«Изучение единственности слабых решений системы Навье-Стокса»

Мукасеева Дарья Александровна

22.06.2020

Бакалаврская работа
Направление 01.03.01 Математика
Профиль Математическое моделирования

Понятие слабого решения

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n, где $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0; \tag{2}$$

$$v\big|_{t=0} = v_0; \tag{3}$$

$$v\big|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Введение необходимых функциональных пространств

$L_p(\Omega)$ — множество измеримых функций, суммируемых с p-ой степенью, где $1 \le p < \infty$, и нормой $\|v\|_{L_p(\Omega)} = (\int\limits_{\Omega} |v(x)|^p dx)^{1/p}$.

Пространство $L_\infty(\Omega)$ состоит из измеримых существенно ограниченных функций $v : \Omega \to R^n$. Функция $v : \Omega \to R^n$ называется существенной ограниченной, если существует число $C_1 < \infty$, что $|v(x)| \le C_1$ при почти всех $x \in \Omega$. Норма в $L_\infty(\Omega)$ задается $\|v\|_{L_\infty(\Omega)} = ess \sup\limits_{x\in\Omega} |v(x)|$.

$W_p^m(\Omega)$ — где $m \geqslant 1,\ p \geqslant 1$, пространство Соболева, состоящее из функции, которые со своими обобщенными частными производными до порядка m включительно принадлежат пространству $L_p(\Omega)$.

Норма в $W_p^m(\Omega)$ задается $\|v\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha v(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

Введение необходимых функциональных пространств

$L_p(a,b;X)$ — где $1 \le p < \infty$ пространство суммируемых с p-ой степенью функций на $[a,b]$ со значениями в банаховом пространстве X. Норма пространства $L_p(a,b;X)$ задается $\|v\|_{L_p(a,b;X)} = (\int\limits_0^T \|v(s)\|_X^p ds)^{1/p}$.

Через $L_\infty(a,b;X)$ будем обозначать множество всех измеримых существенно ограниченных функций $v : [a,b] \to X$. Множество $L_\infty(a,b;X)$ является банаховым пространством относительно нормы $\|v\|_{L_\infty(a,b;X)} = ess \sup\limits_{x\in\Omega} \|v(s)\|_X$.

Введем определение сильного решения

Определение

Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций $v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ *и* $p \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$*, удовлетворяющих следующим условиям:*

1. обобщенные частные производные функций, содержащихся в равенствах (1)-(4), принадлежат пространству $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;
2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;
3. функция v удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Понятие слабого решения

Введем понятие слабого решения. Для этого пусть v и p — сильное решение задач (1)-(4). Сопоставим функции v отображение $v : [0, T] \to W_2^1(\Omega)$, определенное по формуле

$$[v(t)](x) = v(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Аналогично определим $p : [0, T] \to L_2(\Omega)$ по формуле

$$[p(t)](x) = p(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega$$

и функцию $f : [0, T] \to L_2(\Omega)$ по формуле

$$[f(t)](x) = f(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Понятие слабого решения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f;$$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t}\ \varphi dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\ \varphi dx -$$

$$-\nu \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i}\ \varphi_i dx = \int\limits_{\Omega} f \varphi dx.$$

Выполним преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям

$$-\nu \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx = \nu \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx.$$

Понятие слабого решения

Таким образом, приходим к равенству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx + \nu\int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla\varphi dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi dx. \qquad (5)$$

Понятие слабого решения

В силу теоремы вложений Соболева интеграл $\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$ определен.

Кроме того, это слагаемое определяет линейный непрерывный функционал на V. Обозначим этот функционал через $K(v)$:

$$\langle K(v), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Подводя итог рассуждениям, приходим к следующему определению слабого решения.

Определение слабого решения

Определение

Пусть $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ *и* $v_0 \in H$. *Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция* $v \in L_2(0, T; V)$, *удовлетворяющая для всех* $\varphi \in V$ *и для почти всех значений* $t \in (0, T)$ *равенству*

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} v\varphi dx - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int\limits_{\Omega} f \varphi dx \tag{6}$$

и условию

$$v(0) = v_0. \tag{7}$$

Понятие слабого решения

Скалярное произведение $(v(t), \varphi)_{L_2(\Omega)}$ определяет линейный непрерывный функционал на H, а следовательно, элемент из H^*. Учитывая отождествление $H \equiv H^*$ и цепочку вложений $V \subset H \subset H^* \subset V^*$, $\langle v(t), \varphi \rangle = (v(t), \varphi)_{L_2(\Omega)}$ Тогда можно считать, что функция $v(t)$ на $[0, T]$ принимает значения в V^* и

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} v\varphi dx = \frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle.$$

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle - \nu \langle \Delta v(t), \varphi \rangle - \langle K(v(t)), \varphi \rangle = \langle f(t), \varphi \rangle,$$

где $\Delta : V \to V^*$, обозначает оператор Лапласа, действующий по правилу $\langle \Delta v(t), \varphi \rangle = -\int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx$. Или можно (6) переписать в виде:

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle = \langle \nu \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), \varphi \rangle. \tag{8}$$

Лемма

1. *Оператор* $\Delta : L_2(0, T; V) \to L_2(0, T; V^*)$ *линейный и непрерывный, причем*

$$\|\Delta v\|_{L_2(0,T;V^*)} = \|v\|_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0, T; V^*). \tag{9}$$

2. *Оператор* $K : L_2(0, T; V) \to L_1(0, T; V^*)$ *непрерывен и справедлива оценка*

$$\|K(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_2\|v\|^2_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0, T; V^*), \tag{10}$$

для некоторой константы C_2.

1. Покажем, что оператор $\Delta : V \to V^*$ линейный.

$$\Delta(\alpha v + \beta u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\alpha v_i + \beta u_i) = \alpha \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} + \beta \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = \alpha \Delta v + \beta \Delta u.$$

Заметим, что оператор $\Delta : V \to V^*$ определяет изометрию пространств.

$$\|\Delta v\|_{V^*} = \sup_{\varphi \in V} \frac{|\langle \Delta v, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_V} = \sup_{\varphi \in V} \frac{\left| \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx \right|}{\|\varphi\|_V} \leq$$

$$\leq \sup_{\varphi \in V} \frac{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)}}{\|\varphi\|_V} \leq \sup_{\varphi \in V} \frac{\|v\|_V \|\varphi\|_V}{\|\varphi\|_V} = \|v\|_V.$$

То есть $\|\Delta v\|_{V^*} \leq \|v\|_V$.

С другой стороны, положим $\varphi = v$:

$$|\langle \Delta v, v \rangle| = |\int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx| = \|v\|_V^2.$$

$$\|v\|_V^2 = |\langle \Delta v, v \rangle| \leq \|\Delta v\|_{V^*} \|v\|_V.$$

Сократив на $\|v\|_V$, получим $\|\Delta v\|_{V^*} \geq \|v\|_V$. Следовательно получаем $\|\Delta v\|_{V^*} = \|v\|_V$. имеем $\|\Delta v\|_{V^*} = \|v(t)\|_V$ для почти всех $t \in [0, T]$. Так как $\|v(t)\|_V \in L_2(0, T)$, то $\|\Delta v(t)\|_{V^*} \in L_2(0, T)$. Следовательно, $\Delta v \in L_2(0, T; V^*)$ и справедливо равенство (9). Таким образом, линейный оператор Δ определяет изометрию пространств $L_2(0, T; V)$ и $L_2(0, T; V^*)$.

Понятие слабого решения

2. По определению оператора K для любых $v, \varphi \in V$ действует по правилу

$$\langle K(v), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx.$$

Значит для любого $v \in V$ получим

$$\Big| \langle K(v), \varphi \rangle \Big| \leq \Big| \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \Big| \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big| v_i v_j \Big|^2 dx \Big)^{1/2} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \Big|^2 dx \Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big| v_i \Big|^4 dx \Big)^{1/4} \Big(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big| v_j \Big|^4 dx \Big)^{1/4} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \Big|^2 dx \Big)^{1/2} \leq \|v\|^2_{L_4(\Omega)} \|\varphi\|_V .$$

Понятие слабого решения

По теореме вложения Соболева вложение $V \in L_4(\Omega)^n$ непрерывно для $n \leq 4$, поэтому, $\|v\|_{L_4(\Omega)^n} \leq C_3 \|v\|_V$ и, следовательно, $\|K(v)\|_{V^*} \leq C_3^2 \|v\|_V^2$. Отсюда для $v \in L_2(0, T; V)$ имеем $K(v) \in L_1(0, T; V^*)$ и

$$\|K(v)_{L_1(0,T;V^*)}\| \leq \int\limits_0^T \|K(v(t))\|_{V^*} dt \leq C_3^2 \int\limits_0^T \|v(t)\|_V^2 dt = C_3^2 \|v(t)\|_{L_2(0,T;V)}^2.$$

Понятие слабого решения

Докажем непрерывность оператора K. Для любых функций $v, u \in L_2(0, T; V)$ справедлива оценка

$$\int\limits_0^T \|K(v) - K(u)\|_{V^*} dt \leq \int\limits_0^T (\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (v_i v_j - u_i u_j)^2 dx)^{1/2} dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^T (\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (v_i(v_j - u_j) + (v_i - u_i)u_j)^2 dx)^{1/2} dt \leq$$

$$\leq \sqrt{2} \sum_{i,j=1}^n \int\limits_0^T (\int\limits_\Omega v_i^2 (v_j - u_j)^2 dx)^{1/2} + (\int\limits_\Omega (v_i - u_i)^2 u_j dx)^{1/2} \leq$$

Понятие слабого решения

$$\leq \sqrt{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{0}^{T}(\|v_i\|_{L_4(\Omega)}\|v_j-u_j\|_{L_4(\Omega)}+\|v_i-u_i\|_{L_4(\Omega)}\|u_j\|_{L_4(\Omega)})dt \leq$$

$$\leq C_2(\|v\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}+\|u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))})\|v-u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}.$$

Понятие слабого решения

1. что функция $v(t)$ имеет суммируемую производную $v'(t)$;
2. в силу равенства $\frac{d}{dt}\langle \phi, u(t)\rangle = \langle \phi, g(t)\rangle$;
$$\frac{d}{dt}\langle v(t), \varphi\rangle = \langle v'(t), \varphi\rangle;$$
3. равенство $\frac{d}{dt}\langle v(t), \varphi\rangle = \langle \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), \varphi\rangle$ можно записать в виде
$$v'(t) = \nu\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t).$$

Понятие слабого решения

Лемма

Для $p_0 \geq 1,\ p_1 \geq 1$ *имеет место вложение* $W_{p_0,p_1} = \{v \in L_{p_0}(a,b,X_0),\ v_1 \in L_{p_0}(a,b,X_0)\} \subset C([a,b],X_1)$ *и это вложение непрерывно.*

Лемма

Пусть X *и* Y *— банаховы пространства, такие, что* X *— рефлективно и вложение* $X \subset Y$ *непрерывно. Если функция* $v \in L_\infty(a,b;X)$ *слабо непрерывна как функция со значениями в* Y*,то и слабо непрерывна и как функция со значениями в* X*.*

Определение слабого решения

Определение

Пусть $n \leq 4$, $f \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ *и* $v \in H$. *Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция* $v \in L_2(0,T;V) \cap L_\infty(0,T;H)$ *и условиюv*$'$ $\in L_1(0,T;V^*)$, *удовлетворяющая при почти всех значений* $t \in (0,T)$ *равенству*

$$v'(t) - \nu \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \tag{11}$$

и начальному условию

$$v(0) = v_0. \tag{12}$$

Для системы уравнений Навье-Стокса (1)-(4) Ж. Лере в 1934 был получен следующий результат:

Теорема

Пусть $n = 2,3$. *Для каждой функции* $f \in L_2(0,T;V^*)$ *и* $v_0 \in H$ *начально-краевая задача (1)-(4) имеет хотя бы одно слабое решение* v.

Единственность слабого решения

Теорема

Пусть Ω *ограниченная область в* R^2 *с достаточно гладкой границей* $\partial\Omega$*. Тогда слабое решение* v *решение задачи (1)-(4) единственно.*

Единственность слабого решения

Рассмотрим разность полученных равенств. Для разности $w = v - u$ получим равенство

$$w' - \nu \Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0$$

Применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции $w(t)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w(t,x)w(t,x)dt + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla w(t,x) : \nabla w(t,x)dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega} v_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega} u_i(t,x)u(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx. \tag{13}$$

Единственность слабого решения

Оценим правую часть полученного равенства.

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} v_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} u_i(t,x)u(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx =$$

$$\sum_{i=1}^{2} \left[\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} + \int\limits_{\Omega} w(t,x)u_i(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} \right] dx.$$

Единственность слабого решения

Используем интегрирование по частям для вычисления первого интеграла

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx = -\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx,$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{\partial w_{\boldsymbol{i}}(t,x)}{\partial x_{\boldsymbol{i}}} = \mathrm{div}\ w(t,x) = 0$. Используем интегрирование по частям для вычисления второго из интегралов

$$\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_{\Omega} u_i(t,x)w(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx = \sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_{\Omega} u_i(t,x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \mid w(t,x)\mid^2}{\partial x_i}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n=2}\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x_i}\cdot \mid w(t,x)\mid^2 dx = 0,$$

Единственность слабого решения

так как $\sum\limits_{i=1}^{2} \frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x_i} = \mathrm{div} u(t,x) = 0$. Отсюда и из равенства (13) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w(t,x)w(t,x)dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla w(t,x) : \nabla w(t,x)dx =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} w(t,x)dx$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 + \nu\|w(t)\|_V^2 \leq \left|\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} w(t,x)dx\right|. \qquad (14)$$

Единственность слабого решения

Оценим правую часть неравенства, используя неравенства Шварца:

$$\left|\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx\right| = \left|\sum_{i,j=1}^{n=2}\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\frac{\partial v_j(t,x)}{\partial x_i}w_j(t,x)dx\right| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_{\Omega} \mid w_i(t,x)\mid^4 dx\right)^{1/4} \left(\sum_{j=1}^{n=2}\int\limits_{\Omega} \mid w_j(t,x)\mid^4 dx\right)^{1/4} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n=2}\int\limits_{\Omega} \left|\frac{\partial v_j(t,x)}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2}$$

Единственность слабого решения

Учитывая, суммирование по повторяющимся индексам, получаем

$$\left| \sum_{i=1}^{n=2} \int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} w(t,x) dx \right| \leq \|w(t)\|^2_{L_4(\Omega)} \|v(t)\|_V.$$

Применим неравенство О.А. Ладыженской и далее неравенство Коши $a \cdot b = \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} c$ $\varepsilon = \frac{\nu}{2^{1/2}}$, получим

$$\left| \sum_{i=1}^{n=2} \int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} w(t,x) dx \right| \leq$$

$$\leq 2^{1/2} \|w(t)\|_{L_2(\Omega)} \|w(t)\|_V \|v(t)\|_V \leq$$

$$\leq \nu \|w(t)\|^2_V + \frac{1}{2^{3/2}\nu} \|w(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \|v(t)\|_V.$$

Единственность слабого решения

Подставляя полученное соотношение в неравенство (14), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2^{3/2}\nu}\|w(t)\|_H^2\|v(t)\|_V.$$

Тогда из неравенства Гронуолла-Беллмана [1, теорема 2б, глава IV, с.188] следует

$$\|w(t)\|_H^2 \leq \|w(0)\|_H^2 \exp\left(\int_0^t \frac{1}{2^{1/2}\nu}\|v(s)\|_V ds\right).$$

Поскольку $w(0) = v(0) - u(0) = 0$, то из полученного выше неравенства приходим к выводу, что $w(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Следовательно, $v = u$ и слабое решение задачи (1)-(4) единственно.

Единственность слабого решения

Спасибо за внимание!