Содержание

1 Эволюционная система уравнений Навье-Стокса

1.1 Понятие слабого решения

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n, где $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0; \tag{2}$$

$$v|_{t=0} = v_0; \tag{3}$$

$$v|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Здесь $v = (v_1(t,x), \ldots, v_n(t,x))$ — вектор-функция скорости движения частицы жидкости, $p = p(t,x)$ — функция давления, $f = f(t,x)$ — вектор-функция плотности внешних сил, $\nu > 0$ — коэффициент вязкости. $\Delta v = (\Delta v_1, \ldots, \Delta v_n)$, $\Delta v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_n^2}$; $\operatorname{div} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n}$; $\nabla p = (\frac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x_n})$.

Сформулируем определение сильного решения рассматриваемой задачи (1)-(4). Для этого введем необходимые функциональные пространства:

$L_p(\Omega)$ — множество измеримых функций, суммируемых с p-ой степенью, где $1 \le p < \infty$, и нормой является $\|v\|_{L_p(\Omega)} = (\int\limits_{\Omega} |v(x)|^p dx)^{1/p}$.

Пространство $L_\infty(\Omega)$ состоит из измеримых существенно ограниченных функций $v : \Omega \to R^n$. Функция $v : \Omega \to R^n$ называется существенной ограниченной, если существует число $C_1 < \infty$, что $\|v(x)\| \le C_1$ при почти всех $x \in \Omega$. Норма в $L_\infty(\Omega)$ задается $\|v\|_{L_\infty(\Omega)} = ess \sup\limits_{x\in\Omega} \|v(x)\|$.

$W_p^m(\Omega)$ — где $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, пространство Соболева, состоящее из функции, которые со своими обобщенными частными производными до порядка m включительно принадлежат пространству $L_p(\Omega)$,

$\|v\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$

$C_0^\infty(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на Ω со значениями в R^n и с компактным носителем, содержащимся в Ω.

ν — множество функций $v \in C_0^\infty(\Omega)$, таких что $\operatorname{div} v = 0$;

H — замыкание ν по норме пространства $L_2(\Omega)$;

V — замыкание ν по норме пространства $W_1^1(\Omega)$;

$L_p(a,b;X)$ — где $1 \leq p < \infty$ пространство суммируемых с p-ой степенью функций на $[a,b]$ со значениями в банаховом пространстве X. Норма пространства $L_p(a,b;X)$ задается $\|v\|_{L_p(a,b;X)} = (\int_0^T \|v(s)\|_X^p ds)^{1/p}$.

Через $L_\infty(a,b;X)$ будем обозначать множество всех измеримых существенно ограниченных функций $v : [a,b] \to X$. Множество $L_\infty(a,b;X)$ является банаховым пространством относительно нормы $\|v\|_{L_\infty(a,b;X)} = ess \underset{x\in\Omega}{sup} \|v(s)\|_X$.

Будем обозначать E^* сопряженное пространство к пространству E.

$< f, \varphi >$ — обозначим действие функционала f из E^* на элемент φ из E.

C_i — будем обозначать положительные константы.

Пусть f и v_0 — заданные функции, где $f \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ и $v_0 \in V$.

Определение 1.1. *Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций $v \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ и $p \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1. обобщенные частные производные функций, содержащихся в равенствах (1)-(2), принадлежат пространству $L_2(0,T;L_2(\Omega))$;

2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве $L_2(0,T;L_2(\Omega))$;

3. функция v удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Введем понятие слабого решения. Для этого пусть v и p — сильное решение задач (1)-(4).

Чтобы обеспечить понимание определения слабого решения, мы временно предположим, что $v = v(t,x)$ и $p = p(t,x)$ являются, фактически, гладкими решениями задачи. Сопоставим функции v отображение $v : [0,T] \to W_2^1(\Omega)$, определенное по формуле

$$[v(t)](x) = v(t,x), t \in [0,T], x \in \Omega.$$

Другими словами, v рассматривается не как функции переменных t и x, а как функция переменной t, определенная на отрезке $[0,T]$ и принимающая значения в функциональном пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Аналогично определим $p : [0,T] \to L_2(\Omega)$ по формуле

$$[p(t)](x) = p(t,x), t \in [0,T], x \in \Omega$$

и функцию $f : [0,T] \to L_2(\Omega)$ по формуле

$$[f(t)](x) = f(t,x), t \in [0,T], x \in \Omega.$$

Умножая равенство (1) при фиксированных значениях $t \in [0,T]$ на функцию $\varphi(x) \in V$ скалярно в $L_2(\Omega)$, получим

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t}\, \varphi dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\, \varphi dx -$$

$$-\nu \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i}\, \varphi_i dx = \int\limits_{\Omega} f \varphi dx.$$

Выполним преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям [1]

$$-\nu \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx = \nu \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx.$$

[1] Метод интегрирования по частям.

Здесь символ «:» обозначает покомпонентное матричное произведение, т. е. для $C=(c_{ij}), D=(d_{ij}), i,j=1,\ldots,m$, имеем $C:D=\sum\limits_{i,j=1}^{m} c_{ij}d_{ij}$

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial p}{\partial x_i}\varphi_i dx=-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}p\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}dx=\int\limits_{\Omega}p\ div\ \varphi\ dx=0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\varphi dx=-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v\frac{\partial}{\partial x_i}(v_i\varphi)dx=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\varphi dx-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}vv_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=$$

$$=-\int\limits_{\Omega}v\ \varphi\ div\ v\ dx-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_iv\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_iv\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx.$$

Таким образом, приходим к равенству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}v\varphi dx-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_iv\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx+\nu\int\limits_{\Omega}\nabla v:\nabla\varphi dx=\int\limits_{\Omega}f\varphi dx. \qquad (5)$$

Заметим, что равенство (5) может выполняться и при более слабых требованиях на функцию $v(t,x)$. Покажем, что достаточно предполагать, что $v\in L_2(0,T;V)$ для того, чтобы каждый интеграл, входящий в равенство (5), имел смысл.

В силу теоремы вложений Соболева[2]

вложение $W_2^1(\Omega)\subset L_4(\Omega)$ непрерывно при $n\leqslant 4$. Поэтому, так как $V\subset W_2^1(\Omega)$, то $v_i(t,x)v(t,x)\in L_2(\Omega)$ и $v_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\in L_1(\Omega)$ при каждом фиксированном значении t. Следовательно, интеграл $\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_iv\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx$ определен.

Кроме того, это слагаемое определяет линейный непрерывный функцио-

[2] Пусть $p_1\geq p$ и æ$(W_{p_1}^{m_1}(\Omega))>$ æ$(W_p^m(\Omega))$, то пространство $W_p^m(\Omega)$ компактно вложено в пространоство $W_{p_1}^{m_1}(\Omega)$, где æ$(W_p^m(\Omega))=\frac{n}{p}-m$.

нал на V. Обозначим этот функционал через $K(v)$:

$$\langle K(v), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Отметим, что $\int\limits_{\Omega} v\varphi dx \in L_2(0,T)$ и производная в выражении $\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx$ понимается в смысле распределений на интервале $(0,T)$. Поэтому равенство (5) выполняется в смысле распределений. Все слагаемые равенства, исключая первое, принадлежат пространству $L_1(0,T)$, поэтому $\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx \in L_1(0,T)$ и равенство (5) выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$.

Подводя итог рассуждениям, приходим к следующему определению слабого решения.

Определение 1.2. *Пусть $f \in L_2(0,T; L_2(\Omega))$ и $v_0 \in H$. Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция $v \in L_2(0,T;V)$, удовлетворяющая для всех $\varphi \in V$ и для почти всех значений $t \in (0,T)$ равенству*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi dx \qquad (6)$$

и условию

$$v(0) = v_0. \qquad (7)$$

Выше показано, что равенство (6) корректно для $v \in L_2(0,T;V)$ и если (v,p) сильное решение задачи (1)-(4), то v является слабым решением. Поэтому задачу о поиске сильных решений заменим задачей об исследовании слабых решений.

Заметим, однако, что для функции $v \in L_2(0,T;V)$ условие (7) не имеет смысла, так как не определено значение функции $v(t)$ в каждой точке $t \in (0,T)$. Покажем, что функция $v(t)$, удовлетворяющая равенству (6), является непрерывной на $[0,T]$ со значениями в V^* и слабо непрерывной со значениями в H. Поэтому равенство (7) имеет смысл и определение слабого решения корректно.

Преобразуем равенство (6). Скалярное произведение $(v(t),\varphi)_{L_2(\Omega)}$ определяет линейный непрерывный функционал на H, а следовательно, элемент из H^*. Учитывая отождествление $H \equiv H^*$ и цепочку вложений $V \subset H \subset H^* \subset V^*$, элемент $v(t)$ можно рассматривать как функционал на V, действие которого на функцию $\varphi \in V$ определяется равенством $\langle v(t), \varphi\rangle = (v(t), \varphi)_{L_2(\Omega)}$.Тогда можно считать, что функция $v(t)$ на $[0, T]$ принимает значения в V^* и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx = \frac{d}{dt}\langle v(t), \varphi\rangle.$$

С учетом введенных обозначений равенство (6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), \varphi\rangle - \nu\langle \Delta v(t), \varphi\rangle - \langle K(v(t)), \varphi\rangle = \langle f(t), \varphi\rangle,$$

где $\Delta : V \to V^*$, обозначает оператор Лапласа, действующий по правилу $\langle \Delta v(t), \varphi\rangle = -\int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla\varphi dx$. Или можно (6) переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), \varphi\rangle = \langle \nu\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), \varphi\rangle. \tag{8}$$

Исследуем свойства операторов, входящих в правую часть равенства.

Лемма 1.1.

1. *Оператор* $\Delta : L_2(0, T; V) \to L_2(0, T; V^*)$ *линейный и непрерывный, причем*

$$\|\Delta v\|_{L_2(0,T;V^*)} = \|v\|_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0, T; V^*). \tag{9}$$

2. *Оператор* $K : L_2(0, T; V) \to L_1(0, T; V^*)$ *непрерывен и справедлива оценка*

$$\|K(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_2\|v\|^2_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0, T; V^*), \tag{10}$$

для некоторой константы C_2.

Доказательство. Покажем, что оператор $\Delta : V \to V^*$ линейный. Для этого возьмем v и $u \in V$ и применим к ним оператор Лапласа

$$\Delta(\alpha v + \beta u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\alpha v_i + \beta u_i) = \alpha \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} + \beta \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}.$$

Заметим, что оператор $\Delta : V \to V^*$ определяет изометрию пространств. Действительно:

$$\|\Delta v\|_{V^*} = \sup_{\varphi \in V} \frac{|\langle \Delta v, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_V} = \sup_{\varphi \in V} \frac{\left| \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx \right|}{\|\varphi\|_V} \leq \sup_{\varphi \in V} \frac{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)}}{\|\varphi\|_V} \leq$$

$$\leq \sup_{\varphi \in V} \frac{\|v\|_V \|\varphi\|_V}{\|\varphi\|_V} = \|v\|_V$$

То есть $\|\Delta v\|_{V^*} \leq \|v\|_V$. С другой стороны, положим $\varphi = v$:
$|\langle \Delta v, v \rangle| = |\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v dx| = \|v\|_V^2$.
Применим неравенство Коши-Буняковского $\|v\|_V^2 = |\langle \Delta v, v \rangle| \leq \|\Delta v\|_{V^*} \|v\|_V$. Сократив на $\|v\|_V$, получим $\|\Delta v\|_{V^*} \geq \|v\|_V$. Следовательно получаем $\|\Delta v\|_{V^*} = \|v\|_V$. Заметим, что линейный ограниченный оператор является непрерывным.
Отсюда для $v \in L_2(0, T; V)$ имеем $\|\Delta v\|_{V^*} = \|v(t)\|_V$ для почти всех $t \in [0, T]$. Так как $\|v(t)\|_V \in L_2(0, T)$, то $\|\Delta v(t)\|_{V^*} \in L_2(0, T)$. Следовательно, $\Delta v \in L_2(0, T; V^*)$ и справедливо равенство (9). Таким образом, линейный оператор Δ определяет изометрию пространств $L_2(0, T; V)$ и $L_2(0, T; V^*)$.

2) По определению оператора K для любых $v, \varphi \in V$ действует по правилу

$$\langle K(v), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx.$$

Значит для любого $v \in V$ получим

$$\left| \langle K(v), \varphi \rangle \right| \leq \left| \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq$$

$$\leq (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left| v_i v_j \right|^2 dx)^{1/2} (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx)^{1/2} \leq$$

$$\leq (\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left| v_i \right|^4 dx)^{1/4} (\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left| v_j \right|^4 dx)^{1/4} (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx)^{1/2} \leq \|v\|^2_{L_4(\Omega)} \|\varphi\|_V.$$

По теореме вложения Соболева вложение $V \in L_4(\Omega)^n$ непрерывно для $n \leq 4$, поэтому, $\|v\|_{L_4(\Omega)^n} \leq C_3 \|v\|_V$ и, следовательно, $\|K(v)\|_{V^*} \leq C_3^2 \|v\|_V^2$. Отсюда для $v \in L_2(0,T;V)$ имеем $K(v) \in L_1(0,T;V^*)$ и

$$\|K(v)_{L_1(0,T;V^*)}\| \leq \int\limits_0^T \|K(v(t))\|_{V^*} dt \leq C_3^2 \int\limits_0^T \|v(t)\|_V^2 dt = C_3^2 \|v(t)\|^2_{L_2(0,T;V)}.$$

Докажем непрерывность оператора K. Для любых функций $v, u \in L_2(0,T;V)$ справедлива оценка

$$\int\limits_0^T \|K(v) - K(u)\|_{V^*} dt \leq \int\limits_0^T (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (v_i v_j - u_i u_j)^2 dx)^{1/2} dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^T (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (v_i(v_j - u_j) + (v_i - u_i) u_j)^2 dx)^{1/2} dt \leq$$

$$\leq \sqrt{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_0^T (\int\limits_{\Omega} v_i^2 (v_j - u_j)^2 dx)^{1/2} + (\int\limits_{\Omega} (v_i - u_i)^2 u_j dx)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_0^T (\|v_i\|_{L_4(\Omega)} \|v_j - u_j\|_{L_4(\Omega)} + \|v_i - u_i\|_{L_4(\Omega)} \|u_j\|_{L_4(\Omega)}) dt \leq$$

$$\leq C_2 (\|v\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} + \|u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}) \|v - u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}$$

. Отсюда, если $\|v - u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \to 0$, то $\|K(v) - K(u)\|_{L_1(0,T;L)} \to 0$. Поэтому отображние K непрерывно.

$\square$

По утверждению леммы $\nu \Delta v \in L_2(0,T;V^*), K(v) \in L_1(0,T;V^*)$, поэтому $\nu \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t) \in L_1(0,T;V^*)$. Тогда из равенства (8) и теоремы

[3] следует:

1. что функция $v(t)$ имеет суммируемую производную $v'(t)$;

2. в силу равенства $\frac{d}{dt}\langle\phi, u(t)\rangle = \langle\phi, g(t)\rangle$;

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), \varphi\rangle = \langle v'(t), \varphi\rangle;$$

3. равенство $\frac{d}{dt}\langle v(t), \varphi\rangle = \langle \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), \varphi\rangle$ можно записать в виде

$$v'(t) = \nu\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t).$$

Подводя итог рассуждений, отметим, что так как $v'(t) \in L_1(0, T; V^*)$, в силу леммы

Лемма 1.2. *Для* $p_0 \geq 1, p_1 \geq 1$ *имеет место вложение* $W_{p_0,p_1} = v \in L_{p_0}(a, b, X_0)$, $C([a, b], X_1)$ *и это вложение непрерывно.*

поэтому функция $v(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$ со значениями в V^*. Кроме того, в виду леммы

Лемма 1.3. *Пусть* X *и* Y *— банаховы пространства, такие, что* X *— рефлективно и вложение* $X \subset Y$ *непрерывно. Если функция* $v \in L_\infty(a, b; X)$ *слабо непрерывна как функция со значениями в* Y*,то и слабо непрерывна и как функция со значениями в* X*.*

[3] Th Пусть X — банахово пространство с сопряженным X^* и функции u, g принадлежат пространству $L_1(a, b, X)$. Тогда следующие три условия эквивалентны:
(a) функция $u(t)$ почти всюду равна первообразной от $g(t)$ и для п.в. $t \in [a, b]$

$$u(t) = \xi + \int_a^b g(s)ds, \xi \in X;$$

(b) для каждой пробной функции $\eta \in \mathcal{D}(a, b)$

$$\int_a^b u(t)\eta'(t)dt = -\int_a^b g(t)\eta(t)dt;$$

(c) для каждого $\phi \in X^*$

$$\frac{d}{dt}\langle\phi, u(t)\rangle = \langle\phi, g(t)\rangle$$

в смысле скалярных распределений на (a, b). Если условия (a)-(c) выполнены, то u, в частности, почти всюду равна некоторой непрерывной функции.

, если функция $v \in L_\infty(0, T; H)$, то эта функция слабо непрерывна со значениями в H. Поэтому начальное условие (7) имеет смысл.

Переформулируем понятие слабого решения

Определение 1.3. *Пусть $n \le 4$, $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $v \in H$. Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция $v \in L_2(0, T; V) \cap L_\infty(0, T; H) \subset$ $v\prime \in L_1(0, T; V^*)$, удовлетворяющая равенству при почти всех значений $t \in (0, T)$*

$$v'(t) - \nu \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \tag{11}$$

и начальному условию

$$v(0) = v_0. \tag{12}$$

Теорема 1.1. *Пусть $n = 2, 3$. Для каждой функции $f \in L_2(0, T; V^*)$ и $v_0 \in H$ начально-краевая задача (1)-(4) имеет хотя бы одно слабое решение v.*

1.2 О единственности слабого решения в случае $n = 2$

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о единственности слабого решения начально-краевой задачи (1)-(4) для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса. Покажем, что в случае $\Omega \subset R^2$ слабое решение начально-краевой задачи единственно. Однако для размерности $n > 2$ аналогичное утверждение неверно. Примером, показывающим, что слабое решение задачи не единственно, служит результат о бифуркации решений, содержащийся, например, в [22, гл.II, §4,п.4.4].

Сформулируем и докажем утверждение о единственности слабого решения в случае $n = 2$, следуя [22, гл.III, §3, теорема 3.2].

Теорема 1.2. *Пусть Ω ограниченная область в R^2 с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда слабое решение v решение задачи (1)-(4) единственно.*

Доказательство. Покажем единственность слабого решения. Предположим, что u и v – слабые решения начально-краевой задачи (1)-(4). Значит, для этих функций выполнено операторное равентво (11). Рассмотрим разность полученных равенств. Для разности $w = v - u$ получим равенство

$$w' - \nu \Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0$$

Применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции $w(t)$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w(t,x)w(t,x)dt+\nu\int\limits_{\Omega}\nabla w(t,x):\nabla w(t,x)dx=\\=\int\limits_{\Omega}\frac{\partial v_i}{\partial t}\cdot v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\cdot\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx\end{gathered}\tag{13}$$

Оценим правую часть полученного равенства.

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial v_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\frac{\partial v_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t}\cdot v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial t}w(t,x)\cdot\frac{\partial w_i(t,x)}{\partial x_i}dx$$

Используем интегрирование по частям для вычисления первого интеграла

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t}v(t,x)\cdot w(t,x)=-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t}\cdot\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx$$

так как $\partial_i w_i(t,x)=\text{div }w(t,x)=0$. Используем интегрирование по частям для вычисления второго из интегралов

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}w(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx=\sum_{i=0}^{n=2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\mid w\mid^2(t,x)}{\partial x_i}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n=2}\frac{\partial^2\varphi_i(t,x)}{\partial t\partial x_i}\cdot\mid w\mid^2(t,x)dx=0$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{2}\partial_i\varphi_i(t,x)=\mathrm{div}\varphi(t,x)=0$ Отсюда и из равенства (13) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w(t,x)w(t,x)dx+v(w(t,x)w(t,x))=$$

$$=-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t}\cdot\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2+v\|w(t)\|_H^2=\left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)dx\right| \tag{14}$$

Оценим правую часть неравенства, используя неравенства Шварца,

$$\left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)dx\right|=\left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\cdot\partial_j(t,x)w_j(t,x)dx\right|\leq$$

$$\left(\int\limits_{\Omega}\mid w_i(t,x)\mid^2 |w_j(t,x)\mid^2 dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int\limits_{\Omega}\mid \partial_i v_j(t,x)\mid^2 dx\right)^{1/2}\leq$$

$$\left(\int\limits_{\Omega}\mid w_i(t,x)\mid^4 dx\right)^{1/4}\left(\int\limits_{\Omega}\mid w_j(t,x)\mid^4 dx\right)^{1/4}\cdot\left(\int\limits_{\Omega}\mid \partial_i v_j(t,x)\mid^2 dx\right)^{1/2}$$

или

$$\left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)dx\right|\leq$$

$$\leq\|w_i(t)\|_{L_4(\Omega)}\cdot\|w_j(t)\|_{L_4(\Omega)}\cdot\|\partial_i v_j(t)\|_{L_2(\Omega)}$$

Учитывая, что запись, содержащая повторяющиеся индексы, предполагает суммирование по этим индексам, получаем

$$\left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)dx\right|\leq\|w(t)\|^2_{(L_4(\Omega))^n}\cdot\|v(t)\|_V$$

Применим неравенство О.А. Ладыженской и далее неравенство Коши

$a \cdot b = \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} c\varepsilon = \frac{v}{2^{1/2}}$, получим

$$\left| \int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x) dx \right| \leq$$

$$\leq 2^{1/2} \|w(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} \cdot \|w(t)\|_V \cdot \|v(t)\|_V \leq$$

$$\leq v\|w(t)\|_V^2 + \frac{1}{2^{3/2} v} \|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}^2 \cdot \|w(t)\|_V$$

Подставляя полученное соотношение в неравенство (14), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2^{3/2} v} \|w(t)\|_H^2 \cdot \|v(t)\|_V$$

Тогда из неравенство Гронуолла-Беллмана [1, теорема 2б глава IV, с.188] следует

$$\|w(t)\|_H^2 \leq \|w(0)\|_H^2 \exp\left(\int_0^t \frac{1}{2^{1/2} v} \cdot \|v(s)\|_V ds \right)$$

Поскольку $w(0) = v(0) - u(0) = 0$, то из полученного выше неравенства приходим к выводу, что $w(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Следовательно, $v = u$ и слабое и полное слабое решение задачи (1)-(4) единственно. $\square$

Список литературы

1. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. — М., 1987. — с. 261—262.
2. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. — М., 1987. — с. 226—232.