

1 Эволюционная система уравнений Навье-Стокса

1.1 Понятие слабого решения

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n , где $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0; \quad (2)$$

$$v|_{t=0} = v_0; \quad (3)$$

$$v|_{(0, T) \times \partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Здесь $v = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$ - вектор-функция скорости движения частицы жидкости, $p = p(t, x)$ - функция давления, $f = f(t, x)$ - вектор-функция плотности внешних сил, $\nu > 0$ - коэффициент вязкости. $\Delta v = (\Delta v_1, \dots, \Delta v_n)$, $\Delta v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_n^2}$, $\operatorname{div} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n}$, $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial p}{\partial x_n}$. Сформулируем определение сильного решения рассматриваемой задачи (1)-(4). Для этого введем необходимые функциональные пространства:

$L_p(\Omega)$ - где $1 \leq p \leq \infty$, множество измеримых функций, суммируемых с p -ой степенью,

$W_p^m(\Omega)$ - где $m \geq 1$, $p \geq 1$, пространство Соболева, функции, которые со своими производными до порядка m включительно принадлежат пространству $L_p(\Omega)$,

$C_0^\infty(\Omega)$ - бесконечно дифференцируемых функций на Ω со значениями R^n ($n = 2, 3$) и компактным носителем Ω ,

ν - множество $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $\operatorname{div} u = 0$

H -....,

V -....,

$L_p(a, b; X)$ - мы обозначим банаховы пространства непрерывных, сла-

бо непрерывных и суммируемых с p -ой степенью функций на $[a, b]$ со значениями в банаховом пространстве X ,

X^* -...,

$\langle f, \varphi \rangle$ - обозначим действие функционала f из $V^{-\alpha}$ на элемент φ из V^α , $\alpha \geq 0$

Пусть f и v_0 -заданные функции, где $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $v_0 \in V$.

Определение 1.1. *Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций $v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $p \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. обобщенные частные производные функции, содержащиеся в равенствах (1)-(2), принадлежат пространству $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;
2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;
3. функция v удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Введем понятие слабого решения. Для этого пусть v и p -сильное решение задач (1)-(4). Умножим равенство (1) на пробную функцию $\varphi(x) \in V$ скалярно в $L_2(\Omega)$

Пусть (v, p) -сильное решение задачи (1)-(4). Чтобы обеспечить понимание определения слабого решения, мы временно предположим, что $v = v(t, x), p = p(t, x)$ являются, фактически, гладкими решениями задачи. Сопоставим функции v отображение $v : [0, T] \rightarrow W_2^1(\Omega)$, определенное по формуле

$$[v(t)](x) = v(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Другими словами, v рассматривается не как функции переменных t и x , а как функция переменной t , определенная на отрезке $[0, T]$ и принимающая значения в функциональном пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Аналогично определим $p : [0, T] \rightarrow L_2(\Omega)$ по формуле

$$[p(t)](x) = p(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega$$

и функцию $f : [0, T] \rightarrow L_2(\Omega)$ по формуле

$$[f(t)](x) = f(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Умножая равенство (1) при фиксированных значениях $t \in [0, T]$ на функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ скалярно в $L_2(\Omega)$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx - \\ & - \nu \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx = \int_{\Omega} f \varphi dx. \end{aligned}$$

Выполним преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям,

$$-\nu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx = \nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx;$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} p \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \varphi dx = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i \varphi) dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \\ &= - \int_{\Omega} v \varphi \operatorname{div} v dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \end{aligned}$$

приходим к равенству

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad (5)$$

Здесь символ « $:$ » обозначает покомпонентное матричное произведение, т. е. для $C = (c_{ij}), D = (d_{ij}), i, j = 1, \dots, m$, имеем $C : D = \sum_{i,j=1}^m c_{i,j} d_{i,j}$. Заметим, что тоже равенство (5) верно для любой функции $\varphi \in V$, так

как каждая часть этого равенства линейно и непрерывно зависит от φ в $W_2^1(\Omega)$. Кроме того, равенство может выполняться и при более слабых требованиях на функцию $v(t, x)$. Покажем, что достаточно предполагать, что $v \in L_2(0, T; V)$ для того, чтобы каждый интеграл, входящий в равенство (5), имеет смысл.

В силу теоремы вложений Соболева¹ вложение $W_2^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ непрерывно при $n \leq 4$. Поэтому, так как $V \subset W_2^1(\Omega)$, то $v_i(t, x)v(t, x) \in L_2(\Omega)$ и $v_i(t, x)v(t, x)\partial_i\varphi \in L_1(\Omega)$ при каждом фиксированном значении t . Следовательно, интеграл $\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$ определен.

Кроме того, это слагаемое определяет линейный непрерывный функционал на V . Обозначим этот функционал через $K(v)$:

$$\langle K(v), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Отметим, что $\int_{\Omega} v \varphi dx \in L_2(0, T)$ и производная в выражении $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx$ понимается в смысле распределений на интервале $(0, T)$. Поэтому равенство (5) выполняется в смысле распределений. Все слагаемые равенства, исключая первое, принадлежат пространству $L_1(0, T)$, поэтому $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx \in L_1(0, T)$ и равенство (5) выполняется для почти всех значений $t \in (0, T)$.

Подводя итог рассуждениям, приходим к следующему определению слабого решения.

Определение 1.2. Пусть $f \in L_2(Q_T)$ и $v_0 \in H$. Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция $v \in L_2(0, T; V)$ такая, что равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + v \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad (6)$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0, T)$ и выполнено для этой функции v начальное условие

$$v(0) = v_0. \quad (7)$$

¹Тут будет теорема вложений Соболева :)

Выше показано, что равенство (6) корректно для $v \in L_2(0, T; V)$ и если (v, p) сильное решение задачи (1)-(4), то v является слабым решением. Поэтому задачу о поиске сильных решений заменим задачей об исследовании слабых решений.

Заметим, однако, что для функции $v \in L_2(0, T; V)$ условие (7) не имеет смысла, так как не определено значение функции $v(t)$ в каждой точке $t \in (0, T)$. Покажем, что функция $v(t)$, удовлетворяющая равенству (6), является непрерывной на $[0, T]$ со значениями в V^* и слабо непрерывной со значениями в H . Поэтому равенство (7) имеет смысл и определение слабого решения корректно.

Преобразуем равенство (6). Скалярное произведение $(v(t), \varphi)_{L_2(\Omega)}$ определяет линейный непрерывный функционал на H , а следовательно, элемент из H^* . Учитывая отождествление $H \equiv H^*$ и цепочку вложений $V \subset H \subset H^* \subset V^*$, элемент $v(t)$ можно рассматривать как функционал на V , действие которого на функцию $\varphi \in V$ определяется равенством $\langle v(t), \varphi \rangle = (v(t), \varphi)_{L_2(\Omega)}$. Тогда можно считать, что функция $v(t)$ на $[0, T]$ принимает значения в V^* и

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx = \frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle$$

С учетом введенных обозначений равенство (6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle - \nu \langle \Delta v(t), \varphi \rangle - \langle K(v(t)), \varphi \rangle = \langle f(t), \varphi \rangle$$

где $\Delta : V \rightarrow V^*$, обозначает оператор Лапласа, действующий по правилу $\langle \Delta v(t), \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx$. Или можно (6) переписать в виде:

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle = \langle \nu \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), \varphi \rangle. \quad (8)$$

Исследуем свойства операторов, входящих в правую часть равенства.

Лемма 1.1.

1. Оператор

$\Delta : L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*)$ линейный и непрерывный, причем

$$\| \Delta v \|_{L_2(0, T; V^*)} = \| v \|_{L_2(0, T; V)}, \quad \forall v \in L_2(0, T; V^*). \quad (9)$$

2. Оператор $K : L_2(0, T; V) \rightarrow L_1(0, T; V^*)$ непрерывен и справедлива оценка

$$\| K(v) \|_{L_1(0, T; V^*)} \leq C_1 \| v \|_{L_2(0, T; V)}^2, \quad \forall v \in L_2(0, T; V^*), \quad (10)$$

для некоторой константы C_1 .

Доказательство.

1. В главе 2 показано, что отображение $\Delta : V \rightarrow V^*$ линейно, непрерывно и определяет изометрию пространств. Следовательно, $\| \Delta u \|_{V^*} = \| u \|_V$ для всех $u \in V$. Отсюда для $u \in L_2(0, T; V)$ имеем $\| \Delta u \|_{V^*} = \| u(t) \|_V$ для почти всех $t \in [0, T]$. Так как $\| u(t) \|_V \in L_2(0, T)$, то $\| \Delta u(t) \|_{V^*} \in L_2(0, T)$. Следовательно, $\Delta u \in L_2(0, T; V^*)$ и справедливо равенство (9). Таким образом, линейный оператор Δ определяет изометрию пространств $L_2(0, T; V)$ и $L_2(0, T; V^*)$.

2. По определению оператора K

$$\langle K(t), u \rangle = \int_{\Omega} u_i(x) u_j(x) \cdot \partial_i u_j(x) dx$$

для $u, v \in V$. Повторяя рассуждения доказательства леммы 3.1 или используя оценки (3.10), получим

$$\| K(v(t)) \|_{V^*} \leq c_0 \| v(t) \|_V^2, \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T],$$

с некоторой константой c_0 . Отсюда для $v \in L_2(0, T; V)$ имеем $K(v) \in L_1(0, T; V^*)$ и

$$\begin{aligned} \| K(v) \|_{L_1(0, T; V^*)} &\leq \int_0^T \| K(v(t)) \|_{V^*} dt \leq c_0 \int_0^T \| v(t) \|_V^2 dt = \\ &= c_0 \| v(t) \|_{L_2(0, T; V)}^2 \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения доказательства леммы 3.1, получим, что для $v, u \in L_2(0, T; V)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|K(v) - K(u)\|_{V^*} dt &\leq \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_i v_j - u_i u_j)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_i(v_j - u_j) + (v_i - u_i)u_j) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \sqrt{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \left(\int_{\Omega} v_i^2 (v_j - u_j)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} (v_i - u_i)^2 u_j^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \\
&\leq \sqrt{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^T (\|v_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \|v_j(t) - u_j(t)\|_{L_4(\Omega)} + \\
&\quad + \|v_i(t) - u_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \|u_j(t)\|_{L_4(\Omega)}) dt \leq \\
&\leq C_2 (\|v\|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))} + \|u\|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))}) \|v - u\|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))}
\end{aligned}$$

Кроме того, вложение $V \subset (L_4(\Omega))^n$, а следовательно, и вложение $L_2(0, T; V) \subset L_2(0, T; (L_4(\Omega))^n)$ непрерывны. Поэтому достаточно доказать непрерывность отображений

$$\phi_{ij} : L_2(0, T; (L_4(\Omega))^n) \rightarrow L_1(0, T; L_2(\Omega)), \phi_{ij}(v) = v_i v_j$$

для $i, j = 1, 2, \dots, n$. Для любых $u, v \in L_2(0, T; (L_4(\Omega))^n)$ с помощью неравенства Шварца получаем оценку

$$\begin{aligned}
\|\phi_{ij}(u) - \phi_{ij}(v)\|_{L_1(0, T; L_2(\Omega))} &= \int_0^T \left(\int_{\Omega} (v_i v_j - u_i u_j)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \int_0^T \left(\int_{\Omega} v_i^2 (v_j - u_j)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} (v_i - u_i)^2 u_j^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \\
&\int_0^T (\|v_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \|v_j(t) - u_j(t)\|_{L_4(\Omega)} + \\
&\quad + \|v_i(t) - u_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \|u_j(t)\|_{L_4(\Omega)}) dt \leq \\
&\leq \|v_i\|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))} \|v_j - u_j\|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))} +
\end{aligned}$$

$$+ \| v_i - u_i \|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))} \| u_j \|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))}$$

Отсюда, если $\| v - u \|_{L_2(0, T; (L_4(\Omega))^n)} \rightarrow 0$, то $\| \phi_{ij}(u) - \phi_{ij}(v) \|_{L_1(0, T; L_2(\Omega))} \rightarrow 0$. Поэтому каждое из отображений ϕ_{ij} , а следовательно, и отображение K непрерывны.

□

По утверждению леммы $\Delta v \in L_2(0, T; V^*)$, $K(v) \in L_1(0, T; VV^*)$, поэтому $\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t) \in L_1(0, T; VV^*)$. Тогда из равенства (8) и теоремы 4.6 следует

1. что функция $v(t)$ имеет суммируемую производную $v'(t)$;
2. в силу равенства (4.3)

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), u \rangle = \langle v'(t), u \rangle$$

3. равенство (5.8) можно записать в виде

$$v'(t) = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t)$$

Подводя итог рассуждений, отметим, что так как $v'(t) \in L_1(0, T; V^*)$, то $v \in W_{2,1} X_0 = V$, $X_1 = V^*$. Поэтому в силу леммы 4.5 функция $v(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$ со значениями в V^* . Кроме того, по лемме 4.6 эта функция слабо непрерывна со значениями в H . Поэтому начальное условие (7) имеет смысл.

Переформулируем понятие слабого решения

Определение 1.3. Пусть $n \leq 4$, $f \in L_2(0, T; (L_2(\Omega))^n)$ и $v^0 \in H$. Слабым (вариационным) решением задачи (1)-(4) называется функция $v \in L_2(0, T; V)$ такая, что $v^0 \in L_1(0, T; V^*)$, равенство

$$v'(t) - \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \tag{11}$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0, T)$ и

$$v(0) = v^0 \tag{12}$$

1.2 О единственности слабого и полного слабого решений в случае $n = 2$

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о единственности слабого и полного слабого решений краевой задачи (1)-(4) для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса. Будем показано, что в случае $\Omega \subset R^2$ слабое и полное слабое решение краевой задачи единственно. Однако для размерности $n > 2$ аналогичное утверждение неверно. Примером, показывающим, что слабое решение задачи не единственно, служит результат о бифуркации решений, содержащийся, например, в [22, гл.II, §4, п.4.4].

Сформулируем и докажем утверждение о единственности слабого решения в случае $n = 2$, следуя [22, гл.III, §3, теорема 3.2].

Теорема 1.1. *Пусть Ω ограниченная область в R^2 с локально липшицевой границей. Тогда слабое решение v и полное слабое решение (v, p) (при условии $(p)\Omega = 0$) задачи (1)-(4) единственно. Кроме того, функция v непрерывна на отрезке $[0, T]$ со значениями в H и*

$$v(t) \rightarrow v_0 \text{ в } H \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Доказательство. Достаточно установить единственность слабого решения v , так как компонента p полного слабого решения определяется компонентой v из равенства (5.34) единственным образом.

Пусть v – решение задачи (5.31), (5.32). Покажем, что $v \in W$, т.е. $v' \in L_2(0, T; V^*)$. Воспользуемся оценкой

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \leq c_0 \|v\|_{(L_4(\Omega))^n}^2,$$

полученной при выводе неравенства (3.10), в случае $n = 2$ и $\varepsilon = 0$. Применяя неравенство О.А. Ладыженской (1.7), получим для любого $t \in [0, T]$

$$\sup_{v \in V} \langle K(v), \frac{u}{\|v\|} \rangle \leq c_0 2^{1/2} \left(\int_{\Omega} v(t)^2 dt \right)^{1/2} \cdot \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt$$

Отсюда, возводя обе части неравенства в квадрат и интегрируя по t на

отрезке $[0, T]$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \int_0^T \sup(\langle K(v), \frac{u}{\|v\|} \rangle)^2 dt &\leq 2c_0 \int_0^T \left(\int_{\Omega} v(t)^2 \right) \cdot \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt \leq \\ &\leq 2c_0 \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} v(t)^2 dt \cdot \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left(\int_0^T \sup(\langle K(v), \frac{u}{\|v\|} \rangle)^2 dt \right)^{1/2} \leq c_0 2^{1/2} \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} v(t)^2 dt \cdot \int_0^T \int_{\Omega} v(t)^2 dt$$

Из представления $v' = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t)$ очевидно, что $v' \in L_2(0, T; V^*)$ и $v \in W$. Воспользовавшись вложением $W \subset C([0, T], H)$, получаем $v \in C([0, T], H)$ и заключение (13) теоремы.

Покажем теперь единственность слабого решения. Предположим, что u и v – слабые решения задачи (5.31), (5.32). Подставим эти решения в уравнение (5.31) и рассмотрим разность полученных равенств. Для разности $w = v - u$ получим равенство

$$w' - \Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0$$

Применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции $w(t)$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(t, x) w(t, x) dx + v(w(t, x), w(t, x)) = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} \cdot v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \cdot \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx \end{aligned} \quad (14)$$

Оценим правую часть полученного равенства.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx + \\
&+ \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx = \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial t} \cdot v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} w(t, x) \cdot \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial x_i} dx
\end{aligned}$$

Используем интегрирование по частям для вычисления первого интеграла

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial t} v(t, x) \cdot w(t, x) = - \int_{\Omega} \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial t} \cdot \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx$$

так как $\partial_i w_i(t, x) = \operatorname{div} w(t, x) = 0$. Используем интегрирование по частям для вычисления второго из интегралов

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} w(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx &= \sum_{i=0}^{n=2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial |w|^2(t, x)}{\partial x_i} dx = \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=2} \frac{\partial^2 u_i(t, x)}{\partial t \partial x_i} \cdot |w|^2(t, x) dx = 0
\end{aligned}$$

так как $\sum_{i=1}^2 \partial_i u_i(t, x) = \operatorname{div} u(t, x) = 0$ Отсюда и из равенства (14) получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(t, x) w(t, x) dx + v(w(t, x) w(t, x)) = \\
&= - \int_{\Omega} \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial t} \cdot \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx
\end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_H^2 + v \|w(t)\|_H^2 = \left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| \quad (15)$$

Оценим правую часть неравенства, используя неравенства Шварца,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_j(t, x) w_j(t, x) dx \right| \leq \\
&\left(\int_{\Omega} |w_i(t, x)|^2 |w_j(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |\partial_i v_j(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\
&\left(\int_{\Omega} |w_i(t, x)|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |w_j(t, x)|^4 dx \right)^{1/4} \cdot \left(\int_{\Omega} |\partial_i v_j(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
\text{или} \\
&\left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| \leq \\
&\leq \|w_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \cdot \|w_j(t)\|_{L_4(\Omega)} \cdot \|\partial_i v_j(t)\|_{L_2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Учитывая, что запись, содержащая повторяющиеся индексы, предполагает суммирование по этим индексам, получаем

$$\left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| \leq \|w(t)\|_{(L_4(\Omega))^n}^2 \cdot \|v(t)\|_V$$

Применим неравенство О.А. Ладыженской и далее неравенство Коши $a \cdot b = \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} c\varepsilon = \frac{v}{2^{1/2}}$, получим

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| &\leq 2^{1/2} \|w(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} \cdot \|w(t)\|_V \cdot \|v(t)\|_V \leq \\
&\leq v \|w(t)\|_V^2 + \frac{1}{2^{3/2}v} \|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}^2 \cdot \|w(t)\|_V
\end{aligned}$$

Подставляя полученное соотношение в неравенство (15), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2^{3/2}v} \|w(t)\|_H^2 \cdot \|v(t)\|_V$$

Тогда из неравенство Гронуолла-Беллмана [1, теорема 2б глава IV, с.188]

следует

$$\| w(t) \|_H^2 \leq \| w(0) \|_H^2 \exp \left(\int_0^t \frac{1}{2^{1/2} v} \cdot \| v(s) \|_V ds \right)$$

Поскольку $w(0) = v(0) - u(0) = 0$, то из полученного выше неравенства приходим к выводу, что $w(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Следовательно, $v = u$ и слабое и полное слабое решение задачи (1)-(4) единственно. \square