1 Эволюционная система уравнений Навье-Стокса

1.1 Понятие слабого решения

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n, где $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0; \tag{2}$$

$$v|_{t=0} = v_0; \tag{3}$$

$$v|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Здесь $v = (v_1(t,x), ..., v_n(t,x))$ — вектор-функция скорости движения частицы жидкости, $p = p(t,x)$ — функция давления, $f = f(t,x)$ — вектор-функция плотности внешних сил, $\nu > 0$ — коэффициент вязкости. $\Delta v = (\Delta v_1, ..., \Delta v_n)$, $\Delta v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_n^2}$; $\operatorname{div} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial v}{\partial x_n}$; $\nabla p = (\frac{\partial p}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial p}{\partial x_n})$.

Сформулируем определение сильного решения рассматриваемой задачи (1)-(4). Для этого введем необходимые функциональные пространства:

$L_p(\Omega)$ — где $1 \leqslant p < \infty$, множество измеримых функций, суммируемых с p-ой степенью,

$W_p^m(\Omega)$ — где $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, пространство Соболева, состоящее из функции, которые со своими обобщенными частными производными до порядка m включительно принадлежат пространству $L_p(\Omega)$,

$C_0^\infty(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на Ω со значениями в $R^n (n = 2, 3)$ и с компактным носителем, содержащимся в Ω

ν — множество $v \in C_0^\infty(\Omega)$, таких что $divv = 0$;

H — замыкание ν по норме пространства $L_2(\Omega)$;

V — замыкание ν по норме пространства $W_1^1(\Omega)$;

$L_p(a, b; X)$ — мы обозначим банаховы пространства непрерывных, слабо непрерывных и суммируемых с p-ой степенью функций на $[a, b]$ со значениями в банаховом пространстве X,

Будем обозначать E^* сопряженное пространство к пространству E.

$< f, \varphi >$ - обозначим действие функционала f из $V^{-\alpha}$ на элемент φ из V^α, $\alpha \geqslant 0$

Пусть f и v_0 — заданные функции, где $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $v_0 \in V$.

Определение 1.1. *Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций $v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $p \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1. обобщенные частные производные функций, содержащихся в равенствах (1)-(2), принадлежат пространству $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;

2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;

3. функция v удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Введем понятие слабого решения. Для этого пусть v и p — сильное решение задач (1)-(4).

Пусть (v, p) — сильное решение задачи (1)-(4). Чтобы обеспечить понимание определения слабого решения, мы временно предположим, что $v = v(t, x)$ и $p = p(t, x)$ являются, фактически, гладкими решениями задачи. Сопоставим функции v отображение $v : [0, T] \to W_2^1(\Omega)$, определенное по формуле

$$[v(t)](x) = v(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Другими словами, v рассматривается не как функции переменных t и x, а как функция переменной t, определенная на отрезке $[0, T]$ и принимающая значения в функциональном пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Аналогично определим $p : [0, T] \to L_2(\Omega)$ по формуле

$$[p(t)](x) = p(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega$$

и функцию $f : [0,T] \to L_2(\Omega)$ по формуле

$$[f(t)](x) = f(t,x), t \in [0,T], x \in \Omega.$$

Умножая равенство (1) при фиксированных значениях $t \in [0,T]$ на функцию $\varphi(x) \in V$ скалярно в $L_2(\Omega)$, получим

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\ \varphi dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\ \varphi dx -$$

$$-\nu \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2}\varphi_j dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i}\ \varphi_i dx = \int\limits_\Omega f\varphi dx.$$

Выполним преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям[1],

$$-\nu \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2}\varphi_j dx = \nu \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx;$$

Здесь символ «:» обозначает покомпонентное матричное произведение, т. е. для $C = (c_{ij}), D = (d_{ij}), i,j = 1,...,m$, имеем $C : D = \sum\limits_{i,j=1}^m c_{i,j} d_{i,j}$

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i}\varphi_i dx = -\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega p \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx = \int\limits_\Omega p\ div\ \varphi\ dx = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\varphi dx = -\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i \varphi) dx =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\varphi dx - \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx =$$

$$= -\int\limits_\Omega v\ \varphi\ div\ v\ dx - \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx;$$

[1]Метод интегрирования по частям. Пусть функции $\varphi(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале I. Если одна из функций $\varphi(x)v'(x)$ или $\varphi'(x)v(x)$ имеет первообразную на интервале I, то на этом интервале имеет первообразную и другая функция, причем справедливо равенство $\int \varphi(x)v'(x)dx = \varphi(x)v(x) - \int \varphi'(x)v(x)dx$

и приходим к равенству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx + v\int\limits_{\Omega}\nabla v : \nabla\varphi dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi dx. \qquad (5)$$

Заметим, что равенство (5) может выполняться и при более слабых требованиях на функцию $v(t,x)$. Покажем, что достаточно предполагать, что $v \in L_2(0,T;V)$ для того, чтобы каждый интеграл, входящий в равенство (5), имел смысл.

В силу теоремы вложений Соболева[2] вложение $W_2^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ непрерывно при $n \leqslant 4$. Поэтому, так как $V \subset W_2^1(\Omega)$, то $v_i(t,x)v(t,x) \in L_2(\Omega)$ и $v_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in L_1(\Omega)$ при каждом фиксированном значении t. Следовательно, интеграл $\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i v \times \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx$ определен.

Кроме того, это слагаемое определяет линейный непрерывный функционал на V. Обозначим этот функционал через $K(v)$:

$$\langle K(v), \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx.$$

Отметим, что $\int\limits_{\Omega} v\varphi dx \in L_2(0,T)$ и производная в выражении $\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx$ понимается в смысле распределений на интервале $(0,T)$. Поэтому равенство (5) выполняется в смысле распределений. Все слагаемые равенства, исключая первое, принадлежат пространству $L_1(0,T)$, поэтому $\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx \in L_1(0,T)$ и равенство (5) выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$.

Подводя итог рассуждениям, приходим к следующему определению слабого решения.

Определение 1.2. *Пусть $f \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ и $v_0 \in H$. Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция $v \in L_2(0,T;V)$, удовлетворяющая для*

[2] Тут будет теорема вложений Соболева :)

всех $\varphi \in V$ и для почти всех значений $t \in (0,T)$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi dx \tag{6}$$

и условию

$$v(0) = v_0. \tag{7}$$

Выше показано, что равенство (6) корректно для $v \in L_2(0,T;V)$ и если (v,p) сильное решение задачи (1)-(4), то v является слабым решением. Поэтому задачу о поиске сильных решений заменим задачей об исследовании слабых решений.

Заметим, однако, что для функции $v \in L_2(0,T;V)$ условие (7) не имеет смысла, так как не определено значение функции $v(t)$ в каждой точке $t \in (0,T)$. Покажем, что функция $v(t)$, удовлетворяющая равенству (6), является непрерывной на $[0,T]$ со значениями в V^* и слабо непрерывной со значениями в H. Поэтому равенство (7) имеет смысл и определение слабого решения корректно.

Преобразуем равенство (6). Скалярное произведение $(v(t),\varphi)_{L_2(\Omega)}$ определяет линейный непрерывный функционал на H, а следовательно, элемент из H^*. Учитывая отождествление $H \equiv H^*$ и цепочку вложений $V \subset H \subset H^* \subset V^*$, элемент $v(t)$ можно рассматривать как функционал на V, действие которого на функцию $\varphi \in V$ определяется равенством $\langle v(t),\varphi\rangle = (v(t),\varphi)_{L_2(\Omega)}$.Тогда можно считать, что функция $v(t)$ на $[0,T]$ принимает значения в V^* и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx = \frac{d}{dt}\langle v(t),\varphi\rangle.$$

С учетом введенных обозначений равенство (6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle v(t),\varphi\rangle - \nu\langle \Delta v(t),\varphi\rangle - \langle K(v(t)),\varphi\rangle = \langle f(t),\varphi\rangle,$$

где $\Delta : V \to V^*$, обозначает оператор Лапласа, действующий по правилу

$\langle \Delta v(t), \varphi \rangle = -\int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx$. Или можно (6) переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), \varphi \rangle = \langle \nu \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), \varphi \rangle. \tag{8}$$

Исследуем свойства операторов, входящих в правую часть равенства.

Лемма 1.1.

1. *Оператор* $\Delta \ : \ L_2(0,T;V) \ \to \ L_2(0,T;V^*)$ *линейный и непрерывный, причем*

$$\|\Delta v\|_{L_2(0,T;V^*)} = \|v\|_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0,T;V^*). \tag{9}$$

2. *Оператор* $K : L_2(0,T;V) \to L_1(0,T;V^*)$ *непрерывен и справедлива оценка*

$$\|K(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_1 \|v\|^2_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0,T;V^*), \tag{10}$$

для некоторой константы C_1.

Доказательство.
(ТУТ НАЧИНАЕТСЯ ДИЧЬ! СМОТРИ ВО ВСЕ 4 ГЛАЗА) Покажем, что оператор $\Delta : V \to V^*$ линейный. (НаДо СдЕлАтЬ)

Заметим, что оператор $\Delta : V \to V^*$ определяет изометрию пространства. Действительно:

$$\|\Delta v\|_{V^*} = \sup_{\varphi} \frac{|\langle \Delta v, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_V} = \sup_{\varphi} \frac{|\int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx|}{\|\varphi\|_V} \leq \sup_{\varphi} \frac{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)}}{\|\varphi\|_V} \leq$$

$$\leq \sup_{\varphi} \frac{\|v\|_V \|\varphi\|_V}{\|\varphi\|_V} = \|v\|_V$$

то есть $\|\Delta v\|_{V^*} \leq \|v\|_V$. С другой стороны, положим $\varphi = v$. $|\langle \Delta v, v \rangle| = |\int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx| = \|v\|^2_V$. Применим неравенство Коши-Буняковского $\|v\|^2_V =$

$|\langle \Delta v, v\rangle| \leq \|\Delta v\|_{V^*}\|v\|_V$. Сократив на $\|v\|_V$, получим $\|\Delta v\|_{V^*} \geq \|v\|_V$. Следовательно получаем $\|\Delta v\|_{V^*} = \|v\|_V$. Заметим, что линейный ограниченный оператор - непрерывен. Отсюда для $v \in L_2(0,T;V)$ имеем $\|\Delta v\|_{V^*} = \|v(t)\|_V$ для почти всех $t \in [0,T]$. Так как $\|v(t)\|_V \in L_2(0,T)$, то $\|\Delta v(t)\|_{V^*} \in L_2(0,T)$. Следовательно, $\Delta v \in L_2(0,T;V^*)$ и справедливо равенство (9). Таким образом, линейный оператор Δ определяет изометрию пространств $L_2(0,T;V)$ и $L_2(0,T;V^*)$.

2) По определению оператора K

$$\langle K(v), \varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx.$$

$\square$

По утверждению леммы $\nu\Delta v \in L_2(0,T;V^*), K(v) \in L_1(0,T;V^*)$, поэтому $\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t) \in L_1(0,T;VV^*)$. Тогда из равенства (8) и теоремы 4.6 следует

1. что функция $v(t)$ имеет суммируемую производную $v'(t)$;

2. в силу равенства (4.3)

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), u\rangle = \langle v'(t), u\rangle$$

3. равенство (5.8) можно записать в виде

$$v'(t) = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t)$$

Подводя итог рассуждений, отметим, что так как $v'(t) \in L_1(0,T;V^*)$, то $v \in W_{2,1}cX_0 = V,\ X_1 = V^*$. Поэтому в силу леммы 4.5 функция $v(t)$ непрерывна на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^*. Кроме того, по лемме 4.6 эта функция слабо непрерывна со значениями в H. Поэтому начальное условие (7) имеет смысл.

Переформулируем понятие слабого решения

Определение 1.3. *Пусть* $n \leq 4$, $f \in L_2(0,T;(L_2(\Omega))^n)$ *и* $v^0 \in H$. *Слабым (вариационным) решением задачи (1)-(4) называется функция* $v \in L_2(0,T;V)$ *такая, что* $v^0 \in L_1(0,T;V^*)$, *равенство*

$$v'(t) - \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \tag{11}$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$ *и*

$$v(0) = v^0 \tag{12}$$

1.2 О единственности слабого и полного слабого решений в случае $n = 2$

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о единственности слабого и полного слабого решений краевой задачи (1)-(4) для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса. Будем показано, что в случае $\Omega \subset R^2$ слабое и полное слабое решение краевой задачи единственно. Однако для размерности $n > 2$ аналогичное утверждение неверно. Примером, показывающим, что слабое решение задачи не единственно, служит результат о бифуркации решений, содержащийся, например, в [22, гл.II, §4,п.4.4].

Сформулируем и докажем утверждение о единственности слабого решения в случае $n = 2$, следуя [22, гл.III, §3, теорема 3.2].

Теорема 1.1. *Пусть* Ω *ограниченная область в* R^2 *с локально липшицевой границей. Тогда слабое решение* v *и полное слабое решение* (v, p) *(при условии* $(p)\Omega = 0$*) задачи (1)-(4) единственно. Кроме того, функция* v *непрерывна на отрезке* $[0,T]$ *со значениями в* H *и*

$$v(t) \to v_0 \text{ в } H \text{ при } t \to \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Достаточно установить единственность слабого решения v, так как компонента p полного слабого решения определяется компонентой v из равенства (5.34) единственным образом.

Пусть v – решение задачи (5.31), (5.32). Покажем, что $v \in W$, т.е.

$v' \in L_2(0,T;V^*)$. Воспользуемся оценкой

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \leq c_0\|v\|^2_{(L_4(\Omega))^n},$$

полученной при выводе неравенства (3.10), в случае $n=2$ и $\varepsilon=0$. Применяя неравенство О.А. Ладыженской (1.7), получим для любого $t \in [0,T]$

$$\sup_{v\in V}\langle K(v),\ \frac{u}{\|v\|}\rangle \leq c_0 2^{1/2}(\int\limits_\Omega v(t)^2 dt)^{1/2} \cdot \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt$$

Отсюда, возводя обе части неравенства в квадрат и интегрируя по t на отрезке $[0,T]$, приходим к оценке

$$\int_0^T \sup(\langle K(v), \frac{u}{\|v\|}\rangle)^2 dt \leq 2c_0 \int_0^T (\int\limits_\Omega v(t)^2) \cdot \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt \leq$$

$$\leq 2c_0 \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega v(t)^2 dt \cdot \int_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt$$

Следовательно,

$$(\int_0^T \sup(\langle K(v), \frac{u}{\|v\|}\rangle)^2 dt)^{1/2} \leq c_0 2^{1/2} \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega v(t)^2 dt \cdot \int_0^T v(t)^2 dt$$

Из представления $v' = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t)$ очевидно, что $v' \in L_2(0,T;V^*)$ и $v \in W$. Воспользовавшись вложением $W \subset C([0,T],H)$, получаем $v \in C([0,T],H)$ и заключение (13) теоремы.

Покажем теперь единственность слабого решения. Предположим, что u и v – слабые решения задачи (5.31), (5.32). Подставим эти решения в уравнение (5.31) и рассмотрим разность полученных равенств. Для разности $w = v - u$ получим равенство

$$w' - \Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0$$

Применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции $w(t)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w(t,x)w(t,x)dt + v(w(t,x),w(t,x)) =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t}\cdot v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t,x)\cdot\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx \tag{14}$$

Оценим правую часть полученного равенства.

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t}\cdot v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} w(t,x)\cdot\frac{\partial w_i(t,x)}{\partial x_i}dx$$

Используем интегрирование по частям для вычисления первого интеграла

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} v(t,x)\cdot w(t,x) = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t}\cdot\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} w(t,x)dx$$

так как $\partial_i w_i(t,x) = \mathrm{div}\ w(t,x) = 0$. Используем интегрирование по частям для вычисления второго из интегралов

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} w(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx = \sum_{i=0}^{n=2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \mid w\mid^2 (t,x)}{\partial x_i}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n=2}\frac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial t\partial x_i}\cdot \mid w\mid^2 (t,x)dx = 0$$

так как $\sum_{i=1}^{2} \partial_i u_i(t,x) = \mathrm{div}\ u(t,x) = 0$ Отсюда и из равенства (14) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w(t,x)w(t,x)dx + v(w(t,x)w(t,x)) =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} \cdot \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} w(t,x)dx$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 + v\|w(t)\|_H^2 = \left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x)dx\right| \tag{15}$$

Оценим правую часть неравенства, используя неравенства Шварца,

$$\left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x)dx\right| = \left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_j(t,x) w_j(t,x)dx\right| \leq$$

$$\left(\int\limits_{\Omega} \mid w_i(t,x) \mid^2 |w_j(t,x) \mid^2 dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{\Omega} \mid \partial_i v_j(t,x) \mid^2 dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\left(\int\limits_{\Omega} \mid w_i(t,x) \mid^4 dx\right)^{1/4} \left(\int\limits_{\Omega} \mid w_j(t,x) \mid^4 dx\right)^{1/4} \cdot \left(\int\limits_{\Omega} \mid \partial_i v_j(t,x) \mid^2 dx\right)^{1/2}$$

или

$$\left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x)dx\right| \leq$$

$$\leq \|w_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \cdot \|w_j(t)\|_{L_4(\Omega)} \cdot \|\partial_i v_j(t)\|_{L_2(\Omega)}$$

Учитывая, что запись, содержащая повторяющиеся индексы, предполагает суммирование по этим индексам, получаем

$$\left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x)dx\right| \leq \|w(t)\|_{(L_4(\Omega))^n}^2 \cdot \|v(t)\|_V$$

Применим неравенство О.А. Ладыженской и далее неравенство Коши

$a \cdot b = \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} c\varepsilon = \frac{v}{2^{1/2}}$, получим

$$\left| \int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x) dx \right| \le$$

$$\le 2^{1/2} \|w(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} \cdot \|w(t)\|_V \cdot \|v(t)\|_V \le$$

$$\le v \|w(t)\|_V^2 + \frac{1}{2^{3/2} v} \|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}^2 \cdot \|w(t)\|_V$$

Подставляя полученное соотношение в неравенство (15), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_H^2 \le \frac{1}{2^{3/2} v} \|w(t)\|_H^2 \cdot \|v(t)\|_V$$

Тогда из неравенство Гронуолла-Беллмана [1, теорема 2б глава IV, с.188] следует

$$\|w(t)\|_H^2 \le \|w(0)\|_H^2 \exp\left(\int_0^t \frac{1}{2^{1/2} v} \cdot \|v(s)\|_V ds \right)$$

Поскольку $w(0) = v(0) - u(0) = 0$, то из полученного выше неравенства приходим к выводу, что $w(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Следовательно, $v = u$ и слабое и полное слабое решение задачи (1)-(4) единственно. $\square$