«Изучение единственности слабых решений системы Навье-Стокса»

Мукасеева Дарья Александровна

22.06.2020

Бакалаврская работа
Направление 01.03.01 Математика
Профиль Математическое моделирования

Понятие слабого решения

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n, где $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0; \tag{2}$$

$$v\big|_{t=0} = v_0; \tag{3}$$

$$v\big|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Введение необходимых функциональных пространств

$L_p(\Omega)$ — множество измеримых функций, суммируемых с p-ой степенью, где $1 \le p < \infty$, и нормой $\|v\|_{L_p(\Omega)} = (\int\limits_\Omega |v(x)|^p dx)^{1/p}$.

Пространство $L_\infty(\Omega)$ состоит из измеримых существенно ограниченных функций $v : \Omega \to R^n$. Функция $v : \Omega \to R^n$ называется существенной ограниченной, если существует число $C_1 < \infty$, что $|v(x)| \le C_1$ при почти всех $x \in \Omega$. Норма в $L_\infty(\Omega)$ задается $\|v\|_{L_\infty(\Omega)} = ess \sup\limits_{x\in\Omega}|v(x)|$.

$W_p^m(\Omega)$ — где $m \geqslant 1,\ p \geqslant 1$, пространство Соболева, состоящее из функции, которые со своими обобщенными частными производными до порядка m включительно принадлежат пространству $L_p(\Omega)$.

Норма в $W_p^m(\Omega)$ задается $\|v\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_\Omega |D^\alpha v(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Введение необходимых функциональных пространств

$L_p(a, b; X)$ — где $1 \leq p < \infty$ пространство суммируемых с p-ой степенью функций на $[a, b]$ со значениями в банаховом пространстве X. Норма пространства $L_p(a, b; X)$ задается $\|v\|_{L_p(a,b;X)} = (\int\limits_0^T \|v(s)\|_X^p ds)^{1/p}$.

Через $L_\infty(a, b; X)$ будем обозначать множество всех измеримых существенно ограниченных функций $v : [a, b] \to X$. Множество $L_\infty(a, b; X)$ является банаховым пространством относительно нормы $\|v\|_{L_\infty(a,b;X)} = ess \sup\limits_{x \in \Omega} \|v(s)\|_X$.

Определение сильного решения

Определение

Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций $v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ *и* $p \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, *удовлетворяющих следующим условиям:*

1. обобщенные частные производные функций, содержащихся в равенствах (1)-(4), принадлежат пространству $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;
2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;
3. функция v удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Определение слабого решения

Определение

Пусть $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ *и* $v_0 \in H$. *Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция* $v \in L_2(0, T; V)$, *удовлетворяющая для всех* $\varphi \in V$ *и для почти всех значений* $t \in (0, T)$ *равенству*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi dx \tag{5}$$

и условию

$$v(0) = v_0. \tag{6}$$

Доказательство линейности и непрерывности оператора $\Delta : L_2(0, T; V)$ßL$_2(0, T; V^*)$

Лемма

1. *Оператор* $\Delta : L_2(0, T; V) \to L_2(0, T; V^*)$ *линейный и непрерывный, причем*

$$\|\Delta v\|_{L_2(0,T;V^*)} = \|v\|_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0, T; V^*). \tag{7}$$

2. *Оператор* $K : L_2(0, T; V) \to L_1(0, T; V^*)$ *непрерывен и справедлива оценка*

$$\|K(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_2 \|v\|^2_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0, T; V^*), \tag{8}$$

для некоторой константы C_2.

Вывод из леммы

По утверждению леммы $\nu\Delta v \in L_2(0, T; V^*), K(v) \in L_1(0, T; V^*)$, поэтому $\nu\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t) \in L_1(0, T; V^*)$.

1. что функция $v(t)$ имеет суммируемую производную $v'(t)$;
2. в силу равенства $\frac{d}{dt}\langle\phi, u(t)\rangle = \langle\phi, g(t)\rangle$;
$$\frac{d}{dt}\langle v(t), \varphi\rangle = \langle v'(t), \varphi\rangle;$$
3. равенство $\frac{d}{dt}\langle v(t), \varphi\rangle = \langle\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), \varphi\rangle$ можно записать в виде
$$v'(t) = \nu\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t).$$

Принадлежность $v'(t)$к пространству $L_1(0, T; V^*)$

Лемма

Для $p_0 \geq 1, \; p_1 \geq 1$ *имеет место вложение* $W_{p_0,p_1} = \{v \in L_{p_0}(a, b, X_0), \; v_1 \in L_{p_0}(a, b, X_0)\} \subset C([a, b], X_1)$ *и это вложение непрерывно.*

Лемма

Пусть X *и* Y *— банаховы пространства, такие, что* X *— рефлективно и вложение* $X \subset Y$ *непрерывно. Если функция* $v \in L_\infty(a, b; X)$ *слабо непрерывна как функция со значениями в* Y*,то и слабо непрерывна и как функция со значениями в* X.

Определение слабого решения

Определение

Пусть $n \leq 4$, $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ *и* $v \in H$. *Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция* $v \in L_2(0, T; V) \cap L_\infty(0, T; H)$ *и условиюv*$' \in L_1(0, T; V^*)$, *удовлетворяющая при почти всех значений* $t \in (0, T)$ *равенству*

$$v'(t) - \nu \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \tag{9}$$

и начальному условию

$$v(0) = v_0. \tag{10}$$

Для системы уравнений Навье-Стокса (1)-(4) Ж. Лере в 1934 был получен следующий результат:

Теорема

Пусть $n = 2, 3$. *Для каждой функции* $f \in L_2(0, T; V^*)$ *и* $v_0 \in H$ *начально-краевая задача (1)-(4) имеет хотя бы одно слабое решение* v.

Единственность слабого решения

Теорема

Пусть Ω *ограниченная область в* R^2 *с достаточно гладкой границей* $\partial\Omega$*. Тогда слабое решение* v *решение задачи (1)-(4) единственно.*

Спасибо за внимание!