

«Изучение единственности слабых решений системы Навье-Стокса»

Мукасева Дарья Александровна

22.06.2020

Бакалаврская работа
Направление 01.03.01 Математика
Профиль Математическое моделирование
Руководитель: Звягин Андрей Викторович

Понятие слабого решения

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n , где $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0; \quad (2)$$

$$v|_{t=0} = v_0; \quad (3)$$

$$v|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Определение сильного решения

Определение

Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций $v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $p \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1 обобщенные частные производные функций, содержащихся в равенствах (1)-(4), принадлежат пространству $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;
- 2 при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;
- 3 функция v удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Определение слабого решения

Определение

Пусть $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $v_0 \in H$. Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция $v \in L_2(0, T; V)$, удовлетворяющая для всех $\varphi \in V$ и для почти всех значений $t \in (0, T)$ равенству

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad (5)$$

и условию

$$v(0) = v_0. \quad (6)$$

Доказательство линейности и непрерывности оператора $\Delta : L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*)$

Лемма

- ❶ Оператор $\Delta : L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*)$ линейный и непрерывный, причем

$$\|\Delta v\|_{L_2(0, T; V^*)} = \|v\|_{L_2(0, T; V)}, \quad \forall v \in L_2(0, T; V^*). \quad (7)$$

- ❷ Оператор $K : L_2(0, T; V) \rightarrow L_1(0, T; V^*)$ непрерывен и справедлива оценка

$$\|K(v)\|_{L_1(0, T; V^*)} \leq C_2 \|v\|_{L_2(0, T; V)}^2, \quad \forall v \in L_2(0, T; V^*), \quad (8)$$

для некоторой константы C_2 .

$$\langle K(v), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Полученные результаты

Лемма

Для $p_0 \geq 1$, $p_1 \geq 1$ имеет место вложение

$W_{p_0, p_1} = \{v \in L_{p_0}(a, b, X_0), v' \in L_{p_0}(a, b, X_0)\} \subset C([a, b], X_1)$ и это вложение непрерывно.

Лемма

Пусть X и Y — банаховы пространства, такие, что X — рефлексивно и вложение $X \subset Y$ непрерывно. Если функция $v \in L_\infty(a, b; X)$ слабо непрерывна как функция со значениями в Y , то и слабо непрерывна и как функция со значениями в X .

Определение слабого решения

Определение

Пусть $n \leq 4$, $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $v \in H$. Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция $v \in L_2(0, T; V) \cap L_\infty(0, T; H)$ и условию $v' \in L_1(0, T; V^*)$, удовлетворяющая при почти всех значениях $t \in (0, T)$ равенству

$$v'(t) - \nu \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \quad (9)$$

и начальному условию

$$v(0) = v_0. \quad (10)$$

Для системы уравнений Навье-Стокса (1)-(4) Ж. Лере в 1934 был получен следующий результат:

Теорема

Пусть $n = 2, 3$. Для каждой функции $f \in L_2(0, T; V^*)$ и $v_0 \in H$ начально-краевая задача (1)-(4) имеет хотя бы одно слабое решение v .

Единственность слабого решения

Теорема

Пусть Ω ограниченная область в R^2 с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда слабое решение v решение задачи (1)-(4) единственно.

$$v'(t) - \nu \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \quad (11)$$

Оценка из доказательства

$$w' - \nu \Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_H^2 + \nu \|w(t)\|_V^2 \leq \left| \sum_{i=1}^{n=2} \int_{\Omega} w_i(t, x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx \right|. \quad (13)$$

$$\|w(t)\|_H^2 \leq \|w(0)\|_H^2 \exp \left(\int_0^t \frac{1}{2^{1/2} \nu} \|v(s)\|_V ds \right). \quad (14)$$

Спасибо за внимание!