \langle g, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}$.

Нетрудно видеть, что отображение $u \mapsto g(u)$ линейно и в силу оценки

$$\|g(u)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c_0 \|u\|_{E(\Omega)},$$

следующей из неравенства (1.10), непрерывно как отображение из $E(\Omega)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Кроме того, для функции $u \in (\mathfrak{D}(\overline{\Omega}))^n$ и для любых $w \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ по формуле Стокса имеем

$$\begin{aligned} X_u(\gamma_0(w)) &= \int\limits_\Omega \operatorname{div}\, (u(x)w(x))\, dx = (\operatorname{div}\, u, w)_{L_2(\Omega)} + (u, \operatorname{grad} w)_{(L_2(\Omega))^n} = \\ &= \int\limits_\Gamma (u\cdot\nu)(\gamma_0(w))\, ds = \langle u\cdot\nu, \gamma_0(w)\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} = \\ &= \langle \gamma_\nu(u), \gamma_0(w)\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Так как для данных w следы $\gamma_0(w)$ образуют плотное подмножество в $H^{1/2}(\Gamma)$, то формула Стокса $X_u(\varphi) = \langle \gamma_\nu(u), \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}$ верна по непрерывности для любого $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Следовательно, $g(u) = \gamma_\nu(u)$ определяет непрерывное отображение $\gamma_\nu : E(\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$. □

Завершая обсуждение оператора γ_ν, отметим, что его ядро $E_0(\Omega)$ совпадает с пространством, полученным замыканием $(\mathfrak{D}(\Omega))^n$ в $E(\Omega)$ (см. [22, теорема 1.1, стр.19].

1.4 Пространства соленоидальных функций $(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$, H, V и сопряженные к ним.

Соленоидальными на области Ω называют вектор-функции, дивергенция которых в каждой точке области Ω равна нулю.

Введем основные пространства соленоидальных функций, содержащиеся в $E(\Omega)$. Пусть

$(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n = \{u \in (\mathfrak{D}(\Omega))^n : \operatorname{div} u = 0\}$ — подпространство соленоидальных функций в $(\mathfrak{D}(\Omega))^n$;

H — замыкание $(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$ в норме пространства $(L_2(\Omega))^n$;

V— замыкание $(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$ в норме пространства $(H^1_0(\Omega))^n$.

Естественно полагать, что $\|u\|_H = \|u\|_{(L_2(\Omega))^n}$ для $u \in H$. Пространство V гильбертово, как и $(H^1_0(\Omega))^n$, со скалярным произведением $((u, v))$ для $u, v \in V$ и нормой $\|u\|_V = \|u\|_{(H^1_0(\Omega))^n}$.

По определению $(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n \subset V \subset H$, причем $(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$ плотно в V и V плотно в H. Отсюда следует, что для сопряженных пространств $(\mathfrak{D}'_s(\Omega))^n$, V^*, H^* справедливы вложения

$$H^* \subset V^* \subset (\mathfrak{D}'_s(\Omega))^n.$$

Пространства H и V рефлексивные, поэтому вложение $H^* \subset V^*$ плотное.

Замечание 1. *Предположения плотности вложения $X \subset Y$ недостаточно для того, чтобы*

$$Y^* \subset X^* \quad \textit{и} \quad Y^* \textit{ плотно в } X^*.$$

Рассмотрим контрпример, предложенный L.Wu. Пусть $X = C([0,1])$ и $Y = L_2(0,1)$. Для них $X^* = BV([0,1])$ — пространство функций ограниченной вариации на отрезке $[0,1]$, $Y^* = L_2(0,1)$. Вложение $X \subset Y$ плотно, но замыкание Y^* в X^* равно $L_1(0,1)$, так как для

$f \in L_1(0,1)$ норма функции в пространстве $X^* = BV([0,1])$ определяется равенством $\|f\|_{BV} = \int\limits_0^1 |f(x)|\,dx$. Следовательно, Y^* не совпадает с X^*.

Отметим, что если X рефлексивно, то Y^* плотно в X^*. Действительно, для доказательства достаточно показать, что для любого $\xi \in X^{**}$ такого, что $\xi(\phi) = 0$ для всех $\phi \in Y^*$, выполняется $\xi = 0$. Так как X рефлексивно, то существует $x \in X$, для которого равенство $\xi(\phi) = \phi(x)$ выполняется для любого $\phi \in X^*$. Тогда $\xi(\phi) = \phi(x) = 0$ для любого $\phi \in Y^*$. Следовательно, $x = 0$ в Y, а значит и в X. Таким образом, $\xi = 0$, что и завершает доказательство.

Каждый элемент $u \in H$ определяет линейный непрерывный функционал ϕ на H с помощью следующего соотношения

$$\langle \phi, v\rangle_{H^*\times H} \;=\; (u,v)_H, \qquad\qquad v \in H. \tag{1.11}$$

Поэтому $H \subset H^*$. С другой стороны, в силу теоремы Рисса для каждого элемента $\phi \in H^*$ найдется элемент $u \in H$ такой, что выполнено равенство (1.11). Таким образом, $H^* \subset H$ и H можно отождествить с H^*, т.е.

$$H \;\equiv H^*.$$

В результате имеем цепочку вложений

$$(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n \subset V \subset H \;\equiv H^* \subset V^* \subset (\mathfrak{D}'_s(\Omega))^n. \tag{1.12}$$

Наряду с данной цепочкой вложений имеется и другая естественная цепочка вложений

$$(\mathfrak{D}(\Omega))^n \subset (H_0^1(\Omega))^n \subset (L_2(\Omega))^n \;\equiv ((L_2(\Omega))^n)^* \subset (H^{-1}(\Omega))^n \subset (\mathfrak{D}'(\Omega))^n.$$

Поскольку $V \subset (H_0^1(\Omega))^n$, то $(H^{-1}(\Omega))^n \subset V^*$. Однако данное вложение не является инъективным. Действительно, нетрудно построить два различных функционала ϕ_1, $\phi_2 \in (H^{-1}(\Omega))^n$ на $(H_0^1(\Omega))^n$, таких что $\langle \phi_i, u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = 0$ для любых $u \in V$, $i = 1,2$, и заметить, что эти функционалы определяют один и тот же функционал на пространстве V.

1.5 Характеристика пространства H.

Пусть $p \in \mathfrak{D}'(\Omega)$— произвольное распределение на Ω. Известно, что для p определен $\operatorname{grad} p \in (\mathfrak{D}'(\Omega))^n$. Для любой функции $v \in (\mathfrak{D}(\Omega))^n$ имеем

$$\langle \operatorname{grad} p, v\rangle = \langle \partial_i p, v_i\rangle = -\langle p, \partial_i v_i\rangle = -\langle p, \operatorname{div}\; v\rangle.$$

Поэтому, если $v \in (\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$, то div $v = 0$ и $\langle \operatorname{grad} p, v\rangle = 0$.

Справедливо и обратное утверждение. Приведем формулировку полученного утверждения из работы [22, предложение 1.1, стр.20]:

Теорема 1.6. *(де Рама) Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f \in (\mathfrak{D}'(\Omega))^n$. Для того, чтобы*

$$f = \operatorname{grad} p$$

для некоторого p из $\mathfrak{D}'(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle f, v\rangle = 0, \qquad \forall v \in (\mathfrak{D}_s(\Omega))^n.$$

Обозначим через $H^\perp$ ортогональное дополнение к пространству H в $(L_2(\Omega))^n$:

$$H^\perp = \{u \in (L_2(\Omega))^n : \quad (u, v)_{(L_2(\Omega))^n} = 0, \quad \forall v \in H\}.$$

Следующее утверждение характеризует пространства H и $H^\perp$.

Теорема 1.7. *Пусть Ω — ограниченная локально-липшицева область в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$H = \{u \in (L_2(\Omega))^n : \text{ div } u = 0\,,\ \gamma_\nu(u) = 0\} \tag{1.13}$$

$$H^\perp = \{u \in (L_2(\Omega))^n : \quad u = \text{grad } p\,,\ p \in W_2^1(\Omega)\}. \tag{1.14}$$

Доказательство. Покажем равенство (1.14). Обозначим через F_2 пространство функций в правой части равенства (1.14):

$$F_2 = \{u \in (L_2(\Omega))^n : \quad u = \text{grad } p,\, p \in W_2^1(\Omega)\}.$$

1. На первом шаге докажем, что $F_2 \subset H^\perp$. Пусть $u \in F_2$, тогда $u = \text{grad } p$ для некоторого $p \in W_2^1(\Omega)$. Для всех $v \in \mathfrak{D}_s(\Omega)^n$ по формуле Стокса (1.8) имеем:

$$(u,\, v)_{(L_2(\Omega))^n} \;=\; (\text{grad } p, v)_{(L_2(\Omega))^n} = -\,(p, \text{div } v)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Так как $\mathfrak{D}_s(\Omega)^n$ плотно вложено в H, то равенство $(u,\, v)_{(L_2(\Omega))^n} \;=\; 0$ верно для любого $v \in H$. Следовательно, $u \in H^\perp$ и $F_2 \subset H^\perp$.
2. На втором шаге докажем, что $H^\perp \subset F_2$. Если $u \in H^\perp$, то $(u, v)_{(L_2(\Omega))^n} = 0$ для всех $v \in \mathfrak{D}_s(\Omega)^n$. В силу теоремы де Рама, $u = \text{grad } p$ для некоторого $p \in \mathfrak{D}'(\Omega)$. Известно [22, предложение 1.2, стр.21], что если $\partial_i p \in L_2(\Omega)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, то $p \in L_2(\Omega)$ и, следовательно, $p \in W_2^1(\Omega)$. Итак, $u \in F_2$ и $H^\perp \subset F_2$. Следовательно, $H^\perp = F_2$ и равенство (1.14) доказано.

Обозначим через F_1 пространство функций в правой части равенства (1.13):

$$F_1 = \{u \in (L_2(\Omega))^n : \text{ div } u = 0,\ \gamma_\nu(u) = 0\}.$$

Покажем равенство (1.13), т.е. равенство $H = F_1$.
3. Покажем вложение $H \subset F_1$. Пусть $u \in H$. Так как $(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$ плотно в H, то существует последовательность $u^m \in (\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$ такая, что в пространстве H $\lim_{m\to\infty} u^m = u$. Тогда $u \in E(\Omega)$ и $\lim_{m\to\infty} u^m = u$ в норме пространства $E(\Omega)$. Для $u^m \in (\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$ имеем $\gamma_\nu(u^m) = 0$, поэтому $\gamma_\nu(u) = \lim_{m\to\infty} \gamma_\nu(u^m) = 0$, так как оператор γ_ν непрерывен на $E(\Omega)$. Итак, $u \in F_1$.
4. Докажем обратное вложение. Если пространство H не заполняет полностью пространство F_1, то найдется элемент $u \in F_1$ ортогональный к H, т.е. $u \in H^\perp$. В силу равенства (1.14), доказанного выше, $u \in F_2$ и, следовательно, $u = \operatorname{grad} p$ для некоторого $p \in W_2^1(\Omega)$. Тогда $\operatorname{div} u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} p) = \Delta p = 0$, следовательно, p — решение задачи

$$\begin{cases} \Delta p = \operatorname{div} u = 0, \\ \gamma_\nu(u) = \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0. \end{cases}$$

Известно [18, глава 35, стр.419], что решением данной задачи являются функции $p = const$. Значит, $u = 0$ и $H = F_1$. Теорема доказана. $\square$

1.6 Характеристика пространства V.

В следующей теореме будет показано, что пространство V, введенное как замыкание $(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$ в норме пространства $(W_2^1(\Omega))^n$, можно получить более просто — как подпространство соленоидальных функций в пространстве $(H_0^1(\Omega))^n$.

Теорема 1.8. *Пусть Ω — ограниченная локально-липшицева область в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$V = \{u \in (H_0^1(\Omega))^n : \operatorname{div} u = 0\}. \tag{1.15}$$

Доказательство. Обозначим через F_3 пространство функций в правой части равенства (1.15)

$$F_3 = \{u \in (H_0^1(\Omega))^n : \operatorname{div} u = 0\}$$

с нормой, индуцированной из $(H_0^1(\Omega))^n$. Нетрудно видеть, что $V \subset F_3$. Действительно, $(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n \subset F_3$, поэтому и V — замыкание $(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$ по норме пространства $(W_2^1(\Omega))^n$, также принадлежит F_3.

Для доказательства равенства $V = F_3$ достаточно показать, что любой непрерывный линейный функционал l на F_3, принимающий нулевое значение на V, тождественно равен нулю.

Пусть l — непрерывный линейный функционал на F_3, принимающий нулевое значение на V. Так как F_3 — замкнутое подпространство

$(H_0^1(\Omega))^n$, то в силу теоремы Хана-Банаха произвольный линейный непрерывный функционал l на F_3 продолжается до непрерывного линейного функционала на $(H_0^1(\Omega))^n$. Поэтому l допускает представление

$$l(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle l_i, u_i \rangle, \qquad l_i \in H^{-1}(\Omega).$$

Тогда $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \in (H^{-1}(\Omega))^n$. Так как $\langle l, u \rangle = 0$ для любых $u \in (\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$, то по теореме де Рама $l = \operatorname{grad} p$ для некоторого $p \in \mathfrak{D}'(\Omega)$. По определению $\operatorname{grad} p$

$$l(u) \;=\; \langle l, u \rangle = \langle \operatorname{grad} p, u \rangle = -\langle p, \operatorname{div} u \rangle, \quad \forall\, u \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Поэтому $l(u) = -\langle p, \operatorname{div} u \rangle = 0$ для любых $u \in F_3$. Тогда l равно нулю на всем F_3. $\square$

1.7 Ортогональный проектор на пространство H и его применение.

Покажем как использовать полученное разложение пространства $(L_2(\Omega))^n$ для исследования системы уравнений Навье-Стокса.

Введем ортогональный проектор пространства $(L_2(\Omega))^n$ на H:

$$P:\; (L_2(\Omega))^n \;\to\; H.$$

Пусть (v, p) — решение системы уравнений Навье-Стокса, такое что все слагаемые, входящие в равенство (1.3):

$$\rho \left(\partial_t v + v_i \partial_i v\right) - \nu \Delta v + \operatorname{grad} p = \rho f,$$

принадлежат пространству $(L_2(\Omega))^n$ почти при всех значениях $t \in [0, T]$. Применим к этому равенству проектор P. Так как $\operatorname{grad} p \in H^{\perp}$, то $P(\operatorname{grad} p) = 0$. Учитывая условие (1.4) соленоидальности функции v, и следовательно, $\partial_t v \in H$ и $P\partial_t v = \partial_t v$, получим

$$\rho \partial_t v + \rho P \left(v_i \partial_i v\right) - \nu P \Delta v \;=\; \rho P f. \tag{1.16}$$

Применяя проектор $I - P$ к равенству (1.3), получим уравнение:

$$-\nu (I - P) \Delta v \;+\; \rho (I - P) \left(v_i \partial_i v\right) \;+\; \operatorname{grad} p = (I - P) \rho f. \tag{1.17}$$

Таким образом, применение проектора позволило исключить неизвестное p из уравнения. Решая уравнение (1.16), получаем неизвестное v. Неизвестное p можно выразить с точностью до константы из второго уравнения (1.17) через значение v.

1.8 Характеристика пространства H_q.

По аналогии с пространством H введем пространство H_q, $q > 1$. Через H_q обозначим множество

$$H_q = \{u \in (L_q(\Omega))^n : \ \mathrm{div}\ u = 0,\ \gamma_\nu(u) = 0.\} \tag{1.18}$$

Множество H_q является банаховым пространством с нормой пространства $(L_q(\Omega))^n$.

Пусть далее G_q — банахово пространство, полученное замыканием множества градиентов гладких (однозначных) функций по норме пространства $(L_q(\Omega))^n$. Нетрудно видеть, что

$$G_q = \{u \in (L_q(\Omega))^n : \quad u = \mathrm{grad}\ p,\ p \in W_q^1(\Omega)\}. \tag{1.19}$$

При $q > 1$ множества H_q и G_q являются подпространствами $(L_q(\Omega))^n$, причем $(L_q(\Omega))^n$ распадается в их прямую сумму

$$(L_q(\Omega))^n \,=\, H_q \,\oplus\, G_q\,.$$

При $q = 1$ это разложение не имеет места.

Приведенное разложение отражает хорошо известный факт, что каждое гладкое финитное векторное поле u на области Ω может быть представлено в виде суммы

$$u = v + \mathrm{grad}\ p,$$

где v — соленоидальная составляющая векторного поля, а grad p — его градиентная часть.

Сформулируем эти утверждения более точно.

Теорема 1.9. *Пусть Ω — ограниченная область класса C^2 в $\mathbb{R}^n$ и $q > 1$. Тогда существует непрерывный проектор P_q пространства $(L_q(\Omega))^n$ на H_q, такой что $I - P_q : (L_q(\Omega))^n \to G_q$ и выполняется оценка*

$$\|P_q\|_{(L_q(\Omega))^n \to H_q} \le \frac{cq^2}{q-1}, \tag{1.20}$$

где постоянная c не зависит от q. Если P — ортогональный проектор в $(L_2(\Omega))^n$ на H, то в случае $q \ge 2$ $P_q = P\,|_{(L_q(\Omega))^n}$ и в случае $1 < q < 2$ проектор P_q является продолжением оператора P с подмножества $(\mathfrak{D}(\Omega))^n$ до ограниченного оператора в $(L_q(\Omega))^n$.

Доказательство. Пусть $u \in (\mathfrak{D}(\Omega))^n$. Тогда $\gamma_\nu(u) = 0$. Определим функцию $\bar{p}$ как решение следующей задачи

$$\begin{cases} \Delta \bar{p} = \mathrm{div}\, u, \\ \gamma_\nu(u) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \nu}|_\Gamma \,= 0. \end{cases}$$

Известно [25, теорема I.1.7, стр.24], что решение $\bar{p}$ задачи существует и удовлетворяет оценке

$$\|\mathrm{grad}\,\bar{p}\,\|_{(L_q(\Omega))^n} \leq c\,\frac{q^2}{q-1}\|u\|_{(L_q(\Omega))^n}. \qquad (1.21)$$

Введем функцию v, полагая $u = v + \mathrm{grad}\,\bar{p}$. Очевидно, что $\mathrm{grad}\,\bar{p} \in G_q$ и $\mathrm{div}\,v = \mathrm{div}\,u - \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\bar{p} = \mathrm{div}\,u - \Delta\bar{p} = 0$, поэтому $v \in H_q$. Определим проектор P_q равенством $P_q u = v$. Ясно, что $P_q^2 = P_q$, т.е. P_q—проектор. Тогда $(I - P_q)(u) = \mathrm{grad}\,\bar{p} \in G_q$.

Так как множество $(\mathfrak{D}(\Omega))^n$ функций плотно в $(L_q(\Omega))^n$, то оценка (1.21) позволяет продолжить оператор P_q на множество $(L_q(\Omega))^n$ по непрерывности. Требуемая оценка (1.20) при этом следует из оценки (1.21).

Покажем, что для $q \geq 2$ проектор P_q определяет проектирование ортогональное в $(L_2(\Omega))^n$. Действительно, с помощью формулы Стокса (1.8) проверяется, что для любой гладкой функции $p \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ выполняется

$$(\mathrm{grad}\,p, P_q(u))_{(L_2(\Omega))^n} = \int\limits_{\Omega} \mathrm{grad}\,p(x)\cdot v(x)\,dx = -\int\limits_{\Omega} p(x)\cdot \mathrm{div}\,v(x)\,dx = 0,$$

так как $\mathrm{div}\,v = 0$ и $\gamma_\nu(v) = 0$. Следовательно, $P_q(u) = v$ ортогонально в $(L_2(\Omega))^n$ к G_q и $P_q = P|_{(L_q(\Omega))^n}$.

$\square$

Оператор P, введенный в гидродинамику С.Г.Крейном [11] и Э.Хопфом [31], имеет ясный физический смысл. Если рассматривать жидкость как систему материальных точек, подчиненную условию связи — условию несжимаемости, то его можно трактовать как ортогональное проектирование на "поверхность", высекаемую связью (1.2). При таком проектировании исчезает реакция связи (1.2). Система уравнений Навье-Стокса распадается при этом на уравнение (1.16), не содержащее неизвестное p, и уравнение (1.17), позволяющее при известном значении v вычислить значение p.

В силу теоремы 1.7 множество функций из $(\mathfrak{D}(\Omega))^n$ плотно в $E(\Omega)$, по определению множество $(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$ плотно в H, поэтому $(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$ плотно в H_q для $q \geq 2$. В общем случае имеет место

Теорема 1.10. *Если Ω — ограниченная область класса C^2 в $\mathbb{R}^n$ и $q \geq 1$, то множество функций $(\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$ плотно в H_q.*

Доказательство можно найти в работе [25].

2 Стационарная система уравнений Стокса

В данной главе рассматриваются краевая задача для стационарной системы уравнений Стокса

$$-\nu\Delta v(x) + \operatorname{grad} p(x) = \rho f(x), \quad x \in \Omega,$$
$$\operatorname{div} v(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$v|_\Gamma = 0.$$

для $f \in (L_2(\Omega))^n$ и $\rho = 1$. Вводятся понятия слабого (вариационного) решения и полного слабого решения задачи и доказывается существование слабых решений.

2.1 Оператор Лапласа и его свойства.

Рассмотрим простейшую модельную задачу

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ v|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Пусть $f \in (L_2(\Omega))^n$ заданная функция и $v \in (H_0^2(\Omega))^n$ — решение модельной задачи. Умножим первое равенство на функцию $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ скалярно в $(L_2(\Omega))^n$, получим

$$(-\Delta v, u)_{(L_2(\Omega))^n} = (f, u)_{(L_2(\Omega))^n}. \tag{2.2}$$

Для $v \in (H_0^2(\Omega))^n$ имеем $\Delta v = \operatorname{Div}(\nabla v)$ и с помощью формулы Стокса (1.8) выражение

$$(-\Delta v, u)_{(L_2(\Omega))^n} = (-\operatorname{Div}(\nabla v), u)_{(L_2(\Omega))^n}$$

преобразуется к виду

$$(-\operatorname{Div}(\nabla v), u)_{(L_2(\Omega))^n} = (\nabla v, \nabla u)_{L_2(\Omega)^{n^2}} = ((v, u)).$$

Поэтому равенство (2.2) принимает следующий вид

$$((v, u)) = (f, u)_{(L_2(\Omega))^n}, \quad \forall u \in (H_0^1(\Omega))^n. \tag{2.3}$$

Выражение $(f, u)_{(L_2(\Omega))^n}$ определяет линейный непрерывный функционал $\widetilde{f}$ на $(L_2(\Omega))^n$, а следовательно, и на $(H_0^1(\Omega))^n$. Действие этого функционала на функцию $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ определяется равенством

$$\langle \widetilde{f}, u \rangle = (f, u)_{(L_2(\Omega))^n}.$$

Поэтому равенство (2.3) можно записать в виде

$$((v, u)) = \langle \widetilde{f}, u \rangle, \quad \forall u \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Определение 2.1. *Слабым (вариационным) решением задачи* (2.1) *называется функция* $v \in (H_0^1(\Omega))^n$, *удовлетворяющая равенству*

$$((v,u)) = \langle \widetilde{f}, u\rangle, \quad \forall u \in (H_0^1(\Omega))^n. \tag{2.4}$$

Покажем, что задача (2.1) имеет слабое решение и это решение единственно.

В силу теоремы Рисса для данного функционала $\widetilde{f}$ существует функция $F \in (H_0^1(\Omega))^n$ такая, что действие функционала на функцию $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ определяется равенством

$$\langle \widetilde{f}, u\rangle \;=\; ((F,u))$$

и

$$\|\widetilde{f}\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} = \|F\|_{(H_0^1(\Omega))^n}$$

Тогда равенство (2.4) можно записать в виде

$$((v,u)) = ((F,u)).$$

Поэтому $v = F$ является слабым решением задачи (2.1). Ясно, что это решение единственно.

Оператор Лапласа определен на $(H^2(\Omega))^n \cap (H_0^1(\Omega))^n$ и выражение $-\Delta v$ для $v \in (H^2(\Omega))^n \cap (H_0^1(\Omega))^n$ можно рассматривать как функционал на $(H_0^1(\Omega))^n$, действие которого на функцию $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ определяется равенством

$$\langle -\Delta v, u\rangle = ((v,u)).$$

Ясно, что выражение $((v,u))$ определяет действие функционала на пространстве $(H_0^1(\Omega))^n$ для всех $v \in (H_0^1(\Omega))^n$. Поэтому оператор $-\Delta$ продолжается до оператора на $(H_0^1(\Omega))^n$ со значениями в $(H^{-1}(\Omega))^n$:

$$\Delta : \quad (H_0^1(\Omega))^n \to (H^{-1}(\Omega))^n$$

и

$$\|\Delta v\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} = \|v\|_{(H_0^1(\Omega))^n}. \tag{2.5}$$

Запишем равенство (2.4) в виде

$$\langle -\Delta v, u\rangle = \langle \widetilde{f}, u\rangle, \quad \forall u \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Тогда $-\Delta v = \widetilde{f}$. Существование единственного слабого решения задачи (2.1) для каждого $\widetilde{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n$ означает, что оператор $-\Delta$ обратим и определяет взаимно однозначное отображение, причем в силу (2.5) это отображение является изометрией.

2.2 Вариационная формулировка краевой задачи для системы Стокса.

Рассмотрим задачу

$$-\nu\Delta v(x) + \operatorname{grad} p(x) = \rho f(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.6}$$

$$\operatorname{div} v(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.7}$$

$$v|_{\Gamma} = 0. \tag{2.8}$$

Здесь f, ρ — заданные функции. Чтобы упростить запись далее будем считать $\rho = 1$.

Если f — заданная функция из $(L_2(\Omega))^n$, то сильным (обобщенным) решением задачи (2.6)-(2.8) называют функции $v \in (H^2(\Omega))^n \cap (H_0^1(\Omega))^n$, $p \in W_2^1(\Omega)$, при которых равенства (2.6)-(2.7) выполняются в пространствах $(L_2(\Omega))^n$ и $L_2(\Omega)$ соответственно.

Пусть (v,p) — сильное решение задачи (2.6)-(2.8). Умножим равенство (2.6) на функцию $u \in V$ скалярно в $(L_2(\Omega))^n$

$$(-\nu\Delta v + \operatorname{grad} p, u)_{(L_2(\Omega))^n} = (f,u)_{(L_2(\Omega))^n}.$$

Так как $(-\Delta v, u)_{(L_2(\Omega))^n} = (\nabla v, \nabla u)_{L_2(\Omega)^{n^2}} = ((v,u))$ и в силу (2.7),(2.8)

$$(\operatorname{grad} p, u)_{(L_2(\Omega))^n} = -(p, \operatorname{div} u)_{L_2(\Omega)} = 0,$$

то

$$\nu((v,u)) = (f,u)_{(L_2(\Omega))^n}, \quad \forall u \in V. \tag{2.9}$$

Выражение $(f,u)_{(L_2(\Omega))^n}$ определяет линейный непрерывный функционал $\widetilde{f}$ на $(L_2(\Omega))^n$, а следовательно, и на V. Действие этого функционала на функцию $u \in V$ определяется равенством

$$\langle \widetilde{f}, u\rangle_{V^*\times V} \;=\; (f,u)_{(L_2(\Omega))^n},$$

где V^* обозначает пространство сопряженное к V. Поэтому равенство (2.9) можно записать в виде $\nu((v,u)) = \langle \widetilde{f}, u\rangle_{V^*\times V}$.

Определение 2.2. *Слабым (вариационным) решением задачи* (2.6)-(2.8) *называется функция* $v \in V$*, удовлетворяющая равенству*

$$\nu((v,u)) = \langle \widetilde{f}, u\rangle_{V^*\times V}, \quad \forall u \in V. \tag{2.10}$$

Покажем, что задача (2.6)-(2.8) имеет слабое решение и это решение единственно.

В силу теоремы Рисса для данного функционала $\widetilde{f}$ существует такая функция $F \in V$, что действие функционала на функцию $u \in V$ определяется равенством

$$\langle \widetilde{f}, u\rangle_{V^*\times V} \;=\; ((F,u)).$$

Тогда равенство (2.10) можно записать в виде

$$\nu((v,u)) = ((F,u)).$$

Поэтому $v = \dfrac{F}{\nu}$ является слабым решением задачи (2.6)-(2.8).

Итак показано, что если (v,p) — сильное решение задачи (2.6)-(2.8), то v является слабым решением. Поэтому на первом этапе задачу о поиске сильных решений часто заменяют задачей об исследовании слабых решений. Как видно на примере стационарной задачи Стокса, слабое решение задачи существует и его поиск оказался несложным.

Однако, чтобы восстановить сильное решение задачи необходимо исследовать регулярность полученного решения v и определить вторую компоненту решения p.

Теорема 2.1. *Пусть Ω — открытая ограниченная локально-липшицева область в $\mathbb{R}^n$ и $f \in (L_2(\Omega))^n$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$v \in V$ — слабое решение задачи* (2.6)-(2.8)*;*
2) *$v \in H_0^1(\Omega)$ и удовлетворяет равенствам* (2.6)-(2.8) *в следующем смысле:*
   существует $p \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ такое, что
   $$-\nu\Delta v + \operatorname{grad} p = f$$
   в смысле распределений;
   $\operatorname{div} v = 0$ *и* $\gamma_0 v = 0$.

Доказательство. Пусть $v \in V$ — слабое решение задачи. Тогда v удовлетворяет (2.10) и в силу теоремы о характеристике пространства V имеем $v \in H_0^1(\Omega)$, а следовательно, $\gamma_0 v = 0$ и $\operatorname{div} v = 0$. Кроме того, из равенства (2.10) имеем следующее равенство

$$\langle -\nu\Delta v \, - \, f, \, u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} = 0, \quad \forall u \in V.$$

По теореме де Рама $\nu\Delta v + f = \operatorname{grad} p$ для некоторого p из $\mathfrak{D}'(\Omega)$, т.е.

$$-\nu\Delta v + \operatorname{grad} p = f,$$

однако лишь в смысле распределений, т.е. $\langle -\nu\Delta v + \operatorname{grad} p, \phi\rangle = \langle f, \phi\rangle$ для любого $\phi \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

Без труда проверяется, что 1) следует из 2). □

Замечание 2. *В условиях теоремы можно показать (см. [22, замечание 1.4(i), стр.21]), что в пункте 2) теоремы 2.1 функция p принадлежит пространству $L_2(\Omega)$.*

Замечание 3. *В случае неограниченной области Ω справедливо следующее утверждение [22, теорема 2.1, стр.28]:*
Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$—произвольная открытая область класса C^2, ограниченная в некотором направлении. Тогда для каждого $f \in (L_2(\Omega))^n$ задача имеет единственное решение $v \in V$. Более того, существует функция $p \in L_{2,loc}(\Omega)$ такая, что $-\nu\Delta v + \operatorname{grad} p = f$.

2.3 Оператор grad и div и их свойства.

Как показано в разделе 2.1, оператор Лапласа

$$\Delta : \quad (H_0^1(\Omega))^n \to (H^{-1}(\Omega))^n$$

определяет взаимно однозначное отображение, причем это отображение является изометрией. Это значит, что любой элемент $\xi \in (H^{-1}(\Omega))^n$ можно единственным образом представить как образ некоторого элемента v при отображении Δ:

$$\xi \;=\; \Delta v, \quad v \in (H_0^1(\Omega))^n \;\text{ и }\; \|\xi\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} = \|v\|_{(H_0^1(\Omega))^n}.$$

Для $p \in L_2(\Omega)$ распределение $\operatorname{grad} p$ является элементом $(H^{-1}(\Omega))^n$ и его действие на функцию $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ определяется равенством

$$\langle \operatorname{grad} p, u\rangle = -(\hat{p}, \operatorname{div} u)_{L_2(\Omega)}, \quad \text{где } \hat{p} = p - (p)_\Omega,\ (p)_\Omega = \frac{1}{mes\,\Omega}\int\limits_\Omega p(x)\,dx.$$

Очевидно, что отображение $\operatorname{grad} : L_2(\Omega) \to (H^{-1}(\Omega))^n$ непрерывно и

$$\|\operatorname{grad} p\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \geq \frac{|\langle \operatorname{grad} p, u\rangle|}{\|u\|_{(H_0^1(\Omega))^n}} \;=\; \frac{|(\hat{p}, \operatorname{div} u)_{L_2(\Omega)}|}{\|u\|_{(H_0^1(\Omega))^n}}. \tag{2.11}$$

Известно [14, лемма 2.5], что для ограниченной локально-липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в случае $n = 2, 3$ задача

$$\operatorname{div} u \;=\; \phi, \quad u\,|_{\partial\Omega} =\; 0,$$

для $\phi \in L_2(\Omega)$, $\int\limits_\Omega \phi(x)dx \;=\; 0$, имеет решение $u \in (H_0^1(\Omega))^n$, удовлетворяющее оценке

$$\|u\|_{(H_0^1(\Omega))^n} \leq c_1\|\phi\|_{L_2(\Omega)}.$$

с некоторой константой $c_1 \;=\; c_1(\Omega)$. Пусть u — такое решение задачи для $\phi = \hat{p}$. Тогда $\operatorname{div} u \;=\; \hat{p}$ и

$$\|u\|_{(H_0^1(\Omega))^n} \leq c_1\|\hat{p}\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Подставляя полученное u в неравенство (2.11) и используя оценку (2.12), получим

$$\|\hat p\|^2_{L_2(\Omega)} \,=\, |(\hat p, \operatorname{div} u)_{L_2(\Omega)}| \,\le\, \|\operatorname{grad} p\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \cdot \|u\|_{W_2^1(\Omega)^n} \,\le$$

$$\le\, c_1 \|\operatorname{grad} p\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \cdot \|\hat p\|_{L_2(\Omega)}.$$

Следовательно, для $p \in L_2(\Omega)$ справедлива оценка

$$\|\hat p\|_{L_2(\Omega)} \,\le\, c_1 \|\operatorname{grad} p\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}. \tag{2.13}$$

Итак, оператор $\operatorname{grad} \,:\, L_2(\Omega) \to (H^{-1}(\Omega))^n$ непрерывен и удовлетворяет оценке (2.13). Очевидно, что $Ker \operatorname{grad} \,=\, \{p \in L_2(\Omega) : p = \mathrm{const}\}$ и отображение grad инъективно на подпространстве $E_0 = \{p \in L_2(\Omega) : (p)_\Omega \,=\, 0\}$. Кроме того, заметим, что для $\phi \,=\, \operatorname{grad} p$ с $p \in L_2(\Omega)$ и $u \in V$ справедливо равенство

$$\langle \phi,\, u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} = \langle \operatorname{grad} p,\, u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} = -(\hat p,\, \operatorname{div} u)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Поэтому образ оператора grad содержится в подпространстве

$$V^0 \,=\, \{\phi \in (H^{-1}(\Omega))^n : \langle \phi\,,\, u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} \,=\, 0 \;\text{ для }\; u \in V\}.$$

L.Tartar в работе [35] показал, что:
если $n \ge 2$, область Ω локально-липшицева и граница Γ связна, то для любого $\phi \in V^0$ вспомогательная задача

$$\operatorname{grad} p \,=\, \phi \tag{2.14}$$

имеет единственное решение $p \in L_2(\Omega)$ с $(p)_\Omega \,=\, 0$, удовлетворяющее оценке (2.13):

$$\|p\|_{L_2(\Omega)} \,\le\, c_2 \|\phi\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}$$

с некоторой константой $c_2 \,=\, c_2(\Omega)$.

2.4 Разложение пространства $(H_0^1(\Omega))^n$.

Пространство V соленоидальных функций является подпространством пространства $(H_0^1(\Omega))^n$. Обозначим через Π ортогональное дополнение к V в смысле скалярного произведения в $(H_0^1(\Omega))^n$. Тогда

$$(H_0^1(\Omega))^n \,=\, V \,\oplus\, \Pi.$$

Исследуем из каких функций состоит подпространство Π.

Теорема 2.2. *Пусть $n \geq 2$ и Ω — ограниченная локально-липшицева область с связной границей Γ. Подпространство Π можно представить как множество*

$$\Pi = \left\{ w : w \in (H_0^1(\Omega))^n, \ \Delta w = \operatorname{grad} p, \ \ p \in L_2(\Omega), \ \ (p)_\Omega = 0 \right\}$$

и для $w \in (H_0^1(\Omega))^n$ таких, что

$$\Delta w = \operatorname{grad} p, \ \ p \in L_2(\Omega), \ \ (p)_\Omega = 0,$$

справедлива оценка

$$\|p\|_{L_2(\Omega)} \leq c_2 \|w\|_{(H_0^1(\Omega))^n} \tag{2.15}$$

для некоторой константы $c_2 = c_2(\Omega)$.

Доказательство. **1**. Пусть $w \in (H_0^1(\Omega))^n$ такое, что $\Delta w = \operatorname{grad} p$, $p \in L_2(\Omega)$. Тогда для $u \in V$ имеем:

$$\begin{aligned} ((w,u)) &= (\nabla w, \nabla u)_{L_2(\Omega)^{n^2}} = -(\Delta w, u)_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} = \\ &= -(\operatorname{grad} p, u)_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} = (p, \operatorname{div} u)_{L_2(\Omega)} = 0, \end{aligned}$$

так как $\operatorname{div} u = 0$. Следовательно, $w \in \Pi$.
2. Покажем обратное включение. Пусть $w \in \Pi$ и, следовательно, для $\forall u \in V$

$$((w,u)) = (\nabla w, \nabla u)_{L_2(\Omega)^{n^2}} = -(\Delta w, u)_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} = 0.$$

Заметим, что $\Delta w \in V^0$. Тогда, как показал L.Tartar в работе [35], вспомогательная задача

$$\operatorname{grad} p = \Delta w$$

имеет единственное решение $p \in L_2(\Omega)$ с $(p)_\Omega = 0$, удовлетворяющее оценке (2.15). Следовательно, w принадлежит множеству

$$\left\{ w : w \in (H_0^1(\Omega))^n, \ \Delta w = \operatorname{grad} p, \ \ p \in L_2(\Omega), \ \ (p)_\Omega = 0 \right\}.$$

Таким образом, требуемое включение доказано. □

2.5 Разложение пространства $(H^{-1}(\Omega))^n$.

Оператор Лапласа $\Delta : (H_0^1(\Omega))^n \to (H^{-1}(\Omega))^n$ обратим и $\Delta (H_0^1(\Omega))^n = (H^{-1}(\Omega))^n$. Поэтому разложение в прямую сумму пространства $(H_0^1(\Omega))^n$, $(H_0^1(\Omega))^n = V \oplus \Pi$, обеспечивает возможность разложения пространства $(H^{-1}(\Omega))^n$:

$$(H^{-1}(\Omega))^n = V' \oplus \Pi', \tag{2.16}$$

где $\Pi' = \Delta\Pi$ и $V' = \Delta V$. Следовательно, ортогональное разложение $u = v + w, \quad v \in V, \quad w \in \Pi$, дает разложение $\xi = \Delta u$ в сумму $\xi = \zeta + \eta$, где $\zeta = \Delta v \in V'$, $\eta = \Delta w \in \Pi'$. Кроме того, так как отображение $\Delta : (H_0^1(\Omega))^n \to (H^{-1}(\Omega))^n$ является изометрией и $\|u\|_{(H_0^1(\Omega))^n} = \|\Delta u\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}$ для любых $u \in (H_0^1(\Omega))^n$, то равенство норм

$$\|u\|_{(H_0^1(\Omega))^n} = \|v\|_{(H_0^1(\Omega))^n} + \|w\|_{(H_0^1(\Omega))^n}$$

дает равенство

$$\|\xi\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} = \|\zeta\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} + \|\eta\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}. \tag{2.17}$$

Полученное разложение в сумму подпространств не является ортогональным. Однако отсутствие ортогональности компенсирует свойство перекрестной ортогональности

$$\langle \Pi', V\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = 0, \qquad \langle V', \Pi\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = 0.$$

Более точно, справедлива следующая теорема

Теорема 2.3. *Функционалы $\eta \in \Pi'$ аннулируются на V, т.е. верно*

$$\langle \Pi', V\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = 0.$$

Более того, если $\eta \in (H^{-1}(\Omega))^n$ и $\langle \eta, v\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = 0$ для всех $v \in V$, то $\eta \in \Pi'$.

Функционалы $\zeta \in V'$ аннулируются на Π, т.е. верно

$$\langle V', \Pi\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = 0.$$

Если $\zeta \in (H^{-1}(\Omega))^n$ и $\langle \zeta, w\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = 0$ для всех $w \in V$, то $\zeta \in V'$. Для разложения (2.16) *справедлива теорема Пифагора, т.е. для $\xi = \zeta + \eta$, где $\zeta \in V'$, $\eta \in \Pi'$, справедливо равенство* (2.17).

Доказательство. Если $\eta \in \Pi'$, то $w = \Delta^{-1}\eta \in \Pi$. Тогда для любого $v \in V$

$$\langle \eta, v\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = \langle \Delta w, v\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = \\ = -(\nabla w, \nabla v)_{L_2(\Omega)^{n^2}} = -((w, v)) = 0,$$

так как $w \in \Pi$ и $v \in V$ ортогональны в пространстве $(H_0^1(\Omega))^n$. Следовательно, $\langle \Pi', V\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = 0$.

Покажем обратное утверждение. Если $\eta \in (H^{-1}(\Omega))^n$ и $\langle \eta, v\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = 0$ для любого $v \in V$, то для $w = \Delta^{-1}\eta$ из равенства

$$\langle \eta, v\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = \langle \Delta w, v\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = -(\nabla w, \nabla v)_{L_2(\Omega)^{n^2}} = 0$$

следует, что $w = \Delta^{-1}\eta \in \Pi$. Поэтому $\eta \in \Pi'$.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. $\square$

Непосредственным следствием теоремы является следующее утверждение

Следствие 2.1. *Пусть $n \geq 2$ и Ω — ограниченная локально-липшицева область с связной границей Γ. Тогда $\Pi' = V^0$ и любой непрерывный линейный функционал ξ на $(H_0^1(\Omega))^n$, обращающийся в ноль на V, представим с помощью равенства*

$$\langle \xi, u \rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} = -\int\limits_{\Omega} p(x) \operatorname{div} u(x)\, dx, \quad u \in (H_0^1(\Omega))^n,$$

где p — элемент $L_2(\Omega)$, определяемый ξ, с нулевым средним на Ω.

Действительно, если $\xi \in V^0$ и, следовательно, $\langle \xi, u \rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} = 0$ для любого $u \in V$, то в силу теоремы 2.3 $\xi \in \Pi'$ и $\xi = \Delta w$ для $w \in \Pi$. По теореме 2.2 $\xi = \Delta w = \operatorname{grad} p$ для некоторого $p \in L_2(\Omega)$ такого, что $(p)_\Omega = 0$, и

$$\|p\|_{L_2(\Omega)} \leq c_2 \|\xi\|_{(H^{-1}(\Omega))^n},$$

где c_2 — константа.

Тогда

$$\langle \xi, u \rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} = \langle \operatorname{grad} p, u \rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} =$$

$$= -(p, \operatorname{div} u)_{L_2(\Omega)} = -\int\limits_{\Omega} p(x) \operatorname{div} u(x)\, dx, \quad u \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

2.6 Полное слабое решение системы Стокса.

Предложенный подход к постановке вариационной задачи для задачи Стокса (2.6)-(2.8) исключает неизвестное p из уравнения и сводит исследование к изучению операторного уравнения в V. Это упрощает задачу, однако приводит к задаче изучения давления и его восстановления.

Введем понятие полного слабого решения задачи Стокса (2.6)-(2.8).

Определение 2.3. *Полным слабым (вариационным) решением задачи* (2.6)-(2.8) *называются функции (v, p), $v \in V$, $p \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющие равенству*

$$\nu\left((v, w)\right) - (p, \operatorname{div} w)_{L_2(\Omega)} = \langle \widetilde{f}, w \rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} \tag{2.18}$$

для всех $w \in (H_0^1(\Omega))^n$.

Как и выше, если (v, p) сильное обобщенное решение задачи (2.6)-(2.8), то (v, p) является полным слабым решением.

Заметим, что равенство (2.18) эквивалентно равенству

$$-\nu\Delta v + \operatorname{grad} p = f \tag{2.19}$$

в смысле функционалов из $(H^{-1}(\Omega))^n$. Поэтому достаточно найти решения уравнения (2.19), они и являются полными слабыми решениями задачи (2.6)-(2.8).

Пусть $f \in (H^{-1}(\Omega))^n$, тогда $f = \eta + \zeta$, где $\eta = \Delta u \in V'$ и $u \in V$, $\zeta = \Delta w \in \Pi'$ и $w \in \Pi$. Из теоремы 2.2 $\zeta = \Delta w = \operatorname{grad} p$ для $p \in L_2(\Omega)$. Следовательно, $f = \Delta u + \operatorname{grad} p$. Возвращаясь к равенству (2.19), видим, что решением уравнения является $v = -\frac{1}{\nu}u$ и p. Для него верно равенство

$$\nu^2 \|\Delta v\|^2_{(H^{-1}(\Omega))^n} + \|\operatorname{grad} p\|^2_{(H^{-1}(\Omega))^n} = \|f\|^2_{(H^{-1}(\Omega))^n} \tag{2.20}$$

или же, в силу оценки (2.15) и того факта, что отображение $\Delta : (H^1_0(\Omega))^n \to (H^{-1}(\Omega))^n$ изометрия,

$$\nu^2 \|v\|^2_{(W^1_2(\Omega))^n} + c_2^{-2}\|p\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|f\|^2_{(H^{-1}(\Omega))^n}. \tag{2.21}$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2.4. *Пусть $n \geq 2$ и Ω — ограниченная локально-липшицева область с связной границей Γ. Для любой правой части $f \in (H^{-1}(\Omega))^n$ уравнение* (2.19) *имеет единственное решение (v, p) с $v \in V$, $p \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющее условию $(p)_\Omega = 0$ и оценкам* (2.20)-(2.21).

Введем пространство

$$L_{2,0}(\Omega) = \{p \in L_2(\Omega) : (p)_\Omega = 0\}$$

и оператор

$$\mathcal{L} : V \times L_{2,0}(\Omega) \to (H^{-1}(\Omega))^n, \qquad \mathcal{L}(v, p) = -\nu\Delta v + \operatorname{grad} p.$$

Следствие 2.2. *В случае произвольного $n \geq 2$ линейный оператор $\mathcal{L} : V \times L_{2,0}(\Omega) \to (H^{-1}(\Omega))^n$ непрерывен и имеет непрерывный обратный оператор, причем*

$$\nu^2 \|v\|^2_{(W^1_2(\Omega))^n} + c_2^{-2}\|p\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|\mathcal{L}(v, p)\|^2_{(H^{-1}(\Omega))^n} \tag{2.22}$$

Доказательство. Теорема 2.4 обеспечивает обратимость оператора $\mathcal{L}$. Непрерывность оператора следует из непрерывности операторов Δ и grad. Оценка (2.22) эквивалентна оценке (2.21). Ограниченность, а следовательно, и непрерывность обратного оператора следует из оценки (2.22). □

3 Стационарная система уравнений Навье-Стокса

В данной главе изучается краевая задача для стационарной системы уравнений Навье-Стокса

$$-\nu\Delta v(x) + \rho(v(x)\cdot\nabla)v(x) + \operatorname{grad} p(x) = \rho f(x), \quad x\in\Omega, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div} v(x) = 0, \quad x\in\Omega, \tag{3.2}$$

$$v\,|_{\Gamma} = 0. \tag{3.3}$$

для $f\in(L_2(\Omega))^n$ и $\rho=1$. Вводятся понятия слабого (вариационного) решения и полного слабого решения задачи и доказывается существование слабых решений.

3.1 Понятие слабого и полного слабого решения

Введем понятие полного слабого решения для данной задачи. Обозначим через F — функционал на пространстве $(H_0^1(\Omega))^n$, определяемый равенством

$$(f,u)_{(L_2(\Omega))^n} = \langle F,u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n}, \quad \forall u\in(H_0^1(\Omega))^n.$$

Определение 3.1. *Пусть $2\le n\le 4$. Полным слабым (вариационным) решением задачи* (3.1)-(3.3) *называются функции (v,p), $v\in V$, $p\in L_2(\Omega)$, удовлетворяющие равенству*

$$\begin{aligned}\nu((v,u)) - (v_iv_j,\partial_ju_i)_{L_2(\Omega)} - (p,\operatorname{div}\,u)_{L_2(\Omega)} = \\ = \langle F,u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n}\end{aligned} \tag{3.4}$$

для любых функций $u\in(H_0^1(\Omega))^n$.

Для проверки корректности определения достаточно показать, что второе слагаемое в равенстве (3.4)

$$(v_iv_j,\partial_ju_i)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega v_i(x)v_j(x)\partial_ju_i(x)\,dx$$

определено для $v\in V$, $u\in(H_0^1(\Omega))^n$.

Заметим, что при условии $n\le 4$ по теореме вложения Соболева пространство $V\subset(H_0^1(\Omega))^n$ вложено в пространство $L_4(\Omega)^n$, поэтому $v_iv_j\in L_2(\Omega)$ для любых индексов i,j. Так как $u\in(H_0^1(\Omega))^n$, то $\partial_ju_i\in L_2(\Omega)$ для любых индексов i,j. Таким образом, рассматриваемый интеграл представляет собой скалярное произведение функций из $L_2(\Omega)$ и, следовательно, определен.

Как и выше устанавливается, что если (v,p) — сильное решение задачи (3.1)-(3.3), то (v,p) является слабым решением. Поясним лишь переход во втором слагаемом, выполняемый с помощью интегрирования по частям

$$-\left(v_i v_j, \partial_j u_i\right)_{L_2(\Omega)} = -\int\limits_{\Omega} v_i(x) v_j(x) \partial_j u_i(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \partial_j v_i(x) v_j(x) u_i(x)\, dx + \int\limits_{\Omega} v_i(x) \partial_j v_j(x) u_i(x)\, dx.$$

Так как второй из интегралов содержит множитель $\sum\limits_{j=1}^{n} \partial_j v_j(x) = \operatorname{div} v(x)$ и поэтому равен нулю, то

$$-\left(v_i v_j, \partial_j u_i\right)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \partial_j v_i(x) v_j(x) u_i(x)\, dx = \left((v \cdot \nabla) v, u\right)_{(L_2(\Omega))^n}.$$

Рассмотрим задачу о существовании полных слабых решений системы (3.1)-(3.3).

Пусть (v,p) — полное слабое решение задачи. Учитывая разложение пространства $(H_0^1(\Omega))^n$ на ортогональную сумму подпространств V и Π, представим $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ в виде $u = u^{(1)} + u^{(2)}$, где $u^{(1)} \in V$ и $u^{(2)} \in \Pi$. Тогда равенство (3.4) можно записать в виде

$$\nu\left((v, u^{(1)} + u^{(2)})\right) - \left(v_i v_j, \partial_j (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})\right)_{L_2(\Omega)} - \left(p, \operatorname{div}\, (u^{(1)} + u^{(2)})\right)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \langle F, u^{(1)} + u^{(2)} \rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n},$$

Из ортогональности подпространств V и Π следует, что $((v, u^{(2)})) = 0$, и так как $\operatorname{div}\, u^{(1)} = 0$, то $(p, \operatorname{div}\, u^{(1)}) = 0$. Поэтому полученное равенство можно переписать в виде

$$\nu\left((v, u^{(1)})\right) - \left(v_i v_j, \partial_j (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})\right)_{L_2(\Omega)} - \left(p, \operatorname{div}\, u^{(2)}\right)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \langle F, u^{(1)} + u^{(2)} \rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n}.$$

Полагая поочередно равными нулю $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, получим следующую систему равенств, эквивалентную равенству (3.4):

$$\nu((v, u^{(1)})) - \left(v_i v_j, \partial_j u_i^{(1)}\right)_{L_2(\Omega)} = \langle F, u^{(1)} \rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n}, \tag{3.5}$$

$$-\left(v_iv_j, \partial_j u_i^{(2)}\right)_{L_2(\Omega)} - (p, \operatorname{div} u^{(2)})_{L_2(\Omega)} = \langle F, u^{(2)}\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n}, \quad (3.6)$$

для $u^{(1)} \in V$ и $u^{(2)} \in \Pi$. Первое из полученных равенств содержит лишь одну компоненту полного решения v. Часто именно v, удовлетворяющее соотношениям (3.7), называют слабым решением задачи (3.1)-(3.3).

Определение 3.2. *Слабым (вариационным) решением задачи* (3.1)-(3.3) *называется функция $v \in V$, удовлетворяющая равенству*

$$\nu((v,u)) - (v_iv_j, \partial_j u_i)_{L_2(\Omega)} = \langle F, u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n}, \qquad \forall u \in V.$$

Если найдено слабое решение задачи v, то второе уравнение (3.6) позволяет вычислить p, а следовательно, и полное решение задачи.

3.2 Аппроксимационные и операторные уравнения. Свойства операторов.

Возвратимся к равенству (3.4). Каждое слагаемое равенства определяет действие линейного непрерывного функционала на пространстве $(H_0^1(\Omega))^n$. Так первое слагаемое определяет действие функционала Δv:

$$\langle \Delta v, u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = -((v,u)) \qquad \forall u \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Второе слагаемое определяет функционал $K(v)$:

$$\langle K(v), u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} \;=\; (v_iv_j, \partial_j u_i)_{L_2(\Omega)} \qquad \forall u \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Для третьего естественно ввести обозначение $\operatorname{grad} p$:

$$\langle \operatorname{grad} p, u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} \;=\; -(p, \operatorname{div}\, u)_{L_2(\Omega)} \quad \forall u \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Тогда, опуская нижние индексы, равенство (3.4) можно записать в виде

$$-\nu\langle \Delta v, u\rangle \,-\, \langle K(v), u\rangle \,+\, \langle \operatorname{grad} p, u\rangle \;=\; \langle F, u\rangle, \quad \forall u \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

или в виде операторного равенства

$$-\nu\Delta v \,-\, K(v) \,+\, \operatorname{grad} p \;=\; F. \quad (3.7)$$

Ясно, что каждое полное слабое решение (v,p) задачи (3.1)-(3.3) является решением операторного уравнения (3.7). Верно и обратное, решение операторного уравнения (3.7) является полным слабым решением задачи (3.1)-(3.3).

Введем вспомогательный оператор $K_\varepsilon : V \to (H^{-1}(\Omega))^n$ для $\varepsilon \geq 0$, необходимость появления которого мы обсудим позже:

$$\langle K_\varepsilon(v), u\rangle = \int\limits_\Omega \frac{v_iv_j}{1+\varepsilon|v|^2}\cdot\partial_i u_j dx \quad \text{для любых} \;\; v \in V \quad \text{и} \;\; u \in V.$$

Нетрудно видеть, что $\langle K_\varepsilon(v), u\rangle \to \langle K(v), u\rangle$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, функционалы $K_\varepsilon(v)$ сходятся слабо к $K(v)$, т.е. $K_\varepsilon(v) \rightharpoonup K(v)$ при $\varepsilon \to 0$ для любых $u \in V$. Позже мы установим другой предельный переход для выражений $K_\varepsilon(v)$.

Для того, чтобы установить разрешимость операторного уравнения (3.9), рассмотрим вспомогательные "аппроксимационные"уравнения, содержащие параметр $\varepsilon > 0$:

$$-\nu\Delta v \,-\, K_\varepsilon(v) \,+\, \operatorname{grad} p \,=\, F. \tag{3.8}$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$\mathcal{L}(v,\, p) \,-\, K_\varepsilon(v) \,=\, F. \tag{3.9}$$

Далее мы исследуем свойства операторов, входящих в уравнение (3.9), установим априорные оценки решений уравнения и с помощью теории степени Лере-Шаудера докажем существование решения $(v_\varepsilon, p_\varepsilon)$ уравнения (3.9). Решение операторного уравнение (3.9) будет получено как слабый предел этих решений.

Для доказательства непрерывности нелинейных отображений в пространствах $L_p(\Omega)$ используется теорема М.А.Красносельского о непрерывности оператора суперпозиции. Приведем формулировку теоремы М.А.Красносельского, следуя [19, предложение 1.1]:

Пусть G — измеримое множество положительной меры в $\mathbb{R}^n$, $h(x, u_1, u_2, \ldots, u_N)$ — вещественная функция, определенная и удовлетворяющая при $x \in G$, $u_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, следующим условиям

a) при почти всех x функция $h(x, u_1, u_2, \ldots, u_N)$ является непрерывной функцией $u_1, u_2, \ldots, u_N$;

b) при любых $u_1, u_2, \ldots, u_N$ функция $h(x, u_1, u_2, \ldots, u_N)$ является измеримой по x;

c) выполнено неравенство $|h(x, u_1, u_2, \ldots, u_N)| \le c \sum\limits_{i=1}^{N} |u_i|^{p_i/p} + g(x)$ с положительной константой c, числами $p, p_1, \ldots, p_N$, принадлежащими интервалу $(1, \infty)$ и функцией $g(x)$ из $L_p(G)$.

Тогда определенный равенством

$$H[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_N(x)] = h(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_N(x))$$

оператор суперпозиции действует непрерывным образом из $L_{p_1}(G) \times L_{p_2}(G) \times \ldots \times L_{p_N}(G)$ в $L_p(G)$.

Применим эту теорему к доказательству непрерывности операторов K_ε.

Лемма 3.1.

1) Пусть $n \le 4$. Тогда для любого $\varepsilon \ge 0$ отображение $K_\varepsilon : V \subset (L_4(\Omega))^n \to (H^{-1}(\Omega))^n$ непрерывно и справедлива оценка

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \le c_0 \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V, \tag{3.10}$$

с некоторой константой c_0.

2) Для любого $\varepsilon > 0$ отображение $K_\varepsilon : V \to (H^{-1}(\Omega))^n$ вполне непрерывно и справедлива оценка

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \le \frac{c_1}{\varepsilon}, \quad \forall v \in V, \tag{3.11}$$

с некоторой константой c_1.

Доказательство.

1) Пусть $\varepsilon \ge 0$ и $n \le 4$. По определению оператора K_ε

$$\langle K_\varepsilon(v), u \rangle \; = \; \int\limits_\Omega \frac{v_i(x) v_j(x)}{1 + \varepsilon |v(x)|^2} \cdot \partial_i u_j(x)\, dx$$

для $u, v \in V$. Для оценки используем неравенство Шварца:

$$\left| \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n h_i(x) \phi_i(x) dx \right| \le \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n h_i^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \phi_i^2(x) dx \right)^{1/2},$$

справедливое для любых измеримых функций h_i, ϕ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, заданных на Ω и имеющих конечные нормы, стоящие в правой части неравенства. Получим

$$|\langle K_\varepsilon(v), u \rangle| \; \le \; \left(\int\limits_\Omega \; \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{v_i v_j}{1 + \varepsilon |v|^2} \right)^2 dx \right)^{1/2} \cdot \|u\|_V$$

и далее

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \le \left(\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{v_i v_j}{1 + \varepsilon |v|^2} \right)^2 dx \right)^{1/2} \le \left(\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_i v_j)^2 dx \right)^{1/2} \le$$

$$\le \; \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_i^4(x) dx \right)^{1/4} \left(\int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n v_j^4(x) dx \right)^{1/4} \; = \; \|v\|^2_{(L_4(\Omega))^n}.$$

По теореме вложения Соболева вложение $V \subset (L_4(\Omega))^n$ непрерывно для $n \leq 4$, поэтому

$$\|v\|_{L_4(\Omega)^n} \leq c\|v\|_V \quad \text{и} \quad \|K_\varepsilon(v)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \leq c^2\|v\|_V^2$$

для некоторой константы c.

Из определения отображения K_ε ясно, что для доказательства непрерывности K_ε достаточно доказать непрерывность отображений

$$\phi_{ij} : (L_4(\Omega))^n \to L_2(\Omega), \quad \phi_{ij}(v) = \frac{v_i v_j}{1+\varepsilon|v|^2}, \qquad i,j = 1,2,\dots n.$$

Непрерывность каждого из этих отображений следует из теоремы М.А.Красносельского о непрерывности оператора суперпозиции и очевидной оценки

$$|\phi_{ij}(v)| \leq |v_i v_j| \leq \frac{1}{2}(|v_i|^2 + |v_j|^2) \quad \text{для} \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, непрерывность отображения K_ε установлена.

2) Заметим, что для $\varepsilon > 0$ функции ϕ_{ij} удовлетворяют оценке

$$|\phi_{ij}(v)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{для} \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда из теоремы М.А.Красносельского о непрерывности оператора суперпозиции следует непрерывность отображения

$$\phi_{ij} : (L_2(\Omega))^n \to L_2(\Omega), \quad \phi_{ij}(v) = \frac{v_i v_j}{1+\varepsilon|v|^2}, \qquad i,j = 1,2,\dots n$$

а следовательно, и отображения $K_\varepsilon : (L_2(\Omega))^n \to (H^{-1}(\Omega))^n$.

Вложение $V \subset (L_2(\Omega))^n$ вполне непрерывно в силу теоремы 1.1 Реллиха-Кондрашова, поэтому отображение $K_\varepsilon : V \to (H^{-1}(\Omega))^n$ вполне непрерывно как суперпозиция вполне непрерывного оператора вложения $V \subset (L_2(\Omega))^n$ и непрерывного отображения $K_\varepsilon : (L_2(\Omega))^n \to (H^{-1}(\Omega))^n$. $\square$

3.3 Априорная оценка решений и разрешимость аппроксимационных уравнений.

В этом разделе устанавливаются априорные оценки решений аппроксимационных уравнений (3.8) и на их основе с помощью топологической теории степени Лере-Шаудера доказывается разрешимость уравнений.

Теорема 3.1. *Пусть $2 \le n \le 4$ и Ω — ограниченная локально-липшицева область с связной границей Γ. Для любого $\varepsilon > 0$ и любой правой части $F \in (H^{-1}(\Omega))^n$ уравнение (3.9) (или уравнение (3.8)) имеет хотя бы одно решение (v, p), $v \in V$, $p \in L_2(\Omega)$, такое, что $(p)_\Omega = 0$. Кроме того, это решение удовлетворяет оценкам*

$$\|v\|_{(H_0^1(\Omega))^n} \le \nu^{-1} \|F\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}, \tag{3.12}$$

$$\|p\|_{L_2(\Omega)} \le c_3(\|F\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} + c_3 \|F\|^2_{(H^{-1}(\Omega))^n}), \tag{3.13}$$

с константой c_3, не зависящей от ε.

Доказательство. Рассмотрим операторное уравнение (3.9):

$$\mathcal{L}(v, p) = F + K_\varepsilon(v).$$

Применим оператор $\mathcal{L}^{-1}$ к обеим частям уравнения. Получим эквивалентное операторное уравнение

$$(v, p) = \mathcal{L}^{-1}(F + K_\varepsilon(v)). \tag{3.14}$$

Обозначим через k отображение, определяемое правой частью уравнения (3.14):

$$k : V \times L_{2,0}(\Omega) \to V \times L_{2,0}(\Omega), \qquad (v, p) \mapsto \mathcal{L}^{-1}(F + K_\varepsilon(v)).$$

Тогда уравнение (3.14) можно записать в виде

$$(I - k)(v) = 0. \tag{3.15}$$

В силу леммы 3.1 отображение $F + K_\varepsilon(v)$ вполне непрерывно как сумма постоянного отображения и вполне непрерывного. По следствию 2.1 оператор $\mathcal{L}^{-1}$ непрерывен. Тогда отображение k вполне непрерывно как композиция вполне непрерывного отображения $F + K_\varepsilon(v)$ и непрерывного оператора $\mathcal{L}^{-1}$. Покажем, что степень Лере-Шаудера $deg_{LS}(I - k, \overline{B}_R, 0)$ для отображения $I - k$ определена на шаре $B_R \subset V \times L_{2,0}(\Omega)$ достаточно большого радиуса R и отлична от нуля. Тогда утверждение теоремы о разрешимости уравнения (3.9) будет следовать из свойства степени Лере-Шаудера.

Рассмотрим вспомогательное семейство операторных уравнений

$$(v, p) = \lambda \mathcal{L}^{-1}(F + K_\varepsilon(v)), \qquad \lambda \in [0, 1]. \tag{3.16}$$

Если (v, p) — решение одного из уравнений этого семейства, то в силу оценки (2.22) имеем:

$$\|v\|_V^2 + \|p\|^2_{L_2(\Omega)} \le c^2 \|\mathcal{L}(v, p)\|^2_{(H^{-1}(\Omega))^n}$$

для некоторой константы c. Поэтому

$$\|v\|_V + \|p\|_{L_2(\Omega)} \le 2c\|F + K_\varepsilon(v)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}$$

и

$$\|v\|_V + \|p\|_{L_2(\Omega)} \le 2c(\|K_\varepsilon(v)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} + \|F\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}). \qquad (3.17)$$

Отсюда и из оценки (3.9) получим

$$\|v\|_V + \|p\|_{L_2(\Omega)} \le 2c(\frac{c_1}{\varepsilon} + \|F\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}).$$

Выберем $R > 2c(\frac{c_1}{\varepsilon} + \|F\|_{(H^{-1}(\Omega))^n})$, тогда ни одно решение уравнений семейства (3.16) не принадлежит границе шара $B_R \subset V \times L_{2,0}(\Omega)$. Поэтому отображение $I - \lambda k : V \times L_{2,0}(\Omega) \times [0,1] \to V \times L_{2,0}(\Omega)$ определяет гомотопию вполне непрерывных векторных полей на B_R. Следовательно, степень $deg_{LS}(I - \lambda k, \overline{B}_R, 0)$ определена для каждого значения $\lambda \in [0,1]$ и в силу свойства гомотопической инвариантности степени имеем

$$deg_{LS}(I - k, \overline{B}_R, 0) = deg_{LS}(I - \lambda k, \overline{B}_R, 0) = deg_{LS}(I, \overline{B}_R, 0) = 1,$$

так как $0 \in B_R$. Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование решения операторного уравнения (3.9), а следовательно, и существование решения уравнения (3.8).

Пусть (v,p), $v \in V$, $p \in L_2(\Omega)$, — решение уравнения (3.8). Для доказательства оценки (3.12) применим функционалы равенства (3.8) к функции $v \in V$. Получим

$$-\nu\langle\Delta v, v\rangle + \langle \operatorname{grad} p, v\rangle = \langle F, v\rangle + \langle K_\varepsilon(v), v\rangle. \qquad (3.18)$$

Оценим каждое слагаемое. Прежде всего, по определению оператора Δ

$$\langle -\nu\Delta v, v\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} = \nu((v,v)) = \nu\|v\|^2_{(H_0^1(\Omega))^n};$$

по определению оператора grad и так как $\operatorname{div} v = 0$

$$\langle \operatorname{grad} p, v\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} = -(p, \operatorname{div} v)_{L_2(\Omega)} = 0;$$

по определению оператора K_ε с помощью интегрирования по частям

$$\langle K_\varepsilon(v, v\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} = \int\limits_\Omega \frac{v_i v_j}{1+\varepsilon|v|^2} \cdot \partial_i v_j dx =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{v_i}{1+\varepsilon|v|^2} \cdot \frac{1}{2}\partial_i v_j^2 dx = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_i \cdot \partial_i \ln(1+\varepsilon|v|^2) dx =$$

$$= -\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\partial_i v_i\cdot\ln(1+\varepsilon|v|^2)dx \,=\, 0,$$

так как $\operatorname{div} v = 0$. Кроме того,

$$\langle F, v\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} \,\le\, \|F\|_{(H^{-1}(\Omega))^n}\cdot\|v\|_{(H_0^1(\Omega))^n}.$$

Поэтому равенство (3.18) приводит к следующему неравенству

$$\nu\|u\|^2_{(H_0^1(\Omega))^n} \,\le\, \|\tilde{f}\|_{V^*}\|u\|^2_{(H_0^1(\Omega))^n},$$

откуда и следует оценка (3.12).

Оценка (3.13) следует из оценок (3.17), (3.10) и оценки (3.12).

Теорема доказана. □

3.4 О существовании полного слабого решения

Теорема 3.2. *Пусть* $2 \le n \le 4$ *и* Ω — *ограниченная локально-липшицева область с связной границей* Γ. *Для любой правой части* $f \in (L_2(\Omega))^n$ *задача* (3.1)-(3.3) *имеет хотя бы одно полное слабое решение* (v, p), $v \in V$, $p \in L_2(\Omega)$, *и это решение удовлетворяет условию* $(p)_\Omega = 0$ *и оценкам*

$$\|v\|_{(H_0^1(\Omega))^n} \,\le\, \nu^{-1}\rho\,\|f\|_{(L_2(\Omega))^n}, \tag{3.19}$$

$$\|p\|_{L_2(\Omega)} \,\le\, c_3(\|f\|_{(L_2(\Omega))^n} + c_3\,\|f\|^2_{(L_2(\Omega))^n}), \tag{3.20}$$

где c_3 — *некоторая константа.*

Доказательство. Выберем произвольную последовательность $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\varepsilon_l >, 0$, $\varepsilon_l \to 0$ при $l \to \infty$. В силу теоремы (3.1) для каждого ε_l аппроксимационное уравнение (3.9) имеет хотя бы одно решение (v_l, p_l). Оценки (3.12),(3.13) показывают, что последовательность $\{(v_l, p_l)\}_{l=1}^{\infty}$ ограничена по норме пространства $V \times L_2(\Omega)$.

Пространства V и $L_2(\Omega)$ рефлексивны, поэтому из ограниченной последовательности $\{(v_l, p_l)\}_{l=1}^{\infty}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Кроме того, по теореме о компактности вложения вложение $V \subset (L_2(\Omega))^n$ вполне непрерывно. Поэтому из ограниченной последовательности $\{v_l\}_{l=1}^{\infty}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся по норме пространства $(L_2(\Omega))^n$.

Таким образом, не уменьшая общности рассуждений (и если необходимо, переходя к подпоследовательности), будем предполагать, что

$$\begin{aligned} v_l &\rightharpoonup v^* \qquad \text{слабо в } V; \\ p_l &\rightharpoonup p^* \qquad \text{слабо в } L_2(\Omega); \\ v_l &\to v^* \qquad \text{почти всюду в } \ \Omega; \\ v_l &\to v^* \qquad \text{сильно в } (L_2(\Omega))^n. \end{aligned}$$

Для того, чтобы выполнить предельный переход в равенстве

$$\mathcal{L}(v_l,\, p_l) \,-\, K_{\varepsilon_l}(v_l) \,=\, F,$$

заметим, что

$$\mathcal{L}(v_l,\, p_l) \to \mathcal{L}(v^*,\, p^*) \qquad \text{слабо в} \quad V^*,$$

так как линейный оператор $\mathcal{L}$ преобразует слабо сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся. Кроме того, покажем, что последовательность функционалов $K_{\varepsilon_l}(v_l)$ сходится слабо к $K(v^*)$. Тогда, переходя к пределу в смысле слабой сходимости функционалов в равенстве выше, получим

$$\mathcal{L}(v^*,\, p^*) \,-\, K(v^*) \,=\, F.$$

Следовательно, (v^*, p^*) является решением уравнения (3.9) и полным слабым решением задачи (3.1)-(3.3).

Итак, покажем, что последовательность функционалов $K_{\varepsilon_l}(v_l)$ сходится слабо к $K(v^*)$, т.е. для любого $u \in (\mathcal{D}_s(\Omega))^n$

$$\langle K_{\varepsilon_l}(v_l), u\rangle \to \langle K(v^*), u\rangle \quad \text{при} \ \ l \to \infty$$

или

$$\langle K_{\varepsilon_l}(v_l) - K(v^*), u\rangle \to 0 \quad \text{при} \ \ l \to \infty.$$

Для всех $u \in (\mathcal{D}_s(\Omega))^n$ по определению

$$\langle K_{\varepsilon_l}(v_l) - K(v^*), u\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{(v_l)_i (v_l)_j(t)}{1+\varepsilon_l |v_l|^2} - (v_l)_i (v_l)_j \right) \partial_j u_i(x)\, dx,$$

поэтому

$$|\langle K_{\varepsilon_l}(v_l) - K(v^*), u\rangle\,| \leq \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{(v_l)_i (v_l)_j}{1+\varepsilon_l |v_l|^2} - v_i^* v_j^* \right\|_{L^1(\Omega)} \cdot \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}.$$

Используя неравенство Шварца оценим первый сомножитель правой части неравенства:

$$\left\|\frac{(v_l)_i(v_l)_j}{1+\varepsilon_l|v_l|^2} - v_i^* v_j^*\right\|_{L^1(\Omega)} \le \left\|\frac{(v_l)_i(v_l)_j - v_i^* v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}\right\|_{L^1(\Omega)} + \left\|\frac{\varepsilon_l|v_l|^2 v_i^* v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}\right\|_{L^1(\Omega)} \le$$

$$\le \|(v_l)_i(v_l)_j - v_i^* v_j^*\|_{L^1(\Omega)} + \left\|\frac{\varepsilon_l|v_l|^2 v_i^* v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}\right\|_{L^1(\Omega)} \le \left\|\frac{\varepsilon_l|v_l|^2 v_i^* v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}\right\|_{L^1(\Omega)} +$$

$$+\|(v_l)_i\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|(v_l)_j - v_j^*\|_{L^2(\Omega)} + \|v_j^*\|_{L^2(\Omega)}\|(v_l)_i - v_i^*\|_{L^2(\Omega)}.$$

В силу выбора последовательности $\{v_l\}_{l=1}^{\infty}$ имеем $\|v_l - v^*\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ при $l \to \infty$ и величины $\|v_l\|_{L^2(\Omega)}$, $\|v^*\|_{L^2(\Omega)}$ равномерно ограничены. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что и первое слагаемое правой части полученного неравенства сходится к нулю при $l \to \infty$.

Так как $v_l \to v^*$ почти всюду на Ω и $\varepsilon_l \to 0$, то $\dfrac{\varepsilon_l|v_l|^2 v_i^* v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2} \to 0$ почти всюду на Ω при $l \to \infty$. Имеем $\left|\dfrac{\varepsilon_l|v_l|^2 v_i^* v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}\right| \le |v_i^* v_j^*|$ и $v_i^* v_j^* \in L^1(\Omega)$, поэтому применяя теорему Лебега [4, теорема 1.1] получаем $\left\|\dfrac{\varepsilon_l|v_l|^2 v_i^* v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}\right\|_{L^1(\Omega)} \to 0$ при $l \to \infty$.

Таким образом, показано, что $\langle K_{\varepsilon_l}(v_l) - K(v^*), u\rangle \to 0$. Это и завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание 4. *Введение отображения K_ε, аппроксимирующего отображение K, объясняется тем, что отображение $K : V \to (H^{-1}(\Omega))^n$ не является вполне непрерывным в случае размерности $n = 4$. Для $n \le 3$ отображение K вполне непрерывно и простые аргументы доказательства теоремы 3.1 применимы к уравнению* (3.7) *и позволяют установить утверждение теоремы 3.2 без использования промежуточных аппроксимаций K_ε.*

4 Пространства функций на отрезке со значениями в банаховом пространстве

Считается, что для описания движения жидкости в области Ω на временном отрезке $[0, T]$, достаточно знать распределение скоростей $v(t, x)$. Функция $v(t, \cdot)$ задает распределение скоростей в области Ω при фиксированном значении $t \in [0, T]$. Обозначим эту функцию через $v(t)$. Таким образом, каждому значению $t \in [0, T]$ ставится в соответствие функция $v(t)$, т.е. элемент функционального пространства, например, V. Такой подход оказывается наиболее удобным при изучении системы эволюционных уравнений Навье-Стокса.

В этой главе вводятся основные понятия теории функций на отрезке $[a, b]$ со значениями в банаховом пространстве X и основные функциональные пространства таких функций. Приведены необходимые теоремы вложения таких пространств, а также теоремы о компактности вложения.

4.1 Производная функции. Пространства дифференцируемых функций

Пусть X — банахово пространство и X^* — пространство сопряженное к пространству X. Действие функционала $\phi \in X^*$ на функцию $u \in X$ обозначается $\langle \phi, u \rangle$ или $\langle \phi, u \rangle_{X^* \times X}$, если нужно пояснить в каком именно пространстве рассматривается действие функционала.

Пусть $u : [a, b] \to X$ — функция со значениями в пространстве X.

Определение 4.1. *Функция $u : [a, b] \to X$ называется непрерывной в точке $t \in [a, b]$, если*

$$\lim_{h \to 0} \|u(t + h) - u(t)\|_X = 0.$$

Функция $u : [a, b] \to X$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке отрезка.

Обозначим через $C([a, b]; X)$ пространство функций непрерывных на отрезке $[a, b]$ с нормой $\|u\|_{C([a,b];X)} = \sup_{[a,b]} \|u(t)\|_X$.

Определение 4.2. *Функция $u : [a, b] \to X$ называется слабо непрерывной в точке $t \in [a, b]$, если*

$$\lim_{h \to 0} \langle \phi, u(t + h) - u(t) \rangle = 0$$

для любого функционала $\phi \in X^*$.
Функция $u : [a, b] \to X$ называется слабо непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она слабо непрерывна в каждой точке отрезка.

Обозначим через $C_w([a,b];X)$ множество функций слабо непрерывных на отрезке $[a,b]$.

Определение 4.3. *Функция $u : [a,b] \to X$ называется дифференцируемой в точке $t \in [a,b]$, если существует такой элемент $x \in X$, для которого выполняется условие*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-x\right\|_X = 0.$$

Элемент x называют производной функции u в точке t и обозначают $u'(t)$.
Функция $u : [a,b] \to X$ называется дифференцируемой на отрезке $[a,b]$, если она дифференцируема в каждой точке отрезка.

Определение 4.4. *Функция $u : [a,b] \to X$ называется слабо дифференцируемой в точке $t \in [a,b]$, если существует такой элемент $x \in X$, для которого выполняется условие*

$$\lim_{h\to 0}\left\langle \phi, \frac{u(t+h)-u(t)}{h}-x\right\rangle = 0$$

для любого функционала $\phi \in X^*$. Элемент x называют слабой производной функции u в точке t и также обозначают $u'(t)$.
Функция $u : [a,b] \to X$ называется слабо дифференцируемой на отрезке $[a,b]$, если она слабо дифференцируема в каждой точке отрезка.

Использование одного и того же обозначения производной и слабой производной объясняется тем, что если определена производная $u'(t)$, то слабая производная функции в точке t существует и производные равны.

Понятие производной и слабой производной порядка m вводится стандартным образом.

Обозначим через $C^m([a,b];X)$ пространство функций непрерывных на отрезке $[a,b]$ и имеющих непрерывные на отрезке производные до порядка m включительно. Пространство $C^m([a,b];X)$ банахово с нормой

$$\|u\|_{C^m([a,b];X)} \;=\; \sum_{i=0}^{m}\sup_{t\in[a,b]}\|u^{(i)}(t)\|_X$$

Обозначим через $C_w^m([a,b];X)$ пространство функций слабо непрерывных на отрезке $[a,b]$ и имеющих слабо непрерывные на отрезке производные до порядка m включительно. Пространство $C_w^m([a,b];X)$ локально выпуклое с топологией, задаваемой системой полунорм

$$\rho_{\phi,i}(u) \;=\; \sup_{t\in[a,b]}\left|\left\langle \phi,\, u^{(i)}(t)\right\rangle\right|, \quad \phi\in X^*, \quad i=0,1,\ldots,m.$$

Доказательство этого утверждения и описание других свойств таких пространств содержится в работе [4].

4.2 Измеримые функции и интеграл Бохнера.

Введем понятие измеримой функции со значениями в банаховом пространстве X, а также понятие интеграла Бохнера от измеримых функций.

Определение 4.5. *Функция* $u : [a,b] \to X$ *называется простой, если существует конечное число попарно непересекающихся измеримых по Лебегу подмножеств* $B_i \subset [a,b]$, $i = 1,2,\ldots,m$, *с* $mes \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i = b - a$ *и таких, что функция* $u(t)$ *на каждом множестве* B_i *принимает постоянное значение* x_i.

Интеграл Бохнера от простой функции определяется по формуле

$$\int\limits_a^b u(t)\,dt = \sum_{i=1}^{m} mes(B_i)x_i.$$

Если подмножества B_i представляют собой интервалы, то простую функцию называют *ступенчатой*.

Определение 4.6. *Функция* $u : [a,b] \to X$ *называется измеримой по Бохнеру, если существует последовательность простых функций* $\{u_k\}$, *сходящаяся поточечно к функции* u, *т.е.*

$$u_k(t) \to u(t) \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \text{для почти всех} \quad t \in [a,b].$$

Если для данной последовательности выполнено условие

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_a^b \|u(t) - u_k(t)\|_X\,dt = 0,$$

то функция u *называется интегрируемой по Бохнеру на отрезке* $[a,b]$. *При этом интеграл Бохнера от функции определяется равенством*

$$\int\limits_a^b u(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} \int\limits_a^b u_k(t)\,dt.$$

Отметим, что в случае $X = \mathbb{R}$ понятие функции измеримой по Бохнеру совпадает с понятием функции измеримой по Лебегу и интеграл Бохнера от функции равен интегралу Лебега. Как и в случае функций измеримых по Лебегу, функции измеримые по Бохнеру считают равными, если они различаются лишь на множестве нулевой меры.

Сформулируем без доказательства некоторые свойства измеримых и интегрируемых по Бохнеру функций и интеграла Бохнера. Доказательства проводятся по аналогии с доказательствами утверждений для вещественных функций измеримых по Лебегу и при необходимости их можно найти в книге [10].

Теорема 4.1. *Пусть банахово пространство X сепарабельно. Функция $u : [a,b] \to X$ тогда и только тогда измерима по Бохнеру, когда для любого функционала $\phi \in X^*$ функция $\langle \phi, u \rangle$ измерима по Лебегу на отрезке $[a,b]$.*

Теорема 4.2. *Измеримая по Бохнеру функция $u : [a,b] \to X$ тогда и только тогда интегрируема по Бохнеру, когда функция $\|u(t)\|_X$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[a,b]$. При этом*

$$\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\|_X \leq \int_a^b \|u(t)\|_X \, dt.$$

Теорема 4.3. *Для любой интегрируемой по Бохнеру функции $u : [a,b] \to X$ функция*

$$v : [a,b] \to X, \qquad v(t) = \int_a^t u(s)\, ds, \quad t \in (a,b),$$

дифференцируема почти всюду на отрезке $[a,b]$ и

$$v'(t) = u(t) \qquad \text{для почти всех} \quad t \in (a,b).$$

Теорема 4.4. *Если функция $u : [a,b] \to X$ интегрируема по Бохнеру, то для любого функционала $\phi \in X^*$*

$$\int_a^b \langle \phi, u(t) \rangle \, dt = \left\langle \phi, \int_a^b u(t)\, dt \right\rangle.$$

4.3 Пространства интегрируемых функций

В этом разделе мы вводим различные пространства функций, измеримых по Бохнеру. Далее вместо слов "измеримые по Бохнеру" мы будем использовать термин "измеримые".

Пусть $L_p(a,b;X)$, $1 \leq p < \infty$, обозначает множество измеримых функций $u : [a,b] \to X$, для которых

$$\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt < \infty.$$

Множество $L_p(a,b;X)$, $1 \le p < \infty$, образует банахово пространство с нормой, определяемой равенством

$$\|u\|_{L_p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt\right)^{1/p} \qquad \text{для} \qquad u \in L_p(a,b;X).$$

Отметим, что если пространство Y гильбертово со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_Y$, то пространство $L_2(a,b;Y)$ также является гильбертовым со скалярным произведением

$$(u,v)_{L_2(a,b;Y)} = \int_a^b (u(t),v(t))_Y \, dt \quad \text{для} \quad u,v \in L_2(a,b;Y).$$

Функция $u : [a,b] \to X$ называется существенно ограниченной, если существует число M такое, что $\|u(t)\|_X < M$ почти всюду на $[a,b]$. Обозначим через $L_\infty(a,b;X)$ множество измеримых существенно ограниченных функций $u : [a,b] \to X$. Множество $L_\infty(a,b;X)$ образует банахово пространство с нормой функции u, определяемой равенством

$$\|u\|_{L_\infty(a,b;X)} = ess \sup_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X.$$

Наряду с пространствами $L_p(a,b;X)$, $1 \le p < \infty$, мы будем рассматривать пространства функций $L_q(a,b;X^*)$, $1 \le q < \infty$.

Лемма 4.1. *Если $u \in L_p(a,b;X)$, $1 \le p \le \infty$, $v \in L_q(a,b;X^*)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ для $1 < p < \infty$; $q = 1$ для $p = \infty$; $q = \infty$ для $p = 1$, то*

$$\langle v(t), u(t)\rangle \in L_1(a,b) \quad \textit{и} \quad \int_a^b \langle v(t), u(t)\rangle \, dt \le \|v\|_{L_q(a,b;X^*)} \|u\|_{L_p(a,b;X)}.$$

Полученное неравенство называют неравенством Гёльдера.

Доказательство леммы 4.1. По определению измеримых функций для функций $u \in L_p(a,b;X)$, $v \in L_q(a,b;X^*)$ существуют последовательности простых функций u_k со значениями в X и v_k со значениями в X^*, которые сходятся почти всюду на $[a,b]$ к функциям u и v, соответственно. Так как функции $\langle v_k(\cdot), u_k(\cdot)\rangle$ со значениями в $\mathbb{R}$ являются простыми на $[a,b]$ и последовательность $\langle v_k(\cdot), u_k(\cdot)\rangle$ сходится почти всюду на $[a,b]$ к функции $\langle v(\cdot), u(\cdot)\rangle$, то по определению функция $\langle v(\cdot), u(\cdot)\rangle$ измерима по Лебегу. Для нее справедлива оценка $\langle v(t), u(t)\rangle \le \|v(t)\|_{X^*} \cdot \|u(t)\|_X$. Так как $\|v(t)\|_{X^*} \in L_q(a,b)$ и $\|u(t)\|_X \in L_p(a,b)$, то утверждение следует из обычного неравенства Гёльдера для вещественных функций. $\square$

Приведем еще одно утверждение о связи пространств $L_p(a,b;X)$ и $L_q(a,b;X^*)$.

Теорема 4.5. *Если пространство X рефлексивно и $1 < p < \infty$, то для каждого элемента $f \in (L_p(a,b;X))^*$ существует единственный элемент $v \in L_q(a,b;X^*)$ с $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ такой, что*

$$\langle f, u\rangle_{(L_p(a,b;X))^* \times L_p(a,b;X)} = \int\limits_a^b \langle v(t), u(t)\rangle_{X^* \times X}\, dt.$$

Соответствие $f \mapsto v$ линейно и

$$\|f\|_{(L_p(a,b;X))^*} \leq \|v\|_{L_q(a,b;X^*)}.$$

Полное доказательство утверждения содержится в [4, с.159].

Из теоремы 4.5 следует, что если пространство X рефлексивно и $1 < p < \infty$, то $(L_p(a,b;X))^* = L_q(a,b;X^*)$ с $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $(L_q(a,b;X^*)^* = L_p(a,b;X)$, поэтому пространство $L_p(a,b;X)$ также рефлексивно.

Пусть $\mathcal{D}(a,b)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем в интервале (a,b). Приведем ряд вспомогательных результатов необходимых для дальнейшего изложения.

Теорема 4.6. *Пусть X — банахово пространство с сопряженным X^* и функции u, g принадлежат пространству $L_1(a,b;X)$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(a) функция $u(t)$ почти всюду равна первообразной от $g(t)$ и

$$u(t) = \xi + \int\limits_a^t g(s)ds, \quad \xi \in X, \quad \text{для п.в.} \quad t \in [a,b]; \tag{4.1}$$

(b) для каждой пробной функции $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$

$$\int\limits_a^b u(t)\eta'(t)dt = -\int\limits_a^b g(t)\eta(t)dt; \tag{4.2}$$

(c) для каждого $\phi \in X^*$

$$\frac{d}{dt}\langle \phi, u(t)\rangle = \langle \phi, g(t)\rangle \tag{4.3}$$

в смысле скалярных распределений на (a,b). Если условия (a)-(c) выполнены, то u, в частности, почти всюду равна некоторой непрерывной функции.

Доказательство.

(a) $\Rightarrow$ (b): Пусть выполнено равенство (4.1) и u — первоообразная для g, т.е. $u'(t) = g(t)$ для почти всех $t \in [a,b]$. Тогда для каждой пробной функции $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$

$$\int_a^b u(t)\eta'(t)dt = \int_a^b \left(\xi + \int_a^t g(s)ds\right)\eta'(t)dt =$$

$$= -\int_a^b \left(\xi + \int_a^t g(s)ds\right)'\eta(t)dt = -\int_a^b g(t)\eta(t)dt.$$

(a) $\Rightarrow$ (c): Пусть выполнено равенство (4.1) и u — первоообразная для g. Тогда для каждого $\phi \in X^*$

$$\frac{d}{dt}\langle\phi, u(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle\phi, \xi + \int_a^t g(s)ds\rangle = \frac{d}{dt}\left(\langle\phi,\xi\rangle + \int_a^t \langle\phi, g(s)\rangle ds\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_a^t \langle\phi, g(s)\rangle ds\right) = \langle\phi, g(t)\rangle.$$

(c) $\Rightarrow$ (b): Пусть $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$ и $\phi \in X^*$, тогда по определению

$$\int_a^b \langle\phi, u(t)\rangle\eta'(t)dt = -\int_a^b \frac{d}{dt}\langle\phi, u(t)\rangle\eta(t)dt = -\int_a^b \langle\phi, g(t)\rangle\eta(t)dt.$$

Следовательно,

$$\left\langle\phi, \int_a^b u(t)\eta'(t)dt + \int_a^b g(t)\eta(t)dt\right\rangle = 0.$$

Откуда и следует равенство (4.1).

(b) $\Rightarrow$ (a): Введем функции $u_0(t) = \int_a^t g(s)\,ds$ и $v = u - u_0$. Ясно, что u_0 — абсолютно непрерывная функция и $u_0' = g$. Тогда равенство (4.2) выполнено для $u = v + u_0$ и каждой пробной функции $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$

$$\int_a^b u(t)\eta'(t)dt = -\int_a^b g(t)\eta(t)dt.$$

Но

$$\int\limits_a^b u(t)\eta'(t)dt = \int\limits_a^b (v(t) + u_0(t))\eta'(t)dt =$$

$$= \int\limits_a^b v(t)\eta'(t)dt + \int\limits_a^b u_0(t)\eta'(t)dt = \int\limits_a^b v(t)\eta'(t)dt - \int\limits_a^b g(t)\eta(t)dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b v(t)\eta'(t)dt = 0 \quad \text{для любой пробной функции } \eta \in \mathcal{D}(a,b). \tag{4.4}$$

Используя равенство (4.4), покажем,что функция v не зависит от t и следовательно, $v(t) \equiv \xi$ и $u(t) = \xi + u_0(t) = \xi + \int\limits_a^t g(s)\, ds$, что и завершит доказательство леммы.

Пусть $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$ произвольная функция и $\eta_0 \in \mathcal{D}(a,b)$ фиксированная функция, такая что $\int\limits_a^b \eta_0(s)\, ds = 1$. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \int\limits_a^t \eta(s) - \lambda\eta_0(s)\, ds, \quad \text{где } \lambda = \int\limits_a^b \eta(s)\, ds.$$

Нетрудно проверить, что $\psi \in \mathcal{D}(a,b)$. Действительно, $\psi'(t) = \eta(t) - \lambda\eta_0(t) \in \mathcal{D}(a,b)$ и, кроме того, $\psi(a) = \psi(b) = 0$. (Проверьте, что $\psi(t) = 0$ и в некоторой окрестности точек a и b.)

Подставим функцию ψ в равенство (4.4). Получим

$$0 = \int\limits_a^b v(t)\eta'(t)dt = \int\limits_a^b v(t)(\eta(t) - \lambda\eta_0(t))dt = \int\limits_a^b v(t)\,\eta(t)dt - \lambda\int\limits_a^b v(t)\eta_0(t)dt.$$

Обозначим через ξ_0 число $\xi_0 = \int\limits_a^b v(t)\eta_0(t)dt$. Тогда полученное равенство преобразуется к виду

$$0 = \int\limits_a^b v(t)\,\eta(t)dt - \int\limits_a^b \xi_0\eta(t)dt = \int\limits_a^b (v(t) - \xi_0)\eta(t)dt.$$

Итак,

$$\int_a^b (v(t) - \xi_0)\eta(t)dt = 0, \qquad \forall \eta \in \mathcal{D}(a,b).$$

Отсюда следует, что $v(t) - \xi_0 \equiv 0$ почти всюду на $[a,b]$, что и завершает доказательство. □

4.4 Распределения со значениями в банаховом пространстве

Распределением на (a,b) со значениями в X называется линейное непрерывное отображение пространства $\mathcal{D}(a,b)$ в пространство X, рассматриваемое со слабой топологией. Обозначим через $\mathcal{D}'(a,b;X)$ пространство всех распределений. Топология пространства $\mathcal{D}'(a,b;X)$ может быть задана следующим образом:

последовательность $u_k \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ сходится, если для любых $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$, $\phi \in X^*$ последовательность чисел $\langle \phi, u_k(\eta)\rangle$ сходится.

Рассмотрим следующий пример распределения на (a,b) со значениями в банаховом пространстве X.

Пусть $u \in L_1(a,b;X)$. Тогда выражение

$$f_u(\eta) = \int_a^b \eta(t)u(t)dt, \quad \eta \in \mathcal{D}(a,b),$$

задает линейное отображение из пространства $\mathcal{D}(a,b)$ в X, это отображение ограничено и, следовательно, определяет распределение на (a,b) со значениями пространстве X. Таким образом, каждую функцию $u \in L_1(a,b;X)$ можно рассматривать как элемент пространства распределений $\mathcal{D}'(a,b;X)$, причем соответствие $u \mapsto f_u$ является инъективным отображением пространства $L_1(a,b;X)$ в пространство $\mathcal{D}'(a,b;X)$.

Определение 4.7. *Обобщенной производной распределения $f \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ называется такое распределение $f' \in \mathcal{D}'(a,b;X)$, что*

$$f'(\eta) = -f(\eta'), \qquad \forall \eta \in \mathcal{D}(a,b).$$

Лемма 4.2. *Если $f_k \to f$ в $\mathcal{D}'(a,b;X)$ при $k \to \infty$, то $f'_k \to f'$ в $\mathcal{D}'(a,b;X)$.*

Доказательство. Если $f_k \to f$ в $\mathcal{D}'(a,b;X)$ при $k \to \infty$, то для любых $\phi \in X^*$ и $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$ выполнено

$$\lim_{k\to\infty} \langle \phi, f'_k(\eta) - f'(\eta)\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \phi, f(\eta') - f_k(\eta')\rangle = 0.$$

Отсюда по определению сходимости в $\mathcal{D}'(a,b;X)$ имеем требуемую сходимость $f'_k \to f'$ в $\mathcal{D}'(a,b;X)$. □

Лемма 4.3. *Пусть $u \in L_1(a,b;X)$. Тогда функция, определяемая равенством*

$$v(t) = \int_a^t u(s)\,ds, \quad t \in [a,b],$$

непрерывна на $[a,b]$ и имеет обобщенную производную v', причем $v' = u$ в смысле распределений $\mathcal{D}'(a,b;X)$.

Доказательство. Для любого $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$ имеем

$$v(\eta') = \int_a^b v(t)\eta'(t)\,dt = \int_a^b \int_a^t u(s)\,ds\,\eta'(t)\,dt.$$

Тогда для любых $\phi \in X^*$ и $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$ справедливо равенство

$$\langle \phi, v'(\eta) \rangle = \langle \phi, -v(\eta') \rangle = \left\langle \phi, -\int_a^b \int_a^t u(s)\,ds\,\eta'(t)\,dt \right\rangle.$$

По теореме 4.4

$$\left\langle \phi, -\int_a^b \int_a^t u(s)\,ds\,\eta'(t)\,dt \right\rangle = -\int_a^b \int_a^t \langle \phi, u(s) \rangle\,ds\,\eta'(t)\,dt.$$

Функция $\displaystyle\int_a^t \langle \phi, u(s) \rangle\,ds$ — вещественная абсолютно непрерывная функция на $[a,b]$, поэтому применим формулу интегрирования по частям к полученному выражению. Учитывая, что $\eta'(a) = \eta'(b) = 0$, и применяя теорему 4.4, приходим к равенству

$$-\int_a^b \int_a^t \langle \phi, u(s) \rangle\,ds\,\eta'(t)\,dt = \int_a^b \langle \phi, u(t) \rangle\,\eta(t)\,dt = \langle \phi, \int_a^b u(t)\,\eta(t)\,dt\,\rangle.$$

Итак, равенство

$$\langle \phi, v'(\eta) \rangle = \langle \phi, \int_a^b u(t)\,\eta(t)\,dt\,\rangle = \langle \phi, u(\eta) \rangle$$

верно для любых $\phi \in X^*$ и $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$. Следовательно, $v' = u$. $\square$

Лемма 4.4. *Если последовательность* $\{u_k\}$, $u_k \in L_p(a,b;X)$, $1 < p < \infty$, *слабо сходится к элементу* u *в* X, *то она сходится к* u *и в смысле распределений* $\mathcal{D}'(a,b;X)$.

Доказательство. Нужно показать, что для любых $\phi \in X^*$ и $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$ последовательность чисел

$$\left\langle \phi, \int\limits_a^b u_k(t)\eta(t)\,dt \right\rangle_{X^*\times X} \quad \text{сходится к} \quad \left\langle \phi, \int\limits_a^b u(t)\eta(t)\,dt \right\rangle_{X^*\times X}.$$

В силу теоремы 4.4 и по определению слабой сходимости в пространстве $L_p(a,b;X)$ справедливы равенства

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle \phi, \int\limits_a^b u_k(t)\eta(t)\,dt \right\rangle_{X^*\times X} = \lim_{k\to\infty} \int\limits_a^b \langle \phi\,\eta(t), u_k(t)\rangle_{X^*\times X}\,dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \langle \phi\,\eta, u_k\rangle_{L_q(a,b;X^*)\times L_p(a,b;X)} =$$

$$= \langle \phi\,\eta, u\rangle_{L_q(a,b;X^*)\times L_p(a,b;X)} = \left\langle \phi, \int\limits_a^b u(t)\eta(t)\,dt \right\rangle_{X^*\times X}.$$

$\square$

4.5 Пространство W и непрерывность функций

При изучении операторных дифференциальных уравнений важную роль играют пространства W_{p_0,p_1}, которые мы вводим в данном разделе. Кроме того, здесь будут изучены простейшие вложения и свойства данных пространств.

Пусть X_0, X, X_1 — банаховы пространства, такие что вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ непрерывны, причем вложение $X_0 \subset X$ компактно. Для $p_0 \geq 1$, $p_1 \geq 1$ определим пространство

$$W_{p_0,p_1} = W(a,b;p_0,p_1;X_0,X_1) = \left\{ u \in L_{p_0}(a,b;X_0), u' = \frac{\partial u}{\partial t} \in L_{p_1}(a,b;X_1) \right\}.$$

с нормой

$$\|u\|_{W_{p_0,p_1}} = \|u\|_{L_{p_0}(a,b;X_0)} + \|u'\|_{L_{p_1}(a,b;X_1)}, \quad u \in W_{p_0,p_1}.$$

Теорема 4.7. *Для* $p_0 \geq 1$, $p_1 \geq 1$ *множество* W_{p_0,p_1} *с линейными операциями и нормой образует банахово пространство.*

Доказательство. Множество W_{p_0,p_1} с линейными операциями образует линейное пространство. Нетрудно видеть, что свойства нормы выполняются. Поэтому для доказательства достаточно установить полноту пространства.

Пусть $\{u_k\}$ — произвольная фундаментальная в W_{p_0,p_1} последовательность. Тогда

$$u_k \to u \text{ сильно в } L_{p_0}(a,b;X_0);$$

$$u_k' \to v \text{ сильно в } L_{p_1}(a,b;X_1).$$

В силу леммы 4.4 последовательность $\{u_k\}$ сходится к u и в смысле распределений $\mathcal{D}'(a,b;X_0)$, а следовательно, и в смысле распределений $\mathcal{D}'(a,b;X_1)$. Но по лемме 4.2 $u_k' \dashrightarrow u'$ в смысле распределений $\mathcal{D}'(a,b;X_1)$. Тогда в силу леммы 4.4 $u' = v$ и $u \in W_{p_0,p_1}$. □

Лемма 4.5. *Для $p_0 \geq 1$, $p_1 \geq 1$ имеет место вложение $W_{p_0,p_1} \subset C([a,b],X_1)$ и это вложение непрерывно.*

Доказательство. Пусть $u \in W_{p_0,p_1}$. Тогда производная $u'(t)$ в смысле распределений локально интегрируема на $[a,b]$. В силу леммы 4.3 функция

$$v(t) = \int\limits_a^t u'(s)\,ds, \quad t \in [a,b],$$

непрерывна на $[a,b]$ и имеет обобщенную производную v', причем $v' = u'$ в смысле распределений $\mathcal{D}'(a,b;X_1)$. Так как $(v-u)' = 0$, то $v(t)-u(t) = \xi$ для $\xi \in X_1$ и почти всех $t \in [a,b]$, и следовательно,

$$u(t) = \xi + \int\limits_a^t u'(s)\,ds, \quad t \in [a,b], \tag{4.5}$$

и $u(t) \in C([a,b],X_1)$.

Покажем, что вложение $W_{p_0,p_1} \subset C([a,b],X_1)$ — ограниченное отображение и, следовательно, непрерывное. Для этого достаточно установить ограниченность каждого из отображений

$$u \mapsto v, \qquad\qquad u \mapsto \xi,$$

рассматриваемых как отображения из W_{p_0,p_1} в $C([a,b],X_1)$ и X_1, соответственно.

Прежде всего, из непрерывности вложения $L_{p_1}(a,b;X_1) \subset L_1(a,b;X_1)$ следует

$$\|v\|_{C([a,b],X_1)} = \sup_{t\in[a,b]} \|v(t)\|_{X_1} \leq \int\limits_a^b \|u'(s)\|_{X_1}\,ds = c_0\,\|u'\|_{L_{p_1}(a,b;X_1)},$$

где c_0 — некоторая константа, не зависящая от u.

Отсюда, в силу непрерывности вложений $X_0 \subset X_1$, $L_{p_0}(a,b;X_0) \subset L_{p_0}(a,b;X_1)$, $C([a,b],X_1) \subset L_{p_0}(a,b;X_1)$, вытекает

$$|b-a|^{1/p_0}\|\xi\|_{X_1} = \left(\int\limits_a^b \|\xi)\|_{X_1}^{p_0}\,ds\right)^{1/p_0} = \|u - v\|_{L_{p_0}(a,b;X_1)} \leq$$

$$\leq \|u\|_{L_{p_0}(a,b;X_1)} + c_1\|v\|_{C([a,b],X_1)} = c_2\,(\|u\|_{L_{p_0}(a,b;X_0)} + \|u'\|_{L_{p_1}(a,b;X_1)}),$$

где c_1, c_2 — некоторые константы, не зависящие от u.

Итак, ограниченность отображений, а следовательно, и непрерывность вложения установлены. □

Приведем еще одно общее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.6. *Пусть X и Y — банаховы пространства, такие что X рефлексивно и вложение $X \subset Y$ непрерывно. Если функция $u \in L_\infty(a,b;X)$ слабо непрерывна как функция со значениями в Y, то и слабо непрерывна и как функция со значениями в X.*

Доказательство. По условию функция $u(t)$ определена для всех $t \in [a,b]$, вне множества нулевой меры $Z \subset [a,b]$ ее значения принадлежат X и $\|u(t)\|_X \leq M = \|u\|_{L_\infty(a,b;X)}$ для всех $t \in [a,b] \setminus Z$.

Покажем, что $u(t) \in X$ для всех $t \in [a,b]$ и $\|u(t)\|_X \leq M$.

Пусть $t_0 \in Z$. Выберем произвольную последовательность $\{t_k\}$, $t_k \in [a,b] \setminus Z$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = t_0$. Последовательность $\{u(t_k)\}$ ограничена в X, поэтому существует подпоследовательность $\{u(t_{k_l})\}$, сходящаяся слабо в X к элементу из X. Однако по условию

$$u(t_{k_l}) \rightharpoonup u(t_0) \qquad \text{слабо в } Y.$$

Поэтому $\{u(t_{k_l})\}$ сходится слабо в X к элементу $u(t_0)$, $u(t_0) \in X$ и $\|u(t_0)\|_X \leq M$.

Обозначим через X^*, Y^* — пространства, сопряженные соответственно к пространствам X, Y. Функция $u(t)$ слабо непрерывна со значениями в Y, если для любого $\psi \in Y^*$ функция $\langle\psi, u(t)\rangle_{Y^*\times Y} \in C([a,b])$. Покажем, что $\langle\phi, u(t)\rangle_{X^*\times X} \in C([a,b])$ для любого $\phi \in X^*$.

Рассмотрим случай, когда X плотно в Y. Тогда

$$Y^* \subset X^* \ \text{ и } \ Y^* \text{ плотно в } \ X^*.$$

Отметим, что для плотности вложения предположение о рефлексивности X обязательно (см. Замечание 1).

Пусть задано $\phi \in X^*$. Тогда существует последовательность $\{\psi_k\}$, $\psi_k \in Y^*$, такая, что $\psi_k \to \phi$ в X^*. Из оценки

$$\sup_{a\le t\le b} |\langle \psi_k - \psi_m), u(t)\rangle_{X^*\times X}| \le \|\psi_k - \psi_m\|_{X^*} \cdot \|u\|_{L_\infty(a,b;X)}$$

следует, что последовательность функций

$$\langle \psi_k, u\rangle_{X^*\times X} = \langle \psi_k, u\rangle_{Y^*\times Y}$$

фундаментальна в $C([a,b])$ и $\langle \phi, u\rangle_{X^*\times X} \in L_\infty(a,b)$. Следовательно, $\langle \phi, u\rangle_{X^*\times X} \in C([a,b])$.

Осталось рассмотреть случай, когда X не плотно в Y. Обозначим через Z — замыкание X в Y. Как и выше, для любого $\xi \in Z^*$ имеем $\langle \phi, u\rangle_{Z^*\times Z} \in C([a.b])$. По теореме Хана-Банаха каждый функционал ϕ, определенный на замкнутом подмножестве Z множества Y, продолжается до линейного непрерывного функционала $\tilde\phi$ на Y. Кроме того, $\langle \tilde\phi, u\rangle_{Y^*\times Y} = \langle \phi, u\rangle_{Z^*\times Z} \in C([a.b])$. □

Утверждение леммы 4.6 показывает, что если бы имелось вложение $W_{p_0,p_1} \subset L_\infty(a,b;X)$, то каждая функция $u \in W_{p_0,p_1}$ была бы слабо непрерывной на отрезке $[a,b]$ со значениями в пространстве X. Однако этот результат мы получим лишь для частного случая пространств W_{p_0,p_1}.

При исследовании уравнений Навье-Стокса в качестве тройки вложенных пространств X_0, X, X_1 рассматриваются пространства V, H и V^*. Известно, что пространства V и H гильбертовы, вложение $V \subset H$ плотно и вполне непрерывно, вложение $H \subset V^*$ непрерывно.

Пусть $1 < p < \infty$ и q — сопряженное число, т.е. $1/p + 1/q = 1$. Обозначим через W следующее пространство

$$W = W_{p,q} = \{u \in L_p(0,T;V), u' \in L_q(0,T;V^*)\}.$$

Приведем без доказательства один результат, необходимый в дальнейших исследованиях. Формулировка и полное доказательство содержится в работе [4, гл.IV, §1, лемма 1.12].

Лемма 4.7. *Множество $C^1([0,T],V) \cap W$ плотно в W.*

Этот результат позволяет сформулировать и доказать следующее утверждение.

Теорема 4.8. *Для каждой функции $u \in W$ справедливо включение $u \in L_\infty(a,b;H)$ и равенство*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle_{V^*\times V}, \tag{4.6}$$

выполняется в смысле распределений на $(0,T)$.

Доказательство. Пусть $u \in W$. Тогда функция $\langle u'(t), u(t)\rangle_{V^*\times V}$ интегрируема на $(0,T)$. Если равенство (4.6) выполнено, то $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 \in L_1(0,T)$ и, следовательно, $\|u(t)\|_H^2 \in L_\infty(0,T)$. Поэтому $u \in L_\infty(0,T;H)$ и для доказательства утверждения достаточно установить равенство (4.6) для функции u.

Для функции $u \in W$ в силу леммы 4.7 существует последовательность $\{u_k\}$ функций из $C^1([0,T],V) \cap W$ такая, что при $k \to \infty$

$$u_k \to u \ \text{ в } \ L_p(0,T;V), \quad u'_k \to u' \ \text{ в } \ L_q(0,T;V^*). \tag{4.7}$$

Выполнение равенства (4.6) для функций u_k очевидно

$$\frac{d}{dt}\|u_k(t)\|_H^2 = \frac{d}{dt}(u_k(t), u_k(t)) = 2(u'_k(t), u_k(t)) = 2\langle u'_k(t), u_k(t)\rangle_{V^*\times V}. \tag{4.8}$$

В силу (4.7) для $k \to \infty$ имеем

$$\|u_k(t)\|_H^2 \to \|u(t)\|_H^2 \ \text{ в } \ L_{p/2}(0,T), \tag{4.9}$$

$$\langle u'_k(t), u_k(t)\rangle_{V^*\times V} \to \langle u'(t), u(t)\rangle_{V^*\times V} \ \text{ в } \ L_1(0,T).$$

Нетрудно видеть, что эти последовательности сходятся и в смысле распределений. Тогда из леммы 4.2 и сходимости (4.9) следует сходимость в смысле распределений

$$\frac{d}{dt}\|u_k(t)\|_H^2 \to \frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2$$

при $k \to \infty$.

Переход к пределу в равенстве (4.8) в смысле распределений приводит к требуемому равенству (4.6), что и завершает доказательство. □

Заметим, что вложение $W \subset L_\infty(0,T;H)$ вместе с утверждениями леммы 4.5 с $X_1 = V^*$ и леммы 4.6 с $X = H$ и $Y = V^*$ позволяют установить, что каждая функция $u \in W$ слабо непрерывна на отрезке $[0,T]$ со значениями в пространстве H. Сформулируем этот результат в виде следующего утверждения:

Следствие 4.1. *Каждая функции $u \in W$ слабо непрерывна на отрезке $[0,T]$ со значениями в пространстве H, т.е. справедливо вложение $W \subset C_w([0,T];H)$.*

Подводя итог, сформулируем заключительное утверждение данного раздела (см. также [4, гл.IV, §1, теорема 1.17]).

Теорема 4.9. *Пространство W вложено в пространство $C([0,T];H)$ и это вложение непрерывно. Кроме того, для любых функций $u, v \in W$ справедлива формула интегрирования по частям*

$$(u(t), v(t)) - (u(s), v(s)) \, = \int\limits_s^t (\langle u'(\tau), v(\tau)\rangle_{V^*\times V} \, + \, \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle_{V^*\times V})\, d\tau$$

для $t, s \in [0,T]$.

Доказательство. Пусть u — произвольная функция из W и $t_0 \in [0,T]$ — произвольная точка. Покажем, что функция $u(t)$ со значениями в H непрерывна в t_0.

Из следствия 4.1 известно, что u — слабо непрерывная функция на $[0,T]$ со значениями в H, т.е.

$$\forall v \in H \quad \text{функция} \;\; t \mapsto (u(t), v) \;\; \text{непрерывна.}$$

Следовательно, $(u(t), u(t_0)) \to (u(t_0), u(t_0)) \, = \, \|u(t_0)\|_H^2$ при $t \to t_0$.

Кроме того, интегрируя равенство (4.6) на промежутке $[t_0, t]$, получим

$$\|u(t)\|_H^2 - \|u(t_0)\|_H^2 \, = \, 2 \int\limits_{t_0}^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle_{V^*\times V}\, d\tau.$$

В силу теоремы Лебега при $t \to t_0$ правая часть равенства стремится к нулю, поэтому $\|u(t)\|_H^2 \to \|u(t_0)\|_H^2$ при $t \to t_0$.

Таким образом, выражение

$$\|u(t) - u(t_0)\|_H^2 \, = \, \|u(t)\|_H^2 + \|u(t_0)\|_H^2 \, - \, 2\langle u(t), u(t_0)\rangle_{V^*\times V}$$

стремится к нулю при $t \to t_0$. Это по определению значит, что функция $u(t)$ со значениями в H непрерывна в t_0. Так как точка t_0 выбрана произвольно, то функция $u(t)$ непрерывна на всем отрезке $[0,T]$.

Для того, чтобы доказать непрерывность вложения $W \subset C([0,T];H)$, воспользуемся представлением (4.5) для функции $u(t)$:

$$u(t) \, = \, u(\tau) \, + \int\limits_\tau^t u'(s)\, ds, \quad t, \tau \in [0,T], \tag{4.10}$$

Применим функционалы, стоящие в обеих частях равенства, к $u(t)$. Получим для $t, \tau \in [0,T]$

$$\langle u(t), u(t)\rangle_{V^*\times V} \, = \, \langle u(\tau), u(t)\rangle_{V^*\times V} \, + \int\limits_\tau^t \langle u'(s), u(t)\rangle_{V^*\times V}\, ds.$$

Так как $\|u(t)\|_H^2 = \langle u(t), u(t)\rangle_{V^*\times V}$, то интегрируя обе части равенства по переменной τ на отрезке $[0,T]$, приходим к оценке

$$\|u(t)\|_H^2 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \langle u(t), u(\tau)\rangle_{V^*\times V}\, d\tau + \frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_\tau^t \langle u'(s), u(t)\rangle_{V^*\times V}\, ds\, d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{T}\int\limits_0^T \|u(t)\|_V^*\|u(\tau)\|_V\, d\tau + \frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \|u'(s)\|_V^*\|u(t)\|_V\, ds\, d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{T}\|u\|_{C([0,T],V^*)}\|u\|_{L_1(0,T;V)} + \frac{1}{T}\|u'(s)\|_{L_1(0,T;V^*)}\|u(t)\|_{L_1(0,T;V)}.$$

Отсюда

$$\|u\|_{C([0,T],H)}^2 = \sup\nolimits_{[0,T]}\|u(t)\|_H^2 \le \frac{1}{T}\|u\|_{C([0,T],V^*)}\|u\|_{L_1(0,T;V)} + \\ + \frac{1}{T}\|u'(s)\|_{L_1(0,T;V^*)}\|u(t)\|_{L_1(0,T;V)}.$$

Так как непрерывны вложения $W \subset L_p(0,T;V) \subset L_1(0,T;V)$, $W \subset C([0,T],V^*)$ и $W \subset L_q(0,T;V^*) \subset L_1(0,T;V^*)$, то справедливы оценки

$$\|u\|_{C([0,T],V^*)} \le c_{01}\|u\|_W, \quad \|u\|_{L_1(0,T;V)} \le c_{02}\|u\|_W,$$

$$\|u\|_{L_1([0,T],V^*)} \le c_{03}\|u\|_W, \quad \|u\|_{L_1(0,T;V)} \le c_{04}\|u\|_W,$$

для некоторых констант c_{0i}, $i = 1,2,3,4$. Тогда из оценки выше получаем оценку

$$\|u\|_{C([0,T],H)} \le c_0\|u\|_W$$

для некоторой константы c_0. Значит отображение вложения $W \subset C([0,T];H)$ ограничено, а следовательно, непрерывно.

Для получения формулы интегрирования по частям для любых функций $u, v \in W$, аппроксимируем эти функции функциями $u_k, v_k \in C^1([0,T],V)$, запишем формулу для функций u_k, v_k и выполним предельный переход в полученном равенстве. Возможность предельного перехода проверяется без труда ввиду наличия непрерывного вложения $W \subset C([0,T];H)$. $\square$

4.6 Теоремы о компактности вложений функциональных пространств

В этом разделе мы рассмотрим теоремы о компактности вложения функциональных пространств необходимые для дальнейших исследований.

Лемма 4.8. *Пусть X_0, X, X_1 — банаховы пространства, такие что вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ непрерывны и вложение $X_0 \subset X$ компактно. Тогда для каждого $\eta > 0$ существует константа c_η, зависящая от η (и от пространств X_0, X, X_1), такая что для каждого $v \in X_0$ справедливо неравенство*

$$\|v\|_X \leq \eta\|v\|_{X_0} + c_\eta\|v\|_{X_1}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Пусть $\eta > 0$ — произвольная константа. Обозначим через $\mathcal{U}_c$ множество $\mathcal{U}_c = \{v \in X : \|v\|_X < \eta + c\|v\|_{X_1}\}$. Множество $\mathcal{U}_c$ открыто в X для каждого $c > 0$ и $\mathcal{U}_{c_1} \subset \mathcal{U}_{c_2}$ для $c_1 < c_2$. Кроме того, для любого $v \in X$ нетрудно подобрать константу c такую, что $v \in \mathcal{U}_c$, поэтому $X = \bigcup_{c>0} \mathcal{U}_c$.

Единичная сфера S_1 пространства X_0 относительно компактна в пространстве X, поэтому для каждого $\eta > 0$ существует конечное $c_\eta > 0$, для которого $S_1 \subset \mathcal{U}_{c_\eta}$. Следовательно,

$$\|v\|_X \leq \eta\|v\|_{X_0} + c_\eta\|v\|_{X_1}, \qquad \forall v \in X_0,\ \|v\|_{X_0} = 1.$$

Умножение неравенства на положительное число λ приводит к неравенству

$$\|\lambda v\|_X \leq \eta\|\lambda v\|_{X_0} + c_\eta\|\lambda v\|_{X_1}.$$

Так как каждое $v_1 \in X_0$ можно представить в виде $v_1 = \lambda v$ для $v \in S_1$ и некоторого $\lambda > 0$, то утверждение доказано. □

Лемма 4.9. *Пусть X_0, X, X_1 — банаховы пространства, такие что вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ непрерывны и вложение $X_0 \subset X_1$ компактно. Если для каждого $\eta > 0$ существует константа c_η, зависящая от η (и от пространств X_0, X, X_1), такая что для каждого $v \in X_0$ справедливо неравенство* (4.11), *то вложение $X_0 \subset X$ компактно.*

Доказательство. Пусть $M \subset X$ — произвольное ограниченное множество. Тогда M — относительно компактно в пространстве X_1 и для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть $\{v_l\}_{l=1}^k$, $v_l \in M$, $l = 1, 2, \dots, k$. По определению ε-сети для каждого $v \in M$ найдется v_l, для которого $\|v - v_l\|_{X_1} \leq \varepsilon$.

Применяя оценку (4.11) к разности $v - v_l$, получим

$$\|v - v_l\|_X \leq \eta\|v - v_l\|_{X_0} + c_\eta\|v - v_l\|_{X_1} \leq \eta d + c_\eta\varepsilon,$$

где d — диаметр множества M в пространстве X_0.

Если задано $\varepsilon' > 0$, то выбирая $\eta = \dfrac{\varepsilon'}{2d}$ и $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2c_\eta}$, приходим к оценке $\|v - v_l\|_X < \varepsilon'$. Следовательно, $\{v_l\}_{l=1}^k$ образует ε'-сеть множества M в пространстве X. Наличие ε'-сеть множества для произвольного $\varepsilon' > 0$ обеспечивает относительную компактность множества M в X. □

Применяя лемму 4.9, получим утверждение о компактности вложения пространств, состоящих из функций на отрезке со значениями в банаховом пространстве.

Лемма 4.10. *Пусть X_0, X, X_1 — банаховы пространства, такие что вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ непрерывны. Если пространство $L_p(0,T;X_0)$, $1 \le p \le \infty$, компактно вложено в пространство $L_p(0,T;X_1)$, то вложение $L_p(0,T;X_0) \subset L_p(0,T;X)$ также компактно.*

Доказательство. Для каждой функции $v \in L_p(0,T;X_0)$ при фиксированном значении $t \in [0.T]$, применяя лемму 4.8, получим

$$\|v(t)\|_X \le \eta\|v(t)\|_{X_0} + c_\eta\|v(t)\|_{X_1}.$$

Вычисляя L^p-норму от функций, стоящих в обеих частях неравенства, приходим к неравенству

$$\|v\|_{L_p(0,T;X)} \le \eta\|v\|_{L_p(0,T;X_1)} + c_\eta\|v\|_{L_p(0,T;X_0)}.$$

Утверждение леммы следует из леммы 4.9, примененной к функциональным пространствам $L_p(0,T;X_0)$, $L_p(0,T;X)$, $L_p(0,T;X_0)$. □

Приведем теорему Ю.А.Дубинского о компактности вложения таких пространств. Формулировка и доказательство теоремы взяты из [3, теорема 4.1, гл.IV, стр.123-124].

Теорема 4.10. *Пусть X_0, X, X_1 — банаховы пространства, такие что пространства X_0, X_1 рефлексивны, вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ непрерывны, причем вложение $X_0 \subset X$ компактно. Тогда всякое множество $M \subset L_p(a,b;X_0) \bigcap C([a,b],X_1)$, ограниченное в $L_p(a,b;X_0)$, $p > 1$, и равностепенно непрерывное в $C([a,b],X_1)$, относительно компактно в $L_p(a,b;X)$ и $C([a,b],X_1)$.*

Доказательство. Пусть $\{v_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность из M. Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что из последовательности можно выбрать подпоследовательность, фундаментальную в $L_p(a,b;X)$.

Применим оценку (4.11) к разности $v_{k+l}(t)-v_k(t)$, получим оценку

$$\|v_{k+l}(t)-v_k(t)\|_X \;\le\; \eta(\|v_{k+l}(t)\|_{X_0}+\|v_k(t)\|_{X_0}) \,+\, c_\eta\|v_{k+l}(t)-v_k(t)\|_{X_1}.$$

для любого $\eta>0$ и соответствующей константы c_η. Возводя обе части неравенства в степень p и интегрируя по переменной t, получаем

$$\int\limits_a^b \|v_{k+l}(t)-v_k(t)\|_X^p\,dt \;\le\; \eta(\int\limits_a^b \|v_{k+l}(t)\|_{X_0}^p\,dt \,+\, \int\limits_a^b \|v_k(t)\|_{X_0}^p\,dt)+$$
$$+\, c_1\int\limits_a^b \|v_{k+l}(t)-v_k(t)\|_{X_1}^p\,dt.$$

где c_1 — константа, зависящая от p. По условию теоремы последовательность $\{v_k(t)\}_{k=1}^\infty$ ограничена в пространстве $L_p(a,b;X_0)$, поэтому из полученной оценки следует, что для фундаментальности последовательности в пространстве $L_p(a,b;X)$ достаточно, чтобы последовательность была фундаментальна в пространстве $L_p(a,b;X_1)$. Покажем, что можно выбрать подпоследовательность фундаментальную в $C([a,b],X_1)$, откуда и будет следовать требуемое утверждение.

Обозначим через S_∞ множество

$$S_\infty \,=\, \{t\in[a,b]:\|v_k(t)\|_{X_0}\to\infty \quad \text{при} \quad k\to\infty\}.$$

Множество S_∞ измеримо относительно меры Лебега (проверьте это) и имеет меру нуль. Действительно, если $mesS_\infty = m_0>0$, то применяя теорему Д.Ф.Егорова [17, гл.IV, §3, теорема 5, стр.97] к последовательности измеримых функций $\dfrac{1}{\|v_k\|_{X_0}}$, поточечно сходящейся к нулю, получим подмножество $S_+\subset S_\infty$ положительной меры, на котором

$$\frac{1}{\|v_k\|_{X_0}}\to 0 \qquad \text{при } k\to\infty \qquad \text{равномерно.}$$

Тогда

$$\int\limits_a^b \|v_k(t)\|_{X_0}^p\,dt \ge \int\limits_{S_\infty} \|v_k(t)\|_{X_0}^p\,dt \ge \int\limits_{S_+} \|v_k(t)\|_{X_0}^p\,dt \to\infty \quad \text{при} \quad k\to\infty,$$

а это противоречит ограниченности последовательности.

Для каждого $t\in[a,b]\backslash S_\infty$ множество $\{v_k(t)\}_{k=1}^\infty$ ограничено в пространстве X_0, и следовательно, относительно компактно в пространстве

X_1. Поэтому существует подпоследовательность $\{v_{k_l}(t)\}_{l=1}^{\infty}$, сходящаяся по норме пространства X_1:

$$v_{k_l}(t) \to v(t) \quad \text{при} \quad l \to \infty.$$

Пусть $\{t_1, t_2, \ldots\}$ — счетное, всюду плотное в $[a,b]$, причем $t_i \in [a,b] \backslash S_\infty$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Используя процедуру диагонализации, можно выбрать подпоследовательность $\{v_{k_l}(t)\}_{l=1}^{\infty}$, сходящуюся в каждой точке t_k, т.е.

$$v_{k_l}(t_i) \to v(t_i) \quad \text{при} \quad l \to \infty, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Покажем далее, что из условия равностепенной непрерывности функций $v_{k_l}(t)$, определенных на $[a,b]$ и принимающих значения в X_1, следует, что
1) функция $v(t)$ непрерывна на $[a,b] \backslash S_\infty$ и продолжается до непрерывной функции на $[a,b]$ со значениями в X_1;
2) последовательность функций $\{v_{k_l}(t)\}_{l=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $v(t)$.
Это значит, что подпоследовательность $\{v_{k_l}(t)\}_{l=1}^{\infty}$ фундаментальна в пространстве $C([a,b], X_1)$, что и дает утверждение теоремы.

Выберем произвольную точку $t_0 \in [a,b] \backslash S_\infty$. Из условия равностепенной непрерывности функций $v_{k_l}(t)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|v_{k_l}(t) - v_{k_l}(t_0)\|_{X_1} < \varepsilon$ для любых $t \in [a,b] \backslash S_\infty$, $|t - t_0| < \delta$. Переходя к пределу при $l \to \infty$ в полученном неравенстве, приходим к оценке $\|v(t) - v(t_0)\|_{X_1} < \varepsilon$ для любых $t \in [a,b] \backslash S_\infty$, $|t - t_0| < \delta$. Таким образом, функция $v(t)$ непрерывна в точке t_0, а так как точка выбиралась произвольным образом, то и на всем множестве $[a,b] \backslash S_\infty$. Заметим, что те же рассуждения позволяют установить, что функция $v(t)$ равномерно непрерывна на области определения.

Продолжим функцию $v(t)$ на весь отрезок $[a,b]$ по непрерывности. Это значит, что значение функции в произвольной точке $t_0 \in S_\infty$ определяется следующим образом. Выбирается произвольная последовательность $\{t_k\}$, $t_k \in [a,b] \backslash S_\infty$, такая что $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = t_0$. С помощью условия равномерной непрерывности функции $v(t)$ на множестве $[a,b] \backslash S_\infty$ устанавливается, что существует конечный предел последовательности $\{v(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Далее определяется значение $v(t_0) = \lim\limits_{k\to\infty} v(t_k)$. (Проверьте, что полученное значение $v(t_0)$ не изменяется при выборе другой последовательности $\{t_s\}$.) Кроме того, полученная функция $v(t)$ непрерывна в точке t_0, а следовательно, и на всем отрезке $[a,b]$.

Покажем, что последовательность функций $\{v_{k_l}(t)\}_{l=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $v(t)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем значение $\delta > 0$ такое, что для всех $t \in [a,b] \cup (t_0 - \delta, t_0 - \delta)$ выполнены неравенства

$$|v(t) - v(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{и} \qquad |v_{k_l}(t) - v_{k_l}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Выберем номер l_0 такой, что для любых $l > l_0$

$$|v_{k_l}(t_0) - v(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для $l > l_0$ и любых $t \in [a,b] \cup (t_0 - \delta, t_0 - \delta)$

$$|v_{k_l}(t) - v(t)| < |v_{k_l}(t) - v_{k_l}(t_0)| + |v_{k_l}(t_0) - v(t_0)| + |v(t) - v(t_0)| < \varepsilon.$$

Аналогичным образом, для каждой точки $t' \in [a,b]$ можно указать ее δ-окрестность и номер l_0 такие, что неравенство

$$|v_{k_l}(t) - v(t)| < \varepsilon$$

выполнено для всех t из выделенной окрестности и номеров $l > l_0$.

Выбирая из полученного покрытия отрезка $[a,b]$ конечное подпокрытие и L_0 — максимальный из номеров l_0, соответствующих элементам соответствующего конечного покрытия, приходим к выводу, что неравенство

$$|v_{k_l}(t) - v(t)| < \varepsilon$$

выполняется для всех $t \in [a,b]$ и $l > L_0$.

Таким образом, равномерная сходимость подпоследовательности $\{v_{k_l}(t)\}_{l=1}^{\infty}$ установлена и теорема полностью доказана. □

Полученное утверждение позволяет установить следующую теорему о компактности вложения. (Отметим, что прямое доказательство, не использующее утверждение теоремы 4.10, содержится в работе [22, гл.III,§2, теорема 2.1,]).

Теорема 4.11. *Пусть X_0, X, X_1 — банаховы пространства, такие что пространства X_0, X_1 рефлексивны, вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ непрерывны, причем вложение $X_0 \subset X$ компактно. Тогда вложение пространства*

$$\begin{aligned} W_{p_0,p_1} &= W(0,T;p_0,p_1;X_0,X_1) = \\ &= \left\{ u \in L_{p_0}(0,T;X_0), u' = \frac{\partial u}{\partial t} \in L_{p_1}(0,T;X_1) \right\} \end{aligned}$$

с $p_0 > 1$, $p_1 > 1$, в пространство $L_{p_0}(0,T;X)$ компактно.

Доказательство. Пусть M — ограниченное подмножество W_{p_0,p_1}. В силу леммы 4.5 $W_{p_0,p_1} \subset C([0,T],X_1)$, поэтому $M \subset L_{p_0}(0,T;X_0) \cap C([0,T],X_1)$. Покажем, что множество M равностепенно непрерывное в $C([0,T],X_1)$, тогда утверждение следует из теоремы 4.10.

Пусть $u \in M$. Используя представление (4.5), получим

$$\|u(t) - u(\tau)\|_{X_1} = \|\int\limits_{\tau}^{t} u'(s)\,ds\|_{X_1} \le \int\limits_{\tau}^{t} \|u'(s)\|_{X_1}\,ds \le$$

$$\le \left(\int\limits_{\tau}^{t} ds\right)^{1/q_1} \left(\int\limits_{\tau}^{t} \|u'(s)\|_{X_1}^{p_1}\,ds\right)^{1/p_1} \le |t-\tau|^{1/q_1}\|u'(s)\|_{L_{p_1}(0,T;X_1)},$$

для любых $t, \tau \in [0,T]$, $t > \tau$, где $1/p_1 + 1/q_1 = 1$. Таким образом, множество M равностепенно непрерывное в $C([0,T], X_1)$ и утверждение теоремы доказано. □

Отметим, что используя понятие дробной производной, можно установить следующую теорему о компактности вложения [22, гл.III,§2, теорема 2.2, теорема 2.3 и замечание 2.1]).

Теорема 4.12. *Пусть X_0, X — банаховы пространства и X_1 — гильбертово пространство, такие что пространство X_0 рефлексивно, вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ непрерывны, причем вложение $X_0 \subset X$ компактно. Тогда вложение пространства $W_{p_0,1}$ в пространство $L_{p_0}(a,b;X)$ компактно для любого $p_0 > 1$.*

Более общие теоремы о компактности вложения получены J.Simon для случая произвольных банаховых пространств X_0, X, X_1 без дополнительных требований рефлексивности или гильбертовости пространств. Приведем без доказательства отдельные утверждения работы [34, стр.85-86].

Теорема 4.13. *Пусть X_0, X, X_1 — банаховы пространства, такие что вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ непрерывны, причем вложение $X_0 \subset X$ компактно. Если M — ограниченное подмножество пространства $W_{p_0,1} = W(0,T;p_0,1;X_0,X_1)$ с $p_0 \ge 1$, то M относительно компактно в пространстве $L_{p_0}(0,T;X)$.*

Теорема 4.14. *Пусть X_0, X, X_1 — банаховы пространства, такие что вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ непрерывны, причем вложение $X_0 \subset X$ компактно. Если M — ограниченное подмножество пространства $W_{p_0,p_1} = W(0,T;p_0,p_1;X_0,X_1)$ с $p_0 = \infty$, $p_1 > 1$, то M относительно компактно в пространстве $C(0,T;X)$.*

Теорема 4.15. *Пусть X_0, X, X_1 — банаховы пространства, такие что вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ непрерывны, причем вложение $X_0 \subset X$ компактно. Пусть M — ограниченное подмножество пространства $L_p(0,T;X_0) \cap W_r^s(0,T;X_1)$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le r \le \infty$, где $s > 0$, если $r \ge p$, и $s > \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$, если $r \le p$. Тогда M относительно компактно в пространстве $L_p(0,T;X)$ (или в $C(0,T;X)$, если $p = \infty$).*

Теорема 4.16. *Пусть* X_0, X, X_1 *— банаховы пространства, такие что вложения* $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ *непрерывны, причем вложение* $X_0 \subset X$ *компактно. Пусть также существуют константы* θ, $0 < \theta < 1$, *и* c *такие, что*

$$\|v\|_X \leq c\|v\|_{X_0}^{\theta}\|v\|_{X_1}^{(1-\theta)}, \qquad \forall v \in X_0.$$

Пусть M *— ограниченное подмножество пространства* $W_{p_0,p_1} = W(0,T;p_0,p_1;X_0,X_1)$, *где* $1 \leq p_0 \leq \infty$, $1 \leq p_1 \leq \infty$. *Тогда*

1) *если* $(1-\theta)(1-\frac{1}{p_1}) \leq \frac{\theta}{p_0}$, *то* M *относительно компактно в* $L_p(0,T;X)$ *для любого* $p < p_\theta$, *где* $\frac{1}{p_\theta} = \frac{\theta}{p_0} - (1-\theta)(1-\frac{1}{p_1})$;

2) *если* $(1-\theta)(1-\frac{1}{p_1}) > \frac{\theta}{p_0}$, *то* M *относительно компактно в* $C(0,T;X)$.

5 Эволюционная система уравнений Навье-Стокса

5.1 Слабое (вариационное) решение

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$(\partial_t v + v_i \partial_i v) - \nu \Delta v + \operatorname{grad} p = f, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{5.2}$$

$$v\mid_{t=0} = v^0(x), \quad x \in U, \tag{5.3}$$

$$v\big|_{(0,T)\times\Gamma} = 0. \tag{5.4}$$

Здесь f, v^0—заданные функции, $f : Q_T \to \mathbb{R}^n$, $f \in (L_2(Q_T))^n$, и $v^0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $v_0 \in V$.

Сильным (обобщенным) решением задачи (5.1)-(5.4) называют функции $v \in (L_2(Q_T))^n$, $p \in L_2(Q_T)$, такие что:

1) обобщенные частные производные функций, содержащиеся в равенствах (5.1)-(5.2), принадлежат пространствам $(L_2(Q_T))^n$ и $L_2(Q_T)$, соответственно;

2) при подстановке функций уравнения (5.1)-(5.2) обращаются в равенства в пространствах $(L_2(Q_T))^n$ и $L_2(Q_T)$, соответственно;

3) след функции v при $t = 0$ определен и равен v^0;

4) след функции v определен на границе области Γ и равен 0.

Пусть (v, p) — сильное (обобщенное) решение задачи (5.1)-(5.4). Чтобы обеспечить понимание определения слабого решения, мы временно предположим, что $v = v(t, x)$, $p = p(t, x)$ являются, фактически, гладкими решениями задачи. Сопоставим функции v отображение $v : [0, T] \to (H_0^1(\Omega))^n$, определенное по формуле

$$[v(t)](x) = v(t, x), \qquad t \in [0, T], \;\; x \in \Omega.$$

Другими словами, v рассматривается не как функция переменных t и x, а как функция переменной t, определенная на отрезке $[0, T]$ и принимающая значения в функциональном пространстве $(H_0^1(\Omega))^n$.

Аналогично определим $p : [0, T] \to (L_2(\Omega))^n$ по формуле

$$[p(t)](x) = p(t, x), \qquad t \in [0, T], \;\; x \in \Omega,$$

и функцию $f : [0, T] \to (L_2(\Omega))^n$ по формуле

$$[f(t)](x) = f(t, x), \qquad t \in [0, T], \;\; x \in \Omega.$$

Умножая равенство (5.1) при фиксированных значениях $t \in [0, T]$ на функцию $u \in (\mathfrak{D}_s(\Omega))^n$ скалярно в $(L_2(\Omega))^n$, получим

$$\int\limits_\Omega \partial_t v(t,x) \cdot u(x) dx + \int\limits_\Omega v_i(t,x) \partial_i v(t,x) \cdot u(x)\, dx + \nu(-\Delta v(t), u)_{(L_2(\Omega))^n} +$$

$$+ (\operatorname{grad} p(t), u)_{(L_2(\Omega))^n} = \int\limits_\Omega f(t,x) \cdot u(x)\, dx.$$

Применяя формулу Стокса (1.8) и выполняя преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям,

$$(-\Delta v(t), u)_{(L_2(\Omega))^n} = -\int\limits_\Omega \Delta v(t,x) \cdot u(x)\, dx = (\nabla v(t), \nabla u)_{(L_2(\Omega))^n} = ((v(t),\, u)),$$

$$(\operatorname{grad} p(t), u)_{(L_2(\Omega))^n} = \int\limits_\Omega \operatorname{grad} p(t,x) \cdot u(x)\, dx = -(p(t), \operatorname{div} u)_{L_2(\Omega)} = 0,$$

$$\text{и} \quad \int\limits_\Omega v_i(t,x) \partial_i v(t,x) \cdot u(x)\, dx = -\int\limits_\Omega v_i(t,x) v(t,x) \cdot \partial_i u(x)\, dx,$$

приходим к равенству

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega v(t,x) \cdot u(x) dx - \int\limits_\Omega v_i(t,x) v(t,x) \cdot \partial_i u(x)\, dx + \\ + \nu((v(t), u)) = (f(t), u)_{(L_2(\Omega))^n}, \ \forall u \in (\mathfrak{D}_s(\Omega))^n. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Заметим, что то же равенство верно для любой функции $u \in V$, так как каждая часть этого равенства линейно и непрерывно зависит от u в $(H_0^1(\Omega))^n$. Кроме того, равенство может выполняться и при более слабых требованиях на функцию $v(t,x)$. Покажем, что достаточно предполагать, что $v \in L_2(0, T; V)$ для того, чтобы каждый интеграл, входящий в равенство (5.5), имел смысл.

В силу теоремы вложения Соболева вложение $(W_2^1(\Omega))^n \subset (L_4(\Omega))^n$ непрерывно при $n \leq 4$. Поэтому, так как $V \subset (W_2^1(\Omega))^n$, то $v_i(t,x)v(t,x) \in (L_2(\Omega))^n$ и $v_i(t,x)v(t,x) \cdot \partial_i u(x) \in L_1(\Omega)$ при каждом фиксированном значении t. Следовательно, интеграл $\int\limits_\Omega v_i(t,x) v(t,x) \cdot \partial_i u(x)\, dx$ определен.

Кроме того, это слагаемое определяет линейный непрерывный функционал на V. Обозначим этот функционал через $K(v)$:

$$\langle K(v(t)), u\rangle = \int\limits_{\Omega} v_i(t,x)v(t,x)\cdot\partial_i u(x)\,dx.$$

Отметим, что $\int\limits_{\Omega} v(t,x)u(x)dx \in L_2(0,T)$ и производная в выражении $\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v(t,x)u(x)dx$ понимается в смысле распределений на интервале $(0,T)$. Поэтому равенство (5.5) выполняется в смысле распределений. Все слагаемые равенства, исключая первое, принадлежат пространству $L_1(0,T)$, поэтому $\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v(t,x)u(x)dx \in L_1(0,T)$ и равенство (5.5) выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$.

Подводя итог рассуждениям, приходим к следующему определению слабого решения.

Определение 5.1. *Пусть* $f \in (L_2(Q_T))^n$ *и* $v^0 \in H$. *Слабым (вариационным) решением задачи* (5.1)-(5.4) *называется функция* $v \in L_2(0,T;V)$ *такая, что равенство*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v(t,x)\cdot u(x)dx - \int\limits_{\Omega} v_i(t,x)v(t,x)\cdot\partial_i u(x)\,dx + \tag{5.6}$$

$$+\nu((v(t),u)) = (f(t),u)_{(L_2(\Omega))^n}, \quad \forall u \in (\mathfrak{D}_s(\Omega))^n,$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$ *и*

$$v(0) = v^0. \tag{5.7}$$

Выше показано, что равенство (5.6) корректно для $v \in L_2(0,T;V)$ и если (v,p) — сильное решение задачи (5.1)-(5.4), то v является слабым решением. Поэтому задачу о поиске сильных решений заменим задачей об исследовании слабых решений.

Заметим, однако, что для функции $v \in L_2(0,T;V)$ условие (5.7) не имеет смысла, так как не определено значение функции $v(t)$ в точке $t \in (0,T)$. Покажем далее, что функция $v(t)$, удовлетворяющая равенству (5.6), является непрерывной на $[0,T]$ со значениями в V^* и слабо непрерывной со значениями в H. Поэтому равенство (5.7) имеет смысл и определение слабого решения корректно.

Преобразуем равенство (5.6). Скалярное произведение $(v(t), u)_{(L_2(\Omega))^n}$ определяет линейный непрерывный функционал на H, а следовательно, элемент из H^*. Учитывая отождествление $H \equiv H^*$ и цепочку вложений $V \subset H \subset H^* \subset V^*$, элемент $v(t)$ можно рассматривать как функционал на V, действие которого на функцию $u \in V$ определяется равенством $\langle v(t), u\rangle = (v(t), u)_{(L_2(\Omega))^n}$. Тогда можно считать, что функция $v(t)$ на $[0, T]$ принимает значения в V^* и

$$\frac{d}{dt}(v(t), u)_{(L_2(\Omega))^n} = \frac{d}{dt}\langle v(t), u\rangle.$$

С учетом введенных обозначений равенство (5.6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), u\rangle - \langle \Delta v(t), u\rangle - \langle K(v(t)), u\rangle = \langle f(t), u\rangle,$$

где $\Delta : \quad V \to V^*$, или в виде

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), u\rangle = \langle \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), u\rangle. \tag{5.8}$$

Исследуем свойства выражений, входящих в правую часть равенства.

Лемма 5.1.

1) В случае произвольного n отображение $\Delta : L_2(0, T; V) \to L_2(0, T; V^*)$ линейно и непрерывно, причем

$$\|\Delta u\|_{L_2(0,T;V^*)} = \|u\|_{L_2(0,T;V)}, \quad \forall u \in L_2(0, T; V); \tag{5.9}$$

2) Пусть $n \le 4$. Тогда отображение $K : L_2(0, T; V) \to L_1(0, T; V^*)$ непрерывно и справедлива оценка

$$\|K(u)\|_{L_1(0,T;V^*)} \le C_0\|u\|^2_{L_2(0,T;V)}, \quad \forall u \in L_2(0, T; V), \tag{5.10}$$

для некоторой константы C_0.

Доказательство. 1) В главе 2 показано, что отображение $\Delta : V \to V^*$ линейно, непрерывно и определяет изометрию пространств. Следовательно, $\|\Delta u\|_{V^*} = \|u\|_V$ для всех $u \in V$. Отсюда для $u \in L_2(0, T; V)$ имеем $\|\Delta u(t)\|_{V^*} = \|u(t)\|_V$ для почти всех $t \in [0, T]$. Так как $\|u(t)\|_V \in L_2(0, T)$, то $\|\Delta u(t)\|_{V^*} \in L_2(0, T)$. Следовательно, $\Delta u \in L_2(0, T; V^*)$ и справедливо равенство (5.9). Таким образом, линейный оператор Δ определяет изометрию пространств $L_2(0, T; V)$ и $L_2(0, T; V^*)$.

2) По определению оператора K

$$\langle K(v), u\rangle = \int\limits_\Omega v_i(x) v_j(x) \cdot \partial_i u_j(x)\, dx$$

для $u, v \in V$. Повторяя рассуждения доказательства леммы 3.1 или используя оценки (3.10), получим

$$\|K(v(t))\|_{V^*} \leq c_0 \|v(t)\|_V^2, \qquad \forall v \in V,\ t \in [0, T],$$

с некоторой константой c_0.

Отсюда для $v \in L_2(0, T; V)$ имеем $K(v) \in L_1(0, T; V^*)$ и

$$\|K(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leq \int_0^T \|K(v(t))\|_{V^*} dt \leq c_0 \int_0^T \|v(t)\|_V^2 \, dt = c_0 \|v(t)\|_{L_2(0,T;V)}^2.$$

Повторяя рассуждения доказательства леммы 3.1, получим, что для $v, u \in L_2(0, T; V)$ справедлива оценка

$$\|K(v) - K(u)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leq \int_0^T \|K(v(t)) - K(u(t))\|_{V^*} dt \leq$$

$$\leq c^2 \int_0^T \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_i v_j)^2 - (u_i u_j)^2 dx \right)^{1/2} dt.$$

Кроме того, вложение $V \subset (L_4(\Omega))^n$, а следовательно, и вложение $L_2(0, T; V) \subset L_2(0, T; (L_4(\Omega))^n)$ непрерывны. Поэтому достаточно доказать непрерывность отображений

$$\phi_{ij} : L_2(0, T; (L_4(\Omega))^n) \to L_1(0, T; L_2(\Omega)), \quad \phi_{ij}(v) = v_i v_j$$

для $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Для любых $u, v \in L_2(0, T; (L_4(\Omega))^n)$ с помощью неравенства Шварца получаем оценку

$$\|\phi_{ij}(u) - \phi_{ij}(v)\|_{L_1(0,T;L_2(\Omega))} = \int_0^T \left(\int_\Omega (v_i v_j - u_i u_j)^2 \, dx \right)^{1/2} dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \left(\int_\Omega v_i^2 (v_j - u_j)^2 \, dx \right)^{1/2} + \left(\int_\Omega (v_i - u_i)^2 u_j^2 \, dx \right)^{1/2} dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \left(\|v_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \|v_j(t) - u_j(t)\|_{L_4(\Omega)} + \|v_i(t) - u_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \|u_j(t)\|_{L_4(\Omega)} \right) dt \leq$$

$\leq \|v_i\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)}\|v_j - u_j\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)} + \|v_i - u_i\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)}\|u_j\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega)}$.
Отсюда, если $\|v-u\|_{L_2(0,T;(L_4(\Omega))^n)} \to 0$, то $\|\phi_{ij}(u) - \phi_{ij}(v)\|_{L_1(0,T;L_2(\Omega))} \to 0$. Поэтому каждое из отображений ϕ_{ij}, а следовательно, и отображение K непрерывны. □

По утверждению леммы $\Delta v \in L_2(0,T;V^*)$, $K(v) \in L_1(0,T;V^*)$, поэтому $\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t) \in L_1(0,T;V^*)$. Тогда из равенства (5.8) и теоремы 4.6 следует
1) что функция $v(t)$ имеет суммируемую производную $v'(t)$;
2) в силу равенства (4.3)

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), u\rangle = \langle v'(t), u\rangle,$$

3) равенство (5.8) можно записать в виде

$$v'(t) = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t).$$

Подводя итог рассуждений, отметим, что так как $v'(t) \in L_1(0,T;V^*)$, то $v \in W_{2,1}$ с $X_0 = V$, $X_1 = V^*$. Поэтому в силу леммы 4.5 функция $v(t)$ непрерывна на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^*. Кроме того, по лемме 4.6 эта функция слабо непрерывна со значениями в H. Поэтому начальное условие (5.7) имеет смысл.

Переформулируем понятие слабого решения

Определение 5.2. *Пусть $n \leq 4$, $f \in L_2(0,T;(L_2(\Omega))^n)$ и $v^0 \in H$. Слабым (вариационным) решением задачи (5.1)-(5.4) называется функция $v \in L_2(0,T;V)$ такая, что $v' \in L_1(0,T;V^*)$, равенство*

$$v'(t) - \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \tag{5.11}$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$ и

$$v(0) = v^0. \tag{5.12}$$

5.2 Аппроксимационные и операторные уравнения. Свойства операторов.

В этом разделе рассматриваются свойства операторов, входящих в уравнение (5.11), а также оператора K_ε, аппроксимирующего K. Вводятся "аппроксимирующие"уравнения для уравнения (5.11).

Заметим, что именно равенство (5.11), записанное в виде

$$v'(t) = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t),$$

определяет ограничение $v' \in L_1(0,T;V^*)$. При этом два слагаемых в правой части равенства принадлежат пространству $L_2(0,T;V^*)$ и лишь одно слагаемое $K(v)$ принадлежит $L_1(0,T;V^*)$. Исправим эту ситуацию, заменив слагаемое $K(v)$ "аппроксимирующим" его выражением $K_\varepsilon(v)$ таким, что $K_\varepsilon(v) \in L_2(0,T;V^*)$. Эта замена приводит к условию $v' \in L_2(0,T;V^*)$ для решения соответствующего уравнения.

Рассмотрим теперь следующие задачи, зависящие от параметра $\varepsilon \geq 0$:

$$\text{для заданных функций} \quad f \in L_2(0,T;V^*), \quad v^0 \in H$$
$$\text{найти функцию } v, \quad \text{удовлетворяющую условиям}$$
$$v \in L_2(0,T;V), \quad v' \in L_2(0,T;V^*),$$

$$v'(t) - \Delta v(t) - K_\varepsilon(v(t)) = f(t), \tag{5.13}$$

$$v(0) = v^0. \tag{5.14}$$

Введем обозначения функциональных пространств:

$$E = L_2(0,T;V), \quad E^* = L_2(0,T;V^*)$$

(Напомним, что сопряженным к пространству $L_p(0,T;X)$, $1 < p < \infty$, где X банахово, является пространство $L_q(0,T;X^*)$ с параметром q, удовлетворяющим соотношению $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.) Решение задачи (5.13),(5.14) принадлежит пространству

$$W = \{v : v \in L_2(0,T;V), \quad v' \in L_2(0,T;V^*)\}.$$

Пространство W банахово с нормой $\|v\|_W = \|v\|_E + \|v'\|_{E^*}$.

Лемма 5.2.

1) Для любого $\varepsilon > 0$ отображение $K_\varepsilon : E \to E^*$ корректно определено, непрерывно и справедлива оценка

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{E^*} \leq \frac{c_1}{\varepsilon} \qquad \text{для} \quad v \in E \tag{5.15}$$

с некоторой константой c_1, не зависящей от v.

2) Для любого $\varepsilon > 0$ отображение $K_\varepsilon : W \to E^*$ вполне непрерывно.

3) Для любого $\varepsilon \geq 0$ и $n \leq 4$ справедлива оценка

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leq C_2\|v\|_E^2 \qquad \text{для} \quad v \in E \tag{5.16}$$

с некоторой константой C_2, не зависящей от v и ε.

Доказательство.

1) По определению оператора K_ε для $\varepsilon > 0$:

$$\langle K_\varepsilon(v), u\rangle_V = \int\limits_\Omega \frac{v_i v_j}{1+\varepsilon|v|^2}\cdot \partial_i u_j dx, \quad \text{для любых } \ v \in V \quad \text{и} \ \ u \in V.$$

Как и в доказательстве леммы 3.1, имеем оценку

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{V^*} \leq \frac{n(\mathrm{mes}(\Omega))^{1/2}}{\varepsilon}.$$

Поэтому для $v \in L_2(0,T;V)$ получаем

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{L_2(0,T;V^*)} \leq \frac{n(mes\ \Omega\cdot T)^{1/2}}{\varepsilon}.$$

Следовательно, $K_\varepsilon(v) \in L_2(0,T;V^*)$ и справедлива оценка (5.15).

Для доказательства непрерывности отображения K_ε заметим, что вложение $V \subset (L_2(\Omega))^n$, а следовательно, и вложение $L_2(0,T;V) \subset (L_2(Q_T))^n$ непрерывны. Поэтому достаточно доказать непрерывность отображений

$$\phi_{ij} : (L_2(Q_T))^n \to L_2(Q_T), \quad \phi_{ij}(v) = \frac{v_i v_j}{1+\varepsilon|v|^2}, \qquad i,j = 1,2,\ldots n,.$$

Свойство непрерывности этого отображения следует из теоремы М.А.Красносельского о непрерывности оператора суперпозиции и очевидной оценки

$$|\phi_{ij}(v)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{для} \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, непрерывность отображения K_ε установлена.

2) Для доказательства компактности отображения K_ε повторяем приведенные выше рассуждения, обращая внимание на компактности вложений.

Заметим, что по теореме вложения Соболева вложение $V \subset (L_2(\Omega))^n$ вполне непрерывно. Тогда в силу теоремы 4.11 вложение $W \subset (L_2(Q_T))^n$ также вполне непрерывно. Поэтому отображения

$$\phi_{ij} : W \subset (L_2(Q_T))^n \to L_2(Q_T), \qquad i,j = 1,2,\ldots n,$$

вполне непрерывны как композиция вполне непрерывного оператора вложения и непрерывного оператора суперпозиции. Отметим, что этого достаточно для доказательства компактности отображения K_ε.

3) Пусть $\varepsilon \geq 0$ и $n \leq 4$. Для $v \in V$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\|K_\varepsilon(v)\|_{V^*} &\leq \left(\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{v_i v_j}{1+\varepsilon|v|^2}\right)^2 dx\right)^{1/2} \leq \\
&\leq \left(\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_i v_j)^2 dx\right)^{1/2} \leq c_0\|v\|_V^2.
\end{aligned}$$

Отсюда для $v \in L_2(0,T;V)$ получаем требуемую оценку

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leq \int\limits_0^T \|K_\varepsilon(v(t))\|_{V^*} dt \leq c_0 \int\limits_0^T \|v(t)\|_V^2\, dt = c_0\|v(t)\|^2_{L_2(0,T;V)}.$$

$\square$

Лемма 5.2 позволяет рассматривать равенство (5.13) как равенство элементов из E^*, а следовательно, как операторное уравнение. Введем обозначение отображений:

$$\mathcal{L} : W \to E^* \times H, \quad \mathcal{L}(v) = (v' - \nu\Delta v,\ v\mid_{t=0});$$

$$\mathbb{K}_\varepsilon : W \subset E \to E^* \times H, \quad \mathbb{K}_\varepsilon(v) = (K_\varepsilon(v), 0).$$

Тогда задача (5.13), (5.14) о существовании слабого решения эквивалентна операторному уравнению

$$\mathcal{L}(v) = \mathbb{K}_\varepsilon(v) + (f, v^0). \tag{5.17}$$

Исследуем свойства оператора $\mathcal{L}$.

Теорема 5.1. *Отображение $\mathcal{L} : W \to E^* \times H$, корректно определено, обратимо и справедлива оценка*

$$\|u\|_W \leq c\|\mathcal{L}(u)\|_{E^*\times H} \tag{5.18}$$

для любых $u \in W$ и некоторой константы c. Оператор $\mathcal{L}^{-1} : E^* \times H \to W$ непрерывен и

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq c. \tag{5.19}$$

Доказательство. 1) Оператор взятия производной непрерывен по определению W, оператор Δ изометричен и поэтому непрерывен. Так как вложение $W \subset C([0,T], H)$ непрерывно в силу теоремы 4.9, то оператор взятия следа функции $v\mid_{t=0}$ корректно определен и непрерывен, а следовательно, корректно определен и непрерывен оператор $\mathcal{L}$.

2) Докажем оценку (5.18). Для $u \in W$ обозначим $\mathcal{L}(u) = (\tilde{f}, \tilde{u}^0)$. Тогда

$$u' - \nu\Delta u = \tilde{f}, \quad u\,|_{t=0} = \tilde{u}^0.$$

При каждом фиксированном значении $t \in [0,T]$ применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции $u(t) \in V$

$$\langle u'(t), u(t)\rangle - \nu\langle \Delta u(t), u(t)\rangle = \langle \tilde{f}(t), u(t)\rangle,$$

Так как $v \in W$, то в силу теоремы 4.8 имеем равенство (4.6)

$$\langle u'(t), u(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{(L_2(\Omega))^n}.$$

Кроме того,

$$-\nu\langle \Delta u(t), u(t)\rangle = \nu((u(t), u(t))) = \nu\|u(t)\|^2_V,$$

$$\langle \tilde{f}(t), u(t)\rangle_V \le \|\tilde{f}(t)\|_{V^*}\|u(t)\|_V.$$

Поэтому полученное равенство приводит к следующему неравенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} + \nu\|u(t)\|^2_V \le \|\tilde{f}(t)\|_{V^*}\|u(t)\|_V.$$

Интегрируя полученное неравенство по переменной t на отрезке $[0,t]$, используя начальное условие для функции $u(t)$ и неравенство Коши

$$a \cdot b \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad \forall\,\varepsilon > 0, a, b > 0,$$

приходим к оценке

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} - \frac{1}{2}\|\tilde{u}^0\|^2_{(L_2(\Omega))^n} + \nu\int\limits_0^t \|u(\tau)\|^2_V d\tau$$

$$\le \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \|\tilde{f}(t)\|^2_{V^*} d\tau + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t \|u(\tau)\|^2_V d\tau.$$

Теперь выбирая $\varepsilon = \nu$, получаем

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} + \frac{1}{2}\nu\int\limits_0^t \|u(\tau)\|^2_V d\tau \le \frac{1}{2}\|\tilde{u}^0\|^2_{(L_2(\Omega))^n} + \frac{1}{2\nu}\int\limits_0^t \|\tilde{f}(t)\|^2_{V^*} d\tau.$$

Умножим обе части неравенства на 2 и вычислим максимум по $t \in [0,T]$, тогда

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} + \nu\|u\|^2_E \le \|\tilde{u}^0\|^2_{(L_2(\Omega))^n} + \frac{1}{\nu}\|\tilde{f}\|^2_{E^*}.$$

Используя неравенство $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, $a,b \in \mathbb{R}$, отсюда нетрудно получить итоговую оценку

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} + \|u\|_E \le c_1 \left(\|\tilde{u}^0\|_{(L_2(\Omega))^n} + \|\tilde{f}\|_{E^*}\right) \tag{5.20}$$

с некоторой константой c_1, не зависящей от u.

Для того, чтобы оценить $\|u'\|_{E^*}$, воспользуемся равенством $u' = \nu\Delta u + \tilde{f}$, оценкой $\|\Delta u\|_{E^*} \le \|u\|_E$ и полученной выше оценкой (5.20):

$$\|u'\|_{E^*} \le \|\tilde{f}\|_{E^*} + \nu\|\Delta u\|_{E^*} \le \|\tilde{f}\|_{E^*} + \nu\|u\|_E \le$$

$$\le (c_1\nu + 1)(\|\tilde{u}^0\|_{(L_2(\Omega))^n} + \|\tilde{f}\|_{E^*}).$$

Таким образом, мы получаем требуемую оценку

$$\|u\|_W = \|u\|_E + \|u'\|_{E^*} \le c\,(\|\tilde{u}^0\|_{(L_2(\Omega))^n} + \|\tilde{f}\|_{E^*}) = c\,\|\mathcal{L}(u)\|_{E^*\times H}$$

с некоторой константой c.

3) Для доказательства обратимости отображения $\mathcal{L}$ достаточно применить теорему 1.1 [4, глава VI]. Приведем теорему в удобной для использования формулировке:

Теорема. *Пусть $A : E \to E^*$ радиально непрерывный монотонный коэрцитивный вольтерров оператор. Тогда задача*

$$u' + Au = f, \quad u(0) = a, \ \ u \in E,$$

при любых $f \in E^*$, $a \in H$ имеет только одно решение u. При этом $u \in W \subset C([0,T],H)$ и соответствие $a \mapsto u$ как отображение из H в $C([0,T],H)$ непрерывно.

Рассмотрим условия теоремы и покажем, что они выполняются для оператора $A = -\Delta : V \to V^*$.

Оператор $\Delta : V \to V^*$, а следовательно, и оператор $\Delta : E \to E^*$ непрерывны, что и обеспечивает радиальную непрерывность отображения. Оператор $A : E \to E^*$ называется монотонным, если

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_{E^*\times E} \ge 0 \quad \text{для любых } u, v \in E.$$

В данном случае имеем:

$$-\langle \Delta u - \Delta v, u - v\rangle_{E^*\times E} = (u-v, u-v)_E = \|u-v\|^2_E \ge 0$$

и, следовательно, оператор $-\Delta$ является монотонным. Замена $u-v$ на h приводит к равенству $\langle -\Delta h,\, h\rangle_E = \|h\|_E^2$, что показывает коэрцитивность оператора $-\Delta$. Термин вольтерров оператор требует, чтобы значения оператора в момент времени t определялись лишь значениями функции на отрезке $[0,t]$ (в этом случае говорят, что "настоящее определяется прошлым и не зависит от будущего"). В данном случае значение $-\Delta u(t)$ определяется лишь значением $u(t)$.

Все условия теоремы выполнены. Применение теоремы показывает, что для каждого $(\tilde{f}, \tilde{u}^0)$ существует единственное решение $u \in E$, а следовательно, $u \in W$. Таким образом, оператор $\mathcal{L}$ обратим. Переписывая оценку (5.18) в виде

$$\|\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f}, \tilde{u}^0)\|_W \le c \cdot (\|\tilde{u}^0\|_{(L_2(\Omega))^n} + \|\tilde{f}\|_{E^*}),$$

получаем, что $\|\mathcal{L}^{-1}\| \le c$, и оператор $\mathcal{L}^{-1}$ ограничен и непрерывен. □

5.3 Априорная оценка решений и разрешимость аппроксимиционных уравнений

Утверждение о разрешимости начальной задачи (5.13),(5.14) для любых $\varepsilon > 0$ устанавливается с помощью теории степени Лере-Шаудера.

Теорема 5.2. *Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для произвольных $f \in E^*$, $v^0 \in H$ задача* (5.13),(5.14) *имеет, по крайней мере, одно решение $v \in W$.*

Доказательство. Исследование задачи (5.13),(5.14) заменим исследованием эквивалентного операторного уравнения (5.17):

$$\mathcal{L}(v) = \mathbb{K}_\varepsilon(v) + (f, v^0).$$

Применим оператор $\mathcal{L}^{-1}$ к обеим частям уравнения. Получим эквивалентное операторное уравнение

$$v = \mathcal{L}^{-1}(\mathbb{K}_\varepsilon(v) + (f, v^0)). \tag{5.21}$$

Обозначим через k отображение, определяемое правой частью уравнения (5.21):

$$k : W \to W, \quad v \mapsto \mathcal{L}^{-1}(\mathbb{K}_\varepsilon(v) + (f, v^0)).$$

Тогда уравнение (5.21) можно записать в виде

$$(I - k)(v) = 0. \tag{5.22}$$

В силу леммы 5.2 и теоремы 5.2 отображение k вполне непрерывно как композиция вполне непрерывного отображения $(\mathbb{K}_\varepsilon + (f, v^0))$

и непрерывного оператора $\mathcal{L}^{-1}$. Покажем, что степень Лере-Шаудера $deg_{LS}(I-k,\overline{B}_R,0)$ для отображения $I-k$ определена на шаре $B_R\subset W$ достаточно большого радиуса R и отлична от нуля. Тогда утверждение теоремы о разрешимости уравнения (5.17) будет следовать из свойства степени Лере-Шаудера.

Рассмотрим вспомогательное семейство операторных уравнений

$$v \,=\, \lambda\mathcal{L}^{-1}(\mathbb{K}_\varepsilon(v)\,+\,(f,v^0)),\qquad \lambda\in[0,1]. \tag{5.23}$$

Если $v\in W$ решение одного из уравнений этого семейства, то в силу оценок (5.18) и (5.15)

$$\|v\|_W\le c\|\mathbb{K}_\varepsilon(v)\,+\,(f,v^0)\|_{E^*\times H}\,\le\, c(\|\mathbb{K}_\varepsilon(v)\|_{E^*}\,+\,\|f\|_{E^*}\,+\,\|v^0\|_H)\,\le$$
$$\le c(\frac{c_1}{\varepsilon}\,+\,\|f\|_{E^*}\,+\,\|v^0\|_H).$$

Выберем $R>c(\dfrac{c_1}{\varepsilon}\,+\,\|f\|_{E^*}\,+\,\|v^0\|_H)$, тогда ни одно решение уравнений семейства (5.23) не принадлежит границе шара $B_R\subset W$. Поэтому отображение $I-\lambda k: W\times[0,1]\to W$ определяет гомотопию вполне непрерывных векторных полей на B_R. Следовательно, степень $deg_{LS}(I-\lambda k,\overline{B}_R,0)$ определена для каждого значения $\lambda\in[0,1]$ и в силу свойства гомотопической инвариантности степени имеем

$$deg_{LS}(I-k,\overline{B}_R,0)\,=\,deg_{LS}(I-\lambda k,\overline{B}_R,0)\,=\,deg_{LS}(I,\overline{B}_R,0)\,=\,1,$$

так как $0\in B_R$. Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование решения операторного уравнения (5.22), а, следовательно, существование решения уравнения (5.17) и задачи (5.13),(5.14).

Теорема доказана. □

5.4 Априорная оценка решений и существование слабого решения

В предыдущем разделе мы показали, что для каждого $\varepsilon>0$ аппроксимационная задача (5.13),(5.14) имеет хотя бы одно решение v_ε в пространстве W. Покажем, что в случае $n\le 4$ можно выделить подпоследовательность решений v_ε, которая при $\varepsilon\to 0$ слабо сходится к решению задачи (5.11),(5.12) в каком-то смысле.

На первом шаге мы установим ограниченность множества решений v_ε для всех $\varepsilon>0$.

Теорема 5.3. *Пусть $n\le 4$. Для любого решения $v\in W$ задачи (5.13),(5.14) с $\varepsilon>0$ справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}\,+\,\|v\|_E\le c\,(\|f\|_{L_2(0,T;V^*)}+\|v^0\|_H), \tag{5.24}$$

$$\|v'\|_{L_1(0,T;V^*)} \le c\,(1 + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v_0\|_H)^2, \tag{5.25}$$

с константой c, не зависящей от ε.

Доказательство. Пусть $v \in W$ решение задачи (5.13),(5.14) для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда

$$v'(t) - \nu\Delta v(t) = f(t) + K_\varepsilon(v(t)), \quad v\,|_{t=0} = v^0.$$

При каждом фиксированном значении $t \in [0,T]$ применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции $v(t) \in V$

$$\langle v'(t), v(t)\rangle - \nu\langle \Delta v(t), v(t)\rangle = \langle f(t), v(t)\rangle + \langle K_\varepsilon(v(t)), v(t)\rangle,$$

Так как $\langle K_\varepsilon(v(t)), v(t)\rangle = 0$ для всех $t \in [0,T]$, то полученное равенство приводит к следующему неравенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} + \nu\|u(t)\|^2_V \le \|\tilde{f}(t)\|_{V^*}\|u(t)\|_V.$$

и далее, повторяя рассуждения доказательства теоремы 5.2, отсюда нетрудно получить итоговую оценку (5.24):

$$\max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} + \|v\|_E \le c(\|v^0\|_{(L_2(\Omega))^n} + \|f\|_{E^*})$$

с некоторой константой c, не зависящей от v.

Для того, чтобы оценить $\|v'\|_{L_1(0,T;V^*)}$, воспользуемся равенством $v' = \nu\Delta v + f + K_\varepsilon(v)$. Отсюда

$$\|v'\|_{L_1(0,T;V^*)} \le \nu\|\Delta v\|_{L_1(0,T;V^*)} + \|K_\varepsilon(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} + \|f\|_{L_1(0,T;V^*)}. \tag{5.26}$$

Используя непрерывность вложение $E^* \subset L_1(0,T;V^*)$, с помощью неравенства Коши и оценки $\|\Delta v\|_{E^*} \le \|v\|_E$ получим

$$\|\Delta v\|_{L_1(0,T;V^*)} \le \sqrt{T}\|\Delta v\|_{E^*} \le \sqrt{T}\|v\|_E, \qquad \|f\|_{L_1(0,T;V^*)} \le \sqrt{T}\,\|f\|_{E^*}.$$

Кроме того, для $\|K_\varepsilon(v)\|_{L_1(0,T;V^*)}$ имеется оценку (5.16):

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \le C\|v\|^2_E.$$

Подставляя полученные оценки в неравенство (5.26) и используя оценку (5.24), приходим к требуемой оценке (5.25). Теорема доказана. □

Наличие априорной оценки решений v_ε задач (5.13),(5.14), не зависящей от ε, позволяет выбрать подпоследовательность решений, сходящуюся к решению задачи (5.11),(5.12).

Теорема 5.4. *Пусть $n \le 4$. Для каждой функции $f \in L_2(0,T;V^*)$ и $v^0 \in H$ задача (5.11), (5.12) имеет хотя бы одно решение v такое, что $v \in L_2(0,T;V)$, $\; v' \in L_1(0,T;V^*)$.*

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы, сформулируем ключевое утверждение о предельном переходе для $K_\varepsilon(v_\varepsilon)$.

Лемма 5.3. *Если последовательность $\{v_l\}_{l=1}^{\infty}$, $v_l \in E$, удовлетворяет условиям:*

$$v_l \rightharpoonup v^* \qquad \text{слабо в } E;$$

$$v_l \to v^* \qquad \text{почти всюду в } \; Q_T;$$

$$v_l \to v^* \qquad \text{сильно в } (L_2(Q_T))^n,$$

тогда

$$K_{\varepsilon_l}(v_l) \dashrightarrow K(v^*), \qquad \text{в смысле распределений при } \; l \to \infty, \;\; \varepsilon_l \to 0.$$

(Последний предел понимается в смысле распределений на $(0,T)$ со значениями в V^*.)

Доказательство. По определению сходимости в смысле распределений на $(0,T)$ со значениями в V^* достаточно показать, что

$$\int\limits_0^T \langle K_{\varepsilon_l}(v_l(t)) - K(v^*(t)), u\rangle \eta(t) dt \to 0 \quad \text{при} \;\; l \to \infty$$

для всех $u \in \mathcal{D}_s(\Omega)^n$ и действительных функций $\eta \in \mathcal{D}(0,T)$. Так как

$$\int\limits_0^T \langle K_{\varepsilon_l}(v_l(t)) - K(v^*(t)), u\rangle \eta(t) dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{(v_l)_i(t)(v_l)_j(t)}{1+\varepsilon_l |v_l(t)|^2} - (v_l)_i(t)(v_l)_j(t) \right) \partial_j u_i(x) \eta(t) dx\, dt,$$

то

$$\left| \int\limits_0^T \langle K_{\varepsilon_l}(v_l(t)) - K(v^*(t)), u\rangle \, \eta(t) dt \right| \le$$

$$\le \max_{i,j} \left\| \frac{(v_l)_i (v_l)_j}{1+\varepsilon_l |v_l|^2} - v_i^* v_j^* \right\|_{L^1(Q_T)} \cdot \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \cdot \|\eta\|_{L^\infty(0,T;R)}.$$

Используя неравенство Гельдера оценим первый сомножитель правой части неравенства:

$$\left\|\frac{(v_l)_i(v_l)_j}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}-v_i^*v_j^*\right\|_{L^1(Q_T)} \le \left\|\frac{(v_l)_i(v_l)_j-v_i^*v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}\right\|_{L^1(Q_T)}+\left\|\frac{\varepsilon_l|v_l|^2v_i^*v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}\right\|_{L^1(Q_T)} \le$$

$$\le \|(v_l)_i(v_l)_j-v_i^*v_j^*\|_{L^1(Q_T)}+\left\|\frac{\varepsilon_l|v_l|^2v_i^*v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}\right\|_{L^1(Q_T)} \le \left\|\frac{\varepsilon_l|v_l|^2v_i^*v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}\right\|_{L^1(Q_T)}+$$

$$+\|(v_l)_i\|_{L^2(Q_T)}\cdot\|(v_l)_j-v_j^*\|_{L^2(Q_T)}\ +\ \|v_j^*\|_{L^2(Q_T)}\|(v_l)_i-v_i^*\|_{L^2(Q_T)}.$$

Из условий леммы следует, что $\|v_l-v^*\|_{L^2(Q_T)}\to 0$ при $l\to\infty$ и величины $\|v_l\|_{L^2(Q_T)}$, $\|v^*\|_{L^2(Q_T)}$ равномерно ограничены. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что и первое слагаемое правой части полученного неравенства сходится к нулю при $l\to\infty$.

По условию $v_l\to v^*$ почти всюду на Q_T и $\varepsilon_l\to 0$, поэтому $\dfrac{\varepsilon_l|v_l|^2v_i^*v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}\to$ 0 почти всюду на Q_T при $l\to\infty$. Так как, $\left|\dfrac{\varepsilon_l|v_l|^2v_i^*v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}\right|\le|v_i^*v_j^*|$ и $v_i^*v_j^*\in L^1(Q_T)$, то применяя теорему Лебега [4, теорема 1.1] получаем $\left\|\dfrac{\varepsilon_l|v_l|^2v_i^*v_j^*}{1+\varepsilon_l|v_l|^2}\right\|_{L^1(Q_T)}\to 0$ при $l\to\infty$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 5.3. Выберем произвольную последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$, сходящуюся к нулю. Для каждого числа ε_l соответствующая задача (5.13),(5.12) имеет, по крайней мере, одно решение $v_l\in W$.

В силу оценки (5.24) последовательность $\{v_l\}_{l=1}^{\infty}$ ограничена по норме $\|\cdot\|_E$ и норме $\|\cdot\|_{L_\infty(0,T;H)}$. Из оценки (5.25) следует, что последовательность производных $\{v_l'\}_{l=1}^{\infty}$ ограничена по норме пространства $L_1(0,T;V^*)$. Тогда, не уменьшая общности рассуждений (возможно, переходя к подпоследовательности), будем предполагать, что

$$v_l\rightharpoonup v^* \qquad \text{слабо в } E;$$

$$v_l\rightharpoonup v^* \qquad *\text{ - слабо в } L_\infty(0,T;H);$$

$$v_l\to v^* \qquad \text{сильно в } L_2(Q_T)^n;$$

$$v_l\to v^* \qquad \text{почти всюду в } \ Q_T;$$

$$v_l' \dashrightarrow v'^* \qquad \text{в смысле распределений.}$$

Так как линейный оператор слабо непрерывен, то, кроме того, будем предполагать, что $\Delta v_l \rightharpoonup \Delta v^*$ слабо в E^*, а следовательно, в смысле распределений со значениями в V^*.

Для завершения доказательства теоремы осталось напомнить, что в силу леммы 5.3 $K_{\varepsilon_l}(v_l) \dashrightarrow K(v^*)$ в смысле распределений, и перейти к пределу в смысле распределений при $l \to \infty$ в равенстве

$$v_l' - \Delta v_l \;=\; f \;+\; K_\varepsilon(v_l)$$

Получим равенство

$$v^* - \Delta v^* \;=\; f \;+\; K_\varepsilon(v^*).$$

Следовательно, v^* — решение уравнения (5.11). Заметим, что так как $v^* \in E$, то из равенства (5.11) следует, что $v^{*'} \in L_1(0,T;V^*)$.
Теорема доказана. □

5.5 Полное слабое решение и его существование

Введем понятие полного слабого решения задачи (5.1)-(5.4), включающее давление p. Для этого повторяются рассуждения первого раздела. Однако возникающие функционалы рассматриваются не на пространстве V, а на пространстве $(H_0^1(\Omega))^n$.

Пусть (v,p) — сильное (обобщенное) решение задачи (5.1)-(5.4) для заданных функций $f \in (L_2(Q_T))^n$ и $v_0 \in V$. Умножая равенство (5.1) при фиксированных значениях $t \in [0,T]$ на функцию $u \in (\mathfrak{D}(\Omega))^n$ скалярно в $(L_2(\Omega))^n$, получим

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \partial_t v(t,x)\cdot u(x)dx \;+\; \int\limits_\Omega v_i(t,x)\partial_i v(t,x)\cdot u(x)\,dx + \\ +\nu(-\Delta v(t),u)_{(L_2(\Omega))^n} + (\operatorname{grad} p(t),u)_{(L_2(\Omega))^n} = \int\limits_\Omega f(t,x)\cdot u(x)dx.\end{gathered} \tag{5.27}$$

Преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям и применение формулы Стокса (1.8), приводят к равенству

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \partial_t v(t,x)\cdot u(x)dx \;-\; \int\limits_\Omega v_i(t,x)v(t,x)\cdot\partial_i u(x)\,dx \;-(p(t),\operatorname{div} u)_{L_2(\Omega)} + \\ +\,\nu((v(t),u)) = (f(t),u)_{(L_2(\Omega))^n},\;\; \forall u \in (\mathfrak{D}_s(\Omega))^n.\end{gathered}$$

То же равенство верно для любой функции $u \in (H_0^1(\Omega))^n$, так как каждая часть этого равенства линейно и непрерывно зависит от u в $(H_0^1(\Omega))^n$.

Определение 5.3. *Пусть* $f \in L_2(0,T;(L_2(\Omega))^n)$ *и* $v^0 \in H$. *Полным слабым (вариационным) решением задачи* (5.1)-(5.4) *называются такие функции* (v,p), *что* $v \in L_2(0,T;V)$, $v' \in L_1(0,T;(H^{-1}(\Omega))^n)$, $p \in L_1(0,T;L_2(\Omega))$, *равенство*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v(t,x)\cdot u(x)dx - \int\limits_\Omega v_i(t,x)v(t,x)\cdot\partial_i u(x)dx + \nu((v(t),u)) - \\ -(p(t),\operatorname{div} u)_{L_2(\Omega)} = (f(t),u)_{(L_2(\Omega))^n},\ \forall u \in (H_0^1(\Omega))^n,\end{gathered} \tag{5.28}$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$ *и*

$$v(0) = v^0. \tag{5.29}$$

Выше показано, что каждое сильное решение (v,p) задачи (5.1)-(5.4) является полным слабым решением.

Каждое из слагаемых равенства (5.28) определяет линейный, непрерывный функционал на пространстве $(H_0^1(\Omega))^n$. Для этих слагаемых будем использовать те же обозначения, что и в первом разделе. Кроме того, введем функционал $\operatorname{grad} p \in (H^{-1}(\Omega))^n$, определяемый равенством

$$\langle \operatorname{grad} p(t), u\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n\times(H_0^1(\Omega))^n} = -(p(t),\operatorname{div} u)_{L_2(\Omega)}.$$

Далее для того, чтобы упростить запись, мы будем опускать нижние индексы $(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n$.

С учетом введенных обозначений равенство (5.28) можно записать в виде

$$\langle v'(t),u\rangle - \langle \Delta v(t),u\rangle - \langle K(v(t)),u\rangle = \langle f(t),u\rangle - \langle \operatorname{grad} p(t),u\rangle, \tag{5.30}$$

где $\Delta : \quad (H_0^1(\Omega))^n \to (H^{-1}(\Omega))^n$. Так как равенство верно для всех $u \in V$, то равенство эквивалентно операторному равенству. Учитывая это, переформулируем понятие полного слабого решения

Определение 5.4. *Пусть* $n \le 4$, $f \in L_2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^n)$ *и* $v^0 \in H$. *Полным слабым (вариационным) решением задачи* (5.1)-(5.4) *называются такие функции* (v,p), *что*

$$v \in L_2(0,T;V) \cap L_\infty(0,T;H) \cap C_w(0,T;H),\ v' \in L_1(0,T;V^*),$$
$$p \in W_\infty^{-1}(0,T;L_2(\Omega)),\ v' + \operatorname{grad} p \in L_1(0,T;(H^{-1}(\Omega))^n),$$

равенство

$$v'(t) - \Delta v(t) - K(v(t)) + \operatorname{grad} p = f(t) \tag{5.31}$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$ *и*

$$v(0) = v^0. \tag{5.32}$$

Прежде, чем приступить к формулировке теоремы существования полного слабого решения, поясним использованное обозначение пространства $W_\infty^{-1}(0,T;(H^{-1}(\Omega))^n))$. Если X — рефлексивно, то пространство $W_\infty^{-1}(0,T;X^*)$ является сопряженным к пространству $\overset{\circ}{W}{}_1^1(0,T;X)$. Можно понимать это обозначение следующим образом

$$W_\infty^{-1}(0,T;X^*) = \{u \in \mathcal{D}'(0,T;X^*) : u = w_1 + \partial_t w_2,\ w_i \in L_\infty(0,T;X^*)\}.$$

Теорема 5.5. *Пусть* $2 \le n \le 4$ *и* Ω — *ограниченная локально-липшицева область с связной границей. Для любых функций* $f \in L_2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^n)$, $v^0 \in H$ *задача* (5.31), (5.32) *имеет хотя бы одно полное слабое решение* (v,p).

Доказательство. Повторяем аргументы, использованные при изучении стационарной системы уравнений Навье-Стокса.

Напомним разложение (2.16) $(H^{-1}(\Omega))^n = V' \oplus \Pi'$ и введенные ранее проекторы P_1 на V' и $I-P_1$ на Π'.

Уравнение (5.31) разлагаем на два уравнения, применяя проекторы P_1 и $I-P_1$:

$$P_1 v'(t) - \nu P_1 \Delta v(t) - P_1 K(v(t)) = P_1 f(t) - P_1 \operatorname{grad} p(t)$$

$$\begin{aligned}(I-P_1)v'(t) - \nu(I-P_1)\Delta v(t) - \quad (I-P_1)\,K(v(t)) &= \\ = (I-P_1)\,f(t) - (I-P_1)\operatorname{grad} p(t)&\end{aligned}$$

Так как $v(t) \in V$, то $\Delta v(t) \in V'$. Поэтому $P_1\Delta v(t) = \Delta v(t)$ и $(I-P_1)\Delta v(t) = 0$. Кроме того, $\operatorname{grad} p(t) \in \Pi'$, поэтому $P_1 \operatorname{grad} p(t) = 0$ и $(I-P_1)\operatorname{grad} p(t) = \operatorname{grad} p(t)$.

Таким образом получим следующую систему операторных уравнений

$$P_1 v'(t) - \nu\Delta v(t) - P_1 K(v(t)) = P_1 f(t). \tag{5.33}$$

$$(I-P_1)v'(t) - (I-P_1)K(v(t)) + \operatorname{grad} p(t) = (I-P_1)f(t). \tag{5.34}$$

Заметим, что операция дифференцирования по переменной t коммутирует с оператором проектирования P_1. Поэтому рассматривая сужение функционалов равенства (5.33) на пространство V, приходим к уравнению (5.11). Таким образом, решение уравнения (5.33) — это решение уравнения (5.11) с правой частью $P_1 f$ или же слабое решение задачи (5.1)-(5.4). Его существование установлено в теореме 5.4.

Из второго равенства следует, что

$$\operatorname{grad} p(t) = (I-P_1)F(t) - (I-P_1)v'(t) + (I-P_1)K(v(t)).$$

В силу следствия 2.1 любой непрерывный линейный функционал

$$\xi = (I-P_1)F(t) - (I-P_1)v'(t) + (I-P_1)K(v(t)), \quad \xi \in \Pi',$$

представим с помощью равенства

$$\langle \xi, u \rangle_{(H^{-1}(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n} = -\int\limits_\Omega p(x) \operatorname{div} u(x)\, dx, \quad u \in (H_0^1(\Omega))^n,$$

где p — элемент $L_2(\Omega)$, определяемый ξ, с нулевым средним на Ω. Поэтому для почти всех $t \in [0,T]$ существует элемент $p(t) \in L_{2,0}(\Omega)$ такой, что $\operatorname{grad} p(t) = \xi$. Кроме того, отображение $\xi \mapsto p$ из Π' в $L_{2,0}(\Omega)$ линейно и непрерывно.

Так как $v' \in \mathcal{D}'(0,T;(H^{-1}(\Omega))^n)$, то из равенства

$$\operatorname{grad} p(t) = f(t) - v'(t) + \Delta v(t) + K(v(t))$$

следует, что $\operatorname{grad} p(t) \in \mathcal{D}'(0,T;(H^{-1}(\Omega))^n)$ или $\operatorname{grad} p(t) \in W_\infty^{-1}(0,T;(H^{-1}(\Omega))^n))$. Пространство $\Pi' = V^0$ замкнуто в $(H^{-1}(\Omega))^n)$, поэтому $\operatorname{grad} p(t) \in W_\infty^{-1}(0,T;\Pi')$ и $p(t) \in W_\infty^{-1}(0,T;L_2(\Omega))$. $\square$

5.6 О единственности слабого и полного слабого решений в случае $n=2$

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о единственности слабого и полного слабого решений краевой задачи (5.1)-(5.4) для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса. Будем показано, что в случае $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ слабое и полное слабое решение краевой задачи единственно. Однако для размерности $n > 2$ аналогичное утверждение неверно. Примером, показывающим, что слабое решение задачи неединственно, служит результат о бифуркации решений, содержащийся, например, в [22, гл.II, §4,п.4.4].

Сформулируем и докажем утверждение о единственности слабого решения в случае $n = 2$, следуя [22, гл.III, §3, теорема 3.2].

Теорема 5.6. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с локально липшицевой границей. Тогда слабое решение v и полное слабое решение (v,p) (при условии $(p)_\Omega = 0$) задачи* (5.1)-(5.4) *единственно. Кроме того, функция v непрерывна на отрезке $[0,T]$ со значениями в H и*

$$v(t) \to v_0 \qquad \text{в} \;\; H \qquad \text{при } t \to \infty. \tag{5.35}$$

Доказательство. Достаточно установить единственность слабого решения v, так как компонента p полного слабого решения определяется компонентой v из равенства (5.34) единственным образом.

Пусть v — решение задачи (5.31), (5.32). Покажем, что $v \in W$, т.е. $v' \in L_2(0,T;V^*)$. Воспользуемся оценкой

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \le c_0 \|v\|^2_{(L_4(\Omega))^n},$$

полученной при выводе неравенства (3.10), в случае $n = 2$ и $\varepsilon = 0$. Применяя неравенство О.А.Ладыженской (1.7), получим для любого $t \in [0, T]$

$$\|K(v(t))\|_{V^*} \leq c_0 2^{1/2} \|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} \|\mathrm{grad}\, v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}.$$

Отсюда, возводя обе части неравенства в квадрат и интегрируя по t на отрезке $[0, T]$, приходим к оценке

$$\int\limits_0^T \|K(v(t))\|_{V^*}^2 \, dt \leq 2c_0^2 \int\limits_0^T \|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}^2 \|\mathrm{grad}\, v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}^2 \, dt \leq$$

$$\leq 2c_0^2 \max_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}^2 \int\limits_0^T \|\mathrm{grad}\, v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}^2 \, dt$$

Следовательно,

$$\|K(v(t))\|_{L_2(0,T;V^*)} \leq c_0 2^{1/2} \max_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} \|v(t)\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^2)}$$

Из представления $v' = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t)$ очевидно, что $v' \in L_2(0, T; V^*)$ и $v \in W$. Воспользовавшись вложением $W \subset C([0, T], H)$, получаем $v \in C([0, T], H)$ и заключение (5.35) теоремы.

Покажем теперь единственность слабого решения. Предположим, что u и v — слабые решения задачи (5.31), (5.32). Подставим эти решения в уравнение (5.31) и рассмотрим разность полученных равенств. Для разности $w = v - u$ получим равенство

$$w'(t) - \Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0.$$

Применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции $w(t)$

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega w(t, x) \cdot w(t, x) dx + \nu((w(t), w(t))) = \\ = \int\limits_\Omega v_i(t, x) v(t, x) \cdot \partial_i w(t, x) \, dx - \int\limits_\Omega u_i(t, x) u(t, x) \cdot \partial_i w(t, x) dx. \end{gathered} \tag{5.36}$$

Оценим правую часть полученного равенства.

$$\int\limits_\Omega v_i(t, x) v(t, x) \cdot \partial_i w(t, x) \, dx - \int\limits_\Omega u_i(t, x) u(t, x) \cdot \partial_i w(t, x) \, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} v_i(t,x)v(t,x)\cdot\partial_i w(t,x)\,dx \,-\, \int\limits_{\Omega} u_i(t,x)v(t,x)\cdot\partial_i w(t,x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} u_i(t,x)v(t,x)\cdot\partial_i w(t,x)\,dx \,-\, \int\limits_{\Omega} u_i(t,x)u(t,x)\cdot\partial_i w(t,x)\,dx \,=$$

$$= \int\limits_{\Omega} w_i(t,x)v(t,x)\cdot\partial_i w(t,x)\,dx \,-\, \int\limits_{\Omega} u_i(t,x)w(t,x)\cdot\partial_i w(t,x)\,dx$$

Используем интегрирование по частям для вычисления первого интеграла

$$\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)v(t,x)\cdot\partial_i w(t,x)\,dx \,=\, -\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\partial_i v(t,x)\cdot w(t,x)\,dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega} \partial_i w_i(t,x)v(t,x)\cdot w(t,x)\,dx \,=\, -\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\partial_i v(t,x)\cdot w(t,x)\,dx,$$

так как $\partial_i w_i(t,x) \,=\, \operatorname{div} w(t,x) \,=\, 0$. Используем интегрирование по частям для вычисления второго из интегралов

$$\int\limits_{\Omega} u_i(t,x)w(t,x)\cdot\partial_i w(t,x)\,dx \,=\, \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega} u_i(t,x)\frac{1}{2}\cdot\partial_i|w|^2(t,x)\,dx \,=$$

$$= \,-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\partial_i u_i(t,x)\cdot|w|^2(t,x)\,dx \,=\, 0,$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{2}\partial_i u_i(t,x) = \operatorname{div} u(t,x) = 0$.

Отсюда и из равенства (5.36) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w(t,x)\cdot w(t,x)dx + \nu((w(t),w(t))) \,=\, -\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)\,dx.$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 \,+\, \nu\|w(t)\|_V^2 \,\le\, \left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)\,dx\right|. \qquad (5.37)$$

Оценим правую часть неравенства, используя неравенства Шварца,

$$\left|\int\limits_\Omega w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)\,dx\right| = \left|\int\limits_\Omega w_i(t,x)\cdot\partial_i v_j(t,x)w_j(t,x)\,dx\right| \le$$

$$\le \left(\int\limits_\Omega |w_i(t,x)|^2|w_j(t,x)|^2\,dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int\limits_\Omega |\partial_i v_j(t,x)|^2\,dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\int\limits_\Omega |w_i(t,x)|^4\,dx\right)^{1/4}\left(\int\limits_\Omega |w_j(t,x)|^4\,dx\right)^{1/4}\cdot\left(\int\limits_\Omega |\partial_i v_j(t,x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

или

$$\left|\int\limits_\Omega w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)\,dx\right| \le \|w_i(t)\|_{L_4(\Omega)}\cdot\|w_j(t)\|_{L_4(\Omega)}\cdot\|\partial_i v_j(t)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Учитывая, что запись, содержащая повторяющиеся индексы, предполагает суммирование по этим индексам, получаем

$$\left|\int\limits_\Omega w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)\,dx\right| \le \|w(t)\|^2_{(L_4(\Omega))^n}\cdot\|v(t)\|_V.$$

Применим неравенство О.А.Ладыженской и далее неравенство Коши $a\cdot b = \varepsilon a^2 + \dfrac{b^2}{4\varepsilon}$ с $\varepsilon = \dfrac{\nu}{2^{1/2}}$, получим

$$\left|\int\limits_\Omega w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)\,dx\right| \le 2^{1/2}\|w(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}\cdot\|w(t)\|_V\cdot\|v(t)\|_V \le$$

$$\le \nu\|w(t)\|_V^2 + \frac{1}{2^{3/2}\nu}\|v(t)\|^2_{(L_2(\Omega))^n}\cdot\|w(t)\|_V.$$

Подставляя полученное соотношение в неравенство (5.37), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 \le \frac{1}{2^{3/2}\nu}\|w(t)\|_H^2\cdot\|v(t)\|_V.$$

Тогда из неравенство Гронуолла-Беллмана [1, теорема 2, глава IV, с.188] следует

$$\|w(t)\|_H^2 \le \|w(0)\|_H^2\exp\left(\int\limits_0^t \frac{1}{2^{1/2}\nu}\cdot\|v(s)\|_V\,ds\right).$$

Поскольку $w(0) = v(0) - u(0) = 0$, то из полученного выше неравенства приходим к выводу, что $w(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Следовательно, $v = u$ и слабое и полное слабое решение задачи (5.1)-(5.4) единственно. $\square$

6 Сильные решения эволюционной системы уравнений Навье-Стокса

В этой главе приводится простейшее доказательство теоремы существования сильных (обобщенных) решений начально-краевой задачи для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса в случае $n = 2, 3$ при условии малости данных задачи. Кроме того, для размерности $n = 2$ доказана теорема существования сильных решениий без ограничений на величину данных задачи.

6.1 Анизотропные пространства Соболева

Пусть $n = 2, 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса C^2; $Q_T = (0,T)\times\Omega$, где $0 < T < \infty$. В этом разделе приводятся сведения о функциональных пространствах функций $v(t,x)$, определенных на Q_T и имеющих различные свойства относительно переменных t и x.

Для $s > 0$, $1 \le q < \infty$ анизотропное пространство Соболева $W_q^{s,2s}(Q_T)$ определяется соотношением

$$W_q^{s,2s}(Q_T) = L_q(0,T;W_q^{2s}(\Omega)) \cap L_q(\Omega;W_q^s(0,T)).$$

В пространстве $W_q^{s,2s}(Q_T)$ введена норма

$$\|v\|_{W_q^{s,2s}(Q_T)} = \left(\int\limits_0^T \|v(t,\cdot)\|^q_{W_q^{2s}(\Omega)}\,ds + \int\limits_\Omega \|v(\cdot,x)\|^q_{W_q^s(0,T)}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сформулируем необходимые далее теоремы вложения анизотропных пространств Соболева и теоремы о компактности вложения, следуя [23]. (Доказательство можно найти в книге [2].)

Теорема 6.1. *Пусть $s > 0$, $1 < q \le q_i < \infty$, $i = 1, 2$.*
а) Для функций $v \in W_q^{s,2s}(Q_T)$ справедливо неравенство

$$\|v|_{L_{q_1}(0,T;L_{q_2}(\Omega))} \le c\|v\|_{W_q^{s,2s}(Q_T)},$$

если $\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}\right) + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_2}\right) \le s$, где c не зависит от v.

б) Если $\frac{n+2}{2q} < s$, то любая функция $v \in W_q^{s,2s}(Q_T)$ почти всюду в Q_T совпадает с непрерывной функцией, причем

$$\|v\|_{L_\infty(\Omega)} \le c\|v\|_{W_q^{s,2s}(Q_T)},$$

где c не зависит от v.

Теорема 6.2. *Пространство* $C^\infty(Q_T)$ *плотно в* $W_q^{s,2s}(Q_T)$, *где* $1 \le q < \infty$, $s > 0$.

Теорема 6.3. *Пусть* $s > 0$, $1 < q \le q_i < \infty$, $i = 1, 2$.

а) Если $\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{q_1}\right) + \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{q_2}\right) < s$, *то вложение* $W_q^{s,2s}(Q_T) \subset L_{q_1}(0, T; L_{q_2}(\Omega))$ *вполне непрерывно.*

б) Если $\dfrac{n+2}{2q} < s$, *то вложение* $W_q^{s,2s}(Q_T) \subset C(Q_T)$ *вполне непрерывно.*

В случае $q = 2$ анизотропные пространства Соболева и Бесова совпадают и обозначаются $H^{s,2s}(Q_T)$: $H^{s,2s}(Q_T) = W_2^{s,2s}(Q_T)$.

Наряду с этими пространствами мы будем использовать обозначение $H^{1,2}_{(0)}(Q_T)$ для пространства, определяемого соотношением

$$H^{1,2}_{(0)}(Q_T) = L_2(0, T; H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \cap L_2(\Omega; H^1(0, T)).$$

На пространстве $C^\infty(\overline{Q}_T)$ определены операторы взятия следа

$$(\gamma_\tau v)(x) = v(t, x)\,|_{t=\tau}, \qquad \forall \tau \in [0, T]; \qquad\qquad \gamma_{(0,T)\times\Gamma}(v) = v\,|_{(0,T)\times\Gamma}\,.$$

Эти оператора продолжаются на пространство $W_q^{s,2s}(Q_T)$. Сформулируем утверждение о свойствах оператора, необходимое для дальнейшего изложения.

Теорема 6.4. *Операторы* γ_τ *для* $\tau \in [0, T]$ *и* $\gamma_{(0,T)\times\Gamma}$ *продолжаются с пространства* $C^\infty(\overline{Q})$ *на пространство* $H^{1,2}(Q_T)$, *при этом операторы* $\gamma_\tau : H^{1,2}(Q_T) \to H^1(\Omega)$ *и их сужения* $\gamma_\tau : H^{1,2}_{(0)}(Q_T) \to H^1_0(\Omega)$ *непрерывны для любого* $\tau \in [0, T]$. *Кроме того* $\gamma_{(0,T)\times\Gamma}(v) = 0$ *для любого* $v \in H^{1,2}_{(0)}(Q_T)$.

Приведенные утверждения о свойствах анизотропных пространств Соболева без труда обобщаются на случай пространств функций, принимающих значения в $\mathbb{R}^n$.

6.2 Начально-краевая задача для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса

Рассмотрим начально-краевую задачу для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса

$$(\partial_t v + v_i \partial_i v) - \nu \Delta v + \operatorname{grad} p = f, \tag{6.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{6.2}$$

$$v\mid_{t=0} = v^0(x), \quad x \in \Omega, \tag{6.3}$$

$$v|_{(0,T)\times\Gamma} = 0. \tag{6.4}$$

Здесь f, v^0—заданные функции, $f : Q_T \to \mathbb{R}^n$, $f \in (L_2(Q_T))^n$, и $v^0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $v_0 \in V$.

Напомним понятие сильного решения задачи.

Сильным (обобщенным) решением задачи (6.1)-(6.4) называют функции $v \in (L_2(Q_T))^n$, $p \in L_2(Q_T)$, такие что:

1) обобщенные частные производные функций, содержащиеся в равенствах (6.1)-(6.2), принадлежат пространствам $(L_2(Q_T))^n$ и $L_2(Q_T)$, соответственно;

2) при подстановке функций уравнения (6.1)-(6.2) обращаются в равенства в пространствах $(L_2(Q_T))^n$ и $L_2(Q_T)$, соответственно;

3) след функции v при $t = 0$ определен и равен v^0;

4) след функции v определен на границе области Γ и равен 0.

Компоненты сильного решения принадлежат соответственно пространствам

$$(H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n = L_2(0,T;(H^2(\Omega))^n \cap V) \cap L_2(\Omega;(H^1(0,T))^n)$$

и $L_2(0,T,H^1(\Omega))$. Норму функции v в пространстве $(H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n$ определим с помощью равенства

$$\|v\|_{(H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n} = \|v\|_{L_2(0,T;(H^2(\Omega))^n)} + \|v'\|_{(L_2(Q_T))^n}.$$

Введем следующие операторы

$$\mathcal{L} : (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \times L_2(0,T,H^1(\Omega)) \to (L_2(Q_T))^n \times V,$$

$$\mathcal{L}(v,p) = (\partial_t v - \nu\Delta v + \operatorname{grad} p, \gamma_0(v));$$

$$K : (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \times L_2(0,T,H^1(\Omega)) \to (L_2(Q_T))^n \times V, \quad K(v,p) = (v_i\partial_i v, 0).$$

Тогда задача (6.1)-(6.2) эквивалентна операторному уравнению

$$\mathcal{L}(v,p) + K(v,p) = (f, v^0) \tag{6.5}$$

Исследуем свойства операторов, входящих в уравнение.

Теорема 6.5. *Пусть $n = 2, 3$ и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса C^2. Тогда линейный оператор $\mathcal{L}$ непрерывен, обратим и справедлива оценка*

$$\|v\|_{(H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n} + \|p\|_{L_2(0,T,H^1(\Omega))} \le c\|\mathcal{L}(v,p)\|_{(L_2(Q_T))^n \times V} \tag{6.6}$$

с некоторой константой c, не зависящей от v, p.

Утверждение теоремы 6.5 хорошо известно. Доказательство можно найти в работах [21], [25].

Теорема 6.6. *Пусть $n = 2, 3$ и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса C^2. Тогда отображение K вполне непрерывно.*

Доказательство. Введем вспомогательное билинейное отображение

$$k : C([0,T],(L_4(\Omega))^n) \times L_2(0,T,(W^1_4(\Omega))^n) \to (L_2(Q_T))^n, \;\; k(u,v) = u_i\partial_i v.$$

Нетрудно видеть, что определение отображения корректно, и отображение линейно и непрерывно по каждому из аргументов. Кроме того, непосредственной проверкой устанавливается, что данное отображение непрерывно по совокупности переменных.

С помощью теоремы 4.16 покажем, что вложения

$$i : (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \to C([0,T],(L_4(\Omega))^n), \;\; j : (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \to L_2(0,T,(W^1_4(\Omega))^n),$$

вполне непрерывны, поэтому из равенства

$$K(v,p) = (k(i(v),j(v)),0)$$

будет следовать, что отображение K вполне непрерывно.

Покажем компактность вложения

$$i : (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \to C([0,T],(L_4(\Omega))^n)$$

для случая $n = 3$.

Прежде всего, в силу теоремы 1.2 вложение $(W^2_2(\Omega))^n \subset (L_4(\Omega))^n$ вполне непрерывно и из теоремы 1.3 следует, что неравенство

$$\|v\|_{(L_4(\Omega))^n} \le c\|v\|^{\theta}_{(W^2_2(\Omega))^n}\|v\|^{(1-\theta)}_{(L_2(\Omega))^n}$$

справедливо с $\theta = \frac{3}{8}$. Поэтому из второго пункта утверждения теоремы 4.16 следует компактность вложения $i : (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \to C([0,T],(L_4(\Omega))^n)$.

Покажем компактность вложения

$$i : (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \to L_2(0,T,(W^1_4(\Omega))^n)$$

для случая $n = 3$. В силу теоремы 1.2 вложение $(W_2^2(\Omega))^n \subset (W_4^1(\Omega))^n$ вполне непрерывно и из теоремы 1.3 следует, что справедливо неравенство

$$\|v\|_{(W_4^1(\Omega))^n} \le c\|v\|^{\theta}_{W_2^2(\Omega))^n}\|v\|^{(1-\theta)}_{(L_2(\Omega))^n}.$$

с $\theta = \frac{7}{8}$. Поэтому из первого пункта утверждения теоремы 4.16 следует, что $p_\theta = \frac{8}{3}$, и вложение $i : (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \to L_2(0,T,(W_4^1(\Omega))^n)$ компактно.

Компактность указанных вложений в случае $n = 2$ доказывается аналогично. $\square$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\mathcal{L}(\overline{v},\overline{p}) + \lambda\, K(\overline{v},\overline{p}) = (\overline{f},\overline{v}^0), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{6.7}$$

Теорема 6.7. *Существует* $\lambda_0 > 0$ *такое, что для всех* λ, $|\lambda| \le \lambda_0$, *уравнение* (6.7) *имеет решение для любых* $\overline{f} \in (L_2(Q_T))^n$, $\overline{v}^0 \in V$ *с*

$$\|\overline{f}\|_{(L_2(Q_T))^n} + \|\overline{v}^0\|_{(H_0^1(\Omega))^n} \le 1.$$

Доказательство. Преобразуем уравнение (6.7) к виду

$$(\overline{v},\overline{p}) = \mathcal{L}^{-1}((\overline{f},\overline{v}^0) - \lambda\, K(\overline{v},\overline{p})). \tag{6.8}$$

Решением данного уравнения являются неподвижные точки отображения, определяемого правой частью равенства (6.8). Покажем, что это отображение является вполне непрерывным и при подходящем выборе λ_0 применение теоремы Шаудера обеспечивает существование неподвижной точки.

Пусть $R = 2c$, где c — константа из оценки (6.6). Отображение K ограничено на шаре B_R, поэтому существует $\lambda_0 > 0$ такое, что для всех $(\overline{v},\overline{p}) \in B_R$ выполнено $\lambda_0\,\|K(\overline{v},\overline{p})\| \le 1$. Тогда для λ, $|\lambda| \le \lambda_0$, имеем оценку

$$\|\mathcal{L}^{-1}((\overline{f},\overline{v}^0) - \lambda\, K(\overline{v},\overline{p}))\|_{(H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n\times L_2(0,T,H^1(\Omega))} \le$$
$$\le \|\mathcal{L}^{-1}\|\|(\overline{f},\overline{v}^0) - \lambda\, K(\overline{v},\overline{p})\|_{(L_2(Q_T))^n\times V} \le 2c$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L}^{-1}((\overline{f},\overline{v}^0) - \lambda\, K(\overline{v},\overline{p})) \in B_R.$$

В силу теорем 6.5, 6.6 отображение

$$\widetilde{K} : B_R \subset (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \times L_2(0,T,H^1(\Omega)) \to (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \times L_2(0,T,H^1(\Omega)),$$

$$\widetilde{K} : (\overline{v},\overline{p}) \mapsto \widetilde{K}(\overline{v},\overline{p}) = \mathcal{L}^{-1}((\overline{f},\overline{v}^0) - \lambda\, K(\overline{v},\overline{p})),$$

вполне непрерывно и отображает шар B_R в себя. Поэтому из теоремы Шаудера следует существование неподвижной точки отображения $\widetilde{K}$ в шаре B_R. $\square$

Рассмотрим уравнение (6.5). Замена $v = \lambda\overline{v}$, $p = \lambda\overline{p}$, $f = \lambda\overline{f}$, $v^0 = \lambda\overline{v}^0$ и деление полученного равенства на λ приводит это уравнение к виду (6.7). Уравнение (6.7) имеет решение для любых $\overline{f} \in (L_2(Q_T))^n$, $\overline{v}^0 \in V$

$$\|\overline{f}\|_{(L_2(Q_T))^n} + \|\overline{v}^0\|_{(H_0^1(\Omega))^n} \leq 1,$$

для $|\lambda| \leq \lambda_0$. Каждое решение $(\overline{v}, \overline{p})$ уравнения (6.7) определяет решение (v, p) уравнение (6.5). Поэтому уравнение (6.5) имеет решение для любых $f \in (L_2(Q_T))^n$, $v^0 \in V$

$$\|f\|_{(L_2(Q_T))^n} + \|v^0\|_{(H_0^1(\Omega))^n} \leq \lambda_0.$$

Таким образом, утверждение теоремы 6.7 о разрешимости уравнения (6.7) позволяет сформулировать следующее утверждение о разрешимости уравнения (6.5):

Теорема 6.8. *Существует $R_0 > 0$ такое, что для любых правых частей $f \in (L_2(Q_T))^n$ и начальных условий $v^0 \in V$, таких что $\|f\|_{(L_2(Q_T))^n} + \|v^0\|_{(H_0^1(\Omega))^n} \leq R_0$, уравнение (6.5) имеет решение.*

В качестве R_0 достаточно выбрать λ_0 из теоремы 6.7.

6.3 Существование и единственность решений начально-краевой задачи для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса в случае n = 2

Теорема 6.8 гарантирует существование сильных решений начально-краевой задачи (6.1)-(6.4) лишь для "малых" данных. В случае, когда область $\Omega \in \mathbb{R}^2$ можно установить существование решения без этих ограничений на исходные данные задачи.

Основным инструментом для доказательства теоремы существования служат теорема продолжения решений по параметру, основанные на топологической теории степени отображений, и априорные оценки решений. Отличие случая размерности $n = 2$ от других заключается в возможности установить априорные оценки решений задачи.

Рассмотрим семейство начально краевых задач, зависящее от параметра $\lambda \in [0, 1]$

$$(\partial_t v + \lambda v_i \partial_i v) - \nu \Delta v + \operatorname{grad} p = f, \tag{6.9}$$

$$\operatorname{div} v = 0,$$

$$v\,|_{t=0} = v^0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$v|_{(0,T)\times\Gamma} = 0.$$

Это семейство эквивалентно семейству операторных уравнений

$$\mathcal{L}(v,p) + \lambda\, K(v,p) \,=\, (f, v^0), \qquad \lambda \in [0,1]. \tag{6.10}$$

Покажем, что все решения операторных уравнений семейства (6.10) имеют единую априорную оценку.

Теорема 6.9. *Пусть $n = 2$ и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей Γ класса C^2 и $\lambda \in [0,1]$. Тогда для каждого сильного решения (v,p) уравнения* (6.10) *справедлива оценка*

$$\|v\|_{L_2(0,T;(H^2(\Omega))^n)} \,+\, \|v'\|_{(L_2(Q_T))^n} \,+\, \|p\|_{L_2(0,T,H^1(\Omega))} \,<\, R_1 \tag{6.11}$$

с константой R_1, не зависящей от λ, v и p.

Доказательство представим в виде последовательности утверждений, сформулированных в виде лемм и содержащих промежуточные оценки.

Запишем уравнение (6.9) в виде

$$\partial_t v - \nu \Delta v + \operatorname{grad} p = F, \tag{6.12}$$

где $F = f - \lambda v_i \partial_i v$.

Лемма 6.1. *(энергетическая оценка) Пусть $n = 2$, $F \in (L_2(Q_T))^n$ и $v^0 \in V$. Тогда для любого решения (v,p) задачи (6.12),*(6.2)-(6.4) *и каждого $t \in (0,T)$ справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\|v(t)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} \,+\, \|v\|^2_{L_2(0,t;V)} \le \\ \le c_1 \left[\|v^0\|_{(L_2(\Omega))^n} + \int\limits_0^t \|F(s,\cdot)\|_{(L_2(\Omega))^n} ds \right]^2,\end{gathered} \tag{6.13}$$

с константой $c_1 = c_1(T)$, не зависящей от k.

Оценка (6.13) может быть получена скалярным умножением равенства (6.12) на $v(t,\cdot)$ в $(L_2(\Omega))^n$ и интегрированием полученного равенства по переменной t на отрезке $[0,t]$.

Лемма 6.2. *(вспомогательная оценка) Пусть $n = 2$, $F \in (L_2(Q_T))^n$ и $v^0 \in V$. Тогда для любого решения (v,p) задачи (6.12),*(6.2)-(6.4) *и каждого $t \in (0,T)$ справедлива оценка*

$$\mu_0 \|v(t)\|^2_V + \|\partial_t v\|^2_{L_2(0,t;(L_2(\Omega))^n)} \,\le\, \mu_0 \|v^0\|^2_V + \|F\|^2_{L_2(0,t;(L_2(\Omega))^n)}. \tag{6.14}$$

Доказательство. Умножим равенство (6.12) скалярно в $(L_2(\Omega))^n$ на $\partial_t v(t,\cdot)$ и затем проинтегрируем по t на отрезке $[0,t]$. Получим

$$\int_0^t \|\partial_s v(s,\cdot)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} ds + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_s \left\|\frac{\partial v}{\partial x}(s,\cdot)\right\|^2_{(L_2(\Omega))^n} ds -$$

$$-\int_0^t \int_\Omega \partial_s v(s,x)\cdot \operatorname{grad} p(s,x) dx ds = \int_0^t \int_\Omega \partial_s v(s,x)\cdot F(s,x) dx ds.$$

В силу предположения $v(s,\cdot)\in V$ имеем

$$\int_\Omega \partial_s v(s,x)\cdot \operatorname{grad} p(s,x) dx = -\int_\Omega \partial_s(\operatorname{div} v(s,x))\cdot p(s,x) dx = 0$$

для любых $s\in[0,T]$ для v достаточно гладких, а следовательно, и для $v\in (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n$. Тогда оценка преобразуется к виду

$$\frac{\mu_0}{2}\|v(t)\|^2_V + \|\partial_t v\|^2_{L_2(0,t;(L_2(\Omega))^n)} \le \frac{\mu_0}{2}\|v^0\|^2_V +$$

$$+\left(\int_0^t \|F(s,\cdot)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} ds\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^t \|\partial_s v(s,\cdot)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} ds\right)^{1/2}.$$

Применение неравенства Коши с $\varepsilon = 1$ к произведению интегралов в правой части неравенства и стандартные рассуждения приводят к требуемой оценке (6.14). Лемма доказана. □

Лемма 6.3. *(коэрцитивная оценка) Пусть $n=2$, $F\in (L_2(Q_T))^n$ и $v^0\in V$. Тогда для любого решения (v,p) задачи (6.12),* (6.2)-(6.4) *и каждого $t\in(0,T)$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\mu_0\int_0^t \|v(s,\cdot)\|^2_{(W_2^2(\Omega))^n} ds + \int_0^t \|p(s,\cdot)\|^2_{W_2^1(\Omega)} ds \le \\ &\le c_2\cdot\left(\|v^0\|^2_V + \int_0^t \|F(s,\cdot)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} ds\right),\ t\in(0,T),\end{aligned} \tag{6.15}$$

с некоторой константой c_2.

Доказательство. Перенесем слагаемое $\partial_t v$ в правую часть равенства (6.12). Обозначим правую часть через $\hat{F}$, получим стационарное уравнение Стокса

$$-\Delta v + \operatorname{grad} p = \hat{F}.$$

Применим коэрцитивные оценки В.А Солонникова [21, c.989] при каждом фиксированном $t \in [0, T]$:

$$\mu_0 \|v(t,\cdot)\|^2_{(W_2^2(\Omega))^n} + \|p(t,\cdot)\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le c \cdot \|\hat{F}(t,\cdot)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} \le$$
$$\le c \cdot \left(\|F(t,\cdot)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} + \|\partial_t v(t,\cdot)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} \right), \quad t \in (0,T).$$

Интегрируя обе части неравенства по t на отрезке $[0, T]$ приходим к оценке

$$\mu_0 \int\limits_0^t \|v(s,\cdot)\|^2_{(W_2^2(\Omega))^n} ds + \int\limits_0^t \|p(s,\cdot)\|^2_{W_2^1(\Omega)} ds \le$$
$$\le c \left(\int\limits_0^t \|\partial_t v(s,\cdot)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} ds + \int\limits_0^t \|F(s,\cdot)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} ds \right), \ t \in (0,T).$$

Отсюда и из оценок (6.13), (6.14) следует требуемая оценка (6.15). Лемма доказана. □

Лемма 6.4. *Пусть $n = 2$, $f \in (L_2(Q_T))^n$ и $v^0 \in V$. Тогда для любого решения (v, p) задачи (6.9),* (6.2)-(6.4) *и каждого $t \in (0, T)$ справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} + \|v\|^2_{L_2(0,T;V)} \le$$
$$\le c_1 \left[\|v^0\|_{(L_2(\Omega))^n} + \int\limits_0^T \|f(s,\cdot)\|_{(L_2(\Omega))^n} ds \right]^2, \tag{6.16}$$

$$\mu_0 \|v(t)\|^2_V + \|\partial_t v\|^2_{L_2(0,t;(L_2(\Omega))^n)} \le \mu_0 \|v^0\|^2_V + \|f\|^2_{L_2(0,t;(L_2(\Omega))^n)}. \tag{6.17}$$

$$\mu_0 \int\limits_0^t \|v(s,\cdot)\|^2_{(W_2^2(\Omega))^n} ds + \int\limits_0^t \|p(s,\cdot)\|^2_{W_2^1(\Omega)} ds \le$$
$$\le c_2 \cdot \left(\|v^0\|^2_V + \int\limits_0^t \|f(s,\cdot)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} ds \right), \ t \in (0,T), \tag{6.18}$$

Доказательство. Если (v, p) — сильное решение задачи, то, как отмечалось выше, v является слабым решением начально краевой задачи, а для него оценка (6.16) установлена. Достаточно повторить аргументы доказательства оценки (5.24) при $\varepsilon = 0$.

Для того, чтобы получить неравенство (6.17) , оценим $\|K(v)\|^2_{L_2(0,T;(L_2(\Omega))^n)}$. По определению для любого $t \in (0, T)$

$$\int\limits_\Omega |K(v(t))|^2\, dx \le \int\limits_\Omega |v_i(t,x)|^2 |\partial_i v(t,x)|^2\, dx.$$

Отсюда, в силу неравенства Шварца,

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega |K(v(t))|^2\, dx \ &\le \sum_{i=1}^2 \|v_i(t)\|^2_{(L_4(\Omega))^n} \|\partial_i v(t)\|^2_{(L_4(\Omega))^n} \le \\ &\le c_0 \|v_i(t)\|^2_{(L_4(\Omega))^n} \|\mathrm{grad}\, u\|^2_{(L_4(\Omega))^n}\end{aligned}$$

с некоторой константой c. Применим неравенство О.А.Ладыженской

$$\|u\|_{(L_4(\Omega))^n} \le 2^{1/4} \|u\|^{1/2}_{(L_2(\Omega))^n} \cdot \|\mathrm{grad}\, u\|^{1/2}_{(L_2(\Omega))^n},$$

для оценки как первого, так и второго сомножителя. Получим

$$\int\limits_\Omega |K(v(t))|^2\, dx \le \tilde{c} \|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} \cdot \|v(t)\|^2_{(W^1_2(\Omega))^n} \cdot \|v(t)\|_{(W^2_2(\Omega))^n}.$$

Благодаря энергетической оценке (6.16) первый сомножитель $\|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}$ в полученном неравенстве ограничен для всех $t \in [0, T]$. Поэтому применяя неравенства Шварца и Коши, получим для любых $\theta > 0$

$$\begin{aligned}&\|K(v)\|^2_{L_2(0,T;(L_2(\Omega))^n)} \le \\ &\le \tilde{c} \max_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} \int\limits_0^t \|v(s)\|^2_{(W^1_2(\Omega))^n} \cdot \|v(s)\|_{(W^2_2(\Omega))^n} ds \le \\ &\le \tilde{c} \max_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} \left(\int\limits_0^t \|v(s)\|^4_{(W^1_2(\Omega))^n} ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_0^t \|v(s)\|^2_{(W^2_2(\Omega))^n} ds \right)^{1/2} \le \\ &\le \tilde{c} \max_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} \left(\frac{1}{2\theta} \int\limits_0^t \|v(s)\|^4_{(W^1_2(\Omega))^n}\, ds + \frac{\theta}{2} \int\limits_0^t \|v(s)\|^2_{(W^2_2(\Omega))^n} ds \right).\end{aligned}$$

В оценке (6.14) заменим F на $f-K(v)$ и используем полученную оценку $\|K(v)\|^2_{L_2(0,T;(L_2(\Omega))^n)}$. В результате приходим к неравенству

$$\|v(t)\|^2_{(W_2^1(\Omega))^n} + \|v\|^2_{L_2(0,t;(W_2^2(\Omega))^n)} + \|\partial_t v\|^2_{L_2(0,t;(L_2(\Omega))^n)} + \|p\|^2_{L_2(0,t;W_2^1(\Omega))} \leq$$
$$\leq c\left(\|v^0\|^2_{(W_2^1(\Omega))^n} + \|f\|^2_{L_2(0,t;(L_2(\Omega))^n)} + \|K(v)\|^2_{L_2(0,T;(L_2(\Omega))^n)}\right) \leq$$
$$\leq c\left(\|v^0\|^2_{(W_2^1(\Omega))^n} + \|f\|^2_{L_2(0,t;(L_2(\Omega))^n)} + \tilde{c}\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{1}{2\theta}\int\limits_0^t \|v(s)\|^4_{(W_2^1(\Omega))^n}\,ds + \frac{\theta}{2}\int\limits_0^t \|v(s)\|^2_{(W_2^2(\Omega))^n} ds\right)\right)$$

для $\theta > 0$. В силу оценки (6.16) величина $\max\limits_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}$ ограничена. Поэтому выбирая θ таким, что $c\cdot\tilde{c}\cdot\theta\max\limits_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} < 1$, приходим к оценке

$$\|v(t)\|^2_{(W_2^1(\Omega))^n} + \|v\|^2_{L_2(0,t;(W_2^2(\Omega))^n)} + \|\partial_t v\|^2_{L_2(0,t;(L_2(\Omega))^n)} + \|p\|^2_{L_2(0,t;W_2^1(\Omega))} \leq$$
$$\leq 2c\left(\|v^0\|^2_{(W_2^1(\Omega))^n} + \|f\|^2_{L_2(0,t;(L_2(\Omega))^n)}\right) + \frac{1}{\theta^2}\cdot\int\limits_0^t \|v(s)\|^4_{(W_2^1(\Omega))^n}\,ds. \quad (6.19)$$

Из неравенства

$$\|v(t)\|^2_{(W_2^1(\Omega))^n} \leq K + \frac{1}{\theta^2}\cdot\int\limits_0^t \|v(s)\|^4_{(W_2^1(\Omega))^n}\,ds$$

с $K = 2c\left(\|v^0\|^2_{(W_2^1(\Omega))^n} + \|f\|^2_{L_2(0,t;(L_2(\Omega))^n)}\right)$ с помощью оценки Гронуолла-Беллмана [1, теорема 2, глава IV, с.188] получим оценку

$$\|v(t)\|^2_{(W_2^1(\Omega))^n} \leq K\exp\left(\frac{1}{\theta^2}\cdot\int\limits_0^t \|v(s)\|^2_{(W_2^1(\Omega))^n}\,ds\right).$$

В силу оценки (6.16) значения $\int_0^t \|v(s)\|^2_{(W_2^1(\Omega))^n}\,ds$ ограничены для всех $t\in[0,T]$, поэтому

$$\|v(t)\|^2_{(W_2^1(\Omega))^n} \leq c, \qquad \forall t\in[0,T],$$

для некоторой константы c. Подставляя данную оценку в правую часть неравенства (6.19), приходим к требуемой оценке (6.18).

Лемма доказана. $\square$

Таким образом, оценка (6.15) получена и утверждение теоремы 6.9 доказано.

Теорема 6.10. *Пусть $n = 2$ и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей Γ класса C^2. Тогда для любых $f \in (L_2(Q_T))^n$ и $v^0 \in V$ начально-краевая задача* (6.1)-(6.4) *имеет единственное сильное (обобщенное) решение.*

Доказательство. Покажем, что операторное уравнение (6.5)

$$\mathcal{L}(v,p) + K(v,p) = (f, v^0)$$

имеет решение.

Применим оператор $\mathcal{L}^{-1}$ к обеим частям уравнения. Получим эквивалентное операторное уравнение

$$(v,p) = \mathcal{L}^{-1}((f,v^0) - \mathbb{K}(v,p)). \tag{6.20}$$

Обозначим через k отображение, определяемое правой частью уравнения (6.20):

$$k : (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \times L_2(0,T,H^1(\Omega)) \to (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \times L_2(0,T,H^1(\Omega)),$$

$$(v,p) \mapsto \mathcal{L}^{-1}((f,v^0) - \mathbb{K}(v,p)).$$

Тогда уравнение (6.20) можно записать в виде

$$(I-k)\,(v,p) = 0. \tag{6.21}$$

В силу теорем 6.5 и 6.6 отображение k вполне непрерывно как композиция вполне непрерывного отображения $(f,v^0) - \mathbb{K}(v,p)$ и непрерывного оператора $\mathcal{L}^{-1}$. Покажем, что степень Лере-Шаудера $deg_{LS}(I-k, \overline{B}_R, 0)$ для отображения $I-k$ определена на шаре $B_R \subset W$ достаточно большого радиуса R и отлична от нуля. Тогда утверждение теоремы о разрешимости уравнения (6.21) будет следовать из свойства степени Лере-Шаудера.

Рассмотрим вспомогательное семейство операторных уравнений

$$(v,p) = \lambda\mathcal{L}^{-1}((f,v^0) - \mathbb{K}(v,p)), \quad \lambda \in [0,1]. \tag{6.22}$$

Если $(v,p) \in (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \times L_2(0,T,H^1(\Omega))$ — решение одного из уравнений этого семейства, то в силу теоремы 6.9 справедлива оценка

$$\|v\|_{L_2(0,T;(H^2(\Omega))^n)} + \|v'\|_{(L_2(Q_T))^n} + \|p\|_{L_2(0,T,H^1(\Omega))} < R_1$$

с константой R_1, не зависящей от λ, v и p. Поэтому ни одно решение уравнений семейства (6.22) не принадлежит границе шара $B_{R_1} \subset (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \times L_2(0,T,H^1(\Omega))$. Следовательно, отображение

$$I-\lambda k : (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \times L_2(0,T,H^1(\Omega)) \times [0,1] \to (H^{1,2}_{(\sigma)}(Q_T))^n \times L_2(0,T,H^1(\Omega))$$

определяет гомотопию вполне непрерывных векторных полей на B_{R_1}. Поэтому степень $deg_{LS}(I - \lambda k, \overline{B}_{R_1}, 0)$ определена для каждого значения $\lambda \in [0, 1]$ и в силу свойства гомотопической инвариантности степени имеем

$$deg_{LS}(I - k, \overline{B}_{R_1}, 0) = deg_{LS}(I - \lambda k, \overline{B}_{R_1}, 0) = deg_{LS}(I, \overline{B}_{R_1}, 0) = 1,$$

так как $0 \in B_{R_1}$. Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование решения операторного уравнения (6.21), а, следовательно, существование решения задачи (6.1)-(6.4).

Каждое сильное решение является полным слабым решением, поэтому единственность сильного решения следует из теоремы 5.6 о единственности слабого решения.

$\square$

Список литературы

[1] Буккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.:Мир. 1965. - 276с.

[2] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1975. 480с.

[3] Вишик М.И., Фурсиков А.В. Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980. 440с.

[4] Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336с.

[5] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции. Вып.1. М: Физматгиз. 1959.

[6] Гольдштейн Р.В., Городцов В.А. Механика сплошных сред. Часть I. Наука. Физматлит. 2000. 256с.

[7] Дмитриенко В.Т., Звягин В.Г. О разрешимости краевой задачи для одной математической модели стационарных течений нелинейно-вязкой жидкости // Матем. заметки, 2001. т.69, в.6, с. 843-853.

[8] Звягин В.Г. О разрешимости некоторых начально-краевых задач для математических моделей движения нелинейно вязких и вязкоупругих жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления, 2003, т.2, С.57-69.

[9] Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. О слабых решениях начально-краевой задачи для уравнения движения вязкоупругой жидкости // Доклады РАН. 2001. т.380, №3, с.308-311.

[10] Иосида К. Функциональный анализ. М:Мир. 1967.

[11] Крейн С.Г. О функциональных свойствах операторов векторного анализа в гидродинамике.// Докл. АН СССР. 1953. т.93, №6, с.969-972.

[12] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука. Главная редакция физико-математическиой литературы, 1970. 288с.

[13] Ладыженская О.А. О связи задачи Стокса и разложений пространств $H_0^1(\Omega)$ и $(H^{-1}(\Omega))^n$. // Алгебра и анализ, 2001. т.13, в.4, с.119-133.

[14] Ладыженская О.А., Солонников В.А. О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье-Стокса.//Зап.научн.семинаров ЛОМИ, 1976. т.59, с.81-116.

[15] Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Москва, Изд-во: Мир. 1972. 587с.

[16] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Москва: Мир. 1971. 372с.

[17] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат. лит. 1974. 480с.

[18] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир. 1985. 590с.

[19] Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат. лит. - 1990. 448с.

[20] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд. М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат. лит. 1988. 336с.

[21] Солонников В.А. Оценки решений нестационарной системы Навье-Стокса.//Зап.научн.семинаров ЛОМИ,т.38. Краевые задачи мат. физики и смежные вопросы теории функций. 7. Наука, Ленинград. 1973, с.153-231.

[22] Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1987. 408с.

[23] Фаддеев Д.К., Вулих Б.З., Уральцева Н.Н. и др. Избранные главы анализа и высшей алгебры: Учебное пособие. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1981. 200 с.

[24] Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352с. (Университетская серия. т.5)

[25] Юдович В.И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Изд-во Ростовского университета, 1984, 192с.

[26] Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т.1. Теория распределений и анализ Фурье. Москва: Мир. 1996. 464с.

[27] Agranovich Yu., Zvyagin V. Investigations of properties of attractors for a regularized model of the motion of a nonlinear-viscous fluid // Int. J. Math. Game Theory Algebra. 2002. v.12, no.1, pp.71–87.

[28] Constantin P., Foias C. Navier-Stokes equations. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press. Chicago. IL, 1988. 190pp.

[29] Dmitrienko V, Kirane M. and Zvyagin V. On weak solutions for generalized Oldroyd model for laminar and turbulent flows of nonlinear viscous-elastic fluid.// Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications, 2003. v.53, no.2, pp.197-226.

[30] Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. The topological degree method for equations of the Navier-Stokes type // Abstracts and Applied Analysis, 1997. v.2, no.1-2, pp.1-45.

[31] Hopf E. Statistical hydrodynamics and functional calculus.//J. Rat. Mech. Anal., 1952., v.1, no.1, 87-123.

[32] Obukhovskii V., Zecca P. and Zvyagin V. Optimal Feedback Control in the Problem of the Motion of a Viscoelastic Fluid. //Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2004.

[33] Simon J. Equations de Navier-Stokes. Cours de DEA, 2002-2003.

[34] Simon J. Compact sets in $L_p(0,T;B)$. Ann. Mat. Pura Appl. ser.IV. 1987. v.CXLVI, pp.65-96.

[35] Tartar L. Topics in nonlinear analysis. Publications mathematiques d'Orsay. 1978.

[36] Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G. On the existence of weak solutions for the initial-boundary value problem in the Jeffreys model of motion of a viscoelastic medium. //Abstract and Applied Analysis, 2004.

[37] von Wahl W. The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations. Aspects of Mathematics. E8. Friedr. Vieweg & Sohn. Braunscveig. 1985. 264pp.