Содержание

1 Эволюционная система уравнений Навье-Стокса

1.1 Понятие слабого решения

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n, где $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0; \tag{2}$$

$$v|_{t=0} = v_0; \tag{3}$$

$$v|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Здесь $v = (v_1(t,x), \ldots, v_n(t,x))$ — вектор-функция скорости движения частицы жидкости, $p = p(t,x)$ — функция давления, $f = f(t,x)$ — вектор-функция плотности внешних сил, $\nu > 0$ — коэффициент вязкости. $\Delta v = (\Delta v_1, \ldots, \Delta v_n)$, $\Delta v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_n^2}$; $\operatorname{div} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n}$; $\nabla p = (\frac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x_n})$.

Сформулируем определение сильного решения рассматриваемой задачи (1)-(4). Для этого введем необходимые функциональные пространства:

$L_p(\Omega)$ — множество измеримых функций, суммируемых с p-ой степенью, где $p \geqslant 1$ и нормой является $\|f\|_p = (\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{1/p}$

$W_p^m(\Omega)$ — где $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, пространство Соболева, состоящее из функции, которые со своими обобщенными частными производными до порядка m включительно принадлежат пространству $L_p(\Omega)$,
$\|f\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^p dx\right)^{1/p}$

$C_0^\infty(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на Ω со значениями в $R^n (n = 2, 3)$ и с компактным носителем, содержащимся в Ω

ν — множество $v \in C_0^\infty(\Omega)$, таких что $\operatorname{div} v = 0$;

H — замыкание ν по норме пространства $L_2(\Omega)$;

V — замыкание ν по норме пространства $W_1^1(\Omega)$;

$L_p(a, b; X)$ — мы обозначим банаховы пространства непрерывных, слабо непрерывных и суммируемых с p-ой степенью функций на $[a, b]$ со значениями в банаховом пространстве X,

Будем обозначать E^* сопряженное пространство к пространству E.

$< f, \varphi >$ - обозначим действие функционала f из $V^{-\alpha}$ на элемент φ из V^α, $\alpha \geqslant 0$

Пусть f и v_0 — заданные функции, где $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $v_0 \in V$.

Определение 1.1. *Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций $v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $p \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1. обобщенные частные производные функций, содержащихся в равенствах (1)-(2), принадлежат пространству $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;

2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;

3. функция v удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Введем понятие слабого решения. Для этого пусть v и p — сильное решение задач (1)-(4).

Пусть (v, p) — сильное решение задачи (1)-(4). Чтобы обеспечить понимание определения слабого решения, мы временно предположим, что $v = v(t, x)$ и $p = p(t, x)$ являются, фактически, гладкими решениями задачи. Сопоставим функции v отображение $v : [0, T] \to W_2^1(\Omega)$, определенное по формуле

$$[v(t)](x) = v(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Другими словами, v рассматривается не как функции переменных t и x, а как функция переменной t, определенная на отрезке $[0, T]$ и принимающая значения в функциональном пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Аналогично определим $p : [0, T] \to L_2(\Omega)$ по формуле

$$[p(t)](x) = p(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega$$

и функцию $f : [0, T] \to L_2(\Omega)$ по формуле

$$[f(t)](x) = f(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Умножая равенство (1) при фиксированных значениях $t \in [0, T]$ на функцию $\varphi(x) \in V$ скалярно в $L_2(\Omega)$, получим

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\, \varphi dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\, \varphi dx -$$

$$-\nu \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i}\, \varphi_i dx = \int\limits_\Omega f \varphi dx.$$

Выполним преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям[1],

$$-\nu \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx = \nu \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx;$$

Здесь символ «:» обозначает покомпонентное матричное произведение, т. е. для $C = (c_{ij}), D = (d_{ij}), i, j = 1, \ldots, m$, имеем $C : D = \sum\limits_{i,j=1}^m c_{i,j} d_{i,j}$

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx = -\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega p \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx = \int\limits_\Omega p\ div\ \varphi\ dx = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx = -\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i \varphi) dx =$$

[1] Метод интегрирования по частям.
Пусть функции $\varphi(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале I. Если одна из функций $\varphi(x)v'(x)$ или $\varphi'(x)v(x)$ имеет первообразную на интервале I, то на этом интервале имеет первообразную и другая функция, причем справедливо равенство $\int \varphi(x)v'(x)dx = \varphi(x)v(x) - \int \varphi'(x)v(x)dx$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \varphi dx - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} v\ \varphi\ div\ v\ dx - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx;$$

и приходим к равенству

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} v\varphi dx - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + v \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int\limits_{\Omega} f \varphi dx. \qquad (5)$$

Заметим, что равенство (5) может выполняться и при более слабых требованиях на функцию $v(t,x)$. Покажем, что достаточно предполагать, что $v \in L_2(0,T;V)$ для того, чтобы каждый интеграл, входящий в равенство (5), имел смысл.

В силу теоремы вложений Соболева[2] вложение $W_2^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ непрерывно при $n \leqslant 4$. Поэтому, так как $V \subset W_2^1(\Omega)$, то $v_i(t,x)v(t,x) \in L_2(\Omega)$ и $v_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L_1(\Omega)$ при каждом фиксированном значении t. Следовательно, интеграл $\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$ определен.

Кроме того, это слагаемое определяет линейный непрерывный функционал на V. Обозначим этот функционал через $K(v)$:

$$\langle K(v), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Отметим, что $\int\limits_{\Omega} v\varphi dx \in L_2(0,T)$ и производная в выражении $\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx$ понимается в смысле распределений на интервале $(0,T)$. Поэтому равенство (5) выполняется в смысле распределений. Все слагаемые равенства, исключая первое, принадлежат пространству $L_1(0,T)$, поэтому $\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx \in L_1(0,T)$ и равенство (5) выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$.

Подводя итог рассуждениям, приходим к следующему определению слабого решения.

[2] Тут будет теорема вложений Соболева :)

Определение 1.2. *Пусть* $f \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ *и* $v_0 \in H$. *Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция* $v \in L_2(0,T;V)$, *удовлетворяющая для всех* $\varphi \in V$ *и для почти всех значений* $t \in (0,T)$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx + \nu\int\limits_{\Omega}\nabla v : \nabla\varphi dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi dx \tag{6}$$

и условию

$$v(0) = v_0. \tag{7}$$

Выше показано, что равенство (6) корректно для $v \in L_2(0,T;V)$ и если (v,p) сильное решение задачи (1)-(4), то v является слабым решением. Поэтому задачу о поиске сильных решений заменим задачей об исследовании слабых решений.

Заметим, однако, что для функции $v \in L_2(0,T;V)$ условие (7) не имеет смысла, так как не определено значение функции $v(t)$ в каждой точке $t \in (0,T)$. Покажем, что функция $v(t)$, удовлетворяющая равенству (6), является непрерывной на $[0,T]$ со значениями в V^* и слабо непрерывной со значениями в H. Поэтому равенство (7) имеет смысл и определение слабого решения корректно.

Преобразуем равенство (6). Скалярное произведение $(v(t),\varphi)_{L_2(\Omega)}$ определяет линейный непрерывный функционал на H, а следовательно, элемент из H^*. Учитывая отождествление $H \equiv H^*$ и цепочку вложений $V \subset H \subset H^* \subset V^*$, элемент $v(t)$ можно рассматривать как функционал на V, действие которого на функцию $\varphi \in V$ определяется равенством $\langle v(t),\varphi\rangle = (v(t),\varphi)_{L_2(\Omega)}$.Тогда можно считать, что функция $v(t)$ на $[0,T]$ принимает значения в V^* и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx = \frac{d}{dt}\langle v(t),\varphi\rangle.$$

С учетом введенных обозначений равенство (6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle v(t),\varphi\rangle - \nu\langle\Delta v(t),\varphi\rangle - \langle K(v(t)),\varphi\rangle = \langle f(t),\varphi\rangle,$$

где $\Delta : V \to V^*$, обозначает оператор Лапласа, действующий по правилу

$\langle \Delta v(t), \varphi \rangle = -\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx$. Или можно (6) переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), \varphi \rangle = \langle \nu \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), \varphi \rangle. \quad (8)$$

Исследуем свойства операторов, входящих в правую часть равенства.

Лемма 1.1.

1. *Оператор* $\Delta : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ *линейный и непрерывный, причем*

$$\|\Delta v\|_{L_2(0,T;V^*)} = \|v\|_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0,T;V^*). \quad (9)$$

2. *Оператор* $K : L_2(0,T;V) \to L_1(0,T;V^*)$ *непрерывен и справедлива оценка*

$$\|K(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_1 \|v\|^2_{L_2(0,T;V)}, \ \forall v \in L_2(0,T;V^*), \quad (10)$$

для некоторой константы C_1.

Доказательство.
(ТУТ НАЧИНАЕТСЯ ДИЧЬ! СМОТРИ ВО ВСЕ 4 ГЛАЗА)
Покажем, что оператор $\Delta : V \to V^*$ линейный. Рассмотрим, то, что Δv— линейный. Отпператор A линейный, если $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$

$$\Delta(\alpha v_1 + \beta v_2) = (\frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_n})(\alpha v_1 + \beta v_2) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1}(\alpha v_1 + \beta v_2) + \ldots +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial^2 x_n}(\alpha v_1 + \beta v_2)\alpha\frac{\partial^2}{\partial^2 x_1}v_1 + \beta\frac{\partial^2}{\partial^2 x_1}v_2 + \ldots + \alpha\frac{\partial^2}{\partial^2 x_n}v_1 + \beta\frac{\partial^2}{\partial^2 x_n}v_2 = \alpha\Delta v_1 + \beta\Delta v_2$$

Заметим, что оператор $\Delta : V \to V^*$ определяет изометрию пространства. Действительно:

$$\|\Delta v\|_{V^*} = \sup_\varphi \frac{|\langle \Delta v, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_V} = \sup_\varphi \frac{\left|\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx\right|}{\|\varphi\|_V} \leq \sup_\varphi \frac{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)}}{\|\varphi\|_V} \leq$$

$$\leq \sup_{\varphi} \frac{\|v\|_V \|\varphi\|_V}{\|\varphi\|_V} = \|v\|_V$$

то есть $\|\Delta v\|_{V^*} \leq \|v\|_V$. С другой стороны, положим $\varphi = v$. $|\langle \Delta v, v\rangle| = |\int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx| = \|v\|_V^2$. Применим неравенство Коши-Буняковского $\|v\|_V^2 = |\langle \Delta v, v\rangle| \leq \|\Delta v\|_{V^*} \|v\|_V$. Сократив на $\|v\|_V$, получим $\|\Delta v\|_{V^*} \geq \|v\|_V$. Следовательно получаем $\|\Delta v\|_{V^*} = \|v\|_V$. Заметим, что линейный ограниченный оператор - непрерывен.

Отсюда для $v \in L_2(0,T;V)$ имеем $\|\Delta v\|_{V^*} = \|v(t)\|_V$ для почти всех $t \in [0,T]$. Так как $\|v(t)\|_V \in L_2(0,T)$, то $\|\Delta v(t)\|_{V^*} \in L_2(0,T)$. Следовательно, $\Delta v \in L_2(0,T;V^*)$ и справедливо равенство (9). Таким образом, линейный оператор Δ определяет изометрию пространств $L_2(0,T;V)$ и $L_2(0,T;V^*)$.

2) По определению оператора K

$$\langle K(v), \varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx.$$

для $v, \varphi \in V$. для любого $v \in V$ получим

$$\Big|\langle K(v), \varphi\rangle\Big| \leq \Big|\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx\Big| \leq$$

$$\leq (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big|v_i v_j\Big|^2 dx)^{1/2} (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\Big|^2 dx)^{1/2} \leq$$

$$\leq (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big|v_i\Big|^4 dx)^{1/4} (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big|v_j\Big|^4 dx)^{1/4} (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\Big|^2 dx)^{1/2} \leq \|v\|_{L_4(\Omega)}^2 \|\varphi\|_V.$$

По теореме вложения Соболева вложение $V \in L_4(\Omega)^n$ непрерывно для $n \leq 4$, поэтому, $\|v\|_{L_4(\Omega)^n} \leq C_1 \|v\|_V$ и, следовательно, $\|K(v)\|_{V^*} \leq C_1^2 \|v\|_V^2$. Отсюда для $v \in L_2(0,T;V)$ имеем $K(v) \in L_1(0,T;V^*)$ и

$$\|K(v)_{L_1(0,T;V^*)}\| \leq \int\limits_0^T \|K(v(t))\|_{V^*} dt \leq C_1^2 \int\limits_0^T \|v(t)\|_V^2 dt = C_1^2 \|v(t)\|_{L_2(0,T;V)}^2.$$

Для любых функций $v, \varphi \in L_2(0,T;V)$ справедлива оценка

$$\int\limits_0^T \|K(v)-K(\varphi)\|_{V^*}dt \leq \int\limits_0^T (\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (v_iv_j-\varphi_i\varphi_j)^2dx)^{1/2}dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^T (\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (v_i(v_j-\varphi_j)+(v_i-\varphi_i)\varphi_j)^2dx)^{1/2}dt \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\sum_{i,j=1}^n \int\limits_0^T (\int\limits_\Omega v_i^2(v_j-\varphi_j)^2dx)^{1/2} + (\int\limits_\Omega (v_i-\varphi_i)^2\varphi_j dx)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\sum_{i,j=1}^n \int\limits_0^T (\|v_i\|_{L_4(\Omega)}\|v_j-\varphi_j\|_{L_4(\Omega)} + \|v_i-\varphi_i\|_{L_4(\Omega)}\|\varphi_j\|_{L_4(\Omega)})dt \leq$$

$$\leq C_2(\|v\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} + \|\varphi\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))})\|v-\varphi\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}$$

Отсюда, если $\|v-\varphi\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \to 0$, то $\|K(v)-K(\varphi)\|_{L_1(0,T;L)} \to 0$ Поэтому отображние K непрерывно.

□

По утверждению леммы $\nu\Delta v \in L_2(0,T;V^*), K(v) \in L_1(0,T;V^*)$, поэтому $\nu\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t) \in L_1(0,T;V^*)$. Тогда из равенства (8) и теоремы [3] следует

---

[3] Пусть X- банахово пространство с сопряженным $X*$ и функции u, g принадлежат пространству $L_1(a,b,X)$. Тогда следующие три условия эквивалентны:
(a) функция $u(t)$ почти всюду равна первообразной от $g(t)$ и

$$u(t) = \xi + \int\limits_a^b g(s)ds, \xi \in X$$

для п.в. $t \in [a,b]$
(b) для каждой приобретенной функции $\eta \in \mathcal{D}(a,b)$

$$\int\limits_a^b u(t)\eta'(t)dt = -\int\limits_a^b g(t)\eta(t)dt$$

(c) для каэжого $\phi \in X^*$

$$\frac{d}{dt}\langle\phi, u(t)\rangle = \langle\phi, g(t)\rangle$$

в смысле скалярных распределений на (a,b). Если условия (a)-(c) выполнены, то и, в частности, почти всюду равна некоторой непрерывной функции.

1. что функция $v(t)$ имеет суммируемую производную $v'(t)$;

2. в силу равенства $\frac{d}{dt}\langle\phi, u(t)\rangle = \langle\phi, g(t)\rangle$

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), \varphi\rangle = \langle v'(t), \varphi\rangle$$

3. равенство $\frac{d}{dt}\langle v(t), \varphi\rangle = \langle\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), \varphi\rangle$ можно записать в виде

$$v'(t) = \nu\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t).$$

Подводя итог рассуждений, отметим, что так как $v'(t) \in L_1(0, T; V^*)$, поэтому функция $v(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$ со значениями в V^*. Кроме того, эта функция слабо непрерывна со значениями в H. Поэтому начальное условие (7) имеет смысл.

Переформулируем понятие слабого решения

Определение 1.3. *Пусть $n \leq 4$, $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $v^0 \in H$. Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция $v \in L_2(0, T; V)$ такая, что $v\prime \in L_1(0, T; V^*)$, равенство*

$$v'(t) - \nu\Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \tag{11}$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0, T)$ и

$$v(0) = v_0 \tag{12}$$

1.2 О единственности слабого решения в случае $n = 2$

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о единственности слабого решения начально-краевой задачи (1)-(4) для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса. Покажем, что в случае $\Omega \subset R^2$ слабое решение начально-краевой задачи единственно. Однако для размерности $n > 2$ аналогичное утверждение неверно. Примером, показывающим, что слабое решение задачи не единственно, служит результат о бифуркации решений, содержащийся, например, в [22, гл.II, §4,п.4.4].

Сформулируем и докажем утверждение о единственности слабого решения в случае $n = 2$, следуя [22, гл.III, §3, теорема 3.2].

Теорема 1.1. *Пусть Ω ограниченная область в R^2 с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда слабое решение v решение задачи (1)-(4) единственно.*

Доказательство. Покажем единственность слабого решения. Предположим, что u и v – слабые решения задачи $v\prime(t) - \Delta v(t) - K(v(t)) + gradp = f(t)$, $v(0) = v^0$. Подставим эти решения в уравнение $v(0) = v^0$ и рассмотрим разность полученных равенств. Для разности $w = v - u$ получим равенство

$$w' - \nu\Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0$$

Применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции $w(t)$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w(t,x)w(t,x)dt + v(w(t,x), w(t,x)) = \\ = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} \cdot v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x) \cdot \frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx\end{gathered} \tag{13}$$

Оценим правую часть полученного равенства.

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} \cdot v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t}w(t,x) \cdot \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial x_i}dx$$

Используем интегрирование по частям для вычисления первого интеграла

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t}v(t,x) \cdot w(t,x) = - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} \cdot \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx$$

так как $\partial_i w_i(t,x) = \mathrm{div}\ w(t,x) = 0$. Используем интегрирование по частям для вычисления второго из интегралов

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} w(t,x) \frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} dx = \sum_{i=0}^{n=2} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \mid w \mid^2 (t,x)}{\partial x_i} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=2} \frac{\partial^2 \varphi_i(t,x)}{\partial t \partial x_i} \cdot \mid w \mid^2 (t,x) dx = 0$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{2} \partial_i \varphi_i(t,x) = \mathrm{div}\varphi(t,x) = 0$ Отсюда и из равенства (13) получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} w(t,x) w(t,x) dx + v(w(t,x) w(t,x)) =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} \cdot \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} w(t,x) dx$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_H^2 + v\|w(t)\|_H^2 = \left| \int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x) dx \right| \tag{14}$$

Оценим правую часть неравенства, используя неравенства Шварца,

$$\left| \int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x) dx \right| = \left| \int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_j(t,x) w_j(t,x) dx \right| \le$$

$$\left(\int\limits_{\Omega} \mid w_i(t,x) \mid^2 \mid w_j(t,x) \mid^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{\Omega} \mid \partial_i v_j(t,x) \mid^2 dx \right)^{1/2} \le$$

$$\left(\int\limits_{\Omega} \mid w_i(t,x) \mid^4 dx \right)^{1/4} \left(\int\limits_{\Omega} \mid w_j(t,x) \mid^4 dx \right)^{1/4} \cdot \left(\int\limits_{\Omega} \mid \partial_i v_j(t,x) \mid^2 dx \right)^{1/2}$$

или

$$\left| \int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x) dx \right| \le$$

$$\le \|w_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \cdot \|w_j(t)\|_{L_4(\Omega)} \cdot \|\partial_i v_j(t)\|_{L_2(\Omega)}$$

Учитывая, что запись, содержащая повторяющиеся индексы, предполагает суммирование по этим индексам, получаем

$$\left| \int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x) dx \right| \leq \|w(t)\|^2_{(L_4(\Omega))^n} \cdot \|v(t)\|_V$$

Применим неравенство О.А. Ладыженской и далее неравенство Коши $a \cdot b = \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} c\varepsilon = \frac{v}{2^{1/2}}$, получим

$$\left| \int\limits_{\Omega} w_i(t,x) \cdot \partial_i v(t,x) w(t,x) dx \right| \leq$$

$$\leq 2^{1/2} \|w(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} \cdot \|w(t)\|_V \cdot \|v(t)\|_V \leq$$

$$\leq v\|w(t)\|^2_V + \frac{1}{2^{3/2} v} \|v(t)\|^2_{(L_2(\Omega))^n} \cdot \|w(t)\|_V$$

Подставляя полученное соотношение в неравенство (14), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2_H \leq \frac{1}{2^{3/2} v} \|w(t)\|^2_H \cdot \|v(t)\|_V$$

Тогда из неравенство Гронуолла-Беллмана [1, теорема 2б глава IV, с.188] следует

$$\|w(t)\|^2_H \leq \|w(0)\|^2_H \exp\left(\int_0^t \frac{1}{2^{1/2} v} \cdot \|v(s)\|_V ds \right)$$

Поскольку $w(0) = v(0) - u(0) = 0$, то из полученного выше неравенства приходим к выводу, что $w(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Следовательно, $v = u$ и слабое и полное слабое решение задачи (1)-(4) единственно. $\square$

Список литературы

1. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. — М., 1987. — с. 261—262.
2. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. — М., 1987. — с. 226—232.