1 Эволюционная система уравнений Навье-Стокса

1.1 Понятие слабого решения

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n, где $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0; \tag{2}$$

$$v|_{t=0} = v_0; \tag{3}$$

$$v|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Здесь $v = (v_1(t,x), ..., v_n(t,x))$ - вектор-функция скорости движения частицы жидкости, $p = p(t,x)$ - функция давления, $f = f(t,x)$ - вектор-функция плотности внешних сил, $\nu > 0$ - коэффициент вязкости. $\Delta v = (\Delta v_1, ..., \Delta v_n)$, $\Delta v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_n^2}$, $\operatorname{div} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial v}{\partial x_n}$, $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial p}{\partial x_n}$. Сформулируем определение сильного решения рассматриваемой задачи (1)-(4). Для этого введем необходимые функциональные пространства:

$L_p(\Omega)$ - где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, множество измеримых функций, суммируемых с p-ой степенью,

$W_p^m(\Omega)$ - где $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, пространство Соболева, функции, которые со своими производными до порядка m включительно принадлежат пространству $L_p(\Omega)$,

$C_0^\infty(\Omega)$ - бесконечно дифференцируемых функций на Ω со значениями $R^n (n = 2, 3)$ и компактным носителем Ω,

ν - множество $u \in C_0^\infty(\Omega), div\ u = 0$

H - замыкание $(\nu(\Omega))^n$ в норме пространства $(L_2(\Omega))^n$,

V - замыкание $(\nu(\Omega))^n$ в норме пространства $(H_0^1(\Omega))^n$,

$L_p(a, b; X)$ - мы обозначим банаховы пространства непрерывных, слабо непрерывных и суммируемых с p-ой степенью функций на $[a, b]$ со значениями в банаховом пространстве X,

X^* - пространство функционалов над X,

$< f, \varphi >$ - обозначим действие функционала f из $V^{-\alpha}$ на элемент φ из V^{α}, $\alpha \geqslant 0$

Пусть f и v_0-заданные функции, где $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $v_0 \in V$.

Определение 1.1. *Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций $v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $p \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. обобщенные частные производные функции, содержащиеся в равенствах (1)-(2), принадлежат пространству $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;

2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;

3. функция v удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Введем понятие слабого решения. Для этого пусть v и p-сильное решение задач (1)-(4). Умножим равенство (1) на пробную функцию $\varphi(x) \in V$ скалярно в $L_2(\Omega)$

Пусть (v, p)-сильное решение задачи (1)-(4). Чтобы обеспечить понимание определения слабого решения, мы временно предположим, что $v = v(t, x), p = p(t, x)$ являются, фактически, гладкими решениями задачи. Сопоставим функции v отображение $v : [0, T] \to W_2^1(\Omega)$, определенное по формуле

$$[v(t)](x) = v(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Другими словами, v рассматривается не как функции переменных t и x, а как функция переменной t, определенная на отрезке $[0, T]$ и принимающая значения в функциональном пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Аналогично определим $p : [0, T] \to L_2(\Omega)$ по формуле

$$[p(t)](x) = p(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega$$

и функцию $f : [0,T] \to L_2(\Omega)$ по формуле

$$[f(t)](x) = f(t,x), t \in [0,T], x \in \Omega.$$

Умножая равенство (1) при фиксированных значениях $t \in [0,T]$ на функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ скалярно в $L_2(\Omega)$, получим

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\ \varphi dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\ \varphi dx -$$

$$-\nu \sum_{i,/j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i}\ \varphi_i dx = \int\limits_\Omega f\varphi dx.$$

Выполним преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям,

$$-\nu \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx = \nu \int\limits_\Omega \sum_{i,/j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx;$$

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx = -\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega p \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx = \int\limits_\Omega p div \varphi dx = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx = -\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i \varphi) dx =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx =$$

$$= -\int\limits_\Omega v \varphi div v dx - \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

приходим к равенству

$$\frac{d}{dt} \int\limits_\Omega v \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + v \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx = \int\limits_\Omega f \varphi dx, \tag{5}$$

Здесь символ «:» обозначает покомпонентное матричное произведение, т. е. для $C = (c_{ij}), D = (d_{ij}), i,/j = 1, ..., m$, имеем $C : D = \sum_{i,/j=1}^m c_{i,/j} d_{i,/j}$

Заметим, что тоже равенство (5) верно для любой функции $\varphi \in V$, так как каждая часть этого равенства линейно и непрерывно зависит от φ в $W_2^1(\Omega)$. Кроме того, равенство может выполняться и при более слабых требованиях на функцию $v(t,x)$. Покажем, что достаточно предполагать, что $v \in L_2(0,T;V)$ для того, чтобы каждый интеграл, входящий в равенство (5), имеет смысл.

В силу теоремы вложений Соболева[1] вложение $W_2^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ непрерывно при $n \leqslant 4$. Поэтому, так как $V \subset W_2^1(\Omega)$, то $v_i(t,x)v(t,x) \in L_2(\Omega)$ и $v_i(t,x)v(t,x)\partial_i\varphi \in L_1(\Omega)$ при каждом фиксированном значении t. Следовательно, интеграл $\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i v \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx$ определен.

Кроме того, это слагаемое определяет линейный непрерывный функционал на V. Обозначим этот функционал через $K(v)$:

$$\langle K(v),\ \varphi\rangle = \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i v \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx.$$

Отметим, что $\int\limits_\Omega v\varphi dx \in L_2(0,T)$ и производная в выражении $\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v\varphi dx$ понимается в смысле распределений на интервале $(0,T)$. Поэтому равенство (5) выполняется в смысле распределений. Все слагаемые равенства, исключая первое, принадлежат пространству $L_1(0,T)$, поэтому $\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v\varphi dx \in L_1(0,T)$ и равенство (5) выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$.

Подводя итог рассуждениям, приходим к следующему определению слабого решения.

Определение 1.2. *Пусть $f \in L_2(Q_T)$ и $v_0 \in H$. Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция $v \in L_2(0,T;V)$ такая, что равенство*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v\varphi dx - \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i v \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx = \int\limits_\Omega f\varphi dx \qquad (6)$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$ и выполнено для этой

[1] Тут будет теорема вложений Соболева :)

функции v начальное условие

$$v(0) = v_0. \tag{7}$$

Выше показано, что равенство (6) корректно для $v \in L_2(0,T;V)$ и если (v,p) сильное решение задачи (1)-(4), то v является слабым решением. Поэтому задачу о поиске сильных решений заменим задачей об исследовании слабых решений.

Заметим, однако, что для функции $v \in L_2(0,T;V)$ условие (7) не имеет смысла, так как не определено значение функции $v(t)$ в каждой точке $t \in (0,T)$. Покажем, что функция $v(t)$, удовлетворяющая равенству (6), является непрерывной на $[0,T]$ со значениями в V^* и слабо непрерывной со значениями в H. Поэтому равенство (7) имеет смысл и определение слабого решения корректно.

Преобразуем равенство (6). Скалярное произведение $(v(t),\varphi)_{L_2(\Omega)}$ определяет линейный непрерывный функционал на H, а следовательно, элемент из H^*. Учитывая отождествление $H \equiv H^*$ и цепочку вложений $V \subset H \subset H^* \subset V^*$, элемент $v(t)$ можно рассматривать как функционал на V, действие которого на функцию $\varphi \in V$ определяется равенством $\langle v(t),\ \varphi\rangle = (v(t),\ \varphi)_{L_2(\Omega)}$.Тогда можно считать, что функция $v(t)$ на $[0,T]$ принимает значения в V^* и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v\varphi dx = \frac{d}{dt}\langle v(t),\ \varphi\rangle$$

С учетом введенных обозначений равенство (6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle v(t),\ \varphi\rangle - \nu\langle \Delta v(t)\varphi\rangle - \langle K(v(t)),\ \varphi\rangle = \langle f(t),\ \varphi\rangle$$

где $\Delta : V \to V^*$, обозначает оператор Лапласа, действующий по правилу $\langle \Delta v(t),\ \varphi\rangle = -\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx$. Или можно (6) переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}\langle v(t),\ \varphi\rangle = \langle \nu\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t),\ \varphi\rangle. \tag{8}$$

Исследуем свойства операторов, входящих в правую часть равенства.

Лемма 1.1.

1. *Оператор*
   $\Delta : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ *линейный и непрерывный, причем*

$$\| \Delta v \|_{L_2(0,T;V^*)} = \| v \|_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0,T;V^*). \tag{9}$$

2. *Оператор* $K : L_2(0,T;V) \to L_1(0,T;V^*)$ *непрерывен и справедлива оценка*

$$\| K(v) \|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_1 \| v \|^2_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0,T;V^*), \tag{10}$$

для некоторой константы C_1.

Доказательство.

1. Покажем, что отображение $\Delta : V \to V^*$ линейно, непрерывно и определяет изометрию пространств. Рассмотрим простейшую операторную задачу

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ v|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

   Пусть $f \in (L_2(\Omega))^n$ заданная функция и $v \in (H^2_0(\Omega))^n$ — решение модельной задачи. Умножим первое равенство на функцию $u \in (H^1_0(\Omega))^n$ скалярно в $L_2(\Omega))^n$, получим (!)

$$(-\Delta v, u)_{L_2(\Omega))^n} = (f, u)_{L_2(\Omega))^n}$$

   Для $v \in (H^2_0(\Omega))^n$ имеем $\Delta v = Div(\nabla v)$ и с помощью формулы стокса выражение

$$(-\Delta v, u)_{L_2(\Omega))^n} = (-Div(\nabla v), u)_{L_2(\Omega))^n}$$

   преобразуется к виду

$$(-Div(\nabla v), u)_{L_2(\Omega))^n} = (\nabla v, \nabla u)_{L_2(\Omega)^{n^2}} = ((v, u))$$

Поэтому равенство (!) принимает следующий вид (!!)

$$((v,u)) = (f,u)_{L_2(\Omega))^n}, \forall v \in (H_0^1(\Omega))$$

Выражение $(f,u)_{L_2(\Omega))^n}$ определяет линейный неприрывный функционал $\tilde{f}$ на $(L_2(\Omega))^n$, а следовательно, и на $(H_0^1(\Omega))^n$. Действие этого функционала на функцию $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ определяется равенством

$$\langle \tilde{f}, u\rangle = (f,u)_{L_2(\Omega))^n}.$$

Поэтому равенство (!!) можно записать в виде

$$((v,u)) = \langle \tilde{f}, u\rangle, \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Следовательно,
$\| \Delta v \|_{V^*} = \| v \|_V$ для всех $v \in V$.Отсюда для $v \in L_2(0,\ T;\ V)$ имеем $\| \Delta v \|_{V^*} = \| v(t) \|_V$ для почти всех $t \in [0,\ T]$. Так как $\| v(t) \|_V \in L_2(0,\ T)$, то $\| \Delta v(t) \|_{V^*} \in L_2(0,\ T)$. Следовательно, $\Delta v \in L_2(0,\ T;\ V^*)$ и справедливо равенство (9). Таким образом, линейный оператор Δ определяет изометрию пространств $L_2(0,\ T;\ V)$ и $L_2(0,\ T; V^*)$.

2. По определению оператора K

$$\langle K(v), \varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v_j \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

для $v, \varphi \in V$. Повторим рассуждения из леммы 3.1:

$$\| K(v) \|_{V^*} \leq \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{v_i v_j}{1+|v|^2} \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (v_i v_j)^2 dx \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} v_i^4(x) dx \right)^{1/4} \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} v_j^4(x) dx \right)^{1/4} = \| v \|^2_{(L_4(\Omega))^n}.$$

По теореме вложения Соболева $V \subset (L_4(\Omega))^n$ непрерывно для $n \leq 4$, поэтому

$$\| v \|^2_{L_4(\Omega)^n} \leq c \| v \|^2_V \text{ и } \| K(v) \|_{V^*} \leq c^2 \| v \|^2_V$$

для некоторой константы c. Из определения отображения (v) ясно, что для докозательства непрерывности $K(v)$ достаточно доказать непрерывность отображения

$$\phi_{ij} : (L_4(\Omega))^n \to L_2(\Omega),\ \phi_{ij}(v) = \frac{v_i v_j}{1+|v|^2},\ i,j = 1,2,\dots n.$$

Непрерывность каждого из этих отображений следует из теоремы М.А. Красносельского о непрерывности оператора суперпозиции и очевидной оценки

$$|\phi_{ij}| \leq |v_i v_j| \leq \frac{1}{2}(|v_i|^2 + |v_j|^2) \text{ для } v \in R^n.$$

Таким образом, непрерывность отображения $K(v)$ установлена.

3. Заметим, что для функции ϕ_{ij} удовлетворяют оценке Тогда из теоремы М.А. Красносельского о непрерывности оператора суперпозиции следует непрерывность отображения

$$\phi_{ij} : (L_2(\Omega))^n \to L_2(\Omega),\ \phi_{ij}(v) = \frac{v_i v_j}{1+|v|^2},\ i,j = 1,2,\dots n$$

а следовательно, и отображения $K(v) : (L_2(\Omega))^n \to V^*$

Вложение $V \subset (L_2(\Omega))^n$ вполне непрерывно в силу теоремы Релиха-Кондрашова, поэтому отображение $K(v) : V \to V^*$ вполне непрерывно как суперпозиция вполне непрерывного оператора вложения $V \subset (L_2(\Omega))$ и непрерывного отображения $K(v) : (L_2(\Omega))^n \to V^*$

$$\| K(v(t)) \|_{V^*} \leq C_2 \| v(t) \|^2_V,\ \forall v \in V,\ t \in [0,\ T],$$

с некоторой константой C_2. Отсюда для $v \in L_2(0,\ T;\ V)$ имеем $K(v) \in L_1(0,\ T;\ V^*)$ и

$$\| K(v) \|_{L_1(0,\ T;\ V^*)} \leq \int_0^T \| K(v) \|_{V^*} dt \leq C_2 \int_0^T \| v \|^2_V dt =$$

$$= C_2 \parallel v \parallel^2_{L_2(0,\ T;\ V)} \cdot$$

Повторяя рассуждения проведенные ранее, получим, что для $v,\ u \in L_2(0,\ T;\ V)$ справедлива оценка

$$\int_0^T \parallel K(v) - K(u) \parallel_{V^*} dt \leq \int_0^T (\sum_{i,\ j=1}^n \int\limits_\Omega (v_i v_j - u_i u_j)^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \int_0^T (\sum_{i,/j=1}^n \int\limits_\Omega (v_i(v_j - u_j) + (v_i - u_i)u_j) dx)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2} \sum_{i,/j=1}^n \int_0^T (\int\limits_\Omega v_i^2 (v_j - u_j)^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int\limits_\Omega (v_i - u_i)^2 u_j^2 dx)^{\frac{1}{2}} dt \leq$$

$$\leq \sqrt{2} \sum_{i,/j=1}^n \int_0^T (\parallel v_i(t) \parallel_{L_4(\Omega)} \parallel v_j(t) - u_j(t) \parallel_{L_4(\Omega)} +$$

$$+ \parallel v_i(t) - u_i(t) \parallel_{L_4(\Omega)} \parallel u_j(t) \parallel_{L_4(\Omega)}) dt \leq$$

$$\leq C_2(\parallel v \parallel_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} + \parallel u \parallel_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}) \parallel v - u \parallel_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}$$

Кроме того, вложение $V \subset (L_4(\Omega))^n$, а следовательно, и вложение $L_2(0,T;V) \subset L_2(0,T;(L_4(\subset))^n)$ непрерывны. Поэтому достаточно доказать непрерывность отображений

$$\phi_{ij} : L_2(0,T;(L_4(\Omega))^n) \to L_1(0,T;L_2(\Omega)), \varphi_{ij}(v) = v_i v_j$$

для $i,/j = 1, 2, \ldots, n$. Для любых $u,\ v \in L_2(0,T;(L_4(\Omega))^n)$ с помощью неравенства Шварца получаем оценку

$$\parallel \phi_{ij}(u) - \phi_{ij}(v) \parallel_{L_1(0,T;L_2(\Omega))} = \int_0^T (\int\limits_\Omega (v_i v_j - u_i u_j)^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \int_0^T (\int\limits_\Omega v_i^2 (v_j - u_j)^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int\limits_\Omega (v_i - u_i)^2 u_j^2 dx)^{\frac{1}{2}} dt \leq$$

$$\int_0^T (\parallel v_i(t) \parallel_{L_4(\Omega)} \parallel v_j(t) - u_j(t) \parallel_{L_4(\Omega)} +$$

$$+ \parallel v_i(t) - u_i(t) \parallel_{L_4(\Omega)} \parallel u_j(t) \parallel_{L_4(\Omega)}) dt \leq$$

$$\leq \| v_i \|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \| v_j - u_j \|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} +$$

$$+ \| v_i - u_i \|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \| u_j \|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}$$

Отсюда, если $\| v - u \| \ L_2(0,T;(L_4(\Omega))^n) \to 0$, то $\| \phi_{ij}(u) - \phi_{ij}(v) \| \ L_1(0,T;L_2(\Omega)) \to 0$. Поэтому каждое из отображений ϕ_{ij}, а следовательно, и отображение K непрерывны.

□

По утверждению леммы $\Delta v \in L_2(0,T;V^*), K(v) \in L_1(0,T;VV^*)$, поэтому $\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t) \in L_1(0,T;VV^*)$. Тогда из равенства (8) и теоремы 4.6 следует

1. что функция $v(t)$ имеет суммируемую производную $v\prime(t)$;
2. в силу равенства (4.3)

$$\frac{d}{dt}\langle v(t),\ u\rangle = \langle v'(t),\ u\rangle$$

3. равенство (5.8) можно записать в виде

$$v'(t) = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t)$$

Подводя итог рассуждений, отметим, что так как $v'(t) \in L_1(0,T;V^*)$, то $v \in W_{2,1} c X_0 = V,\ X_1 = V^*$. Поэтому в силу леммы 4.5 функция $v(t)$ непрерывна на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^*. Кроме того, по лемме 4.6 эта функция слабо непрерывна со значениями в H. Поэтому начальное условие (7) имеет смысл.

Переформулируем понятие слабого решения

Определение 1.3. *Пусть $n \leq 4,\ f \in L_2(0,T;(L_2(\Omega))^n)$ и $v^0 \in H$. Слабым (вариационным) решением задачи (1)-(4) называется функция $v \in L_2(0,T;V)$ такая, что $v^0 \in L_1(0,T;V^*)$, равенство*

$$v'(t) - \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \tag{11}$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0, T)$ *и*

$$v(0) = v^0 \tag{12}$$

1.2 О единственности слабого и полного слабого решений в случае $n = 2$

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о единственности слабого и полного слабого решений краевой задачи (1)-(4) для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса. Будем показано, что в случае $\Omega \subset R^2$ слабое и полное слабое решение краевой задачи единственно. Однако для размерности $n > 2$ аналогичное утверждение неверно. Примером, показывающим, что слабое решение задачи не единственно, служит результат о бифуркации решений, содержащийся, например, в [22, гл.II, §4,п.4.4].

Сформулируем и докажем утверждение о единственности слабого решения в случае $n = 2$, следуя [22, гл.III, §3, теорема 3.2].

Теорема 1.1. *Пусть* Ω *ограниченная область в* R^2 *с локально липшицевой границей. Тогда слабое решение* v *и полное слабое решение* (v, p) *(при условии* $(p)\Omega = 0$*) задачи (1)-(4) единственно. Кроме того, функция* v *непрерывна на отрезке* $[0, T]$ *со значениями в* H *и*

$$v(t) \to v_0 \text{ в } H \text{ при } t \to \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Достаточно установить единственность слабого решения v, так как компонента p полного слабого решения определяется компонентой v из равенства (5.34) единственным образом.

Пусть v – решение задачи (5.31), (5.32). Покажем, что $v \in W$, т.е. $v' \in L_2(0, T; V^*)$. Воспользуемся оценкой

$$\| K_\varepsilon(v) \|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \leq c_0 \| v \|^2_{(L_4(\Omega))^n},$$

полученной при выводе неравенства (3.10), в случае $n = 2$ и $\varepsilon = 0$. Применяя неравенство О.А. Ладыженской (1.7), получим для любого $t \in [0,T]$

$$\sup_{v\in V}\langle K(v),\ \frac{u}{\parallel v \parallel}\rangle \leq c_0 2^{1/2}(\int\limits_{\Omega} v(t)^2 dt)^{1/2}\cdot \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n=3}\frac{\partial v^2}{\partial x_i}dt$$

Отсюда, возводя обе части неравенства в квадрат и интегрируя по t на отрезке $[0,T]$, приходим к оценке

$$\int_0^T \sup(\langle K(v),\ \frac{u}{\parallel v \parallel}\rangle)^2 dt \leq 2c_0\int_0^T(\int\limits_{\Omega} v(t)^2)\cdot\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n=3}\frac{\partial v^2}{\partial x_i}dt \leq$$

$$\leq 2c_0 \max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega} v(t)^2 dt\cdot\int_0^T\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n=3}\frac{\partial v^2}{\partial x_i}dt$$

Следовательно,

$$(\int_0^T \sup(\langle K(v),\ \frac{u}{\parallel v \parallel}\rangle)^2 dt)^{1/2} \leq c_0 2^{1/2}\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega} v(t)^2 dt\cdot\int_0^T v(t)^2 dt$$

Из представления $v' = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t)$ очевидно, что $v' \in L_2(0,T;V^*)$ и $v \in W$. Воспользовавшись вложением $W \subset C([0,T],H)$, получаем $v \in C([0,T],H)$ и заключение (13) теоремы.

Покажем теперь единственность слабого решения. Предположим, что u и v – слабые решения задачи (5.31), (5.32). Подставим эти решения в уравнение (5.31) и рассмотрим разность полученных равенств. Для разности $w = v - u$ получим равенство

$$w' - \Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0$$

Применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции $w(t)$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w(t,x)w(t,x)dt + v(w(t,x),w(t,x)) =\\ &= \int\limits_{\Omega}\frac{\partial v_i}{\partial t}\cdot v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\cdot\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx\end{aligned} \tag{14}$$

Оценим правую часть полученного равенства.

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} v(t,x) \frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t,x) \frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} v(t,x) \frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t,x) \frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t,x) \frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t,x) \frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} \cdot v(t,x) \frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} w(t,x) \cdot \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial x_i} dx$$

Используем интегрирование по частям для вычисления первого интеграла

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} v(t,x) \cdot w(t,x) = - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} \cdot \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} w(t,x) dx$$

так как $\partial_i w_i(t,x) = \mathrm{div}\ w(t,x) = 0$. Используем интегрирование по частям для вычисления второго из интегралов

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} w(t,x) \frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} dx = \sum_{i=0}^{n=2} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \mid w \mid^2 (t,x)}{\partial x_i} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=2} \frac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial t \partial x_i} \cdot \mid w \mid^2 (t,x) dx = 0$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{2} \partial_i u_i(t,x) = \mathrm{div}\ u(t,x) = 0$ Отсюда и из равенства (14) получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} w(t,x) w(t,x) dx + v(w(t,x) w(t,x)) =$$

$$= - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} \cdot \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} w(t,x) dx$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel w(t) \parallel_H^2 +v \parallel w(t) \parallel_H^2 = \left| \int\limits_\Omega w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x) dx \right| \tag{15}$$

Оценим правую часть неравенства, используя неравенства Шварца,

$$\left| \int\limits_\Omega w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x) dx \right| = \left| \int\limits_\Omega w_i(t,x) \cdot \partial_j(t,x) w_j(t,x) dx \right| \leq$$

$$\left(\int\limits_\Omega \mid w_i(t,x) \mid^2 \mid w_j(t,x) \mid^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_\Omega \mid \partial_i v_j(t,x) \mid^2 dx \right)^{1/2} \leq$$

$$\left(\int\limits_\Omega \mid w_i(t,x) \mid^4 dx \right)^{1/4} \left(\int\limits_\Omega \mid w_j(t,x) \mid^4 dx \right)^{1/4} \cdot \left(\int\limits_\Omega \mid \partial_i v_j(t,x) \mid^2 dx \right)^{1/2}$$

или

$$\left| \int\limits_\Omega w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x) dx \right| \leq$$

$$\leq \parallel w_i(t) \parallel_{L_4(\Omega)} \cdot \parallel w_j(t) \parallel_{L_4(\Omega)} \cdot \parallel \partial_i v_j(t) \parallel_{L_2(\Omega)}$$

Учитывая, что запись, содержащая повторяющиеся индексы, предполагает суммирование по этим индексам, получаем

$$\left| \int\limits_\Omega w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x) dx \right| \leq \parallel w(t) \parallel^2_{(L_4(\Omega))^n} \cdot \parallel v(t) \parallel_V$$

Применим неравенство О.А. Ладыженской и далее неравенство Коши $a \cdot b = \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} c\varepsilon = \frac{v}{2^{1/2}}$, получим

$$\left| \int\limits_\Omega w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x) dx \right| \leq$$

$$\leq 2^{1/2} \parallel w(t) \parallel_{(L_2(\Omega))^n} \cdot \parallel w(t) \parallel_V \cdot \parallel v(t) \parallel_V \leq$$

$$\leq v \parallel w(t) \parallel_V^2 + \frac{1}{2^{3/2} v} \parallel v(t) \parallel^2_{(L_2(\Omega))^n} \cdot \parallel w(t) \parallel_V$$

Подставляя полученное соотношение в неравенство (15), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel w(t) \parallel_H^2 \leq \frac{1}{2^{3/2}v} \parallel w(t) \parallel_H^2 \cdot \parallel v(t) \parallel_V$$

Тогда из неравенство Гронуолла-Беллмана [1, теорема 2б глава IV, с.188] следует

$$\parallel w(t) \parallel_H^2 \leq \parallel w(0) \parallel_H^2 \exp\left(\int_0^t \frac{1}{2^{1/2}v} \cdot \parallel v(s) \parallel_V ds\right)$$

Поскольку $w(0) = v(0) - u(0) = 0$, то из полученного выше неравенства приходим к выводу, что $w(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Следовательно, $v = u$ и слабое и полное слабое решение задачи (1)-(4) единственно. $\square$