

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математический факультет

Кафедра алгебры и математических методов гидродинамики

**Изучение единственности слабых решений уравнений Навье-Стокса**

Бакалаврская работа

Направление 01.03.01 Математика

Профиль Математическое моделирование

Зав. кафедрой	_____	д.ф.-м.н., проф.	В. Г. Звягин 22.06.2020
---------------	-------	---------------------	-------------------------

Обучающийся			Д. А. Мукасева
-------------	---	--	----------------

Руководитель	_____	к.ф.-м.н., доц.	А. В. Звягин
--------------	-------	-----------------	--------------

Воронеж 2020

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Математический факультет

Кафедра алгебры и математических методов гидродинамики

**Изучение единственности слабых решений уравнений Навье-Стокса**

Бакалаврская работа

Направление 01.03.01 Математика

Профиль Математическое моделирование

Зав. кафедрой	_____	д.ф.-м.н., проф.	В. Г. Звягин 08.06.2020
---------------	-------	---------------------	-------------------------

Обучающийся	_____		Д. А. Мукасева
-------------	-------	--	----------------

Руководитель	_____	к.ф.-м.н., доц.	А. В. Звягин
--------------	-------	-----------------	--------------

Воронеж 2020

# Содержание

Введение	4
1 Понятие слабого решения	5
2 Единственность слабого решения	15
Список литературы	19

# Введение

В данной бакалаврской работе изучается система уравнений Навье-Стокса. Данная система уравнений датируется 1822 г., когда Навье<sup>1</sup> впервые записал уравнение в частных производных для потока вязкой жидкости. Стокс<sup>2</sup> внес свой вклад в 1842 и 1843 г. Эйлер записал уравнения в частных производных для жидкости с нулевой вязкостью — совершенно невязкой в 1757 г. Это уравнение тоже полезно, но большинство реальных жидкостей, включая воду и воздух, является вязкими, поэтому Навье и Стокс моделировали уравнение Эйлера таким образом, чтобы учесть это свойство. Они вывели примерно одинаковые уравнения независимо друг от друга, поэтому оно называется в честь них обоих. Навье сделал в процессе вывода несколько математических ошибок, но получил верный ответ, а у Стокса с математикой все было в порядке, и именно поэтому мы знаем, что ответ Навье верен, несмотря на ошибку.

Несмотря на довольно долгие математические исследования данной системы уравнений (начиная с 1822 г.), вопрос существования и гладкости решений для системы Навье-Стокса остался открытым до сих пор. В анализе решений данной системы заключается суть одной из семи "проблем тысячелетия за решение которых Математический институт Клэя назначил огромную премию. Одним из главных и глобальных толчков при изучении данной системы было доказательство Жаном Лере в 1934 г. существования и в ряде случаев единственности слабых решений для данной системы. Данная бакалаврская работа посвящена как раз рассмотрению и изучению понятия слабого решения для системы уравнений Навье-Стокса, а также изучению единственности слабых решений в двумерном случае.

---

<sup>1</sup> Клод-Луи Навье — французский инженер и физик

<sup>2</sup> Джордж Стокс — ирландский математик и физик

# 1 Понятие слабого решения

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в пространстве  $R^n$ , где  $n = 2, 3$ , с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$ . Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0; \quad (2)$$

$$v|_{t=0} = v_0; \quad (3)$$

$$v|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $v = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$  — вектор-функция скорости движения частицы жидкости,  $p = p(t, x)$  — функция давления,  $f = f(t, x)$  — вектор-функция плотности внешних сил,  $\nu > 0$  — коэффициент вязкости.  $\Delta v = (\Delta v_1, \dots, \Delta v_n)$ ,  $\Delta v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_n^2}$ ;  $\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$ ;  $\nabla p = (\frac{\partial p}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_n})$ .

Сформулируем определение сильного решения рассматриваемой задачи (1)-(4). Для этого введем необходимые функциональные пространства:

$L_p(\Omega)$  — множество измеримых функций, суммируемых с  $p$ -ой степенью, где  $1 \leq p < \infty$ , и нормой  $\|v\|_{L_p(\Omega)} = (\int_{\Omega} |v(x)|^p dx)^{1/p}$ .

Пространство  $L_{\infty}(\Omega)$  состоит из измеримых существенно ограниченных функций  $v : \Omega \rightarrow R^n$ . Функция  $v : \Omega \rightarrow R^n$  называется существенно ограниченной, если существует число  $C_1 < \infty$ , что  $|v(x)| \leq C_1$  при почти всех  $x \in \Omega$ . Норма в  $L_{\infty}(\Omega)$  задается  $\|v\|_{L_{\infty}(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)|$ .

$W_p^m(\Omega)$  — где  $m \geq 1$ ,  $p \geq 1$ , пространство Соболева, состоящее из функции, которые со своими обобщенными частными производными до порядка  $m$  включительно принадлежат пространству  $L_p(\Omega)$ . Норма в  $W_p^m(\Omega)$

задается  $\|v\|_{W_p^m(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} v(x)|^p dx \right)^{1/p}$ .

$C_0^\infty(\Omega)$  — пространство бесконечно дифференцируемых функций на  $\Omega$  со значениями в  $R^n$  и с компактным носителем, содержащимся в  $\Omega$ .

$\mathcal{V}$  — множество функций  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ , таких что  $\operatorname{div} v = 0$ ;

$H$  — замыкание  $\mathcal{V}$  по норме пространства  $L_2(\Omega)$ ;

$V$  — замыкание  $\mathcal{V}$  по норме пространства  $W_1^1(\Omega)$ ;

$L_p(a, b; X)$  — где  $1 \leq p < \infty$  пространство суммируемых с  $p$ -ой степенью функций на  $[a, b]$  со значениями в банаховом пространстве  $X$ . Норма пространства  $L_p(a, b; X)$  задается  $\|v\|_{L_p(a, b; X)} = \left( \int_0^T \|v(s)\|_X^p ds \right)^{1/p}$ .

Через  $L_\infty(a, b; X)$  будем обозначать множество всех измеримых существенно ограниченных функций  $v : [a, b] \rightarrow X$ . Множество  $L_\infty(a, b; X)$  является банаховым пространством относительно нормы  $\|v\|_{L_\infty(a, b; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \|v(s)\|_X$ .

Будем обозначать  $E^*$  сопряженное пространство к пространству  $E$ .

$\langle f, \varphi \rangle$  — обозначим действие функционала  $f$  из  $E^*$  на элемент  $\varphi$  из  $E$ .

$C_i$  — будем обозначать положительные константы.

Пусть  $f$  и  $v_0$  — заданные функции, где  $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$  и  $v_0 \in V$ .

**Определение 1.1.** *Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций  $v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$  и  $p \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ , удовлетворяющих следующим условиям:*

1. обобщенные частные производные функций, содержащихся в равенствах (1)-(2), принадлежат пространству  $L_2(0, T; L_2(\Omega))$ ;
2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве  $L_2(0, T; L_2(\Omega))$ ;
3. функция  $v$  удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Введем понятие слабого решения. Для этого пусть  $v$  и  $p$  — сильное решение задач (1)-(4).

Чтобы обеспечить понимание определения слабого решения, мы временно предположим, что  $v = v(t, x)$  и  $p = p(t, x)$  являются, фактически, гладкими решениями задачи. Сопоставим функции  $v$  отображение

$v : [0, T] \rightarrow W_2^1(\Omega)$ , определенное по формуле

$$[v(t)](x) = v(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Другими словами,  $v$  рассматривается не как функции переменных  $t$  и  $x$ , а как функция переменной  $t$ , определенная на отрезке  $[0, T]$  и принимающая значения в функциональном пространстве  $W_2^1(\Omega)$ .

Аналогично определим  $p : [0, T] \rightarrow L_2(\Omega)$  по формуле

$$[p(t)](x) = p(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega$$

и функцию  $f : [0, T] \rightarrow L_2(\Omega)$  по формуле

$$[f(t)](x) = f(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Умножая равенство (1) при фиксированных значениях  $t \in [0, T]$  на функцию  $\varphi(x) \in V$  скалярно в  $L_2(\Omega)$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx - \\ & - \nu \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx = \int_{\Omega} f \varphi dx. \end{aligned}$$

Выполним преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям <sup>3</sup>

$$-\nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx = \nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx.$$

---

<sup>3</sup> Теорема Грина (теорема об интегрировании по частям функций нескольких переменных)  
Пусть  $\Omega$  — область с липшицевой границей и пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  и  $g(x) = g(x_1, \dots, x_n) \in W_2^1(\Omega)$ .  
Тогда выполнено соотношение:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = \int_{\partial \Omega} f g v_i ds - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx,$$

где  $v_i$  —  $i$ -ая координата единичного вектора внешней нормали.

Здесь символ «:» обозначает покомпонентное матричное произведение, т. е. для  $C = (c_{ij}), D = (d_{ij}), i, j = 1, \dots, m$ , имеем  $C : D = \sum_{i,j=1}^m c_{ij}d_{ij}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} p \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \varphi dx = 0; \\ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i \varphi) dx = \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \\ &= - \int_{\Omega} v \varphi \operatorname{div} v dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к равенству

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + v \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx. \quad (5)$$

Заметим, что равенство (5) может выполняться и при более слабых требованиях на функцию  $v(t, x)$ . Покажем, что достаточно предполагать, что  $v \in L_2(0, T; V)$  для того, чтобы каждый интеграл, входящий в равенство (5), имел смысл.

В силу теоремы вложений Соболева<sup>4</sup> вложение  $W_2^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$  непрерывно при  $n \leq 4$ . Поэтому, так как  $V \subset W_2^1(\Omega)$ , то  $v_i(t, x)v(t, x) \in L_2(\Omega)$  и  $v_i(t, x)v(t, x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L_1(\Omega)$  при каждом фиксированном значении  $t$ . Следовательно, интеграл  $\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$  определен.

Кроме того, это слагаемое определяет линейный непрерывный функционал на  $V$ . Обозначим этот функционал через  $K(v)$ :

$$\langle K(v), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

<sup>4</sup> Пусть  $p_1 \geq p$  и  $\mathfrak{a}(W_{p_1}^{m_1}(\Omega)) > \mathfrak{a}(W_p^m(\Omega))$ , то пространство  $W_p^m(\Omega)$  компактно вложено в пространство  $W_{p_1}^{m_1}(\Omega)$ , где  $\mathfrak{a}(W_p^m(\Omega)) = \frac{n}{p} - m$ .



Отметим, что  $\int_{\Omega} v\varphi dx \in L_2(0, T)$  и производная в выражении  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v\varphi dx$  понимается в смысле распределений на интервале  $(0, T)$ . Поэтому равенство (5) выполняется в смысле распределений. Все слагаемые равенства, исключая первое, принадлежат пространству  $L_1(0, T)$ , поэтому  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v\varphi dx \in L_1(0, T)$  и равенство (5) выполняется для почти всех значений  $t \in (0, T)$ .

Подводя итог рассуждениям, приходим к следующему определению слабого решения.

**Определение 1.2.** Пусть  $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$  и  $v_0 \in H$ . Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция  $v \in L_2(0, T; V)$ , удовлетворяющая для всех  $\varphi \in V$  и для почти всех значений  $t \in (0, T)$  равенству

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v\varphi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f\varphi dx \quad (6)$$

с условием

$$v(0) = v_0. \quad (7)$$

Выше показано, что равенство (6) корректно для  $v \in L_2(0, T; V)$  и если  $(v, p)$  сильное решение задачи (1)-(4), то  $v$  является слабым решением. Поэтому задачу о поиске сильных решений заменим задачей об исследовании слабых решений.

Заметим, однако, что для функции  $v \in L_2(0, T; V)$  условие (7) не имеет смысла, так как не определено значение функции  $v(t)$  в каждой точке  $t \in (0, T)$ . Покажем, что функция  $v(t)$ , удовлетворяющая равенству (6), является непрерывной на  $[0, T]$  со значениями в  $V^*$  и слабо непрерывной со значениями в  $H$ . Поэтому равенство (7) имеет смысл и определение слабого решения корректно.

Преобразуем равенство (6). Скалярное произведение  $(v(t), \varphi)_{L_2(\Omega)}$  определяет линейный непрерывный функционал на  $H$ , а следовательно, элемент из  $H^*$ . Учитывая отождествление  $H \equiv H^*$  и цепочку вложений  $V \subset H \subset H^* \subset V^*$ , элемент  $v(t)$  можно рассматривать как функционал на  $V$ , действие которого на функцию  $\varphi \in V$  определяется равенством  $\langle v(t), \varphi \rangle = (v(t), \varphi)_{L_2(\Omega)}$ . Тогда можно считать, что функция  $v(t)$  на  $[0, T]$

принимает значения в  $V^*$  и

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx = \frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle.$$

С учетом введенных обозначений равенство (6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle - \nu \langle \Delta v(t), \varphi \rangle - \langle K(v(t)), \varphi \rangle = \langle f(t), \varphi \rangle,$$

где  $\Delta : V \rightarrow V^*$ , обозначает оператор Лапласа, действующий по правилу  $\langle \Delta v(t), \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx$ . Или можно (6) переписать в виде:

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle = \langle \nu \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), \varphi \rangle. \quad (8)$$

Исследуем свойства операторов, входящих в правую часть равенства.

**Лемма 1.1.**

1. Оператор  $\Delta : L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*)$  линейный и непрерывный, причем

$$\|\Delta v\|_{L_2(0, T; V^*)} = \|v\|_{L_2(0, T; V)}, \quad \forall v \in L_2(0, T; V). \quad (9)$$

2. Оператор  $K : L_2(0, T; V) \rightarrow L_1(0, T; V^*)$  непрерывен и справедлива оценка

$$\|K(v)\|_{L_1(0, T; V^*)} \leq C_2 \|v\|_{L_2(0, T; V)}^2, \quad \forall v \in L_2(0, T; V), \quad (10)$$

для некоторой константы  $C_2$ .

*Доказательство.*

1. Покажем, что оператор  $\Delta : V \rightarrow V^*$  линейный. Для этого возьмем  $v$  и  $u$ , принадлежащая пространству  $V$  и применим к ним оператор

Лапласа

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha v + \beta u) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\alpha v_i + \beta u_i) = \\ &= \alpha \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} + \beta \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = \alpha \Delta v + \beta \Delta u.\end{aligned}$$

Заметим, что оператор  $\Delta : V \rightarrow V^*$  определяет геометрию пространств. Действительно:

$$\begin{aligned}\|\Delta v\|_{V^*} &= \sup_{\varphi \in V} \frac{|\langle \Delta v, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_V} = \sup_{\varphi \in V} \frac{\left| \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx \right|}{\|\varphi\|_V} \leq \\ &\leq \sup_{\varphi \in V} \frac{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)}}{\|\varphi\|_V} \leq \sup_{\varphi \in V} \frac{\|v\|_V \|\varphi\|_V}{\|\varphi\|_V} = \|v\|_V.\end{aligned}$$

То есть  $\|\Delta v\|_{V^*} \leq \|v\|_V$ . С другой стороны, положим  $\varphi = v$  :

$$|\langle \Delta v, v \rangle| = \left| \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx \right| = \|v\|_V^2.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского

$$\|v\|_V^2 = |\langle \Delta v, v \rangle| \leq \|\Delta v\|_{V^*} \|v\|_V.$$

Сократив на  $\|v\|_V$ , получим  $\|\Delta v\|_{V^*} \geq \|v\|_V$ . Следовательно получаем  $\|\Delta v\|_{V^*} = \|v\|_V$ . Заметим, что линейный ограниченный оператор является непрерывным.

Отсюда для  $v \in L_2(0, T; V)$  имеем  $\|\Delta v\|_{V^*} = \|v(t)\|_V$  для почти всех  $t \in [0, T]$ . Так как  $\|v(t)\|_V \in L_2(0, T)$ , то  $\|\Delta v(t)\|_{V^*} \in L_2(0, T)$ . Следовательно,  $\Delta v \in L_2(0, T; V^*)$  и справедливо равенство (9). Таким образом, линейный оператор  $\Delta$  определяет изометрию пространств  $L_2(0, T; V)$  и  $L_2(0, T; V^*)$ .

2. По определению оператора  $K$  для любых  $v, \varphi \in V$  действует по правилу

$$\langle K(v), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx.$$

Значит для любого  $v \in V$  получим

$$\begin{aligned} \left| \langle K(v), \varphi \rangle \right| &\leq \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \\ &\leq \left( \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left| v_i v_j \right|^2 dx \right)^{1/2} \left( \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| v_i \right|^4 dx \right)^{1/4} \left( \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| v_j \right|^4 dx \right)^{1/4} \left( \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \|v\|_{L_4(\Omega)}^2 \|\varphi\|_V. \end{aligned}$$

По теореме вложения Соболева вложение  $V \in L_4(\Omega)^n$  непрерывно для  $n \leq 4$ , поэтому,  $\|v\|_{L_4(\Omega)^n} \leq C_3 \|v\|_V$  и, следовательно,  $\|K(v)\|_{V^*} \leq C_3^2 \|v\|_V^2$ . Отсюда для  $v \in L_2(0, T; V)$  имеем  $K(v) \in L_1(0, T; V^*)$  и

$$\begin{aligned} \|K(v)_{L_1(0,T;V^*)}\| &\leq \int_0^T \|K(v(t))\|_{V^*} dt \leq \\ &\leq C_3^2 \int_0^T \|v(t)\|_V^2 dt = C_3^2 \|v\|_{L_2(0,T;V)}^2. \end{aligned}$$

Докажем непрерывность оператора  $K$ . Для любых функций  $v, u \in L_2(0, T; V)$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_0^T \|K(v) - K(u)\|_{V^*} dt &\leq \int_0^T \left( \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_i v_j - u_i u_j)^2 dx \right)^{1/2} dt \leq \\ &\leq \int_0^T \left( \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_i(v_j - u_j) + (v_i - u_i)u_j)^2 dx \right)^{1/2} dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \left( \int_{\Omega} v_i^2 (v_j - u_j)^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{\Omega} (v_i - u_i)^2 u_j dx \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \sqrt{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^T (\|v_i\|_{L_4(\Omega)} \|v_j - u_j\|_{L_4(\Omega)} + \|v_i - u_i\|_{L_4(\Omega)} \|u_j\|_{L_4(\Omega)}) dt \leq \\
&\leq C_2 (\|v\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} + \|u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}) \|v - u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Отсюда, если  $\|v - u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \rightarrow 0$ , то  $\|K(v) - K(u)\|_{L_1(0,T;V)} \rightarrow 0$ . Поэтому отображение  $K$  непрерывно.

□

По утверждению леммы  $\nu \Delta v \in L_2(0, T; V^*)$ ,  $K(v) \in L_1(0, T; V^*)$ , поэтому  $\nu \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t) \in L_1(0, T; V^*)$ . Тогда из равенства (8) и теоремы<sup>5</sup> следует:

1. что функция  $v(t)$  имеет суммируемую производную  $v'(t)$ ;
2. в силу равенства  $\frac{d}{dt} \langle \phi, u(t) \rangle = \langle \phi, g(t) \rangle$ ;

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle = \langle v'(t), \varphi \rangle;$$

3. равенство  $\frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle = \langle \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), \varphi \rangle$  можно записать в виде

$$v'(t) = \nu \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t).$$

---

<sup>5</sup> Теорема Пусть  $X$  — банахово пространство с сопряженным  $X^*$  и функции  $u, g$  принадлежат пространству  $L_1(a, b, X)$ . Тогда следующие три условия эквивалентны:

(а) функция  $u(t)$  почти всюду равна первообразной от  $g(t)$  и для п.в.  $t \in [a, b]$

$$u(t) = \xi + \int_a^b g(s) ds, \xi \in X;$$

(б) для каждой пробной функции  $\eta \in \mathcal{D}(a, b)$

$$\int_a^b u(t) \eta'(t) dt = - \int_a^b g(t) \eta(t) dt;$$

(с) для каждого  $\phi \in X^*$

$$\frac{d}{dt} \langle \phi, u(t) \rangle = \langle \phi, g(t) \rangle$$

в смысле скалярных распределений на  $(a, b)$ . Если условия (а)-(с) выполнены, то  $u$ , в частности, почти всюду равна некоторой непрерывной функции.

Подводя итог рассуждений, отметим, что так как  $v'(t) \in L_1(0, T; V^*)$ , в силу леммы 1.2

**Лемма 1.2.** *Для  $p_0 \geq 1$ ,  $p_1 \geq 1$  имеет место вложение  $W_{p_0, p_1} = \{v \in L_{p_0}(a, b, X_0), v_1 \in L_{p_0}(a, b, X_0)\} \subset C([a, b], X_1)$  и это вложение непрерывно.*

поэтому функция  $v(t)$  непрерывна на отрезке  $[0, T]$  со значениями в  $V^*$ . Кроме того, в виду леммы 1.3,

**Лемма 1.3.** *Пусть  $X$  и  $Y$  — банаховы пространства, такие, что  $X$  — рефлексивно и вложение  $X \subset Y$  непрерывно. Если функция  $v \in L_\infty(a, b; X)$  слабо непрерывна как функция со значениями в  $Y$ , то и слабо непрерывна и как функция со значениями в  $X$ .*

если функция  $v \in L_\infty(0, T; H)$ , то эта функция слабо непрерывна со значениями в  $H$ . Поэтому начальное условие (7) имеет смысл.

Переформулируем понятие слабого решения

**Определение 1.3.** *Пусть  $n \leq 4$ ,  $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$  и  $v \in H$ . Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция  $v \in L_2(0, T; V) \cap L_\infty(0, T; H)$  и условию  $v' \in L_1(0, T; V^*)$ , удовлетворяющая при почти всех значений  $t \in (0, T)$  равенству*

$$v'(t) - \nu \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \quad (11)$$

и начальному условию

$$v(0) = v_0. \quad (12)$$

Для системы уравнений Навье-Стокса (1)-(4) Ж. Лере в 1934 г. был получен следующий результат:

**Теорема 1.1.** *Пусть  $n = 2, 3$ . Для каждой функции  $f \in L_2(0, T; V^*)$  и  $v_0 \in H$  начально-краевая задача (1)-(4) имеет хотя бы одно слабое решение  $v$ .*

## 2 Единственность слабого решения

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о единственности слабого решения начально-краевой задачи (1)-(4) для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса. Покажем, что в случае  $\Omega \subset R^2$  слабое решение начально-краевой задачи единственно. Однако для размерности  $n > 2$  аналогичное утверждение неверно. Примером, показывающим, что слабое решение задачи не единственно, служит результат о бифуркации решений, содержащийся, например, в [1, гл.II, §4, п.4.4].

Сформулируем и докажем утверждение о единственности слабого решения в случае  $n = 2$ .

**Теорема 2.1.** *Пусть  $\Omega$  ограниченная область в  $R^2$  с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$ . Тогда слабое решение  $v$  задачи (1)-(4) единственно.*

*Доказательство.* Покажем единственность слабого решения. Предположим, что  $u$  и  $v$  – слабые решения начально-краевой задачи (1)-(4). Значит, для этих функций выполнено операторное равенство (11). Рассмотрим разность полученных равенств. Для разности  $w = v - u$  получим равенство

$$w' - \nu \Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0$$

Применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции  $w(t)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(t, x) w(t, x) dx + \nu \int_{\Omega} \nabla w(t, x) : \nabla w(t, x) dx = \\ & = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} v_i(t, x) v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u_i(t, x) u(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Оценим правую часть полученного равенства.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} v_i(t, x) v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u_i(t, x) u(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx = \\ & = \sum_{i=1}^2 \left[ \int_{\Omega} v_i(t, x) v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} u_i(t, x) v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} u_i(t, x) v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} u_i(t, x) u(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx \Big] = \\
& = \sum_{i=1}^2 \left[ \int_{\Omega} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} (v_i(t, x) - u_i(t, x)) dx + \right. \\
& + \int_{\Omega} u_i(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} (v(t, x) - u(t, x)) dx \Big] = \sum_{i=1}^2 \left[ \int_{\Omega} w_i(t, x) v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\Omega} w(t, x) u_i(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} \right] dx.
\end{aligned}$$

Используем интегрирование по частям для вычисления первого интеграла

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} w_i(t, x) v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx = - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} w_i(t, x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx,$$

так как  $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial x_i} = \operatorname{div} w(t, x) = 0$ . Используем интегрирование по частям для вычисления второго из интегралов

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n=2} \int_{\Omega} u_i(t, x) w(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx &= \sum_{i=1}^{n=2} \int_{\Omega} u_i(t, x) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial |w(t, x)|^2}{\partial x_i} dx = \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=2} \frac{\partial u_i(t, x)}{\partial x_i} \cdot |w(t, x)|^2 dx = 0,
\end{aligned}$$

так как  $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i(t, x)}{\partial x_i} = \operatorname{div} u(t, x) = 0$ . Отсюда и из равенства (13) получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(t, x) w(t, x) dx + \nu \int_{\Omega} \nabla w(t, x) : \nabla w(t, x) dx = \\
& = - \sum_{i=1}^{n=2} \int_{\Omega} w_i(t, x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx
\end{aligned}$$



ИЛИ

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_H^2 + \nu \|w(t)\|_V^2 \leq \left| \sum_{i=1}^{n=2} \int_{\Omega} w_i(t, x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx \right|. \quad (14)$$

Оценим правую часть неравенства, используя неравенства Шварца:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n=2} \int_{\Omega} w_i(t, x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx \right| &= \left| \sum_{i,j=1}^{n=2} \int_{\Omega} w_i(t, x) \frac{\partial v_j(t, x)}{\partial x_i} w_j(t, x) dx \right| \leq \\ &\leq \left( \sum_{i,j=1}^{n=2} \int_{\Omega} |w_i(t, x)|^2 |w_j(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i,j=1}^{n=2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_j(t, x)}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\quad \left( \sum_{i=1}^{n=2} \int_{\Omega} |w_i(t, x)|^4 dx \right)^{1/4} \left( \sum_{j=1}^{n=2} \int_{\Omega} |w_j(t, x)|^4 dx \right)^{1/4} \cdot \\ &\quad \cdot \left( \sum_{i,j=1}^{n=2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_j(t, x)}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n=2} \int_{\Omega} w_i(t, x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx \right| &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n=2} \|w_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \|w_j(t)\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Учитывая, суммирование по повторяющимся индексам, получаем

$$\left| \sum_{i=1}^{n=2} \int_{\Omega} w_i(t, x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx \right| \leq \|w(t)\|_{L_4(\Omega)}^2 \|v(t)\|_V.$$

Применим неравенство О.А. Ладыженской и далее неравенство Коши

$a \cdot b = \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} c$   $\varepsilon = \frac{\nu}{2^{1/2}}$ , получим

$$\left| \sum_{i=1}^{n=2} \int_{\Omega} w_i(t, x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^{1/2} \|w(t)\|_{L_2(\Omega)} \|w(t)\|_V \|v(t)\|_V \leq \\
&\leq \nu \|w(t)\|_V^2 + \frac{1}{2^{3/2}\nu} \|w(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \|v(t)\|_V.
\end{aligned}$$

Подставляя полученное соотношение в неравенство (14), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2^{3/2}\nu} \|w(t)\|_H^2 \|v(t)\|_V.$$

Тогда из неравенства Гронуолла-Беллмана [1, теорема 2б, глава IV, с.188] следует

$$\|w(t)\|_H^2 \leq \|w(0)\|_H^2 \exp \left( \int_0^t \frac{1}{2^{1/2}\nu} \|v(s)\|_V ds \right).$$

Поскольку  $w(0) = v(0) - u(0) = 0$ , то из полученного выше неравенства приходим к выводу, что  $w(t) = 0$  для всех  $t \in [0, T]$ . Следовательно,  $v = u$  и слабое решение задачи (1)-(4) единственно.  $\square$

## Список литературы

1. Р. Темам. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ.  
/ Р. Темам. — 1833 — Москва, 1987. — 409 с.
2. В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко. Аппроксимационно-топологический переход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье-Стокса.  
/ В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // — Москва: Едиториал УРСС, 2004. — 112 с.
3. О. А. Ладыжская. Математические вопросы / О.А. Ладыжская. // — Москва: Наука, 1970. — 288 с.
4. Ж. Л. Лионс. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.  
/ Ж.-Л. Лионс. // — Москва: Мир, 1972 г., — 587 с.
5. Leray J. Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace.  
/ J. Leray // Acta Math, 1934, 193-248 p.