«Изучение единственности слабых решений системы Навье-Стокса»

Мукасеева Дарья Александровна

22.06.2020

Бакалаврская работа
Направление 01.03.01 Математика
Профиль Математическое моделирования

Понятие слабого решения

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n, где $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0; \tag{2}$$

$$v\big|_{t=0} = v_0; \tag{3}$$

$$v\big|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Определение сильного решения

Определение

Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций $v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ *и* $p \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$*, удовлетворяющих следующим условиям:*

1. обобщенные частные производные функций, содержащихся в равенствах (1)-(4), принадлежат пространству $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;
2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;
3. функция v удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Определение слабого решения

Определение

Пусть $f \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ *и* $v_0 \in H$. *Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция* $v \in L_2(0,T;V)$, *удовлетворяющая для всех* $\varphi \in V$ *и для почти всех значений* $t \in (0,T)$ *равенству*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi dx \qquad (5)$$

и условию

$$v(0) = v_0. \qquad (6)$$

Доказательство линейности и непрерывности оператора $\Delta : L_2(0, T; V)ßL_2(0, T; V^*)$

Лемма

1. *Оператор* $\Delta : L_2(0, T; V) \to L_2(0, T; V^*)$ *линейный и непрерывный, причем*

$$\|\Delta v\|_{L_2(0,T;V^*)} = \|v\|_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0, T; V^*). \tag{7}$$

2. *Оператор* $K : L_2(0, T; V) \to L_1(0, T; V^*)$ *непрерывен и справедлива оценка*

$$\|K(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_2\|v\|^2_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0, T; V^*), \tag{8}$$

для некоторой константы C_2.

Слабая непрерывность v

Лемма

Пусть X и Y — банаховы пространства, такие, что X — рефлективно и вложение $X \subset Y$ непрерывно. Если функция $v \in L_\infty(a, b; X)$ слабо непрерывна как функция со значениями в Y,то и слабо непрерывна и как функция со значениями в X.

Определение слабого решения

Определение

Пусть $n \leq 4$, $f \in L_2(0,T; L_2(\Omega))$ *и* $v \in H$. *Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция* $v \in L_2(0,T;V) \cap L_\infty(0,T;H)$ *и условиюv*$' \in L_1(0,T;V^*)$, *удовлетворяющая при почти всех значений* $t \in (0,T)$ *равенству*

$$v'(t) - \nu\Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \tag{9}$$

и начальному условию

$$v(0) = v_0. \tag{10}$$

Для системы уравнений Навье-Стокса (1)-(4) Ж. Лере в 1934 был получен следующий результат:

Теорема

Пусть $n = 2, 3$. *Для каждой функции* $f \in L_2(0,T;V^*)$ *и* $v_0 \in H$ *начально-краевая задача (1)-(4) имеет хотя бы одно слабое решение* v.

Единственность слабого решения

Теорема

Пусть Ω *ограниченная область в* R^2 *с достаточно гладкой границей* $\partial\Omega$*. Тогда слабое решение* v *решение задачи (1)-(4) единственно.*

Спасибо за внимание!