1 Эволюционная система уравнений Навье-Стокса

1.1 Понятие слабого решения

Пусть Ω-ограниченная область в пространстве R^n, где $n = 2, 3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0 \tag{2}$$

$$v|_{t=0} = v_0 \tag{3}$$

$$v|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0 \tag{4}$$

Здесь $v = (v_1(t,x), ..., v_n(t,x))$-скорость движения частицы жидкости, $p = p(t,x)$-функция давления, $f = f(t,x)$-функция плотности внешних сил, $\partial > 0$-коэффициент вязкости. $\Delta v - (......)$, $\operatorname{div} v - (......)$, $\nabla p - (....)$ Сформулируем определение сильного решения рассматриваемой задачи (1)-(4). Пусть f и v_0-заданные функции, где $f \in (L_2(0,T; L_2(\Omega)))$ и $v_0 \in V$.

Определение 1.1. *Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций $v \in L_2(0,T; L_2(\Omega))$ и $p \in L_2(0,T; L_2(\Omega))$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(?Нужен ли абзац ниже?)

Здесь f, v_0- заданные функции, $f : Q_T \to R^n, f \in (L_2(Q_T))^n$, где $f \in (L_2(Q_T))^n := f := (f_1, f_2, \dots, f_n)$, и $v^0 : \Omega \to R^n, v_0 \in V$, где $v \in (L_2(Q_T))^n := v := (v_1, v_2, \dots, v_n)$, такие что:

1. обобщенные частные производные функции, содержащиеся в равенствах (1)-(2), принадлежат пространствам $(L_2(Q_T))^n$ и $L_2(Q_T)$, соответственно;

2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространствах $(L_2(Q_T))^n$ и $L_2(Q_T)$, соответственно;

3. след функции v при $t = 0$ должно ровняться v_0 из (3) и v на границе должно равняться 0;

4. след функции v определен на границе области Γ и равен 0.

Введем понятие сильного решения для этого пусть v и p-сильное решение задач (1)-(4). Умножим равенство (1) на пробную функцию $\varphi \in V$ скалярно в $L_2(\Omega)$

Пусть (v, p)-сильное (обобщенное) решение задачи (1)-(2). Чтобы обеспечить понимание определения слабого решения, мы временно предположим, что $v = v(t, x), p = p(t, x)$ являются, фактически, гладкими решениями задачи. Сопоставим функции v отображение $v : [0, T] \to (H_0^1(\Omega))^n$, определенное по формуле

$$[v(t)](x) = v(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Другими словами, v рассматривается не как функции переменных t и x, а как функция переменной t, определенная на отрезке $[0, T]$ и принимающая значения в функциональном пространстве $(H_0^1(\Omega))^n$.

Аналогично определим $p : [0, T] \to (L_2(\Omega))^n$ по формуле

$$[p(t)](x) = p(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega$$

и функцию $f : [0, T] \to (L_2(\Omega))^n$ по формуле

$$[f(t)](x) = f(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Умножая равенство (1) при фиксированных значениях $t \in [0, T]$ на функцию $\varphi \in (D_s(\Omega))^n$ скалярно в $(L_2(\Omega))^n$, получим

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\,\varphi dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\,\varphi dx -$$

$$-\nu \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 v_j(t, x)}{\partial x_i^2} \varphi dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i}\,\varphi_i dx = \int\limits_\Omega f \varphi dx$$

Выполним преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям,

$$-\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2}\varphi dx=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\varphi\bigg|_{\Omega}=\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\int\limits_{\Omega}vdx.$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial p}{\partial x_i}\varphi_i dx=\sum_{i=1}^{n}p\varphi\bigg|_{\Omega}-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}p_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}dx=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_i\varphi dx-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_i v dx=v_i v\varphi\bigg|_{\Omega}-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_i v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx$$

приходим к равенству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}v\varphi dx-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_i v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx+v\int\limits_{\Omega}\nabla v:\nabla\varphi dx=\int\limits_{\Omega}f(t)\varphi dx \qquad (5)$$

Заметим, что то же равенство (5) верно для любой функции $\varphi\in V$, так как каждая часть этого равенства линейно и непрерывно зависит от φ в $(H_0^1(\Omega))^n$. Кроме того, равенство может выполняться и при более слабых требованиях на функцию $v(t,x)$. Покажем, что достаточно предполагать, что $v\in L_2(0,T;V)$ для того, чтобы каждый интеграл, входящий в равенство (5), имеет смысл.

В силу теоремы вложений Соболева вложение $(W_0^1(\Omega))^n\subset L_4(\Omega))^n$ непрерывно при $n\leqslant 4$. Поэтому, так как $V\subset W_0^1(\Omega))^n$, то $v_i(t,x)v(t,x)\in L_2(\Omega))^n$ и $v_i(t,x)v(t,x)\partial_i u(x)\in L_1(\Omega)$ при каждом фиксированном значении t. Следовательно, интеграл $\int\limits_{\Omega}v_i(t,x)v(t,x)\cdot\partial_i u(x)dx$ определен.

Кроме того, это слагаемое определяет линейный непрерывный функционал на V. Обозначим этот функционал через $K(v)$:

$$\langle(K,v),\varphi\rangle=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_i v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx$$

Отметим, что $\int\limits_{\Omega}v\varphi dx\in L_2(0,T)$ и производная в выражении $\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}v\varphi dx$ понимается в смысле распределений на интервале $(0,T)$. Поэтому равенство (5) выполняется в смысле распределений. Все слагаемые равенства, исключая первое, принадлежат пространству $L_1(0,T)$, поэтому $\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v\varphi dx \in L_1(0,T)$ и равенство (5) выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$.

Подводя итог рассуждениям, приходим к следующему определению слабого решения.

Определение 1.2. *Пусть $F \in (L_2(Q_T))^n$ и $v_0 \in H$. Слабым (вариационным) решением задачи (1)-(4) называется функция $F \in (L_2(0,T;V))$ такая,что равенство*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v\varphi dx - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_\Omega v_i v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx + v\int\limits_\Omega v\varphi dx = \int\limits_\Omega f\varphi dx \tag{6}$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$ и

$$v(0) = v_0 \tag{7}$$

Выше показано, что равенство (6) корректно для $v \in L_2(0,T;V)$ и если (v,p) сильное решение задачи (1)-(4), то v является слабым решением. Поэтому задачу о поиске сильных решений заменим задачей об исследовании слабых решений. Заметим, однако, что для функции $v \in L_2(0,T;V)$ условие (7) не имеет смысла, так как не определено значение функции $v(t)$ в точке $t \in (0,T)$. Покажем далее, что функция $v(t)$, удовлетворяющая равенству (6), является непрерывной на $[0,T]$ со значениями в V^* и слабо непрерывной со значениями в H. Поэтому равенство (7) имеет смысл и определение слабого решения корректно.

Преобразуем равенство (6). Скалярное произведение $(v(t),\varphi)_{(L_2(\Omega))^n}$ определяет линейный непрерывный функционал на H, а следовательно, элемент из H^*. Учитывая отождествление $H \equiv H^*$ и цепочку вложений $V \subset H \subset H^* \subset V^*$, элемент $v(t)$ можно рассматривать как функционал на V, действие которого на функцию $\varphi \in V$ определяется равенством $\langle v(t),\varphi\rangle = (v(t),u)_{(L_2(\Omega))^n}$.Тогда можно считать, что функция $v(t)$ на $[0,T]$

принимает значения в V^* и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx = \frac{d}{dt}\langle v(t),\ \varphi\rangle$$

С учетом введенных обозначений равенство (6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle v(t),\ \varphi\rangle - \langle v\int\limits_{\Omega}(v(t)\varphi)dx\rangle - \langle (K, v(t)),\ \varphi\rangle = \langle \int\limits_{\Omega}(f(t)\varphi)dx\rangle$$

где $\Delta : V \to V^*$, или в виде

$$\frac{d}{dt}\langle v(t),\ \varphi\rangle = \langle \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t),\ \varphi\rangle \tag{8}$$

Исследуем свойства выражений, входящих в правую часть равенства.

Лемма 1.1.

1. *В случае произвольного n отображение $\Delta : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ линейно и непрерывно, причем*

$$\parallel \Delta u \parallel_{L_2(0,T;V^*)} = \parallel \Delta u \parallel_{L_2(0,T;V)},\ \forall u \in L_2(0,T;V^*) \tag{9}$$

2. *Пусть $n \le 4$. Тогда отображение $K : L_2(0,T;V) \to L_1(0,T;V^*)$ непрерывно и справедлива оценка*

$$\parallel \Delta u \parallel_{L_2(0,T;V^*)} = \parallel \Delta u \parallel_{L_2(0,T;V)} \quad \forall u \in L_2(0,T;V^*) \tag{10}$$

для некоторой константы C_0.

Доказательство.

1. В главе 2 показано, что отображение $\Delta : V \to V^*$ линейно, непрерывно и определяет изометрию пространств. Следовательно, $\parallel \Delta u \parallel_{V^*} = \parallel u \parallel_V$ для всех $u \in V$.Отсюда для $u \in L_2(0,T;V)$ имеем $\parallel \Delta u \parallel_{V^*} = \parallel u(t) \parallel_V$ для почти всех $t \in [0,T]$. Так как $\parallel u(t) \parallel_V \in$

$L_2(0,T)$, то $\| \Delta u(t) \|_V^* \in L_2(0,T)$. Следовательно, $\Delta u \in L_2(0,T;V^*)$ и справедливо равенство (9). Таким образом, линейный оператор Δ определяет изометрию пространств $L_2(0,T;V)$ и $L_2(0,T;V^*)$.

2. По определению оператора K

$$\langle K(t), u\rangle = \int\limits_\Omega u_i(x)u_j(x)\cdot\partial_i u_j(x)dx$$

для $u,v \in V$. Повторяя рассуждения доказательства леммы 3.1 или используя оценки (3.10), получим

$$\| K(v(t)) \|_{V^*} \le c_0 \| v(t) \|_V^2,\ \forall v \in V,\ t \in [0,T],$$

с некоторой константой c_0. Отсюда для $v \in L_2(0,T;V)$ имеем $K(v) \in L_1(0,T;V^*)$ и

$$\| K(v) \|_{L_1(0,T;V^*)} \le \int_0^T \| K(v(t)) \|_{V^*}\, dt \le c_0 \int_0^T \| v(t) \|_V^2\, dt =$$

$$= c_0 \| v(t) \|^2_{L_2(0,T;V)}$$

Повторяя рассуждения доказательства леммы 3.1, получим, что для $v,u \in L_2(0,T;V)$ справедлива оценка

$$\int_0^T \| K(v) - K(u) \|_{V^*}\, dt \le \int_0^T (\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (v_iv_j - u_iu_j)^2 dx)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \int_0^T (\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (v_i(v_j-u_j) + (v_i-u_i)u_j)dx)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sqrt{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^T (\int\limits_\Omega v_i^2(v_j-u_j)^2dx)^{\frac{1}{2}} + (\int\limits_\Omega (v_i-u_i)^2u_j^2dx)^{\frac{1}{2}}dt \le$$

$$\le \sqrt{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^T (\| v_i(t) \|_{L_4(\Omega)} \| v_j(t) - u_j(t) \|_{L_4(\Omega)} +$$

$$+ \| v_i(t) - u_i(t) \|_{L_4(\Omega)} \| u_j(t) \|_{L_4(\Omega)})dt \le$$

$$\leq C_2(\| v \|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} + \| u \|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}) \| v - u \|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}$$

Кроме того, вложение $V \subset (L_4(\Omega))^n$, а следовательно, и вложение $L_2(0,T;V) \subset L_2(0,T;(L_4(\subset))^n)$ непрерывны. Поэтому достаточно доказать непрерывность отображений

$$\phi_{ij} : L_2(0,T;(L_4(\Omega))^n) \to L_1(0,T;L_2(\Omega)), \varphi_{ij}(v) = v_i v_j$$

для $i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Для любых $u,\ v \in L_2(0,T;(L_4(\Omega))^n)$ с помощью неравенства Шварца получаем оценку

$$\| \phi_{ij}(u) - \phi_{ij}(v) \|_{L_1(0,T;L_2(\Omega))} = \int_0^T (\int\limits_\Omega (v_i v_j - u_i u_j)^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \int_0^T (\int\limits_\Omega v_i^2 (v_j - u_j)^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int\limits_\Omega (v_i - u_i)^2 u_j^2 dx)^{\frac{1}{2}} dt \leq$$

$$\int_0^T (\| v_i(t) \|_{L_4(\Omega)} \| v_j(t) - u_j(t) \|_{L_4(\Omega)} +$$

$$+ \| v_i(t) - u_i(t) \|_{L_4(\Omega)} \| u_j(t) \|_{L_4(\Omega)}) dt \leq$$

$$\leq \| v_i \|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \| v_j - u_j \|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} +$$

$$+ \| v_i - u_i \|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \| u_j \|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}$$

Отсюда, если $\| v - u \|\ L_2(0,T;(L_4(\Omega))^n) \to 0$, то $\| \phi_{ij}(u) - \phi_{ij}(v) \|\ L_1(0,T;L_2(\Omega)) \to 0$. Поэтому каждое из отображений ϕ_{ij}, а следовательно, и отображение K непрерывны.

□

По утверждению леммы $\Delta v \in L_2(0,T;V^*), K(v) \in L_1(0,T;VV^*)$, поэтому $\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t) \in L_1(0,T;VV^*)$. Тогда из равенства (8) и теоремы 4.6 следует

1. что функция $v(t)$ имеет суммируемую производную $v\prime(t)$;

2. в силу равенства (4.3)

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), u\rangle = \langle v'(t), u\rangle$$

3. равенство (5.8) можно записать в виде

$$v'(t) = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t)$$

Подводя итог рассуждений, отметим, что так как $v'(t) \in L_1(0,T;V^*)$, то $v \in W_{2,1}cX_0 = V,\ X_1 = V^*$. Поэтому в силу леммы 4.5 функция $v(t)$ непрерывна на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^*. Кроме того, по лемме 4.6 эта функция слабо непрерывна со значениями в H. Поэтому начальное условие (7) имеет смысл.

Переформулируем понятие слабого решения

Определение 1.3. *Пусть $n \leq 4,\ f \in L_2(0,T;(L_2(\Omega))^n)$ и $v^0 \in H$. Слабым (вариационным) решением задачи (1)-(4) называется функция $v \in L_2(0,T;V)$ такая, что $v^0 \in L_1(0,T;V^*)$, равенство*

$$v'(t) - \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \tag{11}$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$ и

$$v(0) = v^0 \tag{12}$$

1.2 О единственности слабого и полного слабого решений в случае $n = 2$

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о единственности слабого и полного слабого решений краевой задачи (1)-(4) для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса. Будем показано, что в случае $\Omega \subset R^2$ слабое и полное слабое решение краевой задачи единственно. Однако для размерности $n > 2$ аналогичное утверждение неверно. Примером, показывающим, что слабое решение задачи неединственно, служит результат о бифуркации решений, содержащийся, например, в [22, гл.II, §4,п.4.4].

Сформулируем и докажем утверждение о единственности слабого решения в случае $n = 2$, следуя [22, гл.III, §3, теорема 3.2].

Теорема 1.1. *Пусть Ω ограниченная область в R^2 с локально липшицевой границей. Тогда слабое решение v и полное слабое решение (v,p) (при* *условии* $(p)\Omega = 0$*) задачи (1)-(4) единственно. Кроме того, функция* v *непрерывна на отрезке* $[0,T]$ *со значениями в* H *и*

$$v(t) \to v_0 \text{ в } H \text{ при } t \to \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Достаточно установить единственность слабого решения v, так как компонента p полного слабого решения определяется компонентой v из равенства (5.34) единственным образом.

Пусть v – решение задачи (5.31), (5.32). Покажем, что $v \in W$, т.е. $v' \in L_2(0,T;V^*)$. Воспользуемся оценкой

$$\| K_\varepsilon(v) \|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \leq c_0 \| v \|^2_{(L_4(\Omega))^n},$$

полученной при выводе неравенства (3.10), в случае $n = 2$ и $\varepsilon = 0$. Применяя неравенство О.А.Ладыженской (1.7), получим для любого $t \in [0,T]$

$$\sup_{v\in V} \langle K(v), \frac{u}{\| v \|} \rangle \leq c_0 2^{1/2} (\int\limits_\Omega v(t)^2 dt)^{1/2} \cdot \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt$$

Отсюда, возводя обе части неравенства в квадрат и интегрируя по t на отрезке $[0,T]$, приходим к оценке

$$\int_0^T \sup(\langle K(v), \frac{u}{\| v \|} \rangle)^2 dt \leq 2c_0 \int_0^T (\int\limits_\Omega v(t)^2) \cdot \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt \leq$$

$$\leq 2c_0 \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega v(t)^2 dt \cdot \int_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt$$

Следовательно,

$$(\int_0^T \sup(\langle K(v), \frac{u}{\| v \|} \rangle)^2 dt)^{1/2} \leq c_0 2^{1/2} \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega v(t)^2 dt \cdot \int_0^T v(t)^2 dt$$

Из представления $v' = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t)$ очевидно, что $v' \in L_2(0,T;V^*)$ и $v \in W$. Воспользовавшись вложением $W \subset C([0,T],H)$, получаем $v \in C([0,T],H)$ и заключение (13) теоремы.

Покажем теперь единственность слабого решения. Предположим, что u и v – слабые решения задачи (5.31), (5.32). Подставим эти решения в уравнение (5.31) и рассмотрим разность полученных равенств. Для разности $w = v - u$ получим равенство

$$w' - \Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0$$

Применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции $w(t)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w(t,x)w(t,x)dt + v(w(t,x), w(t,x)) = \\ = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} \cdot v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x) \cdot \frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx \tag{14}$$

Оценим правую часть полученного равенства.

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} \cdot v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}w(t,x) \cdot \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial x_i}dx$$

Используем интегрирование по частям для вычисления первого интеграла

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t}v(t,x) \cdot w(t,x) = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} \cdot \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx$$

так как $\partial_i w_i(t,x) = \operatorname{div}\, w(t,x) = 0$. Используем интегрирование по частям для вычисления второго из интегралов

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}w(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx = \sum_{i=0}^{n=2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \mid w \mid^2 (t,x)}{\partial x_i}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n=2}\frac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial t\partial x_i}\cdot \mid w\mid^2 (t,x)dx = 0$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{2}\partial_i u_i(t,x) = \mathrm{div}\ u(t,x) = 0$ Отсюда и из равенства (14) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w(t,x)w(t,x)dx + v(w(t,x)w(t,x)) =$$

$$= -\int\limits_{\Omega}\frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t}\cdot\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel w(t)\parallel_H^2 + v\parallel w(t)\parallel_H^2 = \left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)dx\right| \tag{15}$$

Оценим правую часть неравенства, используя неравенства Шварца,

$$\left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)dx\right| = \left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\cdot\partial_j(t,x)w_j(t,x)dx\right| \leq$$

$$\left(\int\limits_{\Omega}\mid w_i(t,x)\mid^2 \mid w_j(t,x)\mid^2 dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int\limits_{\Omega}\mid\partial_i v_j(t,x)\mid^2 dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\left(\int\limits_{\Omega}\mid w_i(t,x)\mid^4 dx\right)^{1/4}\left(\int\limits_{\Omega}\mid w_j(t,x)\mid^4 dx\right)^{1/4}\cdot\left(\int\limits_{\Omega}\mid\partial_i v_j(t,x)\mid^2 dx\right)^{1/2}$$

или

$$\left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)dx\right| \leq$$

$$\leq\parallel w_i(t)\parallel_{L_4(\Omega)}\cdot\parallel w_j(t)\parallel_{L_4(\Omega)}\cdot\parallel\partial_i v_j(t)\parallel_{L_2(\Omega)}$$

Учитывая, что запись, содержащая повторяющиеся индексы, предполагает суммирование по этим индексам, получаем

$$\left|\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\cdot\partial_i v(t,x)w(t,x)dx\right| \leq\parallel w(t)\parallel^2_{(L_4(\Omega))^n}\cdot\parallel v(t)\parallel_V$$

Применим неравенство О.А.Ладыженской и далее неравенство Коши $a \cdot b = \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} c\varepsilon = \frac{v}{2^{1/2}}$, получим

$$\left| \int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x) dx \right| \leq 2^{1/2} \parallel w(t) \parallel_{(L_2(\Omega))^n} \cdot \parallel w(t) \parallel_V \cdot \parallel v(t) \parallel_V \leq$$

$$\leq v \parallel w(t) \parallel_V^2 + \frac{1}{2^{3/2} v} \parallel v(t) \parallel_{(L_2(\Omega))^n}^2 \cdot \parallel w(t) \parallel_V$$

Подставляя полученное соотношение в неравенство (15), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \parallel w(t) \parallel_H^2 \leq \frac{1}{2^{3/2} v} \parallel w(t) \parallel_H^2 \cdot \parallel v(t) \parallel_V$$

Тогда из неравенство Гронуолла-Беллмана [1, теорема 2б глава IV, с.188] следует

$$\parallel w(t) \parallel_H^2 \leq \parallel w(0) \parallel_H^2 \exp\left(\int_0^t \frac{1}{2^{1/2} v} \cdot \parallel v(s) \parallel_V ds \right)$$

Поскольку $w(0) = v(0) - u(0) = 0$, то из полученного выше неравенства приходим к выводу, что $w(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Следовательно, $v = u$ и слабое и полное слабое решение задачи (1)-(4) единственно. $\square$