ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

Studies in Mathematics and its Applications

Volume 2

Editors: J.-L. Lions, *Paris*, G. Papanicolaou, *New York*,
R. T. Rockafellar, *Seattle*

NAVIER—STOKES EQUATIONS

theory and numerical analysis

Roger TEMAM
Université de Paris-Sud, Orsay, France
École Polytechnique, Palaiseau, France

Revised Edition

1979

North-Holland Publishing Company
Amsterdam·New York·Oxford

Р. ТЕМАМ

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ - СТОКСА

ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Перевод с английского
В. А. НОВИКОВА и А. М. ФРАНКА

под редакцией
Б. Г. КУЗНЕЦОВА и Н. Н. ЯНЕНКО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА
1981

В монографии известного французского математика рассматриваются вопросы существования, единственности и регулярности решений краевых задач для уравнений Навье—Стокса, а также устойчивости и сходимости методов численного решения этих уравнений. Разобрано большое количество соответствующих алгоритмов (метод Галёркина, метод конечных элементов и др.), поэтому она служит хорошим дополнением к монографии О. А. Ладыженской «Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости» (М.: Наука, 1970).

Для специалистов, занимающихся аналитическими и численными исследованиями движения жидкостей, аспирантов и студентов старших курсов университетов.

Роже Темам

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ – СТОКСА ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

т. научн. редактор В. И. Авербух. Мл. редактор Ю. С. Андреева Художник . В. Шипов. Художественный редактор В. И. Шаповалов. Технический редактор Г. В. Алюлина. Корректор Т. П. Пашковская.

ИБ № 1833

дано в набор 01.12.80. Подписано к печати 23.05.81. Формат 60×90$^1/_{16}$. Бумага ипографская № 1. Гарнитура латинская Печать высокая. Объем 12,75 бум. л. сл. печ. л 25,50. Усл. кр отт. 25,50. Уч.-изд л 23,18. Изд. № 1/0172. Тираж 8000 экз. Зак. 1226 Цена 1 р. 90 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР», Москва, 1-й Рижский пер., 2

тпечатано с матриц ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного намени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома ри Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной орговли, Москва, М-54, Валовая, 28, в Ленинградской типографии № 2 головном едприятии ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения Техническая книга» им Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном омитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

Редакция литературы по математическим наукам

702070000

$\frac{20203-030}{041(01)-81}$ 30—81, ч. 1

ОТ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

Теория вязких течений несжимаемой жидкости представляет собой один из важнейших для практики и наиболее интересный для математических исследований раздел гидродинамики. Не случайно именно в задачах динамики вязких течений Лерэ и Шаудером были сделаны первые шаги по применению методов функционального анализа, а в последнее время уравнения Навье—Стокса стали одним из первых объектов применения численных методов. Многие из задач динамики вязкой жидкости, например задача о численном исследовании течений при больших до- и закритических числах Рейнольдса, вплоть до настоящего времени не решены и настоятельно требуют своего решения.

Предлагаемая вниманию читателей книга известного французского математика Роже Темама посвящена достаточно обстоятельному изложению вопросов теории и в особенности вычислительным аспектам задач динамики вязкой несжимаемой жидкости.

В книге приведены необходимые для понимания существа дела известные результаты о существовании, единственности и регулярности решений уравнений Навье—Стокса. Вместе с тем приводится большое число соответствующих дискретных аппроксимаций дифференциальных задач: метод конечных разностей, метод конечных элементов, экономичные разностные схемы.

Разумное сочетание строгости и доступности изложения материала делают монографию Р. Темама весьма полезной не только для научных работников, интересующихся численными методами динамики вязких течений, но и для аспирантов и студентов старших курсов университетов.

Об актуальности данной книги свидетельствует тот факт, что уже через два года после ее появления (1977 г.) вышло второе, исправленное и дополненное издание (1979 г.), с которого и выполнен настоящий перевод. Работа над переводом была существенно ускорена благодаря тому, что Р. Темам любезно предоставил нам полный список изменений, исправлений и дополнений, внесенных им в текст первого издания. Мы искренне признательны ему за это.

Н. Н. Яненко
Б. Г. Кузнецов

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей книге мы изложим ряд результатов, касающихся теории и численного анализа уравнений Навье—Стокса, которые описывают движение вязкой несжимаемой жидкости.

Нас будут интересовать следующие две темы: с одной стороны, описание известных результатов о существовании, единственности и, иногда, регулярности решений в линейном и нелинейном, стационарном и нестационарном случаях; с другой стороны, аппроксимация этих задач с помощью дискретизации конечно-разностными методами и методами конечных элементов по пространственным переменным, конечно-разностными методами и методами дробных шагов по времени.

Вопросы устойчивости и сходимости соответствующих численных схем рассмотрены со всей возможной полнотой. При этом мы не ограничиваемся одними теоретическими аспектами; в частности, в приложении подробно описывается, как запрограммировать один из приведенных в основном тексте методов. Фактически многие из изучаемых в книге методов применялись на практике; однако у нас нет возможности излагать подробности эффективной вычислительной реализации всех этих методов. Что же касается теоретических результатов (существование, единственность и т. д.), то мы представили лишь самые основные из них, и ни один из этих результатов не нов; тем не менее мы попытались, насколько это было возможно, дать простое и независимое их изложение. Энергетический метод и метод компактности являются центральными для двух интересующих нас тем и служат естественным связующим звеном между ними.

Дадим более подробное описание содержания книги. Мы рассматриваем вначале линеаризованные стационарные уравнения (глава 1), затем нелинейные стационарные уравнения (глава 2) и, наконец, полные нелинейные эволюционные уравнения (глава 3). На каждом этапе мы вводим в дело новые математические средства, полезные сами по себе и подготавливающие последующие шаги.

В главе 1 после краткого изложения результатов о существовании и единственности мы описываем аппроксимацию задачи Стокса с помощью различных конечно-разностных и конечноэлементных методов. Тем самым нам представляется удобный случай для введения различных методов аппроксимации соленоидальных вектор-функций, которые (методы) важны также при рассмотрении численных аспектов задач, изучаемых в главах 2 и 3.

В главе 2 приводятся результаты о компактности как для непрерывного, так и для дискретного случаев. Затем распространяются на нелинейный случай результаты, полученные в предыдущей главе для линейных уравнений. Глава завершается доказательством неединственности решения стационарных уравнений Навье—Стокса, основанным на теории бифуркаций и топологических методах; изложение этого вопроса по существу не зависит от предыдущего.

В главе 3 рассматриваются полные нелинейные эволюционные уравнения. Вначале представлено несколько результатов, позволяющих судить о современном состоянии математической теории уравнений Навье—Стокса (теоремы существования и единственности). Затем дается краткое введение в численные аспекты задачи; здесь мы комбинируем дискретизацию по пространственным переменным, обсуждаемую в главе 1, с обычными методами дискретизации по временно́й переменной. Вопросы устойчивости и сходимости изучаются энергетическим методом. Рассмотрены также метод дробных шагов и метод искусственной сжимаемости.

Приведенного краткого описания содержания достаточно, чтобы понять, что эта книга никоим образом не претендует на роль систематического исчерпывающего трактата по данному предмету. Здесь мы не касаемся многих аспектов теории уравнений Навье—Стокса. Ничего не сказано о целом ряде интересных подходов к задачам существования и единственности, таких как методы полугрупп, сингулярных интегральных операторов, римановых многообразий. Что касается численных аспектов задачи, то мы не рассматриваем ни метод частиц, ни родственные ему методы, разработанные в Лос-Аламосской лаборатории.

Кроме того, мы строго ограничиваемся уравнениями Навье—Стокса, совсем не касаясь широкого круга других задач, которые можно изучать теми же методами. Не касаемся мы и трудных задач, связанных с турбулентностью и течениями при больших числах Рейнольдса.

Материал этой книги читался в Мэрилендском университете в первом семестре 1972—73-го учебного года как часть годового курса по уравнениям Навье—Стокса и нелинейным уравнениям в частных производных. Записи этих лекций, изданные Мэрилендским университетом[1], представляют собой первый вариант данной книги.

---

[1] См. Темам [9].—*Прим. ред.*

Я чрезвычайно признателен моим коллегам с математического факультета и из Института гидродинамики и прикладной математики при Мэрилендском университете за интерес, проявленный к изданию этих лекционных заметок. Непосредственный вклад в подготовку рукописи внесли Арлетт Уильямсон и профессора Дж. Осборн, Дж. Сэзер и Ф. Уолфи; я благодарен им за исправление моих ошибок в английском и ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению рукописи. Рядом полезных указаний я обязан также г-же М. Пелисье, М. Фортэну и Ф. Томассэ. Наконец, я хотел бы выразить благодарность секретарям математических факультетов Мэрилендского и Орсэйского университетов за помощь при подготовке рукописи.

ГЛАВА I

СТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТОКСА

Введение

В этой главе мы изучим стационарные уравнения Стокса, т. е. стационарную линеаризованную форму уравнений Навье — Стокса. Изучение уравнений Стокса полезно само по себе, а также позволит нам ввести некоторый аппарат, необходимый для исследования полных уравнений Навье — Стокса.

В § 1 рассматривается ряд функциональных пространств (пространства соленоидальных вектор-функций с компонентами из L^2). В § 2 мы даем вариационную формулировку для уравнений Стокса и доказываем существование и единственность решений с помощью проекционной теоремы. В § 3 и 4 напоминаются некоторые определения и результаты по аппроксимации нормированных пространств и линейных вариационных уравнений (§ 3). Затем мы описываем несколько способов аппроксимации некоторого, играющего фундаментальную роль в последующем изложении, пространства V соленоидальных вектор-функций, включающих в себя аппроксимацию посредством метода конечных разностей (§ 3) и посредством согласованного и несогласованного методов конечных элементов (§ 4). В § 5 обсуждаются конкретные аппроксимационные алгоритмы для уравнений Стокса и соответствующие им дискретные уравнения. Эти алгоритмы вводятся для преодоления затруднений, связанных с условием $\operatorname{div} u = 0$. Как будет показано, преодолеть эти затруднения иногда не просто.

Наконец, в § 6 мы изучим линеаризованные уравнения слабо сжимаемой жидкости и их асимптотическую сходимость к линейным уравнениям несжимаемой жидкости (т. е. к уравнениям Стокса).

§ 1. Некоторые функциональные пространства

В этом параграфе мы введем и изучим некоторые основные функциональные пространства. Эти результаты важны для дальнейшего, но методы, используемые в данном параграфе, в дальнейшем не применяются, так что читатель может бегло просмотреть доказательства и запомнить лишь общие обозначения, описанные в п. 1.1, и результаты, подытоженные в замечании 1.6.

1.1. Обозначения. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ мы обозначаем через $\boldsymbol{e}_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n=(0, \ldots, 0, 1)$ канонический базис и через $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1, \ldots, y_n)$, $\boldsymbol{z}=(z_1, \ldots, z_n)$, $\ldots$ — точки пространства.

Дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\ (1\leqslant i\leqslant n)$$

обозначается через D_i, и если $j=(j_1, \ldots, j_n)$ — мультииндекс, то D^j — это дифференциальный оператор

$$D^j=D_1^{j_1}\ \ldots\ D_n^{j_n}=\frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1}\ \ldots\ \partial x_n^{j_n}}, \tag{1.1}$$

где

$$|j|=j_1+\ldots+j_n. \tag{1.2}$$

Если $j_i=0$ для некоторого i, то $D_i^{j_i}$ — тождественный оператор; в частности, если $|j|=0$, то D^j — тождественный оператор.

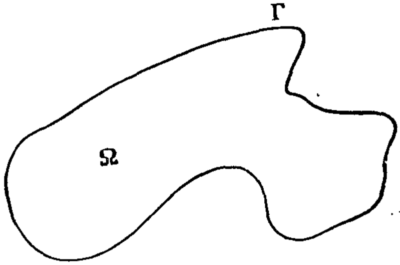

Рис. 1.

Множество Ω. Пусть Ω — открытое множество[1] в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ (рис. 1). Нам потребуется, чтобы Ω обладало некоторыми свойствами гладкости. Иногда мы будем предполагать, что Ω является гладким в следующем смысле:

Граница Γ есть $(n-1)$-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$ (значение $r\geqslant 1$ должно быть уточнено), и Ω расположено локально по одну сторону Γ. (1.3)

[1] Часто в качестве синонима слова „множество" мы будем в настоящем переводе использовать слово „область". Автор всюду употребляет термин set (множество).— *Прим. перев.*

Мы будем говорить, что область Ω, удовлетворяющая условию (1.3), *принадлежит классу* $\mathscr{C}^r$. Однако это условие слишком сильно для многих практических приложений (например, при рассмотрении течения в канале прямоугольного сечения), и все основные результаты будут доказаны нами при более слабом условии:

Граница области Ω *локально-липшицева.* (1.4)

Это означает, что Γ в окрестности любой своей точки x допускает представление в виде гиперповерхности $y_n = \theta(y_1, \ldots, y_{n-1})$, где θ удовлетворяет условию Липшица, а $(y_1, \ldots, y_n)$ — координаты в $\mathbb{R}^n$ в некотором ортогональном базисе, который может отличаться от канонического базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Конечно, если область Ω принадлежит классу $\mathscr{C}^1$, то она локально-липшицева.

Для последующего полезно отметить тот факт, что область Ω, удовлетворяющая условию (1.4), *локально-звездна.* Это означает, что каждая точка $x_j \in \Gamma$ имеет открытую окрестность $\mathscr{O}_j$, такую что множество $\mathscr{O}'_j = \Omega \cap \mathscr{O}_j$ звездно относительно одной из своих точек. Более того, согласно (1.4) мы можем при этом предполагать, что граница $\mathscr{O}'_j$ липшицева.

Если граница Γ ограничена, то ее можно покрыть конечным семейством таких областей $\mathscr{O}_j$, $j \in J$; если Γ не ограничена, то семейство $(\mathscr{O}_j)_{j \in J}$ может быть выбрано локально-конечным.

Всюду далее предполагается, что Ω *удовлетворяет условию* (1.4), если только явно не сказано, что Ω — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ или же не наложены какие-нибудь другие требования гладкости.

L^p и пространства Соболева. Пусть Ω — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Через $L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, (соотв. $L^\infty(\Omega)$) обозначим пространство определенных на Ω вещественных функций, абсолютно интегрируемых с p-й степенью (соотв. существенно ограниченных) по лебеговой мере $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$. Это пространство с нормой

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}, \tag{1.5}$$

соотв.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u(x)|,$$

является банаховым пространством. При $p = 2$ мы получаем гильбертово пространство $L^2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.6}$$

Пространство Соболева $W^{m,p}(\Omega)$ — это пространство функций из $L^p(\Omega)$, все частные производные которых до порядка m включительно принадлежат $L^p(\Omega)$ (m — целое, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$). Это — банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|j| \leqslant m} \|D^j u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p}. \tag{1.7}$$

При $p=2$ пространство $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ представляет собой гильбертово пространство со скалярным произведением

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|j| \leqslant m} (D^j u, D^j v). \tag{1.8}$$

Пусть $\mathscr{D}(\Omega)$ (соотв. $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$) обозначает пространство функций класса $\mathscr{C}^\infty$ с компактным носителем, содержащимся в Ω (соотв. $\overline{\Omega}$). Замыкание $\mathscr{D}(\Omega)$ в $W^{m,p}(\Omega)$ обозначим через $W_0^{m,p}(\Omega)$ (через $H_0^m(\Omega)$ при $p=2$).

Мы напомним, когда это потребуется, классические свойства этих пространств, такие как теоремы о плотности или теоремы о следах (при соответствующих предположениях о регулярности Ω).

Мы часто будем иметь дело с n-мерными вектор-функциями, компоненты которых принадлежат одному из определенных выше пространств. Будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}^p(\Omega) &= \{L^p(\Omega)\}^n, & \boldsymbol{W}^{m,p}(\Omega) &= \{W^{m,p}(\Omega)\}^n, \\ \boldsymbol{H}^m(\Omega) &= \{H^m(\Omega)\}^n, & \boldsymbol{\mathscr{D}}(\Omega) &= \{\mathscr{D}(\Omega)\}^n. \end{aligned}$$

Предполагается, что эти произведения пространств снабжены обычной нормой произведения или какой-нибудь эквивалентной нормой (за исключением $\mathscr{D}(\Omega)$ и $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$, которые не являются нормированными пространствами).

Наиболее часто мы будем использовать следующие пространства:

$$L^2(\Omega),\ \boldsymbol{L}^2(\Omega),\ H_0^1(\Omega),\ \boldsymbol{H}_0^1(\Omega).$$

Скалярное произведение и норму в $L^2(\Omega)$ или $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ будем обозначать через $(\cdot, \cdot)$ и $|\cdot|$, в $H_0^1(\Omega)$ и $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ — через $[\cdot, \cdot]$ и $[\cdot]$.

Напомним, что если Ω *ограничено в некотором направлении*[1], то имеет место *неравенство Пуанкаре*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c(\Omega) \|Du\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \tag{1.9}$$

где D — производная в этом направлении, а $c(\Omega)$ — константа, зависящая только от Ω (ограниченная величиной $2l$, где l — диа-

---

[1] То есть Ω лежит внутри „полосы", ограниченной двумя гиперплоскостями, ортогональными к этому направлению. Минимальное расстояние между такими парами гиперплоскостей называется *толщиной* (или *шириной*) Ω в соответствующем направлении.

метр Ω или толщина Ω в каком-либо направлении). В этом случае норма $[\cdot]$ в $H_0^1(\Omega)$ (или в $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$) эквивалентна норме

$$\|u\|=\left(\sum_{j=1}^{n}|D_j u|^2\right)^{1/2}. \tag{1.10}$$

Пространство $H_0^1(\Omega)$ (соотв. $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$) является также гильбертовым пространством с *ассоциированным скалярным произведением*

$$((u,\ v))=\sum_{i=1}^{n}(D_i u,\ D_i v). \tag{1.11}$$

Это скалярное произведение и эту норму в $H_0^1(\Omega)$ и $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ (где Ω ограничена в некотором направлении) будем обозначать через $((\cdot,\ \cdot))$ и $\|\cdot\|$.

Пусть $\mathcal{V}$ — следующее пространство (без топологии):

$$\mathcal{V}=\{u\in\mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{div} u=0\}. \tag{1.12}$$

Замыкание $\mathcal{V}$ в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ и в $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ дает два основных пространства при изучении уравнений Навье — Стокса; мы обозначим их через H и V. Результаты настоящего параграфа позволят нам дать некоторую характеризацию этих пространств.

1.2. Теорема о плотности. Пусть $E(\Omega)$ — следующее вспомогательное пространство:

$$E(\Omega)=\{u\in\boldsymbol{L}^2(\Omega),\quad \operatorname{div} u\in L^2(\Omega)\}.$$

Будучи снабжено скалярным произведением

$$((u,\ v))_{E(\Omega)}=(u,\ v)+(\operatorname{div} u,\ \operatorname{div} v), \tag{1.13}$$

оно становится гильбертовым пространством. Очевидно, (1.13) есть скалярное произведение в $E(\Omega)$, и легко видеть [1], что $E(\Omega)$ полно в ассоциированной норме

$$\|u\|_{E(\Omega)}=\{((u,\ u))_{E(\Omega)}\}^{1/2}.$$

Нашей целью является доказательство некоторой теоремы о следе: для вектор-функции $u\in E(\Omega)$ можно определить значение на Γ ее нормальной компоненты $u\cdot\nu$ (ν — единичный вектор нормали к границе). Мы будем использовать классический метод Лионса — Мадженеса [1]. Начнем с доказательства следующей теоремы.

---

[1] Если u_m — последовательность Коши в $E(\Omega)$, то u_m будет также последовательностью Коши в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$; u_m сходится к некоторому пределу u в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ и $\operatorname{div} u_m$ сходится к некоторому пределу g в $L^2(\Omega)$, причем обязательно $g=\operatorname{div} u$; поэтому $u\in E(\Omega)$ и u_m сходится к u в $E(\Omega)$.

Теорема 1.1. *Пусть Ω — липшицева открытая область в $\mathbb{R}^n$. Тогда множество вектор-функций, принадлежащих $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$, плотно в $E(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{u}$ — некоторый элемент из $E(\Omega)$. Мы должны доказать, что $\boldsymbol{u}$ есть предел в $E(\Omega)$ вектор-функций из $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$.

(i) Если Ω неограничена, то мы вначале аппроксимируем $\boldsymbol{u}$ функциями из $E(\Omega)$ с компактными носителями в $\overline{\Omega}$ (т. е. функциями с ограниченными носителями).

Пусть $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi = 1$ при $|x| \leqslant 1$ и $\varphi = 0$ при $|x| \geqslant 2$. Для $a > 0$ пусть φ_a — ограниченная на Ω функция $x \mapsto \varphi(x/a)$. Легко проверить, что $\varphi_a \boldsymbol{u} \in E(\Omega)$ и $\varphi_a \boldsymbol{u}$ сходится к $\boldsymbol{u}$ в этом пространстве при $a \to \infty$.

Функции с ограниченным носителем образуют плотное подпространство в $E(\Omega)$, и мы можем предположить, что $\boldsymbol{u}$ имеет ограниченный носитель.

(ii) Рассмотрим сперва случай $\Omega = \mathbb{R}^n$. Итак, $\boldsymbol{u} \in E(\mathbb{R}^n)$ и $\boldsymbol{u}$ имеет компактный носитель. В этом случае результат доказывается с помощью регуляризации. Пусть $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ — функция класса $\mathscr{C}^\infty$ с компактным носителем, такая что $\rho \geqslant 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$. Для $\varepsilon \in (0, 1)$ пусть ρ_ε обозначает функцию $x \mapsto (1/\varepsilon^n)\rho(x/\varepsilon)$. При $\varepsilon \to 0$ функция ρ_ε сходится в смысле теории распределений к распределению Дирака и справедлив следующий факт, являющийся классическим результатом[1]:

$$\rho_\varepsilon * \boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v} \text{ в } \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.14}$$

Далее, вектор-функция $\rho_\varepsilon * \boldsymbol{u}$ принадлежит $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, поскольку она имеет компактный носитель ($\subset \operatorname{supp}\rho_\varepsilon + \operatorname{supp}\boldsymbol{u}$), а ее компоненты принадлежат классу $\mathscr{C}^\infty$. Согласно (1.14), $\rho_\varepsilon * \boldsymbol{u}$ сходится к $\boldsymbol{u}$ в $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$ и $\operatorname{div}(\rho_\varepsilon * \boldsymbol{u}) = \rho_\varepsilon * \operatorname{div}\boldsymbol{u}$ сходится к $\operatorname{div}\boldsymbol{u}$ в $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, $\boldsymbol{u}$ есть предел в $E(\mathbb{R}^n)$ функций из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) В общем случае ($\Omega \neq \mathbb{R}^n$) воспользуемся замечанием, сделанным после (1.4): область Ω локально-звездна. Множества Ω, $(\mathcal{O}_j)_{j \in J}$ образуют открытое покрытие $\overline{\Omega}$. Рассмотрим разбиение единицы, отвечающее этому покрытию:

$$1 = \varphi + \sum_{j \in J} \varphi_j, \text{ где } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),\ \varphi_j \in \mathscr{D}(\mathcal{O}_j). \tag{1.15}$$

---

[1] Звездочка обозначает оператор *свёртки:*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, то свёртка $f * g$ определена и принадлежит $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Мы можем записать

$$u = \varphi u + \sum_{j \in J} \varphi_j u,$$

причем сумма $\sum_j$ фактически конечна, поскольку носитель u компактен (в Ω). Так как функция φu имеет компактный носитель в Ω, то можно показать, как и в (ii), что φu является пределом в $E(\Omega)$ функций, принадлежащих $\mathcal{D}(\Omega)$ (функция φu, продолженная нулем вне Ω, принадлежит $E(\mathbb{R}^n)$, и для достаточно малых ε свёртка $\rho_\varepsilon * (\varphi u)$ имеет компактный носитель в Ω).

Рассмотрим теперь одну из функций $u_j = \varphi_j u$, не равную тождественно нулю. Множество $\mathcal{O}'_j = \mathcal{O}_j \cap \Omega$ звездно относительно одной из своих точек; после надлежащего переноса начала в $\mathbb{R}^n$ мы можем считать, что это точка 0. Пусть σ_λ, $\lambda \neq 0$ — линейное преобразование $x \mapsto \lambda x$ (гомотетия с коэффициентом λ). Поскольку область $\mathcal{O}'_j$ липшицева и звездна относительно 0, то ясно, что

$$\mathcal{O}'_j \subset \overline{\mathcal{O}'_j} \subset \sigma_\lambda \mathcal{O}'_j \quad \text{для} \quad \lambda > 1,$$
$$\sigma_\lambda \mathcal{O}'_j \subset \overline{\sigma_\lambda \mathcal{O}'_j} \subset \mathcal{O}'_j \quad \text{для} \quad 0 < \lambda < 1.$$

Пусть $\sigma_\lambda \circ v$ обозначает функцию $x \mapsto v(\sigma_\lambda(x))$; как следует из доказываемой ниже леммы 1.1, сужение на $\mathcal{O}'_j$ функции $\sigma_\lambda \circ u_j$, $\lambda > 1$, сходится к u_j в $E(\mathcal{O}'_j)$ (или в $E(\Omega)$) при $\lambda \to 1$. Но если $\psi_j \in \mathcal{D}(\sigma_\lambda(\mathcal{O}'_j))$ и $\psi_j = 1$ на $\mathcal{O}'_j$, то, очевидно, функция $\psi_j(\sigma_\lambda \circ u)$ принадлежит $E(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, нам достаточно вместо функции u_j аппроксимировать функцию $v_j \in E(\Omega)$, являющуюся сужением на Ω некоторой функции $w_j \in E(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем (возьмем $w_j = \psi_j(\sigma_\lambda \circ u)$). Поэтому наше утверждение следует из пункта (ii). □

Осталось доказать лемму 1.1, содержащую утверждения, уже использованные выше, и утверждения, которые понадобятся нам позже.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество, звездное относительно* 0.

(i) *Для всякого распределения $p \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ можно определить распределение $\sigma_\lambda \circ p$ в $\mathcal{D}'(\sigma_\lambda \mathcal{O})$ по формуле*

$$\langle \sigma_\lambda \circ p, \varphi \rangle = \lambda^{-n} \langle p, \sigma_{1/\lambda} \circ \varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\sigma_\lambda \mathcal{O}) \ (\lambda > 0). \tag{1.16}$$

Производная от $\sigma_\lambda \circ p$ связана с производной от p равенством

$$D_i(\sigma_\lambda \circ p) = \lambda \sigma_\lambda \circ (D_i p), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1.17}$$

При $\lambda \to 1$, $\lambda > 1$ сужение на $\mathcal{O}$ функции $\sigma_\lambda \circ p$ сходится к p в смысле теории распределений.

(ii) *Если $p \in L^\alpha(\mathcal{O})$, $1 \leqslant \alpha < +\infty$, то $\sigma_\lambda \circ p \in L^\alpha(\sigma_\lambda \mathcal{O})$. При $\lambda \to 1$, $\lambda > 1$, сужение на $\mathcal{O}$ функции $\sigma_\lambda \circ p$ сходится к p в $L^\alpha(\mathcal{O})$.*

Доказательство. (i) Ясно, что отображение $\varphi \mapsto (1/\lambda^n) \langle p, \sigma_{1/\lambda} \circ \varphi \rangle$

линейно и непрерывно на $\mathscr{D}(\sigma_\lambda\mathcal{O})$ и, следовательно, определяет некоторое распределение, которое мы обозначили $\sigma_\lambda \circ p$. Формула (1.17) получается так:

$$\langle D_i(\sigma_\lambda \circ p), \varphi\rangle = -\langle(\sigma_\lambda \circ p), D_i\varphi\rangle = -\frac{1}{\lambda^n}\langle p, \sigma_{1/\lambda} \circ (D_i\varphi)\rangle$$
$$= -\frac{1}{\lambda^{n-1}}\langle p, D_i(\sigma_{1/\lambda} \circ \varphi)\rangle = \frac{1}{\lambda^{n-1}}\langle D_i p, \sigma_{1/\lambda} \circ \varphi\rangle = \lambda\langle\sigma_\lambda \circ D_i p, \varphi\rangle.$$

Для $\lambda > 1$, $\lambda \to 1$ функции $\sigma_{1/\lambda} \circ \varphi$ имеют компактный носитель в $\mathcal{O}$ для достаточно маленьких $\lambda - 1$ и сходятся к φ в $\mathscr{D}(\mathcal{O})$ при $\lambda \to 1$.

(ii) Ясно, что

$$\int\limits_{\sigma_\lambda\mathcal{O}} |(\sigma_\lambda \circ p)(y)|^\alpha\, dy = \lambda^n \int\limits_{\mathcal{O}} |p(x)|^\alpha\, dx,$$
$$\|\sigma_\lambda \circ p\|_{L^\alpha(\sigma_\lambda\mathcal{O})} = \|p\|_{L^\alpha(\mathcal{O})}.$$

Отсюда следует, что достаточно доказать сходимость сужения $\sigma_\lambda \circ p$ на $\mathcal{O}$ к p для p, принадлежащих некоторому плотному подпространству в $L^\alpha(\mathcal{O})$. Но $\mathscr{D}(\mathcal{O})$ плотно в $L^\alpha(\mathcal{O})$, а для $p \in \mathscr{D}(\mathcal{O})$ результат очевиден. □

1.3. Теорема о следе. Мы предположим здесь, что Ω — открытая ограниченная область класса $\mathscr{C}^2$. Известно, что тогда существует непрерывный линейный оператор $\gamma_0 \in \mathscr{L}(H^1(\Omega), L^2(\Gamma))$ *(оператор следа)*, такой что $\gamma_0 u$ = сужению u на Γ для каждой функции $u \in H^1(\Omega)$, дважды непрерывно дифференцируемой в $\overline{\Omega}$. Пространство $H_0^1(\Omega)$ совпадает с ядром γ_0. Образ $\gamma_0(H^1(\Omega))$ оператора следа является плотным подпространством в $L^2(\Gamma)$; оно обозначается через $H^{1/2}(\Gamma)$; пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ может быть снабжено нормой, индуцированной из $H^1(\Omega)$ с помощью γ_0. Кроме того, существует непрерывный линейный оператор $l_\Omega \in \mathscr{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^1(\Omega))$ (называемый *оператором поднятия*), такой что $\gamma_0 \circ l_\Omega$ есть тождественный оператор в $H^{1/2}(\Gamma)$. Эти результаты доказываются, например, в книгах: Лионс [1], Лионс и Мадженес [1].

Мы хотим доказать аналогичный результат для вектор-функций из $E(\Omega)$.

Пусть $\boldsymbol{H}^{-1/2}(\Gamma)$ — пространство, сопряженное к $\boldsymbol{H}^{1/2}(\Gamma)$; так как $\boldsymbol{H}^{1/2}(\Gamma) \subset \boldsymbol{L}^2(\Gamma)$, причем вложение непрерывно, то $\boldsymbol{L}^2(\Gamma)$ непрерывно вложено в $\boldsymbol{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Справедлива следующая теорема о следе (которая означает, что мы можем определить $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu}|_\Gamma$ для $\boldsymbol{u} \in E$):

Теорема 1.2. *Пусть Ω — открытая ограниченная область класса $\mathscr{C}^2$. Тогда существует непрерывный линейный оператор $\gamma_\nu \in \mathscr{L}(E(\Omega), H^{-1/2}(\Gamma))$, такой что*

$$\gamma_\nu \boldsymbol{u} = \text{сужению } \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu} \text{ на } \Gamma \text{ для каждого } \boldsymbol{u} \in \mathscr{D}(\overline{\Omega}). \qquad (1.18)$$

Для всех $\boldsymbol{u} \in E(\Omega)$ *и* $w \in H^1(\Omega)$ *верна следующая* обобщенная формула Стокса:

$$(\boldsymbol{u}, \operatorname{grad} w) + (\operatorname{div} \boldsymbol{u}, w) = \langle \gamma_\nu \boldsymbol{u}, \gamma_0 w \rangle. \tag{1.19}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in H^{1/2}\Gamma$ и для $w \in H^1(\Omega)$ пусть $\gamma_0 w = \varphi$. Для $\boldsymbol{u} \in E(\Omega)$ положим

$$X_u(\varphi) = \int_\Omega [\operatorname{div} \boldsymbol{u}(x) w(x) + \boldsymbol{u}(x) \operatorname{grad} w(x)] dx$$
$$= (\operatorname{div} \boldsymbol{u}, w) + (\boldsymbol{u}, \operatorname{grad} w).$$

Лемма 1.2. $X_u(\varphi)$ *не зависит от выбора* w, *при условии что* $w \in H^1(\Omega)$ *и* $\gamma_0 w = \varphi$.

Доказательство. Пусть w_1 и w_2 принадлежат $H^1(\Omega)$ и $\gamma_0 w_1 = \gamma_0 w_2 = \varphi$. Положим $w = w_1 - w_2$. Нам надо показать, что

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{u}, w_1) + (\boldsymbol{u}, \operatorname{grad} w_1) = (\operatorname{div} \boldsymbol{u}, w_2) + (\boldsymbol{u}, \operatorname{grad} w_2),$$

т. е. что

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{u}, w) + (\boldsymbol{u}, \operatorname{grad} w) = 0. \tag{1.20}$$

Но поскольку $w \in H^1(\Omega)$ и $\gamma_0 w = 0$, то w принадлежит $H_0^1(\Omega)$ и является пределом в $H^1(\Omega)$ гладких функций с компактным носителем: $w = \lim w_m$, $w_m \in \mathscr{D}(\Omega)$. Очевидно, что

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{u}, w_m) + (\boldsymbol{u}, \operatorname{grad} w_m) = 0 \quad \forall w_m \in \mathscr{D}(\Omega),$$

и (1.20) получается отсюда при $m \to \infty$. $\square$

Возьмем теперь $w = l_\Omega \varphi$ (см. выше). Тогда, в силу неравенства Шварца,

$$|X_u(\varphi)| \leqslant \|\boldsymbol{u}\|_{E(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)},$$

и так как $l_\Omega \in \mathscr{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^1(\Omega))$, то

$$|X_u(\varphi)| \leqslant c_0 \|\boldsymbol{u}\|_{E(\Omega)} \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \tag{1.21}$$

где c_0 — норма оператора l_Ω.

Следовательно, $\varphi \mapsto X_u(\varphi)$ есть непрерывное линейное отображение из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $\mathbb{R}$. Таким образом, существует $g = g(\boldsymbol{u}) \in H^{-1/2}(\Gamma)$, такое что

$$X_u(\varphi) = \langle g, \varphi \rangle. \tag{1.22}$$

Ясно, что отображение $\boldsymbol{u} \mapsto g(\boldsymbol{u})$ линейно, а ввиду (1.21)

$$\|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant c_0 \|\boldsymbol{u}\|_{E(\Omega)}. \tag{1.23}$$

Это доказывает, что отображение $\boldsymbol{u} \mapsto g(\boldsymbol{u}) = \gamma_\nu \boldsymbol{u}$ непрерывно действует из $E(\Omega)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Нам осталось лишь доказать (1.18), ибо (1.19) непосредственно следует из определения $\gamma_\nu \boldsymbol{u}$.

Лемма 1.3. *Для* $\boldsymbol{u} \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$

$$\gamma_\nu \boldsymbol{u} = \textit{сужению } \boldsymbol{u}\cdot\nu \textit{ на } \Gamma.$$

Доказательство. Для таких $\boldsymbol{u}$ и для любых $w \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ (или для $\boldsymbol{u}$ и w, дважды непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$) имеем

$$X_{\boldsymbol{u}}(\gamma_0 w) = \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{u}w)\,dx = \int_\Gamma w(\boldsymbol{u}\cdot\nu)\,d\Gamma$$

$$= \int_\Gamma (\boldsymbol{u}\cdot\nu)(\gamma_0 w)\,d\Gamma \text{ (по формуле Стокса)} = \langle \boldsymbol{u}\cdot\nu,\ \gamma_0 w\rangle.$$

Так как для указанных w следы $\gamma_0 w$ образуют плотное подмножество в $H^{1/2}(\Gamma)$, то формула $X_{\boldsymbol{u}}(\varphi) = \langle \boldsymbol{u}\cdot\nu,\ \varphi\rangle$ верна по непрерывности для каждого $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Сравнивая с (1.22), получаем $\gamma_\nu \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\cdot\nu|_\Gamma$.

Замечание 1.1. Теорема 1.1 не используется явно при доказательстве теоремы 1.2, но теорема о плотности в сочетании с леммой 1.3 показывает, что оператор γ_ν определяется единственным образом, так как известны его значения на всюду плотном подмножестве.

Замечание 1.2. В действительности оператор γ_ν отображает $E(\Omega)$ *на* $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Пусть φ — заданная функция из $H^{-1/2}(\Gamma)$, такая что $\langle\varphi, 1\rangle = 0$. Тогда задача Неймана

$$\begin{aligned} &\Delta p = 0 \text{ в } \Omega,\\ &\frac{\partial p}{\partial \nu} = \varphi \text{ на } \Gamma \end{aligned} \tag{1.24}$$

имеет слабое решение $p = p(\varphi) \in H^1(\Omega)$, которое единственно с точностью до аддитивной постоянной (см. Лионс и Мадженес [1]). Для любого из этих решений p положим $\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} p$. Ясно, что $\boldsymbol{u} \in E(\Omega)$ и $\gamma_\nu \boldsymbol{u} = \varphi$. Кроме того, понятно, что существует вектор-функция $\boldsymbol{u}_0$ с компонентами из $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая условию $\gamma_\nu \boldsymbol{u}_0 = 1$. Поэтому для каждого ψ из $H^{1/2}(\Gamma)$, записав

$$\psi = \varphi + \frac{\langle\psi, 1\rangle}{\operatorname{mes}\Gamma}, \quad \varphi = \psi - \frac{\langle\psi, 1\rangle}{\operatorname{mes}\Gamma}, \tag{1.25}$$

можно определить элемент $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\psi)$, такой что $\gamma_\nu \boldsymbol{u} = \psi$, по формуле

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} p(\varphi) + \frac{\langle\psi, 1\rangle}{\operatorname{mes}\Gamma}\boldsymbol{u}_0. \tag{1.26}$$

Кроме того, $\psi \mapsto \boldsymbol{u}(\psi)$ есть непрерывное линейное отображение из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $E(\Omega)$ (т. е. некоторый *оператор поднятия*, как и l_Ω). □

Пусть $E_0(\Omega)$ — замыкание $\mathcal{D}(\Omega)$ в $E(\Omega)$. Имеет место

Теорема 1.3. *Ядро оператора γ_ν совпадает с $E_0(\Omega)$.*

Доказательство. Если $u \in E_0(\Omega)$, то по определению этого пространства существует последовательность функций $u_m \in \mathcal{D}(\Omega)$, сходящаяся к u в $E(\Omega)$ при $m \to \infty$. Из теоремы 1.2 вытекает, что $\gamma_\nu u_m = 0$ и, значит, $\gamma_\nu u = \lim\limits_{m \to \infty} \gamma_\nu u_m = 0$.

Обратно, покажем, что если $u \in E(\Omega)$ и $\gamma_\nu u = 0$, то u является пределом в $E(\Omega)$ вектор-функций из $\mathcal{D}(\Omega)^n$. Пусть Φ — произвольная функция из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и φ — ее сужение на Ω. Так как $\gamma_\nu u = 0$, то $\langle \gamma_\nu u, \gamma_0 \varphi \rangle = 0$; это означает, что

$$\int_\Omega [\operatorname{div} u \cdot \varphi + u \cdot \operatorname{grad} \varphi]\, dx = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\widetilde{\operatorname{div} u} \cdot \Phi + \tilde{u} \cdot \operatorname{grad} \Phi]\, dx = 0 \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

и потому

$$\operatorname{div} \tilde{u} = \widetilde{\operatorname{div} u}, \tag{1.27}$$

где $\tilde{v}$ обозначает функцию, равную v в Ω и нулю в $\complement\Omega$. Таким образом, $\tilde{u} \in E(\mathbb{R}^n)$.

Рассуждая точно так же, как и при доказательстве теоремы 1.1 (см., в частности, пункты (i) и (ii)), мы можем свести общий случай к случаю, когда носитель функции u принадлежит одному из множеств $\mathcal{O}_j \cap \overline{\Omega}$. Но если u — такая функция, то $\tilde{u} \in E(\mathbb{R}^n)$ и $\sigma_\lambda \circ \tilde{u}$ имеет компактный носитель в $\mathcal{O}'_j$ для $0 < \lambda < 1$ (множество $\mathcal{O}'_j$ предполагается звездным относительно 0). По лемме 1.1 сужение $\sigma_\lambda \circ \tilde{u}$ на $\mathcal{O}'_j$ (соотв. Ω) сходится к u в $E(\mathcal{O}'_j)$ (соотв. в $E(\Omega)$) при $\lambda \to 1$. Тем самым задача свелась к аппроксимации функции u с компактным носителем в Ω элементами из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, а это, очевидно, можно сделать с помощью регуляризации (как и в пункте (ii) доказательства теоремы 1.1). □

Замечание 1.3. Некоторые частные результаты остаются справедливыми и в случае, когда область Ω неограничена или имеет негладкую границу. Например, если $u \in E(\Omega)$, то мы можем определить $\gamma_\nu u$ на каждой ограниченной части Γ_0 границы Γ класса $\mathscr{C}^2$ и $\gamma_\nu u \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$. Если область Ω гладкая, но неограниченная или если ее граница состоит из объединения конечного числа ограниченных $(n-1)$-мерных многообразий класса $\mathscr{C}^2$, то $\gamma_\nu u$ определено вышеуказанным способом на всей границе Γ. Тем не менее обобщенная формула Стокса (1.19) в этом случае не имеет места.

Эти результаты можно уточнить, если имеется больше информации о следе функций из $H^1(\Omega)$. Предположим, что выполнены следующие условия:

— существует оператор $\gamma_0 \in \mathscr{L}(H^1(\Omega), L^2(\Gamma))$, такой что $\gamma_0 u = u|_\Gamma$ для каждого $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Обозначим $\gamma_0(H^1(\Omega))$ через $\mathscr{H}^{1/2}(\Gamma)$;

— существует оператор поднятия $l_\Omega \in \mathscr{L}(\mathscr{H}^{1/2}(\Gamma), H^1(\Omega))$, такой что $\gamma_0 \circ l_\Omega$ — тождественный оператор; $\mathscr{H}^{1/2}(\Gamma)$ снабжено нормой, индуцированной γ_0;

— Ω — липшицева область.

Тогда все предыдущие результаты могут быть распространены на рассматриваемый случай. Справедливы теоремы 1.1 и 1.3. Доказательство теоремы 1.2 приводит к определению $\gamma_\nu u$ как некоторого элемента пространства $\mathscr{H}^{-1/2}(\Gamma)$, сопряженного к $\mathscr{H}^{1/2}(\Gamma)$. Имеет место обобщенная формула Стокса (1.19).

1.4. Характеризация пространств H и V. Напомним обозначения, введенные в конце п. 1.1:

$$\mathscr{V} = \{u \in \mathscr{D}(\Omega),\ \operatorname{div} u = 0\},$$

H — замыкание $\mathscr{V}$ в $L^2(\Omega)$,

V — замыкание $\mathscr{V}$ в $H_0^1(\Omega)$.

Характеризация градиента распределения. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и p — некоторое распределение на Ω, $p \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Легко проверить, что для каждого $v \in \mathscr{V}$ мы имеем

$$\langle \operatorname{grad} p, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle D_i p, v_i\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle p, D_i v_i\rangle = -\langle p, \operatorname{div} v\rangle = 0. \tag{1.28}$$

Справедливо и обратное утверждение. Это важное свойство можно доказать, используя следующий глубокий результат де Рама [1]:

Предложение 1.1. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $f_i \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$. Для того чтобы*

$$f = \operatorname{grad} p \tag{1.29}$$

---

[1] Набросаем контуры этого доказательства, которое лежит в стороне от основного русла изложения. Рассмотрим

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i\, dx_i,\ f_i \in \mathscr{D}'(\Omega)$$

и формы класса C^∞ степени $n-1$ с компактным носителем

$$\tilde{v} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i v_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n,\ v_i \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Ясно, что $d\tilde{v} = 0$ тогда и только тогда, когда $v = \{v_1, \ldots, v_n\} \in V$ (т. е. $\operatorname{div} v = 0$). Теорема 17′ на стр. 154 книги де Рама [1] утверждает, что для $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ тогда и только тогда $f = dg$, $g \in \mathscr{D}'(\Omega)$ (т. е. $f_i = D_i g$, $1 \leqslant i \leqslant n$), когда $\langle \tilde{f}, \tilde{v}\rangle = 0$ для каждой формы v указанного вида. Это эквивалентно утверждению предложения 1.1 (Ж.-Л. Лионс, личное сообщение).

В замечании 1.9 приведено доказательство предложения 1.1, основанное на элементарных соображениях и предложении 1.2. См. также комментарии в конце книги.

для некоторого p из $\mathcal{D}'(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle f, v\rangle = 0 \ \forall v \in \mathcal{V}. \tag{1.30}$$

Этот результат будет в дальнейшем играть существенную роль при интерпретации вариационной формулировки уравнений Навье—Стокса и родственных им уравнений.

Приведем теперь ряд других результатов.

Предложение 1.2. *Пусть Ω — липшицево ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$.*

(i) *Если у распределения p все производные первого порядка $D_i p$, $1 \leqslant i \leqslant n$, принадлежат $L^2(\Omega)$, то $p \in L^2(\Omega)$ и*[1]

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leqslant c(\Omega)\|\operatorname{grad} p\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.31}$$

(ii) *Если у распределения p все первые производные $D_i p$, $1 \leqslant i \leqslant n$, принадлежат $H^{-1}(\Omega)$, то $p \in L^2(\Omega)$ и*

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leqslant c(\Omega)\|\operatorname{grad} p\|_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{1.32}$$

В обоих случаях, если Ω — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то $p \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Доказательство. Утверждение (i) доказано у Дени и Лионса [1] для ограниченного звездного открытого множества Ω. В нашем случае из этого результата следует, что p принадлежит L^2 на каждом шаре, содержащемся в Ω вместе со своим замыканием, и на всех множествах $\mathcal{O}'_j$, определенных после (1.4). Так как конечный набор этих шаров и множеств $\mathcal{O}'_j$ покрывает Ω, то наше утверждение доказано.

Утверждение (ii) доказано у Нечаса [2].

Для области, не обладающей никакими свойствами регулярности, мы применяем уже полученные результаты для каждого шара, содержащегося в Ω вместе со своим замыканием, и получаем лишь, что $p \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. □

Замечание 1.4. (i) Объединяя результаты предложений 1.1 и 1.2, мы видим, что если $f \in H^{-1}(\Omega)$ (соотв. $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$) и $\langle f, v\rangle = 0$ $\forall v \in \mathcal{V}$, то $f = \operatorname{grad} p$ и $p \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Если, кроме того, Ω — липшицево открытое ограниченное множество, то $p \in L^2(\Omega)$ (соотв. $H^1(\Omega)$).

(ii) Из п. (ii) предложения 1.2 вытекает, что оператор grad осуществляет изоморфизм $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ в $H^{-1}(\Omega)$; следовательно, образ этого оператора замкнут. Напомним, что (для ограниченного Ω) $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ изоморфно подпространству в $L^2(\Omega)$, ортогональному константам:

$$L^2(\Omega)/\mathbb{R} = \left\{ p \in L^2(\Omega), \quad \int_\Omega p(x)\,dx = 0 \right\}.$$

См. (6.12) — другой вариант оценки (1.32).

[1] Относительно обозначения $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ см. п. (ii) замечания 1.4 ниже. — *Прим. ред.*

Характеризация пространства H. Теперь мы можем следующим образом охарактеризовать H и $H^{\perp}$ (ортогональное дополнение к H в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$).

Теорема 1.4. *Пусть Ω — липшицево открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$H^{\perp}=\{\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{L}^2(\Omega),\ \boldsymbol{u}=\operatorname{grad} p,\ p\in H^1(\Omega)\}, \tag{1.33}$$
$$H=\{\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{L}^2(\Omega),\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0,\ \gamma_\nu\boldsymbol{u}=0\}. \tag{1.34}$$

Доказательство. (1.33): Пусть $\boldsymbol{u}$ принадлежит пространству в правой части (1.33). Тогда для всех $\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\operatorname{grad} p,\boldsymbol{v})=-(p,\operatorname{div}\boldsymbol{v})=0; \tag{1.35}$$

следовательно, $\boldsymbol{u}\in H^{\perp}$. Обратно, $H^{\perp}$ содержится в пространстве в правой части (1.33). Действительно, если $\boldsymbol{u}\in H^{\perp}$, то $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ $\forall\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$ и, по предложению 1.1, $\boldsymbol{u}=\operatorname{grad}p$, $p\in\mathscr{D}'(\Omega)$. Поэтому из предложения 1.2 следует, что $p\in H^1(\Omega)$.

(1.34): Обозначим пространство в правой части (1.34) через $H^{\cdot}$ и докажем, что $H\subset H^{\cdot}$. Если $\boldsymbol{u}\in H$, то $\boldsymbol{u}=\lim\limits_{m\to\infty}\boldsymbol{u}_m$, $\boldsymbol{u}_m\in\mathscr{V}$; из этой сходимости в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ вытекает сходимость в смысле теории распределений; так как дифференцирование является непрерывным оператором в пространстве распределений и $\operatorname{div}\boldsymbol{u}_m=0$, то $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$. Поскольку $\operatorname{div}\boldsymbol{u}_m=\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$, а $\boldsymbol{u}_m$ и $\boldsymbol{u}$ принадлежат $E(\Omega)$ и

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_m\|_{E(\Omega)}=\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_m\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.36}$$

то $\boldsymbol{u}_m$ сходится к $\boldsymbol{u}$ в $E(\Omega)$ и $\gamma_\nu\boldsymbol{u}=\lim\limits_{m\to\infty}\gamma_\nu\boldsymbol{u}_m=0$ $(\gamma_\nu\boldsymbol{u}_m=\boldsymbol{u}_m\cdot\nu|_\Gamma=0$ $\forall\boldsymbol{u}_m\in\mathscr{V})$. Следовательно, $\boldsymbol{u}\in H^{\cdot}$.

Предположим теперь, что H не совпадает с $H^{\cdot}$, и пусть $H^{\cdot\cdot}$ — ортогональное дополнение к H в $H^{\cdot}$. В силу (1.33), каждый элемент $\boldsymbol{u}\in H^{\cdot\cdot}$ есть градиент некоторого элемента $p\in H^1(\Omega)$; более того, p удовлетворяет уравнению

$$\Delta p=\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0,\quad \boldsymbol{u}\cdot\nu|_\Gamma=\frac{\partial p}{\partial\nu}\Big|_\Gamma=0, \tag{1.37}$$

а это означает, что p есть константа и $\boldsymbol{u}=0$; поэтому $H^{\cdot\cdot}=\{0\}$ и $H=H^{\cdot}$. □

Замечание 1.5. В случае когда Ω — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то доказательство равенства (1.33), с небольшими видоизменениями, показывает, что

$$H^{\perp}=\{\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{L}^2(\Omega),\ \boldsymbol{u}=\operatorname{grad} p,\ p\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)\}. \tag{1.38}$$

Если Ω неограничено, но удовлетворяет условию (1.4), то

$$H^{\perp}=\{\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{L}^2(\Omega),\ \boldsymbol{u}=\operatorname{grad} p,\ p\in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\}. \tag{1.39}$$

Теорема 1.5. *Пусть Ω — открытое ограниченное множество класса $\mathscr{C}^2$. Тогда*

$$L^2(\Omega) = H \oplus H_1 \oplus H_2, \tag{1.40}$$

где H, H_1, H_2 — взаимно ортогональные пространства,

$$H_1 = \{u \in L^2(\Omega),\ u = \operatorname{grad} p,\ p \in H^1(\Omega),\ \Delta p = 0\}, \tag{1.41}$$

$$H_2 = \{u \in L^2(\Omega),\ u = \operatorname{grad} p,\ p \in H_0^1(\Omega)\}. \tag{1.42}$$

Доказательство. Ясно, что H_1 и H_2 содержатся в $H^\perp$ и что любые два из пространств H, H_1 и H_2 пересекаются по $\{0\}$. Пространства H_1 и H_2 ортогональны; если $u = \operatorname{grad} p \in H_1$, $v = \operatorname{grad} q \in H_2$, то $u \in E(\Omega)$ и, используя обобщенную формулу Стокса (1.19), мы получаем, что

$$(u, v) = (u, \operatorname{grad} q) = \langle \gamma_\nu u, \gamma_0 q\rangle - (\operatorname{div} u, q)$$

обращается в нуль, так как $\gamma_0 q = 0$ и $\operatorname{div} u = \Delta p = 0$. Нам осталось доказать, что произвольный элемент u из $L^2(\Omega)$ может быть записан в виде суммы элементов u_0, u_1, u_2 из H, H_1, H_2. Для такого u пусть p — единственное решение задачи Дирихле

$$\Delta p = \operatorname{div} u \in H^{-1}(\Omega),\quad p \in H_0^1(\Omega).$$

Возьмем

$$u_2 = \operatorname{grad} p. \tag{1.43}$$

Пусть q — решение задачи Неймана

$$\Delta q = 0,\quad \left.\frac{\partial q}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \gamma_\nu (u - \operatorname{grad} p). \tag{1.44}$$

Заметим, что $\operatorname{div}(u - \operatorname{grad} p) = 0$, так что $u - \operatorname{grad} p \in E(\Omega)$ и $\gamma_\nu(u - \operatorname{grad} p)$ определено как элемент $H^{-1/2}(\Gamma)$, а по формуле Стокса (1.19)

$$\langle \gamma_\nu (u - \operatorname{grad} p), 1\rangle = \int_\Omega \operatorname{div}(u - \operatorname{grad} p)\, dx = 0.$$

Согласно одному результату Лионса и Мадженеса [1], задача Неймана (1.44) имеет решение, единственное с точностью до аддитивной постоянной. Положим

$$u_1 = \operatorname{grad} q, \tag{1.45}$$

$$u_0 = u - u_1 - u_2. \tag{1.46}$$

Нам надо показать, что $u_0 \in H$. Но $\operatorname{div} u_0 = \operatorname{div}(u - u_1 - u_2) = \operatorname{div} u - \Delta p = 0$ и

$$\gamma_\nu u_0 = \gamma_\nu (u - u_1 - u_2) = \gamma_\nu (u - \operatorname{grad} p) - \partial q/\partial \nu = 0. \quad \square$$

Замечание 1.6. (i) Обозначим через P_H ортогональный проектор в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ на H; очевидно, P_H — непрерывный оператор в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$. На самом деле P_H также отображает $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ в себя и непрерывен в норме $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$. Предположим в доказательстве теоремы 1.5, что $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}^1(\Omega)$; тогда $\operatorname{div}\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)$; $\boldsymbol{u}-\operatorname{grad}p$ принадлежит $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ и $\gamma_\nu(\boldsymbol{u}-\operatorname{grad}p)$ принадлежит $H^{1/2}(\Gamma)$. Наконец, мы заключаем на основании (1.44), что $q\in H^2(\Omega)$ и

$$P_H\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}-\operatorname{grad}(p+q)\in\boldsymbol{H}^1(\Omega).$$

Понятно также (см., например, Лионс и Мадженес [1]), что отображения $\boldsymbol{u}\longmapsto p\longmapsto\boldsymbol{u}-\operatorname{grad}p\longmapsto q$ непрерывны в соответствующих пространствах, и мы получаем, что P_H непрерывно действует из $\boldsymbol{H}^0_1(\Omega)$ в $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$:

$$\|P_H\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)}\leqslant c(\Omega)\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)}\ \forall\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}^1(\Omega). \tag{1.47}$$

В случае когда Ω — множество класса $\mathscr{C}^{r+1}$, r — целое $\geqslant 1$, аналогичные соображения показывают, что если $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}^r(\Omega)$, то $P_H\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}^r(\Omega)$ и оператор P_H линеен и непрерывен в норме $\boldsymbol{H}^r(\Omega)$:

$$\|P_H\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^r(\Omega)}\leqslant c(r,\Omega)\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^r(\Omega)},\ \forall\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}^r(\Omega). \tag{1.48}$$

(ii) Одно ортогональное разложение H (для случая когда Ω неодносвязно) дано в приложении I.

Характеризация пространства V.

Теорема 1.6. *Пусть Ω — открытое ограниченное липшицево множество. Тогда*

$$V=\{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}^1_0(\Omega),\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0\}. \tag{1.49}$$

Доказательство. Обозначим через $V^\cdot$ пространство в правой части (1.49). Ясно, что $V\subset V^\cdot$; действительно, если $\boldsymbol{u}\in V$, то $\boldsymbol{u}=\lim\boldsymbol{u}_m$, $\boldsymbol{u}_m\in\mathscr{V}$; из этой сходимости в $\boldsymbol{H}^1_0(\Omega)$ следует, что $\operatorname{div}\boldsymbol{u}_m$ сходится к $\operatorname{div}\boldsymbol{u}$ при $m\longrightarrow\infty$, и поскольку $\operatorname{div}\boldsymbol{u}_m=0$, то $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$.

Для того чтобы доказать, что $V=V^\cdot$, мы покажем, что любая непрерывная линейная форма L на $V^\cdot$, которая обращается в нуль на V, тождественно равна нулю. Заметим прежде всего, что L допускает (неединственное) представление вида

$$L(\boldsymbol{v})=\sum_{i=1}^{n}\langle l_i, v_i\rangle,\ l_i\in H^{-1}(\Omega). \tag{1.50}$$

В самом деле, $V^\cdot$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{H}^1_0(\Omega)=[H^1_0(\Omega)]^n$; произвольная непрерывная линейная форма на $V^\cdot$ может быть продолжена до непрерывной линейной формы на $\boldsymbol{H}^1_0(\Omega)$, а эта форма — того же вида, что и в правой части (1.50).

Далее, распределение $\boldsymbol{l}=(l_1,\ldots,l_n)$ принадлежит $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ и $\langle\boldsymbol{l},v\rangle=0\ \forall\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$. Из предложений 1.1 и 1.2 следует, что $\boldsymbol{l}=\operatorname{grad}p$, $p\in L^2(\Omega)$; таким образом,

$$\langle l_i,v_i\rangle=\langle D_ip,v_i\rangle=-\langle p,D_iv_i\rangle\ \forall v_i\in H^1_0(\Omega).$$

Следовательно, L равно нулю на всём $V^\cdot$, поскольку

$$L(\boldsymbol{v})=\sum_{i=1}^{n}\langle l_i,v_i\rangle=-\langle p,\operatorname{div}\boldsymbol{v}\rangle=0\ \forall v\in V^\cdot.\ \square$$

Замечание 1.7. (i) Предположим, что Ω—ограниченное открытое множество, глобально звездное относительно одной из своих точек, скажем нуля, а также что $\sigma_\lambda \bar{\Omega} \subset \Omega$ для каждого λ, $0 < \lambda < 1$, где σ_λ обозначает, как и прежде, линейное преобразование $x \longmapsto \lambda x$. В этом случае мы можем дать более прямое и более простое доказательство равенства (1.49). Пусть $u \in V'$. Тогда функция $\sigma_\lambda \circ u$ принадлежит $H_0^1(\sigma_\lambda \Omega)$ и $\operatorname{div} \sigma_\lambda \circ u = 0$. Функция u_λ, равная $\sigma_\lambda \circ u$ в $\sigma_\lambda \Omega$ и нулю в $\Omega \setminus \sigma_\lambda \Omega$ $(0 < \lambda < 1)$, лежит в $H_0^1(\Omega)$ и $\operatorname{div} u_\lambda$ равняется $\lambda \sigma_\lambda (\operatorname{div} u)$ в $\sigma_\lambda(\Omega)$ и нулю в $\Omega \setminus \sigma_\lambda \Omega$; следовательно, $\operatorname{div} u_\lambda = 0$, u_λ принадлежит V' и имеет компактный носитель в Ω. В таком случае с помощью регуляризации легко проверить, что $u_\lambda \in V$, и так как u_λ сходится к u в $H_0^1(\Omega)$ при $\lambda \longrightarrow 1$, то $u \in V$ и $V = V'$.

(ii) Если предположения теоремы 1.6 (о том, что область Ω ограничена и липшицева) не выполнены, то равенство (1.49) может и не иметь места. Как и при доказательстве теоремы 1.6, обозначим пространство в правой части (1.49) через V'. Мы имеем $V \subset V'$, и неизвестно, будет ли $V = V'$, когда Ω ограничена, но не липшицева. Если Ω не ограничена, то, как следует из одного примера Хейвуда [4], V может отличаться от V'; в действительности, в этом примере $\dim(V'/V) = 1$. У Ладыженской и Солонникова [2] даны примеры других неограниченных открытых областей Ω, таких что $\dim(V'V/V) = k$, где k—произвольное целое число.

Замечание 1.8. Наиболее часто в этой книге будут использоваться предложения 1.1, 1.2 и теоремы 1.6 и (несколько реже) 1.5.

Замечание 1.9. Один результат, более слабый, чем предложение 1.1, но достаточный для наших последующих целей, может быть доказан другим методом, без привлечения теории де Рама (см. фразу перед предложением 1.1).

Предположим, что Ω—липшицева открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и что $f \in H^{-1}(\Omega)$ удовлетворяет условию $\langle f, v \rangle = 0$, $\forall v \in \mathscr{V}$ (соотв. V). Тогда $f = \operatorname{grad} p$, где $p \in L^2(\Omega)$. (1.51)

Для произвольной открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет место такой же результат, только $p \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. (1.52)

Набросаем доказательство этого результата, принадлежащее Тартару [1] и основанное на предложении 1.2 и замечании 1.4(ii). Понятно, что существует возрастающая последовательность открытых липшицевых областей Ω_m $(\Omega_m \subset \Omega_{m+1})$, объединение которых есть Ω. Пусть A (соотв. A_m) обозначает оператор $\operatorname{grad} \in \mathscr{L}(L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ (соотв. $\in \mathscr{L}(L^2(\Omega_m), H^{-1}(\Omega_m))$), и пусть $A^* \in \mathscr{L}(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ (соотв. $A_m^* \in \mathscr{L}(H_0^1(\Omega_m), L^2(\Omega_m))$)—его сопряженный. Согласно замечанию 1.4(ii), образ оператора A (обозначаемый через $R(A)$) является замкнутым подпространством в $H^{-1}(\Omega)$. Из теории линейных операторов известно, что ортогональное дополнение к $\ker A^*$ совпадает с замыканием $R(A)$ и, следовательно, с $R(A)$; здесь $\ker A^*$—ядро оператора A^*:

$$\ker A^* = \{u,\ u \in H_0^1(\Omega),\ \operatorname{div} u = 0\}\ [1].$$

Аналогичное утверждение имеет место и для A_m.

Пусть теперь f удовлетворяет условию из (1.51), и пусть $u \in \ker A_m^*$. Если $\tilde{u}$ есть функция u, продолженная нулем вне Ω_m, то $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ и $\operatorname{div} \tilde{u} = \operatorname{div} u = 0$. Поскольку $\tilde{u}$ имеет компактный носитель в Ω, то, используя регуляризацию, легко получить, что $\tilde{u}$ является пределом в $H_0^1(\Omega)$ элементов из $\mathscr{V}$; значит, $\tilde{u} \in V$ и $\langle f, \tilde{u} \rangle = 0$. Поэтому сужение f на Ω_m ортогонально

[1] В теореме 1.6 доказано, что $\ker A^*$ совпадает с V, но этот результат еще не был нам известен, когда мы доказывали предложение 1.1.

к $\ker A_m^*$ и, следовательно, принадлежит $R(A_m)$, т. е. $f=\operatorname{grad} p_m$ на Ω_m, $p_m \in L^2(\Omega_m)$. Так как Ω_m — возрастающая последовательность областей, то $p_{m+1}-p_m=\text{const}$ на Ω_m; мы можем выбрать p_{m+1} так, чтобы эта константа обращалась в нуль. Тогда $f=\operatorname{grad} p$, $p \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Этого уже достаточно для (1.52). Для доказательства (1.51) ($p \in L^2(\Omega)$) используем тот факт, что Ω локально-звездна (см. п. 1.1). Пусть $(\mathcal{O}_j)_{1 \leqslant j \leqslant J}$ — конечное покрытие Γ, такое что $\mathcal{O}_j'=\mathcal{O}_j \cap \Omega$ звездны для всех j. Если $u \in H_0^1(\mathcal{O}_j')$ и $\operatorname{div} u=0$, то $\sigma_\lambda \circ u$ принадлежит Ω для $0<\lambda<1$. Как и выше, $\langle f, \tilde{u}\rangle=0$, а тогда $f=\operatorname{grad} q_j$ в $\mathcal{O}_j'$, $q_j \in L^2(\mathcal{O}_j')$, $q_j=p$ на $\mathcal{O}_j'$ и $p \in L^2(\mathcal{O}_j')$ для всех j, так что $p \in L^2(\Omega)$.

§ 2. Существование и единственность решения для уравнений Стокса

Уравнения Стокса — это линеаризованная стационарная форма полных уравнений Навье — Стокса. Мы дадим здесь вариационную формулировку задачи Стокса, докажем одну теорему существования и единственности, использующую проекционную теорему, и сделаем ряд замечаний, касающихся случая неограниченной области и регулярности решений.

2.1. Вариационная формулировка задачи. Пусть Ω — открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ и $f \in L^2(\Omega)$ — заданная вектор-функция на Ω. Мы ищем вектор-функцию $u=(u_1, \ldots, u_n)$, представляющую скорость жидкости, и скалярную функцию p, представляющую давление, которые определены в Ω и удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям (где константа ν — кинематический коэффициент вязкости):

$$-\nu \Delta u+\operatorname{grad} p=f \text{ в } \Omega \quad (\nu>0), \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} u=0 \text{ в } \Omega, \tag{2.2}$$

$$u=0 \text{ на } \Gamma. \tag{2.3}$$

Если f, u и p — гладкие функции, удовлетворяющие (2.1) — (2.3), то, умножая (2.1) скалярно на функцию $v \in \mathcal{V}$, мы получаем

$$(-\nu \Delta u+\operatorname{grad} p,\ v)=(f,\ v);$$

при интегрировании по частям член $(-\Delta u,\ v)$ дает[1]

$$\sum_{i=1}^{n}(\operatorname{grad} u_i,\ \operatorname{grad} v_i)=((u,\ v)), \tag{2.4}$$

а член $(\operatorname{grad} p,\ v)$ дает

$$-(p,\ \operatorname{div} v)=0;$$

в результате приходим к равенству

$$\nu((u,\ v))=(f,\ v)\quad \forall v \in \mathcal{V}. \tag{2.5}$$

[1] См. обозначения, введенные в конце п. 1.1.

Так как каждая часть этого равенства линейно и непрерывно зависит от $\boldsymbol{v}$ (в топологии $H_0^1(\Omega)$), то оно по непрерывности верно и для каждого $\boldsymbol{v}$ из V — замыкания $\mathscr{V}$ в $H_0^1(\Omega)$. Если Ω — область класса $\mathscr{C}^2$, то удовлетворяющая условию (2.3) (гладкая) функция $\boldsymbol{u}$ принадлежит $H_0^1(\Omega)$ и поэтому, в силу (2.2) и теоремы 1.6, $\boldsymbol{u} \in V$. Таким образом, мы получили следующее утверждение:

$\boldsymbol{u}$ принадлежит V и удовлетворяет равенству
$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{2.6}$$

Обратно, предположим, что $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет (2.6), и покажем, что тогда $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет (2.1)—(2.3) (в некотором смысле). Поскольку $\boldsymbol{u}$ принадлежит лишь $H_0^1(\Omega)$, мы имеем меньшую гладкость, чем ранее, и можем надеяться только на то, что $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет (2.1)—(2.3) в каком-то более слабом, чем классический, смысле. В действительности из того, что $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)$, следует, что следы $\gamma_0 u_i$ ее компонент равны нулю в $H^{1/2}(\Gamma)$; из того что $\boldsymbol{u} \in V$, вытекает (в силу теоремы 1.6), что $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ в смысле теории распределений; используя (2.6), находим, что

$$\langle \nu \Delta \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}.$$

Тогда из предложений 1.1 и 1.2 вытекает существование распределения $p \in L^2(\Omega)$, такого что

$$-\nu \Delta \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} = -\operatorname{grad} p \text{ в } \Omega$$

в смысле теории распределений. Таким образом, доказана

Лемма 2.1. *Пусть Ω — открытая ограниченная область класса $\mathscr{C}^2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\boldsymbol{u} \in V$ *удовлетворяет* (2.6);

(ii) $\boldsymbol{u}$ *принадлежит* $H_0^1(\Omega)$ *и удовлетворяет* (2.1)—(2.3) *в следующем слабом смысле:*

существует $p \in L^2(\Omega)$, *такое что* $-\nu \Delta \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{f}$ *в* Ω *в смысле теории распределений;* (2.7)

$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ *в* Ω *в смысле теории распределений;* (2.8)

$\gamma_0 \boldsymbol{u} = 0.$ (2.9)

Определение 2.1. Задача „найти функцию $\boldsymbol{u} \in V$, удовлетворяющую условию (2.6)" называется *вариационной формулировкой* задачи (2.1)—(2.3).

Замечание 2.1. Прежде чем изучать существование и единственость решения задачи (2.6), сделаем несколько замечаний.

(i) Вариационная формулировка задачи (2.1)—(2.3) была введена Лерэ [1—3]. Она сводит классическую задачу (2.1)—(2.3) к нахождению одного только $\boldsymbol{u}$; существование p вытекает тогда из предложения 1.1.

(ii) В случае когда область Ω негладкая или неограниченная, мы имеем два пространства, которые при доказательстве теоремы 1.6 были обозначены через V и V' и которые могут не совпадать между собой ($V \subset V'$; см. замечание 1.7(ii)):

$$V \text{ — замыкание } \mathscr{V} \text{ в } H_0^1(\Omega),$$
$$V' = \{u \in H_0^1(\Omega),\ \operatorname{div} u = 0\}.$$

Поэтому мы можем дать две (возможно, различные) вариационные формулировки: либо (2.6), либо та же задача, но с V, замененным на V'. В общем случае соотношение между V и V', а тем более между этими двумя вариационными задачами, неизвестно. Соотношение между этими задачами для некоторых частных случаев изучено в работах: Хейвуд [2], Ладыженская и Солонников [4] (см. замечание 1.7(ii)).

По техническим причинам, особенно важным в нелинейном случае, мы всегда будем иметь дело с пространством V и рассматривать только вариационную задачу (2.6).

В качестве дополнения к лемме 2.1 заметим, что для произвольной области Ω, если u удовлетворяет (2.6) (или (2.6) с V, замененным на V'), то оно удовлетворяет (2.7), с тем лишь ограничением, что $p \in L^2_{loc}(\Omega)$, удовлетворяет (2.8) без каких-либо оговорок и удовлетворяет (2.9) в том смысле, что $u \in H_0^1(\Omega)$; более точное толкование этого смысла зависит от теорем о следе, имеющих место для Ω.

2.2. Проекционная теорема. Пусть Ω — произвольная открытая область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию

$$\Omega \text{ ограничена в некотором направлении.} \tag{2.10}$$

Согласно (1.10), $H_0^1(\Omega)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением (2.4); $\mathscr{V}$ определено в (1.12); V — замыкание $\mathscr{V}$ в $H_0^1(\Omega)$.

Теорема 2.1. *Для произвольной открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ограниченной в некотором направлении, и для каждого $f \in L^2(\Omega)$ задача* (2.6) *имеет единственное решение u. (Результат остается верным, если $f \in H^{-1}(\Omega)$.) Более того, существует функция $p \in L^2_{loc}(\Omega)$, такая что выполнены* (2.7) — (2.9).

Если Ω — открытая ограниченная область класса $\mathscr{C}^2$, то $p \in L^2(\Omega)$ и для u и p выполнены (2.7) — (2.9).

Эта теорема является простым следствием предыдущей леммы и следующей классической проекционной теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть W — сепарабельное вещественное гильбертово пространство (с нормой $\|\cdot\|_W$), и пусть $a(u, v)$ — непрерывная билинейная форма на $W \times W$, которая коэрцитивна, т. е. существует $\alpha > 0$, такое что*

$$a(u, u) \geqslant \alpha \|u\|_W^2 \quad \forall u \in W. \tag{2.11}$$

Тогда для каждого l из W' — пространства, сопряженного к W, — существует один и только один элемент $u \in W$, такой что

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in W. \tag{2.12}$$

Применяя эту теорему к (2.6), мы, конечно, берем в качестве W пространство V, снабженное нормой, ассоциированной с (2.4), полагаем $a(u, v) = \nu((u, v))$ и в качестве $v \mapsto \langle l, v\rangle$ берем форму $v \mapsto (f, v)$, которая, очевидно, линейна и непрерывна на V. Пространство V сепарабельно как замкнутое подпространство сепарабельного пространства $H_0^1(\Omega)$.

Доказательство теоремы 2.2. *Единственность.* Пусть u_1 и u_2 — два решения уравнения (2.12), и пусть $u = u_1 - u_2$. Имеем

$$a(u_1, v) = a(u_2, v) = \langle l, v\rangle \quad \forall v \in W,$$
$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in W.$$

Положив $v = u$ в последнем равенстве, заключаем на основании (2.11), что

$$\alpha \| u \|_W^2 \leqslant a(u, u) = 0$$

и, следовательно, $u = 0$.

Существование. Так как W сепарабельно, то существует последовательность элементов $w_1, w_2, \ldots, w_m, \ldots$ из W, которые линейно-независимы и порождают всюду плотное подпространство в W. Пусть W_m — пространство, натянутое на $w_1, \ldots, w_m$. Для каждого фиксированного целого m определим приближенное решение уравнения (2.12) в W_m как вектор $u_m \in W_m$:

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_{i,m} w_i, \quad \xi_{i,m} \in \mathbb{R}, \tag{2.13}$$

удовлетворяющий условию

$$a(u_m, v) = \langle l, v\rangle \quad \forall v \in W_m. \tag{2.14}$$

Покажем, что существует один и только один элемент u_m, такой что (2.14) имеет место. Уравнение (2.14) эквивалентно системе m уравнений

$$a(u_m, w_j) = \langle l, w_j\rangle, \quad j = 1, \ldots, m; \tag{2.15}$$

(2.15) — это линейная система m уравнений для m компонент $\xi_{i,m}$ вектора u_m:

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_{i,m} a(w_i, w_j) = \langle l, w_j\rangle, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.16}$$

Существование и единственность u_m будут доказаны, если мы покажем, что линейная система (2.16) невырожденна. Для того чтобы это показать, достаточно установить, что однородная линейная система, ассоциированная с (2.16), т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i a(w_i, w_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.17}$$

имеет только одно решение $\xi_1 = \ldots = \xi_m = 0$. Но если $\xi_1, \ldots, \xi_m$ удовлетворяют (2.17), то, умножая каждое уравнение (2.17) на соответствующее ξ_j и суммируя эти уравнения, мы получим

$$\sum_{i,\,j=1}^{m} \xi_i \xi_j a(w_i,\, w_j) = 0,$$

или, с учетом билинейности a,

$$a\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i,\ \sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j\right) = 0.$$

Используя (2.11), находим, что

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i = 0,$$

откуда вытекает, что $\xi_1 = \ldots = \xi_m = 0$, поскольку $w_1, \ldots, w_m$ линейно-независимы.

Переход к пределу. Полагая $v = u_m$ в (2.14), мы получаем

$$a(u_m,\, u_m) = \langle l,\, u_m \rangle. \tag{2.18}$$

Отсюда, в силу (2.11), следует, что

$$\alpha \| u_m \|_W^2 \leqslant a(u_m,\, u_m) = \langle l,\, u_m \rangle \leqslant \| l \|_{W'} \| u_m \|_W,$$

$$\| u_m \|_W \leqslant \frac{1}{\alpha} \| l \|_{W'}; \tag{2.19}$$

это доказывает, что последовательность u_m ограничена в W. Так как замкнутые шары в гильбертовом пространстве слабо компактны, то найдутся элемент u из W и подпоследовательность $u_{m'}$, $m' \to \infty$, последовательности u_m, такие что

$$u_{m'} \to u \text{ при } m' \to \infty \text{ в слабой топологии } W. \tag{2.20}$$

Пусть v — произвольный фиксированный элемент из W_j для некоторого j. Для всех $m' \geqslant j$ мы имеем $v \in W_{m'}$ и, согласно (2.14),

$$a(u_{m'},\, v) = \langle l,\, v \rangle.$$

Используя доказываемую ниже лемму, мы можем перейти в этом уравнении к пределу при $m' \to \infty$ и получить

$$a(u,\, v) = \langle l,\, v \rangle. \tag{2.21}$$

Равенство (2.21) справедливо для каждого $v \in \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$, а так как это множество плотно в W, то равенство (2.21) справедливо по непрерывности для всех v из W. Этим доказано, что u является решением уравнения (2.12). □

Лемма 2.2. *Пусть $a(u,\, v)$ — непрерывная билинейная форма на гильбертовом пространстве W. Пусть φ_m (соотв. ψ_m) — последовательность элементов из W, которая сходится к φ (соотв. к ψ)*

в слабой (соотв. в сильной) топологии W. Тогда

$$\lim_{m\to\infty} a(\psi_m, \varphi_m) = a(\psi, \varphi), \tag{2.22}$$

$$\lim_{m\to\infty} a(\varphi_m, \psi_m) = a(\varphi, \psi). \tag{2.23}$$

Доказательство. Запишем

$$a(\psi_m, \varphi_m) - a(\psi, \varphi) = a(\psi_m - \psi, \varphi_m) + a(\psi, \varphi_m - \varphi).$$

Так как форма a непрерывна, а последовательность φ_m ограничена, то

$$|a(\psi_m - \psi, \varphi_m)| \leqslant c \|\psi_m - \psi\|_W \|\varphi_m\|_W \leqslant c' \|\psi_m - \psi\|_W;$$

правая часть стремится к 0 при $m \to \infty$. Заметим теперь, что линейный функционал $v \longmapsto a(\psi, v)$ непрерывен на W и, следовательно, существует элемент из W', зависящий от ψ (обозначим его через $A(\psi)$), удовлетворяющий условию

$$a(\psi, v) = \langle A(\psi), v\rangle \quad \forall v \in W. \tag{2.24}$$

Мы можем написать

$$a(\psi, \varphi_m - \varphi) = \langle A(\psi), \varphi_m - \varphi\rangle.$$

Правая часть этого равенства стремится к 0 при $m \to \infty$, так как последовательность φ_m слабо сходится. Итак, (2.22) доказано.

Для доказательства (2.23) достаточно применить (2.22) к билинейной форме $a^*(u, v) = a(v, u)$. □

Замечание 2.2. (i) Теорема 2.1 верна также, если $f \in H^{-1}(\Omega)$.

(ii) Можно показать, что *сама* последовательность $\{u_m\}$, построенная при доказательстве теоремы 2.2, сходится к решению u уравнения (2.12) в сильной топологии W. Мы не будем здесь доказывать этот результат, так как он окажется следствием теоремы 3.1

(iii) Используя линейный функционал $A(\psi)$, введенный при доказательстве леммы 2.2 (см. (2.24)), можно записать уравнение (2.12) в виде

$$\langle A(u), v\rangle = \langle l, v\rangle,$$

или, эквивалентно, в виде

$$A(u) = l \text{ в } W'. \tag{2.25}$$

Другое классическое доказательство проекционной теоремы состоит в проверке того, что оператор $u \longmapsto A(u)$ осуществляет изоморфизм W на W', см. Темам [8].

Вариационное свойство.

Предложение 2.1. *Решение u задачи (2.6) является единственным элементом из V, таким что*

$$E(u) \leqslant E(v) \quad \forall v \in V, \tag{2.26}$$

где

$$E(v) = \nu \|v\|^2 - 2(f, v). \tag{2.27}$$

Доказательство. Пусть u — решение задачи (2.6). Тогда, поскольку $\|u-v\|^2 \geqslant 0$ $\forall v \in V$, мы имеем

$$\nu\|u\|^2+\nu\|v\|^2-2\nu((u, v)) \geqslant 0. \tag{2.28}$$

Но, в силу (2.6), $-\nu\|u\|^2=\nu\|u\|^2-2(f, u)=E(u)$, $-2\nu((u, v))=-2(f, v)$, так что (2.28) в точности дает (2.26).

Обратно, если $u \in V$ удовлетворяет (2.26), то для любых $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ мы имеем $E(u) \leqslant E(u+\lambda v)$. Отсюда можно вывести, что

$$\nu\lambda^2\|v\|^2+2\lambda\nu((u, v))-2\lambda(f, v) \geqslant 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.29}$$

Это неравенство может иметь место для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ только тогда, когда $\nu((u, v))=(f, v)$, т. е. u и в самом деле есть решение задачи (2.6). □

Замечание 2.3. Если пространства V и $V^\bullet$ из замечания 2.1 различны, то теорема 2.2 дает также существование и единственность элемента $\tilde{u} \in V^\bullet$, такого что

$$\nu((\tilde{u}, v))=(f, v) \quad \forall v \in V^\bullet. \tag{2.30}$$

Предложение 2.1 остается справедливым, если u и V заменить на $\tilde{u}$ и $V^\bullet$.

2.3. Случай неограниченной области. Мы рассмотрим здесь случай, когда область Ω неограничена и не удовлетворяет (2.10). В этом случае, даже при условии что Ω — область класса $\mathscr{C}^2$, задача (2.1)—(2.3) уже не эквивалентна задаче (2.6) (ср. с леммой 2.1). Причиной этого является то, что если u — классическое решение задачи (2.1)—(2.3), то без дополнительной информации относительно поведения u на бесконечности не ясно, принадлежит ли u пространству $H^1(\Omega)$; поэтому возможно, что $u \notin V$ и равенство (2.5) нельзя продолжить по непрерывности на V, замыкание $\mathscr{V}$. Кроме того, возникают трудности при попытке решить задачу (2.6) непосредственным применением теоремы 2.2: предположение (2.11) не выполнено, ибо V — гильбертово пространство с нормой

$$[\![u]\!]=\sqrt{|u|^2+\|u\|^2},$$

которая не эквивалентна норме $\|u\|$, поскольку мы лишены теперь неравенства Пуанкаре.

Для того чтобы сформулировать и решить вариационную задачу в общем случае, введем пространство

$$Y \text{ — пополнение } \mathscr{V} \text{ в норме } \|\cdot\|. \tag{2.31}$$

Так как $\|u\| \leqslant [\![u]\!]$, то ясно, что Y шире, чем V:

$$V \subset Y. \tag{2.32}$$

Лемма 2.3. *Для* $n \geqslant 3$

$$Y \subset \{u \in L^{\alpha}(\Omega),\ D_i u \in L^2(\Omega),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}, \tag{2.33}$$

где $\alpha = 2n/(n-2)$. *Для* $n = 2$

$$Y \subset \{u \in L^{\alpha}_{\text{loc}}(\Omega),\ D_i u \in L^2(\Omega),\ i = 1,\ 2\}\ \forall \alpha \geqslant 1. \tag{2.34}$$

Эти вложения непрерывны.

Доказательство. Вложение (2.33) следует из *неравенства Соболева* (см. Соболев [1], Лионс [1], а также гл. II)

$$\|\varphi\|_{L^{\alpha}(\Omega)} \leqslant c(\alpha,\ n)\,\|\operatorname{grad}\varphi\|_{L^2(\Omega)}\quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \tag{2.35}$$

где $\alpha = 2n/(n-2)$. Если $u \in Y$, то существует последовательность элементов $u_m \in \mathscr{V}$, сходящаяся к u в Y; в силу (2.35),

$$\begin{gathered}\|u_m - u_p\|_{L^{\alpha}(\Omega)} \leqslant c'(\alpha,\ n)\,\|u_m - u_p\|,\\ \|u_m - u_p\|_Z \leqslant c''\,\|u_m - u_p\|,\end{gathered} \tag{2.36}$$

где Z обозначает пространство в правой части вложения (2.33) и $\|\cdot\|_Z$ — естественная норма в Z:

$$\|u\|_Z = \|u\|_{L^{\alpha}(\Omega)} + \|u\|.$$

При m и p, стремящихся к бесконечности, правая часть (2.36) стремится к 0. Значит, u_m есть последовательность Коши в Z; ее предел u принадлежит Z. Ясно также, что $\|u\|_Z \leqslant c''\|u\|$, с той же константой c'', что и в (2.36) ($c'' = c''(n)$).

Вложение (2.34) доказывается аналогично (надо рассмотреть последовательности Коши в $L^{\alpha}(\Omega')$, где Ω' — компактное подмножество в Ω).

Теорема 2.3. *Пусть* Ω — *произвольная открытая область в* $\mathbb{R}^n$, *и пусть* f *принадлежит* Y' — *пространству, сопряженному к* Y *из* (2.31). *Тогда существует единственный элемент* $u \in Y$, *такой что*

$$\nu((u,\ v)) = \langle f,\ v\rangle\quad \forall v \in Y. \tag{2.37}$$

Далее, существует $p \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, *такое что удовлетворяется* (2.7) *и справедливо* (2.8).

Доказательство. Применив теорему 2.2 к случаю, когда $W = Y$, $a(u,\ v) = \nu((u,\ v))$ и $l = f$, получим единственный элемент u, удовлетворяющий (2.37). Далее, из замечания 1.4 (i) следует существование $p \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, для которого удовлетворяется (2.7); справедливость (2.8) проверяется без труда. Наконец (2.9) удовлетворяется в некотором смысле, зависящем от того, какая теорема о следе выполняется для Y (или для пространства Z из правой части вложений (2.33) и (2.34)). □

Если область Ω локально-липшицева, то, как показывает предложение 1.2, $p \in L^2_{\text{loc}}(\bar{\Omega})$.

Замечание 2.4. По лемме 2.3, для $f \in L^{\alpha'}(\Omega)$ $(1/\alpha + 1/\alpha' = 1)$

$$v \longrightarrow \int_\Omega f \cdot v \, dx \tag{2.38}$$

есть непрерывная линейная форма на Y. Поэтому в теореме 2.3 можно взять любое $f \in L^{\alpha'}(\Omega)$ $(\alpha = 2n/(n-2),\ n \geqslant 3)$.

2.4. Неоднородная задача Стокса. Рассмотрим теперь неоднородную задачу Стокса.

Теорема 2.4. *Пусть* Ω — *открытая ограниченная область класса* $\mathscr{C}^2$ *в* $\mathbb{R}^n$. *Пусть заданы* $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, *такие что*

$$\int_\Omega g \, dx = \int_\Gamma \varphi \cdot \nu \, d\Gamma. \tag{2.39}$$

Тогда существуют

$$u \in H^1(\Omega), \quad p \in L^2(\Omega),$$

являющиеся решением неоднородной задачи Стокса

$$-\nu\Delta u + \operatorname{grad} p = f \ \text{в}\ \Omega, \tag{2.40}$$

$$\operatorname{div} u = g \ \text{в}\ \Omega, \tag{2.41}$$

$$\gamma_0 u = \varphi, \ \text{т. е.}\ u = \varphi \ \text{на}\ \Gamma, \tag{2.42}$$

причем u единственно, а p единственно с точностью до аддитивной постоянной.

Доказательство. Так как $H^{1/2}(\Gamma) = \gamma_0 H^1(\Omega)$, то существует $u_0 \in H^1(\Omega)$, такое что $\gamma_0 u_0 = \varphi$. Тогда, в силу (2.39) и формулы Стокса,

$$\int_\Omega (g - \operatorname{div} u_0) \, dx = 0.$$

Применяя доказываемую ниже лемму 2.4, мы заключаем, что существует элемент $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, такой что $\operatorname{div} u_1 = g - \operatorname{div} u_0$.

Полагая $v = u - u_0 - u_1$, сводим (2.40)—(2.42) к однородной задаче Стокса для v:

$$-\nu\Delta v + \operatorname{grad} p = f - \nu\Delta(u_0 + u_1) \in H^{-1}(\Omega),$$
$$\operatorname{div} v = 0 \ \text{в}\ \Omega,$$
$$v = 0 \ \text{на}\ \partial\Omega.$$

Отсюда следуют существование и единственность v и p (а значит, u и p). $\square$

Лемма 2.4. *Пусть* Ω — *липшицева открытая ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда оператор* div *отображает* $H_0^1(\Omega)$ *на* $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, *т. е.*

на пространство

$$\left\{g \in L^2(\Omega),\ \int_\Omega g(x)\,dx = 0\right\}. \tag{2.43}$$

Доказательство. Согласно предложению 1.2 и замечанию 1.4 (ii), оператор $A = \operatorname{grad} \in \mathscr{L}(L^2(\Omega),\ \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$ осуществляет изоморфизм пространства (2.43) на свой образ $\mathrm{R}(A)$. При помощи транспонирования [1] получаем, что его сопряженный $A^* = -\operatorname{div} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H}_0^1(\Omega),\ L^2(\Omega))$ осуществляет изоморфизм ортогонального дополнения к $\mathrm{R}(A)$ на пространство (2.43); в частности, A^* отображает $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ на $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. □

Замечание 2.5. Теорема 2.4 легко распространяется на случай, когда Ω является лишь липшицевой открытой ограниченной областью в $\mathbb{R}^n$, при условии что φ представляет собой след некоторой функции φ_0 из $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ и (2.39), (2.42) понимаются в следующем смысле:

$$\int_\Omega g\,dx = \int_\Omega \operatorname{div} \varphi_0\,dx, \tag{2.39'}$$

$$\boldsymbol{u} - \varphi_0 \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega). \tag{2.42'}$$

Мы просто берем $u_0 = \varphi_0$.

2.5. *Результаты о регулярности.* Классическим результатом для задачи Дирихле $-\Delta u + u = f$ является тот факт, что решение $u \in H_0^1(\Omega)$ принадлежит $H^{m+2}(\Omega)$, как только $f \in H^m(\Omega)$ (и Ω достаточно гладка). Естественно возникает вопрос, имеют ли место аналогичные утверждения о регулярности для задачи Стокса.

Этот результат и аналогичный результат для L^p-пространств даются следующим предложением.

Предложение 2.2. *Пусть Ω — открытая ограниченная область класса $\mathscr{C}^r$, $r = \max(m+2, 2)$, m — целое > 0. Предположим, что*

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}^{2,\alpha}(\Omega),\quad p \in W^{1,\alpha}(\Omega),\quad 1 < \alpha < +\infty \tag{2.44}$$

— решение обобщенной задачи Стокса (2.40)—(2.42):

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{f} \ \text{в}\ \Omega, \tag{2.40}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = g \ \text{в}\ \Omega, \tag{2.41}$$

$$\gamma_0\boldsymbol{u} = \varphi,\ \text{т. е.}\ \boldsymbol{u} = \varphi \ \text{на}\ \Gamma. \tag{2.42}$$

Если $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{m,\alpha}(\Omega)$, $g \in W^{m+1,\alpha}(\Omega)$ и $\varphi \in \boldsymbol{W}^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\Gamma)$, [2] *то*

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}^{m+2,\alpha}(\Omega),\quad p \in W^{m+1,\alpha}(\Omega) \tag{2.45}$$

[1] См. Лионс и Мадженес [1]. — *Прим. перев.*

[2] Пространство $W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\Gamma) = \gamma_0 W^{m+2,\alpha}(\Omega)$ снабжено нормой

$$\|\psi\|_{W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\Gamma)} = \inf_{\gamma_0 u = \psi} \|u\|_{W^{m+2,\alpha}(\Omega)}.$$

и существует константа $c_0(\alpha, \nu, m, \Omega)$, *такая что*

$$\|u\|_{W^{m+2,\alpha}(\Omega)} + \|p\|_{W^{m+1,\alpha}(\Omega)/\mathbb{R}} \leqslant c_0 \{\|f\|_{W^{m,\alpha}\Omega} + \\ + \|g\|_{W^{m+1,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\Gamma)} + d_\alpha \|u\|_{L^\alpha(\Omega)}\}, \qquad (2.46)$$

где $d_\alpha = 0$ *для* $\alpha \geqslant 2$, $d_\alpha = 1$ *для* $1 < \alpha < 2$.

Доказательство. Это предложение вытекает из результатов статьи Агмона, Дуглиса и Ниренберга [2], которая при дальнейших ссылках будет обозначаться через АДН, где даны априорные оценки решений общих эллиптических систем.

Пусть $u_{n+1} = (1/\nu)p$, $u = (u_1, \ldots, u_{n+1})$, $f = (f_1/\nu, \ldots, f_n/\nu, g)$.
Тогда уравнения (2.42) и (2.43) примут вид

$$\sum_{j=1}^{n+1} l_{ij}(D)\, u_j = f_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1, \qquad (2.47)$$

где $l_{ij}(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ есть матрица, задаваемая следующим образом:

$$\begin{aligned} &l_{ij}(\xi) = |\xi|^2 \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n, \\ &l_{n+1,j}(\xi) = -l_{j,n+1}(\xi) = \xi_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \\ &l_{n+1,n+1}(\xi) = 0, \\ &|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2. \end{aligned} \qquad (2.48)$$

Возьмем (см. АДН, с. 38) $s_i = 0$, $t_i = 2$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $s_{n+1} = -1$, $t_{n+1} = 1$. Как и требуется, $\deg l_{ij}(\xi) \leqslant s_i + t_j$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant n+1$, и $l'_{ij}(\xi) = l_{ij}(\xi)$. Нетрудно вычислить, что $L(\xi) = \det l'_{ij}(\xi) = |\xi|^{2n}$, так что $L(\xi) \neq 0$ для вещественных $\xi \neq 0$, а это обеспечивает эллиптичность системы (АДН, условие (1.5) на стр. 39). Ясно, что условие (1.7) на стр. 39 справедливо с $m = n$. Условие на L также выполнено: $L(\xi + \tau\xi') = 0$ имеет ровно n корней с положительной мнимой частью, и эти корни все равны

$$\tau^+(\xi, \xi') = -\xi\cdot\xi' + i\sqrt{|\xi|^2|\xi'|^2 - |\xi\cdot\xi'|^2}.$$

Что же касается граничных условий (см. стр. 42), то имеется n граничных условий и

$$B_{hj} = \delta_{hj} \,(\text{символ Кронекера}) \text{ для } 1 \leqslant h \leqslant n, \ 1 \leqslant j \leqslant n+1.$$

Положим $r_h = -2$ для $h = 1, \ldots, n$. Тогда, как и требуется, $\deg B_{hj} \leqslant r_h + t_j$, и мы имеем $B'_{hj} = B_{hj}$. Остается проверить условия дополнительности. Легко видеть, что

$$M^+(\xi) = (\tau - \tau^+(\xi))^n,$$

где $\tau^+(\xi) = \tau^+(\xi, \nu)$. Матрица с элементами $\sum_{j=1}^{N} B'_{hj}(\xi) L^{jk}(\xi)$ есть просто матрица с элементами $l_{hk}(\xi)$, $1 \leqslant h, k \leqslant n$, $-l_{h,n+1}(\xi)$,

$1 \leqslant h \leqslant n$. Тогда линейная комбинация $\sum_{h=1}^{n} C_h \sum_{j=1}^{N} B_{hj}^{+} L^{jk}$ равна

$$(C_1(\xi + \tau\nu)^2, \ldots, C_n(\xi + \tau\nu)^2, \sum_{i=1}^{n} C_i(\xi_i + \tau\nu_i)),$$

а это равно нулю по модулю M^+, только если $C_1 = \ldots = C_n = 0$. Таким образом, условие дополнительно выполнено.

Теперь применим теорему 10.5 из АДН, стр. 78. В результате получим (2.45) и (2.46) с $d_\alpha = 1$ для всех α. Согласно замечанию после теоремы 10.5, можно взять $d_\alpha = 0$ для $\alpha \geqslant 2$, поскольку решение $\boldsymbol{u}$, p из (2.41)—(2.42) необходимо единственно (p единственно с точностью до аддитивной постоянной): если $(\boldsymbol{u}_*, p_*)$, $(\boldsymbol{u}_{**}, p_{**})$ — два решения, то $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_* - \boldsymbol{u}_{**}$, $p = p_* - p_{**}$ — решение задачи (2.7) — (2.9) с $\boldsymbol{f} = 0$ и, следовательно, $\boldsymbol{u} = 0$ и $p = \mathrm{const}$. □

Замечание 2.6. Для $\alpha = 2$ и $m \in \mathbb{R}$, $m \geqslant -1$ имеют место результаты, аналогичные предложению 2.2. Для доказательства надо использовать интерполяционные методы, см. Лионс и Мадженес [1].

Предложение 2.2 не утверждает существования $\boldsymbol{u}$, p, удовлетворяющих (2.45), (2.46) (для заданных $\boldsymbol{f}$, g, φ), а дает только результат о регулярности возможных решений. Существование решений обеспечивается теоремами 2.1 и 2.4, если $\alpha = 2$. Следующее предложение дает общий результат о существовании и регулярности решения для $n = 2$ или 3.

Предложение 2.3. *Пусть Ω — открытая область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ или 3, класса $\mathscr{C}^r$, $r = \max(m+2, 2)$, m — целое $\geqslant -1$, и пусть заданы $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{m,\alpha}(\Omega)$, $g \in W^{m+1,\alpha}(\Omega)$, $\varphi \in \mathbf{W}^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\Gamma)$, удовлетворяющие условию согласования*

$$\int_\Omega g\,dx = \int_\Gamma \varphi \cdot \nu\,d\Gamma. \tag{2.49}$$

Тогда существуют единственные функции $\boldsymbol{u}$ и p (p единственно с точностью до аддитивной постоянной), являющиеся решением задачи (2.40)—(2.42) и удовлетворяющие (2.45) и (2.46) с $d_\alpha = 0$ для всех α, $1 < \alpha < \infty$.

Доказательство. Этот результат о существовании и регулярности не следует полностью из теории Агмона — Дуглиса — Ниренберга [1], что и является причиной ограничения размерности пространства случаем $n = 2$ или 3. Предложение 2.3 полностью доказано в статье Каттабриги [1] для случая $n = 3$ (и даже для $m = -1$). Для $n = 2$ задачу можно свести к классической бигармонической задаче. Существует функция $\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}^{m+2,\alpha}(\Omega)$, такая что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = g, \tag{2.50}$$

$$\gamma_0 \boldsymbol{v} = \varphi. \tag{2.51}$$

Такая функция $\boldsymbol{v}$ может быть определена формулой

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \theta + \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}, -\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} \right\}, \tag{2.52}$$

где $\theta \in W^{m+3,\alpha}(\Omega)$ — решение задачи Неймана

$$\Delta\theta = g \text{ в } \Omega, \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{v}} = \varphi \cdot \mathbf{v} \text{ на } \Gamma, \tag{2.54}$$

а функция $\sigma \in W^{m+3,\alpha}(\Omega)$ будет выбрана позже.

Задача Неймана (2.53)—(2.54) имеет хотя бы одно решение θ, так как выполнено (2.49), а используя стандартные результаты о регулярности для задачи Неймана, легко видеть, что $\theta \in W^{m+3,\alpha}(\Omega)$. Условия на σ определяются исключительно граничными условиями на Γ и имеют вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \text{ (= тангенциальная производная от } \sigma) = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} \text{ (= нормальная производная от } \sigma) = \varphi \cdot \tau - \frac{\partial \theta}{\partial \tau}.$$

Поскольку $\varphi \cdot \tau - \partial\theta/\partial\tau \in W^{m+2-1/\alpha,\alpha}(\Gamma)$, существует $\sigma \in W^{m+3,\alpha}(\Gamma)$ с $\gamma_0\sigma = 0$, $\gamma_1\sigma = \varphi \cdot \tau - \partial\theta/\partial\tau$. При таком определении σ и θ вектор $\boldsymbol{v}$ в (2.52) принадлежит $W^{m+2,\alpha}(\Omega)$ и удовлетворяет (2.50)—(2.51). Кроме того, отображение $\{g, \varphi\} \mapsto \boldsymbol{v}$ линейно и непрерывно.

Если положить $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, то задача (2.40)—(2.42) сводится к задаче о нахождении $\boldsymbol{w} \in W^{m+2,\alpha}(\Omega)$, $p \in W^{m+1,\alpha}(\Omega)$, таких что

$$-\nu\Delta\boldsymbol{w} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{f}', \quad \boldsymbol{f}' = \boldsymbol{f} + \nu\Delta\boldsymbol{v}, \tag{2.55}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0, \tag{2.56}$$

$$\gamma_0 \boldsymbol{w} = 0. \tag{2.57}$$

Если область Ω односвязна, то, согласно (2.56), существует такая функция ρ, что

$$\boldsymbol{w} = (D_2\rho, -D_1\rho). \tag{2.58}$$

Условие (2.57) сводится к условию $\rho = \partial\rho/\partial\nu = 0$ на Γ, и (2.55) дает после дифференцирования $-\nu\Delta(D_2 w_1 - D_1 w_2) = D_2 f'_1 - D_1 f'_2$. Таким образом, мы получаем

$$\nu\Delta^2\rho = D_1 f'_2 - D_2 f'_1 \in W^{m-1,\alpha}(\Omega), \tag{2.59}$$

$$\rho = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{2.60}$$

Бигармоническая задача (2.59), (2.60) имеет единственное решение $\rho \in W^{m+3,\alpha}(\Omega)$, а функция $\boldsymbol{w}$, определенная посредством (2.58), является решением задачи (2.55)—(2.57) и принадлежит $W^{m+2,\alpha}(\Omega)$. Если Ω неодносвязна (рис. 2), то условие (2.56) позволяет нам получить (2.58) лишь локально, т. е. ρ может и не быть однозначной функцией. Однако, используя (2.57) и доказываемую ниже лемму, можно показать, что ρ необходимо будет однозначной функцией, удовлетворяющей условиям

$$\rho=0 \text{ на } \Gamma_0, \ \rho=\mathrm{const} \text{ на } \Gamma_i, \ i=1, 2, \ldots, \tag{2.61}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\nu}=0 \text{ на } \Gamma, \tag{2.62}$$

где $\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\ldots$ — разложение $\partial\Omega$ на связные компоненты, Γ_0 — одна из этих компонент (например, внешняя граница Ω, если Ω ограничена), а $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ — остальные компоненты. Тогда

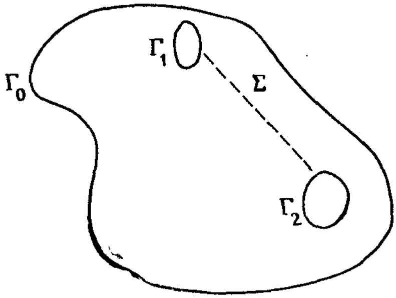

Рис. 2.

задача (2.55)—(2.57) сводится к уравнению (2.59) (относительно ρ) с граничными условиями (2.61)—(2.62). Как и прежде, бигармоническая задача (2.59), (2.61), (2.62) имеет единственное решение $\rho\in W^{m+3,\alpha}(\Omega)$, и функция w, определенная посредством (2.58), является решением задачи (2.55)—(2.57) и принадлежит $W^{m+2,\alpha}(\Omega)$. $\square$

Лемма 2.5. *Предположим, что вектор-функция* $w\in W_0^{1,1}(\Omega)$ *соленоидальна* (Ω — *открытая область в* $\mathbb{R}^2$). *Тогда существует единственная однозначная функция* $\rho\in W^{2,1}(\Omega)$, *которая удовлетворяет условиям* (2.61), (2.62) *и*

$$w=(D_2\rho, -D_1\rho). \tag{2.63}$$

Доказательство. Докажем этот результат для гладких функций w. Затем его можно распространить на общий случай, используя соображения плотности.

Пусть $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ обозначают связные компоненты границы $\Gamma=\partial\Omega$. Произведем гладкие разрезы Σ в Ω (рис. 2), такие что $\Omega=\Sigma\cup\dot{\Omega}$, где $\dot{\Omega}$ — односвязное открытое множество. Тогда для данной гладкой функции w существует функция ρ, такая что (2.63) выполняется в $\dot{\Omega}$. Ясно, что ρ — гладкая функция в замыкании Ω, а поскольку $w=0$ на $\partial\Omega$, то $\operatorname{grad}\rho$ равен нулю на $\partial\Omega$, так что ρ постоянна на каждом Γ_i и $\partial\rho/\partial\nu$ равно нулю на $\partial\Omega$.

Мы сделаем ρ единственной с помощью выбора значения ρ на Γ_0: $\rho=0$ на Γ_0.

Пусть теперь $\rho_\pm$ обозначает значения ρ на $\sum_+$ и $\sum_-$ — двух сторонах $\sum$. Для произвольной функции $\boldsymbol{w}$ они могут быть различными, но если $\boldsymbol{w}$ равно нулю на $\partial\Omega$ и ρ постоянна на каждом Γ_i, то они должны быть одинаковыми. Действительно, если $\boldsymbol{M}_\pm$, $\boldsymbol{P}_\pm$ — две точки на $\sum_\pm$, $\boldsymbol{M}_\pm \in \partial\Omega$, то мы имеем

$$\rho(\boldsymbol{P}_+)-\rho(\boldsymbol{M}_+)=\int\limits_{\Sigma(\boldsymbol{M}_+\to \boldsymbol{P}_+)} \boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\Sigma(\boldsymbol{M}_-\to \boldsymbol{P}_-)} \boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x = \rho(\boldsymbol{P}_-)-\rho(\boldsymbol{M}_-),$$

и поскольку $\rho(\boldsymbol{M}_+)=\rho(\boldsymbol{M}_-)$, мы видим, что $\rho(\boldsymbol{P}_+)=\rho(\boldsymbol{P}_-)$ на $\sum$. □

2.6. *Собственные функции для задачи Стокса.* Пусть Ω — произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Отображение $\Lambda: f \mapsto (1/\nu)\boldsymbol{u}$, определяемое теоремой 2.1, очевидно, линейно и непрерывно действует из $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ в V и, следовательно, в $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. Так как Ω ограничена, то естественное вложение $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ компактно[1] и, следовательно, Λ, рассматриваемый как линейный оператор в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, компактен. Этот оператор также самосопряжен, ибо $(\Lambda \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)=\nu((\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2))=(\boldsymbol{f}_1, \Lambda \boldsymbol{f}_2)$, где $\Lambda \boldsymbol{f}_i=\boldsymbol{u}_i$, $i=1, 2$. Следовательно, оператор Λ обладает ортонормированной последовательностью собственных функций $\boldsymbol{w}_j$: $\Lambda\boldsymbol{w}_j=\lambda_j\boldsymbol{w}_j$, $j\geqslant 1$, $\lambda_j>0$, $\lambda_j\to+\infty$, $j\to+\infty$:

$$\boldsymbol{w}_j\in V,\ ((\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{v}))=\lambda_j(\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v}\in V. \tag{2.64}$$

Как обычно,

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_k)=\delta_{jk},\\ &((\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_k))=\lambda_j\delta_{jk} \quad \forall j, k.\end{aligned} \tag{2.65}$$

Используя опять теорему 2.1, мы можем интерпретировать (2.64) следующим образом: для каждого j существует $p_j\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, такое что

$$\begin{aligned}&-\nu\Delta\boldsymbol{w}_j+\operatorname{grad} p_j=\lambda_j\boldsymbol{w}_j \ \text{ в } \Omega,\\ &\operatorname{div}\boldsymbol{w}_j=0 \ \text{ в } \Omega,\\ &\gamma_0\boldsymbol{w}_j=0 \ \text{ на } \Gamma.\end{aligned} \tag{2.66}$$

Если Ω — липшицева область, то $p_j\in L^2(\Omega)$, в силу предложения 1.2. Если Ω — область класса $\mathscr{C}^m$ (m — целое $\geqslant 2$), то повторное применение предложения 2.2 показывает, что

$$\boldsymbol{w}_j\in \boldsymbol{H}^m(\Omega),\ p_j\in H^{m-1}(\Omega) \quad \forall j\geqslant 1. \tag{2.67}$$

Если Ω — область класса $\mathscr{C}^\infty$, то, ввиду (2.65),

$$\boldsymbol{w}_j\in \mathscr{C}^\infty(\bar\Omega),\ p_j\in \mathscr{C}^\infty(\bar\Omega) \quad \forall j\geqslant 1. \tag{2.68}$$

[1] Теоремы о компактности в пространствах Соболева напоминаются в гл. II, § 1.

§ 3. Дискретизация уравнений Стокса (I)

В п. 3.1 мы рассмотрим общее понятие аппроксимации нормированного пространства, а в п. 3.2 приведем одну общую теорему сходимости для аппроксимации общей вариационной задачи.

Последний пункт, а также весь § 4 посвящены описанию некоторых конкретных аппроксимаций основного для уравнений Навье — Стокса пространства V. Мы дадим соответствующие численные схемы для уравнений Стокса и затем применим к этому случаю общую теорему сходимости.

В п. 3.3 рассматривается метод конечных разностей. Методами конечных элементов мы займемся в следующем параграфе (пп. 4.1—4.5).

Вводимые ниже аппроксимации пространства V будут использоваться на протяжении всех последующих глав; они будут обозначаться через (АПР1), (АПР2), ...

3.1. Аппроксимация нормированного пространства. При использовании вычислительных методов некое нормированное пространство W должно быть аппроксимировано семейством $(W_h)_{h \in \mathscr{H}}$ нормированных пространств W_h. Множество индексов $\mathscr{H}$ зависит от типа рассматриваемой аппроксимации; ниже мы рассмотрим основные имеющиеся здесь случаи: $\mathscr{H} = \mathbb{N}$ (положительные целые числа) для метода Галёркина; $\mathscr{H} = \prod_{i=1}^{n} (0, h_i^0]$ для метода конечных разностей; $\mathscr{H}$ = множеству триангуляций области Ω для методов конечных элементов. Знать точный вид $\mathscr{H}$ нет необходимости; достаточно знать, что на $\mathscr{H}$ существует некоторый фильтр, с тем чтобы можно было переходить к пределу по этому фильтру. Для простоты мы всегда будем говорить о предельном переходе „при $h \to 0$“, хотя, строго говоря, эта терминология корректна только для случая конечных разностей; все определения и результаты легко могут быть перенесены на другие случаи.

Определение 3.1. *Внутренняя аппроксимация* нормированного векторного пространства W — это некоторое семейство троек $\{W_h, p_h, r_h\}$, $h \in \mathscr{H}$, где

(i) W_h — нормированное векторное пространство;

(ii) p_h — линейный непрерывный оператор из W_h в W;

(iii) r_h — оператор (возможно, нелинейный) из W в W_h.

Естественный способ сравнения элемента $u \in W$ и элемента $u_h \in W_h$ заключается либо в сравнении $p_h u_h$ и u в W, либо в сравнении u_h и $r_h u$ в W_h. Первая точка зрения, конечно, более привлекательна, так как мы производим сравнение в фиксированном пространстве. Тем не менее и сравнение в W_h также может оказаться полезным.

Другой путь сравнения u и u_h заключается в следующем: сравнивается некий образ $\bar{\omega} u$ элемента u в каком-либо другом пространстве F с неким образом $p_h u_h$ элемента u_h в F (см. рис.3). Это приводит к понятию внешней аппроксимации пространства W, включающем в себя понятие внутренней аппроксимации как частный случай.

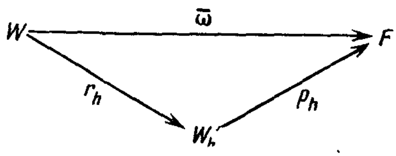

Рис. 3.

Определение 3.2. *Внешняя аппроксимация* нормированного пространства W — это пара, состоящая из

(i) некоторого нормированного пространства F и изоморфизма $\bar{\omega}$ пространства W в F;

(ii) семейства троек $\{W_h, p_h, r_h\}_{h \in \mathscr{H}}$, где для каждого h

W_h — нормированное пространство;

p_h — непрерывное линейное отображение из W_h в F;

r_h — отображение (возможно, нелинейное) из W в W_h.

В случае когда $F = W$ и $\bar{\omega}$ — тождественное отображение, мы, конечно, получаем внутреннюю аппроксимацию пространства W. Всё последующее легко конкретизировать для этого частного случая.

Чаще всего W_h — конечномерные пространства; операторы p_h довольно часто инъективны. Иногда операторы r_h линейны (на всём W или на некотором его подпространстве), однако нет нужды налагать это требование в общем случае; мы не будем также требовать непрерывности r_h.

Операторы p_h и r_h называются соответственно *операторами продолжения* и *сужения*. Если пространства W и F гильбертовы и все пространства W_h тоже гильбертовы, то аппроксимацию называют *гильбертовой*.

Определение 3.3. Для заданных $h \in \mathscr{H}$, $u \in W$, $u_h \in W_h$ назовем

(i) $\|\bar{\omega} u - p_h u_h\|_F$ — *невязкой* между u и u_h,

(ii) $\|u_h - r_h u\|_{W_h}$ — *дискретной невязкой* между u и u_h,

(iii) $\|\bar{\omega} u - p_h r_h u\|_F$ — *ошибкой аппроксимации* для u.

Определим теперь устойчивые и сходящиеся аппроксимации.

Определение 3.4. Скажем, что операторы продолжения p_h *устойчивы*, если их нормы

$$\|p_h\| = \sup_{\substack{u_h \in W_h \\ \|u_h\|_{W_h} = 1}} \|p_h u_h\|_F$$

ограничены равномерно по h. Скажем, что аппроксимация пространства W *устойчива*, если устойчивы операторы продолжения.

Теперь посмотрим, что происходит „при $h \to 0$“.

Определение 3.5. Будем говорить, что семейство u_h *сильно* (соотв. *слабо*) *сходится* к u, если $p_h u_h$ сходится к $\bar{\omega}u$ при $h \to 0$ в сильной (соотв. слабой) топологии F. Будем говорить, что семейство u_h *дискретно сходится* к u если

$$\lim_{h \to 0} \| u_h - r_h u \|_{W_h} = 0.$$

Определение 3.6. Будем называть внешнюю аппроксимацию нормированного пространства W *сходящейся*, если выполнены следующие два условия:

(С1) для всех $u \in W$

$$\lim_{h \to 0} p_h r_h u = \bar{\omega} u \quad \text{(в сильной топологии } F);$$

(С2) для каждой последовательности $u_{h'}$ элементов $W_{h'}$ $(h' \to 0)$, такой что $p_{h'} u_{h'}$ сходится к некоторому элементу φ в слабой топологии F, мы имеем $\varphi \in \bar{\omega} W$, т. е. $\varphi = \bar{\omega} u$ для некоторого $u \in W$.

Замечание 3.1. В случае когда $\bar{\omega}$ сюръективно, в частности в случае внутренней аппроксимации, условие (С2) выполняется автоматически.

Следующее предложение показывает, что условие (С1) можно до некоторой степени ослабить, и для внутренней, и для внешней аппроксимаций.

Предложение 3.1. *Пусть дана устойчивая внешняя аппроксимация пространства W, сходящаяся в следующем ограниченном смысле: операторы r_h определены лишь на некотором плотном подмножестве $\mathscr{W}$ в W и условие* (С1) *из определения* 3.6. *должно выполняться только для u, принадлежащих $\mathscr{W}$* (*условие* (С2) *остается прежним*). *Тогда можно продолжить операторы сужения r_h на всё пространство W так, что условие* (С1) *будет справедливо для каждого $u \in W$ и, следовательно, аппроксимация пространства W будет устойчивой и сходящейся уже без каких-либо ограничений.*

Доказательство. Пусть $u \in W$, $u \notin \mathscr{W}$; нам надо каким-то образом определить $r_h u \in W_h$ для всякого h так, чтобы $p_h r_h u \to \bar{\omega} u$ при $h \to 0$. Элемент u можно аппроксимировать элементами из $\mathscr{W}$, которые в свою очередь могут быть аппроксимированы элементами из пространства $p_h W_h$; нам нужно только подходящим образом объединить эти две аппроксимации. Для каждого целого $n \geqslant 1$ существует $u_n \in \mathscr{W}$, такое что $\| u_n - u \|_W \leqslant 1/n$ и, следовательно,

$$\| \bar{\omega} u_n - \bar{\omega} u \|_F \leqslant c_0 / n, \tag{3.1}$$

где c_0 — норма изоморфизма $\bar{\omega}$. Для каждого фиксированного целого n сеть[1] $p_h r_h u_n$ сходится к $\bar{\omega} u_n$ в F при $h \to 0$. Таким образом, найдется $\eta_n > 0$, такое что $\|p_h r_h u_n - \bar{\omega} u_n\|_F \leqslant 1/n$ при $|h| \leqslant \eta_n$. Мы можем предположить, что η_n меньше, чем η_{n-1} и $1/n$, так что η_n есть строго убывающая последовательность сходящаяся к нулю:

$$0 < \eta_{n+1} < \ldots < \eta_1; \quad \eta_n \to 0.$$

Определим $r_h u$ равенством

$$r_h u = r_h u_n \text{ для } \eta_{n+1} < |h| \leqslant \eta_n.$$

Ясно, что для $\eta_{n+1} < |h| \leqslant \eta_n$

$$\|\bar{\omega} u - p_h r_h u\|_F \leqslant \|\bar{\omega} u - \bar{\omega} u_n\|_F + \|\bar{\omega} u_n - p_h r_h u_n\|_F + \|p_h r_h u_n - p_h r_h u\|_F \leqslant (1 + c_0)/n$$

и поэтому $\|\bar{\omega} u - p_h r_h u\|_F \leqslant (1 + c_0)/n$ для $|h| \leqslant \eta_n$. Отсюда следует сходимость $p_h r_h u$ к $\bar{\omega} u$ при $h \to 0$. □

Замечание 3.2. Предложение 3.1 показывает, что если отображение r_h определено на всем пространстве W, а условие (C1) имеет место для всех $u \in \mathscr{W}$, то мы можем изменить величину $r_h u$ на дополнении $\mathscr{W}$ так, чтобы условие (C1) удовлетворялось для всех $u \in W$.

Галёркинская аппроксимация нормированного пространства. В качестве простого примера определим галёркинскую аппроксимацию сепарабельного нормированного пространства W. Пусть W_h, $h \in \mathbb{N} = \mathscr{H}$,— возрастающая последовательность конечномерных подпространств W, объединение которых плотно в W. Для каждого h пусть p_h — каноническое вложение W_h в W и для каждого $u \in W_{h_0}$, которое не принадлежит W_{h_0-1}, пусть $r_h u = 0$, если $h \leqslant h_0$, и $r_h u = u$, если $h > h_0$. Понятно, что $p_h r_h u \to u$ при $h \to \infty$ для всех $u \in \bigcup_{h \in \mathbb{N}} W_h$. Оператор r_h определен только на множестве $\mathscr{W} = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} W_h$, плотном в W. Поскольку операторы продолжения имеют норму, равную единице, то они устойчивы и по предложению 3.1 операторы r_h можно продолжить некоторым способом (неважно каким) на всё пространство W так, чтобы получилась устойчивая сходящаяся внутренняя аппроксимация пространства W: это и есть *галёркинская аппроксимация* для W.

3.2. Общая теорема сходимости. Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимации общей вариационной задачи (2.12). Пусть W — гильбертово пространство, $a(u, v)$ — коэрцитивная непрерывная

[1] В дальнейшем иногда сети (обобщенные последовательности) мы будем называть просто последовательностями.— *Прим. перев.*

билинейная форма на $W \times W$:

$$a(u, u) \geqslant \alpha \|u\|_W^2 \quad \forall u \in W \ (\alpha > 0) \tag{3.2}$$

и l — линейная непрерывная форма на W. Обозначим через u единственное решение в W уравнения

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \ \forall v \in W. \tag{3.3}$$

Имея в виду аппроксимировать этот элемент u, зададим какую-либо внешнюю устойчивую и сходящуюся гильбертову аппроксимацию пространства W, скажем $\{W_h, p_h, r_h\}_{h \in \mathscr{H}}$. Для каждого $h \in \mathscr{H}$ зададим также

(i) непрерывную билинейную форму $a_h(u_h, v_h)$ на $W_h \times W_h$, которая коэрцитивна, а более точно, удовлетворяет условию

$$\begin{gathered}\exists \alpha_0 > 0, \text{ не зависящее от } h, \text{ такое что}\\ a_h(u_h, u_h) \geqslant \alpha_0 \|u_h\|_h^2 \quad \forall u_h \in W_h,\end{gathered} \tag{3.4}$$

где $\|\cdot\|_h$ — норма в W_h;

(ii) непрерывную линейную форму l_h на W_h ($l_h \in W_h'$), такую что

$$\|l_h\|_{*h} \leqslant \beta, \tag{3.5}$$

где $\|\cdot\|_{*h}$ — норма в W_h' и β не зависит от h.

Теперь мы свяжем с уравнениями (3.3) следующее семейство аппроксимирующих уравнений.

Для фиксированного $h \in \mathscr{H}$ найдем $u_h \in W_h$, такое что

$$a_h(u_h, v_h) = \langle l_h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in W_h. \tag{3.6}$$

В силу сделанных выше предположений, из теоремы 2.2 (в которой вместо W, W', a и l надо взять W_h, W_h', a_h и l_h соответственно) следует, что уравнение (3.6) имеет единственное решение; будем говорить, что это решение u_h является *приближенным решением* уравнения (3.3).

Прежде чем формулировать общую теорему о сходимости приближенных решений u_h к точному решению, уточним, как согласованы формы a_h и l_h с формами a и l. Мы примем следующие предположения о согласованности:

$$\begin{gathered}\text{Если семейство } v_h \text{ слабо сходится к } v \text{ при}\\ h \to 0 \text{ и если семейство } w_h \text{ сильно сходится}\\ \text{к } w \text{ при } h \to 0, \text{ то}\\ \lim_{h \to 0} a_h(v_h, w_h) = a(v, w),\\ \lim_{h \to 0} a_h(w_h, v_h) = a(w, v).\end{gathered} \tag{3.7}$$

Если семейство v_h слабо сходится к v при $h \to 0$, то

$$\lim_{h \to 0} \langle l_h, v_h \rangle = \langle l, v \rangle. \tag{3.8}$$

Общая теорема о сходимости звучит так:

Теорема 3.1. *При выполнении предположений* (3.2), (3.4), (3.5), (3.7) *и* (3.8) *решение* u_h *уравнения* (3.6) *сильно сходится к решению* u *уравнения* (3.3) *при* $h \to 0$.

Доказательство. Полагая $v_h = u_h$ в (3.6) и используя (3.4) и (3.5), находим, что

$$a_h(u_h, u_h) = \langle l_h, u_h \rangle, \tag{3.9}$$
$$\alpha_0 \| u_h \|_h^2 \leqslant \| l_h \|_{*h} \| u_h \|_h \leqslant \beta \| u_h \|_h;$$

отсюда

$$\| u_h \|_h \leqslant \beta/\alpha_0. \tag{3.10}$$

Так как операторы p_h устойчивы, то найдется константа c_0, мажорирующая нормы всех этих операторов:

$$\| p_h \| = \| p_h \|_{\mathscr{L}(W_h, F)} \leqslant c_0; \tag{3.11}$$

следовательно,

$$\| p_h u_h \|_F \leqslant c_0 \beta/\alpha_0. \tag{3.12}$$

При этих условиях существуют $\varphi \in F$ и сходящаяся к нулю последовательность h', такие что $\lim\limits_{h' \to 0} p_{h'} u_{h'} = \varphi$ в слабой топологии F; согласно условию (C2) из определения 3.6, $\varphi \in \overline{\omega W}$, т. е. $\varphi = \bar{\omega} u_*$ для некоторого $u_* \in W$, так что

$$\lim_{h' \to 0} p_{h'} u_{h'} = \bar{\omega} u_* \text{ (в слабой топологии } F). \tag{3.13}$$

Покажем, что $u_* = u$. Для произвольного фиксированного $v \in W$ запишем (3.6) с $v_h = r_h v$ и перейдем к пределу по последовательности h', используя (3.7), (3.8) и (3.13):

$$a_h(u_h, r_h v) = \langle l_h, r_h v \rangle,$$
$$\lim_{h' \to 0} a_{h'}(u_{h'}, r_{h'} v) = a(u_*, v),$$
$$\lim_{h' \to 0} \langle l_{h'}, r_{h'} v \rangle = \langle l, v \rangle.$$

Окончательно получаем $a(u_*, v) = \langle l, v \rangle$; в силу произвольности $v \in W$, u_* есть решение (3.3), а поэтому $u_* = u$.

Точно таким же образом можно показать, что из любой подпоследовательности сети $p_h u_h$ можно выбрать подпоследовательность, которая сходится к $\bar{\omega} u$ в слабой топологии F. Отсюда вытекает, что и вся сеть $p_h u_h$ сходится к $\bar{\omega} u$ при $h \to 0$ в слабой топологии.

Докажем теперь, что фактически здесь имеет место сильная сходимость. Рассмотрим выражение

$$X_h = a_h(u_h - r_h u, \; u_h - r_h u),$$

или

$$X_h = a_h(u_h, u_h) - a_h(u_h, r_h u) - a_h(r_h u, \; u_h) + a_h(r_h u, r_h u).$$

В силу (3.7) — (3.9),

$$\lim_{h \to 0} a_h(u_h, u_h) = \langle l, u \rangle,$$
$$\lim_{h \to 0} a_h(u_h, r_h u) = \lim_{h \to 0} a_h(r_h u, u_h) =$$
$$= \lim_{h \to 0} a_h(r_h u, r_h u) = a(u, u).$$

Следовательно,

$$\lim_{h \to 0} X_h = -a(u, u) + \langle l, u \rangle = 0, \tag{3.14}$$

согласно (3.3) (при $v = u$). Учитывая (3.4) и (3.11), получаем

$$0 \leqslant \alpha_0 \| u_h - r_h u \|_h^2 \leqslant X_h,$$

поэтому

$$0 \leqslant \| p_h u_h - p_h r_h u \|_F^2 \leqslant (c_0^2/\alpha_0) X_h \to 0.$$

Используя теперь условие (C1) из определения 3.6 и неравенство

$$\| p_h u_h - \bar{\omega} u \|_F \leqslant \| p_h u_h - p_h r_h u \|_F + \| p_h r_h u - \bar{\omega} u \|_F,$$

мы заключаем, что левая часть стремится к нулю при $h \to 0$. □

Замечание 3.3. Как было указано в замечании 2.2(ii), теорема 3.1 применима к галёркинской аппроксимации уравнения (3.3), использованной при доказательстве теоремы 2.2. Беря $W_h = W_m$ $\forall h = m \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H} = \mathbb{N}$, так же как и в примере в конце п. 3.1, получаем галёркинскую аппроксимацию пространства W. Полагая

$$a_h(v, w) = a(v, w), \quad \langle l_h, v \rangle = \langle l, v \rangle \quad \forall v, w \in W$$

и применяя теорему 3.1, убеждаемся, что u_m сходится к u в сильной топологии W при $m \to \infty$.

Замечание 3.4. Если семейство $\{w_{ih}\}_{1 \leqslant i \leqslant N(h)}$ образует базис в W_h, то аппроксимирующая задача (3.6) эквивалентна некоторой невырожденной линейной системе относительно компонент u_h в этом базисе: если

$$u_h = \sum_{i=1}^{N(h)} \xi_{ih} w_{ih},$$

то

$$\sum_{i=1}^{N(h)} \xi_{ih} a_h(w_{ih}, w_{jh}) = \langle l_h, w_{jh} \rangle, \quad 1 \leqslant j \leqslant N(h). \tag{3.15}$$

Решение линейной системы (3.15) находится обычными методами.

Если базис в W_h построить трудно (а это иногда случается в задаче Стокса), для решения уравнения (3.6) приходится подыскивать какой-нибудь специальный метод.

3.3. Аппроксимация с помощью конечных разностей. Мы рассмотрим здесь аппроксимацию пространства $H_0^1(\Omega)$, а затем и пространства V с помощью конечных разностей и аппроксимацию задачи Стокса соответствующей разностной схемой. Эту аппроксимацию для V будем обозначать через (АПР1).

3.3.1. Обозначения. Имея дело с конечными разностями, мы через h будем обозначать вектор $h = (h_1, \ldots, h_n)$, где h_i — шаг в направлении x_i и

$$0 < h_i \leqslant h_i^0$$

для некоторых строго положительных чисел h_i^0; следовательно,

$$\mathscr{H} = \prod_{i=1}^{n} (0, h_i^0). \tag{3.16}$$

Нас интересует переход к пределу при $h \to 0$. Введем следующие обозначения ($h \in \mathscr{H}$):

(i) $\boldsymbol{h}_i$ — вектор $h_i e_i$, где e_i — вектор, j-я координата которого есть δ_{ij} (символ Кронекера);

(ii) $\mathbb{R}_h$ — множество точек из $\mathbb{R}^n$ вида $j_1 \boldsymbol{h}_1 + \ldots + j_n \boldsymbol{h}_n$, где j_i — целые числа любого знака ($j_i \in \mathbb{Z}$);

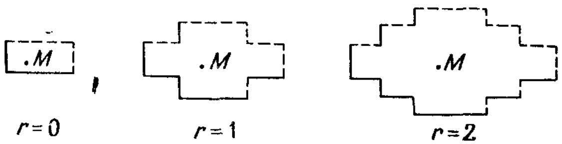

Рис. 4. Примеры множеств $\sigma_h(M, r)$ на плоскости.

(iii) $\sigma_h(\boldsymbol{M})$ для $\boldsymbol{M} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — множество

$$\prod_{i=1}^{n} (\mu_i - h_i/2, \mu_i + h_i/2),$$

называемое *блоком*;

(iv) $\sigma_h(\boldsymbol{M}, r)$ — множество

$$\bigcup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ -r \leqslant \alpha \leqslant r}} \sigma_h(\boldsymbol{M} + (\alpha/2)\boldsymbol{h}_i)$$

(см. рис. 4); конечно, $\sigma_h(\boldsymbol{M}, 0) = \sigma_h(\boldsymbol{M})$;

(v) w_{hM} — характеристическая (индикаторная) функция блока $\sigma_h(M)$;

(vi) δ_{ih} (или δ_i, если это не может привести к недоразумениям) — конечноразностный оператор

$$(\delta_i\varphi)(x)=\frac{\varphi(x+h_i/2)-\varphi(x-h_i/2)}{h_i}; \tag{3.17}$$

если $j=(j_1, \ldots, j_n)\in\mathbb{N}^n$ — мультииндекс, то δ_h^j (или просто δ^j) будет обозначать оператор

$$\delta^j=\delta_1^{j_1}\ldots\delta_n^{j_n}. \tag{3.18}$$

(vii) Каждому открытому множеству Ω в $\mathbb{R}^n$ и каждому неотрицательному целому числу r мы поставим в соответствие следующие множества точек:

$$\mathring{\Omega}_h^r=\{M\in\mathbb{R}_h,\ \sigma_h(M, r)\subset\Omega\}, \tag{3.19}$$
$$\Omega_h^r=\{M\in\mathbb{R}_h,\ \sigma_h(M, r)\cap\Omega\neq\varnothing\}. \tag{3.20}$$

(viii) Иногда мы будем использовать и другие конечноразностные операторы, например следующие операторы ∇_{ih} и $\overline{\nabla}_{ih}$ (которые будут обозначаться также через ∇_i и $\overline{\nabla}_i$):

$$\nabla_{ih}\varphi(x)=\frac{\varphi(x+h_i)-\varphi(x)}{h_i}, \tag{3.21}$$
$$\overline{\nabla}_{ih}\varphi(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(x-h_i)}{h_i}. \tag{3.22}$$

3.3.2. Внешняя аппроксимация пространства $H_0^1(\Omega)$. Пусть Ω — липшицева открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Пусть, далее, $W=H_0^1(\Omega)$, $F=L^2(\Omega)^{n+1}$ (с естественным гильбертовым скалярным произведением) и $\overline{\omega}$ — отображение

$$u\mapsto\overline{\omega}u=(u, D_1u, \ldots, D_nu) \tag{3.23}$$

из W в F. Ясно, что $\|\overline{\omega}u\|_F=[\![u]\!]_{H_0^1(\Omega)}$, так что $\overline{\omega}$ — изоморфизм из W в F.

Пространство W_h. В предыдущих обозначениях, W_h — это пространство ступенчатых функций вида

$$u_h(x)=\sum_{M\in\mathring{\Omega}_h^1}u_h(M)\,w_{hM}(x),\quad u_h(M)\in\mathbb{R}^n. \tag{3.24}$$

Функции w_{hM} для $M\in\mathring{\Omega}_h^1$ линейно-независимы и порождают пространство W_h; они образуют базис в W_h. Размерность W_h равна n, умноженному на $N(h)$—число точек $M\in\mathring{\Omega}_h^1$; W_h конечномерно. Оно снабжено скалярным произведением

$$[\![u_h, v_h]\!]_h = \int_\Omega u_h(x) v_h(x)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \delta_i u_h(x)\,\delta_i v_h(x)\,dx, \qquad (3.25)$$

которое делает его гильбертовым пространством.

Как следует из определения пространства W_h и множества Ω_h^1, функции u_h и $\delta_i u_h$, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеют компактные носители в Ω. Следовательно, их можно рассматривать как вектор-функции, определенные на Ω или на $\mathbb{R}^n$.

Операторы p_h. Операторы продолжения p_h суть дискретные аналоги оператора $\bar{\omega}$:

$$p_h u_h = (u_h, \delta_1 u_h, \ldots, \delta_n u_h) \quad \forall u_h \in W_h. \qquad (3.26)$$

Нормы p_h в точности равны единице:

$$\|p_h u_h\|_F = [\![u_h]\!]_h,$$

и они устойчивы.

Операторы r_h. Ввиду предложения 3.1 нам достаточно определить операторы r_h лишь на $\mathscr{W} = \mathscr{D}(\Omega)$, являющемся плотным подпространством в $H_0^1(\Omega)$; положим

$$(r_h u)(M) = u(M) \quad \forall M \in \mathring{\Omega}_h^1 \quad \forall u \in \mathscr{D}(\Omega); \qquad (3.27)$$

это полностью определяет $r_h u \in W_h$.

Предложение 3.2. *Построенная выше внешняя аппроксимация пространства $H_0^1(\Omega)$ является устойчивой и сходящейся.*

Доказательство. Эта аппроксимация устойчива, так как операторы продолжения устойчивы.

Мы должны проверить выполнение условий (C1) и (C2) из определения 3.6.

Лемма 3.1. *Условие* (C1) *выполнено:* $\forall u \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$r_h u \to u \text{ в } L^2(\Omega), \qquad (3.28)$$

$$\delta_i r_h u \to D_i u \text{ в } L^2(\Omega) \qquad (3.29)$$

при $h \to 0$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathscr{D}(\Omega)$, и пусть h настолько мало, что носитель u содержится в множестве

$$\Omega(h) = \bigcup_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \sigma_h(M). \qquad (3.30)$$

Для всех $M \in \mathring{\Omega}_h^1$ и для всех $x \in \sigma_h(M)$ формула Тейлора дает при $u_h = r_h u$)

$$|u_h(x) - u(x)| = |u(M) - u(x)| \leqslant c_1(u)\,|M - x| \leqslant 2^{-1} c_1(u)|h|,$$

где

$$c_1(\boldsymbol{u}) = \sup_{x \in \Omega} |\operatorname{grad} \boldsymbol{u}(x)|, \tag{3.31}$$

$$|h| = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2\right)^{1/2}. \tag{3.32}$$

Тогда

$$\sup_{x \in \Omega(h)} |\boldsymbol{u}_h(x) - \boldsymbol{u}(x)| \leqslant 2^{-1} c_1(\boldsymbol{u}) |h|. \tag{3.33}$$

На множестве $\Omega \setminus \Omega(h)$

$$\begin{gathered} |\boldsymbol{u}(x)| \leqslant c_1(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}(x, \Gamma), \\ |\boldsymbol{u}_h(x) - \boldsymbol{u}(x)| \leqslant c_1(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}(\Omega(h), \Gamma). \end{gathered} \tag{3.34}$$

Следовательно,

$$\sup_{x \in \Omega} |\boldsymbol{u}_h(x) - \boldsymbol{u}(x)| \leqslant c_1(\boldsymbol{u}) \{2^{-1}|h| + \mathrm{d}(\Omega(h), \Gamma)\}; \tag{3.35}$$

но правая часть стремится к нулю при $h \to 0$; значит, $\boldsymbol{u}_h$ сходится к $\boldsymbol{u}$ в $\boldsymbol{L}^\infty(\Omega)$, а так как Ω ограничена, то и в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$.

Для того чтобы доказать (3.29), опять применим формулу Тейлора: $\forall M \in \mathring{\Omega}_h^1$ $\forall x \in \sigma_h(M)$

$$\begin{aligned} &|\delta_i \boldsymbol{u}_h(x) - D_i \boldsymbol{u}(x)| \\ &= \left| \frac{1}{h_i} \left[\boldsymbol{u}_h\left(M + \frac{1}{2} h_i\right) - \boldsymbol{u}_h\left(M - \frac{1}{2} h_i\right) \right] - D_i \boldsymbol{u}(x) \right| \\ &\leqslant c_2(\boldsymbol{u}) |h|, \end{aligned} \tag{3.36}$$

где $c_2(\boldsymbol{u})$ зависит только от sup-норм вторых производных от $\boldsymbol{u}$. На множестве $\Omega \setminus \Omega(h)$

$$|D_i \boldsymbol{u}(x)| \leqslant c_2'(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}(\Omega(h), \Gamma),$$

а тогда на всем множестве Ω

$$|\delta_i \boldsymbol{u}_h(x) - D_i \boldsymbol{u}(x)| \leqslant c_2(\boldsymbol{u}) |h| + c_2'(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}(\Omega(h), \Gamma). \tag{3.37}$$

Правая часть сходится к нулю при $h \to 0$; этим доказана сходимость $\delta_i \boldsymbol{u}_h$ к $D_i \boldsymbol{u}$ в sup-норме и $\boldsymbol{L}^2$-норме. □

Лемма 3.2. *Условие* (C2) *выполнено.*

Доказательство. Пусть задана последовательность $\boldsymbol{u}_{h'} \in \boldsymbol{W}_{h'}$, $h' \to 0$, такая что $p_{h'}\boldsymbol{u}_{h'}$ сходится к φ в слабой топологии F при $h' \to 0$. Это означает, что

$$\begin{gathered} \lim_{h' \to 0} \boldsymbol{u}_{h'} = \varphi_0, \\ \lim_{h' \to 0} \delta_{ih'} \boldsymbol{u}_{h'} = \varphi_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \end{gathered} \tag{3.38}$$

в слабой топологии $L^2(\Omega)$; $\varphi=(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$. Так как функции $u_{h'}$, $\delta_i u_{h'}$ имеют компактный носитель в Ω, то мы имеем также

$$\begin{aligned}&\lim_{h'\to 0} u_{h'}=\tilde{\varphi}_0,\\ &\lim_{h'\to 0} \delta_i u_{h'}=\tilde{\varphi}_i, \quad 1\leqslant i\leqslant n,\end{aligned} \tag{3.39}$$

в слабой топологии $L^2(\mathbb{R}^n)$; здесь $\tilde{g}$ обозначает функцию, равную g на Ω и нулю на дополнении к Ω. Дискретный аналог формулы интегрирования по частям дает

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_{ih'} u_{h'}(x)\,\sigma(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} u_{h'}(x)\,\delta_{ih'}\sigma(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.40}$$

для каждого $\sigma\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. При $h'\to 0$ левая часть (3.40) сходится к

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i(x)\,\sigma(x)\,\mathrm{d}x,$$

а правая часть — к

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(x)\,D_i\sigma(x)\,\mathrm{d}x,$$

так как (по лемме 3.1) $\delta_{ih}\sigma$ сходится к $D_i\sigma$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Итак,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i(x)\,\sigma(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(x)\,D_i\sigma(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\sigma\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

или, другими словами,

$$\varphi_i=D_i\varphi_0, \quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{3.41}$$

в смысле теории распределений. Далее, ясно, что $\tilde{\varphi}_0\in H^1(\mathbb{R}^n)$, а поскольку $\tilde{\varphi}_0$ равно нулю на дополнении к Ω, то φ_0 принадлежит $H_0^1(\Omega)$. Таким образом, $\varphi\in\bar{\omega}W$,

$$\varphi=\bar{\omega}\varphi_0, \quad \varphi_0\in H_0^1(\Omega). \quad \square \tag{3.42}$$

3.3.3. Дискретное неравенство Пуанкаре. Следующее *дискретное неравенство Пуанкаре* (см. (1.9)) позволит нам наделить пространство W_h (см. (3.24)) другим скалярным произведением $((\cdot,\cdot))_h$, дискретным аналогом скалярного произведения $((\cdot,\cdot))$ (см. 1.11)).

Предложение 3.3. *Пусть Ω — область, ограниченная в направлении x_i, и u_h — скалярная ступенчатая функция типа* (3.24) ($u_h(M)\in\mathbb{R}$). *Тогда*

$$|u_h|\leqslant 2l\,|\delta_{ih}u_h|, \tag{3.43}$$

где l — ширина Ω в указанном направлении.

Доказательство. Возьмем для простоты $i=1$. Поскольку u_h имеет компактный носитель, то для любого $M\in\mathbb{R}_h$

$$u_h(M)^2=\sum_{j=0}^{\infty}\{[u_h(M-jh_1)]^2-[u_h(M-(j+1)h_1)]^2\}$$
$$=h_1\sum_{j=0}^{\infty}\left[\delta_{1h}u_h\left(M-\left(j+\frac{1}{2}\right)h_1\right)\right]\left[u_h(M-jh_1)+\right.$$
$$\left.+u_h(M-(j+1)h_1)\right],$$

так что

$$u_h(M)^2\leqslant I=h_1\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left|\delta_{1h}u_h\left(M-\left(j+\frac{1}{2}\right)h_1\right)\right|[|u_h(M-jh_1)|$$
$$+|u_h(M-(j+1)h_1)|]; \tag{3.44}$$

написанная сумма в действительности конечна. Далее, $u_h(M+ih_1)^2$ для любого $i\in Z$ мажорируется в точности тем же рядом I. Имеется менее чем l/h_1 значений i, таких что $u_h(M+ih_1)\neq 0$, поскольку x_1-ширина Ω меньше l. Следовательно,

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}u_h(M+ih_1)^2\leqslant lI/h_1. \tag{3.45}$$

Обозначим через $\mathcal{F}_h(M)$ цилиндр $\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty}\sigma_h(M+ih_1)$. Мы можем интерпретировать (3.45) следующим образом:

$$\int_{\mathcal{F}_h(M)}u_h(x)^2\,\mathrm{d}x=(h_1\ldots h_n)\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u_h(M+ih_1)^2\leqslant l(h_1\ldots h_n)I/h_1$$
$$=l\int_{\mathcal{F}_h(M)}|\delta_{1h}u_h(x)|\left\{\left|u_h\left(x+\frac{1}{2}h_1\right)\right|+\left|u_h\left(x-\frac{1}{2}h_1\right)\right|\right\}\mathrm{d}x.$$

Просуммировав последнее неравенство по всем цилиндрам $\mathcal{F}_h(M)$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^n}u_h(x)^2\,\mathrm{d}x\leqslant l\int_{\mathbb{R}^n}|\delta_{1h}u_h(x)|\left\{\left|u_h\left(x+\frac{1}{2}h_1\right)\right|+\right.$$
$$\left.+\left|u_h\left(x-\frac{1}{2}h_1\right)\right|\right\}\mathrm{d}x.$$

Применение неравенства Шварца дает теперь

$$|u_h|^2=\int_{\mathbb{R}^n} u_h(x)^2\,dx \leqslant l\,|\delta_{ih}u_h|\cdot\left\{2\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left|u_h\left(x+\frac{1}{2}h_i\right)\right|^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left|u_h\left(x-\frac{1}{2}h_i\right)\right|^2\right]dx\right\}^{1/2}\leqslant 2l\,|\delta_{ih}u_h|\cdot|u_h|,$$

откуда и следует (3.43). □

Предложение 3.4. *Пусть Ω — ограниченная липшицева область. Если ввести в пространстве W_h скалярное произведение*

$$((\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h))_h=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\delta_{ih}\boldsymbol{u}_h\delta_{ih}\boldsymbol{v}_h\,dx, \tag{3.46}$$

то мы опять получим устойчивую сходящуюся аппроксимацию для $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Доказательство. Операторы продолжения будут устойчивы вследствие предложения 3.3. □

Замечание 3.5. Используя разностные операторы ∇_{ih} или $\bar{\nabla}_{ih}$, или вообще любую „разумную" аппроксимацию оператора дифференцирования $\partial/\partial x_i$, можно определить много других аналогичных аппроксимаций пространства $H_0^1(\Omega)$. При этом изменяется: скалярное произведение (3.25), где δ_{ih} нужно будет заменить на $\nabla_{ih}, \ldots$, множество $\mathring{\Omega}_h^1$, которое нужно будет определить подходящим образом, и некоторые пункты в доказательствах лемм 3.1 и 3.2.

То же самое неравенство Пуанкаре справедливо и для операторов ∇_{ih} и $\bar{\nabla}_{ih}$, но не для более общих операторов.

Замечание 3.6. В случае когда область Ω неограничена, можно определить внешнюю аппроксимацию пространства $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, используя пространство W_h, состоящее

— либо из ступенчатых функций вида $\sum_{M\in\mathring{\Omega}_h^1}\lambda_M w_{hM}$, имеющих компактный носитель (мы ограничиваемся суммами по конечному числу точек $M\in\mathring{\Omega}_h^1$);

— либо из ступенчатых функций вида $\sum_M \lambda_M w_{hM}$, причем M берется из пересечения $\mathring{\Omega}_h^1$ с некоторым „большим" шаром $|x|\leqslant\rho(h)$, где $\rho(h)\to+\infty$ при $h\to 0$.

Во втором случае W_h конечномерно; в первом случае это не так. Оставляя все другие элементы аппроксимации без изменения, мы, понятно, получим устойчивую сходящуюся аппроксимацию пространства $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ для неограниченной локально-липшицевой области Ω.

Дискретное неравенство Пуанкаре сохраняет силу, если Ω ограничена в одном из направлений $x_1, \ldots, x_n$.

3.3.4. Аппроксимация (АПР1) *пространства V.* Пусть Ω — липшицева ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{V}$ — обычное пространство (1.12) и V — его замыкание в $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Мы определим сейчас некоторую аппроксимацию пространства V, используя конечные разности; эту аппроксимацию мы будем обозначать через (АПР1).

Пусть $F = L^2(\Omega)^{n+1}$ (с естественным гильбертовым скалярным произведением). Определим отображение $\bar{\omega} \in \mathscr{L}(V, F)$ следующим образом:

$$u \mapsto \bar{\omega} u = (u, D_1 u, \ldots, D_n u).$$

Ясно, что $\|\bar{\omega} u\|_F = [\![u]\!]$, так что $\bar{\omega}$ — изоморфизм из V в F.

Пространство V_h. (В дальнейшем мы пишем V_h вместо W_h.) V_h — пространство ступенчатых функций вида

$$u_h(x) = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} u_h(M)\, w_{hM}(x), \quad u_h(M) \in \mathbb{R}^n, \tag{3.47}$$

которые дискретно соленоидальны в следующем смысле:

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla_{ih} u_{ih}(M) = 0 \quad \forall M \in \mathring{\Omega}_h^1, \tag{3.48}$$

или, эквивалентно,

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla_{ih} u_{ih}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega(h). \tag{3.49}$$

Никаких доступных базисов в V_h в нашем распоряжении нет; ясно только, что V_h — конечномерное пространство размерности меньшей или равной $nN(h) - N(h) = (n-1)N(h)$, так как все функции вида (3.47) образуют пространство размерности $nN(h)$ и имеется не более чем $N(h)$ независимых линейных связей (3.48); неясно, будут ли связи (3.48) всегда линейно-независимы, так что неизвестно, равна ли размерность V_h в точности $(n-1)N(h)$. Пространство V_h снабжается одним из скалярных произведений

$$((u_h, v_h))_h = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \delta_i u_h(x) \cdot \delta_i v_h(x)\, dx, \tag{3.50}$$

$$[\![u_h, v_h]\!]_h = \int_\Omega u_h(x)\, v_h(x)\, dx + ((u_h, v_h))_h. \tag{3.51}$$

Из предложения 3.3 (дискретного неравенства Пуанкаре) следует, что V_h, снабженное любым из этих скалярных произведений, будет гильбертовым пространством.

Операторы p_h. Это — дискретные аналоги оператора $\bar{\omega}$:

$$p_h u_h = \{u_h, D_1 u_h, \ldots, D_n u_h\}. \tag{3.52}$$

Эти операторы устойчивы, поскольку, в силу (3.43),

$$\|p_h u_h\|_F = [\![u_h]\!]_h \leqslant c \|u_h\|_h \quad \forall u_h \in V_h. \tag{3.53}$$

Операторы r_h. Мы определим $r_h u$ лишь для u из $\mathscr{V}$ — плотного подпространства в V; для всякого $M=(m_1h_1, \ldots, m_nh_n)\in\mathring{\Omega}_h^1$ значение $(r_h u)(M)$ определяется посредством равенства

$u_{ih}(M)$ (т. е. i-я компонента вектора u_h) = среднему значению u_i на грани $x_i=\left(m_i-\frac{1}{2}\right)h_i$ множества $\sigma_h(M)$. (3.54)

Такое сложное определение $r_h u$ необходимо, если мы хотим, чтобы элемент u_h принадлежал V_h.

Лемма 3.3. $r_h u\in V_h$ *для каждого* $u\in\mathscr{V}$.

Доказательство. Имеем

$$\nabla_{ih}u_{ih}(M)=\frac{1}{h_1\ldots h_n}\left\{\int\limits_{\Sigma_i}u_i(x)\,dx-\int\limits_{\Sigma_i'}u_i(x)\,dx\right\},$$

где Σ_i и Σ_i' — соответственно грани $x_i=(m_i+1/2)h_i$ и $x_i=(m_i-1/2)h_i$ множества $\sigma_h(M)$. Это равенство можно переписать так:

$$\nabla_{ih}u_{ih}(M)=\frac{1}{h_1\ldots h_n}\int\limits_{\Sigma_i\cup\Sigma_i'}u\cdot\nu\,d\Gamma,$$

где ν обозначает единичный вектор внешней нормали к границе множества $\sigma_h(M)$. Поэтому для любой точки $M\in\mathring{\Omega}_h^1$,

$$\sum_{i=1}^{n}\nabla_{ih}u_{ih}(M)=\frac{1}{h_1\ldots h_n}\int\limits_{\partial\sigma_h(M)}u\cdot\nu\,d\Gamma \text{ (по формуле Стокса)}$$
$$=\frac{1}{h_1\ldots h_n}\int\limits_{\sigma_h(M)}\operatorname{div}u\,dx=0,$$

так как $\operatorname{div}u=0$. Условие (3.48) выполняется. □

Предложение 3.5. *Описанная выше внешняя аппроксимация пространства V является устойчивой и сходящейся.*

Доказательство. Устойчивость уже была доказана.

Проверка выполнения условия (C1) аналогична соответствующей проверке в лемме 3.1, и мы не будем здесь повторять все детали. Для $x\in\sigma_h(M)$, $M\in\mathring{\Omega}_h^1$

$$|u_{ih}(x)-u_i(x)|=|u_{ih}(\xi)-u_i(x)|,$$

где ξ — некоторая точка грани $x_i=(m_i-1/2)h_i$ множества $\sigma_h(M)$; следовательно,

$$|u_{ih}(x)-u_i(x)|\leqslant c_1(u_i)|x-\xi|\leqslant c_1(u_i)|h|,$$

и (3.35) заменяется на

$$\sup_{x\in\Omega} |u_h(x)-u(x)| \leqslant c_1'(u)\{|h|+\mathrm{d}(\Omega(h),\ \Gamma)\}. \tag{3.55}$$

Проверка выполнения условия (C2) аналогична доказательству леммы 3.2; точнее, совершенно так же, как и при доказательстве леммы 3.2, показывается, что если

$$p_{h'}\boldsymbol{u}_{h'} \to \varphi \text{ в слабой топологии } F \text{ при } h'\to 0,$$

то $\varphi=\bar{\omega}\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u},D_1\boldsymbol{u},\ \ldots,\ D_n\boldsymbol{u})$, где $\boldsymbol{u}\in H_0^1(\Omega)$. Ввиду теоремы 1.6 доказательство того, что $u\in V$, сводится к проверке того, что $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$. Как мы сейчас покажем, это следует из (3.49). Пусть σ — какая-либо пробная функция из $\mathscr{D}(\Omega)$. Предположим, что h настолько мало, что носитель σ лежит в $\Omega(h)$. Из (3.49) вытекает, что тогда

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n (\nabla_{ih}\boldsymbol{u}_{ih})(x)\right)\sigma(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

или

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^n (\nabla_{ih}\boldsymbol{u}_{ih})(x)\right)\sigma(x)\,\mathrm{d}x=0. \tag{3.56}$$

С помощью дискретной формулы интегрирования по частям легко проверить, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla_{ih}\theta)(x)\cdot\sigma(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{\mathbb{R}^n}\theta(x)(\bar{\nabla}_{ih}\sigma)(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.57}$$

Поэтому (3.56) принимает вид

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^n [u_{ih}(x)\cdot(\bar{\nabla}_{ih}\sigma)(x)]\,\mathrm{d}x=0. \tag{3.58}$$

Рассуждение, основанное на формуле Тейлора (аналогичное использованному при доказательстве леммы 3.1), показывает, что

$$\bar{\nabla}_{ih}\sigma \to -D_i\sigma \text{ при } h\to 0 \tag{3.59}$$

в (sup-норме и) L^2-норме. Так как $\boldsymbol{u}_{ih}$ сходится к $\boldsymbol{u}_i$ в слабой топологии $L^2(\mathbb{R}^n)$, то, устремляя $h\to 0$ в (3.58), мы получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\sum_{i=1}^n \boldsymbol{u}_i(x)\cdot D_i\sigma(x)\right]\mathrm{d}x=0. \tag{3.60}$$

Из этого равенства, верного для любых $\sigma\in\mathscr{D}(\Omega)$, вытекает, что $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$, а значит $\varphi=\bar{\omega}\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u}\in V$. □

Замечание 3.7. Замечание 3.5 может быть распространено на данный случай, с одним, однако, ограничением: условия (3.48)—(3.49) в определении пространств V_h не могут быть заменены аналогичными соотношениями с другими разностными операторами; например, нельзя, по-видимому, заменить (3.49) на

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ih} u_{ih}(x) = 0, \tag{3.61}$$

так как (3.61) требует много больше алгебраических соотношений, чем (3.49), и, возможно, даже слишком много соотношений (так что может получиться $V_h = \{0\}$).

Замечание 3.8. В случае когда область Ω неограничена, можно, применяя методы, упомянутые в замечании 3.5, определить некоторую устойчивую и сходящуюся внешнюю аппроксимацию пространства Y, введенного в (2.31).

3.3.5. Аппроксимация задачи Стокса. Используя построенную выше аппроксимацию пространства V и результаты п. 3.2, мы можем теперь предложить некоторую конечноразностную схему для аппроксимации задачи Стокса. Возьмем в (3.6)

$$a_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = \nu((\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h))_h, \tag{3.62}$$

$$\langle \boldsymbol{l}_h, \boldsymbol{v}_h \rangle = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h), \tag{3.63}$$

где V_h и $((\cdot, \cdot))_h$ — определенные выше пространство и скалярное произведение, а $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{f}$ те же, что и в п. 2.1. Задача, аппроксимирующая задачу (2.6), формулируется так:

Найти элемент $\boldsymbol{u}_h \in V_h$, *такой что*

$$\nu((\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h))_h = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h) \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h. \tag{3.64}$$

Предложение 3.6. *Для всех* $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}$ *решение* $\boldsymbol{u}_h$ *задачи* (3.64) *существует и единственно; при* $h \to 0$ *решение* $\boldsymbol{u}_h$ *задачи* (3.64) *сходится к решению* $\boldsymbol{u}$ *задачи* (2.6) *в следующем смысле:*

$$\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u} \quad \text{в} \quad \boldsymbol{L}^2(\Omega), \tag{3.65}$$

$$\delta_{ih}\boldsymbol{u}_h \to D_i\boldsymbol{u} \quad \text{в} \quad \boldsymbol{L}^2(\Omega). \tag{3.66}$$

Доказательство. Нам надо только проверить, что применима теорема 3.1. Выполнение условия (3.4) очевидно ($\alpha_0 = 1$); что касается условия (3.5), то заметим, что $|\langle \boldsymbol{l}_h, \boldsymbol{v}_h \rangle| = |(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h)| \leqslant \leqslant |\boldsymbol{f}| \cdot |\boldsymbol{v}_h| \leqslant$ (в силу дискретного неравенства Пуанкаре) $c(\Omega)|\boldsymbol{f}| \|\boldsymbol{v}_h\|_h \quad \forall v_h \in V_h$. Следовательно,

$$\|\boldsymbol{l}_h\|_{*h} \leqslant c(\Omega)|\boldsymbol{f}|, \tag{3.67}$$

и (3.5) выполнено.

Переходя к проверке условий (3.7)—(3.8), отметим, что $p_h\boldsymbol{v}_h \to \bar{\omega}\boldsymbol{v}$ слабо (соотв. $p_h\boldsymbol{w}_h \to \bar{\omega}\boldsymbol{w}$ сильно) означает, что $\boldsymbol{v}_h \to \boldsymbol{v}$ и $\delta_{ih}\boldsymbol{v}_h \to D_i\boldsymbol{v}$ в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ слабо (соотв. $\boldsymbol{w}_h \to \boldsymbol{w}$ и $\delta_{ih}\boldsymbol{w}_h \to D_i\boldsymbol{w}$

в $L^2(\Omega)$ сильно), и ясно, что это влечет за собой соотношения

$$(\delta_{ih}\boldsymbol{v}_h,\ \delta_{ih}\boldsymbol{w}_h) \to (D_i\boldsymbol{v},\ D_i\boldsymbol{w}),$$
$$((\boldsymbol{v}_h,\ \boldsymbol{w}_h))_h \to ((\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w})),$$
$$(\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{v}_h) \to (\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{v}). \quad \square$$

Аппроксимация давления. Мы хотим теперь представить „приближенное" давление, которое неявно содержится в (3.64), точно так же как точное давление p неявно содержится в (2.6).

Пространство V_h (см. (3.47)) является подпространством пространства W_h (см. (3.24)), а именно оно состоит из тех $\boldsymbol{v}_h \in W_h$, которые удовлетворяют линейным связям (3.48).

Форма $\boldsymbol{v}_h \mapsto \nu((\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{v}_h))_h - (\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{v}_h)$ есть линейная форма, определенная на W_h и обращающаяся в нуль на V_h. Следовательно, вводя множители Лагранжа, соответствующие линейным соотношениям (3.48), мы получим с помощью классической теоремы линейной алгебры, что существуют $\lambda_M \in \mathbb{R}$ и $M \in \mathring{\Omega}_h^1$, такие что равенство

$$\nu((\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{v}_h))_h - (\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{v}_h) = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \lambda_M \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{ih} v_{ih}(M)) \tag{3.68}$$

имеет место для любого $\boldsymbol{v}_h \in W_h$.

Введем теперь оператор $D_h \in \mathscr{L}(W_h,\ L^2(\Omega))$:

$$D_h\boldsymbol{v}_h(x) = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{ih} v_{ih}(x) \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in W_h; \tag{3.69}$$

его сопряженный $D_h^* \in \mathscr{L}(L^2(\Omega),\ W_h)$ определяется равенством

$$(D_h^*\theta,\ \boldsymbol{v}_h) = (\theta,\ D_h\boldsymbol{v}_h) \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in W_h \quad \forall \theta \in L^2(\Omega). \tag{3.70}$$

Пусть π_h—ступенчатая функция, равная нулю вне $\Omega(h) = \bigcup_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \sigma_h(M)$ и удовлетворяющая условию

$$\pi_h(x) = \pi_h(M) = \frac{\lambda_M}{h_1 \ldots h_n} \quad \forall x \in \sigma_h(M), \quad M \in \mathring{\Omega}_h^1. \tag{3.71}$$

Тогда (3.68) можно записать в виде

$$\nu((\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{v}_h))_h - (\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{v}_h) = (\pi_h,\ D_h\boldsymbol{v}_h),$$

или, эквивалентно, в виде

$$\nu((\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{v}_h))_h - (D_h^*\pi_h,\ \boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{v}_h) \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in W_h. \tag{3.72}$$

Беря последовательно $\boldsymbol{v}_h = w_{hM}\boldsymbol{e}_j$ для $M \in \mathring{\Omega}_h^1$, $j = 1, \ldots, n$, мы можем интерпретировать (3.72) следующим образом:

$$-\nu \sum_{i=1}^{n} \delta_{ih}^2 \boldsymbol{u}_h(M) + (\overline{\nabla}_h \pi_h)(M) = \boldsymbol{f}_h(M), \quad M \in \mathring{\Omega}_h^1, \tag{3.73}$$

где $\overline{\nabla}_h(\pi_h(M))$ — вектор $(\overline{\nabla}_{1h}\pi_h(M), \ldots, \overline{\nabla}_{nh}\pi_h(M))$ и

$$f_h(M)=\frac{1}{h_1\ldots h_n}\int\limits_{\sigma_h(M)} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.74}$$

Уравнения (3.73) и

$$\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{ih}u_{ih})(M)=0, \quad M\in\mathring{\Omega}_h^1, \tag{3.75}$$

представляют собой дискретную форму уравнений (2.7), (2.8); — $D_h^*\pi_h$ — „аппроксимация" $\operatorname{grad} p$; — D_h^* — дискретный оператор grad.

Замечание 3.9. Как было сказано в замечании 3.4, решить задачу (3.64) непросто, поскольку нам неизвестен никакой простой базис в V_h. В качестве одного из возможных способов решения задачи (3.64) можно было бы попытаться решить систему (3.73), (3.75), которая является линейной системой относительно неизвестных $u_{1h}(M), \ldots, u_{nh}(M), \pi_h(M), M\in\mathring{\Omega}_h^1$. Эта система имеет единственное решение с точностью до аддитивной постоянной для $\pi_h(M)$; эта неединственность затрудняет нахождение решения; кроме того, матрица этой системы плохо обусловлена.

Более эффективные способы фактического вычисления приближенного решения будут даны в § 5.

Невязка. Предположим, что точное решение удовлетворяет условиям $u\in\mathscr{C}^3(\overline{\Omega})$ и $p\in\mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$. Тогда, используя формулу Тейлора, мы получаем

$$-\nu\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ih}^2 r_h u)(M)-(\overline{\nabla}_h p)(M)=f(M)+\varepsilon_h(M), \tag{3.76}$$

где $r_h u$ — функция из V_h, определенная посредством (3.54), а $\varepsilon_h(M)$ есть „малый" вектор:

$$|\varepsilon_h(M)|\leqslant c(u, p)\,|h|, \tag{3.77}$$

где $c(u, p)$ зависит только от sup-норм третьих производных от u и вторых производных от p. Обозначим через π_h' функцию $\sum\limits_{M\in\mathring{\Omega}_h^1} p(M)w_{hM}$. Тогда равенство (3.76) эквивалентно равенству

$$\nu((r_h u, v_h))_h+(\pi_h', D_h v_h)=(f+\varepsilon_h, v_h) \tag{3.78}$$

для любого $v_h\in W_h$ (см. (3.24)) и влечет

$$\nu((r_h u, v_h))_h=(f+\varepsilon_h, v_h) \tag{3.79}$$

для любого $v_h\in V_h$. Вычитая это равенство из (3.64), мы получаем

$$\nu((u_h-r_h u, v_h))_h=(\varepsilon_h, v_h) \tag{3.80}$$

и, полагая $v_h = u_h - r_h u$, видим, что

$$\nu \| u_h - r_h u \|_h^2 = (g_h, u_h - r_h u) \leqslant c(\Omega, u, p) |h| \| u_h - r_h u \|_h.$$

Таким образом, мы получаем следующие оценки для дискретной невязки:

$$\| u_h - r_h u \|_h \leqslant \frac{1}{\nu} c(\Omega, u, p) |h|, \tag{3.81}$$

$$| u_h - r_h u | \leqslant \frac{1}{\nu} c'(\Omega, u, p) |h|. \tag{3.82}$$

§ 4. Дискретизация уравнений Стокса (II)

Мы изучим здесь дискретизацию уравнений Стокса при помощи методов конечных элементов. Результаты будут менее общие, чем в предыдущем параграфе, и будут меняться в зависимости от размерности. Мы последовательно рассмотрим следующие согласованные конечные элементы: кусочно-полиномиальные степени два в двумерном случае (п.4.2), кусочно-полиномиальные степени три в трехмерном случае (п.4.3) и кусочно-полиномиальные степени четыре в двумерном случае. В заключение мы рассмотрим одну внешнюю аппроксимацию посредством несогласованных конечных элементов для случая произвольной размерности (п.4.5).

4.1. *Предварительные результаты.* Мы будем иметь дело с кусочно-полиномиальными функциями, определенными на n-мерных симплексах. В связи с этим напомним здесь некоторые определения и введем обозначения, приспособленные к нашей ситуации.

Барицентрические координаты. Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы $n+1$ точек [1] $A_1, \ldots, A_{n+1}$ (с координатами $a_{1,i}, \ldots, 1 \leqslant i \leqslant n+1$), которые не лежат в одной гиперплоскости; это означает, что n векторов $A_1A_2, \ldots, A_1A_{n+1}$ линейно-независимы, или что матрица

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

[1] В этом параграфе, где речь идет о конечных элементах, заглавные буквы $A, B, M, P, \ldots$ (иногда с индексами) обозначают точки аффинного пространства $\mathbb{R}^n$. Парой таких букв, например AB, мы обозначаем вектор $\mathbb{R}^n$ с началом A и концом B.

невырожденна. Для любой данной точки $P \in \mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$ существуют $n+1$ вещественных чисел $\lambda_i = \lambda_i(P)$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, таких что

$$OP = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i OA_i, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \tag{4.3}$$

где O — начало координат в $\mathbb{R}^n$.

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что (4.2) и (4.3) эквивалентны линейной системе

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

которая имеет единственное решение, поскольку матрица $\mathcal{A}$ невырожденна по предположению. Числа λ_i называются *барицентрическими координатами точки P относительно $n+1$ точек* $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Согласно (4.4), числа λ_i представляют собой линейные, вообще говоря, неоднородные функции от координат $x_1, \ldots, x_n$ точки P:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j + b_{i,n+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1, \tag{4.5}$$

где матрица $\mathcal{B} = (b_{i,j})$ обратна к матрице $\mathcal{A}$. Легко видеть, что если точку O в (4.2) заменить любой другой точкой из $\mathbb{R}^n$, то значения барицентрических координат не изменятся; следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i PA_i = 0. \tag{4.6}$$

Ясно, что барицентрические координаты не зависят также и от выбора базиса в $\mathbb{R}^n$.

Выпуклой оболочкой $n+1$ точек A_i является в точности множество точек $\mathbb{R}^n$, барицентрические координаты которых удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1. \tag{4.7}$$

Эта выпуклая оболочка $\mathcal{S}$ называется *n-мерным симплексом, порожденным точками A_i, которые называются вершинами симплекса $\mathcal{S}$. Барицентр G* симплекса $\mathcal{S}$ — это точка из $\mathcal{S}$, барицентрические координаты которой все равны между собой и, следовательно, равны $1/(n+1)$; *m-мерной гранью* симплекса $\mathcal{S}$ называется всякий m-мерный симплекс $(1 \leqslant m \leqslant n-1)$, порожденный $m+1$ вершинами $\mathcal{S}$ (конечно, эти вершины не лежат ни в каком $(m-1)$-мерном подпространстве $\mathbb{R}^n$). Одномерные грани называются *ребрами*.

Двумерные симплексы $(n=2)$ являются треугольниками; вершины и ребра такого симплекса — это просто вершины и стороны треугольника. Трехмерные симплексы представляют собой тетраэдры; их двумерными гранями служат четыре треугольника, образующие границу тетраэдра.

Один интерполяционный результат.

Предложение 4.1. *Пусть $A_1, \ldots, A_{n+1}$ суть $n+1$ точек из* $\mathbb{R}^n$, *не лежащих в одной гиперплоскости. Для любых данных $n+1$ вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ существует одна и только одна линейная функция u, такая что $u(A_i)=\alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$; она задается формулой*

$$u(P)=\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \lambda_i(P) \quad \forall P \in \mathbb{R}^n, \tag{4.8}$$

где $\lambda_i(P)$ — барицентрические координаты точки P относительно точек $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

Доказательство. Пусть $u(x)=\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j+\beta_{n+1}$ — такая функция. Неизвестными здесь являются $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$, которые удовлетворяют следующим уравнениям, означающим, что $u(A_i)=\alpha_i$:

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{j,i}+\beta_{n+1}=\alpha_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1.$$

Матрицей этой системы служит матрица ${}^t\mathcal{A}$, транспонированная к $\mathcal{A}$, поэтому функция u существует и единственна. Остается проверить, что формула (4.8) задает требуемую функцию. Но, действительно, $u(A_j)=\alpha_j$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, поскольку $\lambda_i(A_j)=\delta_{ij}$ (символ Кронекера) для любых i и j. □

Замечание 4.1. Интерполяционные формулы более высоких порядков, использующих барицентрические координаты, будут даны позже (см. пп. 4.2—4.4).

Некоторые дифференциальные свойства барицентрических координат. Мы укажем здесь некоторые дифференциальные свойства барицентрических координат λ_i, рассматриваемых как функции от декартовых координат $x_1, \ldots x_n$ точки P; ниже D обозначает оператор градиента: $D=(D_1, \ldots, D_n)$.

Лемма 4.1. $$\sum_{i=1}^{n+1} D\lambda_i=0, \tag{4.9}$$

$$D\lambda_i(P)\cdot PA_j=\delta_{ij}-\lambda_i(P); \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n+1. \tag{4.10}$$

Доказательство. (4.9) немедленно вытекает из тождества (4.3). Согласно (4.5),

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_k}=b_{i,k},\quad 1\leqslant i\leqslant n+1,\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

поэтому

$$D\lambda_i(P)\cdot PA_j=D\lambda_i(P)\cdot OA_j-D\lambda_i(P)\cdot OP$$
$$=\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,j}-\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}x_k=\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,j}+b_{i,n+1}-\lambda_i$$
$$=\delta_{ij}-\lambda_i$$

(мы воспользовались тем, что $\mathcal{B}=\mathcal{A}^{-1}$). □

Лемма 4.2. *Пусть $\mathcal{S}$ — произвольный n-мерный симплекс с вершинами $A_1, \ldots A_{n+1}$ и ρ' — наименьшая верхняя граница диаметров всех шаров, содержащихся в $\mathcal{S}$. Тогда*

$$|D\lambda_i|<1/\rho',\quad 1\leqslant i\leqslant n+1, \tag{4.11}$$

где $|D\lambda_i$ — эвклидова норма n-мерного вектора $D\lambda_i$.

Доказательство. Имеем

$$|D\lambda_i|=D\lambda_i\cdot\boldsymbol{x}, \tag{4.12}$$

где $\boldsymbol{x}$ — единичный вектор, параллельный $D\lambda_i$; но мы можем записать $\boldsymbol{x}=(1/\rho')PQ$, где P и Q принадлежат $\mathcal{S}$. Обозначим через $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ барицентрические координаты точки Q относительно $A_1, \ldots, A_{n+1}$. В силу (4.2)—(4.3),

$$PQ=\sum_{j=1}^{n+1}\mu_j PA_j,\quad \sum_{j=1}^{n+1}\mu_j=1.$$

Поэтому

$$D\lambda_i\cdot\boldsymbol{x}=\frac{1}{\rho'}(D\lambda_i)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n+1}\mu_j PA_j\right)=\frac{1}{\rho'}\sum_{j=1}^{n+1}\mu_j D\lambda_i\cdot PA_j$$
$$=(\text{согласно (4.10)})\,\frac{1}{\rho'}\sum_{j=1}^{n+1}\mu_j(\delta_{ij}-\lambda_i)=\frac{1}{\rho'}(\mu_i-\lambda_i).$$

Поскольку P и Q принадлежат $\mathcal{S}$, то $0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$, $0\leqslant\mu_i\leqslant 1$ для каждого i, $1\leqslant i\leqslant n+1$, а значит, $-1\leqslant\mu_i-\lambda_i\leqslant 1$, так что $|D\lambda_i\cdot\boldsymbol{x}|\leqslant 1/\rho'$, откуда и следует (4.11). □

Нормы некоторых линейных преобразований. Пусть $\mathcal{S}$ и $\overline{\mathcal{S}}$ — два n-мерных симплекса с вершинами $A_1, \ldots, A_{n+1}$ и $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_{n+1}$. Обозначим через ρ (соотв. ρ') диаметр наименьшего шара, содержащего $\mathcal{S}$ (соотв. диаметр наибольшего шара, содержащегося в $\mathcal{S}$); обозначения $\overline{\rho}$ и $\overline{\rho}'$ имеют аналогичный смысл.

Произведя, если нужно, переносы, мы можем считать, что $A_1=\bar{A}_1=0$; обозначим через Λ линейное преобразование в $\mathbb{R}^n$, такое что

$$A_i=\Lambda\bar{A}_i, \quad 2\leqslant i\leqslant n+1. \tag{4.13}$$

Нормы операторов Λ и Λ^{-1} могут быть следующим образом оценены через ρ, ρ', $\bar{\rho}$, $\bar{\rho}'$.

Лемма 4.3. $\|\Lambda\|\leqslant\bar{\rho}/\rho'$, $\|\Lambda^{-1}\|\leqslant\rho/\bar{\rho}'$. (4.14)

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 4.2, пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$ с нормой 1. Тогда $\boldsymbol{x}=(1/\rho')PQ$, где P и Q принадлежат $\mathscr{S}$. Ясно, что $\Lambda\boldsymbol{x}=(1/\rho')\bar{P}\bar{Q}$, где $\bar{P}=\Lambda P$, $\bar{Q}=\Lambda Q$. Но $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ принадлежат $\bar{\mathscr{S}}$, поскольку

$$OP=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i OA_i, \quad 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,$$

влечет

$$\Lambda OP=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i O\bar{A}_i,$$

так что барицентрические координаты $\bar{P}$ относительно $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_{n+1}$ совпадают с барицентрическими координатами P относительно $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Следовательно, $|\bar{P}\bar{Q}|\leqslant\bar{\rho}$ и $|\Lambda\boldsymbol{x}|\leqslant\bar{\rho}/\rho'$. Первое неравенство (4.14) доказано. Второе становится очевидным, если поменять местами $\mathscr{S}$ и $\bar{\mathscr{S}}$. □

Для соленоидальных вектор-функций оказывается полезной следующая лемма.

Лемма 4.4. *Пусть $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ — соленоидальная вектор-функция, определенная на $\mathscr{S}$ (или на $\mathbb{R}^n_x$), и $\bar{\boldsymbol{x}}\to\bar{\boldsymbol{u}}(\bar{\boldsymbol{x}})$ — функция, определенная на $\bar{\mathscr{S}}$ равенством*

$$\bar{\boldsymbol{u}}(\bar{\boldsymbol{x}})=\Lambda\boldsymbol{u}(\Lambda^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}) \quad \forall\bar{\boldsymbol{x}}\in\bar{\mathscr{S}} \ (\text{или } \mathbb{R}^n_{\bar{x}}). \tag{4.15}$$

Тогда $\bar{\boldsymbol{u}}$ — также соленоидальная вектор-функция.

Доказательство. Пусть α_{ij} и β_{kl} обозначают элементы матриц Λ и Λ^{-1}. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial\bar{x}_j}(\bar{\boldsymbol{x}})&=\frac{\partial}{\partial\bar{x}_j}\sum_l\alpha_{il}u_l(\Lambda^{-1}\bar{\boldsymbol{x}})=\sum_{l,k}\alpha_{il}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial\bar{x}_j}\\&=\sum_{l,k}\alpha_{il}\beta_{kj}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}(\Lambda^{-1}\bar{\boldsymbol{x}})\end{aligned}$$

и

$$(\operatorname{div} \bar{u})(\bar{x}) = \sum_l \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial \bar{x}_l}(\bar{x}) = \sum_{i,k,l} \alpha_{il}\beta_{ki}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}(\Lambda^{-1}\bar{x})$$
$$= \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k}(\Lambda^{-1}\bar{x}) = 0. \quad \square$$

Регулярные триангуляции открытой области Ω. Пусть Ω — открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\mathscr{T}_h$ — некоторое семейство n-мерных симплексов; такое семейство будем называть *допустимой триангуляцией* области Ω, если выполнены следующие условия:

$$\Omega(h) = \bigcup_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \mathscr{S} \subset \Omega; \tag{4.16}$$

если $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}' \in \mathscr{T}_h$, то $\mathring{\mathscr{S}} \cap \mathring{\mathscr{S}}' = \varnothing$ (где $\mathring{\mathscr{S}}$ — внутренность $\mathscr{S}$ [1]) и $\mathscr{S} \cap \mathscr{S}'$ либо пусто, либо является m-мерной гранью одновременно для $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$ (для какого-либо m, $0 \leqslant m \leqslant n-1$). (4.17)

Обозначим через $\{\mathscr{T}_h\}_{h \in \mathscr{H}}$ семейство всех допустимых триангуляций области Ω; с каждой допустимой триангуляцией $\mathscr{T}_h$ мы свяжем следующие три числа:

$$\rho(h) = \sup_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \rho_{\mathscr{S}}, \tag{4.18}$$

$$\rho'(h) = \inf_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \rho'_{\mathscr{S}}, \tag{4.19}$$

$$\sigma(h) = \sup_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} (\rho_{\mathscr{S}}/\rho'_{\mathscr{S}}), \tag{4.20}$$

где, как и прежде, $\rho = \rho_{\mathscr{S}}$ — диаметр наименьшего шара, содержащего $\mathscr{S}$, а $\rho' = \rho'_{\mathscr{S}}$ — диаметр наибольшего шара, содержащегося в $\mathscr{S}$.

В методах конечных элементов нас будет интересовать переход к пределу при $\rho(h) \to 0$. Как мы увидим ниже, для получения сходящихся аппроксимаций необходимы некоторые ограничения на $\sigma(h)$.

Подсемейство семейства допустимых триангуляций $\{\mathscr{T}_h\}_{h \in \mathscr{H}}$ будем называть *регулярной триангуляцией* области Ω, если величина $\sigma(h)$ остается ограниченной при $\rho(h) \to 0$:

$$\sigma(h) \leqslant \alpha < +\infty \quad \text{при} \quad \rho(h) \to 0, \tag{4.21}$$

и $\Omega(h)$ сходится к Ω в следующем смысле:

---

[1] То есть множество точек из $\mathscr{S}$, барицентрические координаты которых относительно вершин $\mathscr{S}$ удовлетворяют соотношениям $0 < \lambda_i < 1$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$.

для каждого компактного множества $K \subset \Omega$ существует такое $\delta = \delta(K) > 0$, что $\rho(h) \leqslant \delta(K) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Omega(h) \supset K$. (4.22)

Обозначим через $\mathscr{H}_\alpha$ множество всех допустимых триангуляций Ω, удовлетворяющих условиям (4.21) и (4.22).

Замечание 4.2. В двумерном случае, когда $\mathscr{S}$ есть треугольник, известно, что

$$\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} \leqslant \frac{\rho_{\mathscr{S}}}{\rho'_{\mathscr{S}}} \leqslant \frac{2}{\sin\theta},$$

где θ — наименьший угол в $\mathscr{S}$. Условие (4.21), таким образом, означает, что наименьший угол для всех треугольников $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$ остается ограниченным снизу:

$$\theta \geqslant \theta_0 > 0. \tag{4.23}$$

Наша цель теперь — сопоставить данному регулярному семейству триангуляций $\{\mathscr{T}_h\}_{h \in \mathscr{H}_\alpha}$ области Ω различные типы аппроксимаций интересующих нас функциональных пространств.

4.2. *Конечные элементы степени* $2\,(n=2)$. Пусть Ω — липшицева открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Мы опишем одну внутреннюю аппроксимацию пространства $H_0^1(\Omega)$ (для любого n), а затем одну внешнюю аппроксимацию пространства V (только для $n=2$). Аппроксимирующие функции кусочно будут полиномами степени 2.

4.2.1. Аппроксимация пространства $H_0^1(\Omega)$. Пусть $\mathscr{T}_h$ — какая-нибудь допустимая триангуляция Ω.

Пространство W_h. Это — пространство непрерывных вектор-функций, которые равны нулю вне множества

$$\Omega(h) = \bigcup_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \mathscr{S} \tag{4.24}$$

и компоненты которых суть полиномы степени два[1] на каждом симплексе $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$. Оно является конечномерным подпространством в $H_0^1(\Omega)$. Снабдим его скалярным произведением, индуцированным из $H_0^1(\Omega)$:

$$((u_h, v_h))_h = ((u_h, v_h)) \quad \forall u_h, v_h \in W_h. \tag{4.25}$$

Базис в W_h. Как и прежде, обозначаем вершины n-мерного симплекса $\mathscr{S}$ через $A_1, \ldots, A_{n+1}$; обозначим, далее, через A_{ij} среднюю точку ребра A_iA_j.

[1] Под полиномом степени два здесь понимается полином степени меньшей или равной двум.

Прежде всего, имеет место

Лемма 4.5. *Полином степени меньшей или равной двум единственным образом определяется своими значениями в точках* A_i, A_{ij}, $1 \leqslant i$, $j \leqslant n+1$ (*вершинах и серединах ребер n-мерного симплекса* $\mathcal{S}$). *Он задается через барицентрические координаты относительно* $A_1, \ldots, A_{n+1}$ *по формуле*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n+1} (2(\lambda_i(x))^2 - \lambda_i(x))\varphi(A_i) + \\ + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n+1} \lambda_i(x)\lambda_j(x)\varphi(A_{ij}). \tag{4.26}$$

Доказательство. Покажем вначале, что (4.26) удовлетворяет указанным требованиям. Функция в правой части (4.26) есть полином степени два, поскольку $\lambda_i(x)$ — линейные (неоднородные) функции от $x_1, \ldots, x_n$ (см. (4.5)). Если обозначить эту функцию через $\psi(x)$, то

$$\psi(A_k) = \varphi(A_k), \quad \text{так как } \lambda_i(A_k) = \delta_{ik}, \quad \text{и}$$
$$\psi(A_{kl}) = \varphi(A_{kl}), \quad \text{так как } \lambda_i(A_{kl}) = (\delta_{ik} + \delta_{il})/2.$$

Таким образом, ψ — такая функция, как нужно.

Далее, полином степени два имеет вид

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i x_i + \beta_i x_i^2) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j, \tag{4.27}$$

так что φ определяется $(n+1)(n+2)/2$ неизвестными коэффициентами α_0, α_i, β_i, α_{ij}. Имеются $n+1$ точек A_i и $n(n+1)/2$ точек A_{ij}; следовательно, условия на φ

$$\varphi(A_i) \text{ заданы}, \ \varphi(A_{ij}) \text{ заданы} \tag{4.28}$$

дают $(n+1)(n+2)/2$ линейных уравнений для неизвестных коэффициентов. Согласно (4.26), эта система имеет решение для произвольного набора данных в (4.28); таким образом, эта линейная система регулярна [1] и решение, даваемое формулой (4.26), единственно. □

Теперь обозначим через $\mathcal{U}_h$ множество всех вершин и середин ребер n-мерных симплексов $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h$. Обозначим, далее, через $\mathring{\mathcal{U}}_h$ те точки из $\mathcal{U}_h$, которые принадлежат внутренности $\Omega(h)$. Согласно предыдущей лемме, в W_h имеется не более одной функции u_h, которая принимает заданные значения в точках $A \in \mathring{\mathcal{U}}_h$. В действительности справедливо более сильное утверждение.

[1] Мы используем тот хорошо известный факт, что в конечномерных пространствах линейные операторы, являющиеся операторами „на", взаимно-однозначны.

Лемма 4.6. *Существует одна и только одна функция* $\boldsymbol{u}_h \in W_h$, *принимающая заданные значения в точках* $M \in \mathring{\mathcal{U}}_h$.

Доказательство. Как мы уже видели, такая функция необходимо единственна. Далее, по лемме 4.5 существует функция $\boldsymbol{u}_h$, компоненты которой кусочно являются полиномами степени два, принимающая заданные значения в точках $M \in \mathcal{U}_h$ и равная нулю в точках $M \in \mathcal{U}_h \setminus \mathring{\mathcal{U}}_h$ и вне $\Omega(h)$. Достаточно проверить, что эта функция непрерывна. На любой $(n-1)$-мерной грани $\mathcal{S}'$ симплекса $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h$ каждая компонента u_{ih} функции $\boldsymbol{u}_h$ есть полином степени два, который имеет два (возможно, различных) значения u_{ih}^+ и u_{ih}^-. Но u_{ih}^+ и u_{ih}^- — полиномы степени не выше двух от $n-1$ переменных, совпадающие в вершинах и серединах ребер $\mathcal{S}'$; лемма 4.5, примененная к соответствующему $(n-1)$-мерному симплексу, показывает, что $u_{ih}^+ = u_{ih}^-$ на $\mathcal{S}'$. Следовательно, $\boldsymbol{u}_h$ непрерывна, а значит принадлежит W_h. □

Повторяя рассуждение из предыдущего доказательства, мы видим, что существует единственная скалярная непрерывная функция, являющаяся полиномом степени два на каждом симплексе $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h$, принимающая заданные значения в точках $M \in \mathring{\mathcal{U}}_h$ и равная нулю вне $\Omega(h)$. Обозначим через w_{hM} функцию такого типа, определенную условиями

$$w_{hM}(M) = 1, \quad w_{hM}(P) = 0 \quad \forall P \in \mathring{\mathcal{U}}_h, \; P \neq M \quad (M \in \mathring{\mathcal{U}}_h). \tag{4.29}$$

Наконец, имеет место

Лемма 4.7. *Функции* $w_{hM}\boldsymbol{e}_i$, $M \in \mathring{\mathcal{U}}_h$, $i = 1, \ldots, n$, *образуют базис в* W_h, *и размерность* W_h *равна* $nN(h)$, *где* $N(h)$ — *число точек в* $\mathring{\mathcal{U}}_h$.

Доказательство. Эти функции линейно-независимы, и ясно, что каждую функцию $\boldsymbol{u}_h \in W_h$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{u}_h(x) = \sum_{M \in \mathring{\mathcal{U}}_h} \sum_{i=1}^{n} u_{ih}(M)\, \boldsymbol{e}_i w_{hM}(x),$$

или

$$\boldsymbol{u}_h = \sum_{M \in \mathring{\mathcal{U}}_h} \boldsymbol{u}_h(M)\, w_{hM}. \quad \square \tag{4.30}$$

Оператор p_h. Оператор продолжения p_h тождествен:

$$p_h \boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}_h \quad \forall \boldsymbol{u}_h \in W_h. \tag{4.31}$$

Операторы p_h имеют норму единица и поэтому устойчивы.

Оператор r_h. Мы определим $r_h \boldsymbol{u}$ для $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$; положим

$$(r_h \boldsymbol{u})(M) = \boldsymbol{u}(M) \quad \forall M \in \mathring{\mathcal{U}}_h. \tag{4.32}$$

Предложение 4.2. *Описанная выше внутренняя аппроксимация пространства $H_0^1(\Omega)$ является устойчивой и сходящейся, если h принадлежит регулярной триангуляции $\mathcal{H}_\alpha$ области Ω.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $p_h r_h \boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}$ в $H_0^1(\Omega)$ для каждого $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$ при $\rho(h) \to 0$, $h \in \mathcal{H}_\alpha$. Если h достаточно мало, то $\Omega(h)$ содержит носитель $\boldsymbol{u}$, а тогда, в силу приводимой ниже леммы,

$$\| p_h r_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \| \leqslant c(\boldsymbol{u}) \rho^2(h) \cdot \sigma(h) \leqslant c(\boldsymbol{u}) \alpha \rho^2(h), \tag{4.33}$$

откуда и следует наше утверждение. □

Лемма 4.8. *Пусть $\mathcal{S}$ — некоторый n-мерный симплекс, φ — скалярная функция из $\mathscr{C}^3(\mathcal{S})$ и $\tilde{\varphi}$ — интерполирующий ее полином степени два, такой что*

$$\tilde{\varphi}(A_i) = \varphi(A_i), \quad \tilde{\varphi}(A_{ij}) = \varphi(A_{ij}) \text{ для } 1 \leqslant i, \ j \leqslant n+1.$$

Тогда

$$\sup_{x \in \mathcal{S}} |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leqslant c(\varphi) \rho_{\mathcal{S}}^3, \tag{4.34}$$

$$\sup_{x \in \mathcal{S}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}(x) \right| \leqslant c(\varphi) \frac{\rho_{\mathcal{S}}^3}{\rho'_{\mathcal{S}}}, \tag{4.35}$$

где $c(\varphi)$ зависит от sup*-норм третьих производных от φ.*

Эта лемма — частный случай общих теорем, касающихся полиномиальной интерполяции на симплексе в связи с конечными элементами.

Полиномиальная интерполяция на симплексе. Пусть $\mathcal{S}$ — некоторый n-мерный симплекс и $\mathscr{E}$ — конечное множество точек из $\mathcal{S}$, обладающих следующим свойством: для любого семейства заданных чисел $\gamma_M \in \mathbb{R}$, $M \in \mathscr{E}$, существует единственный полином p степени не выше k, такой что

$$p(M) = \gamma_M \quad \forall M \in \mathscr{E}. \tag{4.36}$$

Такое множество $\mathscr{E}$ будем называть, следуя Сьярле и Равьяру [1], *k-унисольвентным*; например, согласно предложению 4.1 и лемме 4.5, вершины $A_1, \ldots, A_{n+1}$ симплекса $\mathcal{S}$ образуют 1-унисольвентное множество, а точки A_i, A_{ij}, $1 \leqslant i$, $j \leqslant n+1$, образуют 2-унисольвентное множество.

Обозначим через p_i полином степени k, такой что

$$p_i(M_i) = 1, \quad p_i(M_j) = 0, \quad M_j \neq M_i, \quad M_j \in \mathscr{E}. \tag{4.37}$$

Тогда полином p в (4.36) можно записать так:

$$p = \sum_{M_i \in \mathscr{E}} \gamma_{M_i} p_i. \tag{4.38}$$

Теперь предположим, что задана функция $\varphi \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathscr{S})$, и пусть $\tilde{\varphi}$ — интерполирующий ее полином степени k, определенный условием

$$\tilde{\varphi}(M) = \varphi(M) \quad \forall M \in \mathscr{E}, \tag{4.39}$$

т. е.

$$\tilde{\varphi} = \sum_{M_i \in \mathscr{E}} \varphi(M_i) p_i. \tag{4.40}$$

Используя формулу Тейлора, можно доказать, что для любого мультииндекса
$j = (j_1, \ldots, j_n)$ с $|j| = j_1 + \ldots + j_n \leqslant k$

$$D^j \tilde{\varphi}(P) = D^j \varphi(P) + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{M_i \in \mathscr{E}} \sum_{|l| = k+1} \{D^l \varphi(P_i) \cdot M_i P^l\} \times \\ \times D^j p_i(P), \tag{4.41}$$

где P_i — некоторая точка открытого интервала (M_i, P),

$$D^l = D_1^{l_1} \ldots D_n^{l_n}, \quad M_i P^l = \varepsilon_{1_i}^{l_1} \ldots \varepsilon_{n_i}^{n}$$

для $M_i P = (\varepsilon_{1_i}, \ldots, \varepsilon_{n_i})$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$.

Отклонение $\tilde{\varphi}$ от φ оценивается на $\mathscr{S}$ так:

$$\sup_{x \in \mathscr{S}} |D^j \varphi(P) - D^j \tilde{\varphi}(P)| \leqslant c \eta_{k+1}(\varphi) \rho_{\mathscr{S}}^{k+1} / \rho_{\mathscr{S}}'^m \tag{4.42}$$

для $|j| = j_1 + \ldots + j_n = m \leqslant k$, где $\rho_{\mathscr{S}}$ и $\rho'_{\mathscr{S}}$ — величины, определенные в п. 4.1[1]. Это следует из (4.41) и следующей оценки для p_i:

$$\sup_{x \in \mathscr{S}} |D^j p_i(x)| \leqslant c/\rho_{\mathscr{S}}'^m \text{ для } |j| = m \leqslant k. \tag{4.43}$$

Доказательство соотношений (4.41) и (4.43) читатель может найти в работах: Сьярле и Равьяр [1], Равьяр [4], Стрэнг и Фикс [1]; по поводу частного случая леммы 4.8 см. также Сьярле и Уэгшолл [1].

4.2.2. Аппроксимация (АПР2) *пространства* V. Ниже Ω — открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$; мы определим некоторую внешнюю аппроксимацию пространства V.

Пространство F, *оператор* $\bar{\omega}$. Пространство F — это $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, а $\bar{\omega}$ — тождественный оператор:

$$\bar{\omega} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \quad \forall \boldsymbol{u} \in V; \tag{4.44}$$

$\bar{\omega}$ — изоморфизм из V в F.

[1] $\eta_k(\varphi) = \sup_x \sup_{|j|=k} \{|D^j \varphi(x)|\}$.

Супремум по x берется на $\mathscr{S}$; в других местах, где используется это обозначение, предполагается, что супремум берется по всему носителю φ.

Пусть $\mathcal{T}_h$ — произвольная допустимая триангуляция Ω.

Пространство V_h. Это — подпространство пространства W_h, определенного выше, а именно пространство непрерывных векторов-функций u_h, которые равны нулю вне

$$\Omega(h) = \bigcup_{\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{S}, \tag{4.45}$$

компоненты которых являются полиномами степени два на каждом симплексе $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h$ и для которых

$$\int_{\mathcal{S}} \operatorname{div} u_h \, dx = 0 \quad \forall \mathcal{S} \in \mathcal{T}_h. \tag{4.46}$$

Условие (4.46) является дискретной формой условия $\operatorname{div} u = 0$. Функции $u_h \in V_h$ принадлежат $H^1(\Omega)$, но не V; $V_h \not\subset V$. Мы не имеем в своем распоряжении никакого простого базиса для V_h; согласно лемме 4.7, любая функция $u_h \in V_h$ может быть записана в виде

$$u_h = \sum_{M \in \mathring{\mathcal{U}}_h} u_h(M) w_{hM},$$

но функции w_{hM} не принадлежат V_h. Лемма 4.7 и (4.46) показывают также, что

$$\dim V_h \leqslant 2N(h) - N'(h),$$

где $N(h)$ — число точек в $\mathring{\mathcal{U}}_h$ и $N'(h)$ — число треугольников $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h$. Снабдим пространство V_h скалярным произведением из $H_0^1(\Omega)$ (как и W_h):

$$((u_h, v_h))_h = ((u_h, v_h)). \tag{4.47}$$

Оператор p_h. Оператор p_h тождествен (напомним, что $V_h \subset H_0^1(\Omega)$). Операторы продолжения имеют норму единица и поэтому устойчивы.

Оператор r_h. Операторы сужения определить труднее, так как $r_h u$ должны удовлетворять условию (4.46). Пусть u — некоторый элемент из $\mathcal{V}$; положим

$$r_h u = u_h = u_h^1 + u_h^2, \tag{4.48}$$

где u_h^1 и u_h^2 по отдельности принадлежат W_h; u_h^1 определяется, как в (4.32), условием

$$u_h^1(M) = u(M) \quad \forall M \in \mathring{\mathcal{U}}_h. \tag{4.49}$$

Нет никаких оснований ожидать, что u_h^1 принадлежит V_h, и фактически u_h^2 будет „малой поправкой“, обеспечивающей выполнение условия $u_h^1 + u_h^2 \in V_h$. Мы определим функцию u_h^2 с помощью ее значений в точках $M \in \mathring{\mathcal{U}}_h$; если $M = A_i$ — вершина треугольника, то $\boldsymbol{u}_h^2(A_i) = 0$; если $M = A_{ij}$ — середина стороны треугольника, то, обозначая через $\mathbf{v}_{ij}$ один из двух единичных векторов, ортогональных к A_iA_j, положим

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_h^2(A_{ij}) \cdot A_iA_j = 0,\\
&\boldsymbol{u}_h^2(A_{ij}) \cdot \mathbf{v}_{ij} = -\left\{\boldsymbol{u}(A_{ij}) + \frac{1}{4}\boldsymbol{u}(A_i) + \frac{1}{4}\boldsymbol{u}(A_j)\right\} \cdot \mathbf{v}_{ij}\\
&+ \frac{3}{2}\int_0^1 \boldsymbol{u}(tA_i + (1-t)A_j) \cdot \mathbf{v}_{ij}\, dt.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Лемма 4.9. *Функция $\boldsymbol{u}_h$, определенная посредством* (4.48)—(4.50), *принадлежит V_h.*

Доказательство. Основная идея определения (4.50) состояла в том, чтобы выбрать $\boldsymbol{u}_h^2$ так, чтобы

$$\int_{A_i}^{A_j} \boldsymbol{u}_h \cdot \mathbf{v}_{ij}\, dl = \int_{A_i}^{A_j} \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{v}_{ij}\, dl. \tag{4.51}$$

Если считать уже доказанным, что (4.51) удовлетворяется, то мы имеем для любого треугольника $\mathcal{S}$

$$\int_{\mathcal{S}} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h\, dx = \int_{\partial\mathcal{S}} \boldsymbol{u}_h \cdot \mathbf{v}\, dl = \int_{\partial\mathcal{S}} \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{v}\, dl = \int_{\mathcal{S}} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, dx = 0,$$

так как $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^0$ (где $\mathbf{v}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\mathcal{S}$).

Докажем (4.51). Функция $\boldsymbol{u}_h^2$ равна

$$\boldsymbol{u}_h^2 = \sum_{\substack{M \in \mathring{\mathcal{U}}_h\\ M = A_{kl}}} \boldsymbol{u}_h^2(M)\, w_{hM}. \tag{4.52}$$

На отрезке $\overline{A_iA_j}$ функция $w_{hA_{ij}}$ — единственная из функций w_{hM} в предыдущей сумме, которая не равна тождественно нулю. Используя определение $w_{hA_{ij}}$, легко проверить, что

$$w_{hA_{ij}}(tA_i + (1-t)A_j) = 4t(1-t), \quad 0 < t < 1. \tag{4.53}$$

Аналогично

$$\boldsymbol{u}_h^1 = \sum_{M \in \mathring{\mathcal{U}}_h} \boldsymbol{u}_h^1(M)\, w_{hM},$$

где из функций w_{hM} лишь функции w_{hA_i}, w_{hA_j}, $w_{hA_{ij}}$ не равны нулю на A_iA_j. Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
&w_{hA_i}(tA_i + (1-t)A_j) = (t-1)(2t-1),\\
&w_{hA_j}(tA_i + (1-t)A_j) = t(2t-1).
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Тогда

$$\frac{1}{|A_iA_j|}\int_{A_i}^{A_j} u_h(x)\cdot v_{ij}\,dl=\int_0^1 u_h(tA_i+(1-t)A_j)\cdot v_{ij}\,dt$$

$$=\frac{2}{3}u_h^2(A_{ij})\cdot v_{ij}+\frac{2}{3}u_h^1(A_{ij})\cdot v_{ij}+\frac{1}{6}\{u_h^1(A_i)+u_h^1(A_j)\}\cdot v_{ij}$$

$$=(\text{в силу } (4.50))\int_0 u(tA_i+(1-t)A_j)\cdot v_{ij}\,dt$$

$$=\frac{1}{|A_iA_j|}\int_{A_i}^{A_j} u(x)\cdot v_{ij}\,dl. \quad \Box$$

Предложение 4.3. *Описанная выше внешняя аппроксимация пространства V является устойчивой и сходящейся, при условии что h пробегает некоторую регулярную триангуляцию $\mathscr{H}_\alpha$ области Ω.*

Доказательство. Проверим вначале выполнение условия (C2) из определения 3.6. Нам надо показать, что если последовательность $p_{h'}u_{h'}$, $u_{h'}\in V_{h'}$, слабо сходится к φ в F, то $\varphi=u\in V$. По теореме 1.6 достаточно установить, что

$$\operatorname{div} u=0. \tag{4.55}$$

Пусть θ — произвольная функция из $\mathscr{D}(\Omega)$; в силу (4.46),

$$\int_\Omega (\operatorname{div} u_h)\,\theta_h\,dx=0, \tag{4.56}$$

где θ_h — определенная выше ступенчатая функция, равная на каждом симплексе $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$ среднему значению θ на $\mathscr{S}$ и равная нулю вне $\Omega(h)$. Легко видеть, что, когда $\operatorname{supp}\theta\subset\Omega(h)$,

$$\sup_{x\in\Omega}|\theta_h(x)-\theta(x)|\leqslant c(\theta)\,\rho(h),$$

так что θ_h сходится к θ в L^∞-и L^2-нормах; таким образом, мы можем перейти к пределу в (4.56) и получить

$$\int_\Omega \operatorname{div} u\cdot\theta\,dx=0\quad\forall\ \theta\in\mathscr{D}(\Omega),$$

чем и доказано (4.55).

Условие (C1) из определения 3.6 таково:

$$\lim_{h\to 0} p_h r_h u=\overline{\omega}u\qquad\forall u\in\mathscr{V}. \tag{4.57}$$

Это эквивалентно тому, что

$$\lim_{h\to 0}\|u-r_h u\|=0\qquad\forall u\in\mathscr{V}. \tag{4.58}$$

Предположим, что $\rho(h)$ настолько мало, что $\Omega(h)$ содержит носитель $\boldsymbol{u}$. В силу леммы 4.8 и (4.42), на каждом треугольнике $\mathcal{S}\in\mathcal{T}_h$

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathcal{S}}|\boldsymbol{u}(x)-\boldsymbol{u}_h^1(x)|\leqslant c\eta_3(\boldsymbol{u})\rho^3_{\mathcal{S}},\\&\sup_{x\in\mathcal{S}}|D_i\boldsymbol{u}(x)-D_i\boldsymbol{u}_h^1(x)|\leqslant c\eta_3(\boldsymbol{u})\rho^3_{\mathcal{S}}/\rho'_{\mathcal{S}}.\end{aligned}\tag{4.59}$$

Из доказательства леммы 4.9 вытекает, что

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\boldsymbol{u}_h^2(A_{ij})\cdot\mathbf{v}_{ij}&=\frac{1}{|A_iA_j|}\int_{A_i}^{A_j}\boldsymbol{u}_h^2(x)\cdot\mathbf{v}_{ij}\,\mathrm{d}l=\frac{1}{|A_iA_j|}\int_{A_i}^{A_j}[\boldsymbol{u}(x)-\boldsymbol{u}_h^1(x)]\mathbf{v}_{ij}\,\mathrm{d}l\\&=\int_0^1(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^1)(tA_i+(1-t)A_j)\cdot\mathbf{v}_{ij}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4.60}$$

Следовательно, оценивая (4.60) с помощью (4.59), получаем

$$|\boldsymbol{u}_h^2(A_{ij})|=|\boldsymbol{u}_h^2(A_{ij})\cdot\mathbf{v}_{ij}|\leqslant c\eta_3(\boldsymbol{u})\rho^3_{\mathcal{S}}.\tag{4.61}$$

Далее, согласно (4.43), мы имеем

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathcal{S}}|w_{hM}(x)|\leqslant c,\\&\sup_{x\in\mathcal{S}}|D_iw_{hM}(x)|\leqslant c/\rho'_{\mathcal{S}},\quad i=1,\ \ldots,\ n.\end{aligned}\tag{4.62}$$

Комбинируя (4.61)—(4.62) с (4.52), приходим к оценкам

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathcal{S}}|\boldsymbol{u}_h^2(x)|\leqslant c\eta_3(\boldsymbol{u})\rho^3_{\mathcal{S}},\\&\sup_{x\in\mathcal{S}}|D_i\boldsymbol{u}_h^2(x)|\leqslant c\eta_3(\boldsymbol{u})\rho^3_{\mathcal{S}}/\rho'_{\mathcal{S}}.\end{aligned}\tag{4.63}$$

Наконец, объединяя (4.59) и последние неравенства, видим, что

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\Omega}|\boldsymbol{u}(x)-\boldsymbol{u}_h(x)|\leqslant c\eta_3(\boldsymbol{u})\rho(h)^3,\\&\sup_{x\in\Omega}|D_i\boldsymbol{u}(x)-D_i\boldsymbol{u}_h(x)|\leqslant c\eta_3(\boldsymbol{u})\rho(h)^2\sigma(h)\\&\leqslant c\eta_3(\boldsymbol{u})\alpha\rho(h)^2.\quad\square\end{aligned}\tag{4.64}$$

Замечание 4.3. Если Ω — многоугольник, то можно выбрать триангуляцию $\mathcal{T}_h$ так, чтобы $\Omega(h)=\Omega$, что обычно и делается в практических вычислениях. В этом случае мы можем провести предыдущие выкладки для произвольной функции $\boldsymbol{u}\in H_0^1(\Omega)\cap\mathscr{C}^3(\overline{\Omega})$ и получить

$$\|\boldsymbol{u}-r_h\boldsymbol{u}\|\leqslant c\eta_3(\boldsymbol{u})\sigma(h)\rho(h)^2.\tag{4.65}$$

4.2.3. Аппроксимация задачи Стокса. Используя описанную выше аппроксимацию пространства V и результаты п. 3.2, мы можем теперь предложить одну конечно-элементную схему для аппроксимации двумерной задачи Стокса.

Возьмем в (3.6)

$$a_h(u_h, v_h) = \nu((u_h, v_h)), \quad \langle l_h, v_h\rangle = (f, v_h), \tag{4.66}$$

где v и f такие же, как и в. 2.1 (см. теорему 2.1).

Аппроксимирующая задача (3.6) принимает тогда вид

$$\begin{aligned} &\textit{найти} \quad u_h \in V_h, \quad \textit{такое} \quad \textit{что} \quad \nu((u_h, v_h)) = \\ &= (f, v_h) \ \forall v_h \in V_h. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Решение u_h задачи (4.67) существует и единственно; более того, имеет место

Предложение 4.4. *Если* $\rho(h) \to 0$ и $\sigma(h) \leqslant \alpha$ (*т.е.* $h \in \mathscr{H}_\alpha$), *то решение* u_h *задачи* (4.67) *сходится к решению* u *задачи* (2.6) *в норме* $H_0^1(\Omega)$.

Доказательство. Легко видеть, что теорема 3.1 применима в этом случае и в точности дает утверждаемый результат о сходимости. □

Аппроксимация давления. Мы введем аппроксимацию давления, как в п. 3.3.

Форма $v_h \mapsto \nu((u_h, v_h)) - (f, v_h)$ является линейной формой на W_h, обращающейся в нуль на V_h. Поскольку V_h характеризуется набором линейных связей (4.46), то, как известно, существует семейство чисел $\lambda_{\mathscr{S}}$, $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$,— множителей Лагранжа, ассоциированных со связями (4.46),— таких что

$$\nu((u_h, v_h)) - (f, v_h) = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \lambda_{\mathscr{S}} \left(\int_{\mathscr{S}} \operatorname{div} v_h \, dx \right) \quad \forall v_h \in W_h. \tag{4.68}$$

Пусть $\chi_{h\mathscr{S}}$ обозначает характеристическую функцию треугольника $\mathscr{S}$, а π_h — ступенчатую функцию

$$\pi_h = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \pi_h(\mathscr{S}) \chi_{h\mathscr{S}}, \quad \pi_h(\mathscr{S}) = \pi\mathscr{S}/\operatorname{mes}\mathscr{S}. \tag{4.69}$$

Тогда мы имеем уравнение

$$\nu((u_h, v_h)) - (\pi_h, \operatorname{div} v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in W_h, \tag{4.70}$$

представляющее собой дискретный аналог уравнения

$$\nu((u, v)) - (p, \operatorname{div} v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.71}$$

Замечание 4.4. Поскольку базис пространства V_h нам неизвестен, решить задачу (4 67) непросто. Эффективные вычислительные алгоритмы будут приведены в § 5.

Невязка между u и u_h. Предположим, что границей Ω является многоугольник ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) и что $u \in \mathscr{C}^3(\overline{\Omega})$, а $p \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$. Тогда, согласно замечанию 4.3,

$$\| u - r_h u \| \leqslant c(u, \alpha)\, \rho(h)^2. \tag{4.72}$$

Мы можем положить $v = v_h = u_h - r_h u$ в (4.70) и (4.71); вычитая (4.71) из (4.70), получим

$$\nu((u_h - u,\ u_h - r_h u)) = (\pi_h - p,\ \operatorname{div}(u_h - r_h u)). \tag{4.73}$$

Пусть π'_h обозначает ступенчатую функцию

$$\pi'_h = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \frac{1}{\operatorname{mes} \mathscr{S}} \left(\int_{\mathscr{S}} p(x) \mathrm{d}x \right) \chi_{h\mathscr{S}}. \tag{4.74}$$

Тогда правая часть (4.73) равна $(\pi'_h - p,\ \operatorname{div}(u_h - r_h u))$ и оценивается величиной

$$|\pi'_h - p| \cdot |\operatorname{div}(u_h - r_h u)| \leqslant |\pi'_h - p|\ \|u_h - r_h u\|.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} \nu((u_h - u,\ u_h - r_h u)) \leqslant |\pi'_h - p|\,\|u_h - r_h u\|, \\ \nu\|u_h - r_h u\|^2 \leqslant \{|\pi'_h - p| + \nu\|u - r_h u\|\}\,\|u_h - r_h u\|, \\ \|u_h - r_h u\| \leqslant \nu^{-1}|\pi'_h - p| + \|u - r_h u\|. \end{gathered} \tag{4.75}$$

Легко видеть, что $|\pi'_h - p|$ оценивается величиной $c\ \eta_1(p)\rho(h)$, и поэтому мы имеем, во всяком случае,

$$\left.\begin{aligned} &\|u_h - r_h u\| \leqslant c(u,\ p)\rho(h), \\ &\|u_h - u\| \leqslant c(u,\ p)\rho(h), \end{aligned}\right. \tag{4.76}$$

а следовательно, в силу (4.64),

$$\|u_h - u\| \leqslant c\eta_1(u,\ p)\rho(h). \tag{4.77}$$

Если граница Ω — не многоугольник, то, как обычно, в правых частях (4.76), (4.77) появляется некоторая дополнительная ошибка порядка $\rho(h)$.

Замечание 4.5. Оценка (4.77) неудовлетворительна, так как она означает, что невязка между u и u_h имеет порядок $\rho(h)$ (в норме $H_0^1(\Omega)$), в то время как расстояние между u и V_h имеет порядок $\rho(h)^2$, поскольку это расстояние оценивается величиной $\|u - r_h u\|$ (см. (4.64)). Нам неизвестно, является ли это следствием того факта, что оценка (4.76) неоптимальна, или, действительно, ошибка $\|u - u_h\|$ имеет порядок $\rho(h)$. Цель следующего подпункта — построить улучшенный алгоритм, позволяющий получить приближенное решение, для которого ошибка в норме $H_0^1(\Omega)$ наверняка порядка $\rho(h)^2$.

4.2.4. Использование функций-колоколов. Мы приведем здесь еще одну аппроксимацию пространств $H_0^1(\Omega)$ и V, приводящую к алгоритму аппроксимации задача Стокса, который слегка отличается от (4.67) и для которого ошибка имеет оптимальный порядок (см. замечание 4.5). Соответствующая аппроксимация пространства V обозначается через (АПР2′), а аппроксимирующие пространства обозначаются через $\tilde{W}_h$, $\tilde{V}_h$, ...; для пространств, введенных при изучении аппроксимации (АПР2), мы сохраняем обозначения W_h, V_h, ...

Аппроксимация пространства $H_0^1(\Omega)$. Пусть Ω — открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ и $\mathscr{T}_h$ — какая-либо допустимая триангуляция Ω.

Пространство $\tilde{W}_h$ — это пространство непрерывных вектор-функций, которые равны нулю вне $\Omega(h)$ и компоненты которых на каждом треугольнике $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$ равны сумме некоторого полинома степени 2 и так называемой функции-колокола: *функция-колокол*[1] на $\mathscr{S}$ — это функция

$$\beta(x)=\lambda_1(x)\lambda_2(x)\lambda_3(x),$$

где λ_i — барицентрические координаты относительно вершин $\mathscr{S}$. Заметим, что $\beta(x)=0$ на $\partial\mathscr{S}$ и $\beta(x)>0$ внутри $\mathscr{S}$. График β похож на колокол, прикрепленный к границе $\mathscr{S}$.

Для каждого $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$ обозначим через $\beta_{h\mathscr{S}}$ непрерывную вещественнозначную функцию на Ω, равную функции-колоколу на $\mathscr{S}$ и нулю вне $\mathscr{S}$. Пусть $\mathscr{B}_h$ — пространство всех функций вида

$$x\mapsto\sum_{\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h}\sigma_h(\mathscr{S})\beta_{h\mathscr{S}}(x),\quad \sigma_h(\mathscr{S})\in\mathbb{R}^2. \tag{4.78}$$

Тогда пространство $\tilde{W}_h$ можно записать как сумму

$$\tilde{W}_h=W_h+\mathscr{B}_h, \tag{4.79}$$

где W_h — пространство, введенное в п. 4.2.1. Поскольку $W_h\cap\cap\mathscr{B}_h=\{0\}$, то произвольный элемент $\tilde{\boldsymbol{v}}_h$ из $\tilde{W}_h$ допускает единственное разложение вида

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_h=\boldsymbol{v}_h+\boldsymbol{t}_h,\quad \boldsymbol{v}_h\in W_h,\quad \boldsymbol{t}_h\in\mathscr{B}_h. \tag{4.80}$$

Снабдим пространство $\tilde{W}_h$ (вложенное в $H_0^1(\Omega)$) скалярным произведением, индуцированным из $H_0^1(\Omega)$:

$$((\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\tilde{\boldsymbol{v}}_h))=((\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\tilde{\boldsymbol{v}}_h))\quad\forall\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\ \tilde{\boldsymbol{v}}_h\in\tilde{W}_h. \tag{4.81}$$

Возьмем p_h равным тождественному оператору и определим $r_h\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}\in\mathscr{D}(\Omega)$, просто положив

$$r_h\boldsymbol{u}\in W_h\ (\subset\tilde{W}_h),\quad r_h\boldsymbol{u}(M)=\boldsymbol{u}(M)\quad\forall M\in\mathring{\mathscr{U}}_h.$$

Тогда из доказательства предложения 4.2 немедленно следует

Предложение 4.5. *Описанная выше внутренняя аппроксимация пространства $H_0^1(\Omega)$ является устойчивой и сходящейся, при условии что h пробегает некоторую регулярную триангуляцию $\mathscr{H}_\alpha$ области Ω.*

Аппроксимация пространства V (АПР2′). Как и ранее, пространство F — это $H_0^1(\Omega)$ и оператор ω тождествен: $\omega\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ $\forall\boldsymbol{u}\in V$;

[1] В оригинале bulb function.— *Прим. перев.*

$\bar{\omega}$ — изоморфизм из V в F. Пусть $\mathcal{T}_h$ — некоторая допустимая триангуляция Ω.

Пространство $\tilde{V}_h$. Это — некоторое подпространство пространства $\tilde{W}_h$, а именно пространство всех функций $\tilde{u}_h \in \tilde{W}_h$, таких что (ср. (4.46))

$$\text{для любой линейной функции } q$$
$$\int_{\mathcal{S}} q \operatorname{div} \tilde{u}_h \, dx = 0 \quad \forall \mathcal{S} \in \mathcal{T}_h. \tag{4.82}$$

Хотя пространство W_h, очевидно, вложено в $\tilde{W}_h$, пространство V_h не содержится в $\tilde{V}_h$; функции из $\tilde{V}_h$ — более общего вида (из-за наличия функции-колокола), но они удовлетворяют алгебраическим соотношениям (4.82), которые более ограничительны, чем (4.46). Мы укажем позже некоторые весьма специальные связи между пространствами V_h и $\tilde{V}_h$ и, в частности, покажем, что $\dim V_h = \dim \tilde{V}_h$.

Снабдим пространство $\tilde{V}_h$, вложенное в $H_0^1(\Omega)$, скалярным произведением (4.81).

Оператор p_h. Оператор p_h тождествен. Операторы продолжения имеют норму единица и поэтому устойчивы.

Оператор r_h. Операторы сужения будем обозначать через $\tilde{r}_h$. Они строятся довольно сложным образом. Пусть u — некоторый элемент из $\mathcal{V}$; положим

$$\tilde{r}_h u = \tilde{u}_h = u_h + t_h, \tag{4.83}$$

где $u_h + t_h$ — разложение (4.80) элемента $\tilde{r}_h u$; определим u_h формулой

$$u_h = r_h u, \tag{4.84}$$

где r_h — оператор сужения для аппроксимации (АПР2) (см. п. 4.22). Остается выбрать $t_h \in \mathcal{B}_h$, такое что $u_h + t_h \in \tilde{V}_h$. Нижеследующая лемма показывает, что условие (4.82) определяет единственный элемент t_h и что

$$t_h = \sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h} \sigma_h(\mathcal{S}) \beta_{h\mathcal{S}}, \tag{4.85}$$

$$\sigma_{h_i}(\mathcal{S}) = \frac{60}{\operatorname{mes} \mathcal{S}} \left\{ \int_{\partial \mathcal{S}} x_i (u_h \cdot \nu) \, d\Gamma - \int_{\mathcal{S}} u_{h_i} \, dx \right\}, \quad i = 1, 2. \tag{4.86}$$

Лемма 4.10. *Определенный с помощью соотношений* (4.83)—(4.86) *элемент* u_h *принадлежит* $\tilde{V}_h$.

Доказательство. Нам надо показать, что (4.82) выполняется для $q(x) = 1, x_1, x_2$ и для каждого $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h$. В случае $q = 1$ заметим, что

$$\int_{\mathcal{S}} \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{u}}_h \, dx = \int_{\mathcal{S}} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h \, dx + \int_{\mathcal{S}} \operatorname{div} \boldsymbol{t}_h \, dx;$$

интеграл $\int_{\mathcal{S}} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h \, dx$ равен нулю, поскольку $\boldsymbol{u}_h = r_h \boldsymbol{u} \in V_h$ и

$$\int_{\mathcal{S}} \operatorname{div} \boldsymbol{t}_h \, dx = \int_{\partial\mathcal{S}} \boldsymbol{t}_h \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\Gamma$$

обращается в нуль для каждой функции-колокола $\boldsymbol{t}_h \in \mathcal{B}_h$, так как $\boldsymbol{t}_h = 0$ на $\partial\mathcal{S}$.

Теперь проверим выполнение условия (4.82) для $q = x_i$, $i = 1, 2$. В этом случае его можно записать так:

$$0 = \int_{\mathcal{S}} x_i \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{u}}_h \, dx = \int_{\mathcal{S}} x_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h \, dx + \int_{\mathcal{S}} x_i \operatorname{div} \boldsymbol{t}_h \, dx, \tag{4.87}$$

или, поскольку $\beta_{h\mathcal{S}}$ равно нулю вне $\mathcal{S}$,

$$\int_{\mathcal{S}} x_i \operatorname{div} (\sigma_h (\mathcal{S}) \beta_{h\mathcal{S}}) \, dx = - \int_{\mathcal{S}} x_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h \, dx,$$

$$\int_{\mathcal{S}} x_i \left(\sigma_{h_1} (\mathcal{S}) \frac{\partial \beta_{h\mathcal{S}}}{\partial x_1} + \sigma_{h_2} (\mathcal{S}) \frac{\partial \beta_{h\mathcal{S}}}{\partial x_2} \right) dx$$

$$= - \int_{\mathcal{S}} \operatorname{div} (x_i \boldsymbol{u}_h) \, dx + \int_{\mathcal{S}} u_{h_i} \, dx = - \int_{\partial\mathcal{S}} x_i \boldsymbol{u}_h \boldsymbol{\nu} \, d\Gamma + \int_{\mathcal{S}} u_{h_i} \, dx.$$

Для того чтобы преобразовать левую часть последнего равенства, заметим, что

$$\int_{\mathcal{S}} x_i \frac{\partial \beta_{h\mathcal{S}}}{\partial x_j} \, dx = \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i \beta_{h\mathcal{S}}) \, dx - \delta_{ij} \int_{\mathcal{S}} \beta_{h\mathcal{S}} \, dx$$

(δ_{ij} — символ Кронекера). Применяя формулу Грина и учитывая тот факт, что $\beta_{h\mathcal{S}} = 0$ на $\partial\mathcal{S}$, получаем отсюда

$$\int_{\mathcal{S}} x_i \frac{\partial \beta_{h\mathcal{S}}}{\partial x_j} \, dx = - \delta_{ij} \int_{\mathcal{S}} \beta_{h\mathcal{S}} \, dx;$$

согласно нижеследующей лемме, эта величина равна $-60^{-1} (\operatorname{mes} \mathcal{S}) \delta_{ij}$. Окончательно, требуемое соотношение эквивалентно соотношению

$$\frac{\operatorname{mes} \mathcal{S}}{60} \sigma_{h_j} (\mathcal{S}) = \int_{\partial\mathcal{S}} x_i (\boldsymbol{u}_h \cdot \boldsymbol{\nu}) \, dx - \int_{\mathcal{S}} u_{h_i} \, dx, \quad j = 1, 2,$$

которое в точности совпадает с (4.86). □

В этом доказательстве мы использовали следующий результат.

Лемма 4.11. $\int\limits_{\mathscr{S}} \beta_{h\mathscr{S}}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{mes}\mathscr{S}}{60}$. (4.88)

Доказательство. $\beta_{h\mathscr{S}}(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)\lambda_3(x)$ для $x \in \mathscr{S}$, где λ_i — барицентрические координаты относительно вершин $\mathscr{S}$. Рассмотрим линейное преобразование Λ в $\mathbb{R}^2$, действующее по правилу $x = (x_1, x_2) \mapsto \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x))$; оно переводит $\mathscr{S}$ в треугольник

$$\bar{\mathscr{S}} = \{\bar{x};\ 0 \leqslant \bar{x}_i,\ i = 1, 2,\ \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \leqslant 1\}.$$

Имеем $\mathrm{d}x = J\,\mathrm{d}\bar{x}$, где J обозначает якобиан Λ,

$$J = \frac{\int\limits_{\mathscr{S}} \mathrm{d}x}{\int\limits_{\bar{\mathscr{S}}} \mathrm{d}\bar{x}} = \frac{\operatorname{mes}\mathscr{S}}{\operatorname{mes}\bar{\mathscr{S}}} = 2\operatorname{mes}\mathscr{S}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathscr{S}} \beta_{h\mathscr{S}}(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\bar{\mathscr{S}}} \bar{x}_1\bar{x}_2(1 - \bar{x}_1 - \bar{x}_2)\,J\,\mathrm{d}\bar{x}.$$

Интеграл $\int\limits_{\bar{\mathscr{S}}} \bar{x}_1\bar{x}_2(1 - \bar{x}_1 - \bar{x}_2)\,\mathrm{d}\bar{x}$ вычисляется элементарно; он равен 1/120, откуда и следует (4.88). □

Предложение 4.6. *Описанная выше внешняя аппроксимация пространства V является устойчивой и сходящейся, при условии что h пробегает некоторую регулярную триангуляцию $\mathscr{H}_\alpha$ области Ω.*

Доказательство. Условие (C2) из определения 3.6 проверяется точно так же, как и в случае предложения 4.3. Выполнение условия (C1) из определения 3.7 будет доказано, если мы установим, что $\lim\limits_{h\to 0}\|u - \tilde{r}_h u\| = 0\ \forall u \in \mathscr{V}$.

Ввиду (4.58) и определения $\tilde{r}_h$, для этого достаточно показать, что

$$\lim_{h\to 0}\|t_h\| = 0, \tag{4.89}$$

где t_h определено посредством (4.85), (4.86). Поскольку $\operatorname{div} u = 0$, то

$$\int\limits_{\partial\mathscr{S}} x_i(u, \nu)\,\mathrm{d}\Gamma = \int\limits_{\mathscr{S}} \operatorname{div}(x_i u)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathscr{S}} u_i\,\mathrm{d}x;$$

это дает другое (эквивалентное) выражение для σ_{h_i}:

$$\sigma_{h_i}(\mathscr{S}) = \frac{60}{\operatorname{mes}\mathscr{S}}\left\{\int\limits_{\partial\mathscr{S}} x_i(u_h - u)\cdot\nu\,\mathrm{d}\Gamma - \int\limits_{\mathscr{S}}(u_{h_i} - u_i)\,\mathrm{d}x\right\},$$
$$i = 1, 2. \tag{4.90}$$

Из оценок, полученных при доказательстве предложения 4.3, вытекает, что

$$\sup_{x\in\mathcal{S}} |u_h(x)-u(x)| \leqslant c'\eta_3(u)\rho^3_{\mathcal{S}}. \tag{4.91}$$

Комбинируя (4.90) с (4.91), находим, что

$$|\sigma_{h_i}(\mathcal{S})| \leqslant \frac{c''\eta_3(u)}{\operatorname{mes}\mathcal{S}}\left(3+\frac{\pi^2}{4}\right)\rho^5_{\mathcal{S}}\left(\text{ибо } \frac{\pi}{4}\rho'^2_{\mathcal{S}}\leqslant \operatorname{mes}\mathcal{S}\right)$$

$$\leqslant c'''\eta_3(u)\frac{\rho^5_{\mathcal{S}}}{\rho'^2_{\mathcal{S}}}, \tag{4.92}$$

$$|\sigma_h(\mathcal{S})| \leqslant c\alpha^2\eta_3(u)\rho^3_{\mathcal{S}}.$$

Теперь можно оценить $\|t_h\|$. Мы имеем на $\mathcal{S}$

$$Dt_h = \sigma_h(\mathcal{S})[D\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3+\lambda_1\cdot D\lambda_2\cdot\lambda_3+\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot D\lambda_3],$$

и так как $|\lambda_i(x)|\leqslant 1$ и $|D\lambda_i|\leqslant 1/\rho'_{\mathcal{S}}$ (см. (4.11), то

$$|Dt_h| \leqslant c\alpha^2\eta_3(u)\rho^3_{\mathcal{S}}/\rho'_{\mathcal{S}} \leqslant c\alpha^3\eta_3(u)\rho(h)^2,$$

$$\int_\Omega |Dt_h|^2\,dx \leqslant c^2\alpha^6\eta_3^2(u)\rho(h)^4(\operatorname{mes}\Omega). \tag{4.93}$$

В результате получаем

$$\|t_h\| = |Dt_h|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\alpha^3\eta_3(u)\rho(h)^2, \tag{4.94}$$

и (4.89) доказано. □

Замечание 4.6. Из (4.83) и оценок (4.59), (4.63), (4.93) вытекает, что при достаточно малых h

$$\left.\begin{aligned}&\sup_{x\in\Omega}|u(x)-\tilde r_h u(x)| \leqslant c\eta_3(u)(1+\alpha^3)\rho(h)^3,\\ &\sup_{x\in\Omega}|D_i u(x)-D_i\tilde r_h u(x)| \leqslant c\eta_3(u)\,\alpha(1+\alpha^3)\rho(h)^2,\end{aligned}\right. \tag{4.95}$$

$\forall u\in\mathcal{V}$, $i=1,\ldots,n$. Если $\Omega=\Omega(h)$, то соотношения (4.95) справедливы для каждого $u\in V\cap\mathscr{C}^3(\bar\Omega)$, и мы имеем, в частности,

$$\|u-\tilde r_h u\| \leqslant c\eta_3(u)\,\alpha(1+\alpha^3)\rho(h)^2. \tag{4.96}$$

Аппроксимация задачи Стокса. Используя описанную выше аппроксимацию пространства V и результаты п. 3.2, мы можем предложить другую конечно-элементную схему для аппроксимации двумерной задачи Стокса.

Возьмем в (3.6)

$$a_h(\tilde u_h, \tilde v_h) = \nu((\tilde u_h, \tilde v_h)), \tag{4.97}$$

$$\langle l_h, \tilde v_h\rangle = (f, \tilde v_h). \tag{4.98}$$

Аппроксимирующая задача (3.6) принимает тогда вид

$$\text{найти } \boldsymbol{u}_h \in \tilde{V}_h, \text{ такое что } \nu((\tilde{\boldsymbol{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{v}}_h)) = (\boldsymbol{f}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) \ \forall \tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{V}_h. \tag{4.99}$$

Решение задачи (4.99) существует и единственно; более того, применяя теорему 3.1, мы получаем следующий результат о сходимости.

Предложение 4.7. *Если* $\rho(h) \to 0$ *и* $\sigma(h) \leqslant \alpha$ *(т.е.* $h \in \mathcal{H}_\alpha$*), то решение* $\tilde{\boldsymbol{u}}_h$ *задачи* (4.99) *сходится к решению* $\boldsymbol{u}$ *задачи* (2.6) *в норме* $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Преимущества этой схемы перед схемой (4.67) будут видны после того, как мы опишем аппроксимацию давления и дадим оценку ошибки.

Аппроксимация давления. Введем аппроксимацию давления так же, как и в (4.70), причем приближенное давление π_h будет теперь функцией, кусочно-линейной на каждом треугольнике $\mathcal{S}$.

Форма $\tilde{\boldsymbol{v}}_h \mapsto \nu((\tilde{\boldsymbol{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{v}}_h)) - (\boldsymbol{f}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h)$ есть линейная форма на $\tilde{W}_h$, равная нулю на $\tilde{V}_h$. Так как $\tilde{V}_h$ характеризуется набором линейных связей (4.82), где $q = 1, x_1, x_2$, то существует семейство множителей Лагранжа $\lambda^i_{\mathcal{S}}$, $i = 0, 1, 2$, $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h$, таких что

$$\nu((\tilde{\boldsymbol{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{v}}_h)) - (\boldsymbol{f}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) = \sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h} \lambda^0_{\mathcal{S}} \left(\int_{\mathcal{S}} \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, dx \right) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h} \lambda^i_{\mathcal{S}} \left(\int x_i \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, dx \right).$$

Пусть $\tilde{\pi}_h$ обозначает скалярную функцию на Ω, равную нулю вне $\Omega(h)$ и равную $\overset{0}{\mathcal{S}} + x_1\lambda^1_{\mathcal{S}} + x_2\lambda^2_{\mathcal{S}}$ п. в. на каждом $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h$. Тогда правая часть последнего соотношения равна

$$\int_{\Omega} \tilde{\pi}_h \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, dx = (\tilde{\pi}_h, \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{v}}_h),$$

и мы имеем

$$\nu((\tilde{\boldsymbol{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{v}}_h)) - (\tilde{\pi}_h, \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{v}}_h) = (\boldsymbol{f}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h), \quad \forall \tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{W}_h; \tag{4.100}$$

это соотношение снова является дискретным аналогом (4.71).

Невязка между $\boldsymbol{u}$ *и* $\tilde{\boldsymbol{u}}_h$. Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ имеет границей многоугольник, $\Omega = \Omega(h)$, $\boldsymbol{u} \in \mathscr{C}^3(\bar{\Omega})$, $p \in \mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$. Тогда, согласно замечанию 4.6,

$$\| \boldsymbol{u} - \tilde{r}_h \boldsymbol{u} \| \leqslant c(\boldsymbol{u}, \alpha) \rho(h)^2. \tag{4.101}$$

Положим $\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{v}}_h = \tilde{\boldsymbol{u}}_h - \tilde{r}_h \boldsymbol{u}$ в (4.100) и (4.71). Вычитая (4.71) из (4.100), получаем

$$\nu((\tilde{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{u}}_h - \tilde{r}_h \boldsymbol{u})) = (\tilde{\pi}_h - p, \operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{u}}_h - \tilde{r}_h \boldsymbol{u})). \tag{4.102}$$

Обозначим через π'_h кусочно-линейную функцию, на каждом треугольнике $\mathscr{S}$ равную

$$p(G)+(x-G)\cdot\nabla p(G),$$

где G — барицентр (центр тяжести) $\mathscr{S}$. В силу формулы Тейлора,

$$\sup_{x\in\mathscr{S}}|\pi'_h(x)-p(x)|\leqslant c(p)\rho^2_{\mathscr{S}},$$
$$\sup_{x\in\Omega}|\pi'_h(x)-p(x)|\leqslant c(p)\rho(h)^2. \tag{4.103}$$

Однако правая часть (4.102) равна $(\pi'_h-p,\ \operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\tilde{r}_h\boldsymbol{u}))$, а учитывая (4.103), мы можем оценить модуль этого выражения величиной

$$|\pi'_h-p||\operatorname{div}(\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\tilde{r}_h\boldsymbol{u})|\leqslant|\pi'_h-p|\cdot\|\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\tilde{r}_h\boldsymbol{u}\|$$
$$\leqslant c(p)\rho(h)^2\|\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\tilde{r}_h\boldsymbol{u}\|.$$

Следовательно,

$$\nu\|\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\tilde{r}_h\boldsymbol{u}\|^2\leqslant\{|\pi'_h-p|+\nu\|\boldsymbol{u}-\tilde{r}_h\boldsymbol{u}\|\}\|\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\tilde{r}_h\boldsymbol{u}\|,$$
$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\tilde{r}_h\boldsymbol{u}\|\leqslant\frac{1}{\nu}|\pi'_h-p|+\|\boldsymbol{u}-\tilde{r}_h\boldsymbol{u}\|,$$
$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\tilde{r}_h\boldsymbol{u}\|\leqslant\frac{1}{\nu}c(p)\rho(h)^2+c(\boldsymbol{u},\ p)\rho(h)^2.$$

Окончательно

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\boldsymbol{u}\|\leqslant c(\boldsymbol{u},\ p)\rho(h)^2, \tag{4.104}$$

и мы имеем ошибку оптимального порядка, т. е. порядка расстояния между $\boldsymbol{u}$ *и* $\tilde{V}_h$. □

Алгебраическая связь между V_h *и* $\tilde{V}_h$. Теперь мы хотим указать простую алгебраическую связь между V_h и $\tilde{V}_h$; а именно, мы покажем, что существует весьма простой изоморфизм Λ_h из $\tilde{V}_h$ в V_h. Это означает, что V_h и $\tilde{V}_h$ имеют одинаковые размерности и что схема (4.99) может быть интерпретирована как схема в V_h. Тем самым мы найдем схему в V_h, дающую в некотором смысле ошибку оптимального порядка[1]. Интересно также отметить, что (4.99) эквивалентна некоторой схеме в V_h; схемы в V_h более просты для решения, чем схемы в $\tilde{V}_h$, поскольку вместо трех линейных связей на каждом $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$ мы имеем одну (см. (4.46) и (4.82)).

Произвольный элемент $\tilde{\boldsymbol{u}}_h$, принадлежащий $\tilde{W}_h$, можно единственным образом записать в виде $\boldsymbol{u}_h+\boldsymbol{t}_h$, $\boldsymbol{u}_h\in W_h$, $\boldsymbol{t}_h\in\mathscr{B}_h$. От-

[1] Мы получим $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|\leqslant c(\boldsymbol{u},\ p)\rho(h)^2$, но, очевидно, не $\|\boldsymbol{u}-\Lambda_h\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|\leqslant$ $\leqslant c(\boldsymbol{u},\ p)\rho(h)^2$. Нам неизвестно, справедлива ли оценка $\|\Lambda_h\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|\leqslant c\rho(h)^2$.

бражение $\tilde{u}_h \mapsto u_h$ есть линейный проектор из $\tilde{W}_h$ на W_h. Обозначим через Λ_h сужение этого проектора на $\tilde{V}_h$.

Лемма 4.12. *Λ_h — изоморфизм из $\tilde{V}_h$ на V_h.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что $\Lambda_h\tilde{u}_h = u_h = \tilde{u}_h - t_h \in V_h$, если $\tilde{u}_h \in \tilde{V}_h$. Действительно, на каждом $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$

$$\int_{\mathscr{S}} \operatorname{div} u_h \, dx = \int_{\mathscr{S}} \operatorname{div} \tilde{u}_h \, dx - \int_{\mathscr{S}} \operatorname{div} t_h \, dx,$$

а выражение справа равно нулю, поскольку $\tilde{u}_h \in \tilde{V}_h$ и, как мы уже отмечали,

$$\int_{\mathscr{S}} \operatorname{div} t_h \, dx = 0 \quad \forall t_h \in \mathscr{B}_h.$$

Как проекционный оператор Λ_h взаимно-однозначен. Остается проверить, что Λ_h есть отображение на. Надо показать, что для любого заданного $u_h \in V_h$ найдется такое $t_h = t_h(u_h) \in \mathscr{B}_h$, что $\tilde{u}_h \in \tilde{V}_h$ и $\tilde{u}_h = u_h + t_h(u_h)$, т. е. $\Lambda_h\tilde{u}_h = u_h$. Это доказывается так же, как и в лемме 4.10, причем соотношения, задающие t_h, в точности те же, что и (4.85), (4.86). □

Из леммы 4.12 вытекает, что мы можем записать схему (4.99) в следующем виде:

$$\begin{gathered}\textit{найти } u_h \in V_h, \textit{ такое что}\\ \nu((u_h + t_h(u_h)),\ v_h + t_h(v_h))) = (f,\ v_h + t_h(v_h)) \ \forall v_h \in V_h,\end{gathered} \tag{4.105}$$

где $t_h(u_h) \in \mathscr{B}_h$ задано в терминах u_h леммой 4.11 и формулами (4.85), (4.86). Решение u_h задачи (4.105) отличается в „лучшую“ сторону от решения u_h задачи (4.67), и улучшение состоит в том, что $\|u - \Lambda_h u_h\|$ имеет оптимальный порядок (если, как обычно, $\Omega(h) = \Omega$ и $u \in \mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$, $p \in \mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$).

4.3. Конечные элементы степени 3 ($n = 3$). Пусть Ω — липшицева открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^3$. Вначале мы опишем внутреннюю аппроксимацию пространства $H_0^1(\Omega)$, а затем внешнюю аппроксимацию пространства V. Аппроксимирующие функции кусочно будут полиномами степени 3.

4.3.1. Аппроксимация пространства $H_0^1(\Omega)$. Пусть $\mathscr{T}_h$ — некоторая допустимая триангуляция Ω, и пусть

$$\Omega(h) = \bigcup_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \mathscr{S}. \tag{4.106}$$

Если $\mathscr{S}$ — трехмерный симплекс (т. е. тетраэдр), то мы обозначаем через $A_1, \ldots, A_4$ его вершины и через $B_1, \ldots, B_4$ — барицентры его двумерных граней $\mathscr{S}'_1, \ldots, \mathscr{S}'_4$. Обозначим, далее, через $\mathscr{E}_h^1$ множество вершин симплексов $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, а через $\mathscr{E}_h^2$ — множество барицентров двумерных граней симплексов $\mathscr{S}$, принадлежащих $\mathscr{T}_h$; $\mathscr{E}_h=\mathscr{E}_h^1\cup\mathscr{E}_h^2$.

Прежде всего докажем следующее утверждение.

Лемма 4.13. *Полином степени три в* $\mathbb{R}^3$ *единственным образом определяется своими значениями в точках* A_i, B_i, $1\leqslant i\leqslant 4$, *и значениями своих первых производных в точках* A_i. *Он выражается через барицентрические координаты относительно* $A_1, \ldots, A_4$ *по формуле*

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{4}[1-2(\lambda_i(x))^3+3(\lambda_i(x))^2]\varphi(A_i)$$
$$+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{4}\frac{\lambda_1(x)\ldots\lambda_4(x)}{\lambda_i(x)}\left[27\varphi(B_i)-7\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq i}}^{4}\varphi(A_\alpha)\right]$$
$$+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{4}(\lambda_i(x))^2\lambda_j(x)[D\varphi(A_i)\cdot A_iA_j]$$
$$-\sum_{i,j=1}^{4}\frac{\lambda_1(x)\ldots\lambda_4(x)}{\lambda_i(x)}[D\varphi(A_i)\cdot A_iA_j]. \tag{4.107}$$

Доказательство. Доказательство точно такое же, как и доказательство леммы 4.5. Коэффициенты φ являются решениями некоторой линейной системы, в которой количество неизвестных совпадает с количеством уравнений; достаточно проверить, что полином в правой части (4.107) удовлетворяет всем требуемым условиям при произвольном наборе данных $\varphi(A_i)$, $\varphi(B_i)$, $D\varphi(A_i)$. □

Из этой леммы следует, что скалярная функция φ_h, определенная на $\Omega(h)$ и являющаяся полиномом степени три на каждом симплексе $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$, полностью определена, если заданы ее значения в точках $A_i\in\mathscr{E}_h^1$ и $B_i\in\mathscr{E}_h^2$, а также значения ее производной $D\varphi_h$ в точках $A_i\in\mathscr{E}_h^1$. Такая функция φ_h дифференцируема на каждом $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$, но отсюда вовсе не следует, что эта функция должна быть дифференцируема или хотя бы непрерывна на $\Omega(h)$. В действительности функции φ_h все-таки по меньшей мере непрерывны: на двумерных гранях $\mathscr{S}'$ тетраэдра $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$ функция φ_h принимает два (возможно, различных) значения, φ_h^+ и φ_h^-; но φ_h^+ и φ_h^- — полиномы степени три, которые имеют одинаковые значения в вершинах и барицентрах $\mathscr{S}'$; первые производные от φ_h^+ и φ_h^- также равны в вершинах $\mathscr{S}'$ (они равны касательной производной от φ_h относительно $\mathscr{S}'$). Теперь можно точно так же, как в леммах 4.5 и 4.6, доказать, что $\varphi_h^+=\varphi_h^-$.

Обозначим через w_{hM}, $M\in\mathscr{E}_h$, скалярную функцию, которая является кусочно полиномом степени три на $\Omega(h)$ и удовлетворяет условиям

$$w_{hM}(M)=1,\ w_{hM}(P)=0\ \forall P\in\mathscr{E}_h,\ P\neq M,\qquad Dw_{hM}(P)=0\ \forall P\in\mathscr{E}_h^1. \tag{4.108}$$

Для $M\in\mathscr{E}_h$, $i=1, 2, 3$, обозначим через $w_{hM}^{(i)}$ скалярную функцию, которая является кусочно полиномом степени три на $\Omega(h)$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &w_{hM}^{(i)}(P)=0\ \forall P\in\mathscr{E}_h,\\ &Dw_{hM}^{(i)}(P)=0\ \forall P\in\mathscr{E}_h^1,\ P\neq M,\\ &Dw_{hM}^{(i)}M=e_i,\quad i=1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4.109}$$

Все функции w_{hM}, $w_{hM}^{(i)}$ непрерывны на $\Omega(h)$.

Пространство W_h. Пространство W_h — это пространство непрерывных вектор-функций $\boldsymbol{u}_h$ из Ω в $\mathbb{R}^3$ вида

$$\boldsymbol{u}_h=\sum_{M\in\mathscr{E}_h}\boldsymbol{u}_h(M)\,w_{hM}+\sum_{M\in\mathscr{E}_h^1}\sum_{i=1}^{3}D_i\boldsymbol{u}_h(M)\,w_{hM}^{(i)}, \tag{4.110}$$

которые обращаются в нуль вне $\Omega(h)$. Понятно, что $\boldsymbol{u}_h(M)=0$ для каждой точки $M\in\mathscr{E}_h\cup\partial\Omega(h)$, но так как касательные производные от $\boldsymbol{u}_h$ равны нулю на гранях тетраэдров $\mathscr{S}$, содержащихся в $\Omega(h)$, то производные $D_i\boldsymbol{u}_h(M)$, $M\in\mathscr{E}_h^1\cup\partial\Omega(h)$, не являются независимыми.

Пространство W_h есть конечномерное подпространство в $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$; снабдим его скалярным произведением, индуцированным из $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$:

$$((\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h))_h=((\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h))\quad \forall \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h\in W_h. \tag{4.111}$$

Оператор p_h. Оператор продолжения p_h тождествен. Операторы p_h устойчивы.

Оператор r_h. Для $\boldsymbol{u}\in\mathscr{D}(\Omega)$ определим $\boldsymbol{u}_h=r_h\boldsymbol{u}$ так: $\boldsymbol{u}_h=0$, если носитель $\boldsymbol{u}$ не содержится в $\Omega(h)$, а если носитель $\boldsymbol{u}$ содержится в $\Omega(h)$, то

$$\boldsymbol{u}_h(M)=\boldsymbol{u}(M)\,\forall M\in\mathscr{E}_h,\ D\boldsymbol{u}_h(M)=D\boldsymbol{u}(M)\,\forall M\in\mathscr{E}_h^1 \tag{4.112}$$

Предложение 4.8. *Описанная выше внутренняя аппроксимация пространства* $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ *является устойчивой и сходящейся, при условии что* h *пробегает некоторую регулярную триангуляцию* $\mathscr{H}_\alpha$ *области* Ω.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\boldsymbol{u}_h=r_h\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{u}$ в $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ для каждого $\boldsymbol{u}\in\mathscr{D}(\Omega)$ при $\rho(h)\to 0$, $h\in\mathscr{H}_\alpha$. Доказательство этого факта аналогично доказательству предложения 4.2. Аналог оценки (4.42) для интерполяционных полиномов эрмитова типа (см. Сьярле и Равьяр [1]) дает

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in\mathcal{S}} |\boldsymbol{u}(x)-\boldsymbol{u}_h(x)| \leqslant c\eta_4(\boldsymbol{u})\,\rho_{\mathcal{S}}^4, \\ &\sup_{x\in\mathcal{S}} |D\boldsymbol{u}(x)-D\boldsymbol{u}_h(x)| \leqslant c\eta_4(\boldsymbol{u})\,\rho_{\mathcal{S}}^4/\rho'_{\mathcal{S}}. \end{aligned} \tag{4.113}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in\Omega} |\boldsymbol{u}(x)-\boldsymbol{u}_h(x)| \leqslant c(\boldsymbol{u})\,\rho(h)^4, \\ &\sup_{x\in\Omega} |D\boldsymbol{u}(x)-D\boldsymbol{u}_h(x)| \leqslant c(\boldsymbol{u})\,\rho(h)^3\,\sigma(h); \end{aligned} \tag{4.114}$$

в частности,

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\| \leqslant \alpha c(\boldsymbol{u})\,\rho(h)^3, \tag{4.115}$$

в случае если $\operatorname{supp}\boldsymbol{u}\subset\Omega(h)$. □

Аппроксимация (АПР3) *пространства* V. Напомним, что Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$.

Пространство F, *оператор* $\bar{\omega}$. Пространство F — это $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ и $\bar{\omega}$ — тождественный оператор. Пусть $\mathcal{T}_h$ — некоторая допустимая триангуляция Ω.

Пространство V_h. Это — подпространство введенного выше пространства W_h, а именно пространство всех $\boldsymbol{u}_h \in W_h$, таких что

$$\int_{\mathcal{S}} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h \, dx = 0 \quad \forall \mathcal{S}\in\mathcal{T}_h. \tag{4.116}$$

Снабдим пространство V_h скалярным произведением (4.111), индуцированным из $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ и W_h.

Оператор p_h. Это — тождественный оператор (напомним, что $V_h \subset \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$).

Оператор r_h. Оператор r_h строится по тому же принципу, что и в п. 4.2. Пусть $\boldsymbol{u}$ — произвольный элемент из $\mathcal{V}$; положим

$$r_h\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_h^1 + \boldsymbol{u}_h^2, \tag{4.117}$$

где $\boldsymbol{u}_h^1$ и $\boldsymbol{u}_h^2$ принадлежат W_h; $\boldsymbol{u}_h^1$ определяется точно так же, как в (4.112):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_h^1(M) = \boldsymbol{u}(M) \quad \forall M \in \mathcal{E}_h, \\ &D\boldsymbol{u}_h^1(M) = D\boldsymbol{u}(M) \quad \forall M \in \mathcal{E}_h^1. \end{aligned} \tag{4.118}$$

Поправка $\boldsymbol{u}_h^2$ определяется так:

$$\boldsymbol{u}_h^2(M) = 0, \quad D\boldsymbol{u}_h^2(M) = 0 \quad \forall M \in \mathcal{E}_h^1, \tag{4.119}$$

и в точках $M \in \mathcal{E}_h^2$ составляющая $\boldsymbol{u}_h^2(M)$, касательная к той грани $\mathcal{S}'$, барицентром которой является M, равна нулю; нормальная составляющая $u_h^2 \cdot \nu$ определяется из условия

$$\int_{\mathscr{S}'} u_h(x)\cdot\nu\, d\Gamma = \int_{\mathscr{S}'} u(x)\cdot\nu\, d\Gamma. \tag{4.120}$$

Можно доказать [1], что существует константа d, такая что

$$\int_{\mathscr{S}'} u_h^2(x)\cdot\nu\, d\Gamma = d\,(\operatorname{mes}\mathscr{S}')\, u_h^2(M)\cdot\nu,$$

и (4.120) означает, что

$$u_h^2(M)\cdot\nu = \frac{1}{d\,(\operatorname{mes}\mathscr{S}')}\int_{\mathscr{S}'} (u - u_h^1)(x)\cdot\nu\, d\Gamma. \tag{4.121}$$

Тогда ясно, что u_h принадлежит V_h, поскольку для каждого $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$

$$\int_{\mathscr{S}} \operatorname{div} u_h\, dx = \int_{\partial\mathscr{S}} u_h\cdot\nu\, d\Gamma = \int_{\partial\mathscr{S}} u\cdot\nu\, d\Gamma = \int_{\mathscr{S}'} \operatorname{div} u\, dx = 0.$$

Предложение 4.9. *Описанная выше внешняя аппроксимация пространства V является устойчивой и сходящейся при условии, что h пробегает некоторую регулярную триангуляцию $\mathscr{H}_\alpha$ области Ω.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 4.3.

Аппроксимация задачи Стокса может быть изучена точно так же, как в п. 4.2.

4.4. *Внутренняя аппроксимация пространства* V. Предположим, что Ω — открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с липшицевой границей. Для простоты будем считать, что Ω односвязна; относительно многосвязного случая см. замечание 4.7.

В двумерном случае условие $\operatorname{div} u = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \tag{4.122}$$

и означает, что существует функция ψ (*функция тока*), такая что

$$u_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \qquad u_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \tag{4.123}$$

Функция ψ определена локально для произвольной области Ω и глобально — для односвязной.

Таким образом, в рассматриваемом случае мы можем сопоставить каждой функции из V соответствующую функцию тока ψ. Условие $u = 0$ на $\partial\Omega$ означает, что касательная и нормальная производные от ψ на $\partial\Omega$ равны нулю. Тогда ψ постоянна на $\partial\Omega$, а поскольку ψ определяется лишь с точностью до аддитивной

---

[1] Принцип доказательства тот же, что и в лемме 4.9.

постоянной, то можно предположить, что $\psi = 0$ на Γ, следовательно, $\psi \in H_0^2(\Omega)$. Поэтому отображение

$$\psi \mapsto \boldsymbol{u} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\} \tag{4.124}$$

есть изоморфизм из $H_0^2(\Omega)$ на V.

Теперь нашей целью является построить некоторую аппроксимацию пространства $H_0^2(\Omega)$ с помощью кусочно-полиномиальных функций степени 5, а затем получить с помощью изоморфизма (4.124) *внутреннюю* аппроксимацию пространства V.

Внутренняя аппроксимация пространства $H_0^2(\Omega)$. Пусть $\mathcal{T}_h$ — какая-нибудь допустимая триангуляция области Ω и

$$\Omega(h) = \bigcup_{\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{S}. \tag{4.125}$$

Двумерные симплексы — это треугольники. Пусть $\mathcal{S}$ — некоторый треугольник с вершинами A_1, A_2, A_3; обозначим через B_1, B_2, B_3 или A_{23}, A_{13}, A_{12} средние точки сторон A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2; далее, пусть $\mathbf{v}_{ij}$ обозначает единичный вектор, нормальный к стороне $A_i A_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$.

Отметим вначале следующий результат.

Лемма 4.14. *Полином φ степени 5 в $\mathbb{R}^2$ определяется единственным образом следующими своими значениями и значениями своих производных*:

$$D^\alpha \varphi(A_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad |\alpha| \leqslant 2, \tag{4.126}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{v}_{ij}}(A_{ij}), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3, \quad i \neq j; \tag{4.127}$$

здесь A_i — вершины треугольника $\mathcal{S}$, а A_{ij} — средние точки его сторон.

Доказательство. Мы наметим лишь принцип доказательства. Видно, что имеется столько же неизвестных (21 коэффициент для φ), сколько линейных уравнений относительно этих неизвестных (21 соотношение, соответствующее (4.126) — (4.127)). Как и в леммах 4.5 и 4.13, достаточно показать, что решение существует для произвольного набора исходных данных в (4.126) — (4.127), а это может быть доказано явным построением φ, приводящим к формуле, аналогичной (4.26) или (4.107). Мы опустим доказательство этого чисто технического факта; его можно найти у Женишека [1] или Зламала [1] [1]. □

---

[1] Принцип построения таков. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ обозначают барицентрические координаты относительно A_1, A_2, A_3. Аффинное отображение $x \mapsto y = (\lambda_1(x), \lambda_2(x))$ переводит треугольник $\mathcal{S}$ в треугольник $\hat{\mathcal{S}}$, определяемый условиями $y_1 = \lambda_1 \geqslant 0$, $y_2 = \lambda_2 \geqslant 0$, $0 \leqslant y_1 + y_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1$. На $\hat{\mathcal{S}}$ функция $\varphi(x(y))$ строится элементарно; используя обратное отображение $y \mapsto x$, получаем функцию $\varphi(x)$.

Из этой леммы следует, что скалярная функция φ_h, которая определена на $\Omega(h)$ и является полиномом степени 5 на каждом треугольнике $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, полностью определена, если заданы ее значения в точках $A_i \in \mathscr{E}_h^1$, $B_i \in \mathscr{E}_h^2$ и значения ее первых и вторых производных в точках $A_i \in \mathscr{E}_h^1$, где

$\mathscr{E}_h^1$ — множество вершин треугольников $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, содержащихся во внутренности $\Omega(h)$,

$\mathscr{E}_h^2$ — множество средних точек сторон треугольников $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, содержащихся во внутренности $\Omega(h)$,

$$\mathscr{E}_h = \mathscr{E}_h^1 \cup \mathscr{E}_h^2. \tag{4.128}$$

Такая функция φ_h бесконечно дифференцируема на каждом $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, но совсем не обязательно, чтобы она была столь же гладкой на всём $\Omega(h)$. В действительности функция φ_h непрерывно дифференцируема на $\Omega(h)$. Пусть φ_h^+ и φ_h^- обозначают значения φ_h с разных сторон стороны A_1A_2 треугольника $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$; φ_h^+ и φ_h^- суть полиномы степени не выше 5 на A_1A_2 и совпадают вместе со своими производными первого и второго порядков в точках A_1 и A_2 (шесть независимых условий); следовательно, $\varphi_h^+ = \varphi_h^-$. Касательные производные $\partial\varphi_h^+/\partial\boldsymbol{\tau}$ и $\partial\varphi_h^-/\partial\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau} = A_1A_2/|A_1A_2|$, также совпадают. Покажем, что и нормальные производные $\partial\varphi_h^+/\partial\mathbf{v}_{12}$ и $\partial\varphi_h^-/\partial\mathbf{v}_{12}$ равны на A_1A_2. Эти производные являются полиномами степени не выше 4 на A_1A_2; они совпадают между собой вместе со своими первыми производными в точках A_1 и A_2 и совпадают между собой в точке A_{12}. Следовательно, они равны на A_1A_2. Это доказывает, что φ_h непрерывно дифференцируема на $\Omega(h)$.

Каждой точке $M \in \mathscr{E}_h^2$ сопоставим функцию ψ_{hM}^0, являющуюся кусочно полиномом степени 5 на $\Omega(h)$ и такую, что

$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \psi_{hM}^0(M) = 1$, а все другие значения ψ_{hM}^0 в узлах равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial \psi_{hM}^0}{\partial \mathbf{v}}(P) = 0 \quad \forall P \in \mathscr{E}_h^2,\ P \neq M, \tag{4.129}$$

$$D^\alpha \psi_{hM}^0(P) = 0 \quad \forall P \in \mathscr{E}_h^1,\ |\alpha| \leqslant 2.$$

Каждой точке $M \in \mathscr{E}_h^1$ сопоставим шесть функций $\psi_{hM}^1, \ldots, \psi_{hM}^6$, определенных следующим образом: они являются кусочно полиномами степени 5 на $\Omega(h)$ и

$\psi_{hM}^1 = 1$; все другие значения ψ_{hM}^1 в узлах равны нулю; (4.130)

$$D_j\psi_{hM}^{i+1}(M)=\delta_{ij} \text{ для } i=1 \text{ или } 2; \text{ все другие значения } \psi_{hM}^{i+1} \text{ в узлах равны нулю;} \tag{4.131}$$

$$D_1^2\psi_{hM}^4(M)=1,\quad D_1D_2\psi_{hM}^5(M)=1,\quad D_2^2\psi_{hM}^6=1; \text{ все другие значения } \psi_{hM}^4,\ \psi_{hM}^5 \text{ и } \psi_{hM}^6 \text{ в узлах равны нулю.} \tag{4.132}$$

Все эти функции непрерывно дифференцируемы на $\Omega(h)$.

Пространство X_h. Пространство X_h — это пространство скалярных непрерывно дифференцируемых функций на Ω (или $\mathbb{R}^2$) вида

$$\psi_h=\sum_{M\in\mathscr{E}_h^2}\xi_M^0\psi_{hM}^0+\sum_{i=1}^{6}\sum_{M\in\mathscr{E}_h^1}\xi_M^i\psi_{hM}^i,\quad \xi_M^i\in\mathbb{R}. \tag{4.133}$$

Эти функции равны нулю вне $\Omega(h)$, и поскольку они непрерывно дифференцируемы в Ω, то

$$\begin{aligned} &D^\alpha\psi_h(M)=0\ \ \forall M\in\mathscr{E}_h^1\cap\partial\Omega(h),\ |\alpha|\leqslant 1,\\ &\frac{\partial\psi_h}{\partial\mathbf{v}}(M)=0\ \ \forall M\in\mathscr{E}_h^2\cap\partial\Omega(h). \end{aligned} \tag{4.134}$$

Пространство X_h есть конечномерное подпространство в $H_0^2(\Omega)$; мы снабдим его скалярным произведением, индуцированным из $H_0^2(\Omega)$:

$$((\psi_h,\varphi_h))_h=((\psi_h,\varphi_h))_{H_0^2(\Omega)}\ \forall\psi_h,\varphi_h\in X_h. \tag{4.135}$$

Оператор p_h. Возьмем в качестве p_h тождественный оператор (так как $X_h\subset H_0^2(\Omega)$).

Оператор r_h. Для ψ из $\mathscr{D}(\Omega)$ (плотного подпространства в $H_0^2(\Omega)$) определим функцию $r_h\psi=\psi_h$ следующими значениями в узлах:

$$\begin{aligned} &D^\alpha\psi_h(M)=D^\alpha\psi(M)\ \ \forall M\in\mathscr{E}_h^1,\ |\alpha|\leqslant 2,\\ &\frac{\partial\psi_h}{\partial\mathbf{v}_{ij}}(A_{ij})=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{v}_{ij}}(A_{ij})\ \ \forall A_{ij}\in\mathscr{E}_h^2. \end{aligned} \tag{4.136}$$

Предложение 4.10. *Семейство троек* (X_h, p_h, r_h) *задает устойчивую и сходящуюся внутреннюю аппроксимацию* $H_0^2(\Omega)$, *при условии что* h *пробегает некоторую регулярную триангуляцию* $\mathscr{H}_\alpha$ *области* Ω.

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого $\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$

$$r_h\psi\to\psi \text{ в } H_0^2(\Omega) \text{ при } \rho(h)\to 0. \tag{4.137}$$

Это следует из аналога оценки (4.42) для интерполяционных полиномов эрмитова типа (см. Сьярле и Равьяр [1], Стрэнг и Фикс [1], Женишек [1], а также Зламал [1]):

$$\sup_{x \in \mathscr{S}} |\psi_h(x) - \psi(x)| \leqslant c\eta_6(\psi)\rho_{\mathscr{S}}^5, \tag{4.138}$$

$$\sup_{x \in \mathscr{S}} |D_i\psi_h(x) - D_i\psi(x)| \leqslant c\eta_6(\psi)\frac{\rho_{\mathscr{S}}^5}{\rho'_{\mathscr{S}}}, \quad i = 1, 2, \tag{4.139}$$

$$\sup_{x \in \mathscr{S}} |D^\alpha\psi_h(x) - D^\alpha\psi(x)| \leqslant c\eta_6(\psi)\frac{\rho_{\mathscr{S}}^5}{\rho'^2_{\mathscr{S}}}, \quad |\alpha| = 2. \tag{4.140}$$

Из этих оценок видно, что

$$\|\psi_h - \psi\|_{H_0^2(\Omega(h))} \leqslant c(\psi)\alpha^2\rho(h)^3. \tag{4.141}$$

Учитывая (4.22), заключаем, что

$$\|\psi\|_{H_0^2(\Omega \setminus \Omega(h))} \to 0 \text{ при } \rho(h) \to 0. \ \square \tag{4.142}$$

Внутренняя аппроксимация (АПР4) *пространства* V. Напомним, что Ω — ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^2$. Определим *внутреннюю* аппроксимацию пространства V, используя описанную выше аппроксимацию пространства $H_0^2(\Omega)$ и изоморфизм (4.93).

Пусть задана некоторая допустимая триангуляция $\mathscr{T}_h$ области Ω. Сопоставим этой триангуляции пространство V_h и операторы p_h, r_h следующим образом.

Пространство V_h. Это — пространство определенных на Ω (или $\mathbb{R}^2$) непрерывных вектор-функций $\boldsymbol{u}_h$ вида

$$\boldsymbol{u}_h = \left\{\frac{\partial\psi_h}{\partial x_2}, \ -\frac{\partial\psi_h}{\partial x_1}\right\}, \tag{4.143}$$

где ψ_h принадлежит построенному выше пространству X_h. Ясно, что $\boldsymbol{u}_h$ равна нулю вне $\Omega(h)$ и непрерывна, поскольку ψ_h непрерывно дифференцируема, и что $\operatorname{div} \boldsymbol{u}_h = 0$. Следовательно, $\boldsymbol{u}_h \in V$ и V_h есть *конечномерное подпространство* в V. Снабдим V_h скалярным произведением, индуцированным из V:

$$((\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h))_h = ((\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h)). \tag{4.144}$$

В частности,

$$\|\boldsymbol{u}_h\|_h = \Bigl(\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha\psi_h|^2_{L^2(\Omega)}\Bigr)^{1/2} \leqslant \|\psi_h\|_{H_0^2(\Omega)}. \tag{4.145}$$

Оператор p_h. Это тождественный оператор.

Оператор r_h. Пусть $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}^\circ$ и ψ — соответствующая функция тока (см. (4.124)); понятно, что $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, и мы можем определить $\psi_h \in X_h$ с помощью (4.136). Положим теперь

$$\boldsymbol{u}_h = r_h\boldsymbol{u} = \left\{\frac{\partial\psi_h}{\partial x_2}, \ -\frac{\partial\psi_h}{\partial x_1}\right\} \in V_h. \tag{4.146}$$

Предложение 4.11. *Описанная выше внутренняя аппроксимация является устойчивой и сходящейся при $\rho(h)\to 0$, при условии что h пробегает некоторую регулярную триангуляцию $\mathscr{H}_\alpha$ области Ω.*

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$u_h = r_h u \to u \text{ в } V \ \forall u \in \mathscr{V}. \tag{4.147}$$

Согласно (4.124), (4.145), (4.146), мы имеем $\|u_h - u\| \leqslant \|\psi_h - \psi\|_{H_0^2(\Omega)}$. Поэтому (4.147) следует из (4.141) и (4.142). □

Аппроксимация задачи Стокса. Возьмем в (3.6)

$$a_h(u_h, v_h) = \nu((u_h, v_h))_h = \nu((u_h, v_h)), \tag{4.148}$$

$$\langle l_h, v_h\rangle = \langle f, v_h\rangle, \tag{4.149}$$

где v и f те же, что и в п. 2.1 (см. теорему 2.1). Аппроксимирующая задача, ассоциированная с (2.6), такова:

$$\textit{найти } u_h \in V_h, \textit{ такое что } \nu((u_h, v_h)) = \langle f, v_h\rangle \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4.150}$$

Решение u_h задачи (4.150) существует и единственно, и, как следует из теоремы 3.1 и предложения 4.8,

$$u_h \to u \text{ в } V \text{ сильно при } \rho(h)\to 0, \ h \in \mathscr{H}_\alpha. \tag{4.151}$$

Невязка между u и u_h. Предположим, что граница области Ω — многоугольник, так что мы можем выбрать триангуляцию $\mathscr{T}_h$, для которой $\Omega(h) = \Omega$. Предположим, что решение u задачи Стокса обладает следующей гладкостью: $u \in \mathscr{C}^5_? (\bar\Omega)$; тогда, в силу (4.141)[1] и (4.145),

$$\|u - r_h u\| \leqslant c(u, \alpha)\rho(h)^3. \tag{4.152}$$

Равенства

$$\nu((u, v)) = \langle f, v\rangle \ \forall v \in V, \quad \nu((u_h, v_h)) = \langle f, v_h\rangle \ \forall v_h \in V$$

дают $\nu((u - u_h, r_h u - u_h)) = 0$. Следовательно,

$$\|u - u_h\|^2 = ((u - u_h, u - r_h u)) \leqslant \|u - u_h\| \|u - r_h u\|,$$

$$\|u - u_h\| \leqslant \|u - r_h u\|,$$

и с учетом (4.152) мы получаем

$$\|u - u_h\| \leqslant c(u, \alpha)\rho(h)^3. \tag{4.153}$$

Замечание 4.7. Если Ω — неодносвязная открытая область в $\mathbb{R}^2$ и u принадлежит V, то, согласно лемме 2.4, существует функция ψ, удовлетворяющая (4.123). Поскольку u обращается в нуль на $\partial\Omega$, то ψ необходимо однозначна, $\partial\psi/\partial\nu$ равняется нулю на $\partial\Omega$, ψ равняется нулю на Γ_0 — внешней части $\partial\Omega$ —

[1] Ради простоты (4.141) было доказано для $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$; но доказательство годится и для любого $\psi \in \mathscr{C}^6(\bar\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$.

и принимает постоянные значения на $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ — внутренних компонентах $\partial\Omega$. Отображение (4.124), $\psi \mapsto \boldsymbol{u} = \{\partial\psi/\partial x_2, -\partial\psi/\partial x_1\}$, устанавливает изоморфизм между пространствами

$$X = \left\{ \psi \in H^2(\Omega),\ \psi = 0 \text{ на } \Gamma_0,\ \psi = \text{const на } \Gamma_i,\ \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0 \text{ на } \partial\Omega \right\} \qquad (4.154)$$

и V.

Несложная модификация предложения 4.10 приводит к некоторой аппроксимации пространства X, и как и в предложении 4.11, мы можем получить из нее аппроксимацию пространства V в неодносвязном случае.

Замечание 4.8. (i) Внутренняя аппроксимация пространства V с кусочно-полиномиальными функциями степени 6 построена в работе Томассэ [1].

(ii) Для $n = 3$ никаких внутренних аппроксимаций пространства V неизвестно.

4.5. Несогласованные конечные элементы. Из-за условия $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ невозможно аппроксимировать V с помощью самых простых конечных элементов, кусочно-линейных непрерывных функций. Это было показано Фортэном [2]. Наша цель здесь — описать некоторую аппроксимацию пространства V с помощью линейных несогласованных конечных элементов, которые в этом случае являются кусочно-линейными, но разрывными функциями. Это приводит к аппроксимации пространства V, обозначаемой нами (АПР5). Затем мы сопоставим этой аппроксимации некоторую новую аппроксимирующую схему для задачи Стокса.

4.5.1. Аппроксимация пространства $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Предположим, что Ω — ограниченная липшицева открытая область в $\mathbb{R}^n$. В настоящем подпункте мы будем аппроксимировать $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ с помощью несогласованных кусочно-линейных конечных элементов.

Пусть $\mathcal{T}_h$ обозначает некоторую допустимую триангуляцию области Ω. Для симплекса $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h$ мы обозначаем через $A_1, \ldots, A_{n+1}$ его вершины, через $\mathcal{S}_i$ — его $(n-1)$-мерную грань, не содержащую A_i, и через B_i — барицентр грани $\mathcal{S}_i$. Если через G обозначить барицентр $\mathcal{S}$, то, поскольку барицентрические координаты B_i относительно A_j, $j \neq i$, равны $1/n$, мы имеем

$$GB_i = \sum_{j \neq i} \frac{GA_j}{n} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{GA_j}{n} - \frac{GA_i}{n}, \qquad (4.155)$$

или

$$GB_i = -\frac{1}{n} GA_i, \qquad (4.156)$$

ибо $\sum_{j=1}^{n+1} GA_j = 0$ (барицентрические координаты G относительно $A_1, \ldots, A_{n+1}$ равны $1/(n+1)$). Отсюда вытекает, что

$$nB_iB_j = n(GB_j - GB_i) = GA_i - GA_j = -A_iA_j \qquad (4.157)$$

и, следовательно, векторы B_iB_j, $j=2, \ldots, n+1$, линейно-независимы, подобно векторам A_1A_j, $j=2, \ldots, n+1$. Благодаря этому могут быть определены барицентрические координаты точки P относительно $B_1, \ldots, B_{n+1}$; обозначим эти координаты через $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$. Заметим еще, что для каждого заданного набора $n+1$ чисел $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ существует одна и только одна линейная функция, принимающая в точках $B_1, \ldots, B_{n+1}$ значения $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$, и эта функция u имеет вид (см. предложение 4.1)

$$u(P)=\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i\mu_i(P). \tag{4.158}$$

Пространство W_h. Это — пространство вектор-функций u_h, которые линейны на каждом $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$, равны нулю вне $\Omega(h)$[1] и таковы, что значение u_h в барицентре B_i некоторой $(n-1)$-мерной грани $\mathscr{S}_i$ симплекса $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$ равно нулю, если эта грань принадлежит границе $\Omega(h)$; если эта грань пересекается с внутренностью $\Omega(h)$, то значение u_h в B_i будет тем же самым, что и в случае, когда B_i рассматривается как точка, принадлежащая двум различным смежным симплексам.

Обозначим через $\mathscr{U}_h$ множество всех точек B_i, которые являются барицентрами некоторых $(n-1)$-мерных граней симплексов $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$ и которые принадлежат внутренности $\Omega(h)$. Функция $u_h\in W_h$ полностью определяется своими значениями в точках $B_i\in\mathscr{U}_h$.

Обозначим через w_{hB}, где B — точка из $\mathscr{U}_h$, *скалярную* функцию, которая линейна на каждом симплексе $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$, удовлетворяет тем же граничным условиям и условиям согласования, что и функции из W_h, и, кроме того, условию

$$w_{hB}(B)=1,\quad w_{hB}(M)=0 \ \ \forall M\in\mathscr{U}_h,\ M\neq B. \tag{4.159}$$

Такая функция w_{hB} имеет носитель, равный объединению двух смежных с B симплексов (рис. 5).

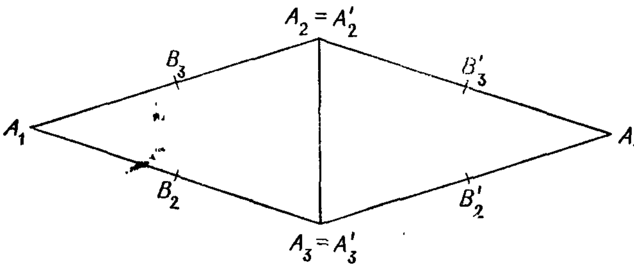

Рис. 5. Два смежных треугольника $(n=2)$.

[1] Как и прежде, $\Omega(h)=\bigcup\limits_{\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h}\mathscr{S}$.

Лемма 4.15. *Функции $w_{hB}e_i$ из W_h, где $B \in \mathcal{U}_h$ и $1 \leqslant i \leqslant n$, образуют базис в W_h. Следовательно, размерность W_h равна $nN(h)$, где $N(h)$ — число точек в $\mathcal{U}_h$.*

Доказательство. Ясно, что эти функции линейно-независимы и что их линейная оболочка совпадает со всем W_h: из предложения 4.1 следует, что любой элемент $\boldsymbol{u}_h \in W_h$ может быть записан в виде

$$\boldsymbol{u}_h = \sum_{B \in \mathcal{U}_h} \boldsymbol{u}_h(B)\, w_{hB}. \tag{4.160}$$

Пространство W_h не содержится в $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$; фактически производная $D_i\boldsymbol{u}_h$ функции $\boldsymbol{u}_h \in W_h$ есть сумма распределений Дирака, сосредоточенных на гранях симплексов, и некоторой ступенчатой функции $D_{ih}\boldsymbol{u}_h$, определенной почти всюду равенством

$$D_{ih}\boldsymbol{u}_h(x) = D_i\boldsymbol{u}_h(x) \quad \forall x \in \mathcal{S} \quad \forall \mathcal{S} \in \mathcal{T}_h. \tag{4.161}$$

Так как $\boldsymbol{u}_h$ линейна на $\mathcal{S}$, то $D_{ih}\boldsymbol{u}_h$ постоянна на каждом симплексе.

Снабдим W_h следующим скалярным произведением:

$$[\![\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h]\!]_h = (\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) + \sum_{i=1}^{n} (D_{ih}\boldsymbol{u}_h, D_{ih}\boldsymbol{v}_h), \tag{4.162}$$

которое является дискретным аналогом скалярного произведения в $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$:

$$[\![\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\!] = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \sum_{i=1}^{n} (D_i\boldsymbol{u}, D_i\boldsymbol{v}). \tag{4.163}$$

Пространство F, операторы $\bar{\omega}$, p_h. Положим, как и в п. 3.3, $F = L^2(\Omega)^{n+1}$, а в качестве $\bar{\omega}$ возьмем изоморфизм

$$\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega) \mapsto \bar{\omega}\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}, D_1\boldsymbol{u}, \ldots, D_n\boldsymbol{u}) \in F. \tag{4.164}$$

Аналогично оператор p_h определим правилом

$$\boldsymbol{u}_h \in W_h \mapsto p_h\boldsymbol{u}_h = (\boldsymbol{u}_h, \tilde{D}_{1h}\boldsymbol{u}_h, \ldots, \tilde{D}_{nh}\boldsymbol{u}_h) \in F. \tag{4.165}$$

Операторы p_h имеют норму единица и устойчивы.

Оператор r_h. Определим $r_h\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_h$ для $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$ равенством

$$\boldsymbol{u}_h(B) = \boldsymbol{u}(B) \; \forall B \in \mathcal{U}_h. \tag{4.166}$$

Предложение 4.12. *Если h пробегает некоторую регулярную триангуляцию $\mathcal{H}_\alpha$ области Ω, то описанная выше аппроксимация пространства $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ является устойчивой и сходящейся.*

Доказательство. Нам надо проверить выполнение условий (C1) и (C2) из определения 3.6.

Для проверки условия (C2) нужно показать, что для каждой функции $\boldsymbol{u} \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u} \text{ в } \boldsymbol{L}^2(\Omega) \text{ при } \rho(h) \to 0, \tag{4.167}$$

$$D_{ih}\boldsymbol{u}_h \to D_i\boldsymbol{u} \text{ в } \boldsymbol{L}^2(\Omega) \text{ при } \rho(h) \to 0. \tag{4.168}$$

На каждом симплексе $\mathscr{S}$ мы можем применить оценку (4.42) к каждой компоненте $\boldsymbol{u}$; это дает

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathscr{S}} |\boldsymbol{u}(x) - \boldsymbol{u}_h(x)| \leqslant c\eta_2(\boldsymbol{u})\rho_{\mathscr{S}}^2,\\ &\sup_{x\in\mathscr{S}} |D_i\boldsymbol{u}(x) - D_i\boldsymbol{u}_h(x)| \leqslant c\eta_2(\boldsymbol{u})\rho_{\mathscr{S}}^2/\rho'_{\mathscr{S}}.\end{aligned} \tag{4.169}$$

Следовательно,

$$\|p_h\boldsymbol{u}_h - \bar{\omega}\boldsymbol{u}\|_F \leqslant c(\boldsymbol{u})\alpha\rho(h) + [\![\boldsymbol{u}]\!]_{H_0^1(\Omega\setminus\Omega(h))}, \tag{4.170}$$

но правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\rho(h) \to 0$.

Для проверки условия (C1) предположим, что $p_{h'}\boldsymbol{u}_{h'}$ слабо сходится в F к $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$; это означает, что

$$\boldsymbol{u}_{h'} \to \varphi_0 \text{ слабо в } \boldsymbol{L}^2(\Omega), \tag{4.171}$$

$$D_{ih}\boldsymbol{u}_{h'} \to \varphi_i \text{ слабо в } \boldsymbol{L}^2(\Omega),\ 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{4.172}$$

Поскольку эти функции имеют компактный носитель, содержащийся в Ω, то (4.171) и (4.172) означают, что

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{h'} \to \tilde{\varphi}_0 \text{ слабо в } \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n), \tag{4.173}$$

$$D_{ih}\tilde{\boldsymbol{u}}_{h'} \to \tilde{\varphi}_i \text{ слабо в } \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n),\quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{4.174}$$

(здесь $\tilde{g}$ обозначает функцию, равную g в Ω и нулю в $C\Omega$). Если мы покажем, что

$$\tilde{\varphi}_i = D_i\tilde{\varphi}_0,\quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{4.175}$$

то отсюда будет следовать, что $\tilde{\varphi}_0 \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n)$ и, значит, $\varphi_0 \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, $\varphi_i = D_i\varphi_0$, а это и означает, что $\varphi = \bar{\omega}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} = \varphi_0$.

Пусть θ — какая-либо пробная функция из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$; тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\boldsymbol{u}}_{h'}(D_i\theta)\,dx \to \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(D_i\theta)\,dx,\quad \int_{\mathbb{R}^n} (D_{ih}\tilde{\boldsymbol{u}}_{h'})\theta\,dx \to$$
$$\to \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i\theta\,dx.$$

Равенство (4.175) будет доказано, если мы установим, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i\theta\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(D_i\theta)\,dx \quad \forall\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$$

или что

$$\mathscr{Y}_{h'} = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}_{h'} (D_i\theta)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} (D_{ih}\tilde{u}_{h'})\theta\, dx \to 0 \text{ при } \rho(h') \to 0$$

для каждого $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Но из оценок, полученных в п. 4.5.4 (см. (4.218)), вытекает, что

$$|\mathscr{Y}_h| \leqslant c(n, \Omega)\alpha\rho(h)\|\theta\|_{H^1(\Omega)}\|u_h\|_h, \tag{4.176}$$

откуда ясно, что $\mathscr{Y}_h \to 0$ при $\rho(h) \to 0$. □

Дискретное неравенство Пуанкаре. Доказываемое далее дискретное неравенство Пуанкаре позволит нам наделить описанное выше пространство W_h другим скалярным произведением $((\cdot, \cdot))_h$ — дискретным аналогом скалярного произведения $((\cdot, \cdot))$ в $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ (см. (1.111) и предложение 3.3).

Предложение 4.13. *Предположим, что Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует константа $c(\Omega, \alpha)$, зависящая только от Ω и постоянной α в* (4.21), *такая что*

$$|u_h|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c(\Omega, \alpha) \sum_{i=1}^{n} |D_{ih}u_h|^2_{L^2(\Omega)} \tag{4.177}$$

для любой скалярной функции вида (4.160):

$$u_h = \sum_{B \in \mathscr{U}_h} u_h(B)\, w_{hB}. \tag{4.178}$$

Аналогичное неравенство справедливо для вектор-функций вида (4.160):

$$|\boldsymbol{u}_h|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leqslant c'(\Omega, \alpha)\|\boldsymbol{u}_h\|_h \quad \forall \boldsymbol{u}_h \in W_h, \tag{4.179}$$

где

$$\|\boldsymbol{u}_h\|_h = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |D_{ih}\boldsymbol{u}_h|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \right\}^{1/2}. \tag{4.180}$$

Доказательство. Неравенство (4.179) немедленно следует из (4.177). Для того чтобы установить (4.177), мы покажем, что

$$\left| \int_{\Omega} u_h\theta\, dx \right| \leqslant c(\Omega, \alpha)|\theta|_{L^2(\Omega)}\|u_h\|_h \tag{4.181}$$

для каждой функции u_h вида (4.178) и для каждой функции θ из $\mathscr{D}(\Omega)$; (4.177) вытекает из (4.181), поскольку $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в $L^2(\Omega)$.

Обозначим через χ решение задачи Дирихле

$$\Delta\chi = \theta \text{ в } \Omega, \quad \chi \in H_0^1(\Omega);$$

χ есть функция класса $\mathscr{C}^\infty$ на Ω и

$$\|\chi\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_0(\Omega)\|\theta\|_{L^2(\Omega)}.^{1} \tag{4.182}$$

Тогда мы имеем

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}_h \theta \, dx = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{u}_h \cdot \Delta\chi \, dx,$$

и из формулы Грина вытекает, что

$$\int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{u}_h \Delta\chi \, dx = \int_{\partial\mathscr{S}} \boldsymbol{u}_h \frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{\nu}} \, d\Gamma - \int_{\mathscr{S}} \operatorname{grad} \boldsymbol{u}_h \cdot \operatorname{grad}\chi \, dx.$$

Следовательно,

$$\left|\int_\Omega \boldsymbol{u}_h \theta \, dx\right| \leqslant |((\boldsymbol{u}_h, \chi))_h| + |\mathscr{Y}_h|,$$

$$\left|\int_\Omega \boldsymbol{u}_h \theta \, dx\right| \leqslant \|\boldsymbol{u}_h\|_h \|\chi\|_{H^1(\Omega)} + |\mathscr{Y}_h|$$

$$\leqslant c(\Omega)|\theta|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{u}_h\|_h + |\mathscr{Y}_h|, \tag{4.183}$$

где

$$|\mathscr{Y}_h| = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \int_{\partial\mathscr{S}} \boldsymbol{u}_h \frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{\nu}} \, d\Gamma.$$

Ясно, что

$$\mathscr{Y}_h = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{Y}_h^i, \tag{4.184}$$

где

$$\mathscr{Y}_h^i = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \int_{\partial\mathscr{S}} \boldsymbol{u}_h \chi_i \nu_i \, d\Gamma, \quad \chi_i = \frac{\partial\chi}{\partial x_i} \tag{4.185}$$

и $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — компоненты единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$, нормального к $\partial\mathscr{S}$. Согласно формуле Грина,

$$\int_{\partial\mathscr{S}} \boldsymbol{u}_h \chi_i \nu_i \, d\Gamma = \int_{\mathscr{S}} \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{u}_h \chi_i) \, dx,$$

так что

$$\mathscr{Y}_h^i = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{u}_h \chi_i) \, dx.$$

---

[1] Строго говоря, это неравенство справедливо только тогда, когда Ω — достаточно гладкая область. В общем случае (4.182) имеет место, если определить χ как решение задачи Дирихле $\Delta\chi = \theta$, $\chi \in H_0^1(\Omega')$, где Ω' — гладкая область, удовлетворяющая условию $\Omega' \supset \bar{\Omega}$. В дальнейшем изложении это ничего не меняет.

Мы уже рассматривали это выражение при доказательстве предложения 4.12. Используя оценку (4.176), получаем

$$|\mathscr{Y}_h^i| \leqslant c(n, \Omega)\alpha\rho(h)\|\chi_i\|_{H^1(\Omega)}\|u_h\|_h,$$
$$|\mathscr{Y}_h^i| \leqslant c(n, \Omega)\alpha\rho(h)\|\chi\|_{H^2(\Omega)}\|u_h\|_h.$$

Из (4.182) и (4.184) следует, что

$$|\mathscr{Y}_h^i| \leqslant c(n, \Omega)\alpha\rho(h)|\theta|_{L^2(\Omega)}\|u_h\|_h. \tag{4.186}$$

Комбинация (4.183) и (4.186) дает в точности (4.181) с константой $c(\Omega, \alpha) = c(\Omega) + c(n, \Omega)\alpha\rho(h)$ [1]. □

Предложение 4.14. *Пусть Ω — ограниченная липшицева область. Предположим, что пространство W_h снабжено скалярным произведением*

$$((u_h, v_h))_h = \sum_{i=1}^{n}(D_{ih}u_h, D_{ih}v_h), \tag{4.187}$$

а остальные требования из предложения 4.12 *остаются без изменения. Эта видоизмененная аппроксимация пространства $H_0^1(\Omega)$ снова является устойчивой и сходящейся.*

Доказательство. Единственное различие между этим предложением и предложением 4.12 заключается в доказательстве устойчивости операторов p_h, но эта трудность полностью устраняется предложением 4.13 и оценкой (4.179), которые дают

$$\|u_h\|_h \leqslant [\![u_h]\!]_h \leqslant c(\Omega)\|u_h\|_h \quad \forall u_h \in W_h. \ \square \tag{4.188}$$

4.5.2. Аппроксимация (АПР5) *пространства V.* Пусть Ω — липшицева ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{V}$ — наше обычное пространство (1.12) и V — его замыкание в $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. Определим аппроксимацию пространства V, аналогичную последней аппроксимации пространства $H_0^1(\Omega)$. Как и прежде, положим $F = L^2(\Omega)^{n+1}$ и возьмем в качестве $\bar{\omega} \in \mathscr{L}(V, F)$ линейный оператор

$$u \in V \mapsto \bar{\omega}u = \{u, D_1u, \ldots, D_nu\}. \tag{4.189}$$

Пространство V_h. Это — следующее подпространство описанного выше пространства W_h:

$$V_h = \left\{u_h \in W_h, \sum_{i=1}^{n} D_{ih}u_{ih} = 0\right\}. \tag{4.190}$$

Содержащееся в (4.190) условие относительно дивергенции u_h эквивалентно условию

$$\operatorname{div} u_h = 0 \text{ в } \mathscr{S}\ \forall \mathscr{S} \in \mathscr{T}_h. \tag{4.191}$$

---

[1] Функция $\rho(h)$, очевидно, ограничена; например, $\rho(h) \leqslant \operatorname{diam}\Omega$.

Снабдим пространство V_h скалярным произведением $((\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h))_h$, индуцированным из W_h.

Оператор p_h. Как и прежде, $p_h\boldsymbol{u}_h = \{\boldsymbol{u}_h, D_{1h}\boldsymbol{u}_h, \ldots, D_{nh}\boldsymbol{u}_h\}$. В силу (4.179) (или 4.188)), операторы p_h устойчивы.

Оператор r_h. Мы определим $r_h\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_h \in V$ для $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}$. Поскольку $\boldsymbol{u}_h$ должны удовлетворять условию (4.191), оператор r_h, использовавшийся для аппроксимации пространства $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, не удовлетворяет всем требованиям. Вместо него возьмем такой оператор r_h. Функция $\boldsymbol{u}_h = r_h\boldsymbol{u}$ определяется своими значениями $\boldsymbol{u}_h(B)$, $B \in \mathscr{U}_h$; если $B \in \mathscr{U}_h$, то B есть барицентр некоторой $(n-1)$-мерной грани $\mathscr{S}'$ некоторого n-мерного симплекса $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, и мы полагаем

$$\boldsymbol{u}_h(B) = \frac{1}{\operatorname{mes}_{n-1}(\mathscr{S}')} \int_{\mathscr{S}'} \boldsymbol{u}\, d\Gamma. \tag{4.192}$$

Покажем, что $\boldsymbol{u}_h \in V_h$; поскольку $\operatorname{div} \boldsymbol{u}_h = \text{const}$ на каждом симплексе $\mathscr{S}$, то условие (4.191) эквивалентно условию

$$\int_{\mathscr{S}} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h\, dx = 0 \quad \forall \mathscr{S} \in \mathscr{T}_h.$$

Применяя формулу Грина, получаем

$$\int_{\mathscr{S}} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_h dx = \sum_{\mathscr{S}' \in \partial^+ \mathscr{S}} \int_{\mathscr{S}'} \boldsymbol{u}_h \cdot \mathbf{v}_{\mathscr{S}'} d\Gamma,$$

где $\partial^+\mathscr{S}$ — множество $(n-1)$-мерных граней $\mathscr{S}$; в силу (4.182), сумма справа равняется

$$\sum_{\mathscr{S}' \in \partial^+ \mathscr{S}} \int_{\mathscr{S}'} \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{v}_{\mathscr{S}'}\, d\Gamma = \int_{\partial\mathscr{S}} \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{v}\, d\Gamma = \int_{\mathscr{S}} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, dx;$$

но последний интеграл равен нулю, так как $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$.

Предложение 4.15. *Описанная выше внешняя аппроксимация пространства V является устойчивой и сходящейся, при условии что h пробегает некоторую регулярную триангуляцию $\mathscr{H}_\alpha$ области Ω.*

Доказательство. Мы уже отметили, что операторы p_h устойчивы. Проверим условие (С2) из определения 3.6. Предположим, что

$$p_{h'}\boldsymbol{u}_{h'} \to \varphi \text{ слабо в } F. \tag{4.193}$$

Точно так же, как и в предложении 4.12, мы видим, что

$$\varphi = \bar{\omega}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega). \tag{4.194}$$

Здесь нам нужно, кроме того, показать, что $\boldsymbol{u} \in V$, т. е. $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$. Но (4.193) означает, в частности, что

$$\sum_{i=1}^{n} D_{ih'} u_{ih'} \to \operatorname{div} \boldsymbol{u} \text{ слабо в } L^2(\Omega),$$

и поскольку сумма $\sum_{i=1}^{n} D_{ih'} u_{ih'}$ тождественно равна нулю, то $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$.

Проверим условие (C1). Для $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^0$ обозначим через $\boldsymbol{u}_h$ функцию $r_h \boldsymbol{u}$, а через $\boldsymbol{v}_h$ — функцию из W_h, определенную условием $\boldsymbol{v}_h(B) = \boldsymbol{u}(B)\ \forall B \in \mathcal{U}_h$. В предложении 4.12 доказано, что

$$\| p_h \boldsymbol{v}_h - \overline{\omega} \boldsymbol{u} \|_F \leqslant c(\boldsymbol{u}) \alpha \rho(h) + [\![\boldsymbol{u}]\!]_{H^1(\Omega \setminus \Omega(h))}. \qquad (4.195)$$

Нам достаточно показать, что

$$\| p_h \boldsymbol{u}_h - p_h \boldsymbol{v}_h \|_F = [\![\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h]\!]_h \to 0 \text{ при } \rho(h) \to 0. \qquad (4.196)$$

В силу неравенства (4.188), достаточно установить, что $\| \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h \|_h \to 0$ при $\rho(h) \to 0$. Каждая точка B из $\mathcal{U}_h$ есть барицентр некоторой грани $\mathcal{S}'$ некоторого симплекса $\mathcal{S}$; мы можем записать

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}(B) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}(B)(x_i - \beta_i) + \sigma(x), \qquad (4.197)$$

где $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — координаты точки B и

$$|\sigma(x)| \leqslant c(\boldsymbol{u}) \rho_{\mathcal{S}}^2\ \forall x \in \mathcal{S}. \qquad (4.198)$$

Интегрируя (4.197) по $\mathcal{S}'$, получаем

$$\boldsymbol{u}_h(B) = \boldsymbol{v}_h(B) + \left(\int_{\mathcal{S}'} \sigma(x)\, dx \right) \left(\int_{\mathcal{S}'} dx \right)^{-1},$$

так как $\int_{\mathcal{S}'} (x_i - \beta_i)\, dx = 0$. Из (4.198) следует, что

$$\boldsymbol{u}_h(B) - \boldsymbol{v}_h(B) = \varepsilon_h(B), \qquad (4.199)$$

где

$$|\varepsilon_h(B)| \leqslant c(\boldsymbol{u}) \rho_{\mathcal{S}}^2. \qquad (4.200)$$

Внутри симплекса $\mathcal{S}$ с гранями $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_{n+1}$

$$\boldsymbol{u}_h(x) - \boldsymbol{v}_h(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_h(B_i) \mu_i(x),$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — барицентрические координаты точки x относительно $B_1, \ldots, B_{n+1}$. Следовательно, в $\mathcal{S}$

$$|\operatorname{grad}(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}_h)| \leqslant c(\boldsymbol{u}) \rho_{\mathcal{S}}^2 \sum_{i=1}^{n+1} |\operatorname{grad} \mu_i|$$

и, в силу леммы 4.2 и (4.21), $|\operatorname{grad}(u_h - v_h)| \leqslant c(u)\rho_{\mathscr{S}}^2/\rho'_{\mathscr{S}}$. Поэтому на всём Ω

$$|D_{ih}(u_h - v_h)(x)| \leqslant c(u)\alpha\rho(h), \tag{4.201}$$

откуда

$$\|u_h - v_h\|_h \leqslant c(u, \alpha, \Omega)\rho(h), \tag{4.202}$$

так что

$$\|p_h u_h - \bar{\omega} u\|_F \leqslant c(u)\alpha\rho(h) + [\![u]\!]_{H^1(\Omega \setminus \Omega(h))}. \tag{4.203}$$

4.5.3. Аппроксимация задачи Стокса. Используя последнюю аппроксимацию пространства V и общие результаты п.3.2, мы можем предложить еще одну схему для задачи Стокса.

Пусть f принадлежит $L^2(\Omega)$ и $\nu > 0$. Положим, в предыдущих обозначениях,

$$a_h(u_h, v_h) = \nu((u_h, v_h))_h \; \forall u_h, v_h \in V_h, \tag{4.204}$$

$$\langle l_h, v_h \rangle = (f, v_h) \; \forall v_h \in V_h. \tag{4.205}$$

Аппроксимирующая задача такова:

$$\text{найти } u_h \in V_h, \text{ такое что } \nu((u_h, v_h))_h = (f, v_h) \; \forall v_h \in V_h. \tag{4.206}$$

Решение u_h задачи (4.206) существует и единственно. Если $\rho(h) \to 0$, причем h пробегает некоторую регулярную триангуляцию $\mathscr{H}_\alpha$, то

$$\begin{aligned} &u_h \to u \text{ сильно в } L^2(\Omega), \\ &D_{ih} u_h \to D_i u \text{ сильно в } L^2(\Omega), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned} \tag{4.207}$$

Это сразу следует из теоремы 3.1.

Мы можем, как в п.3.3 и как для других аппроксимаций, ввести дискретное давление. Это — ступенчатая функция π_h вида

$$\pi_h = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \pi_h(\mathscr{S}) \chi_{h\mathscr{S}}, \tag{4.208}$$

где $\pi_h(\mathscr{S})$ — значение π_h на $\mathscr{S}$, $\pi_h(\mathscr{S}) \in \mathbb{R}$, а $\chi_{h\mathscr{S}}$ — характеристическая функция $\mathscr{S}$. Функция π_h такова, что

$$\nu((u_h, v_h))_h - (\pi_h, \operatorname{div}_h v_h) = (f, v_h) \; \forall v \in W_h, \tag{4.209}$$

где

$$\operatorname{div}_h v_h = \sum_{i=1}^{n} D_{ih} v_{ih}. \tag{4.210}$$

Невязка между u и u_h — решениями задач (2.6) и (4.209) соответственно — может быть оценена, как и в п.3.3. Предположим, что граница Ω — многоугольник, так что $\Omega(h) = \Omega$, и пусть $u \in \mathscr{C}^3(\bar{\Omega})$, $p \in \mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$. Мы можем определить аппроксимацию $r_h u$ по формуле, аналогичной (4.192), и нетрудно видеть, что оценка (4.203) все еще будет иметь место:

$$\|p_h r_h \boldsymbol{u} - \bar{\omega}\boldsymbol{u}\|_F \leqslant c(\boldsymbol{u}, \alpha)\,\rho(h). \tag{4.211}$$

Чуть ниже мы докажем следующую лемму.

Лемма 4.16. *Обозначим через* $\boldsymbol{u}$, p *точное решение задачи* (2.6)—(2.8) *и предположим, что* $\boldsymbol{u} \in \mathscr{C}^3(\bar{\Omega})$. *Тогда*

$$a_h(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h) + l_h(\boldsymbol{v}_h)\ \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h, \tag{4.212}$$

где

$$|l_h(\boldsymbol{v}_h)| \leqslant c(\boldsymbol{u}, p)\,\rho(h)\,\|\boldsymbol{v}_h\|_h. \tag{4.213}$$

Если принять временно, что эта лемма уже доказана, то мы видим, что

$$a_h(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h) = l_h(\boldsymbol{v}_h)\ \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h,$$
$$a_h(\boldsymbol{u}_h - r_h\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h) = a_h(\boldsymbol{u} - r_h\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h) - l_h(\boldsymbol{v}_h).$$

Полагая $\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{u}_h - r_h\boldsymbol{u}$ и используя (4.205), получаем

$$\nu\|\boldsymbol{u}_h - r_h\boldsymbol{u}\|_h^2 \leqslant \nu\|\boldsymbol{u} - r_h\boldsymbol{u}\|_h\|\boldsymbol{u}_h - r_h\boldsymbol{u}\|_h + |l_h(\boldsymbol{u}_h - r_h\boldsymbol{u})|.$$

Оценки (4.211) и (4.213) дают тогда

$$\nu\|\boldsymbol{u}_h - r_h\boldsymbol{u}\|_h \leqslant c(\boldsymbol{u}, p, \alpha, \Omega)\,\rho(h). \tag{4.214}$$

Более точно, константа c в (4.214) зависит только от норм $\boldsymbol{u}$ в $\mathscr{C}^3(\bar{\Omega})$ и p в $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$.

Доказательство леммы 4.16. Умножим скалярно в $L^2(\Omega)$ уравнение

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{f} \tag{4.215}$$

на $\boldsymbol{v}_h$; так как $\Omega = \Omega(h)$, то мы получим

$$\sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \{-\nu(\Delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{S}} + (\operatorname{grad} p, \boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{S}} - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{S}}\} = 0.$$

Формула Грина, примененная на каждом симплексе $\mathscr{S}$, дает

$$\sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \{-\nu(\Delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{S}} + (\operatorname{grad} p, \boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{S}} - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{S}}\}$$
$$= a_h(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h) - l_h(\boldsymbol{v}_h) = 0,$$

где

$$l_h(\boldsymbol{v}_h) = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \int_{\partial\mathscr{S}} \left(\nu\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{v}_h - p\boldsymbol{v}_h\boldsymbol{\nu}\right) d\Gamma\,[1]. \tag{4.216}$$

Оценка (4.213) для l_h доказывается теперь точно так же, как и в леммах 4.17—4.19 (см. п.4.5.4). □

---

[1] В этой формуле $\boldsymbol{\nu}$ обозначает единичный нормальный вектор к $\partial\mathscr{S}$; не путать с константой $\nu > 0$.

Замечание 4.9. В двумерном случае у V_h имеется простой базис. См. Крузей [1].

Несогласованные конечные элементы, являющиеся кусочно полиномами степени $k > 1$, также применялись для аппроксимации пространств $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ и V. Фортэн [2] указал, что пространство V не может быть аппроксимировано согласованными конечными элементами первой степени (т. е. кусочно-линейными функциями). По этой причине аппроксимация, изученная в данном пункте, весьма важна для задач Стокса и Навье—Стокса.

Некоторые вычисления для вязких несжимаемых жидкостей, использующие рассмотренные здесь элементы, были проведены Томассэ [2].

4.5.4. *Вспомогательные оценки.* Здесь мы докажем некоторые вспомогательные оценки, которые уже использовались выше и потребуются также в гл. II. Эти оценки касаются интеграла

$$\mathscr{Y}_h^i = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{u}_h \varphi)\,\mathrm{d}x \tag{4.217}$$

для $\boldsymbol{u}_h \in W_h$, $i = 1, \ldots, n$, и для различных типов функций φ. Приводимые ниже доказательства можно было бы упростить, если привлечь общие результаты о конечных элементах.

Предложение 4.16. $|\mathscr{Y}_h^i| \leqslant c(n, \Omega)\alpha\rho(h)\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\|\boldsymbol{u}_h\|_h$, (4.218) *для* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *и* $\boldsymbol{u}_h \in W_h$.

Доказательство этого факта мы разобьем на ряд лемм.

Лемма 4.17. $$\mathscr{Y}_h^i = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \sum_{\mathscr{S}' \in \partial^+\mathscr{S}} \int_{\mathscr{S}'} u_h \varphi \nu_{i,\mathscr{S}'}\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{4.219}$$

где $\partial^+\mathscr{S}$ — *множество* $(n-1)$-*мерных граней* $\mathscr{S}$ [1], *а* $\nu_{i,\mathscr{S}'}$ *есть* i-*я компонента единичного вектора внешней нормали к* $\mathscr{S}'$.

Доказательство. Так как функции, фигурирующие в (4.219), равны нулю вне $\Omega(h)$, мы имеем

$$\mathscr{Y}_h^i = \int_{\Omega(h)} [\boldsymbol{u}_h(D_i\varphi) + (D_{ih}\boldsymbol{u}_h)\varphi]\,\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \int_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{u}_h(D_i\varphi) + (D_i\boldsymbol{u}_h)\varphi]\,\mathrm{d}x = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \int_{\mathscr{S}} D_i(\boldsymbol{u}_h\varphi)\,\mathrm{d}x.$$

Формула Грина—Стокса дает

$$\int_{\mathscr{S}} D_i(u_h\varphi)\,\mathrm{d}x = \sum_{\mathscr{S}' \in \partial^+\mathscr{S}} \int_{\mathscr{S}'} u_h\varphi\nu_{i,\mathscr{S}'}\,\mathrm{d}\Gamma. \quad \square$$

Лемма 4.18. *В обозначениях леммы* 4.17,

$$\mathscr{Y}_h^i = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \sum_{\mathscr{S} \in \partial^+\mathscr{S}} \int_{\mathscr{S}'} (\boldsymbol{u}_h(x) - \boldsymbol{u}_h(B))(\varphi(x) - \varphi(\mathscr{S}'))\,\nu_{i,\mathscr{S}'}\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{4.220}$$

[1] Таких граней $n+1$.

где $B = B_{\mathscr{S}'}$ *— барицентр* $\mathscr{S}'$, *а* $\varphi(\mathscr{S}')$ *— среднее значение* φ *на* $\mathscr{S}'$.

Доказательство. Вначале покажем, что

$$\mathscr{Y}_h^i = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \sum_{\mathscr{S}' \in \partial^+ \mathscr{S}} \int_{\mathscr{S}'} (\boldsymbol{u}_h(x) - \boldsymbol{u}_h(B))\, \varphi(x)\, \nu_{i, \mathscr{S}'}\, d\Gamma. \tag{4.221}$$

...ы установить это равенство, достаточно доказать, что

$$\sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \sum_{\mathscr{S}' \in \partial^+ \mathscr{S}} \int_{\mathscr{S}'} \boldsymbol{u}_h(B)\, \varphi(x)\, \nu_{i, \mathscr{S}'}\, d\Gamma = 0. \tag{4.222}$$

Но для всякой грани $\mathscr{S}'$, принадлежащей границе $\Omega(h)$, $\boldsymbol{u}_h(B) = 0$ и вклад этой грани в сумму равен нулю. Если же $\mathscr{S}'$ принадлежит границе двух смежных симплексов, то эта грань дает в сумме два различных члена; $\boldsymbol{u}_h(B)$ и $\varphi(x)$ в них одни и те же, а $\nu_{i, \mathscr{S}'}$ равны по величине, но имеют противоположные знаки. Следовательно, сумма (4.222) равна нулю.

Равенство (4.220) легко выводится из (4.221), если доказать, что

$$\sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \sum_{\mathscr{S}' \in \partial^+ \mathscr{S}} \int_{\mathscr{S}'} (\boldsymbol{u}_h(x) - \boldsymbol{u}_h(B))\, \varphi(\mathscr{S}')\, \nu_{i, \mathscr{S}'}\, d\Gamma = 0. \tag{4.223}$$

Для доказательства (4.223) заметим просто, что

$$\int_{\mathscr{S}'} [\boldsymbol{u}_h(x) - \boldsymbol{u}_h(B)]\, \varphi(\mathscr{S}')\, \nu_{i, \mathscr{S}'}\, d\Gamma = 0,$$

так как $\varphi(\mathscr{S}')$ и $\nu_{i, \mathscr{S}'}$ постоянны на $\mathscr{S}'$ и так как

$$\int_{\mathscr{S}'} \boldsymbol{u}_h(x)\, d\Gamma = \boldsymbol{u}_h(B) \int_{\mathscr{S}'} d\Gamma, \tag{4.224}$$

ибо $\boldsymbol{u}_h$ линейна на $\mathscr{S}'$, а B — барицентр $\mathscr{S}'$. □

Лемма 4.19.

$$|\mathscr{Y}_h^i| \leqslant c(n) \sqrt{\alpha\rho(h)}\, \|\boldsymbol{u}_h\|_h \times \left(\sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \sum_{\mathscr{S}' \in \partial^+ \mathscr{S}} \int_{\mathscr{S}'} (\varphi(x) - \varphi(\mathscr{S}'))^2\, d\Gamma \right)^{1/2}. \tag{4.225}$$

Доказательство. Поскольку $\boldsymbol{u}_h(x) - \boldsymbol{u}_h(B)$ — линейная функция на $\mathscr{S}'$, обращающаяся в нуль при $x = B$, мы можем записать ее на $\mathscr{S}$ так:

$$\boldsymbol{u}_h(x) - \boldsymbol{u}_h(B) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial x_i} (x_i - \beta_i),$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — координаты точки B. Следовательно,

$$|u_h(x) - u_h(B)| \leqslant \rho_{\mathscr{S}} |\operatorname{grad} u_h| \; \forall x \in \mathscr{S}$$

и

$$\left| \int_{\mathscr{S}'} (u_h(x) - u_h(B))(\varphi(x) - \varphi(\mathscr{S}'))\, \nu_{i, \mathscr{S}'}\, d\Gamma \right| \leqslant \rho_{\mathscr{S}} \left(\int_{\mathscr{S}'} |\operatorname{grad} u_h|^2\, d\Gamma \right)^{1/2} \left(\int_{\mathscr{S}'} (\varphi(x) - \varphi(\mathscr{S}'))^2\, d\Gamma \right)^{1/2}.$$

Но так как $\operatorname{grad} u_h$ постоянен на $\mathscr{S}'$, то

$$\int_{\mathscr{S}'} (\operatorname{grad} u_h)^2\, d\Gamma = \operatorname{mes}_{n-1}(\mathscr{S}')\, |\operatorname{grad} u_h|^2.$$

Обозначим через ξ расстояние между $\mathscr{S}'$ и противоположной вершиной $\mathscr{S}$. Хорошо известно, что $\operatorname{mes}_n(\mathscr{S}) = n^{-1}\xi \operatorname{mes}_{n-1}(\mathscr{S}')$. Следовательно,

$$\operatorname{mes}_{n-1}(\mathscr{S}') = (n/\xi) \operatorname{mes}_n(\mathscr{S}) \leqslant (n/\rho'_{\mathscr{S}}) \operatorname{mes}_n(\mathscr{S}), \tag{4.226}$$

поскольку

$$\rho'_{\mathscr{S}} \leqslant \xi. \tag{4.227}$$

(Причина, по которой (4.227) имеет место, ясна: наибольший шар, содержащийся в $\mathscr{S}$, имеет диаметр, равный $\rho'_{\mathscr{S}}$, и этот шар лежит в множестве, ограниченном гиперплоскостью, содержащей $\mathscr{S}'$, и параллельной гиперплоскостью, проходящей через противоположную вершину.) Поэтому

$$\int_{\mathscr{S}'} (\operatorname{grad} u_h)^2\, d\Gamma \leqslant \frac{n}{\rho'_{\mathscr{S}}} \operatorname{mes}_n(\mathscr{S})\, |\operatorname{grad} u_h|^2 \leqslant \frac{n}{\rho'_{\mathscr{S}}} \int_{\mathscr{S}} |\operatorname{grad} u_h|^2\, dx$$

и

$$|\mathscr{Y}_h^i| \leqslant c(n) \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \sum_{\mathscr{S}' \in \partial^+ \mathscr{S}} \frac{\rho_{\mathscr{S}}}{\sqrt{\rho'_{\mathscr{S}}}} \left(\int_{\mathscr{S}} |\operatorname{grad} u_h|^2\, dx \right)^{1/2} \times \left(\int_{\mathscr{S}'} |\varphi(x) - \varphi(\mathscr{S}')|^2\, d\Gamma \right)^{1/2}. \tag{4.228}$$

Используя (4.20), (4.21) и применяя неравенство Шварца, получаем отсюда (4.225). □

Лемма 4.20.

$$\int_{\mathcal{S}'} (\varphi(x)-\varphi(\mathcal{S}'))^2\,d\Gamma \leqslant c(n)\alpha^2\rho(h)\int_{\mathcal{S}} (\operatorname{grad}\varphi)^2\,dx, \tag{4.229}$$

$$\sum_{\mathcal{S}\in\mathcal{T}_h}\ \sum_{\mathcal{S}'\in\partial^+\mathcal{S}}\ \int_{\mathcal{S}'} (\varphi(x)-\varphi(\mathcal{S}'))^2\,d\Gamma \leqslant c(n)\alpha\rho(h)\int_{\Omega} (\operatorname{grad}\varphi)^2\,dx. \tag{4.230}$$

Доказательство. Неравенство (4.230) непосредственно следует из (4.229). Неравенство (4.229) становится очевидным следствием из теорем о следах в $H^1(\mathcal{S})$, если заменить константу $c(n)\alpha^2$ в правой части (4.229) некоторой константой $c(\mathcal{S})$, зависящей от выбора симплекса $\mathcal{S}$; преимущество оценки (4.229) заключается в том, что она равномерна относительно симплексов $\mathcal{S}$ из $\mathcal{T}_h$. Для доказательства (4.229) мы произведем преобразование координат, переводящее $\mathcal{S}$ в некоторый фиксированный симплекс $\bar{\mathcal{S}}$, применим в $\bar{\mathcal{S}}$ теорему о следе и вернемся назад к $\mathcal{S}$.

Предположим для простоты, что $A_1=0$, $\mathcal{S}'$ содержится в гиперплоскости $x_n=0$ и вершины $\mathcal{S}'$ суть $A_1, \ldots, A_n$; упомянутый выше фиксированный симплекс $\bar{\mathcal{S}}'$ — это симплекс со следующими вершинами $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_{n+1}$: $\bar{A}_1=0$, $\bar{A}_1\bar{A}_{i+1}=e_i$, $i=1, \ldots, n$. Грань, соответствующая $\mathcal{S}'$, — это грань $\bar{\mathcal{S}}'$ с вершинами $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$. Обозначим через Λ линейный оператор в $\mathbb{R}^n$, определяемый равенством $A_i=\Lambda\bar{A}_i$, $i=2, \ldots, n+1$, и через Λ' — линейный оператор в $\mathbb{R}^{n-1}$, определяемый равенством $A_i=\Lambda'\bar{A}_i$, $i=2, \ldots, n$. Производя соответствующую замену переменных в интеграле в левой части (4.229), получаем

$$\int_{\mathcal{S}'} \sigma(x)^2\,d\Gamma_{\mathcal{S}} = \frac{1}{|\det\Lambda'|}\int_{\bar{\mathcal{S}}} \bar{\sigma}^2(\bar{x})\,d\Gamma_{\bar{\mathcal{S}}},$$

где

$$\sigma(x)=\chi_i(x)-\chi_i(B), \tag{4.231}$$

$$\bar{\sigma}(\bar{x})=\sigma(x),\quad \bar{x}=\Lambda^{-1}x. \tag{4.232}$$

Для симплекса $\bar{\mathcal{S}}$ неравенство из теоремы о следе и неравенство Пуанкаре дают (напомним, что $\sigma(B)=0$)

$$\int_{\bar{\mathcal{S}}} \bar{\sigma}^2(\bar{x})\,d\Gamma \leqslant c(\bar{\mathcal{S}})\sum_{j=1}^{n}\int_{\bar{\mathcal{S}}} \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{x}_j}(\bar{x})^2\,d\bar{x}.$$

Вернемся назад к $\mathscr{S}$ и координатам x_i. Запишем

$$\frac{\partial\bar\sigma}{\partial\bar x_j}(\bar x)=\sum_{k=1}^{n}\Lambda_{kj}^{-1}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x_k}\right)(\Lambda\bar x),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\bar\sigma}{\partial\bar x_j}(\bar x)\right|^2\leqslant\|\Lambda^{-1}\|^2\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x_k}(\Lambda\bar x)\right|^2.$$

Следовательно,

$$\int_{\mathscr{S}}\bar\sigma^2(\bar x)\,d\Gamma\leqslant c(\bar{\mathscr{S}})\|\Lambda^{-1}\|^2\int_{\bar{\mathscr{S}}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x_k}\right|(\Lambda\bar x)\right|^2\right)d\boldsymbol{x}$$

$$\leqslant c(\bar{\mathscr{S}})\,|\det\Lambda|\,\|\Lambda^{-1}\|^2\int_{\mathscr{S}}(\operatorname{grad}\sigma)^2\,dx.$$

Мы приходим к неравенству

$$\int_{\mathscr{S}'}(\chi_i(x)-\chi_i(B))^2\,d\Gamma\leqslant c\frac{|\det\Lambda|}{|\det\Lambda'|}\|\Lambda^{-1}\|^2\int_{\mathscr{S}}(\operatorname{grad}\chi_i)^2\,d\boldsymbol{x}.$$

Для доказательства (4.229) осталось показать, что

$$(|\det\Lambda|/|\det\Lambda'|)\|\Lambda^{-1}\|^2\leqslant c\alpha\rho(h).\tag{4.233}$$

Так как $\det\Lambda/\det\Lambda'=\det\Lambda'^{-1}/\det\Lambda^{-1}=\Lambda_{nn}$[1] и $|\Lambda_{nn}|\leqslant\|\Lambda\|$, то левая часть (4.233) оценивается величиной $\|\Lambda\|\|\Lambda^{-1}\|^2$. По лемме 4.3 это произведение оценивается величиной

$$\left(\rho_{\bar{\mathscr{S}}}/\rho'_{\mathscr{S}}\right)\left(\rho_{\mathscr{S}}/\rho'_{\bar{\mathscr{S}}}\right)^2\leqslant c(\bar{\mathscr{S}})\,\alpha\rho_{\mathscr{S}}\leqslant c(\bar{\mathscr{S}})\alpha\rho(h),$$

откуда и следует (4.233). □

Оценка (4.218) теперь очевидным образом следует из (4.225) и (4.230). □

Следующее неравенство, доказываемое аналогичными методами, будет нам полезно в гл. II.

Предложение 4.17.

$$|\mathscr{Y}_h^i|\leqslant c(n,\ p,\ \Omega)\,\alpha^2\left(\sum_{j=1}^{n}|D_j\varphi|_{L^{q'}(\Omega)}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|D_{jh}\boldsymbol{u}_h|_{L^p(\Omega)}\right)\tag{4.234}$$

для $\varphi\in W^{1,q'}(\Omega)$, $\boldsymbol{u}_h\in W_h$, $1/q'=1-1/q$, $1/q=1/p-1/n$, $1<p<n$.

Отправляясь от выражения (4.220) для $\mathscr{Y}_h^i$, мы действуем по существу так же, как и в леммах 4.19 и 4.20, с той лишь разницей, что неравенства Шварца для интегралов заменяются на неравенства Гёльдера с подходящими показателями.

---

[1] Λ_{nn}—это $(n,\ n)$-элемент матрицы Λ; заметим, что $\Lambda_{in}=0$, $1\leqslant i\leqslant n-1$, в силу нашего выбора осей координат.

Лемма 4.21.

$$|\mathcal{Y}_h^i| \leqslant \sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h} \sum_{\mathcal{S}' \in \partial^+ \mathcal{S}} \rho_{\mathcal{S}} (\operatorname{mes}_{n-1}(\mathcal{S}'))^{1/\gamma'}$$
$$\times |\operatorname{grad}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{u}_h| \left(\int_{\mathcal{S}'} |\chi_i(x) - \chi_i(\mathcal{S}')|^\gamma \, d\Gamma \right)^{1/\gamma}, \tag{4.235}$$

где $\operatorname{grad}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{u}_h$ *обозначает значение* $\operatorname{grad} \boldsymbol{u}_h$ *на* $\mathcal{S}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Доказательство. Как и в лемме 4.19, имеем на грани $\mathcal{S}'$

$$\boldsymbol{u}_h(x) - \boldsymbol{u}_h(B) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial x_i}(x_i - \beta_i)$$

и поэтому

$$|\boldsymbol{u}_h(x) - \boldsymbol{u}_h(B)| \leqslant \rho_{\mathcal{S}} |\operatorname{grad} \boldsymbol{u}_h| \; \forall x \in \mathcal{S}.$$

Пусть γ — некоторое вещественное число, $1 < \gamma < \infty$ (оно будет уточнено позже), и пусть γ' — сопряженный показатель, $1/\gamma + 1/\gamma' = 1$. Тогда

$$\left| \int_{\mathcal{S}'} (\boldsymbol{u}_h(x) - \boldsymbol{u}_h(B)) (\chi_i(x) - \chi_i(\mathcal{S}')) \nu_{i,\mathcal{S}'} \, d\Gamma \right|$$
$$\leqslant \rho_{\mathcal{S}} |\operatorname{grad} \boldsymbol{u}_h| \int_{\mathcal{S}'} |\chi_i(x) - \chi_i(\mathcal{S}')| \, d\Gamma \quad \text{(по неравенству Гёльдера)}$$
$$\leqslant \rho_{\mathcal{S}} (\operatorname{mes}_{n-1}(\mathcal{S}'))^{1/\gamma'} |\operatorname{grad} \boldsymbol{u}_h| \left(\int_{\mathcal{S}'} |\chi_i(x) - \chi_i(\mathcal{S}')|^\gamma \, d\Gamma \right)^{1/\gamma},$$

откуда после суммирования и следует (4.235). □

Лемма 4.22. *Пусть*

$$\gamma' = q(n-1)/n, \quad \gamma = \gamma'/(\gamma' - 1). \tag{4.236}$$

Тогда для $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\left(\int_{\mathcal{S}'} |\chi_i(x) - \chi_i(\mathcal{S}')|^\gamma \, d\Gamma \right)^{1/\gamma}$$
$$\leqslant c(n, p) \frac{(\operatorname{mes}_{n-1}\mathcal{S}')^{1/\gamma}}{(\operatorname{mes}_n(\mathcal{S}))^{1/q'}} \rho_{\mathcal{S}} \left(\int_{\mathcal{S}} |\operatorname{grad} \chi_i|^{q'} \, dx \right)^{1/q'}. \tag{4.237}$$

Доказательство. Поступим точно так же, как в лемме 4.20, используя те же обозначения. Полагая $\sigma(x) = \varphi(x) - \varphi(\mathcal{S}')$, имеем

$$\left(\int_{\mathcal{S}'} |\sigma(x)|^\gamma \, d\Gamma_{\mathcal{S}'} \right)^{1/\gamma} = |\det \Lambda'|^{-1/\gamma} \left(\int_{\bar{\mathcal{S}}'} |\bar{\sigma}(\bar{x})|^\gamma \, d\Gamma_{\bar{\mathcal{S}}'} \right)^{1/\gamma}.$$

Применим неравенство Пуанкаре и теорему вложения Соболева на „стандартном“ симплексе $\bar{\mathcal{S}}$:

$$|\bar\sigma|_{L^\gamma(\bar{\mathscr S}')} \leqslant \text{(в силу неравенства Соболева на } \bar{\mathscr S}' \subset \mathbb{R}^{n-1})$$
$$\leqslant c_0(n, p)\,|\bar\sigma|_{W^{1/q,\, q'}(\bar{\mathscr S}')} \leqslant \text{(по теореме о следе, см. Лионс [1])}$$
$$\leqslant c_1(n, p)\,|\bar\sigma|_{W^{1,\, q'}(\bar{\mathscr S})} \leqslant \text{(в силу неравенства Пуанкаре)}$$
$$\leqslant c(\bar{\mathscr S})\, c_2(n, p)\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{\bar{\mathscr S}}\left|\frac{\partial\bar\sigma}{\partial\bar x_j}\right|^{q'} d\bar x\right)^{1/q'} .\ [1]$$

Используя оценку, полученную в лемме 4.20, заключаем, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\bar\sigma}{\partial\bar x_j}(\bar x)\right|^{q'}\right)^{1/q'} \leqslant c(q')\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\bar\sigma}{\partial\bar x_j}(\bar x)\right|^{2}\right)^{1/2}$$
$$\leqslant c(q')\,\|\Lambda^{-1}\|\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}(\Lambda\bar x)\right|^{2}\right)^{1/2}$$
$$\leqslant c'(q')\,\|\Lambda^{-1}\|\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}(\Lambda\bar x)\right|^{q'}\right)^{1/q'} .$$

Таким образом,

$$|\bar\sigma|_{L^\gamma(\bar{\mathscr S}')} \leqslant c(\bar{\mathscr S})\, c_3(n, p)\,\|\Lambda^{-1}\|\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{\bar{\mathscr S}}\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}(\Lambda\bar x)\right|^{q'} d\bar x\right)^{1/q'} .$$

Возвращаясь назад к симплексу $\mathscr S$, получаем

$$|\sigma|_{L^\gamma(\bar{\mathscr S}')} \leqslant c(\bar{\mathscr S})\, c_3(n, p)\,|\det\Lambda|^{1/q'}\,\|\Lambda^{-1}\|$$
$$\times\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathscr S}\left|\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}(x)\right|^{q'} dx\right)^{1/q'} .$$

Наконец,

$$\left(\int_{\mathscr S'}|\sigma(x)|^{\gamma}\, d\Gamma_{\mathscr S'}\right)^{1/\gamma} \leqslant c(\bar{\mathscr S})\, c_3(n, p)\,\frac{|\det\Lambda|^{1/q'}}{|\det\Lambda'|^{1/\gamma}}\,\|\Lambda^{-1}\|$$
$$\times\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathscr S}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|^{q'} dx\right)^{1/q'} .$$

Мы завершим доказательство, заметив, что

$$\det\Lambda = \frac{\mathrm{mes}_n(\bar{\mathscr S})}{\mathrm{mes}_n(\mathscr S)}, \quad \det\Lambda' = \frac{\mathrm{mes}_{n-1}(\bar{\mathscr S}')}{\mathrm{mes}_{n-1}(\mathscr S')}$$

и, согласно лемме 4.3, $\|\Lambda^{-1}\| \leqslant \rho_{\mathscr S}/\rho'_{\bar{\mathscr S}}$. □

---

[1] Константы $c_i(n, p)$ зависят также от $\bar{\mathscr S}'$, но грань $\bar{\mathscr S}'$ фиксирована.

Лемма 4.23.

$$|\mathscr{Y}_h^i| \leqslant c(n, p)\,\alpha^2 \left(\sum_{j=1}^{n} |D_{jh} u_h|_{L^p(\Omega)}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |D_j \varphi|_{L^{q'}(\Omega)}\right). \tag{4.238}$$

Доказательство. Для того чтобы доказать (4.238), объединим (4.235) и (4.237). Мы получим $(1/\gamma + 1/\gamma' = 1)$:

$$|\mathscr{Y}_h^i| \leqslant c(n, p, \Omega) \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \rho_{\mathscr{S}}^2 (\operatorname{mes}_n(\mathscr{S}))^{-1/q'} (\operatorname{mes}_{n-1}(\mathscr{S}')) \times |\operatorname{grad}_{\mathscr{S}} u_h| \left(\int_{\mathscr{S}} |\operatorname{grad} \chi_i|^{q'}\, dx\right)^{1/q'}.$$

С учетом (4.226) имеем

$$|\mathscr{Y}_h^i| \leqslant c(n, p, \Omega) \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \alpha\rho_{\mathscr{S}} (\operatorname{mes}_n(\mathscr{S}))^{1/q} |\operatorname{grad} u_h| \times \left(\int_{\mathscr{S}} |\operatorname{grad} \varphi|^{q'}\, dx\right)^{1/q'}, \tag{4.239}$$

поскольку $\operatorname{mes}_{n-1}(\mathscr{S}') \leqslant (n/\rho'_{\mathscr{S}}) \operatorname{mes}_n(\mathscr{S}) \leqslant (n\alpha/\rho_{\mathscr{S}}) \operatorname{mes}_n(\mathscr{S})$. Но n-мерная мера $\mathscr{S}$ больше, чем n-мерная мера шара диаметра $\rho'_{\mathscr{S}}$; следовательно, $(\rho'_{\mathscr{S}})^n \leqslant c(n) \operatorname{mes}_n(\mathscr{S})$ и

$$\rho_{\mathscr{S}} \leqslant \alpha\rho'_{\mathscr{S}} \leqslant c(n)\,\alpha\, (\operatorname{mes}_n(\mathscr{S}))^{1/n}.$$

Используя эту оценку, получаем из (4.239)

$$|\mathscr{Y}_h^i| \leqslant c(n, p, \Omega)\,\alpha^2 \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} (\operatorname{mes}_n(\mathscr{S}))^{1/p} |\operatorname{grad}_{\mathscr{S}} u_h| \times \left(\int_{\mathscr{S}} |\operatorname{grad} \varphi|^{q'}\, dx\right)^{1/q'}.$$

Применяя к этой сумме неравенство Гёльдера с показателями q и q', приходим к оценке

$$|\mathscr{Y}_h^i| \leqslant c(n, p, \Omega)\,\alpha^2 \left(\sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \operatorname{mes}_n(\mathscr{S})^{q/p} |\operatorname{grad}_{\mathscr{S}} u_h|^q\right)^{1/q} \times \left(\int_{\Omega(h)} |\operatorname{grad} \varphi|^{q'}\, dx\right)^{1/q'}. \tag{4.240}$$

Доказательство (4.238) свелось, таким образом, к доказательству следующего неравенства:

$$\left(\sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \operatorname{mes}_n(\mathscr{S})^{q/p} |\operatorname{grad}_{\mathscr{S}} u_h|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \operatorname{mes}_n(\mathscr{S}) |\operatorname{grad} u_h|^p\right)^{1/p}, \tag{4.241}$$

так как правая часть этого неравенства равна

$$\left(\sum_{\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h}\int_{\mathscr{S}}|\operatorname{grad}\boldsymbol{u}_h|^p\,dx\right)^{1/p},$$

а это легко оценивается величиной

$$c(p)\left(\sum_{j=1}^{n}|D_{jh}\,\boldsymbol{u}_h|_{L^p(\Omega)}\right).$$

С точностью до обозначений, (4.241) доказывается в следующей лемме. □

Лемма 4.24. *Пусть a_j, z_j суть N пар неотрицательных чисел, и пусть p, n, q те же, что и прежде. Тогда*

$$\left(\sum_{j=1}^{N}a_j^{q/p}z_j^q\right)^{1/q}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}a_jz_j^p\right)^{1/p}. \tag{4.242}$$

Доказательство. Для $N=2$ доказательство элементарно. Полагаем

$$a_1z_1^p+a_2z_2^p=\rho,\quad z_1=((\rho-a_2z_2^p)/a_1)^{1/p}$$

и замечаем, что функция

$$z_2\mapsto a_1^{q/p}z_1^q+a_2^{q/p}z_2^q=a_1^{q/p}\,((\rho-a_2z_2^p)/a_1)^{q/p}+a_2^{q/p}z_2^q$$

достигает своего максимума на интервале $[0,(\rho/a_2)^{1/p}]$ в концевой точке и этот максимум равен $\rho^{q/p}$.

Проведем теперь индукцию по N. Предположим, что (2.57) верно для $N-1$, и запишем

$$\left(\sum_{j=1}^{N}a_j^{q/p}z_j^q\right)^{1/q}=\left(a_1^{q/p}z_1^q+\sum_{j=2}^{N}a_j^{q/p}z_j^q\right)^{1/q}$$
$$\leqslant(a_1^{q/p}z_1^q+\tilde a_2^{q/p}\tilde z_2^q)^{1/q}, \tag{4.243}$$

где $\tilde a_2=\tilde z_2=\left(\sum_{j=2}^{N}a_jz_j^p\right)^{1/(p+1)}$. Используя уже доказанное неравенство для $N=2$, видим, что правая часть (4.243) оценивается величиной

$$(a_1z_1^p+\tilde a_2\tilde z_2^p)^{1/p}=\left(\sum_{j=1}^{N}a_jz_j^p\right)^{1/p},$$

откуда и следует (4.242). □

§ 5. Численные алгоритмы

Мы видели, что дискретизация уравнений Стокса не решает полностью задачу численной аппроксимации этих уравнений; для фактического вычисления решения нам надо еще иметь базис в пространстве V_h, такой что аналог (3.6) приводит к линейной алгебраической системе уравнений относительно компонент u_h с достаточно разреженной матрицей. Это имеет место только для схем, соответствующих (АПР4) и (АПР5); для дискретной задачи, соответствующей аппроксимациям (АПР1) — (АПР3), мы даже не имеем явного базиса в V_h.

В пп. 5.1—5.3 мы изучим два алгоритма, весьма полезных для практического решения дискретизированных уравнений. В пп. 5.1 и 5.2 мы рассмотрим непрерывный случай, а в п. 5.3 вкратце объясним, каким образом построенные алгоритмы могут быть приспособлены к дискретным задачам.

Результаты, доказываемые в п. 5.4, также связаны с задачей численной аппроксимации и, кроме того, показывают, каким образом несжимаемую жидкость можно рассматривать как предельный случай „слабо“ сжимаемой жидкости.

5.1. Алгоритм Удзавы. В предложении 2.1 мы интерпретировали задачу Стокса как некоторую вариационную задачу — задачу оптимизации с линейными ограничениями. Алгоритмы, описываемые в этом и следующем пунктах, являются классическими алгоритмами оптимизации. Мы опишем эти алгоритмы и изучим их сходимость без каких-либо ссылок на теорию оптимизации, хотя их идея и доказательство их сходимости заимствованы из теории оптимизации.

Рассмотрим функции u и p, даваемые теоремой 2.1. Мы получим u, p как пределы последовательностей u^m, p^m, которые вычисляются гораздо легче, чем u и p.

Алгоритм начнем с произвольного элемента

$$p^0 \in L^2(\Omega). \tag{5.1}$$

Если p^m уже известно, то определим u^{m+1}, p^{m+1} $(m \geqslant 0)$ соотношениями

$$\begin{gathered} u^{m+1} \in H_0^1(\Omega), \\ \nu((u^{m+1}, v)) - (p^m, \operatorname{div} v) = (f, v) \ \forall v \in H_0^1(\Omega); \end{gathered} \tag{5.2}$$

$$\begin{gathered} p^{m+1} \in L^2(\Omega), \\ (p^{m+1} - p^m, q) + \rho(\operatorname{div} u^{m+1}, q) = 0 \ \forall q \in L^2(\Omega). \end{gathered} \tag{5.3}$$

Мы предполагаем, что $\rho > 0$ — некоторое фиксированное число; позже будут даны другие условия на ρ.

Существование и единственность решения u^{m+1} задачи (5.2) являются очень простым следствием проекционной теоремы (теоремы 2.2). Действительно, $\boldsymbol{u}^{m+1}$ есть решение задачи Дирихле

$$\boldsymbol{u}^{m+1} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \tag{5.4}$$
$$-\nu \Delta \boldsymbol{u}^{m+1} = \operatorname{grad} p^m + \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega).$$

Если $\boldsymbol{u}^{m+1}$ известно, то p^{m+1} явно задается формулой (5.3), которая эквивалентна следующей формуле:

$$p^{m+1} = p^m - \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{m+1} \in L^2(\Omega). \tag{5.5}$$

Сходимость алгоритма.

Теорема 5.1. *Если число* ρ *удовлетворяет условию*

$$0 < \rho < 2\nu, \tag{5.6}$$

то $\boldsymbol{u}^{m+1}$ *сходится при* $m \to \infty$ *к* $\boldsymbol{u}$ *в* $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, *а* p^{m+1} *сходится к* p *слабо в* $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

Доказательство. Уравнение (2.7), которому удовлетворяют $\boldsymbol{u}$ и p, эквивалентно следующему:

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) - (p, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega). \tag{5.7}$$

В уравнениях (5.2) и (5.7) возьмем $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{m+1} - \boldsymbol{u}$ и вычтем одно из другого получающиеся уравнения; это даст

$$\nu \| \boldsymbol{u}^{m+1} - \boldsymbol{u} \|^2 = (p^m - p, \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{m+1}),$$

или

$$\nu \| \boldsymbol{v}^{m+1} \|^2 = (q^m, \operatorname{div} \boldsymbol{v}^{m+1}), \tag{5.8}$$

где мы положили

$$\boldsymbol{v}^{m+1} = \boldsymbol{u}^{m+1} - \boldsymbol{u}, \tag{5.9}$$
$$q^m = p^m - p. \tag{5.10}$$

Взяв $q = p^{m+1} - p$ в (5.3), получаем

$$(q^{m+1} - q^m, q^{m+1}) + \rho (\operatorname{div} \boldsymbol{v}^{m+1}, q^{m+1}) = 0,$$

что эквивалентно равенству

$$|q^{m+1}|^2 - |q^m|^2 + |q^{m+1} - q^m|^2 = -2\rho (\operatorname{div} \boldsymbol{v}^{m+1}, q^{m+1}). \tag{5.11}$$

Умножая теперь (5.8) на 2ρ и складывая результат с (5.11), приходим к равенству

$$|q^{m+1}|^2 - |q^m|^2 + |q^{m+1} - q^m|^2 + 2\rho\nu \| \boldsymbol{v}^{m+1} \|^2 = -2\rho (\operatorname{div} \boldsymbol{v}^{m+1}, q^{m+1} - q^m). \tag{5.12}$$

Правая часть (5.12) оценивается величиной $2\rho |\operatorname{div} \boldsymbol{v}^{m+1}| \, |q^{m+1} - q^m|$, которая не превосходит $2\rho\|v^{m+1}\||q^{m+1}-q^m|$, так как

$$|\operatorname{div} v| \leqslant \|v\| \ \forall v \in H_0^1(\Omega)\,^1. \tag{5.13}$$

Последнее выражение можно оценить величиной $\delta|q^{m+1}-q^m|^2+$ $+(\rho^2/\delta)\|v^{m+1}\|^2$, где δ, $0<\delta<1$, пока произвольно. Следовательно,

$$|q^{m+1}|^2-|q^m|^2+(1-\delta)|q^{m+1}-q^m|^2$$
$$+\rho(2\nu-\rho/\delta)\|v^{m+1}\|^2 \leqslant 0. \tag{5.14}$$

Если мы сложим неравенства (5.14) для $m=0, \ldots, N$, то найдем

$$|q^{N+1}|^2+(1-\delta)\sum_{m=0}^{N}|q^{m+1}-q^m|^2+(2\nu-\rho/\delta)\rho$$
$$\times\sum_{m=0}^{N}\|v^{m+1}\|^2 \leqslant |q^0|^2. \tag{5.15}$$

В силу условия (5.6), существует δ, такое что $0<\rho/2\nu<\delta<1$, и, значит, $(2\nu-\rho/\delta)>0$. Зафиксируем это δ. Неравенство (5.15) показывает тогда, что

$$\begin{aligned} &|q^{m+1}-q^m|^2=|p^{m+1}-p^m|^2 \to 0 \quad \text{при } m\to\infty,\\ &\|v^{m+1}\|^2=\|u^{m+1}-u\|^2 \to 0 \quad \text{при } m\to\infty. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Таким образом, сходимость v^{m+1} к u доказана. Далее, из (5.14) видно также, что последовательность p^m ограничена в $L^2(\Omega)$. Поэтому мы можем выбрать из p^m подпоследовательность $p^{m'}$, слабо сходящуюся в $L^2(\Omega)$ к некоторому элементу p_*. Уравнение (5.2) дает в пределе

$$\nu((u, v))-(p_*, \operatorname{div} v)=(f, v) \ \forall v \in H_0^1(\Omega);$$

сравнивая его с (5.7), получаем

$$(p-p_*, \operatorname{div} v)=0 \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

откуда

$$\operatorname{grad}(p-p_*)=0, \quad p_*=p+\text{const}.$$

Из каждой подпоследовательности последовательности p^m можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к $p+c$; следовательно, и вся последовательность p^m сходится к p в слабой топологии $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. □

---

[1] Это неравенство легко устанавливается для $v \in \mathscr{D}(\Omega)$, а по непрерывности оно имеет место для каждого $v \in H_0^1(\Omega)$. Тем же способом можно проверить, что в случае $n=2$ или 3

$$\|v\|^2=|\operatorname{div} v|^2_{L^2(\Omega)}+|\operatorname{rot} v|^2_{L^2(\Omega)}, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Замечание 5.1. Доопределим p, наложив требование

$$\int_{\Omega} p(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Предположим, что $p^0 \in L^2(\Omega)$ выбрано так, чтобы

$$\int_{\Omega} p^0(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Тогда, очевидно, мы имеем

$$\int_{\Omega} p^m(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad m \geqslant 1,$$

и вся последовательность p^m сходится к p слабо в пространстве $L^2(\Omega)$. □

5.2. Алгоритм Эрроу — Гурвица. В этом случае функции $\boldsymbol{u}$ и p также будут пределами двух последовательностей $\boldsymbol{u}^m$, p^m, которые определяются рекуррентно.

Алгоритм начинается с произвольных элементов $\boldsymbol{u}^0$, p^0:

$$\boldsymbol{u}^0 \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \quad p^0 \in L^2(\Omega). \tag{5.17}$$

Если p^m и $\boldsymbol{u}^m$ уже известны, то определим p^{m+1} и $\boldsymbol{u}^{m+1}$ как решения задач

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}^{m+1} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \\ ((\boldsymbol{u}^{m+1} - \boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v})) + \rho\nu((\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v})) - \rho(p^m, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) \\ = \rho(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \end{gathered} \tag{5.18}$$

$$\begin{gathered} p^{m+1} \in L^2(\Omega), \\ \alpha(p^{m+1} - p^m, q) + \rho(\operatorname{div} \boldsymbol{u}^{m+1}, q) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega). \end{gathered} \tag{5.19}$$

Пока мы предполагаем лишь, что ρ и α — строго положительные числа; дальнейшие требования на них появятся позже.

Существование и единственность элемента $\boldsymbol{u}^{m+1} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, удовлетворяющего (5.18), легко установить с помощью проекционной теоремы; $\boldsymbol{u}^{m+1}$ есть решение задачи Дирихле

$$\begin{gathered} -\Delta \boldsymbol{u}^{m+1} = -\Delta \boldsymbol{u}^m + \rho\nu\,\Delta \boldsymbol{u}^m - \rho \operatorname{grad} p^m + \rho \boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{u}^{m+1} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega). \end{gathered} \tag{5.20}$$

Тогда p^{m+1} явно задается формулой (5.19), которая эквивалентна следующей:

$$p^{m+1} = p^m - (\rho/\alpha) \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{m+1} \in L^2(\Omega). \tag{5.21}$$

Сходимость алгоритма.

Теорема 5.2. *Если числа α и ρ удовлетворяют условию*

$$0 < \rho < 2\alpha\nu/(\alpha\nu^2 + 1), \tag{5.22}$$

то $\boldsymbol{u}^m$ *сходится при* $m \to \infty$ *к* $\boldsymbol{u}$ *в* $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ *и* p^m *сходится к* p *слабо в* $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть

$$\boldsymbol{v}^m = \boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}, \tag{5.23}$$

$$q^m = p^m - p. \tag{5.24}$$

Уравнения (5.18) и (5.7) дают

$$((\boldsymbol{v}^{m+1} - \boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{v})) + \rho\nu((\boldsymbol{v}^m, \boldsymbol{v})) = \rho(q^m, \operatorname{div}\boldsymbol{v})\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega).$$

Полагая $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{m+1}$, получаем

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}^{m+1}\|^2 - \|\boldsymbol{v}^m\|^2 + \|\boldsymbol{v}^{m+1} - \boldsymbol{v}^m\|^2 + 2\rho\nu\|\boldsymbol{v}^{m+1}\|^2 \\
&= 2\rho\nu((\boldsymbol{v}^{m+1}, \boldsymbol{v}^{m+1} - \boldsymbol{v}^m)) + 2\rho(q^m, \operatorname{div}\boldsymbol{v}^{m+1}) \\
&\leqslant \delta\|\boldsymbol{v}^{m+1} - \boldsymbol{v}^m\|^2 + (\rho^2\nu^2/\delta)\|\boldsymbol{v}^{m+1}\|^2 + 2\rho(q^m, \operatorname{div}\boldsymbol{v}^{m+1}),
\end{aligned} \tag{5.25}$$

где $\delta > 0$ пока произвольно. Уравнение (5.19) с $q = q^{m+1}$ даст

$$\begin{aligned}
&\alpha|q^{m+1}|^2 - \alpha|q^m|^2 + \alpha|q^{m+1} - q^m|^2 = -2\rho(q^{m+1}, \operatorname{div}\boldsymbol{u}^{m+1}) \\
&= -2\rho(q^m, \operatorname{div}\boldsymbol{v}^{m+1}) - 2\rho(q^{m+1} - q^m, \operatorname{div}\boldsymbol{v}^{m+1}) \\
&\leqslant -2\rho(q^m, \operatorname{div}\boldsymbol{v}^{m+1}) + 2\rho|q^{m+1} - q^m||\operatorname{div}\boldsymbol{v}^{m+1}| \\
&\leqslant -2\rho(q^m, \operatorname{div}\boldsymbol{v}^{m+1}) + 2\rho|q^{m+1} - q^m|\|\boldsymbol{v}^{m+1}\|
\end{aligned}$$

(в силу (5.13)). Наконец, если δ такое же, как прежде, то

$$\begin{aligned}
&\alpha|q^{m+1}|^2 - \alpha|q^m|^2 + \alpha|q^{m+1} - q^m|^2 \\
&\leqslant -2\rho(q^m, \operatorname{div}\boldsymbol{v}^{m+1}) + \alpha\delta|q^{m+1} - q^m|^2 + (\rho^2/\alpha\delta)\|\boldsymbol{v}^{m+1}\|^2.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Складывая неравенства (5.25) и (5.26), получим

$$\begin{aligned}
&\alpha|q^{m+1}|^2 + \|\boldsymbol{v}^{m+1}\|^2 - \alpha|q^m|^2 - \|\boldsymbol{v}^m\| + \alpha(1-\delta)|q^{m+1} - q^m|^2 \\
&- (1-\delta)\|\boldsymbol{v}^{m+1} - \boldsymbol{v}^m\| + \rho(2\nu - \rho\nu^2/\delta - \rho/\alpha\delta)\|\boldsymbol{v}^{m+1}\|^2 \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Если выполняется условие (5.22), то $2\nu > \rho\nu^2 + \rho/\alpha$ и для некоторого δ, $0 < \delta < 1$, достаточно близкого к 1, мы опять имеем $2\nu > \gamma^{-1}(\rho\nu^2 + \rho/\alpha)$, так что

$$\rho(2\nu - \rho\nu^2/\delta - \rho/\alpha\delta) > 0. \tag{5.28}$$

Складывая неравенства (5.27) для $m = 0, \ldots, N$, мы придем к неравенству того же типа, что и (5.15), и доказательство завершается, как и в теореме 5.1. □

Замечание 5.2. Замечание 5.1 легко распространяется и на этот алгоритм.

5.3. Дискретная форма представленных выше алгоритмов. Мы опишем дискретную форму этих алгоритмов в конечно-разностном случае (аппроксимация (АПР1)).

Для того чтобы фактически вычислить ступенчатые функции u_h и π_h, которые являются решениями уравнений (3.64), (3.71) и (3.73), мы определим две последовательности ступенчатых функций u_h^m, π_h^m вида

$$u_h^m = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \xi_M w_{hM}, \quad \xi_M \in \mathbb{R}^n \text{ (т. е. } u_h^m \in W_h), \tag{5.29}$$

$$\pi_h^m = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \eta_M w_{hM}, \quad \eta_M \in \mathbb{R}; \tag{5.30}$$

они определяются рекуррентно по аналогии с приведенными выше алгоритмами.

Алгоритм Удзавы. Алгоритм начинается с произвольного элемента π_h^0 вида (5.30). Если π_h^m уже известно, то мы определяем u_h^{m+1} и π_h^{m+1} соотношениями

$$u_h^{m+1} \in W_h,$$

$$\nu((u_h^{m+1}, v_h))_h - (\pi_h^m, D_h v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in W_h, \tag{5.31}$$

$$\pi_h^{m+1}(M) = \pi_h^m(M) - \rho(D_h u_h^{m+1})(M), \tag{5.32}$$

где D_h — дискретный оператор div, определенный в (3.69).

Если ρ удовлетворяет тем же условиям (5.6), то повторение доказательства теоремы 5.1 показывает, что при $m \to \infty$

$$u_h^m \to u_h \text{ в } W_h, \tag{5.33}$$

$$\pi_h^m \to \pi_h \text{ с точностью до константы;} \tag{5.34}$$

сходимость имеет место для любой нормы в рассматриваемых конечномерных пространствах.

Алгоритм Эрроу — Гурвица. Алгоритм начинается с произвольных u_h^0, π_h^0 вида (5.29) и (5.30) соответственно. Если u_h^m, π_h^m уже известны, то мы определяем u_h^{m+1}, π_h^{m+1} соотношениями

$$u_h^{m+1} \in W_h,$$

$$((u_h^{m+1} - u_h^m, v_h))_h + \rho\nu((u_h^m, v_h))_h - \rho(\pi_h^m, D_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in W_h, \tag{5.35}$$

$$\pi_h^{m+1}(M) = \pi_h^m(M) - (\rho/\alpha) D_h u_h^{m+1}(M) \quad \forall M \in \mathring{\Omega}_h^1. \tag{5.36}$$

Для случая, когда ρ удовлетворяет условию (5.22), соответствующее распространение доказательства теоремы 5.2 дает соотношения сходимости (5.33), (5.34).

Дискретный алгоритм Эрроу — Гурвица. Задачи (5.31) и (5.35) являются дискретными задачами Дирихле, и они решаются просто и вполне стандартно. Все же интересно отметить, что в конечномерном случае мы можем использовать другую форму алгоритма Эрроу — Гурвица, для которой не надо решать никаких краевых задач по ходу итерационного процесса.

Если u_h^m, π_h^m уже известны, то определяем u_h^{m+1} из соотношений

$$u_h^{m+1} \in W_h,\ (u_h^{m+1} - u_h^m, v_h) + \rho\nu\,((u_h^m, v_h))_h - \rho\,(\pi_h^m, D_h v_h) = \rho\,(f, v_h) \quad \forall v_h \in W_h, \tag{5.37}$$

а затем π_h^{m+1} опять определяется формулой (5.36). Вариационное уравнение (5.37) эквивалентно следующим уравнениям:

$$u_h^{m+1}(M) = u_h^m(M) + \rho\nu \sum_{i=1}^{n} (\delta_{ih}^2 u_h^m)(M) - \rho\,(\bar\nabla_h \pi_h^m)(M) + \rho f_h(M) \quad \forall M \in \mathring{\Omega}_h^1, \tag{5.38}$$

где $\bar\nabla_h$ и f_h были определены в (3.74).

Доказательство теоремы 5.2 может быть распространено на этот случай следующим образом. Так как W_h — конечномерное пространство, то все нормы на W_h эквивалентны между собой и, следовательно, существует константа $S(h)$, зависящая от h, такая что

$$\|u_h\|_h \leqslant S(h)\,|u_h| \quad \forall u_h \in W_h. \tag{5.39}$$

В гл. III мы вычислим $S(h)$ $\left(S(h) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} (1/h_i^2)\right)^{1/2}\right)$ и будем широко применять это замечание. Теперь, если ρ удовлетворяет условию

$$0 < \rho < 2\alpha\nu/(\alpha\nu^2 S^2(h) + 1), \tag{5.40}$$

то сходимость (5.33) — (5.34) имеет место также для алгоритма (5.36) — (5.37).

Доказательство точно такое же, как и для теоремы 5.2. Неравенство (5.25) заменяется следующим неравенством ($v_h^m = u_h^m - u_h$, $\varkappa_h^m = \pi_h^m - \pi_h$):

$$\begin{aligned}
&|v_h^{m+1}|^2 - |v_h^m|^2 + |v_h^{m+1} - v_h^m| + 2\rho\nu\,\|v_h^{m+1}\|_h^2 \\
&= 2\rho\nu\,((v_h^{m+1}, v_h^{m+1} - v_h^m))_h + 2\rho\,(\varkappa_h^m, D_h v_h^{m+1}) \\
&\leqslant 2\rho\nu\,\|v_h^{m+1}\|_h \|v_h^{m+1} - v_h^m\|_h + 2\rho\,(\varkappa_h^m, D_h v_h^{m+1}) \\
&\leqslant 2\rho\nu S(h)\,\|v_h^{m+1}\|_h\,|v_h^{m+1} - v_h^m| + 2\rho\,(\varkappa_h^m, D_h v_h^{m+1}) \\
&\leqslant \delta\,|v_h^{m+1} - v_h^m|^2 + \delta^{-1}\rho^2\nu^2 S^2(h)\,\|v_h^{m+1}\|_h^2 + 2\rho\,(\varkappa_h^m, D_h v_h^{m+1}).
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Неравенство (5.27) соответственно заменяется на следующее:

$$\begin{aligned}
&\alpha\,|\varkappa_h^{m+1}|^2 + |v_h^{m+1}|^2 - \alpha\,|\varkappa_h^m|^2 - |v_h^m|^2 + \alpha\,(1-\delta)\,|\varkappa_h^{m+1} - \varkappa_h^m|^2 \\
&+ (1-\delta)\,|v_h^{m+1} - v_h^m|^2 + \rho\,(2\nu - \rho\nu^2 S^2(h)/\delta - \rho/\alpha\delta)\cdot \\
&\times \|v_h^{m+1}\|_h^2 \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

С учетом (5.40) неравенство (5.42) приводит к тому же заключению, что и (5.27).

§ 6. Слабо сжимаемая жидкость

Стационарные линеаризованные уравнения слабо сжимаемой жидкости имеют вид

$$-\nu\Delta \boldsymbol{u}_\varepsilon - \varepsilon^{-1}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_\varepsilon = \boldsymbol{f} \text{ в } \Omega, \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{6.2}$$

где $\varepsilon > 0$ „мало". Уравнения (6.1)—(6.2) являются также стационарными уравнениями Ламе из теории упругости.

Мы покажем, что задача (6.1)—(6.2) имеет единственное решение $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ и что $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ сходится к решению $\boldsymbol{u}$ задачи Стокса при $\varepsilon \to 0$.

Первоначально уравнения (6.1)—(6.2) использовались как „аппроксимирующие" для уравнений Стокса — один из путей преодоления трудности „$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0$" состоял в том, чтобы решать уравнения (6.1)—(6.2) с достаточно малым ε вместо того, чтобы решать сами уравнения Стокса. В наши дни, поскольку уже известно много эффективных алгоритмов для решения уравнений Стокса и поскольку дискретизация уравнений (6.1)—(6.2) приводит при очень малых ε к плохо обусловленной матрице, можно попытаться сделать обратное: вычислить $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ для малых ε, используя уравнения Стокса.

В п. 6.1 мы укажем связь между $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ и $\boldsymbol{u}$, а в п. 6.2 дадим асимптотическое разложение $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. Затем в п. 6.3 мы покажем, как можно построить вычисление $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ для малых ε, используя это асимптотическое разложение.

6.1. Сходимость $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ к $\boldsymbol{u}$.

Теорема 6.1. *Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$. Для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует единственный элемент $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, который удовлетворяет (6.1). Если $\varepsilon \to 0$, то*

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon \to \boldsymbol{u} \text{ в норме } \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \tag{6.3}$$

$$-\varepsilon^{-1}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_\varepsilon \to p \text{ в норме } L^2(\Omega), \tag{6.4}$$

где $\boldsymbol{u}$ и p определены в (2.6)—(2.9) и, кроме того,

$$\int_\Omega p(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{6.5}$$

Доказательство. Легко показать, что задача (6.1)—(6.2) эквивалентна следующей вариационной задаче:

найти $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, такое что

$$\nu((\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v})) + \varepsilon^{-1}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_\varepsilon, \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega). \tag{6.6}$$

Действительно, если $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ удовлетворяет (6.1)—(6.2), то $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ и удовлетворяет (6.6) для каждого $\boldsymbol{v} \in \mathscr{D}(\Omega)$. По непрерывности $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ удовлетворяет (6.6) также и для $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. Обратно, если

$u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ — решение (6.6), то u_ε удовлетворяет (6.1) в смысле теории распределений и (6.2) в смысле теорем о следе.

Существование и единственность u_ε, удовлетворяющего (6.6), являются следствием проекционной теоремы: мы применяем теорему 2.2 с

$$W = H_0^1(\Omega),\quad a(u, v) = \nu((u, v)) + \varepsilon^{-1}(\operatorname{div} u, \operatorname{div} v),$$
$$\langle l, v\rangle = (f, v).$$

Коэрцитивность a и непрерывность a и l очевидны.

Для доказательства (6.3) вычтем (2.7) из (6.1); это дает

$$-\nu\Delta(u_\varepsilon - u) - \varepsilon^{-1}\operatorname{grad}\operatorname{div} u_\varepsilon = \operatorname{grad} p, \tag{6.7}$$

а тогда

$$\nu((u_\varepsilon - u, v)) + \varepsilon^{-1}(\operatorname{div} u_\varepsilon, \operatorname{div} v) = -(p, \operatorname{div} v)\quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{6.8}$$

Справедливость уравнения (6.8) для $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ легко следует из (6.7); по непрерывности (6.8) удовлетворяется для каждого $v \in H_0^1(\Omega)$. Положим $v = u_\varepsilon - u$ в (6.8); мы получим

$$\nu\|u_\varepsilon - u\|^2 + \varepsilon^{-1}|\operatorname{div} u_\varepsilon|^2 = (-p, \operatorname{div} u_\varepsilon) \leqslant |p|\,|\operatorname{div} u_\varepsilon|$$
$$\leqslant (2\varepsilon)^{-1}|\operatorname{div} u_\varepsilon|^2 + (\varepsilon/2)|p|^2,$$

так что

$$\nu\|u_\varepsilon - u\|^2 + (2\varepsilon)^{-1}|\operatorname{div} u_\varepsilon|^2 \leqslant (\varepsilon/2)|p|^2. \tag{6.9}$$

Этим доказано (6.3). Теперь (6.7) показывает, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\operatorname{div} u_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \to -\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{6.10}$$

в норме $H^{-1}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, ибо $\Delta(u_\varepsilon - u)$ сходится к нулю в $H^{-1}(\Omega)$, в силу (6.3). Согласно доказываемой ниже лемме,

$$\left|p + \frac{\operatorname{div} u_\varepsilon}{\varepsilon}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p + \frac{\operatorname{div} u_\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\|_{H^{-1}(\Omega)}, \tag{6.11}$$

поскольку $\int\limits_\Omega \left(p + \frac{\operatorname{div} u_\varepsilon}{\varepsilon}\right) dx = 0$, что следует из (6.5) и того, что u_ε равняется нулю на $\partial\Omega$. Тем самым сходимость (6.4) доказана. □

Лемма 6.1. *Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует константа $c = c(\Omega)$, зависящая только от Ω, такая что*

$$|\sigma|_{L^2(\Omega)} \leqslant c(\Omega)\left\{\left|\int\limits_\Omega \sigma\, dx\right| + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\right\} \tag{6.12}$$

для каждого σ из $L^2(\Omega)$.

Доказательство. Обозначим через $[\sigma]$ выражение в фигурных скобках в правой части (6.12); $[\sigma]$ задает некоторую норму в $L^2(\Omega)$; действительно, очевидно, что это полунорма, а если $[\sigma]=0$, то $\sigma=\mathrm{const}$ (так как $\partial\sigma/\partial x_i=0$, $i=1, \ldots, n$) и эта константа равна нулю, поскольку $\int\limits_\Omega \sigma\, \mathrm{d}x=0$. Далее ясно, что существует константа $c'=c'(\Omega)$, такая что

$$[\sigma]\leqslant c'(\Omega)\,|\sigma|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\sigma\in L^2(\Omega). \tag{6.13}$$

Если мы покажем, что $L^2(\Omega)$ полно по норме $[\sigma]$, то по теореме о замкнутом графике $[\sigma]$ и $|\sigma|$ — эквивалентные нормы в $L^2(\Omega)$ и (6.12) будет доказано.

Докажем, что $L^2(\Omega)$ полно по норме $[\sigma]$. Пусть σ_m — произвольная последовательность Коши в этой норме. Тогда интегралы $\int\limits_\Omega \sigma_m\, \mathrm{d}x$ образуют последовательность Коши в $\mathbb{R}$, а производные $\partial\sigma_m/\partial x_i$ являются последовательностями Коши в $H^{-1}(\Omega)$:

$$\int\limits_\Omega \sigma_m\, \mathrm{d}x \to \lambda \text{ при } m\to\infty, \tag{6.14}$$

$$\frac{\partial\sigma_m}{\partial x_i}\to\chi_i \text{ при } m\to\infty \text{ в } H^{-1}(\Omega),\ 1\leqslant i\leqslant n. \tag{6.15}$$

Ясно, что $\langle \operatorname{grad}\sigma_m, \boldsymbol{v}\rangle=0 \quad \forall \boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$ и, в силу (6.15),

$$\sum_{i=1}^{m}\langle\chi_i, \boldsymbol{v}_i\rangle=0 \qquad \forall\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}.$$

Согласно предложению 1.1, существует распределение σ, такое что $\chi_i=\partial\sigma/\partial x_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. Предложение 1.2 показывает, что $\sigma\in L^2(\Omega)$. Мы можем выбрать σ так, чтобы $\int\limits_\Omega \sigma\,\mathrm{d}x=\lambda$, и легко видеть, что последовательность σ_m сходится к этому элементу σ из $L^2(\Omega)$ в норме $[\sigma]$. □

Замечание 6.1. Если область Ω несвязна, то оценка (6.12) останется справедливой, если заменить $\left|\int\limits_\Omega \sigma\,\mathrm{d}x\right|$ на $\sum\limits_j\left|\int\limits_{\Omega_j}\sigma\,\mathrm{d}x\right|$, где Ω_j — связные компоненты Ω. Чтобы распространить теорему 6.1 на этот случай, надо просто доопределить p, положив

$$\int\limits_{\Omega_j} p\,\mathrm{d}x=0 \qquad \forall\Omega_j. \tag{6.16}$$

6.2. Асимптотическое разложение для u_ε. Начиная с этого места, будем обозначать решение задачи Стокса, удовлетворяющее (6.5), через $\boldsymbol{u}^0$, p^0 (вместо $\boldsymbol{u}$, p). Покажем, что $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ имеет асимптотическое разложение

$$u_\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \ldots + \varepsilon^N u^N + \ldots, \tag{6.17}$$

где все u^i принадлежат $H_0^1(\Omega)$.

Функции u^i и некоторые вспомогательные функции p^i определяются рекуррентно следующим образом:

$$u^0,\ p^0 \text{ уже известны;} \tag{6.18}$$

если u^{m-1}, p^{m-1} $(m \geqslant 1)$ известны, то u^m, p^m определяются как решение неоднородной задачи Стокса

$$u^m \in H_0^1(\Omega), \quad p^m \in L^2(\Omega), \tag{6.19}$$

$$-\nu\Delta u^m + \operatorname{grad} p^m = 0, \tag{6.20}$$

$$\operatorname{div} u^m = -p^{m-1}, \tag{6.21}$$

$$\int_\Omega p^m \, dx = 0. \tag{6.22}$$

Существование и единственность u^m, p^m следует из теоремы 2.4. Условие (6.22) полезно в двух отношениях: оно гарантирует единственность p^m, которое в противном случае было бы единственно лишь с точностью до аддитивной постоянной; оно гарантирует также условия согласования, необходимые для $(m+1)$-го шага:

$$\int_\Omega \operatorname{div} u^{m+1} \, dx = \int_\Gamma u^{m+1}\nu \, d\Gamma = 0 = \int_\Omega p^m \, dx. \tag{6.23}$$

Обозначим через u_ε^N, p_ε^N, $N \geqslant 1$, величины

$$u_\varepsilon^N = \sum_{m=0}^N \varepsilon^m u^m, \tag{6.24}$$

$$p_\varepsilon^N = \sum_{m=0}^N \varepsilon^m p^m. \tag{6.25}$$

Теорема 6.2. *Пусть Ω — ограниченная область класса $\mathscr{C}^2$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждого $m \geqslant 1$ существуют однозначно определенные функции u^m, p^m, удовлетворяющие соотношениям* (6.19)—(6.22). *Для каждого $N \geqslant 0$ при $\varepsilon \to 0$*

$$\varepsilon^{-N}(u_\varepsilon - u_\varepsilon^N) \to 0 \text{ в норме } H_0^1(\Omega), \tag{6.26}$$

$$\varepsilon^{-N}(-\varepsilon^{-1}\operatorname{div} u_\varepsilon - p_\varepsilon^N) \to 0 \text{ в норме } L^2(\Omega). \tag{6.27}$$

Доказательство. Существование и единственность уже были установлены выше. Умножим (6.20) на ε^m, $m = 1, \ldots, N$, и сложим все эти уравнения. Затем прибавим к полученному уравнению уравнение, которому удовлетворяют u^0 и p^0 (раньше обозначавшиеся через u и p): $-\nu\Delta u^0+\operatorname{grad} p^0=f$. В результате получим

$$-\nu\Delta u_\varepsilon^N-\varepsilon^{-1}\operatorname{grad}\operatorname{div} u_\varepsilon^N=f-\varepsilon^N\operatorname{grad} p^N.$$

Сравнивая с (6.3), находим, что

$$u_\varepsilon-u_\varepsilon^N\in H_0^1(\Omega),\quad p^N\in L^2(\Omega), \tag{6.28}$$

$$-\nu\Delta(u_\varepsilon-u_\varepsilon^N)-\varepsilon^{-1}\operatorname{grad}\operatorname{div}(u_\varepsilon-u_\varepsilon^N)=\varepsilon^N\operatorname{grad} p^N. \tag{6.29}$$

Как и при доказательстве (6.8), убеждаемся, что (6.29) эквивалентно уравнению

$$\begin{gathered}\nu((u_\varepsilon-u_\varepsilon^N,\ v))+\varepsilon^{-1}(\operatorname{div}(u_\varepsilon-u_\varepsilon^N),\ \operatorname{div} v)\\ =-\varepsilon^N(p^N,\ \operatorname{div} v)\quad\forall v\in H_0^1(\Omega).\end{gathered} \tag{6.30}$$

Полагая $v=u_\varepsilon-u_\varepsilon^N$ в (6.30), получаем

$$\begin{aligned}\nu\|u_\varepsilon-u_\varepsilon^N\|^2+\varepsilon^{-1}|\operatorname{div}(u_\varepsilon-u_\varepsilon^N)|^2&=-\varepsilon^N(p^N,\ \operatorname{div}(u_\varepsilon-u_\varepsilon^N))\\ \leqslant\varepsilon^N p^N||\operatorname{div}(u_\varepsilon-u_\varepsilon^N)|&\leqslant(2\varepsilon^{-1})|\operatorname{div}(u_\varepsilon-u_\varepsilon^N)|^2+\\ &+(\varepsilon^{2N+1}/2)|p^N|^2,\end{aligned}$$

так что

$$\nu\|u_\varepsilon-u_\varepsilon^N\|^2+(2\varepsilon)^{-1}|\operatorname{div}(u_\varepsilon-u_\varepsilon^N)|^2\leqslant(\varepsilon^{2N+1}/2)|p^N|^2. \tag{6.31}$$

Из неравенства (6.31), очевидно, следует соотношение (6.26). Из него в свою очередь вытекает, что $(1/\varepsilon^N)\Delta(u_\varepsilon-u_\varepsilon^N)\to 0$ в $H^{-1}(\Omega)$, поэтому (6.29) показывает, что

$$\frac{1}{\varepsilon^{N+1}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}(u_\varepsilon-u_\varepsilon^N)\to\frac{\partial p^N}{\partial x_i}\ \text{ в } H^{-1}(\Omega),\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{6.32}$$

Но

$$\begin{aligned}-\varepsilon^{-1}\operatorname{grad}\operatorname{div} u_\varepsilon^N&=-\varepsilon^{-1}\sum_{m=1}^{N}\varepsilon^m\operatorname{grad}\operatorname{div} u^m\\ &=\varepsilon^{-1}\sum_{m=1}^{N}\varepsilon^m\operatorname{grad} p^{m-1}=\operatorname{grad}(p_\varepsilon^N-\varepsilon^N p^N),\end{aligned}$$

откуда, с учетом (6.32), следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon^N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{\operatorname{div} u_\varepsilon}{\varepsilon}-p_\varepsilon^N\right)\to 0\ \text{ в } H^{-1}(\Omega)\ \text{при } \varepsilon\to 0.$$

Наконец, (6.27) есть следствие (6.22), (6.25) и леммы 6.1. □

Замечание 6.2. Замечание 6.1 легко распространяется на теорему 6.2; а именно, эта теорема справедлива и для несвязной области Ω, если заменить условие (6.22) на условие

$$\int_{\Omega_j} p^m\,dx=0 \tag{6.33}$$

на каждой связной компоненте Ω_j области Ω.

Замечание 6.3. Дискретный вариант теоремы 6.2 был дан Фолком [1].

6.3. *Численные алгоритмы.* Наметим вкратце, как можно распространить алгоритмы, описанные в п. 5, на случай неоднородной задачи Стокса (6.19)—(6.22); решение этой задачи—в данный момент единственное препятствие для практического вычисления асимптотического разложения (6.17) для $\boldsymbol{u}_\varepsilon$.

Рассмотрим лишь алгоритм Удзавы. Несколько изменяя наши обозначения, запишем задачу (6.19)—(6.22) следующим образом: найти $\boldsymbol{v}$, p, такие что

$$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \quad p \in L^2(\Omega), \tag{6.34}$$

$$-\nu\Delta\boldsymbol{v} + \operatorname{grad} p = 0, \tag{6.35}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \varphi, \tag{6.36}$$

$$\int_\Omega p(x)\,dx = 0, \tag{6.37}$$

где φ удовлетворяет условию

$$\int_\Omega \varphi(x)\,dx = 0. \tag{6.38}$$

Существование и единственность $\boldsymbol{v}$ и p уже известны.

Алгоритм начинается с произвольного

$$p^0 \in L^2(\Omega), \text{ такого что } \int_\Omega p^0(x)\,dx = 0. \tag{6.39}$$

Если p^m найдено, то определяем $\boldsymbol{v}^{m+1}$ $(m \geqslant 0)$ из соотношений

$$\boldsymbol{v}^{m+1} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega),$$

$$\nu((\boldsymbol{v}^{m+1}, \boldsymbol{w})) - (p^m, \operatorname{div} \boldsymbol{w}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \tag{6.40}$$

$$p^{m+1} \in L^2(\Omega),$$

$$(p^{m+1} - p^m, \theta) + \rho(\operatorname{div} \boldsymbol{v}^{m+1} - \varphi, \theta) = 0 \quad \theta \in L^2(\Omega). \tag{6.41}$$

Уравнение (6.40)—это задача Дирихле для

$$\boldsymbol{v}^{m+1} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega),$$

$$-\nu\Delta\boldsymbol{v}^{m+1} = -\operatorname{grad} p^m \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega), \tag{6.42}$$

и (6.41) непосредственно дает p^{m+1}:

$$p^{m+1} = p^m - \rho(\operatorname{div} \boldsymbol{v}^{m+1} - \varphi) \in L^2(\Omega). \tag{6.43}$$

Заметим, что

$$\int_\Omega p^m\,dx = 0 \quad \forall m \geqslant 0. \tag{6.44}$$

Как и в случае теоремы 5.1 (см. также замечание 5.1), можно доказать следующий результат.

Теорема 6.3. *Если число ρ удовлетворяет условию*

$$0 < \rho < 2\nu, \tag{6.45}$$

то $\boldsymbol{v}^{m+1}$ сходится при $m \to \infty$ к $\boldsymbol{v}$ в норме $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, а p^{m+1} сходится к p слабо в $L^2(\Omega)$.

ГЛАВА II

СТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ—СТОКСА

Введение

В этой главе мы будем заниматься стационарными уравнениями Навье—Стокса; рассмотрения ведутся с той же точки зрения, что и в предыдущей главе, т. е. нас интересуют существование, единственность и численная аппроксимация решения. Тем не менее имеются три важных отличия от линейного случая; это:

— введение *методов компактности*. Для перехода к пределу в нелинейном члене нам нужны результаты о сильной сходимости. Они будут получены из соображений компактности.

— некоторые технические трудности, связанные с нелинейным членом и неравенствами Соболева. Следствие этих трудностей — такая трактовка уравнений, которая слабо меняется в зависимости от размерности пространства.

— вообще говоря, *неединственность решения*. Единственность имеет место, только когда „исходные данные достаточно малы" либо „вязкость достаточно велика".

В § 1 мы опишем некоторые теоремы существования, единственности и регулярности в различных ситуациях (ограниченные и неограниченные области Ω, однородные и неоднородные уравнения и т. д.). В п. 2 мы докажем дискретные неравенств Соболева и дискретные теоремы о компактности для пространст ступенчатых функций, рассмотренных при аппроксимации (АПР1) пространства V (аппроксимация с помощью конечных разностей) и для несогласованных конечных элементов, фигурирующих в аппроксимации (АПР5) пространства V. Аналогичные результаты для аппроксимаций (АПР2)—(АПР4) будут следствием теорем, доказанных в непрерывном случае. В § 3 мы займемся аппроксимацией рассматриваемой стационарной задачи — дискретизацией и решением дискретизированных задач. Цель § 4 — дать пример неединственности решения стационарных уравнений Навье—Стокса. Доказательство основано на рассуждениях, связанных с понятием топологической степени. Этот параграф по существу не зависит от предыдущего изложения.

§ 1. Теоремы существования и единственности

В настоящем параграфе мы получим некоторые результаты о существовании и единственности для стационарных (нелинейных) уравнений Навье—Стокса. Теоремы существования будут получены с помощью построения приближенных решений для этих уравнений методом Галёркина и последующего перехода к пределу, как в линейном случае. Как уже было сказано, для перехода к пределу нам нужны, в нелинейном случае, некоторые результаты о сильной сходимости; они будут получены при помощи методов компактности.

В п. 1.1 мы напомним неравенства Соболева и некоторые теоремы о компактности в пространствах Соболева; эти теоремы являются основой метода компактности. В п. 1.2 мы дадим вариационную формулировку для однородных уравнений Навье—Стокса (т. е. уравнений Навье—Стокса с однородными краевыми условиями); будут изучены некоторые свойства нелинейной (трилинейной) формы, которая фигурирует в вариационной формулировке. Затем мы дадим весьма общую теорему существования и довольно ограниченный результат о единственности. В п. 1.3 рассматривается случай, когда область Ω неограничена и доказываются результаты о регулярности решений. Наконец, п. 1.4 посвящен неоднородным уравнениям Навье—Стокса.

1.1. Неравенства Соболева и теоремы о компактности.

Теоремы вложения. Мы напомним теоремы вложения Соболева, которые, начиная с этого места, будем часто использовать. Пусть m — некоторое целое число, а p — произвольное число, большее или равное единице, $p \geqslant 1$. Тогда если $1/p - m/n = 1/q > 0$, то пространство $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ вложено в $L^q(\mathbb{R}^n)$, причем вложение непрерывно. Если $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ и $1/p - m/n = 0$, то u принадлежит $L^q(\mathcal{O})$ для любой ограниченной области $\mathcal{O}$ и любого q, $1 \leqslant q < \infty$. Если $1/p - m/n < 0$, то всякая функция из $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ почти всюду совпадает с некоторой непрерывной функцией; такая функция принадлежит также к соответствующим классам Гёльдера или Липшица, но здесь эти свойства использоваться не будут; если данная функция принадлежит $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ с $1/p - m/n < 0$, то ее производные порядка α принадлежат $W^{m-\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ и для этих производных справедливы теоремы вложения, аналогичные предыдущей, если $1/p - (m-\alpha)/n > 0$.

Для $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $m \geqslant 1$, $1 < p < \infty$,

$$\text{если } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = \frac{1}{q} > 0, \text{ то } |u|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(m, p, n) \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)};$$

$$\text{если } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0, \text{ то } |u|_{L^q(\mathcal{O})} \leqslant c(m, p, n, q, \mathcal{O}) \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}$$

для любой ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ и любого q, $1 \leqslant q < \infty$; (1.1)

если $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, то $|u|_{\mathscr{C}^0(\mathcal{O})} \leqslant c(m, n, p, \mathcal{O}) \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}$ для любой ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$.

В случае когда Ω — произвольная открытая область в $\mathbb{R}^n$, результаты, аналогичные (1.1), обычно можно получить, если Ω достаточно гладка, а именно если

существует непрерывный линейный оператор продолжения $\Pi \in \mathscr{L}(W^{m,p}(\Omega), W^{m,p}(\mathbb{R}^n))$. (1.2)

Свойство (1.2) выполняется, например, для всякой локально-липшицевой области Ω. Если (1.2) выполнено, то утверждения (1.1), примененные к Πu, $u \in W^{m,p}(\Omega)$, $m \geqslant 1$, $1 < p < \infty$, дают:

если $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = \frac{1}{q} > 0$,

то $|u|_{L^q(\Omega)} \leqslant c(m, p, n, \Omega) \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$;

если $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$,

то $|u|_{L^q(\mathcal{O})} \leqslant c(m, p, n, q, \mathcal{O}, \Omega) \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ для любого q, $1 \leqslant q < \infty$, и любой ограниченной области $\mathcal{O} \subset \overline{\Omega}$; (1.3)

если $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$,

то $|u|_{\mathscr{C}^0(\mathcal{O})} \leqslant c(m, p, n, q, \Omega, \mathcal{O}) \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ для любой ограниченной области $\mathcal{O} \subset \overline{\Omega}$.

Если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)$, то функция $\tilde{u}$, равная u в Ω и нулю в $C\Omega$, принадлежит $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, и, следовательно, утверждения (1.3) имеют место без каких-либо предположений относительно Ω.

Особый интерес для нас представляет случай $p = 2$, $m = 1$, т. е. случай пространства $H_0^1(\Omega)$. Не требуя никаких свойств регулярности от Ω, мы имеем для $u \in H_0^1(\Omega)$

$n = 2$: $|u|_{L^q(\mathcal{O})} \leqslant c(q, \mathcal{O}, \Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ для любой ограниченной области $\mathcal{O} \subset \Omega$ и любого q, $1 \leqslant q < \infty$;

$n = 3$: $|u|_{L^6(\Omega)} \leqslant c(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$; (1.4)

$n = 4$: $|u|_{L^4(\Omega)} \leqslant c(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$;

$n \geqslant 3$: $|u|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)} \leqslant c(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Теоремы о компактности.

Теорема 1.1. *Пусть Ω — произвольная ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию (1.2). Тогда вложение*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{q_1}(\Omega) \tag{1.5}$$

компактно для любого q_1, $1 \leqslant q_1 < \infty$, если $p \geqslant n$, и для любого q_1, $1 \leqslant q_1 < q$ (где q задается условием $1/p - 1/n = 1/q$), если $1 \leqslant p < n$. При тех же значениях p и q_1 вложение

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \subset L^{q_1}(\Omega) \tag{1.6}$$

компактно для любой открытой ограниченной области Ω.

В качестве частного случая теоремы 1.1 отметим, что для любой неограниченной области Ω, если $u \in W^{1,p}(\Omega)$, то сужение u на всякую ограниченную область $\mathcal{O}$, удовлетворяющую условию $\mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$, принадлежит $L^{q_1}(\mathcal{O})$ и это отображение сужения

$$W^{1,p}(\Omega) \to L^{q_1}(\Omega) \tag{1.7}$$

компактно (значения p и q_1 те же).

Что касается указанных выше свойств пространств Соболева, то читатель отсылается к литературе, приведенной в § 1, гл. I (см. также в конце книги комментарии к гл. I).

1.2. Однородные уравнения Навье — Стокса. Пусть Ω — липшицева ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ и $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ — заданная вектор-функция. Мы ищем вектор-функцию $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ и скалярную функцию p, представляющие скорость и давление жидкости, которые определены в Ω и удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям:

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{f} \text{ в } \Omega, \tag{1.8}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{1.10}$$

Точно так же, как в п. 2.1 гл. I, если $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u}$, p — гладкие функции, удовлетворяющие (1.8)—(1.10), то $\boldsymbol{u} \in V$ и для каждого $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}), \tag{1.11}$$

где

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j \, dx. \tag{1.12}$$

Далее, соображения непрерывности показывают, что уравнение (1.11) удовлетворяется для любого $\boldsymbol{v} \in V$. Обратно, если $\boldsymbol{u}$ — функция из V, такая что (1.11) имеет место для каждого $\boldsymbol{v} \in V$, то, в силу предложения 1.3 гл. I, существует распределение p, для которого удовлетворяется (1.8), а (1.9)—(1.10) будут выполнены, поскольку $\boldsymbol{u} \in V$.

Для $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ из V выражение $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ не обязательно имеет смысл, и поэтому вариационная формулировка задачи (1.8)—(1.10) не совпадает в точности с формулировкой „найти $\boldsymbol{u} \in V$, такое что (1.11) имеет место для каждого $\boldsymbol{v} \in V$". Она будет немного отличаться от нее, и мы выясним, в ч м это отличие заключается после того, как изучим некоторые свойства формы $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

Введем сначала следующие пространства:

$$\tilde{V} \text{ — замыкание } \mathscr{V} \text{ в } \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^n(\Omega); \tag{1.13}$$

конечно же, $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^n(\Omega)$ и $\tilde{V}$ наделяются нормой

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H_0^1(\Omega)} + |\boldsymbol{u}|_{L^n(\Omega)}. \tag{1.14}$$

Вообще говоря, $\tilde{V}$ — подпространство в V, отличное от V, но, в силу (1.4), $\tilde{V} = V$ для $n = 2, 3, 4$ (в случае когда область Ω ограничена);

$$V_s \text{ — замыкание } \mathscr{V} \text{ в } \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \cap \boldsymbol{H}^s(\Omega) \ (s \geqslant 1); \tag{1.15}$$

опять подразумевается, что $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \cap \boldsymbol{H}^s(\Omega)$ и V_s наделены гильбертовой нормой

$$\left\{\|\boldsymbol{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{u}\|_{H^s(\Omega)}^2\right\}^{1/2}; \tag{1.16}$$

V_s вложено в V.

Трилинейная форма b. Форма b трилинейна и непрерывна на различных комбинациях пространств V, $\tilde{V}$, V_s. Наиболее подходящим для нас результатом относительно этой формы является следующий результат, не зависящий от каких-либо свойств Ω.

Лемма 1.1. *Форма b определена, трилинейна и непрерывна на $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \times \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \times (\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^n(\Omega))$, независимо от того, ограничена или неограничена область Ω и какова размерность пространства $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Если $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ и $\boldsymbol{w} \in \tilde{V}$, то, согласно (1.4), при $n \geqslant 3$

$$u_i \in L^{2n/(n-2)}(\Omega), \quad D_i v_j \in L^2(\Omega), \quad w_j \in L^n(\Omega), \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n.$$

В силу неравенства Гёльдера, $u_i(D_i v_j) w_j$ принадлежит $L^1(\Omega)$ и

$$\left|\int_\Omega u_i D_i v_j w_j \, dx\right| \leqslant |u_i|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)} \, |D_i v_j|_{L^2(\Omega)} \, |w_j|_{L^n(\Omega)}. \tag{1.17}$$

Поэтому $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ определено и

$$|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant c(n) \|\boldsymbol{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1(\Omega)} \|\boldsymbol{w}\|_{H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)}. \tag{1.18}$$

Форма b, очевидно, трилинейна, а (1.18) гарантирует ее непрерывность. В случае $n=2$ мы имеем тот же результат ($H_0^1(\Omega)\cap$ $\cap L^2(\Omega)=H_0^1(\Omega)$), только (1.17) надо заменить на

$$\left|\int_\Omega u_i D_i v_j w_j \,\mathrm{d}x\right| \leqslant |u_i|_{L^4(\Omega)}\,|D_i v_j|_{L^2(\Omega)}\,|w_j|_{L^4(\Omega)}. \quad \square \qquad (1.19)$$

В частности, справедлива

Лемма 1.2. *Для произвольной открытой области Ω форма b есть трилинейная непрерывная форма на $V\times V\times\tilde V$. Если Ω ограничена и $n\leqslant 4$, то b — трилинейная непрерывная форма на $V\times V\times V$.*

Мы докажем, когда потребуется, и некоторые другие свойства формы b, аналогичные приведенным выше; доказательство всегда такое же, как и для леммы 1.1 (используются неравенство Гёльдера и теорема вложения (1.4)).

Обозначим через $B(u, v)$, u, $v\in H_0^1(\Omega)$, линейную непрерывную форму на $\tilde V$, определенную следующим образом:

$$\langle B(u, v), w\rangle = b(u, v, w), \quad u, v\in H_0^1(\Omega), \quad \forall w\in\tilde V. \qquad (1.20)$$

Для случая $u=v$ положим

$$B(u)=B(u, u), \quad u\in H_0^1(\Omega). \qquad (1.21)$$

Другое фундаментальное свойство формы b таково:

Лемма 1.3. *Для любой открытой области Ω*

$$b(u, v, v)=0 \quad \forall u\in V, \quad v\in H_0^1(\Omega)\cap L^n(\Omega), \qquad (1.22)$$

$$b(u, v, w)=-b(u, w, v)\,\forall u\in V,\ v,\ w\in H_0^1(\Omega)\cap L^n(\Omega). \qquad (1.23)$$

Доказательство. Свойство (1.23) вытекает из (1.22) (надо заменить v на $v+w$ и воспользоваться полилинейностью b). Докажем (1.22). Достаточно установить это равенство для $u\in\mathscr{V}$ и $v\in\mathscr{D}(\Omega)$. Но для таких u и v

$$\int_\Omega u_i D_i v_j v_j \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u_i D_i \frac{(v_j)^2}{2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_\Omega D_i u_i (v_j)^2 \,\mathrm{d}x,$$

$$b(u, v, v) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \int_\Omega \operatorname{div} u\,(v_j)^2\,\mathrm{d}x = 0. \quad \square \qquad (1.24)$$

Вариационная формулировка. Для ограниченной области Ω и произвольного n сопоставим задаче (1.8)—(1.10) задачу

найти $u\in V$, такое что

$$\nu((u, v)) + b(u, u, v) = (f, v) \quad \forall v\in\tilde V \qquad (1.25)$$

(f — заданный элемент из $L^2(\Omega)$). Из (1.11) и (1.13) ясно, что если u и p — гладкие функции, удовлетворяющие (1.8)—(1.10), то u удовлетворяет (1.25). Обратно, если $u \in V$ удовлетворяет (1.25), то

$$\left\langle -\nu\Delta u + \sum_i u_i D_i u - f, v \right\rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}, \tag{1.26}$$

$\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ и $u_i D_i u \in L^{n'}(\Omega)$ $(1/n' = 1 - 1/n)$,

поскольку $u_i \in L^{2n/(n-2)}(\Omega)$, в силу (1.4), и $D_i u \in L^2(\Omega)$. Далее, согласно предложениям 1.1 и 1.2 гл. I, существует распределение $p \in L^1_{loc}(\Omega)$ [1], такое что (1.8) удовлетворяется в смысле теории распределений, а тогда (1.9) и (1.10) удовлетворяются соответственно в смысле теории распределений и теоремы о следе.

Теорема 1.2. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и f — заданный элемент из $H^{-1}(\Omega)$. Тогда задача (1.25) имеет по крайней мере одно решение $u \in V$ и существует распределение $p \in L^1_{loc}(\Omega)$, такое что уравнения (1.8) — (1.9) удовлетворяются.*

Доказательство. Нам надо только доказать существование u; существование p уже было установлено и интерпретация (1.8)—(1.9) была дана. Существование u докажем методом Галёркина — построим некоторое приближенное решение задачи (1.25), а затем перейдем к пределу.

Пространство V сепарабельно как подпространство в $H^1_0(\Omega)$. В силу (1.13), существует последовательность $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ линейно-независимых элементов из $\mathcal{V}$, которая тотальна [2] в V. Эта последовательность линейно-независима и тотальна также и в V.

Для каждого фиксированного целого $m \geqslant 1$ определим приближенное решение u_m задачи (1.25) с помощью соотношений

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_{i,m} w_i, \quad \xi_{i,m} \in \mathbb{R}, \tag{1.27}$$

$$\nu((u_m, w_k)) + b(u_m, u_m, w_k) = \langle f, w_k \rangle, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1.28}$$

Уравнения (1.27) — (1.28) представляют собой систему нелинейных уравнений относительно $\xi_{1,m}, \ldots, \xi_{m,m}$, и хотя существование решения этой системы не очевидно, оно вытекает из следующей леммы.

Лемма 1.4. *Пусть X — конечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением $[.,.]$ и нормой $[\cdot]$, и пусть P — непрерывное отображение X в себя, такое что*

$$[P(\xi), \xi] > 0 \quad \text{для} \quad [\xi] = k > 0. \tag{1.29}$$

[1] Предложение I.1.1 показывает, что p существует как распределение, $p \in D'(\Omega)$. Предложение I.1.2 и дальнейшие соображения, связанные с регуляризацией, показывают, что p как функция принадлежит (во всяком случае) $L^1_{loc}(\Omega)$.

[2] То есть порождает всюду плотное линейное подпространство.— *Прим. ред.*

Тогда существует элемент $\xi \in X$ *с* $[\xi] \leqslant k$, *для которого*

$$P(\xi) = 0. \tag{1.30}$$

Доказательство леммы 1.4 последует за доказательством теоремы. Мы применим эту лемму для доказательства существования $\boldsymbol{u}_m$ следующим образом. Возьмем в качестве X пространство, натянутое на $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$; скалярным произведением в X пусть будет скалярное произведение $((\cdot, \cdot))$, индуцированное из V, а $P = P_m$ определим так:

$$[P_m(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}] = ((P_m(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})) = \nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})$$
$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in X.$$

Непрерывность отображения P_m очевидна; покажем, что выполнено (1.29):

$$[P_m(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}] = \nu \|\boldsymbol{u}\|^2 + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle = (\text{в силу} \quad (1.22))$$
$$= \nu \|\boldsymbol{u}\|^2 - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle \geqslant \nu \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{f}\|_{V'} \|\boldsymbol{u}\|,$$
$$[P_m(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}] \geqslant \|\boldsymbol{u}\| (\nu \|\boldsymbol{u}\| - \|\boldsymbol{f}\|_{V'}). \tag{1.31}$$

Отсюда следует, что $[P_m(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}] > 0$ для $\|\boldsymbol{u}\| = k$, если k достаточно велико (точнее, если $k > (1/\nu)\|\boldsymbol{f}\|_{V'}$). Предположения леммы 1.4 выполнены, и, значит, существует некоторое решение $\boldsymbol{u}_m$ уравнений (1.27) — (1.28).

Переход к пределу. Умножим (1.28) на $\xi_{k,m}$ и сложим получающиеся равенства для $k = 1, \ldots, m$. Это дает

$$\nu \|\boldsymbol{u}_m\|^2 + b(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_m \rangle,$$

откуда, ввиду (1.24),

$$\nu \|\boldsymbol{u}_m\|^2 = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_m \rangle \leqslant \|\boldsymbol{f}\|_{V'} \|\boldsymbol{u}_m\|.$$

Отсюда получаем априорную оценку

$$\|\boldsymbol{u}_m\| \leqslant \nu^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{V'}. \tag{1.32}$$

Так как последовательность $\boldsymbol{u}_m$ остается ограниченной в V, то существуют такое $\boldsymbol{u} \in V$ и такая подпоследовательность $m' \to \infty$, что

$$\boldsymbol{u}_{m'} \to \boldsymbol{u} \text{ в слабой топологии } V. \tag{1.33}$$

Теорема 1.2 о компактности показывает, в частности, что вложение V в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ компактно; следовательно,

$$\boldsymbol{u}_{m'} \to \boldsymbol{u} \text{ в норме } \boldsymbol{L}^2(\Omega). \tag{1.34}$$

Примем временно на веру следующую лемму.

Лемма 1.5. *Если* $\boldsymbol{u}_\mu$ *сходится к* $\boldsymbol{u}$ *слабо в* V *и сильно в* $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, *то*

$$b(\boldsymbol{u}_\mu, \boldsymbol{u}_\mu, \boldsymbol{v}) \to b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}. \tag{1.35}$$

Тогда мы можем перейти в (1.28) к пределу по подпоследовательности $m'\to\infty$. Из (1.33)—(1.35) вытекает, что

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))+b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle \tag{1.36}$$

для любого $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m, \ldots$. Равенство (1.36) справедливо также для любого $\boldsymbol{v}$, которое является линейной комбинацией $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m, \ldots$. Так как эти комбинации плотны в $\tilde{V}$, то соображения непрерывности показывают, что (1.36) имеет место для каждого $\boldsymbol{v}\in\tilde{V}$ и что $\boldsymbol{u}$ — решение задачи (1.25). □

Доказательство леммы 1.4. Эта лемма — простое следствие теоремы Брауэра о неподвижной точке. Предположим, что P не обращается в нуль в шаре $D\subset X$ с центром в 0 и радиусом k. Тогда преобразование $\xi\mapsto S(\xi)=-kP(\xi)/[P(\xi)]$ отображает D в себя и является непрерывным. Из теоремы Брауэра вытекает, что S имеет неподвижную точку в D: существует точка $\xi_0\in D$, такая что $-kP(\xi_0)/[P(\xi_0)]=\xi_0$. Если мы возьмем норму от обеих частей этого равенства, то увидим, что $[\xi_0]=k$, а если умножим обе части равенства скалярно на ξ_0, то найдем, что $[\xi_0]^2=k^2=-k[P(\xi_0), \xi_0]/[P(\xi_0)]$. Это равенство противоречит (1.29), и, таким образом, $P(\xi)$ должно обращаться в нуль в некоторой точке шара D. □

Доказательство леммы 1.5. Легко показать, как и в случае (1.22)—(1.23), что

$$b(\boldsymbol{u}_\mu, \boldsymbol{u}_\mu, \boldsymbol{v})=-b(\boldsymbol{u}_\mu, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_\mu)=-\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \boldsymbol{u}_{\mu_i}\boldsymbol{u}_{\mu_j}D_i\boldsymbol{v}_j\,dx.$$

Но $\boldsymbol{u}_{\mu_i}$ сходится к $\boldsymbol{u}_i$ сильно в $L^2(\Omega)$; так как $D_i\boldsymbol{v}_j\in L^\infty(\Omega)$, то легко проверяется, что

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}_{\mu_i}\boldsymbol{u}_{\mu_j}D_i\boldsymbol{v}_j\,dx\to\int_\Omega \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_jD_i\boldsymbol{v}_j\,dx.$$

Следовательно, $b(\boldsymbol{u}_\mu, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_\mu)$ сходится к $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})=-b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. □

Единственность. Что касается единственности, то мы имеем лишь следующий результат:

Теорема 1.3. *Если $n\leqslant 4$ и ν достаточно велико или $\boldsymbol{f}$ „достаточно мало“, так что*

$$\nu^2>c(n)\|\boldsymbol{f}\|_{V'}, \tag{1.37}$$

то существует единственное решение $\boldsymbol{u}$ задачи (1.25).

Константа $c(n)$ в (1.37) — это константа $c(n)$ из (1.18); ее оценка связана с оценкой констант в (1.4); последняя дана, например, у Лионса [1].

Доказательство. Мы можем положить $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ в (1.25), так как $\tilde{V}=V$ для $n\leqslant 4$; учитывая (1.22), получим

$$\nu\|\boldsymbol{u}\|^2=\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}\rangle\leqslant\|\boldsymbol{f}\|_{V'}\|\boldsymbol{u}\|, \tag{1.38}$$

так что всякое решение $\boldsymbol{u}$ задачи (1.25) удовлетворяет неравенству

$$\|\boldsymbol{u}\| \leqslant \nu^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{V'}. \tag{1.39}$$

Пусть теперь $\boldsymbol{u}_*$ и $\boldsymbol{u}_{**}$ — два различных решения задачи (1.25), и пусть $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_* - \boldsymbol{u}_{**}$. Вычтем друг из друга уравнения (1.25), соответствующие $\boldsymbol{u}_*$ и $\boldsymbol{u}_{**}$. Получим

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{1.40}$$

Взяв $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ в (1.40) и снова используя (1.22), приходим к равенству $\nu \|\boldsymbol{u}\|^2 = -b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{u})$. Вместе с (1.18) и (1.39) это дает (для $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_*$)

$$\nu \|\boldsymbol{u}\|^2 \leqslant c(n) \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{u}_*\| \leqslant (c(n)/\nu) \|\boldsymbol{f}\|_{V'} \|\boldsymbol{u}\|^2,$$
$$(\nu - (c(n)/\nu) \|\boldsymbol{f}\|_{V'}) \|\boldsymbol{u}\|^2 \leqslant 0.$$

Ввиду (1.37) отсюда следует, что $\|\boldsymbol{u}\| = 0$, т. е. $\boldsymbol{u}_* = \boldsymbol{u}_{**}$. □

Замечание 1.1. Решение задачи (1.25), вероятно, неединственно, если (1.37) не выполняется, или по крайней мере неединственно для достаточно малых ν (при фиксированном f). Результат о неединственности для малых ν будет доказан в § 4 для задачи, очень похожей на (1.25).

Замечание 1.2. Для $n > 4$ теорема 1.2 гарантирует существование решения $\boldsymbol{u}$ задачи (1.25), удовлетворяющего (1.39); действительно, оценки (1.32) и (1.33) дают

$$\|\boldsymbol{u}\| \leqslant \varliminf_{m' \to \infty} \|\boldsymbol{u}_{m'}\| \leqslant \nu^{-1} \|f\|_{V'}. \tag{1.41}$$

Тем не менее доказательство теоремы 1.3 нельзя распространить на этот случай; (1.40) имеет место для каждого $\boldsymbol{v} \in \tilde{V}$, и нельзя взять $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$.

1.3. Однородные уравнения Навье—Стокса (продолжение).

Неограниченный случай. Мы можем изучить случай неограниченной области Ω, используя те же пространства, что и в п. 2.3 гл. I. Напомним, что

$$Y \text{ — пополнение пространства } \mathscr{V} \text{ в норме } \|\cdot\|. \tag{1.42}$$

Рассмотрим также пространство $\tilde{Y}$:

$$\tilde{Y} \text{ — замыкание } \mathscr{V} \text{ в пространстве } Y \cap L^n(\Omega), \tag{1.43}$$
снабженном нормой
$$\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{u}\|_{L^n(\Omega)}.[1] \tag{1.44}$$

Напомним, что, в силу леммы 2.3 гл. I, для $n \geqslant 3$ имеет место непрерывное вложение

$$Y \subset \{\boldsymbol{u} \in L^\alpha(\Omega),\ D_i \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}, \tag{1.45}$$

[1] Для гладких открытых областей Ω пространство Y, вероятно, совпадает с $Y \cap L^n(\Omega)$, но этот результат не доказан.

где

$$\alpha = 2n/(n-2). \tag{1.46}$$

Так как область Ω неограничена, то пространства $L^\gamma(\Omega)$ не убывают с возрастанием γ, как в ограниченном случае, и $\tilde{Y} \neq Y$ даже для $n \leqslant 4$. Лемму 1.2 нельзя распространить на неограниченный случай; тем не менее справедлива

Лемма 1.6. *Для $n \geqslant 3$ форма b определена, трилинейна и непрерывна на $Y \times Y \times \tilde{Y}$ и*

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{u} \in Y, \ \boldsymbol{v} \in \tilde{Y} \tag{1.47}$$

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{u} \in Y, \ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \tilde{Y}. \tag{1.48}$$

Доказательство. Для $n \geqslant 3$ выполняется неравенство (1.17); поэтому для $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in Y$, $\boldsymbol{w} \in \tilde{Y}$ мы имеем

$$\left| \int_\Omega u_i D_i v_j w_j \mathrm{d}x \right| \leqslant c \|\boldsymbol{u}\|_Y \|\boldsymbol{v}\|_Y \|\boldsymbol{w}\|_{\tilde{Y}},$$

так что

$$| b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) | \leqslant c(n) \|\boldsymbol{u}\|_Y \|\boldsymbol{v}\|_Y \|\boldsymbol{w}\|_{\tilde{Y}}. \tag{1.49}$$

Соотношения (1.47) и (1.48) доказываются теперь точно так же, как (1.22) и (1.23): мы проверяем их для $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathscr{V}$, а затем переходим к пределу. $\square$

Вариационная формулировка задачи (1.8)—(1.10) для случая неограниченной области Ω и $n \geqslant 3$ такова:

найти $\boldsymbol{u} \in Y$, такое, что

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle \quad \forall \boldsymbol{v} \in \tilde{Y}. \tag{1.50}$$

Теорема 1.4. *Пусть Ω — открытая область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и пусть $\boldsymbol{f}$ — заданный элемент из Y' — пространства, сопряженного к Y. Тогда существует по крайней мере один элемент $\boldsymbol{u} \in Y$, удовлетворяющий* (1.50).

Доказательство. Доказательство очень похоже на доказательство теоремы 1.2 (ограниченный случай). Существует последовательность $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m, \ldots$, линейно-независимых элементов из $\mathscr{V}$, которая тотальна в $\tilde{Y}$, а следовательно, и в Y; эта последовательность необязательно та же, что и прежде. Определим приближенное решение $\boldsymbol{u}_m$ с помощью соотношений

$$\boldsymbol{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_{i,m} \boldsymbol{w}_i, \quad \xi_{i,m} \in \mathbb{R}; \tag{1.51}$$

$$\nu((\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_k)) + b(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_k) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_k \rangle, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1.52}$$

Существование $\boldsymbol{u}_m$, удовлетворяющего (1.51)—(1.52), устанавливается в точности так же, как и выше, с использованием леммы 1.4. Мы имеем априорную оценку, аналогичную (1.32):

$$\|u_m\| \leqslant \nu^{-1}\|f\|_{V'} \quad (\|\cdot\| \text{— норма в } Y). \tag{1.53}$$

Поэтому существуют такая подпоследовательность $m' \to \infty$ и такой элемент $u \in Y$, что

$$u_m \to u \text{ слабо в } Y. \tag{1.54}$$

Доказательство завершается, как и в ограниченном случае, за исключением перехода к пределу в нелинейном члене $b(u_{m'}, u_{m'}, v)$; неверно, что $u_{m'}$ сильно сходится к u в $L^2(\Omega)$, поскольку, вообще говоря, u даже не принадлежит $L^2(\Omega)$ ($Y \not\subset L^2(\Omega)$). Однако справедлива следующая лемма. □

Лемма 1.7. *Если u_μ слабо сходится к u в Y, то*

$$b(u_\mu, u_\mu, v) \to b(u, u, v) \quad \forall v \in \mathcal{V}. \tag{1.55}$$

Доказательство. Мы можем показать, что

$$u_\mu \to u \text{ сильно в } L^2_{loc(\Omega)}, \tag{1.56}$$

т. е. что

$$u_\mu \to u \text{ в } L^2(\mathcal{O}) \tag{1.57}$$

для каждой ограниченной области $\mathcal{O} \subset \Omega$. Действительно, пусть $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi = 1$ на $\mathcal{O}$, и пусть Ω' — какая-нибудь ограниченная подобласть в Ω, содержащая носитель ψ. Тогда функции ψu_μ принадлежат $H_0^1(\Omega')$, и поскольку u_μ слабо сходится к u в Y, то $\psi u_\mu \to \psi u$ слабо в $H_0^1(\Omega')$. Следовательно, $\psi u_\mu \to \psi u$ сильно в $L^2(\Omega')$; поэтому мы имеем

$$\int_{\mathcal{O}} |u_\mu - u|^2 \, dx \leqslant \int_{\Omega'} \psi^2 |u_\mu - u|^2 \, dx \to 0,$$

откуда и следует (1.57).

Так как u_μ сходится к u в норме L^2 на носителе функции v, то сходимость (1.55) теперь доказывается, как в ограниченном случае:

$$b(u_\mu, u_\mu, v) = -b(u_\mu, v, u_\mu) \to -b(u, v, u) = b(u, u, v). \; \square$$

Замечание 1.3. (i) Для $n=2$ элемент u из Y не принадлежит, вообще говоря, никакому пространству $L^\beta(\Omega)$. По этой причине доказательство леммы 1.6 не проходит и b не определено на $Y \times Y \times Y$.

Мы можем заменить задачу (1.50) следующей задачей: найти $u \in Y$, такое что

$$\nu((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

То же самое доказательство, что и для теоремы 1.4, показывает, что такой элемент u существует для любого заданного f из Y'.

(ii) Поскольку $Y \neq \tilde{Y}$ (ни при каких n), то нельзя положить $v = u$ в (1.50). Следовательно, доказательство теоремы 1.2 не распространяется на неограниченный случай даже для $n \leqslant 4$.

Регулярность решения. Если размерность n не больше трех, то мы можем получить некоторую информацию относительно произвольного решения $\boldsymbol{u}$ задачи (1.25) или (1.50) посредством повторения следующей простой процедуры. Та информация относительно $\boldsymbol{u}$, которой мы уже располагаем, дает нам некоторые свойства регулярности нелинейного члена $\sum_{i=1}^{n} u_i D_i \boldsymbol{u}$. Запишем (1.8)—(1.10) в таком виде:

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{f} - \sum_{i=1}^{n} u_i D_i \boldsymbol{u} \text{ в } \Omega, \tag{1.58}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1.59}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \text{ на } \Gamma; \tag{1.60}$$

используя имеющиеся в нашем распоряжении свойства регулярности $\boldsymbol{f}$ и предложение 2.2 гл. I, мы получаем новую информацию о регулярности $\boldsymbol{u}$. Если вновь полученные свойства $\boldsymbol{u}$ будут лучше, чем прежде, то мы можем повторить процедуру.

Докажем, например, следующий результат:

Предложение 1.1. *Пусть Ω — открытая область класса $\mathscr{C}^\infty$ в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$, и пусть $\boldsymbol{f}$ задано в $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Тогда любое решение $\{\boldsymbol{u}, p\}$ задачи* (1.8)—(1.10) *принадлежит* $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}) \times \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Начнем со случая, когда область Ω ограничена. Нелинейный член $\sum_{i=1}^{n} u_i D_i \boldsymbol{u}$ равен $\sum_{i=1}^{n} D_i(u_i \boldsymbol{u})$, ввиду (1.59). Если $n=2$, то u_i принадлежит $L^\alpha(\Omega)$ для любого α, $1 \leqslant \alpha < +\infty$ (в силу (1.4)), а значит $u_i u_j$ принадлежит $L^\alpha(\Omega)$ и $D_i(u_i u_j)$ принадлежит $W^{-1,\alpha}(\Omega)$ для любого такого α. Предложение 2.2 гл. I показывает, что $\boldsymbol{u}$ тогда принадлежит $W^{1,\alpha}(\Omega)$, а p принадлежит $L^\alpha(\Omega)$ для любого α. Для $\alpha > 2$ мы имеем $W^{1,\alpha}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ (это следует из (1.3)); следовательно, $u_i D_i \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^\alpha(\Omega)$ для любого α. Поэтому предложение I.2.2 показывает, что $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}^{2,\alpha}(\Omega)$, $p \in W^{1,\alpha}(\Omega)$ для любого α. Легко проверить, что $u_i D_i \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}^{1,\alpha}(\Omega)$, так что $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}^{3,\alpha}(\Omega)$. Повторяя эту процедуру, мы находим, в частности, что

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^m(\Omega), \; p \in H^m(\Omega) \text{ для любого } m \geqslant 1. \tag{1.61}$$

Те же свойства имеют место для любой производной от $\boldsymbol{u}$ или p; из (1.3) вытекает тогда, что любая производная от $\boldsymbol{u}$ или p принадлежит $\mathscr{C}(\overline{\Omega})$, а это и утверждалось.

Для $n=3$ заметим, что $u_i \in L^6(\Omega)$ (в силу (1.4)), а потому $u_i D_i u_j \in L^{3/2}(\Omega)$. Из предложения I.2.2 следует, что $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}^{2,3/2}(\Omega)$; но (1.3) показывает, что $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^\alpha(\Omega)$ для произвольного α, $1 \leqslant \alpha < +\infty$ ($p=3/2$, $m=2$, $n=3$). Следовательно, $D_i(u_i u_j) \in W^{-1,\alpha}(\Omega)$

для любого α, и нам остается только повторить доказательство, данное для $n=2$.

Если Ω неограничена, то мы получим ту же самую гладкость на любом компактном подмножестве $\overline{\Omega}$, применяя описанный выше метод к ψu, где ψ — некоторая срезающая функция, $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi=1$ на рассматриваемом компактном подмножестве $\overline{\Omega}$. □

Замечание 1.4. (i) Ясно, что можно предположить меньшую гладкость f и получить меньшую гладкость u и p.

(ii) Для $n \geqslant 4$ этот метод не проходит. Например, для ограниченной области Ω и $n=4$, если записать нелинейный член в виде $D_i(u_i u)$, то мы имеем только $u_i u_j \in L^2(\Omega)$, $D_i(u_i u) \in H^{-1}(\Omega)$, так что $u \in H_0^1(\Omega)$; если записать нелинейный член в виде $u_i D_i u$, то мы имеем $u_i D_i u \in L^{4/3}(\Omega)$, так что $u \in W^{2,\,4/3}(\Omega)$; но это не дает ничего лучшего, чем $u_i \in L^4(\Omega)$, $D_i u_j \in L^2(\Omega)$, что мы знали и раньше.

1.4. Неоднородные уравнения Навье — Стокса. Пусть Ω — открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим теперь следующую неоднородную задачу Навье—Стокса: пусть заданы две вектор-функции f и φ, определенные соответственно на Ω и на Γ и удовлетворяющие некоторым условиям, которые будут уточнены позже; найти u и p, такие что

$$-\nu\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u + \operatorname{grad} p = f \text{ в } \Omega, \tag{1.62}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1.63}$$

$$u = \varphi \text{ на } \Gamma. \tag{1.64}$$

Будем предполагать, что Ω — область класса $\mathscr{C}^2$, f задано в $H^{-1}(\Omega)$, а φ задано в следующем слегка ограничительном виде[1]:

$$\varphi = \operatorname{rot} \zeta, \tag{1.65}$$

где

$$\zeta \in H^2(\Omega),\quad D_i\zeta \in L^n(\Omega),\quad \zeta \in L^\infty(\Omega); \tag{1.66}$$

rot обозначает обычный оператор ротора для $n=2,\,3$, а для $n \geqslant 4$ — некоторый линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, такой что $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\zeta) \equiv 0$[2].

---

[1] Ср. с условием (2.1) и замечанием 2.1 из приложения I.

[2] $\operatorname{rot}\zeta = (R_1\zeta, \ldots, R_n\zeta)$, $R_i\zeta = \sum_{j,\,k} \alpha_{ijk} D_j \zeta_k$; достаточно, чтобы $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} = 0$ $\forall j,\ k,\ 1 \leqslant j,\ k \leqslant n$.

Теорема 1.5. *При указанных выше предположениях существуют такой элемент* $u \in H^1(\Omega)$ *и такое распределение* p *на* Ω, *что имеют место* (1.62)—(1.64). [1]

Доказательство. Пусть ψ — произвольная вектор-функция, принадлежащая $H^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)$, такая что

$$\psi \in H^1(\Omega) \cap L^n(\Omega), \ \operatorname{div} \psi = 0 \text{ в } \Omega, \ \psi = \varphi \text{ на } \Gamma. \tag{1.67}$$

Положим $\hat{u} = u - \psi$. Тогда u принадлежит $H^1(\Omega)$ и удовлетворяет (1.63); (1.64) означает, что

$$\hat{u} \in V. \tag{1.68}$$

Уравнение (1.62) эквивалентно уравнению

$$\nu \Delta \hat{u} + \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i D_i \hat{u} + \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i D_i \psi + \sum_{i=1}^{n} \psi_i D_i \hat{u} + \operatorname{grad} p = \hat{f}, \tag{1.69}$$

где $\hat{f} = f + \nu \Delta \psi - \sum_{i=1}^{n} \psi_i D_i \psi$. Заметим, что $\hat{f} \in H^{-1}(\Omega)$. Действительно, очевидно, что $f + \nu\Delta\psi \in H^{-1}(\Omega)$; далее, $\psi_i D_i \psi \in L^{\alpha'}(\Omega)$, где $1/\alpha' + 1/\alpha = 1$, $\alpha = 2n/(n-2)$, если $n \geqslant 3$, и $\alpha > 2$ произвольно, если $n = 2$; так как $H_0^1(\Omega) \subset L^{\alpha}(\Omega)$, то $\psi_i D_i \psi$ также принадлежит $H^{-1}(\Omega)$.

Как и в п. 1.2, мы сможем показать, что задача (1.68)—(1.69) разрешима, если найдем элемент $\hat{u} \in V$, такой что

$$\nu((\hat{u}, v)) + b(\hat{u}, \hat{u}, v) + b(\hat{u}, \psi, v) + b(\psi, \hat{u}, v) = \langle \hat{f}, v \rangle \quad \forall v \in \tilde{V}. \tag{1.70}$$

Существование элемента $\hat{u} \in V$, удовлетворяющего (1.70), можно доказать точно так же, как в теореме 1.2, при условии что существует $\beta > 0$, для которого

$$\nu \|v\|^2 + b(v, v, v) + b(v, \psi, v) + b(\psi, v, v) \geqslant \beta \|v\|^2 \quad \forall v \in \tilde{V},$$

или, в силу (1.22),

$$\nu \|v\|^2 + b(v, \psi, v) \geqslant \beta \|v\|^2 \quad \forall v \in \tilde{V}. \tag{1.71}$$

Оценка (1.71) заведомо будет выполняться, если нам удастся найти ψ, удовлетворяющее (1.67) и неравенству

$$|b(v, \psi, v)| \leqslant (\nu/2) \|v\|^2 \quad \forall v \in \tilde{V}. \tag{1.72}$$

Но такое ψ действительно существует, как показывает следующая лемма. □

---

[1] Улучшенный вариант этой теоремы дан в приложении I.

Лемма 1.8. *Для любого* $\gamma > 0$ *существует функция* $\psi = \psi(\gamma)$, *удовлетворяющая* (1.67) *и условию*

$$|b(\boldsymbol{v}, \psi, \boldsymbol{v})| \leqslant \gamma \|\boldsymbol{v}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \tilde{V}. \tag{1.73}$$

Прежде чем доказывать эту лемму, предварительно докажем еще две леммы.

Лемма 1.9. *Пусть* $\rho(x) = d(x, \Gamma)$ — *расстояние от* x *до* Γ. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $\theta_\varepsilon \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$, *такая что*

$$\theta_\varepsilon \equiv 1 \text{ в некоторой окрестности } \Gamma \text{ (зависящей от } \varepsilon); \tag{1.74}$$

$$\theta_\varepsilon(x) = 0, \text{ если } \rho(x) \geqslant 2\delta(\varepsilon), \text{ где } \delta(\varepsilon) = \exp(-1/\varepsilon); \tag{1.75}$$

$$|D_k\theta_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon/\rho(x), \text{ если } \rho(x) \leqslant 2\delta(\varepsilon),\ k = 1, \ldots, n. \tag{1.76}$$

Доказательство. Рассмотрим, следуя Хопфу [2], функцию $\lambda \mapsto \xi_\varepsilon(\lambda)$, определенную для $\lambda \geqslant 0$ формулой

$$\xi_\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 \text{ при } \lambda < \delta(\varepsilon)^2, \\ \varepsilon \ln(\delta(\varepsilon)/\lambda) \text{ при } \delta(\varepsilon)^2 < \lambda < \delta(\varepsilon), \\ 0 \text{ при } \lambda > \delta(\varepsilon), \end{cases} \tag{1.77}$$

и обозначим через χ_ε функцию

$$\chi_\varepsilon(x) = \xi_\varepsilon(\rho(x)). \tag{1.78}$$

Так как ρ принадлежит $\mathscr{C}^2(\Omega)$, то функция χ_ε удовлетворяет (1.74)—(1.76), и θ_ε получается ее регуляризацией. □

Лемма 1.10. *Существует положительная константа* c_1, *зависящая только от* Ω, *такая что*

$$|\rho^{-1}\boldsymbol{v}|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_1 \|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega). \tag{1.79}$$

Доказательство. Используя разбиение единицы, соответствующее некоторому покрытию Γ, и локальные координаты вблизи границы, мы можем свести нашу задачу к задаче, в которой Ω есть полупространство $\{x = (x_n, x'),\ x_n > 0,\ x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\}$. В этом случае $\rho(x) = x_n$, и достаточно проверить, что

$$\int_\Omega \frac{v(x)^2}{x_n^2}\,dx \leqslant c_1 \int_\Omega |D_n v(x)|^2\,dx \quad \forall v \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{1.80}$$

Последняя оценка становится очевидной, если доказать следующее одномерное неравенство:

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{v(s)}{s}\right|^2 ds \leqslant 2 \int_0^{+\infty} |v'(s)|^2\,ds \quad \forall v \in \mathscr{D}(0, +\infty). \tag{1.81}$$

Это — классическое неравенство Харди. Чтобы его доказать, запишем $s = e^{\sigma}$, $t = e^{\tau}$ и

$$\frac{v(s)}{s} = \frac{1}{s}\int_0^s w(t)\,dt,\quad v' = w,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|v(s)|^2}{|s|^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma}\left(\int_0^{e^{\alpha}} w(t)\,dt\right)^2 d\sigma$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{Y}(\sigma-\tau)\,e^{-(\sigma-\tau)/2}\,w(e^{\tau})\,e^{\tau/2}d\tau\right)^2 d\sigma,$$

где $\mathscr{Y}$ обозначает функцию Хевисайда: $\mathscr{Y}(\sigma) = 1$ для $\sigma > 0$ и $\mathscr{Y}(\sigma) = 0$ для $\sigma < 0$. С помощью обычного неравенства для свертки последнее выражение оценивается величиной

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{Y}(\sigma)\,e^{-\sigma/2}\,d\sigma\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |w(e^{\tau})|^2 e^{\tau}\,d\tau = 4\int_0^{+\infty} |w(t)|^2\,dt,$$

откуда и следует (1.81). □

Доказательство леммы 1.8. Покажем теперь, что $\psi = \operatorname{rot}(\theta_\varepsilon\zeta)$ удовлетворяет (1.67) и (1.73). Справедливость (1.67) очевидным образом следует из (1.65) и (1.74). Далее,

$$\psi_j(x) = 0,\ \text{если}\ \rho(x) > 2\delta(\varepsilon),$$
$$|\psi_j(x)| \leqslant c_2\left(\frac{\varepsilon}{\rho(x)}|\zeta(x)| + |D\zeta(x)|\right),\quad \text{если}\quad \rho(x) \leqslant 2\delta(\varepsilon), \tag{1.82}$$

где $|D\zeta(x)| = \left\{\sum_{i,j=1}^{n} |D_i\zeta_j(x)|^2\right\}^{1/2}$. Так как мы предполагали, что $\zeta_i \in L^{\infty}(\Omega)$, то из (1.82) выводим, что

$$|\psi_j(x)| \leqslant c_3(\varepsilon/\rho(x) + |D\rho(x)|)\quad \forall j,\quad \rho(x) \leqslant 2\delta(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$|v_i\psi_j|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_4\left\{\varepsilon\left|\frac{v_i}{\rho}\right|_{L^2} + \left(\int_{\rho \leqslant 2\delta(\varepsilon)} v_i^2|D\zeta|^2\,dx\right)^{1/2}\right\}. \tag{1.83}$$

Но, в силу неравенства Гёльдера,

$$\left(\int_{\rho \leqslant 2\delta(\varepsilon)} v_i^2|D\zeta|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant \mu(\varepsilon)\,|v_i|_{L^{\alpha}(\Omega)},$$

где $1/\alpha = 1/2 - 1/n$ и $\mu(\varepsilon) = \left\{\int_{\rho(x) \leqslant 2\delta(\varepsilon)} |D\zeta(x)|^n\,dx\right\}^{1/n}$; $\mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \mapsto 0$, поскольку $D_i\zeta_i \in L^n(\Omega)$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. С учетом последней оценки, (1.4) и леммы 1.10, из (1.83) вытекает, что

$$|v_i\psi_j|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_5 (\varepsilon\|v\| + \mu(\varepsilon)|v|_{L^\alpha(\Omega)}) \leqslant c_6(\varepsilon + \mu(\varepsilon))\|v\|, \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant n. \tag{1.84}$$

Теперь уже легко проверить (1.73); для каждого $v \in \mathscr{V}^o$

$$b(v, \psi, v) = -b(v, v, \psi),$$

$$|b(v, v, \psi)| \leqslant \|v\| \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} |v_i\psi_j| \right\} \leqslant \qquad \text{(в силу (1.84))}$$

$$\leqslant c_7(\varepsilon + \mu(\varepsilon))\|v\|^2. \tag{1.85}$$

Если ε настолько мало, что $c_7(\varepsilon + \mu(\varepsilon)) < \gamma$, то мы получаем (1.73) для каждого $v \in \mathscr{V}^o$, а по непрерывности для каждого $v \in \tilde{V}$. □

Замечание 1.5. (i) Для $n \leqslant 3$ условия (1.66) сводятся к условию $\zeta \in H^2(\Omega)$, в силу теорем вложения Соболева (см. (1.3)).

(ii) Легко записать в виде (1.65) граничные условия для классических задач гидродинамики, таких, как задача кавитации, задача Тейлора и т. д. См. также приложение I.

Замечание 1.6. Легко распространить предложение 1.1 на случай неоднородных задач. Если выполнены предположения этого предложения и, кроме того, $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Gamma)$, то решение $\{u, p\}$ задачи (1.62)—(1.64) принадлежит $\mathscr{C}^\infty(\bar{\Omega}) \times \mathscr{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Доказательство этого факта проводится, как и в предложении 1.1, непосредственно для уравнений (1.62)—(1.64) (т. е. без введения $\hat{u}$).

Имеет место теорема единственности, аналогичная теореме 1.3: для $n \leqslant 4$, „больших“ ν и „малых“ f решение единственно.

Теорема 1.6. *Предположим, что $n \leqslant 4$, норма φ в $L^n(\Omega)$*[1] *настолько мала, что*

$$|b(v, \varphi, v)| \leqslant (\nu/2)\|v\|^2 \quad \forall v \in V, \tag{1.86}$$

и ν настолько велико, что

$$\nu^2 > 4c(n)\|\hat{f}\|_{V'}, \tag{1.87}$$

где $c(n)$ — константа из (1.18) и

$$\hat{f} = f + \nu\Delta\varphi - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i D_i \varphi. \tag{1.88}$$

Тогда существует единственное решение u, p задачи (1.62)—(1.64)[2].

Доказательство. В леммах 1.1—1.3 было доказано, что

$$b(v, \varphi, v) = -b(v, v, \varphi) \text{ и } |b(v, v, \varphi)| \leqslant c\|v\|^2|\varphi|_{L^n(\Omega)}.$$

---

[1] В случае $n = 2$ пространство $L^n(\Omega)$ заменяется на $L^\alpha(\Omega)$ для некоторого $\alpha > 2$.

[2] Как обычно, p единственно с точностью до постоянной.

Следовательно, условие (1.86) выполнено, если $|\varphi|_{L^n(\Omega)}$ достаточно мало; это означает, что (1.72) удовлетворяется при $\psi=\varphi$ и *в этом случае мы не нуждаемся в предварительном построении* ψ. Доказательство существования проходит точно так же с $\psi=\varphi$.

Если u_1 — некоторое решение задачи (1.62)—(1.64), то $\hat{u}_1=u_1-\varphi$ есть решение задачи (1.70) с $\psi=\varphi$. Полагая $v=\hat{u}_1$ в (1.70), имеем

$$\nu\|\hat{u}_1\|^2=-b(\hat{u}_1,\ \varphi,\ \hat{u}_1)+\langle\hat{f},\ \hat{u}_1\rangle\leqslant(\nu/2)\|\hat{u}_1\|^2+\|\hat{f}\|_{V'}\|\hat{u}_1\|$$

(мы воспользовались (1.86)) и, следовательно,

$$\|\hat{u}_1\|\leqslant 2\nu^{-1}\|\hat{f}\|_{V'}. \tag{1.89}$$

Предположим, что u_0, u_1 — два решения задачи (1.62)—(1.64); пусть $\hat{u}_0=u_0-\varphi$, $\hat{u}_1=u_1-\varphi$, $\hat{u}=\hat{u}_0-\hat{u}_1$; $\hat{u}_0$ и $\hat{u}_1$ удовлетворяют (1.70) с $\psi=\varphi$:

$$\begin{aligned}&\nu((\hat{u}_0,\ v))+b(\hat{u}_0,\ \hat{u}_0,\ v)+b(\hat{u}_0,\ \varphi,\ v)+b(\varphi,\ \hat{u}_0,\ v)=\\&=\langle\hat{f},\ v\rangle,\ v\in V,\\&\nu((\hat{u}_1,\ v))+b(\hat{u}_1,\ \hat{u}_1,\ v)+b(\hat{u}_1,\ \varphi,\ v)+b(\varphi,\ \hat{u}_1,\ v)=\\&=\langle\hat{f},\ v\rangle,\quad v\in V.\end{aligned}$$

Возьмем в этих уравнениях $v=\hat{u}$ и вычтем второе из первого; после некоторых преобразований получим, используя (1.22),

$$\nu\|\hat{u}\|^2=-b(\hat{u},\ \hat{u}_1,\ \hat{u})-b(\hat{u},\ \varphi,\ \hat{u}). \tag{1.90}$$

Согласно (1.86), $-b(\hat{u},\ \varphi,\ \hat{u})\leqslant(\nu/2)\|\hat{u}\|^2$. В силу (1.18), $-b(\hat{u},\ \hat{u}_1,\ \hat{u})\leqslant c(n)\|\hat{u}_1\|\|\hat{u}\|^2$. С учетом (1.89) это оценивается величиной $(2/\nu)c(n)\|\hat{f}\|_{V'}\|\hat{u}\|^2$. Окончательно мы приходим к неравенству

$$(\nu/2-(2/\nu)c(n)\|\hat{f}\|_{V'})\|\hat{u}\|^2\leqslant 0,$$

из которого ввиду (1.87) вытекает, что $\hat{u}=0$.

Если $\hat{u}_0=\hat{u}_1$, то ясно, что $\operatorname{grad} p_0=\operatorname{grad} p_1$ и, следовательно, p_0 и p_1 отличаются на константу. □

Замечание 1.7. Для задачи (1.62)—(1.64) доказаны в двумерном случае некоторые результаты о неединственности, для определенных конфигураций; см. Рабинович [2], Вельте [1, 2] и § 4 этой главы.

§ 2. Дискретные неравенства и теоремы о компактности

Прежде чем проводить численную аппроксимацию стационарных уравнений Навье—Стокса, нам надо ввести новый технический аппарат—дискретные аналоги (для ступенчатых функций и несогласованных конечных элементов) неравенств Соболева и теоремы о компактности (теоремы 1.1). Получение этих и некоторых других неравенств соболевского типа и является целью этого параграфа. Он до некоторой степени технический, и детали доказательств в последующем изложении нам не понадобятся.

2.1. Дискретные неравенства Соболева для ступенчатых функций. Мы используем те же обозначения, что и для конечных разностей, см. п. 3.3 гл. I. Напомним, в частности, что $\mathbb{R}_h$ — это множество точек с координатами $m_1h_1, \ldots, m_nh_n$, $m_i \in \mathbb{Z}$, $h=(h_1, \ldots, h_n)$, $h_i > 0$; w_{hM} — характеристическая функция блока

$$\sigma_h(M) = \prod_{i=1}^{n} (\mu_i - h_i/2,\ \mu_i + h_i/2),\quad M = (\mu_1, \ldots, \mu_n); \tag{2.1}$$

δ_{ih} — разностный оператор:

$$\delta_{ih}\varphi(x) = h_i^{-1}[\varphi(x) + \vec{h}_i/2) - \varphi(x - \vec{h}_i/2)], \tag{2.2}$$

где $\vec{h}_i$ — вектор с i-й компонентой h_i и всеми прочими компонентами, равными нулю.

Теорема 2.1. *Пусть p — произвольное число, удовлетворяющее условию $1 \leqslant p < n$, и q определено равенством $1/q = 1/p - 1/n$. Тогда существует константа $c = c(n, p)$, зависящая только от n и p, такая что*

$$|u_h|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(n, p) \sum_{i=1}^{n} |\delta_{ih} u_h|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.3}$$

для каждой ступенчатой функции u_h:

$$u_h = \sum_{M \in \mathbb{R}_h} u_h(M)\, w_{hM}, \tag{2.4}$$

с компактным носителем.

Доказательство. (i) Рассмотрим скалярную функцию $s \to g(s) = |s|^{(n-1)p/(n-p)}$. Так как $(n-1)p/(n-p) \geqslant 1$, эта функция дифференцируема, и ее производная равна

$$g'(s) = \frac{(n-1)p}{n-p} |s|^{(n(p-2)+p)/(n-p)} s.$$

По формуле Тейлора

$$g(s_1) - g(s_2) = (s_1 - s_2) g'(\lambda s_1 + (1-\lambda) s_2),\quad \lambda \in (0, 1),$$

откуда

$$|g(s_1)-g(s_2)|\leqslant|s_1-s_2|\frac{(n-1)p}{n-p}|\lambda s_1+(1-\lambda)s_2|^{n(p-1)/(n-p)}$$
$$\leqslant\frac{(n-1)p}{n-p}|s_1-s_2|\{|s_1|+|s_2|\}^{n(p-1)/(n-p)},$$
$$|g(s_1)-g(s_2)|\leqslant c_1(n,\ p)|s_1-s_2|\{|s_1|^{n(p-1)/(n-p)}+$$
$$+|s_2|^{n(p-1)/(n-p)}\}. \tag{2.5}$$

(ii) Пусть M принадлежит $\mathbb{R}_h$; применим (2.5) с $s_1=u_h(M-r\vec{h}_i)$, $s_2=u_h(M-(r+1)\vec{h}_i)$; получим

$$|u_h(M-r\vec{h}_i)|^{(n-1)p/(n-p)}-|u_h(M-(r+1)\vec{h}_i|^{(n-1)p/(n-p)}$$
$$\leqslant c_1(n,\ p)|u_h(M-r\vec{h}_i)-u_h(M-(r+1)\vec{h}_i)|$$
$$\times\{|u_h(M-r\vec{h}_i)|^{n(p-1)/(n-p)}$$
$$+|u_h(M-(r+1)\vec{h}_i)|^{n(p-1)/)n-p)}\}.$$

Суммируя эти неравенства для $r\geqslant 0$, найдем (сумма фактически конечна)

$$|u_h(M)|^{(n-1)p/(n-p)}\leqslant c_1(n,\ p)h_i\sum_{r=0}^{+\infty}\left|\delta_{ih}u_h\left(M-\left(r+\frac{1}{2}\right)\vec{h}_i\right)\right|$$
$$\times\{|u_h(M-r\vec{h}_i)|^{n(p-1)/(n-p)}$$
$$+|u_h(M-(r+1)\vec{h}_i)|^{n(p-1)/(n-p)}\}. \tag{2.6}$$

Усилим неравенство (2.6), заменив сумму в правой части суммой по $r\in\mathbb{Z}$; тогда мы можем интерпретировать эту сумму как интеграл и оценить величиной

$$c_1(n,\ p)\int_{-\infty}^{\infty}|\delta_{ih}\hat{u}_h(\hat{\mu}_i,\ \xi_i)|\left\{\sum_{\alpha=-1}^{1}|u_h(\hat{\mu}_i,\xi_i\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha}{2}h_i)\right|^{n(p-1)/(n-p)}\Bigg\}\,d\xi_i,$$

где $(\mu_1,\ \ldots,\ \mu_n)$ — координаты точки M и $\hat{\mu}_i=(\mu_1,\ \ldots,\ \mu_{i-1},\ \mu_{i+1},\ \ldots,\ \mu_n)$. Аналогично обозначим через $\hat{x}_i$ вектор $(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n)$ и запишем $x=(\hat{x}_i,\ x_i)$. Для любого $x\in\sigma_h(M)$

неравенство (2.6) дает

$$|\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})|^{(n-1)\,p/(n-p)} = |\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{M})|^{(n-1)\,p/(n-p)}$$
$$\leqslant c_1(n, p) \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\delta_{ih}\boldsymbol{u}_h(\hat{\boldsymbol{x}}_i, \xi_i)|$$
$$\times \left\{ \sum_{\alpha=-1}^{1} \left| \boldsymbol{u}_h\left(\hat{\boldsymbol{x}}_i, \xi_i + \frac{\alpha h_i}{2}\right) \right|^{n(p-1)/(n-p)} \right\} d\xi_i. \tag{2.7}$$

Положим теперь

$$w_i(x) = w_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) = \sup_{x_i \in \mathbb{R}} |\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})|^{p/(n-p)}. \tag{2.8}$$

Тогда $|w_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)|^{n-1}$ оценивается через правую часть (2.7), следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} w_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)^{n-1}\, d\hat{\boldsymbol{x}}_i \leqslant c_1(n, p) \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\delta_{ih}\boldsymbol{u}_h(\hat{\boldsymbol{x}}_i, \xi_i)|$$
$$\times \left\{ \sum_{\alpha=-1}^{1} \left| \boldsymbol{u}_h\left(\hat{\boldsymbol{x}}_i, \xi_i + \frac{\alpha h_i}{2}\right) \right|^{n(p-1)/(n-p)} \right\} d\hat{\boldsymbol{x}}_i\, d\xi_i$$
$$\leqslant \text{(в силу неравенства Гёльдера)}$$
$$\leqslant c_1(n, p)\, |\delta_{ih}\boldsymbol{u}_h|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$
$$\times \left(\sum_{\alpha=-1}^{1} |\boldsymbol{u}_h(\hat{\boldsymbol{x}}_i, \xi_i + \alpha h_i)|^q\, d\boldsymbol{x}_i\, d\xi_i \right)^{(p-1)/p}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} w_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)^{n-1}\, d\hat{\boldsymbol{x}}_i \leqslant c_2(n, p)\, |\delta_{ih}\boldsymbol{u}_h|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, |\boldsymbol{u}_h|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{(p-1)\,q/p}. \tag{2.9}$$

Далее, мы имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{u}_h|^q\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} \sup_{x_i} |\boldsymbol{u}_h(\hat{\boldsymbol{x}}_i, \boldsymbol{x}_i)|^{p/(n-p)}\, dx$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} w_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)\, dx.$$

Согласно неравенству, даваемому нижеследующей леммой, это оценивается через

$$\prod_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |w_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)|^{n-1}\, d\hat{\boldsymbol{x}}_i \right\}^{1/(n-1)},$$

и из (2.9) следует, что

$$|u_h|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_3(n, p)\left\{\prod_{i=1}^n |\delta_{ih}u_h|^{1/(n-1)}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\}|u_h|^{nq(p-1)/(n-1)p}_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

$$|u_h|^{n/(n-1)}_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_3(n, p)\left\{\prod_{i=1}^n |\delta_{ih}u_h|^{1/(n-1)}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\},$$

$$|u_h|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_4(n, p)\left\{\prod_{i=1}^n |\delta_{ih}u_h|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\}^{1/n},$$

$$|u_h|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_5(n, p)\sum_{i=1}^n |\delta_{ih}u_h|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad \square$$

Лемма 2.1. *Пусть $w_1, \ldots, w_n$ — измеримые ограниченные функции на $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями, причем w_i не зависит от x_i. Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n w_i(\hat{x}_i)\,dx \leqslant \prod_{i=1}^n \left\{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |w_i(\hat{x}_i)|^{n-1}\,d\hat{x}_i\right\}^{1/(n-1)}. \tag{2.10}$$

Это неравенство — частный случай одного неравенства Гальярдо [1]; см. также Лионс [1], стр. 31.

Замечание 2.1. В случае $p=n$, если носитель u_h содержится в некотором ограниченном множестве Ω, то

$$|u_h|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c(n, q, \Omega)\sum_{i=1}^n |\delta_{ih}u_h|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \tag{2.11}$$

для каждого u_h вида (2.4) и всякого q, $1 \leqslant q < +\infty$. Действительно, любое такое q, большее чем p, может быть записано как $p_1n/(n-p_1)$, где $1 \leqslant p_1 < n$. Тогда применимо неравенство (2.3) с $c = c(n, p) = c'(n, q)$:

$$|u_h|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c'(n, q)\sum_{i=1}^n |\delta_{ih}u_h|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Неравенство Гёльдера показывает, что

$$|\delta_{ih}u_h|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant (\operatorname{mes}\Omega')^{1/p_1 - 1/p}\,|\delta_{ih}u_h|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

где Ω' содержит носитель $\delta_{ih}u_h$. Если мы предположим, что $|h|$ ограничено единицей (или некоторой константой d), то $\operatorname{mes}\Omega'$ оценивается величиной $(\operatorname{mes}\Omega)\times\mathrm{const}$; комбинируя последние два неравенства, получаем (2.11).

Для двумерного и трехмерного случаев мы докажем сейчас другое полезное неравенство, родственное предыдущему.

Предложение 2.1. *Предположим, что размерность рассматриваемого пространства равна двум или трем. Для любой ступенчатой функции u_h вида (2.4) с компактным носителем справедливы* *оценки* [1]

$$|u_h|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leqslant 2^{1/4}\cdot 3^{1/2}\,|u_h|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left\{ \sum_{i=1}^{2} |\delta_{ih} u_h|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right\}^{1/4},$$

если $n=2$, (2.12)

$$|u_h|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \leqslant 2^{1/2}\cdot 3^{3/4}\,|u_h|^{1/4}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left\{ \sum_{i=1}^{3} |\delta_{ih} u_h|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right\}^{3/8},$$

если $n=3$. (2.13)

Доказательство. Используем неравенство (2.7) с $n=2$ и $p=4/3$; более тщательный анализ доказательства (2.7) показывает, что в данном случае $c_1(n, p)=2$; действительно, $g(s)=s^2$ и для (2.5) мы, очевидно, имеем

$$|g(s_1)-g(s_2)| \leqslant 2|s_1-s_2|\{|s_1|+|s_2|\}.$$

Поэтому для любых $x \in \sigma_h(M)$ и $M \in \mathbb{R}_h$

$$|u_h(x)|^2 \leqslant 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\delta_{ih} u_h(\hat{x}_i, \xi_i)| \times \left\{ \sum_{\alpha=-1}^{1} \left| u_h\left(\hat{x}_i, \xi_i + \frac{\alpha h_i}{2}\right)\right| \right\} d\xi_i. \tag{2.14}$$

Так как правая часть (2.14) не зависит от x_i, мы получаем

$$\sup_{x_i} |u_h(x)|^2 \leqslant 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\delta_{ih} u_h(x_i, \xi_i)| \times \left\{ \sum_{\alpha=-1}^{1} \left| u_h\left(\hat{x}_i \xi_i + \frac{\alpha h_i}{2}\right)\right| \right\} d\xi_i. \tag{2.15}$$

Теперь мы можем записать в двумерном случае

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_h(x)|^4\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \left[\sup_{x_1} |u_h(x)|^2\right] \left[\sup_{x^2} |u_h(x)|^2\right] dx$$
$$\leqslant \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sup_{x_1} |u_h(x)|^2\right] dx_2 \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sup_{x_2} |u_h(x)|^2\right] dx_1 \right\}$$

---

[1] Аналогичные оценки для непрерывного случая будут даны в гл. III (лемма 3.3).

(в силу (2.15))

$$\leqslant 4\left\{\int_{\mathbb{R}^2}|\delta_{1h}u_h(\xi_1, x_2)|\left[\sum_{\alpha=-1}^{1}\left|u_h\left(\xi_1+\frac{\alpha h_1}{2}, x_2\right)\right|\right]d\xi_1\, dx_2\right\}$$
$$\times\left\{\int_{\mathbb{R}^2}|\delta_{2h}u_h(x_1, \xi_2)|\left[\sum_{\alpha=-1}^{1}\left|u_h\left(x_1, \xi_2+\frac{\alpha h_2}{2}\right)\right|\right]dx_1\, d\xi_2\right\}. \tag{2.16}$$

Ввиду неравенства Шварца и того факта, что

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left|u_h\left(\xi_1+\frac{\alpha h_1}{2}, x_2\right)\right|^2 d\xi_1\, dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2}|u_h(x)|^2\, dx_1\, dx_2 = |u_h|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \tag{2.17}$$

правая часть (2.16) оценивается величиной

$$36\,\{|\delta_{1h}u_h|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,|u_h|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\}\,\{|\delta_{2h}u_h|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,|u_h|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\}$$
$$\leqslant 18\,|u_h|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\left\{\sum_{i=1}^{2}|\delta_{ih}u_h|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right\}.$$

Тем самым (2.12) доказано.

В трехмерном случае, используя (2.12) и (2.15), запишем

$$\int_{\mathbb{R}^3}|u_h(x)|^4\, dx \leqslant 18\int\left\{\left[\int|u_h|^2\, dx_1\, dx_2\right]\right.$$
$$\left.\times\left[\sum_{i=1}^{2}\int|\delta_{ih}u_h|^2\, dx_1\, dx_2\right]\right\}dx_3$$
$$\leqslant 18\left\{\sup_{x_3}\int|u_h|^2\, dx_1\, dx_2\right\}\left\{\sum_{i=1}^{2}|\delta_{ih}u_h|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right\} \leqslant (\text{в силу } (2.15))$$
$$\leqslant 36\left\{\sum_{i=1}^{2}|\delta_{ih}u_h|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right\}\left\{\int_{\mathbb{R}^3}|\delta_{3h}u_h(\hat{x}_3, x_3)|\right.$$
$$\left.\times\left[\sum_{\alpha=-1}^{1}\left|u_h\left(\hat{x}_3, x_3+\frac{\alpha h_3}{2}\right)\right|\right]dx\right\} \leqslant (\text{в силу неравенства Шварца})$$
$$\leqslant 3^3 2^2\,|u_h|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,|\delta_{3h}u_h|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\left\{\sum_{i=1}^{2}|\delta_{ih}u_h|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right\}$$
$$\leqslant 3^3 2^2\,|u_h|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\left\{\sum_{i=1}^{3}|\delta_{ih}u_h|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right\}^{3/2}, \tag{2.18}$$

и (2.13) доказано. □

Замечание 2.2. Неравенства (2.3), (2.11) и (2.12) могут быть распространены по непрерывности на классы ступенчатых функций с неограниченным носителем.

22. Дискретная теорема о компактности для ступенчатых функций. Мы дадим здесь один дискретный аналог теоремы 1.1, а более точно, того факта, что вложение $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ в $L^{q_1}(\Omega)$ компактно, если

$$1 \leqslant p < n \text{ и } q_1 \text{— любое число, такое что} \\ 1 \leqslant q_1 < q, \text{ где } 1/q = 1/p - 1/n, \tag{2.19}$$

либо же

$$p = n \text{ и } q_1 \text{— любое число, } 1 \leqslant q_1 < +\infty. \tag{2.20}$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathscr{E}_h$ *— некоторое (быть может, пустое) семейство ступенчатых функций вида* (2.4) *и*

$$\mathscr{E} = \bigcup_{|h| \leqslant c_0} \mathscr{E}_h. \tag{2.21}$$

Предположим, что

функции u_h *из* $\mathscr{E}$ *имеют носители, содержащиеся в некотором фиксированном ограниченном множестве в* $\mathbb{R}^n$, *скажем* Ω; (2.22)

$$\sup_{u_h \in \mathscr{E}} \left\{ |u_h|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{n} |\delta_{ih} u_h|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\} < +\infty. \tag{2.23}$$

Тогда если p *и* q_1 *удовлетворяют условиям* (2.19)—(2.20), *то семейство* $\mathscr{E}$ *относительно компактно в* $L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$ (*или в* $L^{q_1}(\Omega)$).

Доказательство. Согласно одной теореме М. Рисса [1], нам нужно доказать следующие два свойства:

(i) Для каждого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $K \subset \Omega$, такое что

$$\int_{\Omega \setminus K} |u_h|^{q_1} \, dx \leqslant \varepsilon \quad \forall u_h \in \mathscr{E}. \tag{2.24}$$

(ii) Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$, такое что

$$|\tau_l u_h - u_h|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon \tag{2.25}$$

для любого $u_h \in \mathscr{E}$ и любого $l = (l_1, \ldots, l_n)$, где $|l| \leqslant \eta$; τ_l обозначает оператор сдвига:

$$(\tau_l \varphi)(x) = \varphi(x + l). \tag{2.26}$$

Докажем (i). Как следует из неравенства Соболева (2.3) и (2.11), семейство $\mathscr{E}$ ограничено в $L^q(\Omega)$, где q задается формулой (2.19), если $p < n$, и равняется какому-нибудь фиксированному числу, большему q_1, в противном случае ($p=n$). В силу неравенства Гёльдера имеем

$$\int\limits_{\Omega\setminus K} |u_h|^{q_1}\,dx \leqslant \Bigl(\int\limits_{\Omega\setminus K} dx\Bigr)^{1-q_1/q} \Bigl(\int\limits_{\Omega\setminus K} |u_h|^q\,dx\Bigr)^{q_1/q},$$
$$\int\limits_{\Omega\setminus K} |u_h|^{q_1}\,dx \leqslant c\,(\operatorname{mes}(\Omega\setminus K))^{1-q_1/q} \quad \forall u_h \in \mathscr{E}. \tag{2.27}$$

Правую часть (2.27) (а следовательно, и левую) можно сделать меньше, чем ε, выбирая компакт K достаточно большим; тем самым (i) доказано.

Докажем (ii). Вначале покажем, что (2.25) может быть заменено аналогичным условием на $|\tau_l u_h - u_h|_{L^p}$ (условием (2.30) ниже).

Случай (a): $q_1 \leqslant p$. Для любой функции $f \in L^q(\Omega)$, мы имеем $f \in L^{q_1}(\Omega)$, а также $f \in L^p(\Omega)$, поскольку область Ω ограничена, а $q_1 \leqslant p < q$. Далее, $0 \leqslant 1/q_1 - 1/p < 1$. В силу неравенства Гёльдера,

$$|f|_{L^{q_1}(\Omega)} \leqslant (\operatorname{mes}\Omega)^{1/q_1-1/p}\,|f|_{L^p(\Omega)} = \mathrm{const}\,|f|_{L^p(\Omega)}.$$

Случай (b): $q_1 > p$. Для любой функции $f \in L^q(\Omega)$ имеем, в силу неравенства Гёльдера,

$$\int |f|^{q_1}\,dx = \int |f|^{\theta q_1}\,|f|^{(1-\theta)q_1}\,dx$$
$$\leqslant \Bigl(\int |f|^{q_1\theta\rho}\,dx\Bigr)^{1/\rho} \Bigl(\int |f|^{q_1(1-\theta)\rho'}\,dx\Bigr)^{1/\rho'},$$

где $\theta \in (0, 1)$, $\rho > 1$ и, как обычно, $1/\rho' + 1/\rho = 1$. Мы можем выбрать θ и ρ так, чтобы $q_1\theta\rho = p$, $q_1(1-\theta)\rho' = q$; этими условиями числа ρ и θ определяются единственным образом, и они принадлежат предписанным интервалам $[\theta q_1(q-q_1)(q-p) = p(q-q_1)$ и $\rho(q-q_1) = q-p]$. Тогда

$$\int |f|^{q_1}\,dx \leqslant \Bigl(\int |f|^p\,dx\Bigr)^{1/\rho} \Bigl(\int |f|^q\,dx\Bigr)^{1/\rho'}. \tag{2.28}$$

В частности, для любых l и u_h

$$|\tau_l u_h - u_h|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant |\tau_l u_h - u_h|^{1-\theta}_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,|\tau_l u_h - u_h|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leqslant \bigl\{|\tau_l u_h|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + |u_h|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\bigr\}^{1-\theta}\,|\tau_l u_h - u_h|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leqslant 2^{1-\theta}\,|u_h|^{1-\theta}_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,|\tau_l u_h - u_h|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Так как семейство $\mathscr{E}$ ограничено в $L^q(\mathbb{R}^n)$, то

$$|\tau_l u_h - u_h|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\,|\tau_l u_h - u_h|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.29}$$

Неравенство (2.29) показывает, что достаточно доказать условие (ii) с q_i, замененным на p:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta : |\tau_l u_h - u_h|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon \text{ для } |l| \leqslant \eta \text{ и } u_h \in \mathscr{E}. \tag{2.30}$$

Выполнение условия (2.30) легко следует из (2.23) и следующих двух лемм. □

Лемма 2.2. $|\tau_l u_h - u_h|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\tau_{\vec{l}_i} u_h - u_h\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, (2.31)

где $\vec{l}_i$ обозначает вектор $l_i \vec{h}_i$.

Доказательство. Обозначая через I тождественный оператор, имеем легко проверяемое тождество

$$\tau_l - I = \sum_{i=1}^{n} \tau_{\vec{l}_1} \dots \tau_{\vec{l}_{i-1}} \left(\tau_{\vec{l}_i} - I\right). \tag{2.32}$$

Это тождество позволяет оценить норму $|\tau_l u_h - u_h|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ величиной

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\tau_{\vec{l}_1} \dots \tau_{\vec{l}_{i-1}} \left(\tau_{\vec{l}_i} u_h - u_h\right)\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Вспоминая, что

$$\left|\tau_\alpha f\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left|f\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.33}$$

для любого $\alpha \in \mathbb{R}^n$ и любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, получаем (2.31). □

Лемма 2.3.

$$\left|\tau_{\vec{l}_i} u_h - u_h\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\left(|l_i| + |l_i|^{1/p}\right)\left|\delta_{ih} u_h\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.34}$$

Доказательство. Так как $\left|\tau_{\vec{l}_i} u_h - u_h\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left|\tau_{-\vec{l}_i} u_h - u_h\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, мы можем предположить, что $l_i \geqslant 0$; запишем

$$\begin{aligned} &l_i = (\alpha_i + \beta_i) h_i, \text{ где } \alpha_i \text{ — целое} \geqslant 0, \\ &0 \leqslant \beta_i < 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Имеем

$$\tau_{\vec{l}_1} u_h - u_h = \sum_{j=0}^{\alpha_1 - 1} \tau_{j\vec{h}_1} \left(\tau_{\vec{h}_1} u_h - u_h\right) + \tau_{\alpha_1 \vec{h}_1} \left(\tau_{\beta_1 \vec{h}_1} u_h - u_h\right). \tag{2.36}$$

Из (2.36) и (2.33) вытекает оценка

$$\left|\tau_{\vec{l}_1} u_h - u_h\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \sum_{j=0}^{\alpha_1 - 1} \left|\tau_{\vec{h}_1} u_h - u\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left|\tau_{\beta_1 \vec{h}_1} u_h - u_h\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.37}$$

Но $\tau_{\vec{h}_1} - I = h_1 \tau_{\vec{h}_1/2} \delta_{1h}$, и сумма в правой части (2.37) равна $\alpha_1 h_1 \left| \delta_{1h} u_h \right|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Поскольку $\alpha_1 h_1 \leqslant l_1$, получаем

$$\left| \tau_{\vec{l}_1} u_h - u_h \right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant l_1 \left| \delta_{1h} u_h \right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left| \tau_{\beta_1 \vec{h}_1} u_h - u_h \right|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.38}$$

Оценим теперь норму $\tau_{\beta_1 \vec{h}_1} u_h - u_h$. Для $x \in \sigma_h(M)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $M \in \mathbb{R}_h$, $M = (m_1 h_1, \ldots, m_n h_n)$, имеем

$$\tau_{\beta_1 \vec{h}_1} u_h(x) - u_h(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } \left(m_1 - \frac{1}{2}\right) h_1 < x_1 < \left(m_1 - \beta_1 + \frac{1}{2}\right) h_1, \\ h_1 \delta_{1h} u_h \left(M + \frac{\vec{h}_1}{2}\right), \text{ если} \\ \qquad \left(m_1 - \beta_1 + \frac{1}{2}\right) h_1 < x_1 < \left(m + \frac{1}{2}\right) h_1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int_{\sigma_h(M)} \left| \tau_{\beta_1 \vec{h}_1} u_h - u_h \right|^p dx = \beta_1 h_1^p \int_{\sigma_h(M)} \left| \delta_{1h} u_h \left(x + \frac{\vec{h}_1}{2} \right) \right|^p dx.$$

Суммируя эти равенства для различных точек M из $\mathbb{R}_h$, получим

$$\left| \tau_{\beta_1 \vec{h}_1} u_h - u_h \right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \beta_1^{1/p} h_1 \left| \tau_{\vec{h}_1/2} \delta_{1h} u_h \right|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Так как h ограничено, а $\beta_1 h_1 \leqslant l_1$, то правая часть меньше, чем $c l_1^{1/p} \left| \delta_{1h} u_h \right|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, откуда следует (2.34) для $i = 1$; для $i = 2, \ldots, n$ доказательство то же самое. □

Замечание 2.3. В наиболее часто встречающихся случаях применения теоремы 2.2 семейство $\mathscr{E}$ представляет собой последовательность элементов u_{h_m}, где h_m стремится к нулю. Следовательно, $\mathscr{E}_{h_m} = \{u_{h_m}\}$ и $\mathscr{E}_h$ пусто, если h не равно h_m.

Замечание 2.4. Предположим, что область Ω ограничена и что

$$\mathscr{E} = \bigcup_{|h| < c_0} \mathscr{E}_h, \quad \mathscr{E}_h = \{u_h \in W_h, \ \|u_h\|_h \leqslant 1\}, \tag{2.39}$$

где W_h — аппроксимация пространства $H_0^1(\Omega)$ конечными разностями, (АПР1). Мы заключаем на основании теоремы 2.2, что $\mathscr{E}$ — относительно компактное подмножество в $L^2(\Omega)$. Определенное ниже множество $\mathscr{E}'$, являющееся подмножеством $\mathscr{E}$, также относительно компактно $L^2(\Omega)$:

$$\mathscr{E}' = \bigcup_{|h| \leqslant c_0} \mathscr{E}'_h, \quad \mathscr{E}'_h = \{u_h \in V_h, \ \|u_h\|_h \leqslant 1\}; \tag{2.40}$$

V_h соответствует аппроксимации (АПР1) пространства V.

2.3. Дискретные неравенства Соболева для несогласованных конечных элементов. В оставшейся части этого параграфа используются те же обозначения, что и в п. 4.5 гл. I. Мы напомним, в частности, что $\mathscr{T}_h$ обозначает некоторую регулярную триангуляцию открытой ограниченной области Ω; $\mathscr{U}_h$ — это множество точек B, которые являются барицентрами $(n-1)$-мерных граней симплексов $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$ и принадлежат внутренности $\Omega(h)$ [1]; w_{hB}, $B \in \mathscr{U}_h$, — скалярная функция, линейная на каждом симплексе $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$, равная нулю вне $\Omega(h)$ и принимающая в узлах следующие значения: $w_{hB}(B)=1$, $w_{hB}(M)=0$ для всех M, отличных от B — барицентров $(n-1)$-мерных граней симплексов $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$.

Для любой функции u_h вида

$$u_h = \sum_{M \in \mathscr{U}_h} u_h(M) w_{hM} \tag{2.41}$$

$D_{ih}u_h$ есть ступенчатая функция, равная нулю вне $\Omega(h)$ и такая, что

$$D_{ih}u_h(x) = D_i u_h(x) \quad \forall x \in \mathscr{S} \quad \forall \mathscr{S} \in \mathscr{T}_h.$$

Теорема 2.3. *Пусть p — некоторое число, удовлетворяющее условию $1 \leqslant p < n$, и q определено равенством $1/q = 1/p - 1/n$. Тогда существует константа $c = c(n, p, \Omega)$, зависящая только от n, p, Ω, такая что*

$$|u_h|_{L^q(\Omega)} \leqslant c(n, p, \Omega, \alpha) \sum_{i=1}^{n} |D_{ih}u_h|_{L^p(\Omega)} \tag{2.42}$$

для каждой функции u_h вида (2.41).

Доказательство. Доказательство существенно опирается на предложение 4.17 гл. I. Для того чтобы установить (2.42), нам надо показать, что для каждой функции θ из $\mathscr{D}(\Omega)$

$$\left|\int_\Omega u_h \theta \, dx\right| \leqslant c(n, p, \Omega)\, \theta \Big|_{L^{q'}(\Omega)} \left(\sum_{j=1}^{n} \left|D_{jh}u_h\right|_{L^p(\Omega)}\right), \tag{2.43}$$

где q' определено равенством $1/q + 1/q' = 1$. Обозначим через χ решение задачи Дирихле $\Delta\chi = \theta$ в Ω, $\chi = 0$ на $\partial\Omega$. Функция χ принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$ в Ω, и, согласно результатам о регулярности для эллиптических уравнений,

$$|\chi|_{W^{2,q'}(\Omega)} \leqslant c(n, p, \Omega)\, |\theta|_{L^q(\Omega)} \tag{2.44}$$

---

[1] $\Omega(h) = \bigcup_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \mathscr{S}$.

(заметим, что $1<q$, $q'<\infty$). В силу неравенства Соболева, производные $\chi_i=D_i\chi$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ принадлежат $W^{1,q'}(\Omega)$, а следовательно $L^{p'}(\Omega)$, где $1/p'+1/p=1$:

$$|\chi_i|_{L^{q'}(\Omega)}\leqslant c(n,\ p,\ \Omega)|\theta|_{L^{q'}(\Omega)},\quad \chi_i=D_i\chi,\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{2.45}$$

Используя функцию χ, запишем

$$\int_\Omega u_h\theta\,dx=\sum_{\mathcal{S}\in\mathcal{T}_h}\int_{\mathcal{S}}u_h\,\Delta\chi\,dx=\sum_{i=0}^{n}\mathcal{Y}_h^i,$$

где

$$\mathcal{Y}_h^0=-\sum_{\mathcal{S}\in\mathcal{T}_h}\int_{\mathcal{S}}D_iu_hD_i\chi\,dx=-\int_\Omega D_{ih}u_hD_i\chi\,dx,$$

$$\mathcal{Y}_h^i=\sum_{\mathcal{S}\in\mathcal{T}_h}\int_{\mathcal{S}}D_i(u_hD_i\chi)\,dx.$$

Имеем

$$\left|\int_\Omega u_h\theta\,dx\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n}|\mathcal{Y}_h^i|. \tag{2.46}$$

Для того чтобы доказать (2.43), мы установим некоторые оценки типа (2.43) для выражений $|\mathcal{Y}_h^i|$, $0\leqslant i\leqslant n$. Для $\mathcal{Y}_h^0$ легко получаем, привлекая неравенство Гёльдера и оценку (2.45):

$$|\mathcal{Y}_h^0|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|D_{ih}u_h|_{L^p(\Omega)}|D_i\chi|_{L^{p'}(\Omega)}$$
$$\leqslant c(n,\ p,\ \Omega)|\theta|_{L^{p'}(\Omega)}\left(\sum_{i=0}^{n}|D_{ih}u_h|_{L^p(\Omega)}\right). \tag{2.47}$$

Для $\mathcal{Y}_h^i$, $1\leqslant i\leqslant n$, используя (1.4.234) с $\varphi=\chi_i=D_i\chi$, находим

$$|\mathcal{Y}_h^i|\leqslant c(n,\ p,\ \Omega,\ \alpha)\left(\sum_{j=1}^{n}|D_j\chi_i|_{L^{q'}(\Omega)}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|D_{jh}u_h|_{L^p(\Omega)}\right),$$
$$|\mathcal{Y}_h^i|\leqslant c(n,\ p,\ \Omega,\ \alpha)|\chi|_{W^{2,q'}(\Omega)}$$
$$\times\left(\sum_{j=1}^{n}|D_{jh}u_h|_{L^p(\Omega)}\right)\leqslant(\text{в силу (2.44)}$$
$$\leqslant c(n,\ p,\ \Omega,\ \alpha)|\theta|_{L^{p'}(\Omega)}\left(\sum_{j=1}^{n}|D_{jh}u_h|_{L^p(\Omega)}\right).\ \square$$

Замечание 2.5. В отличие от обычных неравенств Соболева (см. § 1 и теорему 2.1 для дискретного случая) неравенство (2.42) содержит коэффициент $c(n,\ p,\ \Omega)$, который зависит от Ω. В обычных неравенствах Соболева коэффициенты не зависят от носителей рассматриваемых функций. Мы потеряли некоторую информацию, но это не очень важно для последующего.

Замечание 2.6. Случай $n=p$ может быть рассмотрен так же, как в замечании 2.1. Пусть p — произвольное число, удовлетворяющее условию $1\leqslant p<n$

и q определено равенством $1/q=1/p-1/n$. Для всякой функции u_h вида (2.41) соотношение (2.42) дает

$$|u_h|_{L^q(\Omega)} \leqslant c(n, p, \Omega, \alpha) \sum_{i=1}^{n} |D_{ih}u_h|_{L^p(\Omega)}.$$

Согласно неравенству Гёльдера,

$$|D_{ih}u_h|_{L^p(\Omega)} \leqslant (\operatorname{mes}\Omega)^{1-p/n} |D_{ih}u_h|_{L^n(\Omega)}.$$

Следовательно, с некоторой другой константой $c(n, p, \Omega, \alpha)$,

$$|u_h|_{L^q(\Omega)} \leqslant c(n, p, \Omega, \alpha) \sum_{i=1}^{n} |D_{ih}u_h|_{L^n(\Omega)}. \tag{2.48}$$

Изменяя обозначение константы $c(n, p, \Omega)$ и замечая, что q может быть любым числом $\geqslant 1$, запишем (2.48) в следующем виде:

$$|u_h|_{L^q(\Omega)} \leqslant c(n, q, \Omega, \alpha) \sum_{i=1}^{n} |D_{ih}u_h|_{L^n(\Omega)} \tag{2.49}$$

для каждой функции u_h вида (2.41) с носителем в Ω и для каждого q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Замечание 2.7. Одно неравенство, аналогичное (2.13) ($n=3$), будет дано в гл. III. Нам неизвестно, справедливо ли для несогласованных конечных элементов в двумерном случае неравенство, аналогичное (2.12) ($n=2$). Некоторое более слабое неравенство будет приведено в гл. III. □

2.4. Дискретная теорема о компактности для несогласованых конечных элементов. Мы дадим теперь дискретный аналог теоремы 1.3, а более точно того факта, что вложение $H_0^1(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ компактно для любой ограниченной области Ω. Однако из-за трудностей технического характера результат будет доказан только в двух- и трехмерном случаях.

Пусть $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in\mathcal{H}_\alpha}$ — некоторое регулярное семейство триангуляций Ω. Для каждого h рассмотрим пространство Y_h всех скалярных функций u_h вида (2.41):

$$u_h = \sum_{M\in\mathcal{U}_h} u_h(M)\, w_{hM}, \quad u_h(M) \in \mathbb{R}. \tag{2.50}$$

Эти функции линейны на каждом симплексе $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h$, равны нулю вне $\Omega(h) = \bigcup_{\mathcal{S}\in\mathcal{T}_h} \mathcal{S}$ и непрерывны в барицентрах $(n-1)$-мерных граней симплексов $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h$. Пространство Y_h наделяется скалярным произведением

$$((u_h, v_h))_h = \sum_{i=1}^{n} (D_{ih}u_h, D_{ih}v_h)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \int_{\mathscr{S}} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \, dx. \tag{2.51}$$

Теперь сформулируем теорему.

Теорема 2.4. *Пусть $n=2$ или 3 и $\mathscr{T}_h$, $h \in \mathscr{H}_\alpha$,— некоторое регулярное семейство триангуляций области Ω. Пусть $\mathscr{E}_h$ — некоторое (быть может, пустое) семейство функций вида* (2.50) *и*

$$\mathscr{E} = \bigcup_{\rho(h) \leqslant c_0} \mathscr{E}_h. \tag{2.52}$$

Предположим, что

$$\sup_{u_h \in \mathscr{E}} \| u_h \|_h < +\infty. \tag{2.53}$$

Тогда семейство $\mathscr{E}$ относительно компактно в $L^2(\Omega)$.

Доказательство. Основная идея доказательства основана на том факте, что пространство (кусочно-линейных) согласованных конечных элементов является подпространством пространства (кусочно-линейных) несогласованных конечных элементов. Мы докажем теорему, используя „недискретную" теорему о компактности (теорему 1.1) и полученные выше априорные оценки.

Пространство Y_h (см. (2.50)) содержит пространство X_h непрерывных кусочно-линейных функций, обращающихся в нуль на границе $\Omega(h)$ (согласованные элементы). Так как X_h и Y_h конечномерны, то они являются гильбертовыми пространствами со скалярным произведением $((\cdot, \cdot))_h$ (см. (2.51)) [1]; следовательно, можно рассмотреть ортогональный проектор π_h из Y_h на X_h; из определения такого проектора следует, что

$$((\pi_h u_h, v_h))_h = ((u_h, v_h)) \quad \forall u_h \in Y_h \quad \forall v_h \in X_h, \tag{2.54}$$

$$\| \pi_h u_h \|_h \leqslant \| u_h \|_h \quad \forall u_h \in Y_h. \tag{2.55}$$

Рассмотрим теперь элементы u_h из $\mathscr{E}$. Из (2.55) вытекает, что семейство $\{\pi_h u_h \mid u_h \in \mathscr{E}\}$ ограничено в $H_0^1(\Omega)$. Действительно, поскольку $X_h \subset H_0^1(\Omega)$ и для согласованных элементов норма $\|\cdot\|_h$ совпадает с нормой в $H_0^1(\Omega)$ ($\|\cdot\|$), то

$$\sup_{u_h \in \mathscr{E}} \| \pi_h u_h \|_{H_0^1(\Omega)} = \sup_{u_h \in \mathscr{E}} \| \pi_h u_h \|_h \leqslant \sup_{u_h \in \mathscr{E}} \| u_h \|_h < +\infty.$$

---

[1] Это свойство уже отмечалось и использовалось несколько раз.

В силу теоремы 1.1, семейство $\pi_h u_h$ относительно компактно в $L^2(\Omega)$, и, значит, существуют подпоследовательность $h' \to 0$ и элемент $u \in L^2(\Omega)$, такие что $\pi_{h'} u_{h'} \to u$ в $L^2(\Omega)$ при $h' \to 0$. Доказательство будет завершено, если мы покажем, что

$$\pi_{h'} u_{h'} - u_{h'} \to 0 \text{ при } h' \to 0. \tag{2.56}$$

Но (2.56) немедленно следует из приводимой ниже леммы. □

Лемма 2.9. *Для каждого* v_h *из* Y_h

$$|\pi_h v_h - v_h|_{L^2(\Omega)} \leqslant c(\alpha, \Omega)\, \rho(h) \|v_h\|_h. \tag{2.57}$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.3, пусть θ — произвольный элемент из $\mathscr{D}(\Omega)$ и χ обозначает решение задачи Дирихле $\Delta\chi = \theta$ в Ω, $\chi = 0$ на $\partial\Omega$. Для того чтобы оценить норму $|v_h - \pi_h v_h|_{L^2(\Omega)}$, рассмотрим выражение $(v_h - \pi_h v_h, \theta) = (v_h - \pi_h v_h, \Delta\chi)$. Как и в доказательстве теоремы 2.3,

$$(v_h - \pi_h v_h, \Delta\chi) = ((\pi_h v_h - v_h, \chi))_h + \sum_{i=1}^{n} \mathscr{Y}_h^i, \tag{2.58}$$

$$\mathscr{Y}_h^i = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \int_{\mathscr{S}} D_i((v_h - \pi_h v_h) D_i\chi)\, dx.$$

В силу предложения 4.16 гл. I[1],

$$|\mathscr{Y}_h^i| \leqslant c(\Omega, \alpha)\, \rho(h) \|v_h - \pi_h v_h\|_h |\theta|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.59}$$

Учитывая (2.53) и (2.55), получаем

$$|\mathscr{Y}_h^i| \leqslant c\rho(h). \tag{2.60}$$

Чтобы оценить $((v_h - \pi_h v_h, \chi))_h$, рассмотрим функции χ_h, задаваемые следующим образом: $\chi_h \in X_h$, $\chi_h(M) = \chi(M)$ $\forall M \in \mathscr{U}_h$ (это функции, интерполирующие χ; заметим, что χ непрерывна в $\bar{\Omega}$, $H^2(\Omega) \subset \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$ для $n \leqslant 3$, см. (1.3)). Из общих результатов об интерполяции, которые напоминались в гл. I[2], вытекает, что

$$\|\chi - \chi_h\| \leqslant c(\alpha)\, \rho(h) |\chi|_{H^2(\Omega)} \leqslant (\text{в силу определения } \chi) \leqslant c\rho(h) |\theta|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.61}$$

Используя (2.54), заключаем, что

$$((v_h - \pi_h v_h, \chi))_h = ((v_h - \pi_h v_h, \chi - \chi_h))_h,$$

[1] Здесь существенно предположение, что семейство триангуляций регулярно, $\sigma_h \leqslant \alpha < +\infty$ $\forall h$.

[2] См. (4.42), (4.43). Эти результаты установлены для L^∞-норм. Мы используем здесь аналогичные результаты, имеющие место для L^2-норм, см. Сьярле и Равьяр [1], теорема 5, стр. 196.

а значит,

$$|((v_h-\pi_h v_h,\ \chi))_h|\leqslant\|v_h-\pi_h v_h\|_h\|\chi-\chi_h\|_h\leqslant c\rho(h).$$

Соотношение (2.57) установлено. □

Замечание 2.8. В наиболее часто встречающихся приложениях теоремы 2.4 семейство $\mathscr{E}$ представляет собой последовательность элементов u_{h_m}, $\rho(h_m)\to 0$, $\sigma(h_m)\leqslant\alpha$. Следовательно, $\mathscr{E}_{h_m}=\{u_{h_m}\}$ и $\mathscr{E}_h=\varnothing$ для h, не совпадающих с h_m. Если $\|u_{h_m}\|_{h_m}\leqslant c$, то последовательность u_{h_m} относительно компактна в $L^2(\Omega)$.

§ 3. Аппроксимация стационарных уравнений Навье—Стокса

Мы обсудим здесь аппроксимацию стационарных уравнений Навье—Стокса с помощью вычислительных схем того же типа, что и использовавшиеся для линейной задачи Стокса. В п. 3.1 мы дадим общую теорему о сходимости; затем применим ее в п. 3.2 к вычислительным схемам, основанным на аппроксимациях (АПР 1), ..., (АПР 5) пространства V. В п. 3.3 мы распространим на нелинейный случай численные алгоритмы, описанные в § 5 гл. I. В целом весь этот параграф посвящен распространению результатов, полученных для линейного случая в §§ 3—5 гл. I, на нелинейный случай. Однако результаты будут не так сильны, как в линейном случае, в частности из-за неединственности решения задачи в точной постановке.

*3.1. **Общая теорема о сходимости.*** Пусть Ω — ограниченная липшицева открытая область в $\mathbb{R}^n$ и f задано в $L^2(\Omega)$. По теореме 1.2 существует по крайней мере один элемент u из V, такой что

$$\nu((u,\ v))+b(u,\ u,\ v)=(f,\ v)\quad\forall v\in\tilde{V}.\tag{3.1}$$

По теореме 1.3 этот элемент u единствен, если $n\leqslant 4$ и ν достаточно велико.

Наша цель здесь — обсудить аппроксимацию задачи 3.1. Пусть вначале задана некоторая внешняя устойчивость и сходящаяся гильбертова аппроксимация пространства V, скажем $(\bar{\omega},\ F)$, $(V_h,\ p_h,\ r_h)_{h\in\mathscr{H}}$, где V_h конечномерны; в качестве такой аппроксимации можно взять, например, любую из аппроксимаций (АПР 1), ..., (АПР 5), описанных в гл. I. Предположим, что заданы некоторые согласованные аппроксимации билинейной формы $\nu((u,\ v))$ и линейной формы $(f,\ v)$, удовлетворяющие тем же предположениям, что и в § 3 гл. I:

(i) $a_h(u_h,\ v_h)$ для каждого $h\in\mathscr{H}$ есть непрерывная билинейная форма на $V_h\times V_h$, равномерно коэрцитивная в следующем смысле:

$$\exists \alpha_0 > 0, \text{ не зависящее от } h, \text{ такое что}$$
$$a_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h) \geqslant \alpha_0 \| \boldsymbol{u}_h \|_h^2, \quad \boldsymbol{u}_h \in V_h, \tag{3.2}$$

где $\|\cdot\|_h$ обозначает норму в V_h.

(ii) l_h для каждого $h \in \mathscr{H}$ есть непрерывная линейная форма на V_h, такая что

$$\| l_h \|_{V'_h} \leqslant \beta. \tag{3.3}$$

Принимаемые нами предположения о согласовании таковы:

Если семейство $\boldsymbol{v}_h$ слабо сходится к $\boldsymbol{v}$ при $h \to 0$, а семейство $\boldsymbol{w}_h$ сильно сходится к $\boldsymbol{w}$ при $h \to 0$[1], то

$$\lim_{h \to 0} a_h(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) = \nu((\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})),$$
$$\lim_{h \to 0} a_h(\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}_h) = \nu((\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})). \tag{3.4}$$

Если семейство $\boldsymbol{v}_h$ слабо сходится к $\boldsymbol{v}$ при $h \to 0$, то

$$\lim_{h \to 0} \langle l_h, \boldsymbol{v}_h \rangle = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}). \tag{3.5}$$

Для аппроксимации формы b предположим, что заданы непрерывные трилинейные формы $b_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)$ на V_h, такие что

$$b_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{u}_h, \ \boldsymbol{v}_h \in V_h; \tag{3.6}$$

если семейство $\boldsymbol{v}_h$ слабо сходится к $\boldsymbol{v}$ при $h \to 0$ и $\boldsymbol{w}$ принадлежит $\mathscr{V}$, то

$$\lim_{h \to 0} b_h(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h, r_h \boldsymbol{w}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}). \tag{3.7}$$

Иногда полезно быть более точным в отношении непрерывности b_h и требовать, чтобы

$$|b_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)| \leqslant c(n, \Omega) \| \boldsymbol{u}_h \|_h \| \boldsymbol{v}_h \|_h \| \boldsymbol{w}_h \|_h$$
$$\forall \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h \in V_h, \tag{3.8}$$

где константа $c = c(n, \Omega)$ зависит от n и Ω, но *не зависит от* h; неравенство, такое же как (3.8), но с константой c, зависящей от h, очевидно, так как оно эквивалентно непрерывности трилинейной формы b_h.

Теперь мы можем определить аппроксимирующую задачу для (3.1):

$$\textit{найти } \boldsymbol{u}_h \in V_h, \textit{ такое что}$$
$$a_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) + b_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = \langle l_h, \boldsymbol{v}_h \rangle. \tag{3.9}$$

Имеет место

---

[1] Напомним, что это означает следующее: $p_h \boldsymbol{v}_h \to \overline{\omega} \boldsymbol{v}$ слабо в F, $p_h \boldsymbol{w}_h \to \overline{\omega} \boldsymbol{w}$ сильно в F.

Предложение 3.1. *Для каждого h существует по крайней мере один элемент u_h из V_h, являющийся решением задачи* (3.9). *Если выполнено* (3.8) *и*

$$\alpha_0^2 > c(n, \Omega)\,\beta, \tag{3.10}$$

то u_h единствен.

Доказательство. Существование u_h следует из леммы 1.4. Применяя эту лемму, мы возьмем X равными V_h, которое представляет собой конечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением $((\cdot,\cdot))_h$. Оператор P из V_h в V_h определим равенством

$$((P(u_h), v_h))_h = a_h(u_h, v_h) + b_h(u_h, u_h, v_h) - \langle l_h, v_h\rangle \quad \forall u_h, v_h \in V_h. \tag{3.11}$$

Оператор P непрерывен, и нам остается только проверить выполнение условия (1.29); но, согласно (3.6),

$$((P(u_h), u_h))_h = a_h(u_h, u_h) - \langle l_h, u_h\rangle \geqslant (\text{в силу } (3.2)\text{—}(3.3))$$
$$\geqslant \alpha_0 \| u_h \|_h^2 - \| l_h \|_{V_h'} \| u_h \|_h \geqslant (\alpha_0 \| u_h \|_h - \beta) \| u_h \|_h.$$

Следовательно, $((P(u_h), u_h))_h > 0$, если $\|u_h\|_h = k$ и $k > \beta/\alpha_0$. Лемма 1.4 гарантирует существование по крайней мере одного элемента u_h, такого что $P(u_h) = 0$, или

$$((P(u_h), v_h))_h = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.12}$$

Но это в точности совпадает с (3.9).

Предположим, что выполнены (3.8) и (3.10), и покажем, что элемент u_h единствен. Если u_h^* и u_h^{**} — два решения задачи (3.9) и $u_h = u_h^* - u_h^{**}$, то

$$a_h(u_h, v_h) + b_h(u_h^*, u_h^*, v_h) - b_h(u_h^{**}, u_h^{**}, v_h) = 0$$
$$\forall v_h \in V_h;$$

взяв $v_h = u_h$ и воспользовавшись (3.6), найдем, что $a_h(u_h, u_h) = = b_h(u_h, u_h^*, u_h)$. В силу (3.2) и (3.8), имеем

$$\alpha_0 \| u_h \|_h^2 \leqslant c \| u_h^* \|_h \| u_h \|_h^2. \tag{3.13}$$

Если мы положим $v_h = u_h^*$ в уравнении (3.9), которому удовлетворяет u_h^*, то получим $a_h(u_h^*, u_h^*) = \langle l_h, u_h^*\rangle$, а ввиду (3.2) и (3.3)

$$\alpha_0 \| u_h^* \|_h^2 \leqslant \beta \| u_h^* \|_h, \quad \| u_h^* \|_h \leqslant \beta/\alpha_0. \tag{3.14}$$

Используя эту оценку и (3.13), находим, что

$$(\alpha_0 - c\beta/\alpha_0) \| u_h \|_h^2 \leqslant 0; \tag{3.15}$$

отсюда видно, что если (3.10) имеет место, то $u_h = 0$. □

Теорема 3.1. *Предложим, что выполнены условия* (3.2)—(3.7), *и пусть u_h — некоторое решение задачи* (3.9). *Если $n \leqslant 4$, то* *семейство* $\{p_h u_h\}$ *содержит подпоследовательности, которые сильно сходятся в* F. *Любая такая подпоследовательность сходится к* $\bar{\omega}u$, *где* u — *некоторое решение задачи* (3.1). *Если решение задачи* (3.1) *единственно, то и само семейство* $\{p_h u_h\}$ *сходится к* $\bar{\omega}u$. *Если* $n \geqslant 5$, *то справедливо то же самое заключение, только с заменой сильной сходимости в* F *на слабую.*

Доказательство. Пусть пока n произвольно. Полагая $v_h = u_h$ в (3.9) и используя (3.2), (3.3) и (3.6), находим, что

$$a_h(u_h,\ u_h) = \langle l_h,\ u_h\rangle,\quad \alpha_0 \| u_h \|_h \leqslant \beta. \tag{3.16}$$

Так как операторы p_h устойчивы, то семейство $\{p_h u_h\}$ ограничено в F; следовательно, существуют подпоследовательность $h' \to 0$ и элемент $\varphi \in F$, такие что $p_{h'} u_{h'} \to \varphi$ слабо в F. Условие (C2) из определения сходящейся внешней аппроксимации нормированного пространства означает, что необходимо $\varphi \in \bar{\omega}V$, т. е. $\varphi = \bar{\omega}u$, $u \in V$:

$$p_{h'} u_{h'} \to \bar{\omega}u \text{ слабо в } F \text{ при } h' \to 0. \tag{3.17}$$

Пусть v — произвольный элемент из $\mathcal{V}$; запишем (3.9) с $v_h = r_h v$:

$$a_h(u_h,\ r_h v) + b_h(u_h,\ u_h,\ r_h v) = \langle l_h,\ r_h v\rangle. \tag{3.18}$$

При $h' \to 0$, согласно (3.4), (3.5) и (3.7), имеем $a_{h'}(u_{h'},\ r_{h'} v) \to \nu((u,\ v))$, $b_{h'}(u_{h'},\ u_{h'},\ r_{h'} v) \to b(u,\ u,\ v)$, $\langle l_{h'},\ r_{h'} v\rangle \to (f,\ v)$. Следовательно, u принадлежит V и удовлетворяет условию

$$\nu((u,\ v)) + b(u,\ u,\ v) = (f,\ v)\quad \forall v \in \mathcal{V}. \tag{3.19}$$

Если $n \leqslant 4$, то равенство (3.19) выполняется по непрерывности для каждого $v \in V$; если $n \geqslant 5$, то мы заключаем по непрерывности, что (3.19) удовлетворяется для каждого $v \in \tilde{V}$. В обоих случаях u есть решение стационарных уравнений Навье—Стокса.

В точности тем же методом можно доказать, что любая сходящаяся подпоследовательность семейства $p_h u_h$ сходится к $\bar{\omega}u$, где u — некоторое решение задачи (3.1). Если это решение единственно, то и всё семейство $p_h u_h$ слабо сходится к $\bar{\omega}u$ в F.

Докажем сильную сходимость при $n \leqslant 4$. Как и в линейном случае (см. теорему I.3.1), рассмотрим выражение $X_h = a_h(u_h - r_h u,\ u_h - r_h u)$. Разлагая его и используя (3.9) с $v_h = u_h$, получаем

$$X_h = \langle l_h,\ u_h\rangle - a_h(u_h,\ r_h u) - a_h(r_h u,\ u_h) + a_h(r_h u,\ r_h u).$$

В силу (2.4), (3.5) и (3.17), $X_{h'} \to \langle f,\ u\rangle - a(u,\ u)$ при $h' \to 0$. Беря $v = u$ в (3.1) и применяя (1.22), находим, что $\langle f,\ u\rangle =$

$= a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ [1]; следовательно,

$$X_{h'} \to 0 \text{ при } h' \to 0. \tag{3.20}$$

Теперь доказательство завершается, как в линейном случае; неравенство (3.2) показывает, что $\|\boldsymbol{u}_{h'} - r_{h'}\boldsymbol{u}\|_{h'} \to 0$. Поскольку операторы p_h устойчивы, отсюда вытекает, что

$$\|p_{h'}\boldsymbol{u}_{h'} - p_{h'}r_{h'}\boldsymbol{u}\|_F \leqslant \|p_{h'}\|_{\mathscr{L}(V_{h'}, F)}\|\boldsymbol{u}_{h'} - r_{h'}\boldsymbol{u}\|_{h'} \to 0.$$

Теперь запишем

$$\|p_{h'}\boldsymbol{u}_{h'} - \bar{\omega}\boldsymbol{u}\|_F \leqslant \|p_{h'}\boldsymbol{u}_{h'} - p_{h'}r_{h'}\boldsymbol{u}\|_F + \|p_{h'}r_{h'}\boldsymbol{u} - \bar{\omega}\boldsymbol{u}\|_F.$$

Оба члена в правой части этого неравенства сходятся к нулю при $h' \to 0$ [2]. □

3.2. Приложения. В этом пункте мы применим общую теорему о сходимости к аппроксимирующим схемам, соответствующим аппроксимациям (АПР1), ..., (АПР5) пространства V.

Аппроксимация (АПР1). Выберем a_h и l_h, как в линейном случае (см. (I.3.62) и (I.3.63)):

$$a_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = \nu((\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h))_h, \tag{3.21}$$

$$\langle l_h, \boldsymbol{v}_h\rangle = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h). \tag{3.22}$$

Прежде чем определить b_h, введем трилинейную форму $\hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$:

$$\hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = b'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + b''(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \tag{3.23}$$

$$b'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega u_i(D_iv_j)w_j\,dx, \tag{3.24}$$

$$b''(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega u_iv_j(D_iw_j)\,dx. \tag{3.25}$$

Нетрудно видеть, что

$$\hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\ \forall \boldsymbol{u} \in V\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}, \tag{3.26}$$

но для других значений аргументов $\hat{b}$ и b различны. Определим теперь b_h следующим образом:

$$b_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) = b_h'(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) + b_h''(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h), \tag{3.27}$$

$$b_h'(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega u_{ih}(\delta_{ih}v_{jh})w_{jh}\,dx, \tag{3.28}$$

$$b_h''(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega u_{ih}v_{jh}(\delta_{ih}w_{jh})\,dx. \tag{3.29}$$

---

[1] Это равенство несправедливо для $n \geqslant 5$, и именно здесь причина того, почему нельзя распространить доказательство на этот случай.

[2] Напомним, что для каждого $\boldsymbol{u} \in V$ и каждого $h \in \mathscr{H}$ существует $r_h\boldsymbol{u} \in V_h$, такое что $p_hr_h\boldsymbol{u} \to \bar{\omega}\boldsymbol{u}$ сильно в F при $h \to 0$ (см. предложение 3.1).

Ясно, что b'_h, b''_h, а значит, и b_h — трилинейные формы на V_h; так как V_h конечномерно, эти формы непрерывны.

Нам надо проверить выполнение условий (3.6) и (3.7); условие (3.6) очевидным образом выполняется, в силу нашего выбора формы b_h, а проверку условия (3.7) мы оформим в виде нижеследующей леммы.

Лемма 3.1. *Если* $p_h\boldsymbol{u}_h$ *сходится к* $\bar{\omega}\boldsymbol{u}$, *то*

$$b_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h, r_h\boldsymbol{v}) \to b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}. \tag{3.30}$$

Доказательство. Утверждение, что $p_h\boldsymbol{u}_h$ слабо сходится к $\bar{\omega}\boldsymbol{u}$, означает, что

$$\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u} \text{ слабо в } \boldsymbol{L}^2(\Omega) \tag{3.31}$$

и

$$\delta_{ih}\boldsymbol{u}_h \to D_i\boldsymbol{u} \text{ слабо в } \boldsymbol{L}^2(\Omega), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{3.32}$$

Теорема 2.2 о компактности применима в данной ситуации и показывает, что

$$\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u} \text{ сильно в } \boldsymbol{L}^2(\Omega). \tag{3.33}$$

Нам известно, что если $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$, то $p_hr_h\boldsymbol{v}$ сходится к $\bar{\omega}\boldsymbol{v}$ сильно в F; но из доказательств леммы I.3.1 и предложения I.3.5 вытекает, что фактически

$$r_h\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v} \qquad \text{в норме } \boldsymbol{L}^\infty(\Omega), \tag{3.34}$$

$$\delta_{ih}r_h\boldsymbol{v} \to D_i\boldsymbol{v} \text{ в норме } \boldsymbol{L}^\infty(\Omega). \tag{3.35}$$

Если мы докажем, что

$$b'_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h, r_h\boldsymbol{v}) \to b'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \tag{3.36}$$

$$b''_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h, r_h\boldsymbol{v}) \to b''(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \tag{3.37}$$

то, согласно (3.26), доказательство (3.7) будет завершено. Чтобы доказать (3.36), запишем

$$|b'_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h, r_h\boldsymbol{v}) - b'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leqslant$$

$$\leqslant c_0 \sum_{i,j=1}^{n} \left| \int_\Omega (u_{ih}v_{jh} - u_iv_j)\, \delta_{ih}u_{jh}\, dx \right| +$$

$$+ c_0 \sum_{i,j=1}^{n} \left| \int_\Omega u_iv_j(\delta_{ih}u_{jh} - D_iu_j)\, dx \right|.$$

Все эти интегралы сходятся к нулю, и (3.36) доказано; (3.37) устанавливается аналогично. □

Результат о сходимости, даваемый теоремой 3.1, означает следующее ($n \leqslant 4$):

$$\boldsymbol{u}_{h'} \to \boldsymbol{u} \qquad \text{сильно в } \boldsymbol{L}^2(\Omega), \tag{3.38}$$

$$\delta_{ih'}\boldsymbol{u}_{h'} \to D_i\boldsymbol{u} \text{ сильно в } \boldsymbol{L}^2(\Omega), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{3.39}$$

Точно так же, как в линейном случае, можно показать, что существует ступенчатая функция

$$\pi_h = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \pi_h(M)\, w_{hM}, \tag{3.40}$$

для которой

$$\nu((u_h, v_h))_h + (\overline{\nabla}_h \pi_h, v_h) = (f, v_h) \ \forall v_h \in W_h; \tag{3.41}$$

следовательно, некоторое решение u_h задачи (3.9) является ступенчатой функцией

$$u_h = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} u_h(M)\, w_{hM}, \tag{3.42}$$

такой что

$$\sum_{i=1}^{h} (\nabla_{ih} u_{ih})(M) = 0 \ \forall M \in \mathring{\Omega}_h^1 \tag{3.43}$$

и

$$-\nu \sum_{i=1}^{n} \delta_{ih}^2 u_h(M) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} u_{ih}(M)\, \delta_{ih} u_h(M)$$
$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \delta_{ih}(u_{ih} u_h)(M) + \overline{\nabla}_h \pi_h(M) = f_h(M) \ \forall M \in \mathring{\Omega}_h^1, \tag{3.44}$$

где

$$f_h(M) = \frac{1}{h_1 \ldots h_h} \int_{\sigma_h(M)} f(x)\, dx. \tag{3.45}$$

Если удовлетворены условие (3.8) и некоторое условие, аналогичное (3.10), то u_h и u будут единственны и невязка между u и u_h может быть оценена, как в линейном случае, если, кроме того, $u \in \mathscr{C}^3(\overline{\Omega})$ и $p \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$. Используя формулу Тейлора, можно записать

$$-\nu \sum_{i=1}^{n} (\delta_i^2 r_h u)(M) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (r_h u)_i(M)\, \delta_{ih}(r_h u)(M)$$
$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \delta_{ih}((r_h u)_i\, r_h u)(M) + (\overline{\nabla}_h p)(M)$$
$$= f(M) + \varepsilon_h(M) \ \forall M \in \mathring{\Omega}_h^1, \tag{3.46}$$

причем

$$|\varepsilon_h(M)| \leqslant c(u, p)\, |h|, \tag{3.47}$$

где $c(u, p)$ зависит только от sup-норм вторых и третьих производных от u и вторых производных от p. Уравнения (3.46) показывают, что

$$\nu((r_h u, v_h))_h + b_h(r_h u, r_h u, v_h) - (\bar{\nabla}_h \pi'_h, v_h) = (f + \varepsilon_h, v_h) \tag{3.48}$$

для каждого $v_h \in W_h$, где π'_h — ступенчатая функция

$$\pi'_h = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} p(M) w_{hM}. \tag{3.49}$$

Вычитание (3.48) из (3.9) дает

$$\nu((u_h - r_h u, v_h))_h = -b_h(u_h, u_h, v_h) + b_h(r_h u, r_h u, v_h) + (\varepsilon_h, v_h) \quad \forall v_h \in W_h.$$

Возьмем $v_h = u_h - r_h u$; используя (3.6), получим

$$\nu \| u_h - r_h u \|_h^2 = -b_h(u_h - r_h u, u_h, u_h - r_h u) + (\varepsilon_h, u_h - r_h u).$$

С учетом (3.8) и (3.47) имеем

$$\nu \| u_h - r_h u \|_h^2 \leqslant c(n, \Omega) \| u_h \|_h \| u_h - r_h u \|_h^2 + c(u, p) \| u_h - r_h u \|_h |h|,$$

$$\nu \| u_h - r_h u \|_h \leqslant c(n, \Omega) \| u_h \|_h \| u_h - r_h u \|_h + c(u, p) |h| \leqslant$$
(в силу (3.16)) $(\beta/\alpha_0) c(n, \Omega) \| u_h - r_h u \|_h - c(u, p) |h|$.

Окончательно

$$(\nu - (\beta/\alpha_0) c(n, \Omega)) \| u_h - r_h u \|_h \leqslant c(u, p) |h|. \tag{3.50}$$

Если

$$\nu \alpha_0 > \beta c(n, \Omega), \tag{3.51}$$

($c(n, \Omega)$ — константа из (3.8)), это дает следующую оценку невязки:

$$\| u_h - r_h u \|_h \leqslant \frac{c(u, p)}{\nu - (\beta/\alpha_0) c(n, \Omega)} |h|. \tag{3.52}$$

Аппроксимация (АПР2). В двумерном случае мы можем сопоставить аппроксимации (АПР2) пространства V, описанной в п. 1.4.2, некоторую новую схему дискретизации для уравнений Навье—Стокса. Напомним, что для этой аппроксимации пространство V_h является подпространством в $H_0^1(\Omega)$, и мы возьмем, как в линейном случае,

$$a_h(u_h, v_h) = \nu((u_h, v_h)), \tag{3.53}$$

$$\langle l_h, v_h \rangle = (f, v_h), \tag{3.54}$$

где $((\cdot, \cdot))$ — скалярное произведение в V_h и в $H_0^1(\Omega)$. Определим форму b_h равенством

$$b_h(u_h, v_h, w_h) = \hat{b}(u_h, v_h, w_h) \quad \forall u_h, v_h, w_h \in V_h, \tag{3.55}$$

где $\hat{b}$ определено формулами (3.23)—(3.25); так как V_h — пространство ограниченных вектор-функций, то формы $\hat{b}_h$ определены на V_h; они трилинейны и, следовательно, непрерывны.

Условие (3.6), очевидно, выполнено, в силу нашего выбора b_h; проверке условия (3.7) посвящена нижеследующая лемма.

Лемма 3.2. *Если* $p_h u_h = u_h$ *сходятся к* $\bar{\omega} u$, *то*

$$b_h(u_h, u_h, r_h v) \to b(u, u, v) \quad \forall v \in \mathscr{V}. \tag{3.56}$$

Доказательство. Напомним, что $F = H_0^1(\Omega)$, а $\bar{\omega}$ и $\bar{p}_h$ — тождественные операторы. Утверждение, что $p_h u_h$ слабо сходится к $\bar{\omega} u$ в F, означает, что

$$u_h \to u \text{ слабо в } H_0^1(\Omega). \tag{3.57}$$

Теорема 1.1 о компактности показывает тогда, что

$$u_h \to u \text{ сильно в } L^2(\Omega). \tag{3.58}$$

Доказательство проводится далее точно так же, как и доказательство леммы 3.1, если заметить, что

$$r_h v \to v \text{ в норме } L^\infty(\Omega), \tag{3.59}$$

$$D_i r_h v \to D_i v \text{ в норме } L^\infty(\Omega), \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \tag{3.60}$$

это фактически было доказано в предложении I.4.3 (см. (4.63)). □

Теорема 3.1 дает нам следующий результат о слабой (или сильной) сходимости:

$$\begin{gathered}\text{если } \rho(h) \to 0, \text{ причем } \sigma(h) \leqslant \alpha \text{ (т. е. } h \in \mathscr{H}_\alpha), \\ \text{то } u_{h'} \to u \text{ в } H_0^1(\Omega) \text{ слабо (или сильно).}\end{gathered} \tag{3.61}$$

Точно так же, как в линейном случае (см. п. I.4.2), можно показать, что существует ступенчатая функция π_h:

$$\pi_h = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \pi_h(\mathscr{S}) \chi_{h\mathscr{S}} \tag{3.62}$$

($\chi_{h\mathscr{S}}$ — характеристическая функция симплекса $\mathscr{S}$, такая что

$$\nu((u_h, v_h)) + b_h(u_h, u_h, v_h) - (\pi_h, \operatorname{div} v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in W_h. \tag{3.63}$$

Это уравнение — дискретный аналог уравнения

$$\nu((u, v)) + b(u, u, v) - (p, \operatorname{div} v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega). \tag{3.64}$$

Поскольку размерность $n = 2$, то $\hat{b}$ есть непрерывная трилинейная форма на $H_0^1(\Omega)$ и существует константа $\hat{c}$, такая что

$$|\hat{b}(u, v, w)| \leqslant \hat{c}\|u\|\|v\|\|w\| \quad \forall u, v, w \in H_0(\Omega). \tag{3.65}$$

Эта оценка может быть установлена тем же методом, что и оценка (1.18): следовательно, имеет место (3.8) с $c(n, \Omega)=\hat{c}$.

Получим оценку ошибки, предполагая, что $\boldsymbol{u}\in\mathscr{C}^3(\bar{\Omega})$, $p\in\mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$ и выполняется одно условие, аналогичное (3.51). Возьмем $\boldsymbol{v}_h = r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h$ в уравнении (3.63) и $\boldsymbol{v}=r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h$ в уравнении (3.64); вычитая одно уравнение из другого, найдем

$$\nu((\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h, r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h))+\hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)-\hat{b}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h, r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)$$
$$-(p-\pi_h, \operatorname{div}(r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h))=0. \quad (3.66)$$

Так как $\operatorname{div}(r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)$ — ступенчатая функция, постоянная на каждом симплексе $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$, то мы имеем

$$(p-\pi_h, \operatorname{div}(r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h))=(p-\pi_h', \operatorname{div}(r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)),$$

где π_h' определено формулой

$$\pi_h'=\sum_{\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h}\frac{1}{\operatorname{mes}\mathscr{S}}\left(\int_{\mathscr{S}}p(x)\,dx\right)\chi_{h\mathscr{S}}. \quad (3.67)$$

Следовательно,

$$|(p-\pi_h, \operatorname{div}(r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h))|\leqslant|\pi_h'-p|\,|\operatorname{div}(r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)|$$
$$\leqslant|\pi_h'-p|\,\|\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}\|. \quad (3.68)$$

Оценим разность

$$\hat{b}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h, r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u})-\hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u})$$
$$=\hat{b}(\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_h, r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)+\hat{b}(r_h\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_h, r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)$$
$$-\hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u})=\hat{b}(\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_h, r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)$$
$$+\hat{b}(r_h\boldsymbol{u}, r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}, r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)+\hat{b}(r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h).$$

По абсолютной величине эта сумма может быть оценена, в силу (3.65), величиной

$$\hat{c}\,\|\boldsymbol{u}_h\|\,\|r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|^2+\hat{c}\,\{\|r_h\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{u}\|\}\,\|r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\|\,\|r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|. \quad (3.69)$$

Напомним, что $\nu\|\boldsymbol{u}_h\|^2=\langle\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_h\rangle$ и, значит, $\|\boldsymbol{u}_h\|\leqslant\nu^{-1}|\boldsymbol{f}|$. Поэтому сумма (3.69) не превосходит

$$(\hat{c}/\nu)\,|\boldsymbol{f}|\,\|\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}\|^2+\hat{c}\,\{\|r_h\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{u}\|\}\,\|r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\|\,\|r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|. \quad (3.70)$$

Используя оценки (3.68) и (3.70), получаем из (3.66)

$$(\nu-(\hat{c}/\nu)\,|\boldsymbol{f}|)\,\|\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}\|^2\leqslant\nu\,\|\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{u}-r_h\boldsymbol{u}\|$$
$$+|\pi_h'-p|\,\|\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}\|+\hat{c}\,\{\|r_h\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{u}\|\}\,\|\boldsymbol{u}-r_h\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}\|.$$

Окончательно

$$(\nu-(\hat{c}/\nu)\,|f|)\,\|u_h-r_hu\|\leqslant\nu\,\|u-r_hu\|$$
$$+|\pi_h'-p|+\hat{c}\,\{\|r_hu\|+\|u\|\}\,\|u-r_hu\|. \qquad (3.71)$$

При предположении

$$\nu^2>\hat{c}\,|f| \qquad (3.72)$$

неравенство (3.71) дает оценку невязки между u_h и r_hu, а следовательно между u и u_h.

Аппроксимация (АПР3). Как и в линейном случае, метод изучения этой аппроксимации очень похож на метод, использованный для аппроксимации (АПР2).

Аппроксимация (АПР4). Напомним, что здесь Ω должна быть односвязной открытой областью в $\mathbb{R}^2$. Так как (АПР4) — внутренняя аппроксимация пространства V, то простейшая схема (3.9), связанная с этой аппроксимацией, такова:

$$\text{найти } u_h\in V_h, \text{ такое что}$$
$$\nu((u_h,\ v_h))+b(u_h,\ u_h,\ v_h)=\langle f,\ v_h\rangle\quad\forall v_h\in V_h. \qquad (3.73)$$

Теорема 3.1 применима и показывает, что

$$u_h\to u \text{ в } V \text{ при } \rho(h)\to 0, \qquad (3.74)$$

при условии что $\sigma(h)\leqslant\alpha$ (т. е. $h\in\mathscr{H}_\alpha$). Невязку между u и u_h можно оценить следующим образом (если имеет место единственность). Возьмем $v=u-u_h$ в вариационных уравнениях, которым удовлетворяет u:

$$\nu((u,\ v))+b(u,\ u,\ v)=(f,\ v)\quad\forall v\in V.$$

Затем возьмем $v=r_hu-u_h$ в (3.73); вычитая эти уравнения одно из другого, найдем

$$\nu\|u_h-u\|^2=\nu((u-u_h,\ u-r_hu))+b(u_h,\ u_h,\ r_hu-u_h)$$
$$-b(u,\ u,\ r_hu-u_h). \qquad (3.75)$$

Разность $b(u_h,\ u_h,\ r_hu-u_h)-b(u,\ u,\ r_hu-u_h)$ равняется

$$b(u_h-u,\ u_h,\ r_hu-u_h)+b(u,\ u_h-u,\ r_hu-u_h)$$
$$=b(u_h-u,\ u_h,\ r_hu-u)+b(u_h-u,\ u_h,\ u-u_h)$$
$$+b(u,\ u_h-u,\ r_hu-u)=b(u_h-u,\ u_h,\ r_hu-u)$$
$$+b(u_h-u,\ u,\ u-u_h)+b(u,\ u_h-u,\ r_hu-u).$$

Ввиду (1.18), выражение справа оценивается величиной

$$c\{\|u\|+\|u_h\|\}\,\|u_h-u\|\,\|r_hu-u\|+c\,\|u\|\,\|u-u_h\|^2.$$

Напомним, что $\nu\|u\|^2=\langle f,\ u\rangle$, $\|u\|\leqslant\nu^{-1}\|f\|_{V'}$ и аналогично $\nu\|u_h\|^2=\langle f,\ u_h\rangle$, $\|u_h\|\leqslant\nu^{-1}\|f\|_{V'}$. Поэтому последнее выражение оценивается величиной

$$(2c/\nu)\,|\boldsymbol{f}|\,\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|\,\|r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\|+(c/\nu)\,\|\boldsymbol{f}|\,\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|^2.$$

Тогда из (3.75) вытекает, что

$$\left(\nu-\frac{c}{\nu}\,|\boldsymbol{f}|\right)\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|^2\leqslant\left(\nu+\frac{2c}{\nu}\,|\boldsymbol{f}|\right)\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|\,\|r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\|,$$

$$\left(\nu-\frac{c}{\nu}\,|\boldsymbol{f}|\right)\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|\leqslant\left(\nu+\frac{2c}{\nu}\,|\boldsymbol{f}|\right)\|r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\|. \qquad (3.76)$$

Неравенство (3.76) показывает, что если

$$\nu^2>c\,\|\boldsymbol{f}\|_{V'}, \qquad (3.77)$$

то невязка $\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|$ имеет тот же порядок, что и $\|r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\|$. Так как c — это константа $c(n)$ для $n=2$ в (1.18), то неравенство (3.77) есть в точности то неравенство (1.37), которое гарантирует единственность решения $\boldsymbol{u}$ задачи в точной постановке.

Аппроксимация (АПР5). В случае когда рассматривается аппроксимация (АПР5) пространства V, мы можем положить

$$a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)=\nu\,((\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h))_h, \qquad (3.78)$$

$$\langle l_h,\boldsymbol{v}_h\rangle=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h), \qquad (3.79)$$

$$b_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h)=b_h'(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h)+b_h''(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h), \qquad (3.80)$$

$$b_h'(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega u_{ih}(D_{ih}v_{jh})\,w_{jh}\,dx, \qquad (3.81)$$

$$b_h''(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h)=-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega u_{ih}v_{jh}\,(D_{ih}w_{jh})\,dx. \qquad (3.82)$$

Ясно, что b_h', b_h'' и b_h — трилинейные формы на V_h, и так как V_h конечномерно, то эти формы непрерывны.

Мы должны проверить (3.6) и (3.7); (3.6) очевидно в силу нашего выбора формы b_h, а доказательству (3.7) посвящена следующая лемма.

Лемма 3.3. *Пусть $n\leqslant 3$. Если $p_h\boldsymbol{u}_h$ слабо сходится к $\bar{\omega}\boldsymbol{u}$, то*

$$b_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h,r_h\boldsymbol{v})\to b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\quad\forall\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}. \qquad (3.83)$$

Доказательство. По предположению,

$$\boldsymbol{u}_h\to\boldsymbol{u}\ \text{слабо в}\ \boldsymbol{L}^2(\Omega), \qquad (3.84)$$

$$D_{ih}\boldsymbol{u}_h\to D_i\boldsymbol{u}\ \text{слабо в}\ \boldsymbol{L}^2(\Omega),\quad 1\leqslant i\leqslant n. \qquad (3.85)$$

Теорема 2.4 о компактности показывает, что

$$\boldsymbol{u}_h\to\boldsymbol{u}\ \text{сильно в}\ \boldsymbol{L}^2(\Omega). \qquad (3.86)$$

Нам известно, что если $v \in \mathcal{V}^0$, то $p_h r_h v$ сильно сходится к $\bar{\omega} v$ в F; далее, из доказательств предложений I.4.12 и I.4.15 вытекает, что

$$r_h v \to v \quad \text{в норме } L^\infty(\Omega), \tag{3.87}$$
$$D_{ih} r_h v \to D_i v \quad \text{в норме } L^\infty(\Omega). \tag{3.88}$$

Доказательство (3.7) будет завершено, если мы покажем, что

$$b'_h(u_h, u_h, r_h v) \to b'(u, u, v), \tag{3.89}$$
$$b''_h(u_h, u_h, r_h v) \to b''(u, u, v). \tag{3.90}$$

Чтобы установить (3.89), запишем

$$|b'_h(u_h, u_h, r_h v) - b'(u, u, v)| \leqslant$$
$$c_0 \sum_{i, j=1}^{n} \left| \int_\Omega (u_{ih} v_{jh} - u_i v_j) D_{ih} u_{jh}\, dx \right| +$$
$$+ c_0 \sum_{i, j=1}^{n} \left| \int_\Omega u_i v_j (D_{ih} u_{jh} - D_i u_j)\, dx \right|.$$

Все эти интегралы сходятся к нулю, и (3.89) доказано. Доказательство (3.90) аналогично. □

Результат о сходимости, даваемый теоремой 3.1, означает, что

$$u_{h'} \to u \quad \text{сильно в } L^2(\Omega), \tag{3.91}$$
$$D_{ih'} u_{h'} \to D_i u \quad \text{сильно в } L^2(\Omega), \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{3.92}$$

(напомним, что $n = 2$ или 3). Точно так же, как в линейном случае, можно показать, что существует ступенчатая функция π_h, постоянная на каждом $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h$, равная нулю вне $\Omega(h)$ и такая, что

$$\nu((u_h, v_h))_h + b_h(u_h, u_h, v_h) - (\pi_h, \operatorname{div}_h v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in W_h. \tag{3.93}$$

Если удовлетворены условие (3.8) и некоторое условие, аналогичное (3.10), то u_h и u единственны и невязка между ними может быть оценена, как в линейном случае, если, кроме того, $u \in \mathcal{C}^3(\bar{\Omega})$ и $p \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$.

Лемма 3.4. *Пусть u, p — точное решение задачи* (1.8)—(1.10). *Предположим, что $u \in \mathcal{C}^3(\bar{\Omega})$, $p \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ и $\Omega = \Omega(h)$. Тогда*

$$\nu((u, v_h))_h + b_h(u, u, v_h) - (p, \operatorname{div} v_h) = (f, v_h) + l_h(v_h), \tag{3.94}$$

где

$$|l_h(v_h)| \leqslant c(u, p)\, \rho(h) \| v_h \|_h. \tag{3.95}$$

Доказательство. Возьмем скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ элемента $v_h \in W_h$ с уравнением (1.8), записанным в виде

$$-\nu \Delta u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (u_i D_i u + D_i(u_i u)) + \operatorname{grad} p = f.$$

Так как $\Omega=\Omega(h)$, то мы получим

$$\sum_{\mathscr{S}}\Big\{-\nu(\Delta\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{S}}+\frac{1}{2}(u_iD_i\boldsymbol{u}+D_i(u_i\boldsymbol{u}),\ \ \boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{S}}$$
$$+(\operatorname{grad}p,\ \boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{S}}-(\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{S}}\Big\}=0.$$

Формула Грина, примененная несколько раз на каждом симплексе $\mathscr{S}$, показывает, что левая часть последнего соотношения равна

$$\{\nu((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h))_h+\hat{b}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)-(p,\operatorname{div}_h\boldsymbol{v}_h)-(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h)-l_h(\boldsymbol{v}_h)\}=0,$$

где

$$l_h(\boldsymbol{v}_h)=\sum_{\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h}\left\{\int_{\partial\mathscr{S}}\left(\nu\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\vec{\nu}}\boldsymbol{v}_h-\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\cdot\vec{\nu})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}_h)+\frac{\partial p}{\partial\vec{\nu}}\boldsymbol{v}_h\right)d\Gamma\right\}.$$

Оценка (3.95) для $l_h(\boldsymbol{v}_h)$ легко следует из предложения I.4.16. □

Далее действуем, как и при доказательстве (3.71). Возьмем $\boldsymbol{v}_h=\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}$ в соотношениях (3.93) и (3.94) и вычтем одно соотношение из другого. Получим

$$\nu((\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}))_h+b_h(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u})$$
$$-b_h(\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u})-(p-\pi_h,\ \operatorname{div}_h(r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h))=l_h(\boldsymbol{v}_h).\tag{3.96}$$

Так как $\operatorname{div}_h(r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)$ равняется нулю, то соответствующий член пропадает. Оценим разность

$$b_h(\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u})-b_h(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u})$$
$$=b_h(\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u})$$
$$+b_h(r_h\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u})-b_h(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u})$$
$$=b_h(\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u})$$
$$+b_h(r_h\boldsymbol{u},\ r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u})+b_h(r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}).$$

Абсолютную величину этой суммы можно оценить, используя (1.18) и (3.65), как

$$c\|\boldsymbol{u}_h\|_h\|\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}\|_h^2+c\{\|r_h\boldsymbol{u}\|_h+\|\boldsymbol{u}\|\}\|r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\|_h\|\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}\|_h.\tag{3.97}$$

Напомним, что $\nu\|\boldsymbol{u}_h\|_h^2=\langle\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{u}_h\rangle$ и, следовательно, $\|\boldsymbol{u}_h\|_h\leqslant\nu^{-1}|\boldsymbol{f}|$. Поэтому сумма (3.97) не превосходит

$$(c/\nu)|\boldsymbol{f}|\|\boldsymbol{u}_h-r_h\boldsymbol{u}\|_h^2+c\{\|r_h\boldsymbol{u}\|_h+\|\boldsymbol{u}\|\}\|r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\|_h\|r_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_h.\tag{3.98}$$

Используя эту оценку и (3.95), получаем из (3.96)

$$(\nu-(c/\nu)|\boldsymbol f|)\|\boldsymbol u_h-r_h\boldsymbol u\|_h^2\leqslant\nu\|\boldsymbol u_h-r_h\boldsymbol u\|_h\|\boldsymbol u-r_h\boldsymbol u\|_h$$
$$+c\{\|r_h\boldsymbol u\|_h+\|\boldsymbol u\|\}\|\boldsymbol u_h-r_h\boldsymbol u\|_h\|\boldsymbol u-r_h\boldsymbol u\|_h$$
$$+c(\boldsymbol u,\ p)\rho(h)\|\boldsymbol u_h-r_h\boldsymbol u\|_h. \tag{3.99}$$

Окончательно

$$(\nu-(c/\nu)|\boldsymbol f|)\|\boldsymbol u_h-r_h\boldsymbol u\|_h\leqslant\nu\|\boldsymbol u-r_h\boldsymbol u\|_h$$
$$+c\{\|r_h\boldsymbol u\|_h+\|\boldsymbol u\|\}\|\boldsymbol u-r_h\boldsymbol u\|_h+c(\boldsymbol u,\ p)\rho(h). \tag{3.100}$$

В предположении что

$$\nu^2>c|\boldsymbol f|, \tag{3.101}$$

неравенство (3.100) дает оценку невязки между $\boldsymbol u_h$ и $r_h\boldsymbol u$, а следовательно между $\boldsymbol u$ и $\boldsymbol u_h$.

3.3. Численные алгоритмы. В последующем анализе мы ограничиваемся случаем $n\leqslant 4$. Наша цель — распространить на нелинейный случай численные алгоритмы, описанные для линейного случая в § 5 гл. I.

Заметим, что стационарные уравнения Навье—Стокса не являются в отличие от уравнений Стокса уравнениями Эйлера ни для какой задачи оптимизации. Поэтому приводимые ниже алгоритмы представляют собой некоторое расширение классических алгоритмов Удзавы и Эрроу—Гурвица, относящихся лишь к задачам оптимизации.

Всюду в оставшейся части этого параграфа мы будем использовать трилинейную форму $\hat b(\boldsymbol u,\ \boldsymbol v,\ \boldsymbol w)$, определенную формулами (3.23)—(3.25). Это непрерывная трилинейная форма на $\boldsymbol H_0^1(\Omega)\times\boldsymbol H_0^1(\Omega)\times\boldsymbol H_0^1(\Omega)$, и существует константа $\hat c=\hat c(n)$, такая что

$$|\hat b(\boldsymbol u,\ \boldsymbol v,\ \boldsymbol w)|\leqslant\hat c(n)\|\boldsymbol u\|\|\boldsymbol v\|\|\boldsymbol w\|\quad\forall\boldsymbol u,\ \boldsymbol v,\ \boldsymbol w\in\boldsymbol H_0^1(\Omega)\ (n\leqslant 4). \tag{3.102}$$

Как мы уже отмечали,

$$\hat b(\boldsymbol u,\ \boldsymbol v,\ \boldsymbol w)=b(\boldsymbol u,\ \boldsymbol v,\ \boldsymbol w),\ \text{если}\ \boldsymbol u\in V,\ \boldsymbol v,\ \boldsymbol w\in\boldsymbol H_0^1(\Omega), \tag{3.103}$$
$$\hat b(\boldsymbol u,\ \boldsymbol v,\ \boldsymbol v)=0,\ \boldsymbol u,\ \boldsymbol v\in\boldsymbol H_0^1(\Omega). \tag{3.104}$$

Алгоритм Удзавы. Для того чтобы аппроксимировать решения задачи (1.8)—(1.10), мы, как и в § I.5, построим две последовательности элементов

$$\boldsymbol u^m\in\boldsymbol H_0^1(\Omega),\quad p^m\in L^2(\Omega). \tag{3.105}$$

Это построение осуществляется относительно легко потому, что для аппроксимирующих уравнений условие $\operatorname{div}\boldsymbol u=0$ пропадает. Мы начинаем алгоритм с произвольного

$$p^0\in L^2(\Omega). \tag{3.106}$$

Если p^m уже известно, то определяем $\boldsymbol{u}^{m+1}$ как некоторое решение задачи

$$\boldsymbol{u}^{m+1} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega),\ \nu((\boldsymbol{u}^{m+1}, \boldsymbol{v})) + \hat{b}(\boldsymbol{u}^{m+1}, \boldsymbol{u}^{m+1}, \boldsymbol{v}) = (p^m, \operatorname{div}\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega). \tag{3.107}$$

Далее, определим p^{m+1} посредством соотношений

$$p^{m+1} \in L^2(\Omega),\quad (p^{m+1} - p^m, q) + \rho(\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{m+1}, q) = 0\ \forall q \in L^2(\Omega). \tag{3.108}$$

Позже мы дадим условия, которым должно удовлетворять число $\rho > 0$.

Существование $\boldsymbol{u}^{m+1}$, удовлетворяющего (3.107), не очевидно, но его можно доказать, используя метод Галёркина, точно так же, как в теореме 1.2, и мы опустим это доказательство. Нетрудно видеть, что $\boldsymbol{u}^{m+1}$ является решением следующей нелинейной задачи Дирихле:

$$\boldsymbol{u}^{m+1} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega),\quad -\nu\Delta\boldsymbol{u}^{m+1} + \sum_{i=1}^{n} u_i^{m+1} D_i \boldsymbol{u}^{m+1} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{m+1})\,\boldsymbol{u}^{m+1} = -\operatorname{grad} p^m + \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega). \tag{3.109}$$

Решение задачи (3.107)—(3.109), вообще говоря, неединственно. Если $\boldsymbol{u}^{m+1}$ известно, то p^{m+1} явно задается посредством соотношения (3.108), которое эквивалентно следующему:

$$p^{m+1} = p^m - \rho \operatorname{div}\boldsymbol{u}^{m+1} \in L^2(\Omega). \tag{3.110}$$

При исследовании сходимости мы будем предполагать, что

$$\nu - (c(n)/\nu)\,\|\boldsymbol{f}\|_{V'} = \bar{\nu} > 0; \tag{3.111}$$

в силу (3.102), (3.103) и теоремы 1.3, условие (3.111) гарантирует единственность решения задачи (1.8)—(1.10); p единственно с точностью до аддитивной постоянной. Зафиксируем эту постоянную, потребовав, чтобы

$$\int_\Omega p(x)\,dx = 0. \tag{3.112}$$

Предложение 3.2. *Пусть $n \leqslant 4$ и выполнено условие* (3.111). *Предположим, что число ρ удовлетворяет условию*

$$0 < \rho < 2\bar{\nu}. \tag{3.113}$$

Тогда при $m \to \infty$

$$\boldsymbol{u}^m \to \boldsymbol{u} \text{ в норме } \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \tag{3.114}$$

$$p^m \to p \text{ слабо в } L^2(\Omega), \tag{3.115}$$

где $\{u, p\}$ — *единственное решение задачи* (1.8)—(1.10), *удовлетворяющее* (3.112).

Доказательство. Положим

$$v^{m+1} = u^{m+1} - u, \quad q^{m+1} = p^{m+1} - p \tag{3.116}$$

и будем действовать, как при доказательстве теоремы I.5.1. Вычтя уравнение (3.107) из уравнения

$$\nu((u, v)) + \hat{b}(u, u, v) - (p, \operatorname{div} v) = \langle f, v\rangle \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.117}$$

и взяв $v = v^{m+1}$, получим

$$\begin{aligned} &\nu\|v^{m+1}\|^2 = (q^m, \operatorname{div} v^{m+1}) + \hat{b}(u, u, v^{m+1}) \\ &- \hat{b}(u^{m+1}, u^{m+1}, v^{m+1}) = -(q^{m+1} - q^m, \operatorname{div} v^{m+1}) \\ &- (q^{m+1}, \operatorname{div} v^{m+1}) + \hat{b}(v^{m+1}, u, v^{m+1}) \\ &(\text{в силу (3.102) и (1.39)}) - (q^{m+1} - q^m, \operatorname{div} v^{m+1}) \\ &- (q^{m+1}, \operatorname{div} v^{m+1}) + (\hat{c}/\nu)\|f\|_{V'}\|v^{m+1}\|^2. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Положив $q = q^{m+1}$ в (3.108), найдем, что

$$|q^{m+1}|^2 - |q^m|^2 + |q^{m+1} - q^m|^2 = -2\rho(\operatorname{div} v^{m+1}, q^{m+1}). \tag{3.119}$$

Умножим неравенство (3.118) на 2ρ и сложим его с (3.119); это дает неравенство

$$\begin{aligned} &|q^{m+1}|^2 - |q^m|^2 + |q^{m+1} - q^m|^2 + 2\rho(\nu - (\hat{c}/\nu)\|f\|_{V'})\|v^{m+1}\|^2 \\ &\leqslant -2\rho(q^{m+1} - q^m, \operatorname{div} v^{m+1}), \end{aligned} \tag{3.120}$$

которое аналогично равенству (5.12) из доказательства теоремы I.5.1 с константой ν, замененной на $\bar{\nu}$ (см. (3.111)). Доказательство завершается теперь точно так же, как в теореме I.5.1 □

Замечание 3.1. В общем случае, когда не предполагается единственности, мы можем доказать результаты о слабой сходимости для средних значений

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} u^m, \quad \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} p^m.$$

Эти последовательности ограничены в $H_0^1(\Omega)$ и $L^2(\Omega)$, и каждая их слабо сходящаяся подпоследовательность сходится к паре $\{u, p\}$, которая является решением задачи (1.8)—(1.10).

Алгоритм Эрроу — Гурвица. Мы построим последовательность пар $\{u^m, p^m\}$ следующим образом. Начнем алгоритм с произвольных элементов

$$u^0 \in H_0^1(\Omega), \quad p^0 \in L^2(\Omega). \tag{3.121}$$

Если p^m, u^m уже известны, то определим p^{m+1}, u^{m+1} как решения задач

$$u^{m+1} \in H_0^1(\Omega), \quad ((u^{m+1}-u^m, v))+\rho\nu((u^m, v)) + b(u^m, u^{m+1}, v)-\rho(p^m, \operatorname{div} v)=\rho(f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.122}$$

$$p^{m+1} \in L^2(\Omega), \quad \alpha(p^{m+1}-p^m, q)+\rho(\operatorname{div} u^{m+1}, q)=0 \quad \forall q \in L^2(\Omega). \tag{3.123}$$

Предположим, что ρ и α — строго положительные числа; условия на ρ и α будут даны позже.

Существование и единственность $u^{m+1} \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющего (3.122), являются простым следствием проекционной теоремы; (3.122) — линейное вариационное уравнение, эквивалентное задаче Дирихле

$$\begin{gathered} u^{m+1} \in H_0^1(\Omega), \\ -\Delta u^{m+1}+\rho\sum_{i=1}^{n} u_i^m D_i u^{m+1}+(\rho/2)(\operatorname{div} u^m)\, u^{m+1} \\ = -\Delta u^m+\rho\nu u^m+\rho \operatorname{grad} p^m+f. \end{gathered} \tag{3.124}$$

Следовательно, p^{m+1} явно задается равенством (3.123), которое эквивалентно равенству

$$p^{m+1}=p^m-(\rho/\alpha)\operatorname{div} u^{m+1} \in L^2(\Omega). \tag{3.125}$$

Сходимость удается доказать лишь при более сильных условиях, чем использовавшиеся в предложении 3.2.

Предложение 3.3. *Предположим, что* $n \leqslant 4$,

$$\nu-\frac{2\hat{c}}{\nu}\|f\|_{V'}-\frac{4\hat{c}^2}{\nu^2}\|f\|_{V'}^2=\nu^*>0 \tag{3.126}$$

и

$$0<\rho<\frac{\alpha\nu^*}{2(1+\nu^2\alpha)}. \tag{3.127}$$

Тогда при $m \to \infty$

$$u^m \to u \text{ в норме } H_0^1(\Omega), \tag{3.128}$$

$$p^m \to p \text{ слабо в } L^2(\Omega), \tag{3.129}$$

где $\{u, p\}$ *— единственное решение задачи* (1.8)—(1.10), *удовлетворяющее* (3.112).

Доказательство. Мы опять используем обозначения (3.116). Возьмем $v=2v^{m+1}$ в (3.117) и (3.122) и вычтем эти уравнения одно из другого; это дает

$$\begin{aligned}
&\|v^{m+1}\|^2-\|v^m\|^2+\|v^{m+1}-v^m\|^2+2\rho\nu\|v^{m+1}\|^2\\
&=2\rho\nu((v^{m+1},\ v^{m+1}-v^m))+2\rho(q^m,\ \operatorname{div} v^{m+1})\\
&+2b(u^m,\ u^{m+1},\ v^{m+1})-2b(u,\ u,\ v^{m+1})\\
&\leqslant 4^{-1}\|v^{m+1}-v^m\|^2+4\rho^2\nu^2\|v^{m+1}\|^2+2\rho(q^m,\ \operatorname{div} v^{m+1})\\
&+2b(v^m-v^{m+1},\ u,\ v^{m+1})+2b(v^{m+1},\ u,\ v^{m+1})\leqslant(\text{в силу}\\
&(3.102)\ \text{и}\ (1.39))\leqslant 4^{-1}\|v^{m+1}-v^m\|^2+4\rho^2\nu^2\|v^{m+1}\|^2\\
&+2\rho(q^m,\ \operatorname{div} v^{m+1})+(2\hat{c}/\nu)\|f\|_{V'}\|v^{m+1}-v^m\|\|v^{m+1}\|\\
&+(2\hat{c}/\nu)\|f\|_{V'}\|v^{m+1}\|^2\leqslant 2^{-1}\|v^{m+1}-v^m\|^2+4\rho^2\nu^2\\
&+(4\hat{c}^2/\nu^2)\|f\|_{V'}^2+(2\hat{c}/\nu)\|f\|_{V'})\|v^{m+1}\|^2+2\rho(q^m,\ \operatorname{div} v^{m+1}).
\end{aligned}\tag{3.130}$$

Возьмем $q=2q^{m+1}$ в (3.123):

$$\begin{aligned}
&\alpha|q^{m+1}|^2-\alpha|q^m|^2=2\rho(q^{m+1},\ \operatorname{div} v^{m+1})=-2\rho(q^m,\ \operatorname{div} v^{m+1})\\
&-2\rho(q^{m+1}-q^m,\ \operatorname{div} v^{m+1})\leqslant-2\rho(q^m,\ \operatorname{div} v^{m+1})\\
&+2\rho|q^{m+1}-q^m|\|v^{m+1}\|\leqslant(\alpha/2)|q^{m+1}-q^m|^2\\
&+(2\rho^2 n/\alpha)\|v^{m+1}\|^2-2\rho(q^m,\ \operatorname{div} v^{m+1})
\end{aligned}\tag{3.131}$$

(см. соотношения (5.13), (5.25), (5.26) гл. I). Сложив неравенства (3.130) и (3.131), получим

$$\begin{aligned}
&\alpha|q^{m+1}|^2-\alpha|q^m|^2+2^{-1}|q^{m+1}-q^m|^2+\|v^{m+1}\|^2-\|v^m\|^2\\
&+2^{-1}\|v^{m+1}-v^m\|^2+2\rho(\nu-(2\hat{c}/\nu)\|f\|_{V'}-(4\hat{c}^2/\nu^2)\|f\|_{V'}^2\\
&-2\rho\nu^2-(2\rho/\alpha)\|v^{m+1}\|^2\leqslant 0.
\end{aligned}\tag{3.132}$$

Условия (3.126)—(3.127) гарантируют, что коэффициент при $\|v^{m+1}\|^2$ (3.132) строго положителен; поэтому это неравенство аналогично неравенству (5.27) в доказательстве теоремы I.5.2; мы завершаем доказательство, как и в той теореме. □

§ 4. Теория бифуркаций и результаты о неединственности

Единственность решения стационарных уравнений Навье — Стокса была установлена лишь в предположении, что ν достаточно велико или что заданные силы и граничные значения скорости достаточно малы. Поэтому можно ожидать, что в противном случае решение неединственно, и это действительно было доказано Юдовичем [1, 2], Рабиновичем [2] и Вельте [1, 2]. Две первые работы имеют дело с задачей Бенарда (уравнения Навье—Стокса плюс уравнение теплопроводности), а в третьей устанавливается неединственность решения задачи Тейлора.

В этом параграфе мы докажем неединственность решения задачи Тейлора, следуя Вельте [2]. В п. 4.1 приводятся постановка задачи и некоторые предварительные результаты; в п. 4.2 напоминаются основные результаты из теории топологической степени, которые нам потребуются дальше, а в п. 4.3 дается доказательство теоремы о неединственности.

4.1. Задача Тейлора. Предварительные результаты.

4.1.1. Уравнения. В задаче Тейлора изучается течение вязкой несжимаемой жидкости в области пространства $\mathbb{R}^3$, ограниченной двумя бесконечными цилиндрами радиусов r_1 и r_2 ($r_2 > r_1 > 0$), имеющими общую вертикальную ось. Внутренний цилиндр вращается с угловой скоростью α, а внешний покоится.

Поскольку мы ищем осесимметричные решения, будем использовать цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$, скажем r, θ, z, где ось z совпадает с осью цилиндров. Таким образом, жидкость заполняет следующую область Ω:

$$r_1 < r < r_2, \quad -\infty < z < +\infty. \tag{4.1}$$

Обозначим через $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ компоненты вектора скорости в цилиндрических координатах, а через $\tilde{p}$ — давление. Безразмерная форма уравнений движения для осесимметричного течения такова:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\lambda}\left(A\tilde{u}-\frac{\tilde{u}}{r^2}\right)+\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}+\tilde{w}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}-\frac{1}{r}\tilde{v}^2+\frac{\partial\tilde{p}}{\partial r}=0,\\ &-\frac{1}{\lambda}\left(A\tilde{v}-\frac{\tilde{v}}{r^2}\right)+\tilde{u}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r}+\tilde{w}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}+\frac{1}{r}\tilde{u}\tilde{v}=0,\\ &-\frac{1}{\lambda}A\tilde{w}+\tilde{u}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}+\tilde{w}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}+\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z}=0; \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\tilde{u})+\frac{\partial}{\partial z}(r\tilde{w})=0, \tag{4.3}$$

где

$$A=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4.4}$$

и $\lambda = \mathrm{Re}$ — число Рейнольдса:

$$\lambda = \mathrm{Re} = \alpha r_1^2 \nu^{-1}. \tag{4.5}$$

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндров таковы:

$$\begin{aligned} &\tilde{u}=\tilde{w}=0, \ \tilde{v}=1 \ \text{для } r=r_1,\\ &\tilde{u}=\tilde{v}=\tilde{w}=0 \ \text{для } r=r_2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Известно одно очень простое решенне задачи (4.2), (4.3), (4.6), которое мы будем обозначать через u_0, v_0, w_0, p_0:

$$\begin{gathered} u_0 = w_0 = 0, \quad v_0(r) = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2}\left(\frac{r_2^2}{r} - r\right), \\ p_0(r) = v_0^2 \ln r + \text{const}. \end{gathered} \tag{4.7}$$

В связи с этим можно искать решение задачи (4.2), (4.3), (4.6) в виде

$$\tilde{u} = u_0 + u, \quad \tilde{v} = v_0 + v, \quad \tilde{w} = w_0 + w, \quad \tilde{p} = p_0 + p.$$

Мы получим для u, v, w, p следующие уравнения:

$$\begin{gathered} -\frac{1}{\lambda}\left(Au - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{r}v^2 - \frac{2}{r}vv_0 + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ -\frac{1}{\lambda}\left(Av - \frac{v}{r^2}\right) + u\frac{\partial v}{\partial r} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}uv + \frac{1}{r}(v_0 + rv_0')u = 0, \\ -\frac{1}{\lambda}Aw + u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{gathered} \tag{4.8}$$

где $v_0' = \dfrac{dv_0}{dr}$,

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial z}(rw) = 0, \tag{4.9}$$

и следующие граничные условия, вытекающие из (4.6):

$$u = v = w = 0 \text{ для } r = r_1 \text{ и } r = r_2. \tag{4.10}$$

Заметим, что граничных условий (4.10) недостаточно для того, чтобы хорошо поставить задачу (как и условий (4.6) недостаточно в случае уравнений (4.2), (4.3)): нужно еще добавить некоторые граничные условия при $z = \pm\infty$. Мы можем искать либо решения u, v, w, обращающиеся в нуль при $z = \pm\infty$, либо решения, не зависящие от z, либо решения, периодичные по z. Первая возможность в точности соответствует типу задач, изученному в § 1; вторая возможность тоже, поскольку дело сводится к нахождению двумерных решений. Задача третьего типа (периодичные по z решения) не совпадает ни с одной из задач, рассмотренных в § 1, но очень близка к ним, и в действительности решения такого вида наблюдаются в эксперименте. *Мы будем искать решения задачи* (4.8)—(4.10), *которые периодичны по z с периодом L. Напомним, что всегда имеется тривиальное решение $u = v = w = p = 0$; мы хотим показать, что в некоторых случаях существует еще и нетривиальное решение.*

4.1.2. Функция тока. Из (4.9) вытекает, что существует функция $f = f(r, z)$, такая что

$$\frac{\partial}{\partial z}(rf) = ru, \quad \frac{\partial}{\partial r}(rf) = -rw. \tag{4.11}$$

Граничное условие (4.10) гарантирует, что f — однозначная функция. Представляет интерес записать уравнения (4.8), используя только зависимые переменные f, v. С этой целью продифференцируем первое уравнение (4.8) по z, а третье по r и вычтем одно из другого полученные уравнения. Член с давлением исчезнет, замечая, что

$$\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r}=\mathcal{L}f,\quad \frac{\partial}{\partial r}(Aw)=\mathcal{L}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right),$$

где

$$\mathcal{L}=A-\frac{1}{r^2}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2},$$

мы получим после приведения подобных членов

$$\mathcal{L}^2 f+\lambda\left(a\frac{\partial v}{\partial z}+M(f,\ v)\right)=0, \tag{4.12}$$

где

$$M(f,\ v)=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\mathcal{L}f\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rf)\right)\mathcal{L}f\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(v^2),$$

$$a(r)=\frac{2v_0}{r}-\frac{2}{r_2^2-r_1^2}\left(\frac{r_2^2}{r^2}-1\right).$$

Второе уравнение в (4.8) может быть записано следующим образом:

$$\mathcal{L}v+\lambda\left(b\frac{\partial f}{\partial z}+N(f,\ v)\right)=0, \tag{4.13}$$

где

$$N(f,\ v)=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\cdot\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rf)\cdot\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$b=-\left(\frac{v_0}{r}+v_0'\right)=\frac{2}{r_2^2-r_1^2}.$$

Граничные условия (4.10) принимают вид

$$f=\frac{\partial f}{\partial r}=v=0\ \text{для}\ r=r_1\ \text{и}\ r=r_2. \tag{4.14}$$

Итак, задача свелась к нахождению нетривиальных периодичных по z с периодом L решений f, v задачи (4.12)—(4.14).

4.1.3. Ассоциированное функциональное уравнение. Поскольку функции f и v периодичны по z с периодом L, достаточно рассмотреть сужение этих функций на открытую область

$$\mathfrak{G}_L=\{(r,\ z)\,|\,r_1<r<r_2,\ -L/2<z<L/2\}.$$

Обозначим через $H^k(\mathfrak{G};\ L)$ пространство всех функций, удовлетворяющих следующему условию: если функцию продолжить на область

$$\mathfrak{G}=\{(r,\ z)\,|\,r_1<r<r_2,\ z\in\mathbb{R}\}$$

как периодичную функцию периода L, то продолженная функция будет принадлежать H^k для любой ограниченной подобласти области $\mathfrak{G}$[1]. Фактически $H^k(\mathfrak{G};\ L)$ является в точности подпространством в $H^k(\mathfrak{G}_L)$, состоящим из тех функций v, для которых

$$\frac{\partial^j v}{\partial z^j}\left(r,\ -\frac{L}{2}\right)=\frac{\partial^j v}{\partial z^j}\left(r,\ \frac{L}{2}\right),\quad j=0,\ \ldots,\ k-1.$$

Введем теперь пространства $W=W_1\times W_2$ и $V=V_1\times V_2$:

$$W_1=\left\{f\in H^2(\mathfrak{G};\ L)\,|\,f=\frac{\partial f}{\partial r}=0 \text{ при } r=r_1 \text{ и } r=r_2\right\},$$

$$W_2=\{v\in H^1(\mathfrak{G};\ L)\,|\,v=0 \text{ при } r=r_1 \text{ и } r=r_2\},$$

$$V_1=H^3(\mathfrak{G};\ L)\cap W_1,\quad V_2=W_2.$$

Ясно, что W_1, W_2, V_1, V_2, снабженные нормами, индуцированными соответственно из $H^2(\mathfrak{G}_L)$, $H^1(\mathfrak{G}_L)$, $H^3(\mathfrak{G}_L)$, $H^2(\mathfrak{G}_L)$, являются гильбертовыми пространствами. Снабдим V нормой произведения, индуцированной из $H^3(\mathfrak{G}_L)\times H^2(\mathfrak{G}_L)$, однако W наделим другим скалярным произведением:

$$((\varphi_1,\ \varphi_2))_W=((f_1,\ f_2))_{W_1}+((v_1,\ v_2))_{W_2}, \tag{4.15}$$

$$((f_1,\ f_2))_{W_1}=\int_{\mathfrak{G}_L}\mathscr{L}f_1\cdot\mathscr{L}f_2 r\,dr\,dz,$$

$$((v_1,\ v_2))_{W_2}=\int_{\mathfrak{G}_L}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial z}+\frac{\partial v_1}{\partial r}\frac{\partial v_2}{\partial r}\right)r\,dr\,dz,$$

где $\varphi_i=\{f_i,\ v_i\}$ — элементы из W. Соответствующая норма в W_2, очевидно, эквивалентна норме, индуцированной из $H^1(\mathfrak{G}_L)$, а соответствующая норма в W_1, согласно приводимой ниже лемме 4.1, эквивалентна норме, индуцированной из $H^2(\mathfrak{G}_L)$. Таким образом, W является гильбертовым пространством со скалярным произведением (4.15).

Лемма 4.1. *Норма $\|f\|_{W_1}$ в W_1 эквивалентна норме, индуцированной из $H^2(\mathfrak{G}_L)$.*

Доказательство. Легко видеть, что если f и g принадлежат W_1, то

$$\int_{\mathfrak{G}_L}\mathscr{L}f\cdot gr\,dr\,dz=-\int_{\mathfrak{G}_L}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\right)r\,dr\,dz. \tag{4.16}$$

Поэтому если $f\in W_1$ и $\mathscr{L}f=0$, то $\int_{\mathfrak{G}_L}\mathscr{L}f\cdot fr\,dr\,dz=0$ и $f=0$, в силу (4.16). Следовательно, $\|f\|_{W_1}$ — норма. Эта норма в W_1 эквивалентна норме $|\mathscr{L}f|_{L^2(\mathfrak{G}_L)}$, а последняя эквивалентна норме, индуцированной из $H^2(\mathfrak{G}_L)$, как показывает применение теорем о регулярности к оператору $\mathscr{L}$ — эллиптическому оператору второго порядка (см., например, Агмон, Дуглис, Ниренберг [1]). □

[1] Такая функция может принадлежать $H^k(\mathfrak{G})$, только если она нулевая.

Оператор T. Определение оператора T будет дано после двух нижеследующих лемм.

Лемма 4.2. *Для заданного* $g \in L^2(\mathcal{O}_L)$ *существует единственное* $u \in W_2$ (*соотв.* $v \in W_1$), *такое что*

$$\mathscr{L}u = g \tag{4.17}$$

$$(\text{соотв. } \mathscr{L}^2 v = g). \tag{4.18}$$

При этом $u \in H^2(\mathcal{O}_L)$, $v \in H^4(\mathcal{O}_L)$.

Доказательство. Как легко проверить, используя (4.15), эти задачи эквивалентны соответственно следующим:

найти $u \in W_2$, такое что

$$-\int\limits_{\mathcal{O}_L} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u_1}{\partial z}\right) r\,dr\,dz = \int\limits_{\mathcal{O}_L} g u_1 r\,dr\,dz \quad \forall u_1 \in W_2;$$

найти $v \in W_1$, такое что

$$\int\limits_{\mathcal{O}_L} \mathscr{L}v \cdot \mathscr{L}v_1 \cdot r\,dr\,dz = \int\limits_{\mathcal{O}_L} g v_1 r\,dr\,dz \quad \forall v_1 \in W_1.$$

Существование и единственность решения этих вариационных задач следуют из леммы 4.1 и проекционной теоремы (теоремы 1.2.2). Из теорем о регулярности для эллиптических операторов (здесь операторов $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^2$) вытекает, что $u \in H^2(\mathcal{O}_L)$, а $v \in H^4(\mathcal{O}_L)$. □

Лемма 4.3. *Для* $\{f, v\} \in V$ *функции*

$$a\frac{\partial v}{\partial z} + M(f, v), \quad b\frac{\partial f}{\partial z} + N(f, v)$$

принадлежат $L^2(\mathcal{O}_L)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $M(f, v)$ и $N(f, v)$ принадлежат $L^2(\mathcal{O}_L)$. Это можно показать, используя теорему вложения Соболева, которая дает, в частности (см. п. 1.1): $H^2(\mathcal{O}_L) \subset \mathscr{C}^0(\overline{\mathcal{O}}_L)$, $H^1(\mathcal{O}_L) \subset L^4(\mathcal{O}_L)$. Старшие члены в $M(f, v)$ таковы:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial z} \cdot \mathscr{L}f - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}(\mathscr{L}f);$$

если $\{f, v\} \in V$, то f принадлежит $H^3(\mathcal{O}_L)$, $\partial^2 f/\partial r\,\partial z$ и $\mathscr{L}f$ принадлежат $H^1(\mathcal{O}_L)$, а значит и $L^4(\mathcal{O}_L)$, а их произведение принадлежит $L^2(\mathcal{O}_L)$; $\partial f/\partial z$ лежит в $H^2(\mathcal{O}_L)$, а значит в $\mathscr{C}^0(\overline{\mathcal{O}}_L)$, $\partial/\partial r(\mathscr{L}f)$ — в $L^2(\mathcal{O}_L)$, а произведение этих членов — в $L^2(\mathcal{O}_L)$. Для других членов в M и N доказательство аналогично. □

Теперь мы можем ввести оператор T. Согласно леммам 4.2 и 4.3, для всякой пары $\{f, v\}$ из V существует единственная пара $\{f', v'\}$, принадлежащая V, а также $H^4(\mathcal{O}_L) \times H^2(\mathcal{O}_L)$, такая что

$$\mathscr{L}^2 f' = -\left(a\frac{\partial v}{\partial z} + M(f, v)\right), \quad \mathscr{L}v' = -\left(b\frac{\partial f}{\partial z} + N(f, v)\right). \tag{4.19}$$

Определение 4.1. Обозначим через T отображение V в себя, действующее по правилу $\{f, v\} \mapsto \{f', v'\}$.

Связь этого оператора с нашей задачей такова:

Предложение 4.1. *Следующие две задачи эквивалентны:*

найти пару $\{f, v\} \in V$, *удовлетворяющую* (4.12)—(4.14);

найти элемент $\varphi = \{f, v\}$ *из* V, *такой что*

$$\varphi = \lambda T\varphi. \tag{4.20}$$

Доказательство очевидно. □

Начиная с этого места, мы будем изучать задачу (4.12)—(4.14) в ее функциональной форме (4.20). Следующий подпункт посвящен изучению оператора T.

4.1.4. Свойства оператора T.

Лемма 4.4. *T — компактный оператор в V.*

Доказательство. Пусть $\varphi_n = \{f_n, v_n\}$ — произвольная ограниченная последовательность в V и $\varphi_n' = \{f_n', v_n'\} = T\varphi_n$. Более пристальный анализ доказательства леммы 4.3 показывает, что $a\partial v_n/\partial z + M(f_n, v_n)$ и $b\partial f_n/\partial z + N(f_n, v_n)$ — ограниченные последовательности в $L^2(\mathcal{O}_L)$. Поэтому $\mathscr{L}^2 f_n'$ и $\mathscr{L} v_n'$ — ограниченные последовательности в $\mathscr{L}^2(\mathcal{O}_L)$, f_n' и v_n' — ограниченные последовательности в $H^4(\mathcal{O}_L)$ и $H^2(\mathcal{O}_L)$, а тогда они являются относительно компактными последовательностями соответственно в $H^3(\mathcal{O}_L)$ (или V_1) и в $H^1(\mathcal{O}_L)$ (нли V_2) (см. теорему 1.1). □

Рассмотрим линейный оператор B, определенный следующим образом:

$$\begin{gathered}
\varphi = \{f, v\} \mapsto \varphi'' = \{f'', v''\} = B\varphi, \\
\mathscr{L}^2 f'' = -a\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \mathscr{L} v'' = -\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \{f'', v''\} \in W.
\end{gathered} \tag{4.21}$$

Для всякого $\varphi \in W$ существует единственная пара $\{f'', v''\}$ из W, которая удовлетворяет (4.21) (см. лемму 4.2). Поэтому B — непрерывное линейное отображение из W в $W \cap \{H^4(\mathcal{O}_L) \times H^2(\mathcal{O}_L)\}$. Используя опять теорему 1.1, получаем такой результат.

Лемма 4.5. *B — компактный линейный оператор в W и в V.*

Между операторами T и B существует следующая связь.

Лемма 4.6. *Оператор B — это производная (по Фреше) оператора T в точке* 0.

Доказательство. Запишем $R\varphi = \varphi^* = T\varphi - B\varphi = \varphi' - \varphi''$, $\varphi \in V$. Имеем

$$\mathscr{L}^2 f^* = -M(f, v), \quad \mathscr{L} v^* = -N(f, v). \tag{4.22}$$

Так как $T0 = 0$, то нам надо показать, что

$$\|\varphi^*\|_V / \|\varphi\|_V \to 0 \text{ при } \|\varphi\|_V \to 0. \tag{4.23}$$

Используя (4.22) и рассуждения из доказательства леммы 4.3, легко убедиться, что

$$|M(f, v)|_{L^2(\mathfrak{S}_L)} \leqslant c_0 \|\varphi\|_V^2, \quad |N(f, v)|_{L^2(\mathfrak{S}_L)} \leqslant c_1 \|\varphi\|_V^2$$

(c_i — константы). Тогда по лемме 4.2

$$\|f^*\|_{H^2(\mathfrak{S}_L)} \leqslant c_2 |M(f, v)|_{L^2(\mathfrak{S}_L)} \leqslant c_3 \|\varphi\|_V^2,$$

$$\|v^*\|_{H^2(\mathfrak{S}_L)} \leqslant c_4 |N(f, v)|_{L^2(\mathfrak{S}_L)} < c_5 \|\varphi\|_V^2.$$

В частности, $\|\varphi^*\|_V \leqslant c_6 \|\varphi\|_V^2$, откуда и следует (4.23). □

4.1.5. Один результат о единственности. Прежде чем приступать к доказательству неединственности решения, мы установим один простой результат о единственности (для „малых“ λ), который представляет собой не что иное, как адаптацию теоремы 1.6 к задаче Тейлора.

Предложение 4.2. *Если λ достаточно мало:*

$$0 \leqslant \lambda < c(r_1, r_2)^{1}, \tag{4.24}$$

то задача (4.12)—(4.14) (*или* (4.20)) *не имеет решений в V, отличных от тривиального.*

Доказательство. Пусть $\varphi = \{f, v\}$ — некоторое решение задачи (4.12)—(4.14). Умножим (4.12) на f, (4.13) на v и проинтегрируем эти уравнения на $\mathfrak{S}_L$ по мере $r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$. Имеем

$$\int_{\mathfrak{S}_L} [M(f, v)\cdot f - N(f, v)\cdot v]\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}z = 0.$$

Используя (4.16), получаем

$$\int_{\mathfrak{S}_L} \left[|\mathscr{L}f|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|^2\right] r\mathrm{d}r\mathrm{d}z =$$

$$= \lambda \int_{\mathfrak{S}_L} \left(-a\frac{\partial v}{\partial z} f + b\frac{\partial f}{\partial z} v\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}z.$$

Интегрируя по частям, видим, что правая часть последнего соотношения равна

$$\lambda \int_{\mathfrak{S}_L} (a+b) v \frac{\partial f}{\partial z} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z.$$

Это оценивается как

$$\lambda r_2 \sup|a+b|\, |v|_{L^2(\mathfrak{S}_L)} \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{L^2(\mathfrak{S}_L)}$$

$$\leqslant \lambda c(r_1, r_2) \int_{\mathfrak{S}_L} \left[|\mathscr{L}f|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|^2\right] r\mathrm{d}r\mathrm{d}z,$$

[1] $c(r_1, r_2)$ — некоторая константа, зависящая от r_1 и r_2. Относительно ее явного вида см. доказательство предложения 4.2 ниже.

так как

$$\sup_{r_1 \leqslant r \leqslant r_2} |a+b| = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{r_2^2}{r_1^2},$$

$$|v|^2_{L^2(\mathfrak{G}_L)} \leqslant \text{const} \int\limits_{\mathfrak{G}_L} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|^2 \right) \mathrm{d}r\, \mathrm{d}z$$ (неравенство

Пуанкаре),

$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{L^2(\mathfrak{G}_L)} \leqslant \text{const} \cdot |\mathscr{L} f|^2_{L^2(\mathfrak{G}_L)}$ (см. лемму 4.1). Окончательно,

$$[1 - \lambda c(r_1, r_2)] \int\limits_{\mathfrak{G}_L} \left[|\mathscr{L} f|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|^2 \right] r\mathrm{d}r\, \mathrm{d}z \leqslant 0,$$

так что $f = v = 0$, если имеет место (4.24). □

Замечание 4.1. Незначительно видоизменяя предыдущее доказательство, можно установить единственность решения для $\lambda < \bar{\lambda}$, где $\bar{\lambda}$ — наименьшее собственное значение оператора $(B + B^*)/2$, который компактен и самосопряжен в W.

Замечание 4.2. Наша цель — доказать в некоторых случаях неединственность решения для достаточно больших λ.

4.2. Одно спектральное свойство оператора B.

4.2.1. Некоторые разложения в ряд Фурье. Если f принадлежит $L^2(\mathfrak{G}_L)$, то f обладает разложением в ряд Фурье:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(r) \cos(n\sigma z) + \bar{f}_n(r) \sin(n\sigma z)) \tag{4.25}$$

$(\sigma = 2\pi/L)$, где f_n и $\bar{f}_n$ принадлежат L^2 на интервале $[r_1, r_2]$. Кроме того, сумма

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (|f_n|^2_{L^2(r_1, r_2)} + |\bar{f}_n|^2_{L^2(r_1, r_2)}) \right\}^{1/2}$$

конечна и определяет в $L^2(\mathfrak{G}_L)$ некоторую норму, эквивалентную обычной.

Функции из $H^k(\mathfrak{G}; L)$ $(k \geqslant 1)$ аналогичным образом обладают разложением в ряд Фурье вида (4.25), где f_n, $\bar{f}_n$ — функции из $H^k(r_1, r_2)$. Сумма

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} n^{2j} (|f_n|^2_{H^{k-j}(r_1, r_2)} + |\bar{f}_n|^2_{H^{k-j}(r_1, r_2)}) \right\}^{1/2} \tag{4.26}$$

конечна и определяет в $H^k(\mathfrak{G}; L)$ норму, эквивалентную норме, индуцированной из $H^k(\mathfrak{G}_L)$.

Рассмотрим подпространство $\overline{V}$ в V, содержащее все пары $\{f, v\}$, удовлетворяющие условиям

$$f(r, -z) = -f(r, z), \quad v(r, -z) = v(r, z).$$

Такие функции f и v допускают разложения в ряд Фурье вида

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin(n\sigma z), \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos(n\sigma z). \tag{4.27}$$

Не составляет труда конкретизировать предыдущие замечания для таких функций (V, а значит и $\overline{V}$, является замкнутым подпространством в $H^3(\mathfrak{G}; L) \times H^1(\mathfrak{G}; L)$).

Далее, если $\varphi = \{f, v\} \in \overline{V}$, то $\varphi'' = B\varphi = \{f'', v''\}$ также принадлежит $\overline{V}$ и ряды Фурье для f'' и v'' получаются решением следующих одномерных краевых задач:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{M} - (n\sigma)^2)^2 f_n''(r) = an\sigma v_n(r), \\ &-(\mathcal{M} - (n\sigma)^2)\, v_n''(r) = bn\sigma f_n(r), \\ &\mathcal{M} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \end{aligned} \tag{4.28}$$

с граничными условиями

$$f_n''(r) = \frac{df_n''}{dr}(r) = v_n(r) = 0 \text{ при } r = r_1 \text{ и } r = r_2. \tag{4.29}$$

Обозначим через B_n линейное отображение $\{f_n, v_n\} \longmapsto \{f_n'', v_n''\}$, которое непрерывно действует из $L^2(r_1, r_2) \times L^2(r_1, r_2)$ в $H^4(r_1, r_2) \times \times H^2(r_1, r_2)$.

4.2.2. Свойства операторов B_n. Отметим следующий результат, доказательство которого можно найти, например, у Карлина [1] или Кирхгэснера [1].

Лемма 4.7. *Пусть* $M = \alpha(r)\frac{d^2}{dr^2} + \beta(r)\frac{d}{dr} + \gamma(r)$, *где* α, β, γ *четырежды непрерывно дифференцируемы на* $[-1, 1]$, $\alpha > 0$, $\gamma < 0$. *Тогда*

(i) *функция Грина* $G(r, s)$ *для оператора* M *с граничными условиями* $G(\pm 1, s) = 0$ *отрицательна для* $r, s \in (-1, +1)$;

(ii) *функция Грина* $H(r, s)$ *для оператора* M^2 *с граничными условиями* $H(\pm 1, s) = (\partial H)/\partial z\, (\pm 1, s) = 0$ *положительна для* $r, s \in (-1, +1)$.

Из этой леммы вытекает

Лемма 4.8. *Функции Грина* $H(k; r, s)$ *и* $G(k; r, s)$ *для операторов* $(\mathcal{M} - k^2)^2$ *и* $-(\mathcal{M} - k^2)$ *на интервале* (r_1, r_2) *с граничными условиями* (4.29) *положительны на* $(r_1, r_2) \times (r_1, r_2)$.

Используя эти ядра, мы можем превратить (4.28), (4.29) в интегральные уравнения

$$f_n''(r) = n\sigma \int_{r_1}^{r_2} G(n\sigma;\, r,\, s)\, a(s)\, v_n(s)\, \mathrm{d}s, \tag{4.30}$$

$$v_n''(r) = n\sigma \int_{r_1}^{r_2} H(n\sigma;\, r,\, s)\, b f_n(s)\, \mathrm{d}s. \tag{4.31}$$

Собственный вектор оператора B_n — это пара функций $\{f_n, v_n\}$, такая что $B_n\{f_n, v_n\} = \lambda\{f_n, v_n\}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. В этом случае выполняются соотношения (4.28), (4.29) с $f_n'' = \lambda f_n$, $v_n'' = \lambda v_n$. Они эквивалентны следующим интегральным уравнениям, которые выводятся из (4.30), (4.31):

$$f_n(r) = \lambda n\sigma \int_{r_1}^{r_2} G(n\sigma;\, r,\, s)\, a(s)\, v_n(s)\, \mathrm{d}s, \tag{4.32}$$

$$v_n(r) = \lambda n\sigma \int_{r_1}^{r_2} H(n\sigma;\, r,\, s)\, b f_n(s)\, \mathrm{d}s. \tag{4.33}$$

Исключая v_n, получаем

$$f_n(r) = \mu \int_{r_1}^{r_2} K(n\sigma;\, r,\, s)\, f_n(s)\, \mathrm{d}s, \tag{4.34}$$

где $\mu = \lambda^2$ и

$$K(k;\, r,\, s) = k^2 \int_{r_1}^{r_2} G(k;\, r,\, t)\, H(k;\, t,\, s)\, a(t)\, b\, \mathrm{d}t. \tag{4.35}$$

Укажем теперь некоторые свойства собственных значений операторов B_n. Они основаны на следующем результате, доказательство которого можно найти, например, у Виттинга [1] [1].

Лемма 4.9. *Пусть $K(r, s)$ обозначает некоторую вещественную непрерывную функцию, определенную на квадрате $[r_1, r_2]\times[r_1, r_2]$ и строго положительную внутри этого квадрата. Задача на собственные значения*

$$f(r) = \lambda \int_{r_1}^{r_2} K(r, s)\, f(s)\, \mathrm{d}s, \quad r_1 < r < r_2, \tag{4.36}$$

[1] Этот результат — частный случай общего результата Крейна — Рутмана [1], касающегося линейных компактных операторов, которые оставляют инвариантным некоторый конус в банаховом пространстве. Эти результаты обобщают на бесконечномерный случай хорошо известную в линейной алгебре теорему Перрона — Фробениуса для положительных матриц (см., например, Варга [1]).

имеет решение $\lambda_1 > 0$, *отвечающее собственной функции* $f \in \mathscr{C}^0([r_1, r_2])$, *для которой* $f(r) > 0$ *для* $r_1 < r < r_2$. *Любое другое решение задачи* (4.36) *будет отвечать собственному значению* λ, *такому что* $|\lambda| > \lambda_1$.

Лемма 4.10. *Оператор* B_n *обладает собственным значением* $\lambda_n^1 > 0$, *которому отвечает собственный вектор* $\{f_n^1, v_n^1\}$ *с* $f_n^1(r) > 0$, $v_n^1(r) > 0$ *для* $r_1 < r < r_2$. *Любое другое собственное значение* λ *оператора* B_n *удовлетворяет условию* $|\lambda| > \lambda_n^1$.

Доказательство. В силу (4.34), $\{f_n, v_n\}$ является собственным вектором B_n с собственным значением λ_n тогда и только тогда, когда f_n есть решение задачи (4.34) с $\mu = \lambda_n^2$. Но к уравнению (4.34) применима лемма 4.9, и тем самым наша лемма доказана, за исключением утверждения о положительности v_n^1. Положительность v_n^1 вытекает из леммы 4.8, положительности f_n^1 и соотношения (4.33), записанного с $v_n = v_n^1$, $f_n = f_n^1$. □

Нам понадобятся и другие спектральные свойства операторов B_n.

Лемма 4.11. *Пусть* λ_n — *некоторое собственное значение оператора* B_n. *Тогда*

$$|\lambda_n| > \lambda_n^1 \geqslant \frac{2}{\max|a+b|} n^2\sigma^2. \tag{4.37}$$

Доказательство. Лемма 4.10 дает $|\lambda_n| > \lambda_n^1$. Докажем второе неравенство в (4.37). Имеем

$$\begin{aligned} &(\mathscr{M} - (n\sigma)^2)^2 f_n^1(r) = \lambda_n^1 a n\sigma v_n^1(r), \\ &-(\mathscr{M} - (n\sigma)) v_n^1(r) = \lambda_n^1 b n\sigma f_n^1(r). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Умножим первое равенство на $rf_n^1(r)$, второе — на $rv_n^1(r)$, сложим и проинтегрируем. После интегрирования по частям получим

$$J(f_n^1, v_n^1) = \lambda_n^1 n\sigma \int_{r_1}^{r_2} (a+b) f_n^1 v_n^1 r\, \mathrm{d}r, \tag{4.39}$$

где

$$J(f, v) = \int_{r_1}^{r_2} \Big[(\mathscr{M}f)^2 + 2(n\sigma)^2 \Big(\Big(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2} f^2 \Big) + (n\sigma)^4 f^2 + \Big(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2} v^2 + (n\sigma)^2 v^2 \Big] r\, \mathrm{d}r.$$

Правая часть (4.39) оценивается величиной

$$\lambda_n^1 n\sigma \max|a+b| \int_{r_1}^{r_2} |f_n^1 v_n^1| r\,dr$$

$$\leqslant \lambda_n^1 n\sigma \max \frac{|a+b|}{2} \left\{ n\sigma \int_{r_1}^{r_2} |f_n^1|^2 r\,dr + \frac{1}{n\sigma} \int_{r_1}^{r_2} |v_n^1|^2 r\,dr \right\}$$

$$\leqslant \frac{\lambda_n^1}{(n\sigma)^2} \max \frac{|a+b|}{2} J(f_n^1, v_n^1).$$

Мы можем поделить на $J(f_n^1, v_n^1)$, которое отлично от нуля, откуда и следует (4.37). □

4.2.3. Одно спектральное свойство оператора B. Заметим вначале, что если $\{f, v\}$ — собственный вектор оператора B с собственным значением λ, то $\{f_n, v_n\}$, соответствующие разложению (4.27) для $\{f, v\}$, будут собственными векторами операторов B_n с собственным значением λ. Наоборот, мы выведем из результатов п. 4.2.2 одно спектральное свойство оператора B.

Рассмотрим все λ_n^1, $n \geqslant 1$, даваемые леммой 4.10. Из (4.37) вытекает, что $\lambda_n^1 \to \infty$ при $n \to \infty$ и, следовательно, $\inf\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n^1$ конечен и строго положителен. Обозначим через m наибольшее целое n, такое что $\lambda_n^1 = \inf\limits_{p\geqslant 1} \lambda_p^1$. Может случиться, что $\lambda_m^1 = \lambda_n^1$ для некоторых других значений n, $n < m$. Мы хотели бы избежать такой ситуации, и, действительно, справедлива

Лемма 4.12. *Можно выбрать период L так, чтобы $\lambda_1^1 > \lambda_n^1$ $\forall n > 1$. В этом случае $\lambda_1^1 = \inf\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n^1$ обозначим через λ_1; λ_1 является простым собственным значением оператора B в $\overline{V}$, и любое другое собственное значение λ оператора B удовлетворяет условию $|\lambda| > \lambda_1$. Собственный вектор $\varphi^1 = \{f^1, v^1\}$, отвечающий λ_1, допускает разложение Фурье вида* (4.27) с $f_n^1 = v_n^1 = 0$ $\forall n > 1$.

Доказательство. Пусть L выбрано произвольно, $\sigma = 2\pi/L$ и m определено, как выше (равно наибольшему n, такому что $\lambda_m^1 = \inf\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n^1$). Положим $\sigma^* = m\sigma$, $L^* = L/m$. Для соответствующего оператора B число λ_1 есть собственное значение оператора B_1 и $\lambda_1 < \lambda_n^1$ $\forall n > 1$. Другие свойства, утверждаемые в лемме, теперь очевидны. □

До конца этого параграфа мы будем предполагать, что L выбрано так, как указано в лемме 4.12.

Наш следующий результат касается степени λ_1 как собственного значения оператора B. Степень λ_1 — это размерность ядра $\ker(I - \lambda_1 B)^p$, которая не зависит от p для больших p.

Лемма 4.13. *В условиях леммы 4.12 λ_1 является собственным значением оператора B степени 1.*

Доказательство. Покажем, что если $(I-\lambda_1 B)^p\varphi=0$ для $p\geqslant 2$, то $(I-\lambda_1 B)=0$, так что $\ker(I-\lambda_1 B)^p$ равно $\ker(I-\lambda_1 B)$ для каждого p и его размерность равна единице, по лемме 4.12. Проведем доказательство индукцией по p. Нам достаточно показать, что из $(I-\lambda_1 B)^2\varphi=0$ вытекает, что $(I-\lambda_1 B)\varphi=0$. Пусть функция φ^0 удовлетворяет условию $(I-\lambda_1 B)^2\varphi^0=0$. Предположим, что вектор $(I-\lambda_1 B)\varphi^0$ не равен нулю. Тогда этот вектор равен, с точностью до постоянного сомножителя, собственной функции φ^1:

$$\varphi^1=(I-\lambda_1 B)\varphi^0,\quad \varphi^1=\lambda_1 B\varphi^1. \tag{4.40}$$

Имеем $\varphi^0=\lambda_1 B(\varphi^0+\varphi^1)$. Это равенство означает, что

$$\mathscr{L}^2 f^0=\lambda_1 a\frac{\partial}{\partial z}(v^0+v^1),\quad \mathscr{L}v^0=\lambda_1 b\frac{\partial}{\partial z}(f^0+f^1). \tag{4.41}$$

Напомним, что $f^1(r,z)=f_1^1(r)\sin(\sigma z)$, $v^1(r,z)=v_1^1(r)\cos(\sigma z)$. Рассмотрим ряды Фурье для f^0 и v^0:

$$f^0=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^0\sin(n\sigma z),\quad v^0=\sum_{n=1}^{\infty} v_n^0\cos(n\sigma z).$$

Из (4.41) вытекает, что

$$(\mathscr{M}-\sigma^2)^2 f_1^0=\lambda_1 a\sigma(v_1^0+v_1^1),\quad -(\mathscr{M}-\sigma^2)v_1^0=\lambda_1 b\sigma(f_1^0+f_1^1) \tag{4.42}$$

и для $n\geqslant 2$

$$(\mathscr{M}-\sigma^2)^2 f_n^0=\lambda_1 a\sigma n v_n^0,\quad -(\mathscr{M}-\sigma^2)v_n^0=\lambda_1 b\sigma n f_n^0.$$

Так как λ_1 не является собственным значением B_n для $n\geqslant 2$ мы видим, что $f_n^0=v_n^0=0$ для $n\geqslant 2$.

Перейдем теперь от (4.42) к соответствующим интегральным уравнениям, как в (4.30), (4.31). Так как $\{f_1^1, v_1^1\}$ — собственный вектор оператора B_1, мы получим

$$f_1^0(r)=\lambda_1\int_{r_1}^{r_2} G(\sigma;\,r,\,s)\,a(s)\,\sigma v_1^0(s)\,ds+f_1^1(r),$$

$$v_1^0(r)=\lambda_1\int_{r_1}^{r_2} H(\sigma;\,r,\,s)\,b\sigma f_1^0(s)\,ds+v_1^1(r).$$

Исключая v_1^0 и используя ядро K, введенное в (4.35), мы приходим к уравнению

$$f_1^0(r)-\lambda_1^2\int_{r_1}^{r_2} K(\sigma;\,r,\,s)\,f_1^0(s)\,ds=2f_1^1(r). \tag{4.43}$$

Это уравнение удовлетворяет альтернативе Фредгольма. Поэтому f_1^1 ортогонально собственной функции g_1 сопряженного уравнения:

$$g_1(r) - \lambda_1^2 \int_{r_1}^{r_2} K(\sigma; s, r) g_1(s)\, ds = 0.$$

По лемме 4.9 функции f_1^1 и g_1 положительны на (r_1, r_2), а это противоречит условию ортогональности

$$\int_{r_1}^{r_2} f_1^1(s) g_1(s)\, ds = 0.$$

Значит, $(I - \lambda_1 B)\varphi^0 = 0$. □

4.3. *Некоторые элементы теории топологической степени.* Напомним несколько определений и свойств из теории топологической степени. За доказательствами и дальнейшими результатами читатель отсылается к основополагающей работе Лерэ и Шаудера [1] или к книгам Красносельского [1], Ниренберга [1], Рабиновича [4].

4.3.1. Топологическая степень. Пусть T — компактный оператор в нормированном пространстве V и $S = I - T$ (I — тождественный оператор в V). Пусть, далее, ω, ω_i обозначают ограниченные области в V, $\bar{\omega}$ и $\partial\omega$ — замыкание и границу ω.

Если ω — ограниченная область в V, $v \in V$ и $v \notin S(\partial\omega)$, *то можно определить некоторое целое число* $d(S, \omega, v)$, *называемое топологической степенью оператора* S *относительно* ω *в точке* v.

Основные свойства степени таковы:

(i) Если $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$, $\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$, $v \notin S(\partial\omega_1)$ и $v \notin S(\partial\omega_2)$, то $v \notin S(\partial\omega)$ и

$$d(S, \omega, v) = d(S, \omega_1, v) + d(S, \omega_2, v).$$

(ii) Если $d(S, \omega, v) = 0$, то $v \in S(\omega)$; последнее означает, что уравнение

$$(I - T)(u) = v$$

имеет по крайней мере одно решение в ω.

(iii) Степень $d(S, \omega, v)$ остается постоянной, если S, ω, v непрерывно изменяются таким образом, что v никогда не принадлежит $S(\partial\omega)$. [1]

4.3.2. Индекс. Пусть u_0 — некоторая точка из V и $v = Su_0$. Предположим, что уравнение $Su = v$ допускает лишь это решение u_0 в некоторой окрестности u_0. В таком случае для достаточно ма-

[1] Непрерывное изменение S означает следующее: $S = S(\lambda) = I - T(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (или какому-нибудь другому топологическому пространству) и отображение $\lambda \mapsto T(\lambda)\varphi$ является равномерно непрерывным относительно φ ($\varphi \in V$).

лых ε можно определить степень $d(S, \omega_\varepsilon(u_0), v)$, где $\omega_\varepsilon(u_0)$ — открытый шар радиуса ε с центром в u_0. Согласно свойству степени (iii), это число не зависит от ε при $\varepsilon \to 0$.

Определим **индекс** *оператора S в точке u_0, как эту степень для достаточно малых ε:*

$$i(S, u_0) = d(S, \omega_\varepsilon(u_0), v), \quad \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Ниже приведены некоторые основные свойства индекса:

(i) Если уравнение $Su = v$ обладает в некоторой ограниченной области ω конечным числом решений u_k и не имеет решений на $\partial\omega$, то

$$d(S, \omega, v) = \sum_k i(S, u_k).$$

(ii) Индекс тождественного оператора ($T = 0$) в любой точке u_0 равен единице:

$$i(I, u_0) = 1.$$

(iii) Предположим, что T обладает в точке u_0 производной Фреше A. Тогда оператор A компактен, как и T. Если оператор $I - A$ взаимно-однозначен (т. е. 1 не является собственным значением A), то u_0 есть изолированное решение уравнения $Su = u_0$ и можно определить индекс $i(S, u_0)$. Имеют место равенства:

$$i(S, u_0) = i(I - A, 0) = i(I - A).$$

(iv) Если A — компактный линейный оператор в V и оператор $I - A$ взаимно-однозначен, то индекс оператора $I - A$ равен ± 1[1].

Аналогично индекс оператора $I - \lambda A$ определен на каждом интервале $\lambda' \leqslant \lambda \leqslant \lambda''$, не содержащем собственных значений A; этот индекс постоянен на таких интервалах и равен ± 1. В частности, $i(I - \lambda A) = 1$ на интервале $(0, \lambda_1)$, где λ_1 — наименьшее положительное собственное значение оператора A.

Если λ проходит через некоторое спектральное значение λ_l оператора A, то индекс $i(I - \lambda A)$ умножается на $(-1)^m$, где m — степень λ_l, т. е. размерность ядра $\ker(I - \lambda_l A)^k$, которая не зависит от k для достаточно больших k.

4.4. *Теорема о неединственности.* Наша цель — доказать следующий результат.

Теорема 4.1. *Для достаточно больших λ и подходящих значений L задача* (4.2), (4.3), (4.6) *допускает периодичные* по z *решения периода L, отличные от тривиального решения* (4.7).

---

[1] Индекс оператора $I - A$ можно определить тогда и только тогда, когда он взаимно-однозначен; если индекс определен, то он один и тот же в каждой точке u_0.

Доказательство. Мы покажем, что уравнение (4.20) имеет нетривиальное решение в V, когда λ достаточно велико. Согласно лемме 4.12, существуют такие L, для которых λ_1 есть простое собственное значение оператора B в V; это и будут „подходящие" значения L. Из предложения 4.2 известно, что для достаточно малых λ ($\lambda \leqslant c(r_1, r_2)$; см. (4.24)) (4.20) допускает лишь тривиальное решение. Если уравнение (4.20) имеет нетривиальное решение уже для некоторого $\lambda \in [0, \lambda_1]$, то доказывать нечего. Поэтому мы будем предполагать, начиная с этого момента, что

$$\varphi = 0 \text{ является единственным решением уравнения}$$
$$\varphi = \lambda T\varphi \text{ для любого } \lambda \in [0, \lambda_1]. \tag{4.44}$$

При этом предположении в последующих леммах устанавливается, с использованием теории степени, существование ненулевого φ из $\overline{V}$, удовлетворяющего уравнению $\varphi = \lambda T\varphi$ с $\lambda > \lambda_1$. □

Лемма 4.14. *Пусть ω — открытый шар в V с центром в нуле. Существует $\delta > 0$, такое что уравнение $\varphi = \lambda T\varphi$ не имеет решений на границе $\partial\omega$ шара ω ни для какого λ из интервала* $[\lambda_1, \lambda_1 + \delta]$.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Если наше утверждение неверно, то найдутся такая последовательность λ_n, убывающая к λ_1, и такая последовательность u_k, принадлежащая $\partial\omega$, что $u_n = \lambda_n T u_n$. Так как последовательность u_n ограничена, то последовательность Tu_n относительно компактна (по лемме 4.4) и у нее существует подпоследовательность Tu_{n_i}, сходящаяся к некоторому пределу v из V. Тогда $u_{n_i} = \lambda_{n_i} T u_{n_i}$ сходится к $\lambda_1 v$. Поскольку оператор T непрерывен, то $\lambda_1 v = \lambda_1 T(\lambda_1 v)$. Значит, $\lambda_1 v$ — решение уравнения $\varphi = \lambda_1 T\varphi$, и из (4.44) вытекает, что $\lambda_1 v = 0$, $v = 0$. Это противоречит тому, что норма $\|\lambda_1 v\|_V$ равна радиусу шара ω (норма $\|u_n\|$ равна радиусу ω $\forall n$). □

Лемма 4.15. *В предположении (4.44), если ω и δ таковы, как в лемме 4.14, уравнение $\varphi = \lambda T\varphi$ не имеет решений на $\partial\omega$ ни для каких $\lambda \in [0, \lambda_1 + \delta)$.*

Это — очевидное следствие леммы 4.14.

Лемма 4.15 позволяет нам определить степень $d(I - \lambda T, \omega, 0)$ для $\lambda \in [0, \lambda_1 + \delta)$.

Лемма 4.16. *Если δ и ω такие же, как прежде, то $d(I - \lambda T, \omega, 0) = 1$ для $\lambda \in [0, \lambda_1 + \delta)$.*

Доказательство. В силу свойства степени (iii), $d(I - \lambda T, \omega, 0) = d(I, \omega, 0) = i(I)$, а этот индекс равен единице (как индекс тождественного оператора). □

Лемма 4.17. *В предположении (4.44) для любого $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ существует по крайней мере одно нетривиальное решение уравнения $\varphi = \lambda T\varphi$.*

Доказательство. Согласно лемме 4.13 и свойству индекса (iv), индекс $i(I - \lambda B)$ равен 1 на $[0, \lambda_1)$ и -1 на $(\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$. В силу свойства индекса (iii), $i(I-\lambda T, 0)$ равняется $+1$ для $\lambda \in (0, \lambda_1)$ и -1 для $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1+\delta)$. Если $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1+\delta)$ и если только нуль является решением уравнения $\varphi=\lambda T\varphi$, то мы получаем $d(I-\lambda T, \omega, 0)=i(I-\lambda T, 0)$, согласно свойству индекса (i). Но мы доказали, что $d(I-\lambda T, \omega, 0)=+1$, $i(I-\lambda T, 0)=-1$, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1+\delta)$. Значит, уравнение $\varphi=\lambda T\varphi$ имеет нетривиальное решение для любого $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1+\delta)$. $\square$

Замечание 4.3. Условие „λ достаточно велико" означает, что угловая скорость α велика или что вязкость ν мала (для фиксированных r_1, r_2).

Замечание 4.4. Если условие (4.44) выполнено, то для каждого $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1+\delta)$ существует нетривиальное решение φ_λ уравнения (4.20). Можно доказать, что $\varphi_\lambda \to 0$ в V, если λ убывая сходится к λ_1. Таким образом, имеет место бифуркация.

В случае задачи Бенарда ситуация очень похожая, но удается доказать, что для $\lambda \in [0, \lambda_1]$ существует лишь тривиальное решение. Поэтому предположение (4.44) не нужно и тем самым доказано наличие бифуркации (см. Юдович [2], Рабинович [1], Вельте [1]).

Изучение задачи Тейлора аналитическими методами предпринято в работе Рабиновича [5].

Благодарность. Автор весьма признателен П. Х. Рабиновичу за полезные замечания к § 4.

ГЛАВА III

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ—СТОКСА

Введение

В этой заключительной главе рассматриваются полные, т. е. эволюционные, нелинейные уравнения Навье—Стокса. Сначала мы изложим несколько основных результатов, касающихся существования и единственности решения, а затем исследуем аппроксимацию этих уравнений с помощью различных методов.

В § 1 мы кратко изучим линейные эволюционные уравнения (эволюционные уравнения Стокса). Этот параграф содержит некоторые технические леммы, используемые при рассмотрении эволюционных уравнений. В § 2 приведены теоремы компактности, дающие возможность получить результаты о сильной сходимости в эволюционном случае и перейти к пределу в нелинейных членах.

В § 3 представлены вариационная формулировка задачи (слабые, или турбулентные, решения в смысле Лерэ [1—3] и Хопфа [2]) и основные результаты о существовании и единственности решения (для двумерного или трехмерного пространства); существование доказывается с помощью построения приближенного решения по методу Галёркина. В § 4 даны дальнейшие результаты о существовании и единственности; здесь доказательство существования проводится с помощью полудискретизации по времени и остается в силе для пространства произвольной размерности.

В последующих параграфах мы исследуем аппроксимацию эволюционных уравнений Навье—Стокса в двух- и трехмерном случаях. Рассматриваются некоторые разностные схемы, отвечающие какой-нибудь классической дискретизации по времени (неявной, Крэнка—Николсона, явной) и какой-нибудь из дискретизаций по пространственным переменным, введенных в гл. I (конечные разности, конечные элементы). Мы завершаем главу изучением нелинейной устойчивости этих схем, а именно устанавливаем достаточные условия устойчивости и доказываем сходимость всех этих схем при наличии устойчивости.

§ 1. Линейный случай

В этом параграфе мы обобщим на нестационарный случай ряд результатов о существовании, единственности и гладкости решений линеаризованных уравнений Навье—Стокса. После введения некоторых обозначений, полезных как в линейном, так и нелинейном случаях (п.1.1), мы приводим классическую и вариационную постановки задач и формулировку основного результата о существовании и единственности решения; доказательства существования и единственности даются затем в пп. 1.3 и 1.4.

1.1. Обозначения. Пусть Ω — открытая липшицева область в $\mathbb{R}^n$; для простоты мы предполагаем, что она ограничена; относительно случая неограниченной области см. ниже замечания из п. 1.5. Напомним определения пространств $\mathcal{V}$, V, H, которые будут основными пространствами и в этой главе:

$$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}, \tag{1.1}$$

$$V \text{ — замыкание } \mathcal{V} \text{ в } \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \tag{1.2}$$

$$H \text{ — замыкание } \mathcal{V} \text{ в } \boldsymbol{L}^2(\Omega). \tag{1.3}$$

Пространство H снабжено скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ индуцированным из $L^2(\Omega)$; пространство V является гильбертовым со скалярным произведением

$$((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = \sum_{i=1}^{n} (D_i \boldsymbol{u}, D_i \boldsymbol{v}) \tag{1.4}$$

(область Ω ограничена!).

Пространство V вложено в H и плотно в нем, причем вложение непрерывно. Пусть H' и V' обозначают пространства, сопряженные к H и V, а i — оператор вложения V в H. Сопряженный к нему оператор i' является непрерывным линейным оператором из H' в V', который взаимно-однозначен, так как $i(V) = V$ плотно в H; обратно, $i'(H')$ плотно в V', так как i — взаимно-однозначен; поэтому H' может быть отождествлено с некоторым плотным подпространством в V'. Отождествляя, далее, по теореме Рисса H и H', мы приходим к включениям

$$V \subset H \equiv H' \subset V', \tag{1.5}$$

где каждое пространство плотно в последующем и вложения непрерывны.

В силу указанных отождествлений, скалярное произведение в H элементов $\boldsymbol{f} \in H$ и $\boldsymbol{u} \in V$ совпадает со значением функционала $\boldsymbol{f}$ на элементе $\boldsymbol{u}$ в смысле двойственности между V' и V:

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}) \quad \forall \boldsymbol{f} \in H \quad \forall \boldsymbol{u} \in V. \tag{1.6}$$

Для каждого $\boldsymbol{u}$ из V форма

$$\boldsymbol{v} \in V \to ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

линейна и непрерывна на V; следовательно, существует элемент из V', который мы обозначим через $A\boldsymbol{u}$, такой что

$$\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{1.8}$$

Легко видеть, что отображение $\boldsymbol{u} \to A\boldsymbol{u}$ линейно и непрерывно; в силу теоремы 1.2.2 и замечания 1.2.2, оно является изоморфизмом V на V'.

Если область Ω неограничена, то пространство V наделяется скалярным произведением

$$[\![\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\!] = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}); \tag{1.9}$$

при этом отношения включения (1.5) сохраняют силу. Оператор A по-прежнему непрерывный линейный оператор из V в V', но уже, вообще говоря, не изоморфизм; однако для каждого $\varepsilon > 0$ оператор $A + \varepsilon I$ есть изоморфизм V на V'.

Пусть a, b — два числа на расширенной вещественной оси, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и X — некоторое банахово пространство. Для данного α, $1 \leqslant \alpha < +\infty$, пусть $L^\alpha(a, b; X)$ обозначает пространство L^α-функций (функций, интегрируемых в степени α) из $[a, b]$ в X, которое является банаховым с нормой

$$\left\{ \int_a^b \|\boldsymbol{f}(t)\|_X^\alpha \, dt \right\}^{1/\alpha}. \tag{1.10}$$

Пространство $L^\infty(a, b, X)$ — это пространство существенно-ограниченных функций из $[a, b]$ в X; оно является банаховым с нормой

$$\operatorname*{ess\,sup}_{[a, b]} \|\boldsymbol{f}(t)\|_X. \tag{1.11}$$

Пространство $\mathscr{C}([a, b]; X)$ — это пространство непрерывных функций из $[a, b]$ в X, если $-\infty < a < b < +\infty$, то оно является банаховым с нормой

$$\sup_{t \in [a, b]} \|\boldsymbol{f}(t)\|_X. \tag{1.12}$$

Наиболее часто в качестве интервала $[a, b]$ будет использоваться интервал $[0, T]$, где $T > 0$ фиксировано; если это не может привести к недоразумению, мы будем использовать сокращенные обозначения

$$L^\alpha(X) = L^\alpha(0, T; X), \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant +\infty, \tag{1.13}$$

$$\mathscr{C}(X) = \mathscr{C}([0, T]; X). \tag{1.14}$$

Остальная часть этого пункта посвящена доказательству следующей технической леммы, касающейся производных от функций со значениями в банаховом пространстве:

Лемма 1.1. *Пусть X — банахово пространство с сопряженным X', и пусть $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{g}$ — функции, принадлежащие $L^1(a, b; X)$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(i) $\boldsymbol{u}$ *п. в. равна первообразной от* $\boldsymbol{g}$:

$$\boldsymbol{u}(t)=\xi+\int_0^t \boldsymbol{g}(s)\,\mathrm{d}s,\quad \xi\in X,\ \text{для п. в.}^{1}\ t\in[a, b]; \tag{1.15}$$

(ii) *для каждой пробной функции* $\varphi\in\mathcal{D}((a, b))$

$$\int_a^b \boldsymbol{u}(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=-\int_a^b \boldsymbol{g}(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\quad\left(\varphi'=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right); \tag{1.16}$$

(iii) *для каждого* $\eta\in X'$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{u},\ \eta\rangle=\langle\boldsymbol{g},\ \eta\rangle \tag{1.17}$$

в смысле скалярных распределений на (a, b).

Если условия (i)—(iii) *выполнены, то* $\boldsymbol{u}$, *в частности, п. в. равна некоторой непрерывной функции из* $[a, b]$ *в* X.

Доказательство. В качестве интервала $[a, b]$ возьмем для простоты интервал $[0, T]$. Законное здесь интегрирование по частям показывает, что из (i) следуют (ii) и (iii); остается проверить, что из (iii) следует (ii), а из (ii) следует (i). Если выполнено (iii) и $\varphi\in\mathcal{D}((0, T))$, то по определению

$$\int_0^T\langle\boldsymbol{u}(t),\ \eta\rangle\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^T\langle\boldsymbol{g}(t),\ \eta\rangle\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.18}$$

или

$$\left\langle\int_0^T \boldsymbol{u}(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^T \boldsymbol{g}(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t,\ \eta\right\rangle=0\quad\forall\eta\in X',$$

так что имеет место (1.16). Докажем теперь, что из (ii) вытекает (i). Мы можем свести общий случай к случаю $\boldsymbol{g}=0$. Для того чтобы убедиться в этом, положим $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0$, где

$$\boldsymbol{u}_0(t)=\int_0^t \boldsymbol{g}(s)\,\mathrm{d}s; \tag{1.19}$$

[1] В зависимости от контекста „п. в." означает либо „почти всюду", либо „почти все".— *Прим. ред.*

ясно, что u_0 — абсолютно непрерывная функция и что $u_0' = g$; следовательно, (1.16) выполняется с u, замененным на $u_0 + v$, и

$$\int_0^T v(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}((0, T)). \tag{1.20}$$

Доказательство свойства (i) будет завершено, если мы покажем, что из (1.20) вытекает, что v не зависит от t. Пусть φ_0 — некоторая функция из $\mathscr{D}((0, T))$, такая что $\int_0^T \varphi_0(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Любая функция φ из $\mathscr{D}((0, T))$ может быть записана в виде

$$\varphi = \lambda\varphi_0 + \psi', \ \lambda = \int_0^T \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad \psi \in \mathscr{D}((0, T)); \tag{1.21}$$

в самом деле, так как $\int_0^T (\varphi(t) - \lambda\varphi_0(t))\,\mathrm{d}t = 0$, то первообразная от $\varphi - \lambda\varphi_0$, обращающаяся в 0 при $t = T$, принадлежит $\mathscr{D}((0, T))$, и ψ в точности совпадает с этой первообразной. Согласно (1.20) и (1.21),

$$\int_0^T (v(t) - \xi)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}((0, T)), \tag{1.21a}$$

где $\xi = \int_0^T v(s)\,\varphi_0(s)\,\mathrm{d}s$. Чтобы завершить доказательство, остается показать, что из (1.21a) следует, что $v(t) = \xi$ п. в., т. е. что функция w, принадлежащая $L^1(X)$ и такая, что

$$\int_0^T w(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}((0, T)), \tag{1.22}$$

равна нулю почти всюду. Этот хорошо известный факт доказывается с помощью регуляризации: если $\tilde{w}$ — функция, равная w на $[0, T]$ и нулю вне этого интервала, и ρ_ε — какая-нибудь гладкая регуляризующая функция, то для достаточно малых ε свертка $\rho_\varepsilon * \varphi$ принадлежит $\mathscr{D}((0, T))$ $\forall\varphi \in \mathscr{D}((0, T))$ и

$$\int_0^T w(t)\,(\rho_\varepsilon * \varphi)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(t)\,(\rho_\varepsilon * \varphi)(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\rho_\varepsilon * \tilde{w})(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Следовательно, для любого фиксированного $\eta > 0$ свертка $\rho_\varepsilon * \tilde{w}$ равна 0 на интервале $[\eta, T-\eta]$ для достаточно малых ε; когда $\varepsilon \to 0$, $\rho_\varepsilon * \tilde{w}$ сходится к $\tilde{w}$ в $L^1(-\infty, +\infty; X)$. Таким образом, w равно нулю на $[\eta, T-\eta]$, а так как $\eta > 0$ произвольно мало, то w равно нулю на всем интервале $[0, T]$. $\square$

1.2. Теорема существования и единственности. Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, и пусть $T > 0$ фиксировано. Обозначим через Q цилиндр $\Omega \times (0, T)$. Линеаризованные уравнения Навье — Стокса — это эволюционные уравнения, соответствующие задаче Стокса:

найти вектор-функцию

$$u: \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$$

и скалярную функцию

$$p: \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R},$$

представляющие соответственно скорость и давление потока, такие что

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \partial \Delta u + \operatorname{grad} p = f \quad \text{в } Q = \Omega \times (0, T), \tag{1.23}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в } Q, \tag{1.24}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times [0, T], \tag{1.25}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{в } \Omega, \tag{1.26}$$

где f и u_0 — заданные вектор-функции, причем f определена на $\Omega \times [0, T]$, а u_0 — на Ω; соотношения (1.25) и (1.26) дают соответственно граничные и начальные условия.

Предположим, что u и p — классические решения задачи (1.23) — (1.26), скажем $u \in \mathscr{C}^2(\bar{Q})$, $p \in \mathscr{C}^1(\bar{Q})$. Если v — произвольный элемент из $\mathscr{V}$, то как легко видеть,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \nu((u, v)) = (f, v). \tag{1.27}$$

По непрерывности равенство (1.27) выполняется для каждого $v \in V$; мы видим также, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) = \frac{d}{dt}(u, v).$$

Это приводит к следующей слабой постановке задачи (1.23) — (1.26):

для заданных f и u_0:

$$f \in L^2(0, T; V'), \tag{1,28}$$

$$u_0 \in H, \tag{1.29}$$

найти функцию u, такую что

$$u \in L^2(0, T; V) \tag{1.30}$$

и

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \tag{1.31}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{1.32}$$

Если $\boldsymbol{u}$ принадлежит $L^2(0, T; V)$, то условие (1.32), вообще говоря, не имеет смысла; прежде чем объяснять, как его следует понимать, сделаем два замечания.

(i) Пространства в (1.28)—(1.30) представляют собой пространства, для которых будут доказаны существование и единственность решения; ясно во всяком случае, что каждое гладкое решение $\boldsymbol{u}$ задачи (1.23)—(1.26) удовлетворяет (1.30).

(ii) Мы не можем сейчас проверить, что решение задачи (1.30)—(1.32) есть, в некотором слабом смысле, решение задачи (1.23)—(1.26), и поэтому отложим исследование этого вопроса до п. 1.5.

Используя (1.6) и (1.8), мы можем записать (1.31) в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{f} - \nu A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{1.33}$$

Так как A — непрерывный линейный оператор из V в V' и $u \in L^2(V)$, то функция Au принадлежит $L^2(V')$; следовательно, $\boldsymbol{f} - \nu A\boldsymbol{u} \in L^2(V')$, и из (1.33) и леммы 1.1 вытекает, что

$$\boldsymbol{u}' \in L^2(0, T; V') \tag{1.34}$$

и что $\boldsymbol{u}$ п. в. равна некоторой (абсолютно) непрерывной функции из $[0, T]$ в V'. Любая функция, удовлетворяющая (1.30) и (1.31), становится, после изменения на множестве меры нуль, непрерывной функцией из $[0, T]$ в V'; следовательно, условие (1.32) имеет смысл.

Предположим снова, как и в (1.28), что $\boldsymbol{f} \in L^2(V')$. Если $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет (1.30) и (1.31), то, как видно из вышесказанного, $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет (1.34) и (1.33). Согласно лемме 1.1, равенство (1.33) эквивалентно следующему:

$$\boldsymbol{u}' + \nu A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}. \tag{1.35}$$

Обратно, если $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет (1.30), (1.34) и (1.35), то $\boldsymbol{u}$, очевидно, удовлетворяет (1.31) $\forall \boldsymbol{v} \in V$.

Другая формулировка слабой задачи выглядит следующим образом: *даны* $\boldsymbol{f}$ *и* $\boldsymbol{u}_0$, *удовлетворяющие* (1.28)—(1.29); *найти* $\boldsymbol{u}$, *такое что*

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; V), \quad \boldsymbol{u}' \in L^2(0, T; V'), \tag{1.36}$$

$$\boldsymbol{u}' + \nu A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad \text{на} \quad (0, T), \tag{1.37}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{1.38}$$

Любое решение задачи (1.36)—(1.38) служит решением задачи (1.30)—(1.32), и, наоборот.

Относительно существования и единственности решения этих задач мы докажем следующую теорему:

Теорема 1.1. *Для заданных $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{u}_0$, удовлетворяющих* (1.28) *и* (1.29), *существует единственная функция $\boldsymbol{u}$, которая удовлетворяет* (1.36)—(1.38). *При этом*

$$\boldsymbol{u} \in \mathscr{C}([0, T]; H). \tag{1.39}$$

Доказательство существования дается в п. 1.3, а единственность и включение (1.39) будут доказаны в п. 1.4.

1.3. Доказательство существования. Применим метод Фаэдо — Галёркина. Так как V сепарабельно, то существует последовательность линейно-независимых элементов $w_1, \ldots, w_m, \ldots$, тотальная в V. Для каждого m определим приближенное решение $\boldsymbol{u}_m$ уравнений (1.37) или (1.31) следующим образом:

$$\boldsymbol{u}_m = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\, \boldsymbol{w}_i, \tag{1.40}$$

$$(\boldsymbol{u}_m', \boldsymbol{w}_j) + \nu((\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_j)) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.41}$$

$$\boldsymbol{u}_m(0) = \boldsymbol{u}_{0m}, \tag{1.42}$$

где $\boldsymbol{u}_{0m}$ — это, скажем, ортогональная проекция в $\boldsymbol{H}$ элемента $\boldsymbol{u}_0$ на подпространство, натянутое на $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ [1]. Функции g_{im}, $1 \leqslant i \leqslant m$, — это скалярные функции, определенные на $[0, T]$, а (1.41) есть система линейных дифференциальных уравнений относительно этих функций; в самом деле, мы имеем

$$\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_j) g_{im}'(t) + \nu \sum_{i=1}^{m} ((\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_j))\, g_{im}(t) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{w}_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, m; \tag{1.43}$$

поскольку элементы $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ линейно-независимы, то, как хорошо известно, матрица с элементами (w_i, w_j) $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$ невырожденна; следовательно, обращая эту матрицу, мы можем свести (1.43) к линейной системе с постоянными коэффициентами

$$g_{im}'(t) + \sum_{j+1}^{m} \alpha_{ij} g_{jm}(t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{w}_j \rangle, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{1.44}$$

где $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$. Условие (1.42) эквивалентно m уравнениям

$$g_{im}(0) = i\text{-я компонента } \boldsymbol{u}_{0m}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1.45}$$

[1] $\boldsymbol{u}_{0m}$ может быть любым элементом подпространства, порожденного $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$, удовлетворяющим условию $\boldsymbol{u}_{0m} \to \boldsymbol{u}_0$ в норме H при $m \to \infty$.

Система линейных дифференциальных уравнений (1.44) с начальными данными (1.45) единственным образом определяет g_{im} на всем интервале $[0, T]$. Так как скалярные функции $t \to \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{w}_j \rangle$ интегрируемы с квадратом, то это верно и для функций g_{im} и, следовательно, для каждого m

$$\boldsymbol{u}_m \in L^2(0, T, V), \quad \boldsymbol{u}'_m \in L^2(0, T; V). \tag{1.46}$$

Далее мы получим не зависящие от m априорные оценки дл функций $\boldsymbol{u}_m$, а затем перейдем к пределу.

Априорные оценки. Домножим уравнения (1.41) на $g_{im}(t)$ и просуммируем их для $j = 1, \ldots, m$. Получим

$$(\boldsymbol{u}'_m(t), \boldsymbol{u}_m(t)) + \nu \| \boldsymbol{u}_m(t) \|^2 = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t) \rangle.$$

Но, в силу (1.46), $2(\boldsymbol{u}'_m(t), \boldsymbol{u}_m(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | \boldsymbol{u}_m(t) |^2$, и это дает

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | \boldsymbol{u}_m(t) |^2 + 2\nu \| \boldsymbol{u}_m(t) \|^2 = 2 \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t) \rangle. \tag{1.47}$$

Правая часть (1.47) ограничена сверху величиной

$$2 \| \boldsymbol{f}(t) \|_{V'} \| \boldsymbol{u}_m(t) \| \leqslant \nu \| \boldsymbol{u}_m(t) \|^2 + \nu^{-1} \| \boldsymbol{f}(t) \|^2_{V'},$$

поэтому

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | \boldsymbol{u}_m(t) |^2 + \nu \| \boldsymbol{u}_m(t) \|^2 \leqslant \nu^{-1} \| \boldsymbol{f}(t) \|^2_{V'}. \tag{1.48}$$

Интегрируя (1.48) от 0 до s, $0 < s < T$, находим, что

$$| \boldsymbol{u}_m(s) |^2 \leqslant | \boldsymbol{u}_{0m} |^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^s \| \boldsymbol{f}(t) \|^2_{V'} \, \mathrm{d}t \leqslant | \boldsymbol{u}_0 |^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \| \boldsymbol{f}(t) \|^2_{V'} \, \mathrm{d}t. \tag{1.49}$$

Отсюда

$$\sup_{s \in [0, T]} | \boldsymbol{u}_m(s) |^2 \leqslant | \boldsymbol{u}_0 |^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \| \boldsymbol{f}(t) \|^2_{V'} \, \mathrm{d}t. \tag{1.50}$$

Правая часть (1.50) конечна и не зависит от m; следовательно,

последовательность $\boldsymbol{u}_m$ ограничена в $L^\infty(0, T; H)$. (1.51)

Проинтегрировав (1.48) от 0, до T, получим

$$| \boldsymbol{u}_m(T) |^2 + \nu \int_0^T \| \boldsymbol{u}_m(t) \|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant | \boldsymbol{u}_{0m} |^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \| \boldsymbol{f}(t) \|^2_{V'} \, \mathrm{d}t$$

$$\leqslant | \boldsymbol{u}_0 |^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \| \boldsymbol{f}(t) \|^2_{V'} \, \mathrm{d}t. \tag{1.52}$$

Отсюда следует, что

$$\textit{последовательность } u_m \textit{ ограничена в } L^2(0,\ T;\ V). \tag{1.53}$$

Предельный переход. Априорная оценка (1.51) показывает, что существуют элемент u в $L^\infty(0,\ T;\ H)$ и подпоследовательность $m' \to \infty$, такие что

$$u_{m'} \to u \text{ в } {}^*\text{-слабой топологии } L^\infty(0,\ T;\ H); \tag{1.54}$$

(1.54) означает, что $\forall v \in L^1(0,\ T;\ H)$

$$\int_0^T (u_{m'}(t) - u(t),\ v(t))\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{при} \quad m' \to \infty. \tag{1.55}$$

Из (1.55) следует, что подпоследовательность $u_{m'}$ ограничена в $L^2(0,\ T;\ V)$; поэтому, еще раз переходя к подпоследовательности, убеждаемся, что существуют элемент $u_* \in L^2(0,\ T;\ V)$ и подпоследовательность (обозначаемая ниже через $u_{m'}$), такие что

$$u_{m'} \to u_* \text{ в слабой топологии } L^2(0,\ T,\ V); \tag{1.56}$$

(1.56) означает, что

$$\int_0^T \langle u_{m'}(t) - u_*(t),\ v(t)\rangle\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \forall v \in L^2(0,\ T;\ V').$$

В частности, принимая во внимание (1.6), имеем

$$\int_0^T (u_{m'}(t),\ v(t))\,\mathrm{d}t \to \int_0^T (u_*(t),\ v(t))\,\mathrm{d}t \tag{1.57}$$

для каждого $v \in L^2(0,\ T;\ H)$. Сравнивая это с (1.55), мы видим, что

$$\int_0^T (u(t) - u_*(t),\ v(t))\,\mathrm{d}t = 0 \tag{1.58}$$

для каждого $v \in L^2(0,\ T;\ H)$; следовательно,

$$u = u_* \in L^2(0,\ T;\ V) \cap L^\infty(0,\ T;\ H). \tag{1.59}$$

Для того чтобы перейти к пределу в (1.41) и (1.42), рассмотрим скалярные функции ψ, непрерывно дифференцируемые на $[0,\ T]$ и такие, что

$$\psi(T) = 0. \tag{1.60}$$

Домножим (1.41) на ψ и проинтегрируем по частям:

$$\int_0^T (\boldsymbol{u}'_m(t),\ \boldsymbol{w}_j)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^T (\boldsymbol{u}_m(t)\,\psi'(t),\ \boldsymbol{w}_j)\,\mathrm{d}t - (\boldsymbol{u}_m(0),\ \boldsymbol{w}_j)\,\psi(0).$$

Таким образом,

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}_m(t),\ \psi'(t)\,\boldsymbol{w}_j)\,\mathrm{d}t + \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}_m(t),\ \psi(t)\,\boldsymbol{w}_j))\,\mathrm{d}t = (\boldsymbol{u}_{0m},\ \boldsymbol{w}_j)\,\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{w}_j\rangle\,\mathrm{d}t. \tag{1.61}$$

Используя (1.54), (1.57) и (1.59), нетрудно перейти к пределу при $m = m' \to \infty$ в интегралах в левой части; заметим еще, что

$$\boldsymbol{u}_{0m} \to \boldsymbol{u}_0 \text{ сильно в } H. \tag{1.62}$$

В пределе получим

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}(t),\ \psi'(t)\,\boldsymbol{w}_j)\,\mathrm{d}t + \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}(t),\ \psi(t)\,\boldsymbol{w}_j))\,\mathrm{d}t = (\boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{w}_j)\,\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{w}_j\rangle\,\psi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.63}$$

Равенство (1.63), которое имеет место для каждого j, позволяет (по линейности) написать

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{v})\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t + \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{v}))\,\psi(t)\,\mathrm{d}t = (\boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{v})\,\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{v}\rangle\,\psi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.64}$$

для всякого $\boldsymbol{v}$, которое является линейной комбинацией $\boldsymbol{w}_j$. Так как каждый член в (1.64) зависит от $\boldsymbol{v}$ линейно и непрерывно в норме V, то равенство (1.64) выполняется по непрерывности для всех $\boldsymbol{v} \in V$. В частности, записывая (1.64) с $\psi = \varphi \in \mathscr{D}((0,\ T))$, мы получим следующее равенство, которое выполняется в смысле распределений на $(0,\ T)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) + \nu((\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})) = \langle \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{v}\rangle \quad \forall \boldsymbol{v} \in V; \tag{1.65}$$

это в точности совпадает с (1.31). Как было показано перед формулировкой теоремы 1.1, из этого равенства и (1.59) следует, что

$u' \in L^2(0, T; V')$ и

$$u' + \nu A u = f. \tag{1.66}$$

Наконец, остается проверить, что $u(0) = u_0$ (непрерывность u доказывается в п. 1.4). Для этого домножим (1.65) на $\psi(t)$ (ψ то же самое, что и раньше) и проинтегрируем по частям:

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t), v)\psi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^T (u(t), v)\psi'(t)\,\mathrm{d}t + (u(0), v)\psi(0).$$

Получим

$$-\int_0^T (u(t), v)\psi'(t)\,\mathrm{d}t + \nu\int_0^T ((u(t), v))\psi(t)\,\mathrm{d}t = (u(0), v)\psi(0) + \int_0^T \langle f(t), v\rangle \psi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.67}$$

Сравнивая с (1.64), заключаем, что $(u_0 - u(0), v)\psi(0) = 0$ для любого $v \in V$ и любой функции ψ рассматриваемого типа. Мы можем выбрать ψ так, чтобы $\psi(0) \neq 0$, поэтому $(u(0) - u_0, v) = 0$ $\forall v \in V$. Из этого равенства вытекает, что $u(0) = u_0$, чем и завершается доказательство существования.

1.4. Доказательство непрерывности и единственности. Это доказательство основывается на следующей лемме, которая является частным случаем общей интерполяционной теоремы Лионса — Мадженеса [1]:

Лемма 1.2. *Пусть V, H, V' — тройка гильбертовых пространств, каждое из которых вложено в последующее, как в* (1.5), *причем V' — пространство, сопряженное к V. Если функция u принадлежит $L^2(0, T; V)$, а ее производная u' принадлежит $L^2(0, T; V')$, то u п.в. равна некоторой непрерывной функции из $[0, T]$ в H и имеет место следующее равенство, которое выполняется в смысле скалярных распределений на* $(0, T)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2 = 2\langle u', u\rangle. \tag{1.68}$$

Равенство (1.68) имеет смысл, так как обе функции $t \mapsto |u(t)|^2$ и $t \mapsto \langle u'(t), u(t)\rangle$ интегрируемы на $[0, T]$.

Ниже мы дадим доказательство этой леммы, более элементарное, чем приведенное у Лионса и Мадженеса [1].

Если принять, что лемма 1.2 уже доказана, то (1.39) становится очевидным, и остается только проверить единственность решения. Предположим, что u и v — два решения задачи (1.36)—(1.38), и пусть $w = u - v$. Тогда w принадлежит тем же пространствам, что u и v, и

$$w' + \nu A w = 0, \quad w(0) = 0. \tag{1.69}$$

Умножая первое равенство (1.69) скалярно на $w(t)$, находим, что

$$\langle w'(t), w(t)\rangle + \nu \|w(t)\|^2 = 0 \text{ п.в.}$$

Используя теперь (1.68) с u, замененным на w, получаем

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + 2\nu\|w(t)\|^2 = 0, \quad |w(t)|^2 \leqslant |w(0)|^2 = 0, \quad t \in [0, T],$$

откуда $u(t) = v(t)$ для каждого t. Тем самым доказательство теоремы 1.1 полностью завершено.

Доказательство леммы 1.2. Элементарное доказательство леммы 1.2, о котором упоминалось выше, мы оформим в виде двух следующих лемм. □

Лемма 1.3. *В предположениях леммы* 1.2 *справедливо равенство* (1.68).

Доказательство. Регуляризуя функцию $\tilde{u}$, действующую из $\mathbb{R}$ в V и равную u на $[0, T]$ и 0 вне этого интервала, мы легко получаем последовательность функций u_m, удовлетворяющую условиям

$$u_m \text{ для всякого } m \text{ есть бесконечно дифференцируемая функция из } [0, T] \text{ в } V; \tag{1.70}$$

при $m \to \infty$

$$u_m \to u \text{ в } L^2_{loc}(]0, T[; V), \quad u'_m \to u' \text{ в } L^2_{loc}(]0, T[; V'). \tag{1.71}$$

Ввиду (1.6) и (1.70) равенство (1.68) очевидным образом выполняется для u_m:

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 = 2(u'_m(t), u_m(t)) = 2\langle u'_m(t), u_m(t)\rangle \ \forall m. \tag{1.72}$$

Из (1.71) следует, что при $m \to \infty$

$$|u_m|^2 \to |u|^2 \text{ в } L^1_{loc}(]0, T[), \langle u'_m, u_m\rangle \to \langle u', u\rangle \text{ в } L^1_{loc}(]0, T[).$$

Здесь сходимость также понимается в смысле теории распределений; итак, мы можем перейти к пределу в (1.72) в смысле теории распределений; в пределе получим в точности (1.68).

Так как функция $t \to \langle u'(t), u(t)\rangle$ интегрируема на $[0, T]$, равенство (1.68) показывает, что функция u из леммы 1.3 удовлетворяет условию

$$u \in L^\infty(0, T, H). \tag{1.73}$$

В том частном случае, когда функция u удовлетворяет (1.36)—(1.38), это было доказано непосредственно, в п. 1.3. Согласно лемме 1.1, u — непрерывная функция из $[0, T]$ в V'. Поэтому, используя еще (1.73) и приводимую ниже лемму 1.4, получаем, что u — слабо непрерывная функция из $[0, T]$ в H, т. е.

$$\forall \boldsymbol{v} \in H \text{ функция } t \mapsto (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) \text{ непрерывна.} \tag{1.74}$$

Приняв пока на веру этот факт, мы можем завершить доказательство леммы 1.2. Нам надо показать, что для каждого $t_0 \in [0, T]$

$$|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}(t_0)|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0. \tag{1.75}$$

Распишем выражение слева:

$$|\boldsymbol{u}(t)|^2 + |\boldsymbol{u}(t_0)|^2 - 2(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t_0)).$$

Когда $t \to t_0$, $|\boldsymbol{u}(t)|^2 \to |\boldsymbol{u}(t_0)|^2$. Действительно, в силу (1.68),

$$|\boldsymbol{u}(t)|^2 = |\boldsymbol{u}(t_0)| + 2\int_{t_0}^{t} \langle \boldsymbol{u}'(s), \boldsymbol{u}(s)\rangle\, ds,$$

а в силу (1.74), $(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t_0)) \to |\boldsymbol{u}(t_0)|^2$. Тем самым (1.75) доказано. □

Используемую в доказательстве леммы 1.2 лемму мы сформулируем в немного более общем виде, чем это там нужно.

Лемма 1.4. *Пусть X и Y — два банаховых пространства, таких что*

$$X \subset Y, \tag{1.76}$$

причем вложение непрерывно. Если функция φ принадлежит $L^\infty(0, T; X)$ и слабо непрерывна как функция со значениями в Y, то φ слабо непрерывна как функция со значениями в Y.

Доказательство. Заменив, если надо, Y на замыкание X в Y, мы можем считать, что X плотно в Y. Тогда плотное непрерывное вложение X в Y дает по двойственности плотное непрерывное вложение Y' (сопряженного к Y) в X' (сопряженное к X):

$$Y' \subset X'. \tag{1.77}$$

По предположению, для каждого $\eta \in Y'$

$$\langle \varphi(t), \eta\rangle \to \langle \varphi(t_0), \eta\rangle \text{ при } t \to t_0 \ \forall t_0, \tag{1.78}$$

и нам надо показать, что (1.78) верно также для каждого $\eta \in X'$. Покажем сначала, что $\varphi(t) \in X$ для каждого t и

$$\|\varphi(t)\|_X \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(0, T; X)} \ \forall t \in [0, T]. \tag{1.79}$$

В самом деле, регуляризуя функцию $\tilde{\varphi}$, равную φ на $[0, T]$ и 0 вне этого интервала, мы получаем последовательность функций φ_m, действующих из $[0, T]$ в X, таких что $\|\varphi_m(t)\|_X \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(X)}$ $\forall m \forall t \in [0, T]$ и $\langle \varphi_m(t), \eta\rangle \to \langle \varphi(t), \eta\rangle$ при $m \to \infty$ $\forall \eta \in Y'$. Так как $|\langle \varphi_m(t), \eta\rangle| \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(X)} \|\eta\|_{X'}$ $\forall m\ \forall t$, мы получаем в пределе $|\langle \varphi(t), \eta\rangle| \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(X)} \|\eta\|_{X'}$ $\forall t \in [0, T]$ $\forall \eta \in Y'$. Из этого равенства следует включение $\varphi(t) \in X$ и неравенство (1.79).

Наконец, докажем (1.78) для $\eta \in X'$. Так как Y' плотно в X', то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta_\varepsilon \in Y'$, такое что $\|\eta - \eta_\varepsilon\|_{X'} \leqslant \varepsilon$. Запишем

$$\langle \varphi(t) - \varphi(t_0), \eta \rangle = \langle \varphi(t) - \varphi(t_0), \eta - \eta_\varepsilon \rangle + \langle \varphi(t) - \varphi(t_0), \eta_\varepsilon \rangle,$$
$$|\langle \varphi(t) - \varphi(t_0), \eta \rangle| \leqslant 2\varepsilon \|\varphi\|_{L^\infty(X)} + |\langle \varphi(t) - \varphi(t_0), \eta_\varepsilon \rangle|.$$

Так как $\eta_\varepsilon \in Y'$, то по предположению о непрерывности имеем $\langle \varphi(t) - \varphi(t_0), \eta_\varepsilon \rangle \to 0$ при $t \to t_0$ и, следовательно,

$$\overline{\lim} |\langle \varphi(t) - \varphi(t_0), \eta \rangle| \leqslant 2\varepsilon \|\varphi\|_{L^\infty(X)}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то этот верхний предел равен 0, и (1.78) доказано. □

1.5. Разные замечания. В этом пункте мы приведем некоторые замечания и дополнения к теореме 1.1.

Одно обобщение теоремы 1.1. Теорема 1.1 является частным случаем одной абстрактной теоремы, в которой речь идет об абстрактных пространствах V и H и абстрактном операторе A; см. Лионс и Мадженес [1].

Если взамен (1.28) мы предположим, что

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2, \quad \boldsymbol{f}_1 \in L^2(0, T; V'), \quad \boldsymbol{f}_2 \in L^1(0, T; H), \tag{1.80}$$

то все утверждения теоремы 1.1 верны с одним только изменением:

$$\boldsymbol{u}' \in L^2(0, T; V') + L^1(0, T; H). \tag{1.81}$$

В доказательстве существования мы пишем после (1.47)

$$\frac{d}{dt} |\boldsymbol{u}_m(t)|^2 + 2\nu \|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2 \leqslant 2 \|\boldsymbol{f}_1(t)\|_{V'} \|\boldsymbol{u}_m(t)\| + 2 |\boldsymbol{f}_2(t)| |\boldsymbol{u}_m(t)|$$
$$\leqslant \nu \|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2 + \frac{1}{\nu} \|\boldsymbol{f}_1(t)\|^2_{V'} + |\boldsymbol{f}_2(t)| \{1 + |\boldsymbol{u}_m(t)|^2\}. \tag{1.82}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \{1 + |\boldsymbol{u}_m(t)|^2\} \leqslant \frac{1}{\nu} \|\boldsymbol{f}_1(t)\|^2_{V'} + |\boldsymbol{f}_2(t)| \{1 + |\boldsymbol{u}_m(t)|^2\}. \tag{1.83}$$

Умножая это на $\exp\left\{-\int_0^t |\boldsymbol{f}_2(\sigma)| \, d\sigma\right\}$, приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt} \left\{ \exp\left(-\int_0^s |\boldsymbol{f}_2(\sigma)| \, d\sigma \right) \cdot (1 + |\boldsymbol{u}_m(t)|^2) \right\}$$
$$\leqslant \frac{1}{\nu} \|\boldsymbol{f}_1(t)\|^2_{V'} \exp\left(-\int_0^t |\boldsymbol{f}_2(\sigma)| \, d\sigma \right).$$

Интегрируя его от 0 до s, $s > 0$, получаем равномерную по m оценку, аналогичную (1.50), откуда следует (1.51). Интегрируя затем (1.82) от 0 до T, получаем (1.53). Доказательство существования проводится далее в точности так же, как в п. 1.3.

Что касается производной u', то мы имеем

$$u' = -\nu A u + f_1 + f_2 \in L^2(0, T; V') + L^1(0, T; H). \tag{1.84}$$

Легко видеть, что лемма 1.2 верна также, если

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \; u' \in L^2(0, T; V') + L^1(0, T; H). \tag{1.85}$$

Заметив это, мы можем доказать единственность и непрерывность u, $u \in \mathscr{C}([0, T]; H)$ точно так же, как в п. 1.4.

Случай неограниченной области Ω. Для эволюционной задачи при рассмотрении неограниченных областей Ω *введение пространства* Y, *привлекавшегося в стационарном неограниченном случае* (гл. I, п. 2.3), *не является более необходимым.* Все предыдущие результаты остаются верными, если область Ω неограничена, а V снабжено нормой (1.9). Предположим, в самом общем случае, что f удовлетворяет (1.80). Мы имеем в точности такие же результаты, как в теореме 1.1, если f удовлетворяет (1.28), и такие же результаты, как в (1.81), если f удовлетворяет (1.80). Единственное отличие заключается в том, что мы должны вместо (1.82) использовать следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + 2\nu \| u_m(t) \|^2 \\ &\leqslant 2 \| f_1(t) \|_{V'} \| u_m(t) \| + 2 |f_2(t)| \, |u_m(t)| \\ &\leqslant \nu \| u_m(t) \|^2 + \nu |u_m(t)|^2 + \frac{1}{\nu} \| f_1(t) \|_{V'}^2 + |f_2(t)| (1 + |u_m(t)|^2). \end{aligned} \tag{1.86}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \{1 + |u_m(t)|^2\} \leqslant (|f_2(t)| + \nu) \{1 + |u_m(t)|^2\} + \frac{1}{\nu} \| f_1(t) \|_{V'}^2. \tag{1.87}$$

К этому неравенству применяется далее точно та же процедура, что и к неравенству (1.83), для получения утверждения (1.51). После этого, интегрируя (1.86) от 0 до T, приходим к оценке

$$\int_0^T \| u_m(t) \|^2 \, dt \leqslant \text{const}.$$

Эта оценка вместе с (1.51) дает (1.53). Доказательство существования, единственности и непрерывности решения проводится далее точно так же, как выше.

Интерпретация вариационной задачи. Мы хотим теперь уточнить, в каком смысле функция u, определяемая теоремой 1.1, является решением исходной задачи (1.23)—(1.26).

Предложение 1.1. *В предположениях теоремы* 1.1, *существует распределение p на $Q=\Omega\times(0, T)$, такое что функция $\boldsymbol{u}$, определяемая теоремой* 1.1, *и p удовлетворяют уравнению* (1.23) *в смысле распределений на Q; уравнение* (1.24) *также выполняется в смысле распределений, а* (1.26) *удовлетворяется в таком смысле:*

$$\boldsymbol{u}(t)\to\boldsymbol{u}_0 \text{ в } L^2(\Omega) \text{ при } t\to 0. \tag{1.88}$$

Доказательство. Равенство (1.24) непосредственно следует из того, что $\boldsymbol{u}\in L^2(0, T; V)$; (1.26) и (1.88) также немедленно следуют из теоремы 1.1; (1.25) выполняется в том или ином смысле, в зависимости от подходящей для Ω теоремы о следе, поскольку $\boldsymbol{u}$ принадлежит $L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega))$. Для того чтобы ввести давление, положим

$$\boldsymbol{U}(t)=\int_0^t \boldsymbol{u}(s)\,ds, \quad \boldsymbol{F}(t)=\int_0^t \boldsymbol{f}(s)\,ds. \tag{1.89}$$

Очевидно, что во всяком случае $\boldsymbol{U}\in\mathscr{C}([0, T]; V)$, $\boldsymbol{F}\in\mathscr{C}([0,T]; V')$. Интегрируя (1.31), мы видим, что

$$(\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v})+\nu((\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{v}))=\langle\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{v}\rangle\forall t\in[0, T]\ \forall\boldsymbol{v}\in V,$$

или

$$\langle\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{u}_0-\nu\Delta\boldsymbol{U}(t)-\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{v}\rangle=0\ \forall t\in[0, T]\forall\boldsymbol{v}\in V. \tag{1.90}$$

Используя предложения I.1.1 и I.1.2, находим, что для каждого $t\in[0, T]$ существует функция $P(t)\in L^2(\Omega)$, такая что

$$\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{u}_0-\nu\Delta\boldsymbol{U}(t)+\operatorname{grad}P(t)=\boldsymbol{F}(t). \tag{1.91}$$

В силу замечания I.1.4 (ii), оператор градиента является изоморфизмом из $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ в $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$. Замечая, что

$$\operatorname{grad}P=\boldsymbol{F}+\nu\Delta\boldsymbol{U}-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}_0, \tag{1.92}$$

мы заключаем, что $\operatorname{grad}P$ принадлежит $\mathscr{C}([0, T]; H^{-1}(\Omega))$, как и правая часть (1.92); поэтому

$$P\in\mathscr{C}([0, T]; L^2(\Omega)). \tag{1.93}$$

Это позволяет нам продифференцировать (1.91) по t в смысле распределений на $Q=\Omega\times(0, T)$; полагая

$$p=\frac{\partial P}{\partial t}, \tag{1.94}$$

мы получаем в точности (1.23). □

Относительно p у нас нет, вообще говоря, информации большей, чем (1.93)—(1.94). В следующем предложении мы получим бо́льшую гладкость p, предположив бо́льшую гладкость данных $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{u}_0$.

Некоторые результаты о регулярности. Предполагая, что данные Ω, f, u_0 являются достаточно гладкими, мы можем получить какую угодно регулярность функций u и p. Мы докажем лишь один наиболее простой результат такого типа.

Предложение 1.2. *Пусть* Ω *принадлежит классу* $\mathscr{C}^2$,

$$f \in L^2(0, T; H) \tag{1.95}$$

и

$$u \in V. \tag{1.96}$$

Тогда

$$u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)), \tag{1.97}$$

$$u' \in L^2(0, T; H), \text{ т. е. } u' \in L^2(Q), \tag{1.98}$$

$$p \in L^2(0, T; H^1(\Omega)). \tag{1.99}$$

Доказательство. Сначала установим (1.98); этот факт доказывается с помощью дополнительных априорных оценок для приближенного решения u_m, построенного методом Галёркина. В обозначениях п. 1.3, умножим (1.41) на $g'_{jm}(t)$ и просуммируем получающиеся равенства для $j=1, \ldots, m$; это дает

$$|u'_m(t)|^2 + \nu((u_m(t), u'_m(t))) = (f, (t), u'_m(t)),$$

или

$$2|u'_m(t)|^2 + \nu\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 = 2(f(t), u'_m(t)). \tag{1.100}$$

Теперь проинтегрируем (1.100) от 0 до T и применим неравенство Шварца; получим

$$2\int_0^T |u'_m(t)|^2\,dt + \nu\|u_m(T)\|^2 = \nu\|u_{0m}\|^2 + 2\int_0^T (f(t), u'_m(t))\,dt$$

$$\leqslant \nu\|u_{0m}\|^2 + \int_0^T |f(t)|^2\,dt + \int_0^T |u'_m(t)|^2\,dt,$$

$$\int_0^T |u'_m(t)|^2\,dt \leqslant \nu\|u_{0m}\|^2 + \int_0^T |f(t)|^2\,dt. \tag{1.101}$$

Базис w_j, используемый в методе Галёркина, можно выбрать так, чтобы $w_j \in V$ для каждого j, и мы можем положить u_{0m} равным проекции в V функции u_0 на подпространство, натянутое на $w_1, \ldots, w_m$. Тогда

$$u_{0m} \to u_0 \text{ в } V \text{ сильно при } m \to \infty \tag{1.102}$$

и

$$\|u_{0m}\| \leqslant \|u_0\|. \tag{1.103}$$

Благодаря такому выбору w_j и u_{0m} из (1.101) вытекает, что

последовательность u'_m ограничена в $L^2(0, T; H)$, (1.104)

и (1.98) доказано.

Теперь возвратимся к равенствам (1.23)—(1.25) и применим теорему о регулярности для стационарного случая (теорему I.2.4): для почти всех t из $[0, T]$

$$\begin{aligned} &-\nu\Delta u(t)+\operatorname{grad} p(t)=f-u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),\\ &\operatorname{div} u(t)=0 \text{ в } \Omega, \\ &u(t)=0 \text{ на } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.105}$$

так что $u(t)$ принадлежит $H^2(\Omega)$ и $p(t)$ принадлежит $H^1(\Omega)$. Далее, поскольку отображение $f(t)-u'(t)\mapsto\{u(t), p(t)\}$ линейно и непрерывно действует из $L^2(\Omega)$ в $H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)$ (в силу (I.2.40)) и поскольку $f-u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, то очевидно, что (1.97) и (1.99) выполнены. □

§ 2. Теоремы о компактности

Теоремы о компактности, представленные в гл. II, недостаточны для нелинейных эволюционных задач. Наша цель теперь — доказать некоторые теоремы компактности, которые подходили бы для нелинейных задач, рассматриваемых далее в этой главе.

После одного предварительного результата, излагаемого в п. 2.1, мы установим в п. 2.2 теорему о компактности для банаховых пространств. В п. 2.3 мы докажем две другие теоремы о компактности для гильбертовых пространств; в одной из них фигурируют дробные производные по времени.

Позднее мы изучим некоторые дискретные аналоги этих теорем.

2.1. Один предварительный результат. Доказательства теорем о компактности в следующих двух пунктах основаны на приводимой ниже лемме.

Лемма 2.1. *Пусть X_0, X и X_1 — тройка банаховых пространств, удовлетворяющая условию*

$$X_0 \subset X \subset X_1, \tag{2.1}$$

причем вложение $X \to X_1$ непрерывно, а

вложение X_0 в X компактно. (2.2)

Тогда для каждого $\eta > 0$ существует константа c_η, зависящая от η (и от пространств X_0, X, X_1), такая что

$$\|v\|_X \leqslant \eta\|v\|_{X_0}+c_\eta\|v\|_{X_1} \quad \forall v \in X_0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Утверждение, что (2.3) не выполняется, равносильно тому, что существует такое $\eta > 0$, что, каково бы ни было $c \in \mathbb{R}$, $\|v\|_X \geqslant \eta \|v\|_{X_0} + c\|v\|_{X_1}$ по крайней мере для одного v. Беря $c = m$, мы получаем последовательность элементов v_m, удовлетворяющих условию $\|v_m\|_X \geqslant \eta \|v_m\|_{X_0} + m\|v_m\|_{X_1}$ $\forall m$. Рассмотрим теперь нормированную последовательность $w_m = v_m/\|v_m\|_{X_0}$; она удовлетворяет условию

$$\|w_m\|_X \geqslant \eta + m\|w_m\|_{X_1} \ \forall m. \tag{2.4}$$

Так как $\|w_m\|_{X_0} = 1$, то последовательность w_m ограничена в X и из (2.4) следует, что

$$\|w_m\|_{X_1} \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{2.5}$$

Далее, в силу (2.2), последовательность w_m относительно компактна в X; следовательно, мы можем выбрать из нее некоторую подпоследовательность w_μ, сильно сходящуюся в X. Из (2.5) следует, что предел w_μ должен равняться 0, но это противоречит (2.4), ибо $\|w_\mu\|_X \geqslant \eta > 0$ $\forall \mu$. □

2.2. Теорема о компактности для банаховых пространств. Пусть X_0, X, X_1 — тройка банаховых пространств, удовлетворяющая условию

$$X_0 \subset X \subset X_1, \tag{2.6}$$

где вложения непрерывны и

$$X_i \text{ рефлексивны, } i = 0, 1, \tag{2.7}$$

$$\text{вложение } X_0 \to X \text{ компактно.} \tag{2.8}$$

Пусть, далее, $T > 0$ — фиксированное конечное число и α_0, α_1 — два конечных числа, таких что $\alpha_i > 1$, $i = 0, 1$. Рассмотрим пространство

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(0, T; \alpha_0, \alpha_1; X_0, X_1), \tag{2.9}$$

$$\mathcal{Y} = \left\{ v \in L^{\alpha_0}(0, T; X_0),\ v' = \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{\alpha_1}(0, T; X_1) \right\}. \tag{2.10}$$

Пространство $\mathcal{Y}$, снабженное нормой

$$\|v\|_{\mathcal{Y}} = \|v\|_{L^{\alpha_0}(0, T; X_0)} + \|v'\|_{L^{\alpha_1}(0, T; X_1)}, \tag{2.11}$$

является банаховым. Очевидно, что $\mathcal{Y} \subset L^{\alpha_0}(0, T; X)$, причем вложение непрерывно. Докажем, что в действительности это вложение компактно.

Теорема 2.1. *В предположениях* (2.6) — (2.9) *вложение* $\mathcal{Y}$ *в* $L^{\alpha_0}(0, T; X)$ *компактно.*

Доказательство. (i) Пусть u_m — произвольная последовательность, ограниченная в $\mathcal{Y}$. Нам надо показать, что эта последовательность содержит подпоследовательность u_μ, сильно сходящуюся в $L^{\alpha_0}(0, T; X)$. Так как пространства X_i рефлексивны и $1 < \alpha_i < +\infty$, то пространства $L^{\alpha_i}(0, T; X_i)$; $i = 0, 1$, также рефлексивны и, следовательно, $\mathcal{Y}$ тоже рефлексивно. Поэтому существуют такое $u \in \mathcal{Y}$ и такая подпоследовательность u_μ, что

$$u_\mu \to u \text{ слабо в } \mathcal{Y} \text{ при } \mu \to \infty, \tag{2.12}$$

т. е.

$$\begin{aligned} &u_\mu \to u \text{ слабо в } L^{\alpha_0}(0, T; X_0), \\ &u'_\mu \to u' \text{ слабо в } L^{\alpha_1}(0, T; X_1). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Достаточно показать, что

$$v_\mu = u_\mu - u \to 0 \text{ сильно в } L^{\alpha_0}(0, T; X). \tag{2.14}$$

(ii) Теорема будет доказана, если мы установим, что

$$v_\mu \to 0 \text{ сильно в } L^{\alpha_0}(0, T; X_1). \tag{2.15}$$

Но действительно, в силу леммы 2.1,

$$\| v_\mu \|_{L^{\alpha_0}(0, T; X)} \leqslant \eta \| v_\mu \|_{L^{\alpha_0}(0, T; X_0)} + c_\eta \| v_\mu \|_{L^{\alpha_0}(0, T; X_1)},$$

а так как последовательность v_μ ограничена в $\mathcal{Y}$, то

$$\| v_\mu \|_{L^{\alpha_0}(0, T; X)} \leqslant c\eta + c_\eta \| v_\mu \|_{L^{\alpha_0}(0, T; X_1)}. \tag{2.16}$$

Переходя к пределу в (2.16) и учитывая (2.15), получаем

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \| v_\mu \|_{L^{\alpha_0}(0, T; X)} \leqslant c\eta. \tag{2.17}$$

Поскольку $\eta > 0$ из леммы 2.1 может быть взято произвольно малым, этот верхний предел равен 0, и, таким образом, (2.14) доказано.

(iii) Для того чтобы установить (2.15), заметим, что

$$\mathcal{Y} \subset \mathscr{C}([0, T]; X_1), \tag{2.18}$$

причем вложение непрерывно; включение (2.18) следует из леммы 1.1, а непрерывность вложения проверяется без труда. Отсюда мы выводим оценку

$$\| v_\mu(t) \|_{X_1} \leqslant c \quad \forall t \in [0, T] \ \forall \mu. \tag{2.19}$$

Согласно теореме Лебега, (2.15) будет доказано, если мы покажем, что для почти всех t из $[0, T]$

$$v_\mu(t) \to 0 \text{ сильно в } X_1 \text{ при } \mu \to \infty. \tag{2.20}$$

Докажем (2.20) для $t = 0$; доказательство для других значений t аналогично. Запишем

$$v_\mu(0) = v_\mu(t) - \int_0^t v'_\mu(\tau)\, d\tau.$$

Интегрируя по t от 0 до s, получаем

$$\boldsymbol{v}_\mu(0) = \frac{1}{s}\left\{\int_0^s \boldsymbol{v}_\mu(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^s\int_0^t \boldsymbol{v}'_\mu(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\right\},$$

так что

$$\boldsymbol{v}_\mu(0) = \boldsymbol{a}_\mu + \boldsymbol{b}_\mu, \tag{2.21}$$

где

$$\boldsymbol{a}_\mu = \frac{1}{s}\int_0^s \boldsymbol{v}_\mu(t)\,\mathrm{d}t, \quad \boldsymbol{b}_\mu = -\frac{1}{s}\int_0^s (s-t)\,\boldsymbol{v}'_\mu(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.22}$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем s так, чтобы

$$\|\boldsymbol{b}_\mu\|_{X_1} \leqslant \int_0^s \boldsymbol{v}'_\mu(t)_{X_1}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для этого фиксированного s при $\mu \to \infty$ мы имеем $\boldsymbol{a}_\mu \to 0$ слабо в X_0, а значит, сильно в X_1; для достаточно больших μ выполняется неравенство $\|\boldsymbol{a}_\mu\|_{X_1} \leqslant \varepsilon/2$, откуда и следует (2.20) для $t=0$. □

2.3. *Теорема о компактности с дробными производными.* Следующая теорема о компактности для гильбертовых пространств использует понятие дробных производных. Предположим, что X_0, X, X_1 — гильбертовы пространства, такие что

$$X_0 \subset X \subset X_1, \tag{2.23}$$

причем

$$\text{вложение } X_0 \text{ в } X \text{ компактно.} \tag{2.24}$$

Для всякой функции $\boldsymbol{v}$ из $\mathbb{R}$ в X_1 мы обозначаем через $\hat{\boldsymbol{v}}$ ее преобразование Фурье:

$$\hat{\boldsymbol{v}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2i\pi t\tau}\boldsymbol{v}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.25}$$

Производной по t порядка γ от функции $\boldsymbol{v}$ называется обратное преобразование Фурье функции $(2i\pi\tau)^\gamma\hat{\boldsymbol{v}}$:

$$\widehat{D_t^\gamma \boldsymbol{v}}(\tau) = (2i\pi\tau)^\gamma\,\hat{\boldsymbol{v}}(\tau).[1] \tag{2.26}$$

Для произвольного $\gamma > 0$[2] определим пространство

$$\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R};\, X_0,\, X_1) = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\mathbb{R};\, X_0),\quad D_t^\gamma \boldsymbol{v} \in L^2(\mathbb{R};\, X_1)\}. \tag{2.27}$$

[1] Для целых γ определение (2.26) согласуется с обычным.

[2] В приложениях обычно $0 < \gamma \leqslant 1$.

Это — гильбертово пространство с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};\, X_0,\, X_1)} = \{\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, X_0)} + \||\tau|^\gamma \hat{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, X_1)}\}^{1/2}.$$

Произвольному множеству $K \subset \mathbb{R}$ поставим в соответствие подпространство $\mathcal{H}^\gamma_K$ в $\mathcal{H}^\gamma$, состоящее из тех функций $u \in \mathcal{H}^\gamma$, носитель которых содержится в K:

$$\mathcal{H}^\gamma_K(\mathbb{R};\, X_0,\, X_1) = \{u \in \mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};\, X_0,\, X_1),\ \operatorname{supp} u \subset K\}. \tag{2.28}$$

Теперь можно сформулировать теорему о компактности.

Теорема 2.2. *Пусть X_0, X, X_1 — гильбертовы пространства, удовлетворяющие условиям* (2.23) *и* (2.24). *Тогда для любого ограниченного множества K и любого $\gamma > 0$ вложение $\mathcal{H}^\gamma_K(\mathbb{R};\, X_0,\, X_1)$ в $L^2(R,\, X)$ компактно.*

Доказательство. (i) Пусть γ и K фиксированы и u_m — ограниченная последовательность в $\mathcal{H}^\gamma_K(\mathbb{R};\, X_0,\, X_1)$. Нам надо показать, что u_m содержит подпоследовательность, сильно сходящуюся в $L^2(\mathbb{R};\, X)$. Так как $\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};\, X_0,\, X_1)$ — гильбертово пространство, то последовательность u_m содержит подпоследовательность u_μ, слабо сходящуюся в этом пространстве к некоторому элементу u. Очевидно, что u также должен принадлежать $\mathcal{H}^\gamma_K$; поэтому, полагая $v_\mu = u_\mu - u$, получаем ограниченную последовательность v_μ элементов из $\mathcal{H}^\gamma_K(\mathbb{R};\, X_0,\, X_1)$, которая слабо сходится к 0 в $\mathcal{H}^\gamma$; это означает, что

$$v_\mu \to 0 \text{ слабо в } L^2(\mathbb{R};\, X_0), \tag{2.29}$$

$$|\tau|^\gamma \hat{v}_\mu \to 0 \text{ слабо в } L^2(\mathbb{R};\, X_1). \tag{2.30}$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что u_μ сильно сходится к u в $L^2(\mathbb{R};\, X)$, или, что то же самое,

$$v_\mu \to 0 \text{ сильно в } L^2(\mathbb{R};\, X). \tag{2.31}$$

(ii) Наш второй шаг заключается в доказательстве того факта, что (2.31) будет доказано, если мы установим, что

$$v_\mu \to 0 \text{ сильно в } L^2(\mathbb{R};\, X_1). \tag{2.32}$$

По лемме 2.1

$$\|v_\mu\|_{L^2(\mathbb{R};\, X)} \leqslant \eta \|v_\mu\|_{L^2(\mathbb{R};\, X_0)} + C_\eta \|v_\mu\|_{L^2(\mathbb{R};\, X_1)}, \tag{2.33}$$

а так как последовательность v_μ ограничена в $L^2(\mathbb{R};\, X_0)$, то

$$\|v_\mu\|_{L^2(\mathbb{R};\, X)} \leqslant c\eta + c_\eta \|v_\mu\|_{L^2(\mathbb{R};\, X_1)}. \tag{2.34}$$

Предположим, что выполнено (2.32). Устремляя $\mu \to \infty$ в (2.34), получим

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \|v_\mu\|_{L^2(\mathbb{R};\, X)} \leqslant c\eta.$$

Поскольку η в лемме 2.1 может быть взято произвольно малым, этот верхний предел должен быть равен 0, откуда и следует (2.31).

(iii) Наконец, докажем (2.32). В силу равенства Парсеваля,

$$I_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \|v_\mu(t)\|_{X_1}^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{v}_\mu(\tau)\|_{X_1}^2\,dt. \tag{2.35}$$

где $\hat{v}_\mu$ обозначает преобразование Фурье функции v_μ. Нам надо показать, что

$$I_\mu \to 0 \quad \text{при} \quad \mu \to \infty. \tag{2.36}$$

Имеем

$$I_\mu = \int_{|\tau|\leqslant M} \|\hat{v}_\mu(\tau)\|_{X_1}^2\,d\tau + \int_{|\tau|>M} (1+|\tau|^{2\gamma})\|\hat{v}_\mu(\tau)\|_{X_1}^2 \frac{d\tau}{1+|\tau|^{2\gamma}} \leqslant \frac{c}{1+M^{2\gamma}} + \int_{|\tau|\leqslant M} \|\hat{v}_\mu(\tau)\|_{X_1}^2\,dt,$$

ибо v_μ ограничена в $\mathscr{H}^\gamma$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем такое M, что $c/(1+M^{2\gamma}) \leqslant \varepsilon/2$. Тогда

$$I_\mu \leqslant \int_{|\tau|\leqslant M} \|\hat{v}_\mu(\tau)\|_{X_1}^2\,d\tau + \frac{\varepsilon}{2},$$

и (2.36) будет доказано, если мы покажем, что для этого фиксированного M

$$J_\mu = \int_{|\tau|\leqslant M} \|\hat{v}_\mu(\tau)\|_{X_1}^2\,d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad \mu \to \infty, \tag{2.37}$$

Это устанавливается с помощью теоремы Лебега. Если через χ обозначить характеристическую функцию множества K, то $v_\mu\chi = v_\mu$ и

$$\hat{v}_\mu(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t\tau}\chi(t)\,v_\mu(t)\,dt.$$

Поэтому

$$\|\hat{v}_\mu(\tau)\|_{X_1} \leqslant \|v_\mu\|_{L^2(\mathbf{R};\,X_1)} \|e^{-2i\pi t\tau}\chi\|_{L^2(\mathbf{R})},$$

$$\|\hat{v}_\mu(\tau)\|_{X_1} \leqslant \text{const}. \tag{2.38}$$

С другой стороны, для каждого σ из X_0 и каждого фиксированного τ

$$((\hat{v}_\mu(\tau),\ \sigma))_{X_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} ((v_\mu(t),\ e^{-2i\pi t\tau}\chi(t)\,\sigma))_{X_0}\,dt;$$

ввиду (2.29) этот интеграл стремится к 0 при $\mu \to \infty$. Последовательность $\hat{v}_\mu(\tau)$ слабо сходится к 0 в X_0 и потому сильно в X и X_1. Учитывая это последнее замечание и (2.38), по теореме Лебега получаем (2.37). □

Используя метод теоремы 2.2, мы можем доказать другую теорему о компактности, аналогичную теореме 2.1, но не содержащуюся в ней и не содержащую ее.

Теорема 2.3. *В предположениях* (2.33) *и* (2.24), *вложение* $\mathcal{Y}(0, T; 2{,}1; X_0, X_1)$[1] *в* $L^2(0, T; X)$ *компактно.*

Доказательство. Пусть u_m — ограниченная последовательность в пространстве $\mathcal{Y}$. Обозначим через $\tilde{u}_m$ функцию, определенную на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, равную u_m на $[0, T]$ и 0 вне этого интервала. Согласно теореме 2.2, наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что последовательность $\tilde{u}_m$ остается ограниченной в пространстве $\mathcal{H}^\gamma(R; X_0, X_1)$ для некоторого $\gamma > 0$. По лемме 1.1 каждая функция u_m является, с точностью до изменения значений на множестве меры 0, непрерывной функцией из $[0, T]$ в X_1, причем вложение $\mathcal{Y}$ в $\mathscr{C}([0, T]; X_1)$ непрерывно. Поскольку функция $\tilde{u}_m$ имеет разрывы в точках 0 и T, то, как хорошо известно, ее обобщенная производная выглядит так:

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}_m = \tilde{g}_m + u_m(0)\,\delta_0 - u_m(T)\,\delta_T, \tag{2.39}$$

где δ_0 и δ_T — дельта-функции Дирака, сосредоточенные в точках 0 и T, а

$$g_m = u_m' \text{ — производная функция } u_m \text{ на } [0, T]. \tag{2.40}$$

Применяя преобразование Фурье, получаем из (2.39)

$$2i\pi\tau\hat{u}_m(\tau) = \hat{g}_m(\tau) + u_m(0) - u_m(T)\exp(-2i\pi\tau T), \tag{2.41}$$

где $\hat{g}_m$ и $\hat{u}_m$ — преобразования Фурье от $\tilde{g}_m$ и $\tilde{u}_m$ соответственно. Так как последовательность g_m ограничена в $L^1(0, T; X_1)$, то последовательность $\tilde{g}_m$ ограничена в $L^1(\mathbb{R}; X_1)$, а последовательность $\hat{g}_m$ ограничена в $L^\infty(\mathbb{R}; X_1)$:

$$\|\hat{g}_m(\tau)\|_{X_1} \leqslant \text{const}\ \forall m\ \forall \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.42}$$

Как мы только что отмечали, вложение $\mathcal{Y}$ в $\mathscr{C}([0, T]; X_1)$ непрерывно; поэтому $\|u_m(0)\|_{X_1} \leqslant \text{const}$, $\|u_m(T)\|_{X_1} \leqslant \text{const}$, и из (2.41) следует, что

$$|\tau|^2\|\hat{u}_m(\tau)\|_{X_1}^2 \leqslant c \quad \forall m \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.43}$$

[1] Относительно определения этого пространства см. (2.9)—(2.10).

Теперь заметим, что для фиксированного $\gamma < 1/2$

$$|\tau|^{2\gamma}\leqslant c_0(\gamma)\frac{1+\tau^2}{1+|\tau|^{2(1-\gamma)}}\quad \forall\tau\in\mathbb{R}.$$

Поэтому из (2.43) получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^{2\gamma}\|\hat{u}_m(\tau)\|_{X_1}^2\,\mathrm{d}\tau\leqslant c_0(\gamma)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+\tau^2}{1+|\tau|^{2(1-\gamma)}}\|\hat{u}_m(\tau)\|_{X_1}^2\,\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant c_1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\tau}{1+|\tau|^{2(1-\gamma)}}+c_0(\gamma)\int_{-\infty}^{+\infty}\|\hat{u}_m(\tau)\|_{X_1}^2\,\mathrm{d}\tau.$$

Так как $\gamma < 1/2$, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\tau}{1+|\tau|^{2(1-\gamma)}}$ сходится; далее, в силу равенства Парсеваля,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|\hat{u}_m(\tau)\|_{X_1}^2\,\mathrm{d}\tau=\int_0^T\|u_m(t)\|_{X_1}^2\,\mathrm{d}t,$$

и эти интегралы ограничены. Отсюда заключаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^{2\gamma}\|\hat{u}_m(\tau)\|_{X_1}^2\,\mathrm{d}\tau\leqslant c_2, \tag{2.44}$$

где c_2 зависит от γ. Очевидно, что последовательность u_m ограничена в $\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1)$, и тем самым доказательство завершено. □

Замечание 2.1. Предполагая, что только X_1 — гильбертово пространство, а X_0, X банаховы, можно аналогичным образом доказать, что вложение $\mathscr{Y}(0, T; \alpha_0, 1; X_0, X_1)$ в $L^{\alpha_0}(0, T; X)$ компактно для любого конечного $\alpha_0 > 1$.

§ 3. Теоремы существования и единственности ($n\leqslant 4$)

Этот параграф посвящен теоремам существования и единственности слабых решений полных уравнений Навье—Стокса (для $n\leqslant 4$). В п. 3.1 мы, следуя Лерэ, дадим вариационную формулировку этих задач и сформулируем одну теорему существования для таких решений (для $n\leqslant 4$). Доказательство этой теоремы, принадлежащее Лионсу, дано в п. 3.2. Оно основано на построении приближенного решения методом Галёркина с последующим предельным переходом, в котором используются, в частности, априорные оценки дробных производных по времени от приближенного решения и теоремы о компактности из § 2. Другое доказательство, основанное на полудискретизации по времени и верное для пространств любой размерности, обсуждается в § 4.

В п. 3.3 мы установим теорему единственности слабых решений (для $n=2$). В трехмерном случае ($n=3$) имеется „зазор" между классом функций, для которого известно существование решений, и более узким классом, для которого доказана единственность; пример соответствующей теоремы единственности приведен в п. 3.4. В п. 3.5 мы докажем для двумерного случая существование более регулярного решения, предполагая бо́льшую регулярность данных; сходный результат имеет место и в трехмерном случае для локальных решений, определенных на некотором „малом" интервале времени, в предположении что данные достаточно малы.

3.1. Одна теорема существования для $\mathbb{R}^n$ ($n \leqslant 4$). Все обозначения здесь те же, что и выше (см., в частности, начало п. 1.1); Ω — открытая липшицева область, которую для простоты мы считаем ограниченной; случай неограниченной области обсуждается в замечаниях 3.1 и 3.2. Напомним [1], что поскольку размерность пространства не превосходит 4, то можно определить на $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и, в частности, на V трилинейную непрерывную форму b, положив

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i, j=1}^{n} \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j \, dx. \tag{3.1}$$

Если $\boldsymbol{u} \in V$, то

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega). \tag{3.2}$$

Для $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ из V обозначим через $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ элемент из V', определяемый равенством

$$\langle B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} \rangle = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \quad \forall \boldsymbol{w} \in V, \tag{3.3}$$

и положим

$$B(\boldsymbol{u}) = B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \in V' \quad \forall \boldsymbol{u} \in V. \tag{3.4}$$

В классической формулировке начально-краевая задача для полных уравнений Навье—Стокса выглядит следующим образом: найти вектор-функцию $\boldsymbol{u}$: $\Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ и скалярную функцию p: $\Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$, такие что

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu \Delta \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{f} \text{ в } Q = \Omega \times (0, T), \tag{3.5}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \text{ в } Q, \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T), \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{u}(x, 0) = \boldsymbol{u}_0(x) \text{ в } \Omega. \tag{3.8}$$

[1] См. п. 1.1 гл. II.

Как и выше, заданные функции $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{u}_0$ определены на $\Omega \times [0, T]$ и Ω соответственно.

Предположим, что $\boldsymbol{u}$ и p — классические решения задачи (3.5)—(3.8), скажем $\boldsymbol{u} \in \mathscr{C}^2(\overline{Q})$, $p \in \mathscr{C}^1(\overline{Q})$. Очевидно, $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; V)$, и легко проверяется, что если $\boldsymbol{v}$ — элемент из $\mathscr{V}$, то

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle. \tag{3.9}$$

По непрерывности равенство (3.9) будет выполняться для каждого $\boldsymbol{v} \in V$. Этим подсказывается следующая слабая формулировка задачи (3.5)—(3.9) (см. Лерэ [1—3]):

Задача 3.1. *Для заданных* $\boldsymbol{u}_0$ *и* $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; V'), \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{u}_0 \in H, \tag{3.11}$$

найти функцию $\boldsymbol{u}$, *удовлетворяющую условиям*

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; V) \tag{3.12}$$

и

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{3.14}$$

Если $\boldsymbol{u}$ только лишь принадлежит $L^2(0, T; V)$, то условие (3.14) не имеет смысла. Но если $\boldsymbol{u}$ принадлежит $L^2(0, T; V)$ и удовлетворяет уравнению (3.13), то, как и в линейном случае, можно показать (используя лемму 1.1), что $\boldsymbol{u}$ п. в. равна некоторой непрерывной функции, так что (3.14) приобретает смысл. Прежде чем доказывать это, напомним, что мы рассматриваем случай $n \leqslant 4$; в случае большей размерности мы немного видоизменим предыдущую формулировку (см. п. 4.1).

Лемма 3.1. *Предположим, что размерность пространства* $n \leqslant 4$ *и что* $\boldsymbol{u}$ *принадлежит* $L^2(0, T; V)$. *Тогда функция* $B\boldsymbol{u}$, *определяемая равенством*

$$\langle B\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} \rangle = b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) \ \forall \boldsymbol{v} \in V \ \text{п. в. на } [0, T],$$

принадлежит $L^1(0, T; V')$.

Доказательство. Для почти всех t значение $B\boldsymbol{u}(t)$ является элементом из V', и, как легко проверить, функция $t \in [0, T] \mapsto B\boldsymbol{u}(t) \in V'$ измерима. Далее, поскольку b — трилинейная непрерывная форма на V, то

$$\| B\boldsymbol{w} \|_{V'} \leqslant c \| \boldsymbol{w} \|^2 \quad \forall \boldsymbol{w} \in V, \tag{3.15}$$

так что

$$\int_0^T \| B\boldsymbol{u}(t) \|_{V'} \mathrm{d}t \leqslant c \int_0^T \| \boldsymbol{u}(t) \|^2 \mathrm{d}t < +\infty. \quad \square$$

Теперь, если u удовлетворяет (3.12)—(3.13), то, согласно (1.6), (1.8) и предыдущей лемме, (3.13) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle u, v\rangle = \langle f - \nu Au - Bu, v\rangle \quad \forall v \in V.$$

Так как Au принадлежит $L^2(0, T; V')$, то, как и в линейном случае, функция $f - \nu Au - Bu$ принадлежит $L'(0, T; V')$. Из леммы 1.1 вытекает, что

$$u' \in L^1(0, T; V'), \quad u' = f - \nu Au - Bu \tag{3.16}$$

и что u п. в. равняется некоторой непрерывной функции из $[0, T]$ в V'. Таким образом, условие (3.14) имеет смысл.

Другая формулировка задачи (3.12)—(3.14) выглядит так:

Задача 3.2. *Для заданных f и u_0, удовлетворяющих* (3.10)—(3.11), *найти функцию u, удовлетворяющую условиям*

$$u \in L^2(0, T; V), \quad u' \in L^1(0, T; V'), \tag{3.17}$$

$$u' + \nu Au + Bu = f \quad \text{на} \quad (0, T), \tag{3.18}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.19}$$

Мы показали, что любое решение задачи 3.1 является решением задачи 3.2; обратное проверяется очень легко, и, следовательно, эти задачи эквивалентны.

Существование решений этих задач гарантируется следующей теоремой.

Теорема 3.1. *Пусть $n \leqslant 4$, и пусть заданы f и u_0, удовлетворяющие* (3.10)—(3.11). *Тогда существует по крайней мере одна функция u, удовлетворяющая* (3.17)—(3.19). *При этом*

$$u \in L^\infty(0, T; H) \tag{3.20}$$

и u слабо непрерывна как функция из $[0, T]$ в H[1].

Доказательство существования функции u, удовлетворяющей (3.20), проводится в п. 3.2; утверждение о непрерывности есть прямое следствие (3.20), непрерывности u в V' и леммы 1.4.

Замечание 3.1. (i) Теорема 3.1 остается справедливой, если предположить, что $f = f_1 + f_2$; $f_1 \in L^2(0, T; V')$, $f_2 \in L^1(0, T; H)$. По поводу соответствующих видоизменений в доказательстве теоремы отсылаем читателя к п. 1.5.

(ii) Теорема 3.1 верна также, если область Ω неограничена; подробнее об этом см. замечание 3.2. □

3.2. Доказательство теоремы 3.1.

(i) Как и в линейном случае, мы воспользуемся методом Галёркина. Поскольку V сепарабельно, а $\mathscr{V}$ плотно в V, то существует последовательность $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ линейно-независимых элементов $\mathscr{V}$, которая

[1] То есть $\forall v \in H$ скалярная функция $t \mapsto (u(t), v)$ непрерывна.

тотальна в V.[1] Для каждого m определим приближенное решение u_m уравнения (3.13) следующим образом:

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\, w_i, \tag{3.21}$$

$$(u'_m(t),\ w_j) + \nu((u_m(t),\ w_j)) + b(u_m(t),\ u_m(t),\ w_j)$$
$$= \langle f(t),\ w_j\rangle,\ t \in [0,\ T],\ j = 1,\ \ldots,\ m, \tag{3.22}$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \tag{3.23}$$

где u_{0m} — ортогональная проекция в H функции u_0 на подпространство, натянутое на $w_1,\ \ldots,\ w_m$[2]. Уравнения (3.22) образуют нелинейную систему дифференциальных уравнений относительно функций $g_{1m},\ \ldots,\ g_{mm}$:

$$\sum_{i=1}^{m} (w_i,\ w_j)\, g'_{im}(t) + \nu \sum_{i=1}^{m} ((w_i,\ w_j))\, g_{im}(t)$$
$$+ \sum_{i,\, l=1}^{m} b(w_i,\ w_l,\ w_j)\, g_{im}(t)\, g_{lm}(t) = \langle f(t),\ w_j\rangle. \tag{3.24}$$

Обращая невырожденную матрицу с элементами $(w_i,\ w_j)$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant m$, мы можем записать эту систему в обычном виде:

$$g'_{im}(t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} g_{jm}(t) + \sum_{j,\, k=1}^{m} \alpha_{ijk} g_{jm}(t)\, g_{km}(t)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \langle f(t),\ w_j\rangle, \tag{3.25}$$

где α_{ij}, α_{ijk}, $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$. Условие (3.23) эквивалентно m скалярным начальным условиям

$$g'_{im}(0) = i\text{-я компонента } u_{0m},\quad i = 1,\ \ldots,\ m. \tag{3.26}$$

Нелинейная система (3.25) с начальными условиями (3.26) имеет „максимальное" решение — решение, определенное на некотором максимальном интервале $[0,\ t_m]$. Если $t_m < T$, то $|u_m(t)|$ должно стремиться к $+\infty$ при $t \to t_m$; априорные оценки, которые мы получим ниже, показывают, что этого не может быть и поэтому $t_m = T$.

(ii) Первая априорная оценка получается так же, как в линейном случае. Умножим (3.22) на $g_{jm}(t)$ и просуммируем эти уравнения по $j = 1,\ \ldots,\ m$. Приняв во внимание (3.2), получим

$$(u'_m(t),\ u_m(t)) + \nu \| u_m(t) \|^2 = \langle f(t),\ u_m(t)\rangle. \tag{3.27}$$

---

[1] Функции w_j выбраны из $\mathscr{V}$ ради простоты. С некоторыми техническими видоизменениями мы могли бы взять их из V.

[2] Мы могли бы взять в качестве u_{0m} любой элемент этого подпространства, такой что последовательность $u_{0m} \to u_0$ в H при $m \to \infty$.

Далее,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}_m(t)|^2+2\nu\|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2=2\langle \boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{u}_m(t)\rangle$$
$$\leqslant 2\|\boldsymbol{f}(t)\|_{V'}\|\boldsymbol{u}_m(t)\|\leqslant \nu\|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2+\frac{1}{\nu}\|\boldsymbol{f}(t)\|_{V'}^2,$$

так что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}_m(t)|^2+\nu\|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2\leqslant\frac{1}{\nu}\|\boldsymbol{f}(t)\|_{V'}^2. \tag{3.28}$$

Интегрируя (3.28) от 0 до s, находим, что

$$|\boldsymbol{u}_m(s)|^2\leqslant|\boldsymbol{u}_{0m}|^2+\frac{1}{\nu}\int_0^s\|\boldsymbol{f}(t)\|_{V'}^2\,\mathrm{d}t\leqslant|\boldsymbol{u}_0|^2+\frac{1}{\nu}\int_0^T\|\boldsymbol{f}(t)\|_{V'}^2\,\mathrm{d}t.$$

Следовательно,

$$\sup_{s\in[0,\,T]}|\boldsymbol{u}_m(s)|^2\leqslant|\boldsymbol{u}_0|^2+\frac{1}{\nu}\int_0^T\|\boldsymbol{f}(t)\|_{V'}^2\,\mathrm{d}t, \tag{3.29}$$

откуда вытекает, что

последовательность $\boldsymbol{u}_m$ ограничена в $L^\infty(0,\ T;\ H)$. (3.30)

Интегрируя теперь (3.28) от 0 до T, получаем

$$|\boldsymbol{u}_m(T)|^2+\nu\int_0^T\|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2\,\mathrm{d}t\leqslant|\boldsymbol{u}_{0m}|^2+\frac{1}{\nu}\int_0^T\|\boldsymbol{f}(t)\|_{V'}^2\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant|\boldsymbol{u}_0|^2+\frac{1}{\nu}\int_0^T\|\boldsymbol{f}(t)\|_{V'}^2\,\mathrm{d}t.$$

Эта оценка показывает, что

последовательность $\boldsymbol{u}_m$ ограничена в $L^2(0,\ T;\ V)$. (3.31)

(iii) Пусть $\tilde{\boldsymbol{u}}_m$ обозначает функцию, действующую из $\mathbb{R}$ в V, которая равна $\boldsymbol{u}_m$ на $[0,\ T]$ и 0 на дополнении к этому интервалу. Преобразование Фурье от $\tilde{\boldsymbol{u}}_m$ обозначим через $\hat{\boldsymbol{u}}_m$. В дополнение к предыдущим оценкам, аналогичным оценкам для линейного случая, мы хотим показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^{2\gamma}\,|\hat{\boldsymbol{u}}_m(\tau)|^2\,\mathrm{d}t\leqslant\mathrm{const}\ \text{для некоторого}\ \gamma>0. \tag{3.32}$$

Вместе с (3.31) это будет означать, что

последовательность $\tilde{\boldsymbol{u}}_m$ ограничена в $\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R};\ V,\ H)$, (3.33) и даст нам возможность применить теорему о компактности 2.2. Для того чтобы доказать (3.32), заметим, что (3.22) можно переписать в виде[1]

$$\frac{d}{dt}(\tilde{u}_m, w_j) = \langle \tilde{f}_m, w_j \rangle + (u_{0m}, w_j)\delta_0 - (u_m(T), w_j)\delta_T, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{3.34}$$

где δ_0, δ_T — дельта-функции Дирака, сосредоточенные в точках 0 и T, и

$$\begin{aligned} f_m &= f - \nu A u_m - B u_m, \\ \tilde{f}_m &= f_m \text{ на } (0, T]. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Применяя к (3.34) преобразование Фурье, получаем

$$2i\pi\tau(\hat{u}_m, w_j) = \langle \hat{f}_m, w_j \rangle + (u_{0m}, w_j) - (u_m(T), w_j)\exp(-2i\pi T\tau), \tag{3.36}$$

где $\hat{u}_m$ и $\hat{f}_m$ обозначают преобразования Фурье функций $\tilde{u}_m$ и $\tilde{f}_m$ соответственно. Домножим (3.36) на $\hat{g}_{jm}(\tau)$ (преобразование Фурье $\tilde{g}_{jm}$) и сложим получившиеся уравнения для $j = 1, \ldots, m$; это дает

$$2i\pi\tau |\hat{u}_m(\tau)|^2 = \langle \hat{f}_m(\tau), \hat{u}_m(\tau) \rangle + (u_{0m}, \hat{u}_m(\tau)) - (u_m(T), \hat{u}_m(\tau))\exp(-2i\pi\tau T). \tag{3.37}$$

Вследствие неравенства (3.15),

$$\int_0^T \|f_m(t)\|_{V'}\,dt \leqslant \int_0^T (\|f(t)\|_{V'} + \nu\|u_m(t)\| + c\|u_m(t)\|^2)\,dt,$$

а это выражение ограничено в силу (3.31). Отсюда $\sup\limits_{\tau \in \mathbb{R}} \|\hat{f}_m(\tau)\|_{V'} \leqslant$ $\leqslant \text{const}\ \forall m$. В силу (3.29), $|u_m(0)| \leqslant \text{const}$, $|u_m(T)| \leqslant \text{const}$, и мы выводим из (3.37), что $|\tau|\ |\hat{u}_m(\tau)|^2 \leqslant c_2\|\hat{u}_m(\tau)\| + c_3|\hat{u}_m(\tau)|$, или

$$|\tau||\hat{u}_m(\tau)|^2 \leqslant c_4\|\hat{u}_m(\tau)\|. \tag{3.38}$$

Для фиксированного γ, $\gamma < 1/4$, имеем

$$|\tau|^{2\gamma} \leqslant c_5(\gamma)\frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

---

[1] Ср. с доказательством теоремы 2.3.

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\hat{u}_m(\tau)|^2 \, d\tau \leqslant c_5(\gamma) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} |\hat{u}_m(\tau)|^2 \, d\tau$$
$$\leqslant (\text{в силу } (3.38))\, c_6 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat{u}_m(\tau)\|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \, d\tau + c_7 \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{u}_m(\tau)\|^2 \, dt.$$

Вследствие (3.31) и равенства Парсеваля последний интеграл ограничен при $m \to \infty$; таким образом, (3.32) будет доказано, если мы покажем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat{u}_m(\tau)\|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \, d\tau \leqslant \text{const}. \tag{3.39}$$

Согласно неравенству Шварца и равенству Парсеваля, мы можем оценить этот интеграл величиной

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^{1-2\gamma})^2} \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|u_m(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2},$$

которая конечна, так как $\gamma < 1/4$, и ограничена при $m \to \infty$, в силу (3.31). Доказательство (3.32) и (3.33) закончено.

(iv) Оценки (3.30) и (3.31) позволяют нам утверждать, что существуют элемент $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ и подпоследовательность $u_{m'}$, такие что

$$\begin{aligned} &u_{m'} \to u \text{ слабо в } L^2(0, T; V) \\ &\text{и } *\text{-слабо в } L^\infty(0, T; H) \text{ при } m' \to \infty. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Ввиду (3.33) и теоремы 2.2 имеем также

$$u_{m'} \to u \text{ сильно в } L^2(0, T; H). \tag{3.41}$$

Результаты о сходимости (3.40) и (3.41) позволяют нам перейти к пределу. Мы поступаем в основном так же, как в линейном случае. Пусть ψ — непрерывно дифференцируемая функция на $[0, T]$ с $\psi(T) = 0$. Домножим (3.22) на $\psi(t)$ и проинтегрируем по частям.

Это приводит к равенству

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}_m(t),\ \psi'(t))\,\boldsymbol{w}_j\,\mathrm{d}t + \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}_m(t),\ \boldsymbol{w}_j\psi(t)))\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T b(\boldsymbol{u}_m(t),\ \boldsymbol{u}_m(t),\ \boldsymbol{w}_j\psi(t))\,\mathrm{d}t = (\boldsymbol{u}_{0m},\ \boldsymbol{w}_j)\,\psi(0)$$
$$+\int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{w}_j\psi(t)\rangle\,\mathrm{d}t. \tag{3.42}$$

В линейных членах переход к пределу по последовательности m' тривиален; для нелинейных членов мы применим приводимую ниже лемму 3.2. В пределе получим, что уравнение

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{v}\psi'(t))\,\mathrm{d}t + \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{v}\psi(t)))\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T b(\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{v}\psi(t))\,\mathrm{d}t = (\boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{v})\,\psi(0)$$
$$+\int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{v}\psi(t)\rangle\,\mathrm{d}t \tag{3.43}$$

удовлетворяется для $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2,\ \ldots$; по линейности это уравнение выполняется для любой линейной комбинации элементов $\boldsymbol{w}_j$, а по непрерывности — для любого $\boldsymbol{v}\in V$. Записывая, в частности, (3.43) для $\psi=\varphi\in\mathscr{D}((0,\ T))$, мы видим, что $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет (3.13) в смысле теории распределений.

Наконец, остается показать, что $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет (3.14). Для этого мы умножим (3.13) на ψ и проинтегрируем. После интегрирования первого члена по частям получаем

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{v}\psi(t))\,\mathrm{d}t + \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{v}\psi(t)))\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T \boldsymbol{b}(\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{v}\psi(t))\,\mathrm{d}t = (\boldsymbol{u}(0),\ \boldsymbol{v})\,\psi(0)$$
$$+\int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{v}\psi(t)\rangle\,\mathrm{d}t. \tag{3.44}$$

Сравнивая с (3.43), заключаем, что $(\boldsymbol{u}(0)-\boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{v})\,\psi(0)=0$. Мы можем выбрать ψ так, чтобы $\psi(0)=1$; тогда $(\boldsymbol{u}(0)-u_0,\ \boldsymbol{v})=0$ $\forall \boldsymbol{v}\in V$, откуда и следует (3.14).

Доказательство теоремы 3.1 будет полностью завершено, как только мы докажем следующую лемму.

Лемма 3.2. *Если* u_μ *сходится к* u *слабо в* $L^2(0, T; V)$ *и сильно в* $L^2(0, T; H)$, *то для любой вектор-функции* w *с компонентами из* $\mathscr{C}^1(\overline{Q})$

$$\int_0^T b(u_\mu(t),\ u_\mu(t),\ w(t))\,dt \to \int_0^T b(u(t), u(t), w(t))\,dt. \quad (3.45)$$

Доказательство. Запишем

$$\int_0^T b(u_\mu,\ u_\mu,\ w)dt = -\int_0^T b(u_\mu,\ w,\ u_\mu)$$

$$= \sum_{i,\,j=1}^n \int_0^T \int_\Omega (u_\mu)_i (D_i w_j)(u_\mu)_j\,dx\,dt.$$

Эти интегралы сходятся к

$$-\sum_{i,\,j=1}^n \int_0^T \int_\Omega u_i (D_i w_j) u_j\,dx\,dt = \int_0^T b(u,\ w,\ u)\,dt$$

$$= \int_0^T b(u,\ u,\ w)\,dt. \ \square$$

Замечание 3.2. (i) *Неограниченная область.* В случае когда область Ω неограничена, (3.30) и (3.31) доказываются так же, как мы это делали в п. 1.5 для линейного случая. Далее (3.32) и (3.33) получаются, как и выше. Главное отличие заключается в том, что вложение V в H не является более компактным. Тем не менее мы можем извлечь подпоследовательность $u_{m'}$, которая удовлетворяет (3.40). Для любого шара $\mathcal{O}$, содержащегося в Ω, вложение $H^1(\mathcal{O})$ в $L^2(\mathcal{O})$ компактно, и из (3.33) следует, что

$$\text{последовательность } u_m\big|_{\mathcal{O}} \text{ ограничена в}$$
$$\mathscr{H}^\gamma(\mathbb{R};\ H^1(\mathcal{O}),\ L^2(\mathcal{O}))\ \forall \mathcal{O}. \quad (3.46)$$

Поэтому, в силу теоремы 2.2, $u_{m'}\big|_{\mathcal{O}} \to u\big|_{\mathcal{O}}$ сильно в $L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))$ $\forall \mathcal{O}$, т. е. $u_{m'} \to u$ сильно в $L^2(0, T; L^2_{loc}(\Omega))$. В частности, для фиксированного j имеем $u_{m'}\big|_{\Omega'} \to u\big|_{\Omega'}$ сильно в $L^2(0, T; L^2(\Omega'))$, где Ω' обозначает носитель w_j. Это позволяет перейти к пределу в (3.42).

(ii) *Энергетическое неравенство.* Интегрируя (3.27), находим, что

$$|u_m(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2\,ds = |u_{0m}|^2 + 2\int_0^t \langle f(s),\ u_m(s)\rangle\,ds.$$

Домножим это уравнение на $\varphi(t)$, где $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$, $\varphi(t) \geqslant 0$, и проинтегрируем по t:

$$\int_0^T \left\{ |u_m(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 \, ds \right\} \varphi(t)\, dt = \int_0^T \left\{ |u_{0m}|^2 + 2 \int_0^t \langle f(s), u_m(s)\rangle \, ds \right\} \varphi(t)\, dt.$$

Используя (3.40), перейдем в этом соотношении к нижнему пределу. В результате получим

$$\int_0^T \left\{ |u(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(s)\|^2 \, ds \right\} \varphi(t)\, dt \leqslant \int_0^T \left\{ |u_0|^2 + 2 \int_0^t \langle f(s), u(s)\rangle \, ds \right\} \varphi(t)\, dt$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$, $\varphi \geqslant 0$. Это равносильно тому, что

$$|u(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(s)\|^2 \, ds \leqslant |u_0|^2 + 2 \int_0^t \langle f(s), u(s)\rangle \, ds \tag{3.47}$$

для почти всех $t \in [0, T]$.

Это и есть энергетическое неравенство, которому удовлетворяет функция u из теоремы 3.1. Позднее будет показано, что соответствующее неравенство выполняется и при $n=2$ (см. теорему 3.2 и лемму 2.1). Мы не знаем, выполняется ли соответствующее неравенство в общем случае (ср. с теоремой 3.9).

3.3. *Регулярность и единственность* ($n=2$). В двумерном случае решение задачи (3.17)—(3.19), существование которого гарантируется теоремой 3.1, единственно и обладает некоторыми дополнительными свойствами регулярности. Доказательство этих фактов основано на следующих леммах.

Лемма 3.3. *Если $n=2$, то для произвольной открытой области* Ω

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leqslant 2^{1/4} \|v\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{grad} v\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.48}$$

Доказательство. Достаточно доказать (3.48) для $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Для таких v имеем

$$v^2(x) = 2 \int_{-\infty}^{x_1} v(\xi_1, x_2)\, D_1 v(\xi_1, x_2)\, d\xi_1$$

и поэтому

$$v^2(x) \leqslant 2 v_1(x_2), \tag{3.49}$$

где

$$v_1(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(\xi_1, x_2)|\,|D_1 v(\xi_1, x_2)|\, d\xi_1. \tag{3.50}$$

Аналогично

$$v^2(x) \leqslant 2v_2(x_1), \tag{3.51}$$

где

$$v_2(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x_1, \xi_2)|\,|D_2 v(x_1, \xi_2)|\,d\xi_2, \tag{3.52}$$

а следовательно,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} v^4(x)\,dx &\leqslant 4 \int_{\mathbb{R}^2} v_1(x_2)\,v_2(x_1)\,dx \\ &\leqslant 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty} v_1(x_2)\,dx_2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} v_2(x_1)\;dx_1\right) \\ &\leqslant 4\,\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,\|D_1 v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,\|D_2 v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leqslant 2\,\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,\|\operatorname{grad} v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \ \square\end{aligned}$$

Лемма 3.4. *Если* $n=2$, *то* $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in H_0^1(\Omega)$

$$|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant 2^{1/2}\,|\boldsymbol{u}|^{1/2}\,\|\boldsymbol{u}\|^{1/2}\,\|\boldsymbol{v}\|\,|\boldsymbol{w}|^{1/2}\,\|\boldsymbol{w}\|^{1/2}. \tag{3.53}$$

Если $\boldsymbol{u}$ *принадлежит* $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, *то* $B\boldsymbol{u}$ *принадлежит* $L^2(0, T; V')$ *и*

$$\|B\boldsymbol{u}\|_{L^2(0, T; V')} \leqslant 2^{1/2}\,\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(0, T; H)}\,\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0, T; V)}. \tag{3.54}$$

Доказательство. Несколько раз применяя неравенства Шварца и Гёльдера, находим, что

$$\begin{aligned}|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| &\leqslant \sum_{i, j=1}^{2} \int_\Omega |u_i (D_i v_j)\, w_j|\,dx \\ &\leqslant \sum_{i, j=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}\,\|D_i v_j\|_{L^2(\Omega)}\,\|w_j\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leqslant \left(\sum_{i, j=1}^{2} \|D_i v_j\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{2} \|w_j\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Согласно (3.48),

$$\sum_{j=1}^{2} \|u_j\|^2_{L^4(\Omega)} \leqslant \sqrt{2} \sum_{i=1}^{2} \left(\|u_i\|_{L^2(\Omega)}\,\|\operatorname{grad} u_i\|_{L^2(\Omega)}\right) \leqslant \sqrt{2}\,|\boldsymbol{u}|\,\|\boldsymbol{u}\|.$$

Используя аналогичное неравенство для $\boldsymbol{w}$, получаем (3.53). Если $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ принадлежат V, то соотношение $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ дает другую оценку для b:

$$|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant \sqrt{2}\,|\boldsymbol{u}|^{1/2}\,\|\boldsymbol{u}\|^{1/2}\,|\boldsymbol{v}|^{1/2}\,\|\boldsymbol{v}\|^{1/2}\,\|\boldsymbol{w}\|\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V. \tag{3.55}$$

В частности,

$$|b(u, u, v)| \leqslant 2^{1/2} |u| \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V \tag{3.56}$$

и поэтому

$$\|Bu\|_{V'} \leqslant 2^{1/2} |u| \|u\| \quad \forall u \in V. \tag{3.57}$$

Если теперь $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, то $Bu(t)$ принадлежит V' для почти всех t, а оценка

$$\|Bu(t)\|_{V'} \leqslant 2^{1/2} |u(t)| \|u(t)\| \tag{3.58}$$

показывает, что Bu принадлежит $L^2(0, T; V')$, откуда и вытекает неравенство (3.54). □

Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат (ср. Лионс и Проди [1]).

Теорема 3.2. *В двумерном случае решение u задач 3.1—3.2 единственно. Кроме того, u п. в. равна некоторой непрерывной функции из $[0, T]$ в H и*

$$u(t) \to u_0 \text{ в } H \text{ при } t \to 0. \tag{3.59}$$

Доказательство. (i) Сначала мы докажем утверждение о регулярности. Согласно (3.18) и лемме 3.4, $u' = f - \nu A u - Bu$, и так как каждый член в правой части принадлежит пространству $L^2(0, T; V')$, то u' также принадлежит ему. Таким образом, здесь мы имеем больше, чем в (3.17):

$$u' \in L^2(0, T; V'). \tag{3.60}$$

Это улучшение условия (3.17) позволяет нам применить лемму 1.2, которая утверждает, что u п. в. равняется некоторой непрерывной функции из $[0, T]$ в H. Таким образом,

$$u \in \mathscr{C}([0, T]; H), \tag{3.61}$$

откуда немедленно следует (3.59). Напомним также, что лемма 1.2 утверждает, что для любой функции u из $L^2(0, T; V)$, удовлетворяющей (3.60), выполняется уравнение

$$\frac{d}{dt} |u(t)|^2 = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle. \tag{3.62}$$

Этот факт будет использован в доказательстве единственности, к которому мы сейчас приступим.

(ii). Предположим, что u_1 и u_2 — два решения задачи (3.17)—(3.19), и пусть $u = u_1 - u_2$. Как показано выше, u_1, u_2, а значит, и u удовлетворяют (3.60). Разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет условиям

$$u' + \nu A u = -Bu_1 + Bu_2, \tag{3.63}$$

$$u(0) = 0. \tag{3.64}$$

Применим обе части равенства (3.63) как элементы из V' к $u(t)$ при почти всех t. Используя (3.62), получим

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2+2\nu\|u(t)\|^2=2b(u_2(t),\ u_2(t),\ u(t)) \\ -2b(u_1(t),\ u_1(t),\ u(t)). \qquad (3.65)$$

Вследствие (3.2) правая часть этого соотношения равна $-2b(u(t),$ $u_2(t),\ u(t))$. В силу (3.53), мы можем оценить это выражение величиной

$$2^{3/2}|u(t)|\,\|u(t)\|\,\|u_2(t)\|\leqslant 2\nu\|u(t)\|^2+\frac{1}{\nu}|u(t)|^2\|u_2(t)\|^2.$$

Подставляя это в (3.65), находим

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2\leqslant\frac{1}{\nu}|u(t)|^2\|u_2(t)\|^2.$$

Так как функция $t\to\|u_2(t)\|^2$ интегрируема, получаем

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(-\frac{1}{\nu}\int_0^t\|u_2(s)\|^2ds\right)\cdot|u(t)|^2\right\}\leqslant 0.$$

Интегрируя и применяя (3.64), заключаем, что $|u(t)|^2\leqslant 0$ $\forall t$ $\in[0,\ T]$. Таким образом, $u_1=u_2$. □

Замечание 3.3. Как следует из (3.48), (единственное) решение уравнений Навье—Стокса удовлетворяет условию

$$u\in L^4(Q)\quad (n=2). \qquad (3.66)$$

Замечание 3.4. Теорема 3.2 охватывает как случай ограниченной, так и случай неограниченной области; доказательство не изменяется.

3.4. О регулярности и единственности ($n=3$). Результаты п. 3.3 не могут быть распространены на более высокие размерности из-за отсутствия информации о регулярности слабых решений, даваемых теоремой 3.1. Тем не менее мы докажем здесь некоторые дополнительные свойства регулярности решения, несколько более слабые, чем те, которые были получены в двумерном случае. Затем мы приведем одну теорему единственности в классе функций, для которого существование неизвестно; этот результат, однако, показывает, как связана с единственностью информация о регулярности слабых решений.

Аналогом леммы 3.3 служит

Лемма 3.5. *Если $n=3$, то для любой открытой области Ω*

$$\|v\|_{L^4(\Omega)}\leqslant 2^{1/2}\|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/4}\|\operatorname{grad} v\|_{L^2(\Omega)}^{3/4}\quad\forall v\in H_0^1(\Omega). \qquad (3.67)$$

Доказательство. Достаточно доказать (3.67) для $v \in \mathscr{D}(\Omega)$. Для таких v, применяя (3.48), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^3} v^4(x)\,dx \leqslant 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^2} v^2\,dx_1\,dx_2 \right) \right.$$

$$\left. \left(\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{2} (D_i v)^2\,dx_1\,dx_2 \right) \right\} dx_3$$

$$\leqslant 2 \left(\sup_{x_3} \int_{\mathbb{R}^2} v^2\,dx_1\,dx_2 \right) \left(\sum_{i=1}^{2} \| D_i v \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right). \tag{3.68}$$

Но

$$v^2(x) = 2 \int_{-\infty}^{x_3} v(x_1, x_2, \xi_3)\, D_3 v(x_1, x_2, \xi_3)\,d\xi_3$$

$$\leqslant 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x_1, x_2, \xi_3)|\,|D_3 v(x_1, x_2, \xi_3)|\,d\xi_3,$$

и поэтому

$$\sup_{x_3} \int_{\mathbb{R}^2} v^2\,dx_1\,dx_2 \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^3} |v|\,|D_3 v|\,dx \leqslant 2 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D_3 v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Используя это неравенство, выводим из (3.68), что

$$\int_{\mathbb{R}^3} v^4(x)\,dx \leqslant 4 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D_3 v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\sum_{i=1}^{2} \|D_i v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right)$$

$$\leqslant 4 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(\sum_{i=1}^{3} \|D_i v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right)^{3/2},$$

откуда и следует (3.67). □

Теорема 3.3. *Если* $n = 3$, *то решение задачи* (3.17)—(3.19), *даваемое теоремой* 3.1, *удовлетворяет условиям*

$$\boldsymbol{u} \in L^{8/3}(0, T; \boldsymbol{L}^4(\Omega)), \tag{3.69}$$

$$\boldsymbol{u}' \in L^{4/3}(0, T; V'). \tag{3.70}$$

Доказательство. Для почти всех t, согласно (3.67), имеем

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c_0 |\boldsymbol{u}(t)|^{1/4} \|\boldsymbol{u}(t)\|^{3/4}. \tag{3.71}$$

Функция в правой части неравенства принадлежит $L^{8/3}(0, T)$; следовательно, то же верно и для функции в левой части. В гл. II, используя неравенство Гёльдера, мы вывели неравенство [1]

$$|b(u, u, v)| = |b(u, v\ \ u| \leqslant c_1 \|u\|^2_{L^4(\Omega)} \|v\| \ \forall u, v, \in V. \tag{3.72}$$

Поэтому если $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, то Bu принадлежит $L^{4/3}(0, T; V')$, ибо

$$\|Bu(t)\|_{V'} \leqslant c_1 \|u(t)\|^2_{L^4(\Omega)}, \tag{3.73}$$

$$\|Bu(t)\|_{V'} \leqslant c_2 |u(t)|^{1/2} \|u(t)\|^{3/2} \text{ п. в.} \tag{3.74}$$

В двумерном случае мы установили, что любое решение задачи (3.17)—(3.19), удовлетворяет (3.60) и (3.66) и в сущности именно это свойство позволило нам доказать единственность. Для $n = 3$ соотношения (3.60) и (3.66) заменяются более слабыми соотношениями (3.69)—(3.70).

Теперь мы покажем, что в некотором классе функций, более узком, чем тот, для которого получено существование, может существовать не более одного решения.

Теорема 3.4. *Если $n = 3$, то у задачи 3.2 существует не более одного решения, удовлетворяющего условиям*

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \tag{3.75}$$

$$u \in L^8(0, T; L^4(\Omega)). \tag{3.76}$$

Если такое решение существует, то оно является непрерывной функцией из $[0, T]$ в H.

Доказательство. (i) Из неравенств (3.72)—(3.73) вытекает, что если u удовлетворяет (3.76), то

$$Bu \in L^2(0, T; V') \text{ (по меньшей мере)}. \tag{3.77}$$

Поэтому если u удовлетворяет (3.75)—(3.76) и (3.18), то

$$u' \in L^2(0, T; V'), \tag{3.78}$$

и, согласно лемме 1.2, u п. в. равняется некоторой непрерывной функции из $[0, T]$ в H.

(ii) В силу неравенства Гёльдера и оценки (3.67),

$$\begin{aligned} |b(u, u, v)| &\leqslant c_0 \|u\|_{L^4(\Omega)} \|v\|_{L^4(\Omega)} \|u\|, \\ |b(u, u, v)| &\leqslant c_1' |u|^{1/4} \|u\|^{7/4} \|v\|_{L^4(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.79}$$

(iii) Предположим, что u_1 и u_2 — два решения задачи (3.17)—(3.19), удовлетворяющие (3.75)—(3.76), и пусть $u = u_1 - u_2$. Как и в доказательстве теоремы 3.2, можно показать, что

$$\frac{d}{dt} |u(t)|^2 + 2\nu \|u(t)\|^2 = 2b(u(t), u(t), u_2(t)). \tag{3.80}$$

[1] Это неравенство с константой c, зависящей от n, имеет место для любой размерности пространства.

Ввиду (3.79) правая часть оценивается величиной

$$2c_1 |u(t)|^{1/4} \|u(t)\|^{7/4} \|u_2(t)\|_{L^4(\Omega)}$$
$$\leqslant \nu \|u(t)\|^2 + c_2 |u(t)|^2 \|u_2(t)\|^8_{L^4(\Omega)}.$$

Таким образом, $\frac{d}{dt}|u(t)|^2 \leqslant c_2 \|u_2(t)\|^4_{L^4(\Omega)} |u(t)|^2$. Поскольку функция $t \to |u_2(t)|^8_{L^4(\Omega)}$ интегрируема, мы можем завершить доказательство так же, как в теореме 3.2. □

Замечание 3.5. Приведенное доказательство годится как для ограниченной, так и для неограниченной области Ω.

Замечание 3.6. Существует много аналогичных результатов о единственности, отвечающих некоторым другим предположениям о свойствах регулярности. Например (см. Лионс [2], стр. 84), единственность имеет место (для случая любой размерности пространства), когда u удовлетворяет вместо (3.76) условию

$$u \in L^s(0, T; L^r(\Omega)), \tag{3.81}$$

где

$$\begin{aligned} &2/s + n/r \leqslant 1, \quad \text{если } \Omega \text{ ограничена}, \\ &2/s + n/r = 1, \quad \text{если } \Omega \text{ неограничена}. \end{aligned} \tag{3.82}$$

3.5. Более регулярные решения. Цель этого пункта — доказать для двумерного случая тот факт, что, предполагая бо́льшую регулярность данных, можно получить большую регулярность решений. В трехмерном случае существование таких более регулярных решений доказано на любом временном интервале при условии, что данные u_0 и f „достаточно малы" или что ν достаточно велико.

3.5.1. Двумерный случай.

Теорема 3.5. *Пусть $n = 2$, и пусть*

$$f, f' \in L^2(0, T; V'), \ f(0) \in H, \tag{3.83}$$
$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap V. \tag{3.84}$$

Тогда единственное решение задачи 3.2, даваемое теоремами 3.1 *и* 3.2, *удовлетворяет условию*

$$u' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \tag{3.85}$$

Доказательство. (i) Прибегнем снова к галёркинскому приближению, использовавшемуся при доказательстве теоремы 3.1. Нам достаточно показать, что это приближенное решение удовлетворяет также двум априорным оценкам, содержащимся в следующем утверждении:

$$\text{последовательность } u'_m \text{ ограничена}$$
$$\text{в } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \tag{3.86}$$

В пределе из (3.86) следует (3.85). Так как $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$, мы можем взять в качестве u_{0m} ортогональную проекцию в $V \cap H^2(\Omega)$

функции u_0 на подпространство, натянутое на $w_1, \ldots, w_m$. Тогда

$$u_{0m} \to u_0 \text{ в } H^2(\Omega) \text{ при } m \to \infty, \quad \|u_{0m}\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \|u_0\|_{H^2(\Omega)}. \tag{3.87}$$

(ii) Умножим (3.22) на $g'_{jm}(t)$ и просуммируем получившиеся равенства по $j = 1, \ldots, m$. Это дает

$$|u'_m(t)|^2 + \nu((u_m(t), u'_m(t))) + b(u_m(t), u_m(t), u'_m(t)) = \langle f(t), u'_m(t)\rangle. \tag{3.88}$$

В частности, при $t = 0$ получаем

$$|u'_m(0)|^2 = (f(0), u'_m(0)) + \nu(\Delta u_{0m}, u'_m(0)) - b(u_{0m}, u_{0m}, u'_m(0)), \tag{3.89}$$

так что

$$|u'_m(0)| \leqslant |f(0)| + \nu|\Delta u_{0m}| + |Bu_{0m}|. \tag{3.90}$$

Из (3.87) ясно, что $|\Delta u_{0m}| \leqslant c_0\|u_{0m}\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_0\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$. Для Bu_{0m} мы имеем, согласно неравенству Гёльдера,

$$\begin{aligned} |b(u, u, v)| &\leqslant c_1\|u\|_{L^4(\Omega)}|\operatorname{grad} u|_{L^4(\Omega)}|v| \\ &\leqslant (\text{в силу (3.48) и неравенства Соболева}) \\ &\leqslant c_2\|u\|\|u\|_{H^2(\Omega)}|v| \quad \forall u \in H^2(\Omega)\ \forall v \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

и поэтому

$$|Bu_{0m}| \leqslant c_2\|u_{0m}\|\|u_{0m}\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \text{(в силу (3.87))} \leqslant c_2\|u_0\|^2_{H^2(\Omega)}. \tag{3.91}$$

Наконец, (3.90) и предыдущая оценка показывают, что

$$\text{последовательность } u'_m(0) \text{ ограничена в } H. \tag{3.92}$$

(iii) Мы можем продифференцировать (3.22) по t. Так как f удовлетворяет (3.83), получим

$$(u''_m, w_j) + \nu((u'_m, w_j)) + b(u'_m, u_m, w_j) + b(u_m, u'_m, w_j) = \langle f', w_j\rangle, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3.93}$$

Умножая (3.93) на $g'_{jm}(t)$ и суммируя получившиеся уравнения по $j = 1, \ldots, m$, приходим (с учетом (3.2)) к равенству

$$\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + 2\nu\|u'_m(t)\|^2 + 2b(u'_m(t), u_m(t), u'_m(t)) = 2\langle f'(t), u'_m(t)\rangle. \tag{3.94}$$

В силу леммы 3.4,

$$\begin{aligned} 2|b(u'_m(t), u_m(t), u'_m(t))| &\leqslant 2^{3/2}|u'_m(t)|\|u'_m(t)\|\|u_m(t)\| \\ &\leqslant \nu\|u'_m(t)\|^2 + \frac{2}{\nu}\|u_m(t)\|^2|u'_m(t)|^2. \end{aligned}$$

Поэтому из (3.94) вытекает, что

$$\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2+\frac{\nu}{2}\|u'_m(t)\|^2 \leqslant \frac{2}{\nu}|f'(t)|^2_{V'}+\varphi_m(t)|u'_m(t)|^2, \quad (3.95)$$

где

$$\varphi_m(t)=2/\nu\|u_m(t)\|^2.$$

Тогда, по лемме Гронуолла,

$$\frac{d}{dt}\left\{|u'_m(t)|^2 \exp\left(-\int_0^t \varphi_m(s)\,ds\right)\right\} \leqslant \frac{2}{\nu}|f'(t)|^2_{V'},$$

откуда

$$|u'_m(t)|^2 \leqslant \left\{|u'_m(0)|^2+\frac{2}{\nu}\int_0^t |f'(s)|^2_{V'}\,ds\right\}\exp\int_0^t \varphi_m(s)ds. \quad (3.96)$$

Поскольку последовательность u_m ограничена в $L^2(0, T; V)$ (ср. (3.31)), а также вследствие (3.92), правая часть неравенства (3.96) равномерно ограничена по $s \in [0, T]$ и по m:

$$\text{последовательность } u'_m \text{ ограничена в } L^\infty(0, T; H). \quad (3.97)$$

Из (3.97) и (3.95) легко следует, что последовательность u'_m ограничена в $L^2(0, T; V)$. □

Теорема 3.6. *Пусть выполнены те же предположения, что и в теореме 3.5. Кроме того, мы предположим, что Ω — ограниченная область класса $\mathscr{C}^2$ и*

$$f \in L^\infty(0, T; H). \quad (3.98)$$

Тогда функция u удовлетворяет условию

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)). \quad (3.99)$$

Доказательство. (i) Запишем (3.18) в виде

$$\nu((u(t), v)) = (g(t), v) \quad \forall v \in V, \quad (3.100)$$

где

$$g(t) = f(t) - u'(t) - Bu(t). \quad (3.101)$$

Доказательство основано на двух последовательных применениях предложения I.2.2.

(ii) Так как $u \in L^\infty(0, T; V)$ и

$$|b(u(t), u(t), v)| \leqslant c_0\|u(t)\|_{L^4(\Omega)}\|u(t)\|\|v\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c_1\|u(t)\|^2\|v\|_{L^4(\Omega)}, \quad (3.102)$$

то $Bu \in L^\infty(0, T; L^{4/3}(\Omega))$. Поэтому ($f-u' \in L^\infty(0, T; H)$)

$$g \in L^\infty(0, T; L^{4/3}(\Omega)). \quad (3.103)$$

Из предложения I.2.2 следует, что $u \in L^\infty(0, T; W^{2,4/3}(\Omega))$. Но по теореме Соболева $W^{2,4/3}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, значит, $u \in L^\infty(Q)$.

(iii) Теперь мы можем улучшить (3.103). Заменим (3.102) неравенством

$$|b(u(t), u(t), v)| \leqslant c_2 \|u\|_{L_\infty(Q)} \|u(t)\| \|v\|,$$

из которого следует, что $Bu \in L^\infty(0, T; H)$. Отсюда видно, что $g \in L^\infty(0, T; H)$. Снова применяя предложение I.2.2, получаем, что $u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$. □

Замечание 3.7. Последовательным применением предложения I.2.2 легко теперь доказать, точно так же как в случае предложения II.1.1, что если Ω — область класса $\mathscr{C}^\infty$, u_0 задано в $\mathscr{C}^\infty(\bar{\Omega})$, а f — в $\mathscr{C}^\infty(\bar{Q})$, то решение u принадлежит $\mathscr{C}^\infty(\bar{Q})$. Тем же самым методом могут быть получены и различные промежуточные результаты о регулярности решения при соответствующих предположениях о данных.

3.5.2. *Трехмерный случай.* Мы докажем здесь для $n=3$ некоторые свойства регулярности, аналогичные тем, которые были получены для $n=2$; однако теперь это будет сделано лишь в предположении достаточной „малости" начальных данных.

В следующей теореме c обозначает некоторую константу, такую что

$$|b(u, v, w)| \leqslant c\|u\| \|v\| \|w\| \quad \forall u, v, w \in V. \tag{3.104}$$

Теорема 3.7. *Предположим, что $n=3$ и что заданные функции f и u_0 удовлетворяют условиям*

$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap V, \tag{3.105}$$

$$f \in L^\infty(0, T; H);\ f' \in L^1(0, T; H) \tag{3.106}$$

и одному дополнительному условию, которое будет сформулировано по ходу доказательства теоремы и которое выполняется, если ν достаточно велико или если f и u_0 „достаточно малы" [1]*. Тогда у задачи 3.2 существует единственное решение, которое удовлетворяет, кроме того, условию*

$$u' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \tag{3.107}$$

Доказательство. (i) Прежде всего заметим, что единственность есть просто следствие теоремы 3.4, поскольку такое решение удовлетворяет условию

$$u \in L^\infty(0, T; V), \tag{3.108}$$

а тогда из включения $V \subset L^4(\Omega)$ следует (см. (3.76)), что

$$u \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega)). \tag{3.109}$$

[1] См. (3.115).

(ii) Первые шаги доказательства существования те же самые, что и в теореме 3.4. А именно, мы используем метод Галёркина, выбирая базис и u_m таким образом, чтобы выполнялось (3.87). Оценки (3.90) и (3.91), а поэтому и (3.92) по-прежнему имеют место:

$$|u'_m(0)| \leqslant d_1 = |f(0)| + \nu c_0 \| u_0 \|_{H^2(\Omega)} + c_1 \| u_0 \|^2_{H^2(\Omega)}. \tag{3.110}$$

Тем же путем, что и раньше, мы получаем уравнение (3.94), а из него, привлекая (3.104), выводим, что

$$\frac{d}{dt} | u'_m(t) |^2 + 2(\nu - c \| u_m(t) \|) \| u'_m(t) \|^2 \leqslant 2 | f'(t) | \, | u'_m(t) |. \tag{3.111}$$

(iii) Из (3.28) и (3.29) следует, что

$$\nu \| u_m(t) \|^2 \leqslant \frac{1}{\nu} \| f(t) \|^2_{V'} - 2(u_m(t), u'_m(t)) \leqslant \frac{1}{\nu} \| f(t) \|^2_{V'} +$$

$$+ 2 | u_m(t) | \, | u'_m(t) | \leqslant \frac{d_2}{\nu} + 2 \left(| u_0 |^2 + \frac{T d_2}{\nu} \right)^{1/2} | u'_m(t) |, \tag{3.112}$$

где

$$d_2 = \| f \|^2_{L^\infty(0, T; V')}. \tag{3.113}$$

Учитывая (3.110), получаем из (3.112) при $t = 0$

$$\nu \| u_m(0) \|^2 \leqslant d_2/\nu + 2 d_1 (| u_0 |^2 + T d_2/\nu)^{1/2} = d_3. \tag{3.114}$$

Дополнительное условие, упомянутое в формулировке теоремы, таково:

$$d_4 = \frac{d_2}{\nu} + (1 + d_1^2) \left(| u_0 |^2 + \frac{T d_2}{\nu} \right)^{1/2} \exp \left(\int_0^T | f'(s) | \, ds \right) < \frac{\nu^3}{c^2}. \tag{3.115}$$

Так как $d_3 \leqslant d_4$, то, в силу (3.114)—(3.115), $\nu \| u_m(0) \|^2 \leqslant d_3 \leqslant \leqslant d_4 < \nu^3/c^2$, а потому $\nu - c \| u_m(0) \| > 0$. Отсюда заключаем, что выражение $\nu - c \| u_m(t) \|$ остается положительным на некотором интервале с начальной точкой в 0. Обозначим через T_m первую точку $t \leqslant T$, такую что $\nu - c \| u_m(T_m) \| = 0$; если такой точки нет, то полагаем $T_m = T$. Тогда

$$\nu - c \| u_m(t) \| \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_m. \tag{3.116}$$

(iv) Используя (3.116), выводим из (3.111), что

$$\frac{d}{dt} | u'_m(t) |^2 \leqslant 2 | f'(t) | \, | u'_m(t) |,$$

$$\frac{d}{dt} (1 + | u'_m(t) |^2) \leqslant | f'(t) | (1 + | u'_m(t) |^2).$$

Следовательно,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{(1+|\boldsymbol{u}'_m(t)|^2)\exp\left(-\int_0^t|\boldsymbol{f}'(s)|\,\mathrm{d}s\right)\right\}\leqslant 0,$$

$$1+|\boldsymbol{u}'_m(t)|^2\leqslant(1+|\boldsymbol{u}'_m(0)|^2)\exp\left(\int_0^t|\boldsymbol{f}'(s)|\,\mathrm{d}s\right)$$

и, в силу (3.110),

$$1+|\boldsymbol{u}'_m(t)|^2\leqslant(1+d_1^2)\exp\left(\int_0^T|\boldsymbol{f}'(s)|\,\mathrm{d}s\right),\quad 0\leqslant t\leqslant T_m. \tag{3.117}$$

Из (3.112), (3.115) и (3.117) получаем

$$\begin{gathered}\nu\|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2\leqslant d_4,\quad 0\leqslant t\leqslant T_m,\\ \nu-c\|\boldsymbol{u}_m(t)\|\geqslant\nu-c\sqrt{d_4/\nu}>0,\ 0\leqslant t\leqslant T_m.\end{gathered} \tag{3.118}$$

Значит, $T_m=T$ и из (3.111) вытекает, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}'_m(t)|^2+2(\nu-c\sqrt{d_4/\nu})\|\boldsymbol{u}'_m(t)\|^2\leqslant 2|\boldsymbol{f}'(t)|\,|\boldsymbol{u}'_m(t)|,$$
$$0\leqslant t\leqslant T.$$

Отсюда легко следует, что

$$\text{последовательность } \boldsymbol{u}'_m \text{ ограничена}\\ \text{в } L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H) \tag{3.119}$$

Тем самым существование доказано. □

Как и в двумерном случае, мы имеем также следующий результат.

Теорема 3.8. *Если в дополнение к предположениям теоремы 3.7 потребовать, чтобы Ω была областью класса $\mathscr{C}^\infty$, то функция $\boldsymbol{u}$ будет удовлетворять условию*

$$\boldsymbol{u}\in L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}^2(\Omega)). \tag{3.120}$$

Доказательство. Запишем (3.18) в виде $\nu((\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{g}(t),\boldsymbol{v})$ $\forall\boldsymbol{v}\in V$, где $\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{u}'(t)-B\boldsymbol{u}(t)$. Так как $\boldsymbol{f}-\boldsymbol{u}'\in L^\infty(0,T;H)$, то (3.120) вытекает из предложения I.2.2, если только показать, что

$$B\boldsymbol{u}\in L^\infty(0,T;H)\ (\text{а значит, } \boldsymbol{g}\in L^\infty(0,T;H)). \tag{3.121}$$

Этот результат снова устанавливается с помощью повторного применения предложения I.2.2 и различных оценок для формы b. Согласно неравенству Гёльдера,

$$\begin{gathered}|b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})|\leqslant c_0\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^6(\Omega)}\|\boldsymbol{u}(t)\|\,|\boldsymbol{v}|_{L^3(\Omega)},\\ |b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})|\leqslant c_1\|\boldsymbol{u}(t)\|^2\|\boldsymbol{v}\|_{L^3(\Omega)}.\end{gathered} \tag{3.122}$$

Из (3.122) (и включения $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; V)$) вытекает, что $B\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^{3/2}(\Omega))$, $\boldsymbol{g} \in L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^{3/2}(\Omega))$. Предложение I.2.2 показывает, что $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; \boldsymbol{W}^{2, 3/2}(\Omega))$, а потому (поскольку $\boldsymbol{W}^{2, 3/2}(\Omega) \subset \boldsymbol{L}^8(\Omega)$ для $n=3$) $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^8(\Omega))$. Используя опять неравенство Гёльдера, получаем для b оценку

$$b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) \leqslant c_0 \|\boldsymbol{u}(t)\|_{\boldsymbol{L}^8(\Omega)} \|\boldsymbol{u}(t)\| \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L}^{8/3}(\Omega)}.$$

Отсюда $B\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{g} \in L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^{8/5}(\Omega))$ и, в силу предложения I.2.2,

$$\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; \boldsymbol{W}^{2, 8/5}(\Omega)) \subset L^\infty(\Omega \times [0, T]). \tag{3.123}$$

Из (3.123) и включения $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; V)$ легко следует (3.121). □

Замечание 3.8. Справедливо замечание о регулярности, аналогичное замечанию 3.7.

Введение давления ($n \leqslant 4$). Для того чтобы ввести давление, положим

$$\boldsymbol{U}(t) = \int_0^t \boldsymbol{u}(s)\,\mathrm{d}s, \quad \boldsymbol{\beta}(t) = \int_0^t B\boldsymbol{u}(s)\,\mathrm{d}s, \quad \boldsymbol{F}(t) = \int_0^t \boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Если $\boldsymbol{u}$ — решение задачи (3.17)—(3.19), то для любого $n \leqslant 4$

$$\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{F} \in \mathscr{C}([0, T]; V'). \tag{3.124}$$

Интегрируя (3.18), находим, что

$$\nu((\boldsymbol{U}(t), \boldsymbol{v})) = \langle \boldsymbol{g}(t), \boldsymbol{v} \rangle \ \forall \boldsymbol{v} \in V \quad \forall t \in [0, T], \tag{3.125}$$

где $\boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{F}(t) - \boldsymbol{\beta}(t) - \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{g} \in \mathscr{C}([0, T]; V')$. Применяя предложения I.1.1 и I.1.2, получаем, что для каждого $t \in [0, T]$ существует функция $p(t) \in L^2(\Omega)$, такая что $-\nu\,\Delta \boldsymbol{U}(t) + \operatorname{grad} p(t) = \boldsymbol{g}(t)$, или

$$\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}_0 - \nu\,\Delta \boldsymbol{U}(t) + \boldsymbol{\beta}(t) + \operatorname{grad} p(t) = \boldsymbol{F}(t). \tag{3.126}$$

Согласно замечанию I.1.4, оператор градиента является изоморфизмом пространства $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ в $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$. Замечая, что $\operatorname{grad} p = \boldsymbol{g} - \nu\,\Delta \boldsymbol{U}$, мы заключаем, что $\operatorname{grad} p$ принадлежит $\mathscr{C}([0, T]; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$ и потому

$$p \in \mathscr{C}([0, T]; L^2(\Omega)). \tag{3.127}$$

Это позволяет нам продифференцировать (3.126) в смысле теории распределений в $Q = \Omega \times (0, T)$; полагая

$$p = \partial p / \partial t, \tag{3.128}$$

получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\,\Delta \boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^n u_i D_i \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{f} \ \text{ в } Q. \tag{3.129}$$

В общем случае давление вводится как распределение на Q, определяемое соотношениями (3.127)—(3.128). В предположениях теорем 3.6 ($n=2$) или 3.8 ($n=3$) применение предложения I.2.2 показывает, что

$$p \in L^{\infty}(0, T; H^1(\Omega)). \tag{3.130}$$

3.6. Связь между задачами о существовании и единственности ($n=3$). В предыдущих пунктах наше внимание было сосредоточено на двух важных вопросах теории уравнений Навье—Стокса в трехмерном случае:

— единственность „очень слабых решений“, т. е. решений, существование которых гарантируется теоремой 3.1;

— существование „в целом“ — и для любых данных — более регулярных решений, например решений, существование которых обеспечивается теоремой 3.4, или решений, существование которых доказано при одном дополнительном ограничении в теореме 3.7.

Для краткости *вплоть до конца этого параграфа* мы будем называть *слабыми решениями* решения $\boldsymbol{u}$ задачи (3.13), (3.14), такие что

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^{\infty}(0, T; H) \tag{3.131}$$

и поэтому (теорема 3.2)

$$\boldsymbol{u} \in L^{8/3}(0, T; \boldsymbol{L}^4(\Omega)), \quad \boldsymbol{u}' \in L^{4/3}(0, T; V'); \tag{3.132}$$

сильными решениями — решения $\boldsymbol{v}$ задач (3.13), (3.14), такие что выполняются условия (3.131), (3.132), и, кроме того,

$$\boldsymbol{v} \in L^8(0, T; \boldsymbol{L}^4(\Omega)). \tag{3.133}$$

Согласно теоремам 3.1, 3.2, 3.4 и 3.7, мы знаем о существовании, но не о единственности слабых решений и знаем о единственности, но не о существовании сильных решений (за исключением отдельных весьма частных случаев).

Заметим, что слабые решения из теоремы 3.1 удовлетворяют энергетическому неравенству (3.47) (см. замечание 3.2):

$$|\boldsymbol{u}(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|\boldsymbol{u}(s)\|^2 \, ds \leqslant |\boldsymbol{u}_0|^2 + 2 \int_0^t \langle \boldsymbol{f}(s), \boldsymbol{u}(s) \rangle \, ds \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.134}$$

В силу теоремы 3.4, включения (3.78) и леммы 1.2, сильные решения (если они существуют) удовлетворяют вместо (3.134) энергетическому равенству

$$|\boldsymbol{v}(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|\boldsymbol{v}(s)\|^2 ds \leqslant |\boldsymbol{u}_0|^2 + 2\int_0^t \langle \boldsymbol{f}(s), \boldsymbol{v}(s)\rangle ds$$

$$\forall t \in [0, T]. \tag{3.135}$$

Вопросы о единственности слабых решений и о существовании сильных решений связаны между собой следующим образом.

Теорема 3.8. *Пусть* $n=3$, *и пусть*

$$\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; H), \quad \boldsymbol{u}_0 \in H. \tag{3.136}$$

Если существует решение $\boldsymbol{v}$ *задачи* (3.13), (3.14), *удовлетворяющее* (3.131), (3.133) *(т. е. сильное решение), то не существует никакого другого решения* $\boldsymbol{u}$ *этой задачи, удовлетворяющего* (3.131), (3.132) *и* (3.134) *(т. е. слабого решения, удовлетворяющего энергетическому неравенству).*

Этот результат был доказан Дж. Сэзером и Дж. Серрином (см. Серрин [3]).

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — два решения, о которых говорится в формулировке теоремы; $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет (3.134), $\boldsymbol{v}$ удовлетворяет (3.135). В приводимой ниже лемме мы покажем, что

$$(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) + 2\nu \int_0^t ((\boldsymbol{u}(s), v(s)))\, ds = |u_0|^2$$
$$+ \int_0^t \langle \boldsymbol{f}(s), \boldsymbol{u}(s) + \boldsymbol{v}(s)\rangle ds - \int_0^t b(\boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{v}(s))\, ds, \tag{3.137}$$

где $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$. Сложим (3.134) и (3.135) и вычтем удвоенное (3.137) из получившегося неравенства. После некоторых преобразований придем к неравенству

$$|w(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|\boldsymbol{w}(s)\|^2 ds \leqslant 2 \int_0^t b(\boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{v}(s))\, ds. \tag{3.138}$$

В гл. II, используя неравенство Гёльдера, мы вывели оценку

$$|b(\boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{v}(s))| \leqslant c_1 \|w(s)\|_{L^4(\Omega)} \|\boldsymbol{w}(s)\| \|\boldsymbol{v}(s)\|_{L^4(\Omega)}.$$

В силу леммы 3.5, мы можем оценить выражение справа величиной

$$c_2 |\boldsymbol{w}(s)|^{1/4} \|\boldsymbol{w}(s)\|^{7/4} \|\boldsymbol{v}(s)\|_{L^4(\Omega)} \leqslant \nu \|\boldsymbol{w}(s)\|^2$$
$$+ c_3 |\boldsymbol{w}(s)|^2 \|\boldsymbol{v}(s)\|^8_{L^4(\Omega)}.$$

Учитывая эту оценку, получаем из (3.138)

$$|\boldsymbol{w}(t)|^2 \leqslant 2c_3 \int_0^t |\boldsymbol{w}(s)|^2 \|\boldsymbol{v}(s)\|^8_{L^4(\Omega)} \,\mathrm{d}x.$$

Так как функция $t \mapsto \sigma(t) = 2c_3 \|\boldsymbol{v}(t)\|^8_{L^4(\Omega)}$ интегрируема ($\boldsymbol{v}$ удовлетворяет (3.133)), то неравенство Гронуолла дает

$$|\boldsymbol{w}(t)|^2 \leqslant \int_0^t \sigma(s) |\boldsymbol{w}(s)|^2 \,\mathrm{d}s \leqslant 0.$$

Таким образом, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = 0$. □

Остается доказать (3.137).

Лемма 3.6. *Для* $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{v}$ *из теоремы* 3.9 *выполняется равенство* (3.137).

Доказательство. Пусть $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ — некоторая регуляризующая функция, удовлетворяющая условиям $\rho \geqslant 0$, $\rho(-t) = \rho(t)$, $\rho(t) = 0$ при $|t| \geqslant 1$ и $\int_{\mathbb{R}} \rho(t)\,\mathrm{d}t = 1$; пусть, далее, ρ_ε определяется равенством $\rho_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)\rho(t/\varepsilon)$. Всякой функции $\boldsymbol{w}$, определенной на $[0, T]$, поставим в соответствие функцию $\tilde{\boldsymbol{w}}$ на $\mathbb{R}$, равную $\boldsymbol{w}$ на $[0, T]$ и 0 вне этого интервала. Используя (3.18), запишем

$$\boldsymbol{u}' + \nu A\boldsymbol{u} + B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \text{ на }]0, T[, \tag{3.139}$$

$$\boldsymbol{v}' + \nu A\boldsymbol{v} + B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} \text{ на }]0, T[. \tag{3.140}$$

После регуляризации получаем из (3.139)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{\boldsymbol{u}} * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon) = (\tilde{\boldsymbol{f}} - B\tilde{\boldsymbol{u}} - \nu A\tilde{\boldsymbol{u}}) * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon \text{ на }]\varepsilon, T-\varepsilon[. \tag{3.141}$$

Из (3.139) и (3.141) следует, что на $]\varepsilon, T-\varepsilon[$ выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{u}} * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon) = \langle \boldsymbol{v}'\, \tilde{\boldsymbol{u}} * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{u}}' * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon \rangle$$
$$= \langle \boldsymbol{f} - \nu A\boldsymbol{v} - B\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{u}} * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon \rangle + \langle \boldsymbol{v}, (\tilde{\boldsymbol{f}} - B\tilde{\boldsymbol{u}} - \nu A\tilde{\boldsymbol{u}}) * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon \rangle.$$

Так как функция ρ_ε четная, имеем также

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_\varepsilon) = \langle \boldsymbol{f} - \nu A\boldsymbol{v} - B\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_\varepsilon \rangle + \langle \boldsymbol{v}_\varepsilon, \boldsymbol{f} - B\boldsymbol{u} - \nu A\boldsymbol{u} \rangle, \tag{3.142}$$

где $\boldsymbol{u}_\varepsilon = \tilde{\boldsymbol{u}} * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon$, $\boldsymbol{v}_\varepsilon = \tilde{\boldsymbol{v}} * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon$.

Теперь проинтегрируем (3.142) от s до t, $\varepsilon < s < t < T - \varepsilon$; получим

$$(\boldsymbol{v}(t),\ \boldsymbol{u}_\varepsilon(t))-(\boldsymbol{v}(s),\ \boldsymbol{u}_\varepsilon(s))=\int_0^t \langle \boldsymbol{f}(\sigma),\ \boldsymbol{u}_\varepsilon(\sigma)+\boldsymbol{v}_\varepsilon(\sigma)\rangle\, d\sigma$$
$$-\nu\int_s^t \{((\boldsymbol{v}(\sigma),\ \boldsymbol{u}_\varepsilon(\sigma)))+((\boldsymbol{v}_\varepsilon(\sigma),\ \boldsymbol{u}(\sigma)))\}\, d\sigma$$
$$-\int_s^t \{b(\boldsymbol{v}(\sigma),\boldsymbol{v}(\sigma),\boldsymbol{u}_\varepsilon(\sigma))+b(\boldsymbol{u}(\sigma),\boldsymbol{u}(\sigma),\boldsymbol{v}_\varepsilon(\sigma))\}\, d\sigma. \quad (3.143)$$

В силу (3.131), (3.132) и (3.133),

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_\varepsilon \to \boldsymbol{u} \text{ в } L^2_{\mathrm{loc}}(]0,T[;\ V) \text{ и } L^{8/3}_{\mathrm{loc}}(]0,T[;\ \boldsymbol{L}^4(\Omega)),\\ &\boldsymbol{v}_\varepsilon \to \boldsymbol{v} \text{ в } L^2_{\mathrm{loc}}(]0,T[;\ V) \text{ и } L^{8}_{\mathrm{loc}}(]0,T[;\ \boldsymbol{L}^4(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.144)$$

Теперь можно перейти к пределу в (3.143); мы видим, что для почти всех s и t, $0<s<t<T$,

$$(\boldsymbol{v}(t),\ \boldsymbol{u}(t))-(\boldsymbol{v}(s),\ \boldsymbol{u}(s))+2\nu\int_s^t ((\boldsymbol{u}(\sigma),\ \boldsymbol{v}(\sigma)))\, d\sigma$$
$$=\int_s^t \langle \boldsymbol{f}(\sigma),\ \boldsymbol{u}(\sigma)+\boldsymbol{v}(\sigma)\rangle\, d\sigma-\int_s^t \{b(\boldsymbol{v}(\sigma),\ \boldsymbol{v}(\sigma),\ \boldsymbol{u}(\sigma))$$
$$+b(\boldsymbol{u}(\sigma),\ \boldsymbol{u}(\sigma),\ \boldsymbol{v}(\sigma))\}\, d\sigma. \quad (3.145)$$

Поскольку функция $\boldsymbol{u}$ слабо непрерывна в H (теорема 3.1), а функция $\boldsymbol{v}$ сильно непрерывна в H (теорема 3.4), функция $t\mapsto(\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{v}(t))$ непрерывна и поэтому (3.145) имеет место для всех s и t, $0\leqslant s<t\leqslant T$. Полагая $s=0$ в (3.145), получаем в точности (3.137), если заметить, что $b(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u})+b(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=-b(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=b(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v})$. □

3.7. Использование специального базиса. Если Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$ ($n=2$, 3), то в качестве базиса в методе Галёркина (п. 3.2) можно использовать базис из собственных функций $\boldsymbol{w}_j$, введенный в гл. I, п. 2.6. Это позволит нам получить дополнительные априорные оценки решения и некоторые результаты о существовании регулярных решений, немного отличающиеся от приведенных в п. 3.5.

3.7.1. Предварительные результаты. Нам будут полезны следующие леммы.

Лемма 3.7. *Пусть Ω — ограниченная область класса $\mathscr{C}^2$ в $\mathbb{R}^n$ (n произвольно). Тогда $|A\boldsymbol{u}|$ является нормой в пространстве $V\cap \boldsymbol{H}^2(\Omega)$, эквивалентной норме, индуцированной из $\boldsymbol{H}^2(\Omega)$.*

Доказательство. Для $\boldsymbol{u}\in V$, $\boldsymbol{f}\in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ равенство $A\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}$ эквивалентно равенству

$$((\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{v})\quad \forall \boldsymbol{v}\in V. \quad (3.146)$$

Рассматривая (3.146) как линейную задачу Стокса и применяя предложение I.2.2, получаем $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_0 |f| = c_0 |Au|$. Обратное неравенство тривиально. □

Лемма 3.8. *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=2, 3$) ограничена и принадлежит классу $\mathscr{C}^2$. Если $u \in V \cap H^2(\Omega)$, то $Bu \in H \subset L^2(\Omega)$ и*

$$|Bu| \leqslant c_1 |u|^{1/2} \|u\| \cdot |Au|^{1/2} \quad \text{для } n=2, \tag{3.147}$$

$$|Bu| \leqslant c_2 \|u\|^{3/2} |Au|^{1/2} \quad \text{для } n=3. \tag{3.148}$$

Доказательство. В случае $n=2$ применяем неравенство Гёльдера с показателями 4, 4, 2:

$$\left| \int_\Omega u_i (D_i u_j) v_j \, dx \right| \leqslant |u_i|_{L^4(\Omega)} |D_i u_j|_{L^4(\Omega)} |v_j|_{L^2(\Omega)}.$$

В силу (3.48)[1], правая часть ограничена величиной

$$c_3 |u_i|^{1/2} |\operatorname{grad} u_i| |\operatorname{grad} D_i u_j|^{1/2} |v_j|,$$

откуда $|b(u, u, v)| \leqslant c_4 |u|^{1/2} \|u\| \|u\|^{1/2}_{H^2(\Omega)} |v|$. Привлекая лемму 3.7, получаем (3.147). В случае $n=3$ применяем неравенство Гёльдера с показателями 6, 4, 12 и 2:

$$\left| \int_\Omega u_i (D_i u_j) v_j \, dx \right| \leqslant \int_\Omega |u_i| |D_i u_j|^{1/2} |D_i u_j|^{1/2} |v_j| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant |u_i|_{L^6(\Omega)} |D_i u_j|^{1/2}_{L^2(\Omega)} |D_i u_j|^{1/2}_{L^6(\Omega)} |v_j|_{L^2(\Omega)}.$$

Согласно теоремам вложения Соболева, это не превосходит

$$c_5 |u_i|^{3/2}_{H^1(\Omega)} |D_i u_j|^{1/2}_{H^1(\Omega)} |v_j|_{L^2(\Omega)},$$

откуда $|b(u, u, v)| \leqslant c_6 \|u\|^{3/2} \|u\|^{1/2}_{H^2(\Omega)} |v|$, чем (3.148) и доказано. □

3.7.2. Двумерный случай.

Теорема 3.10. *Предположим, что Ω — ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^2$ класса $\mathscr{C}^2$. Пусть заданы f и u_0, такие что*

$$u_0 \in H, \tag{3.149}$$

$$f \in L^2(0, T; H). \tag{3.150}$$

Тогда у задачи 3.2 существует единственное решение, которое удовлетворяет, кроме того, следующим условиям:

$$\sqrt{t}\, u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; V),$$

$$\sqrt{t}\, u' \in L^2(0, T; H). \tag{3.151}$$

---

[1] Неравенство (3.48), установленное для $v \in H_0^1(\Omega)$, верно также для $v \in H^1(\Omega)$; коэффициент $2^{1/4}$ заменяется при этом некоторой константой $c = c(\Omega)$ (см. Лионс и Мадженес [1]).

Если $u_0 \in V$, *то*

$$u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; V), \quad u' \in L^2(0, T; H). \tag{3.152}$$

Доказательство. Начнем со случая $u_0 \in V$. Рассмотрим опять галёркинское приближение, использовавшееся при доказательстве теоремы 3.1. Функции w_j возьмем на этот раз те же, что и в гл. I, п. 2.6, и предположим, что $u_{0m} \in \mathrm{Sp}[w_1, \ldots, w_n]$[1] выбраны так, что $u_{0m} \to u_0$ сильно в V при $m \to \infty$. Соотношение (3.22) можно записать в виде

$$(u_m', w_j) + (\nu A u_m + B u_m, w_j) = (f, w_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{3.153}$$

В силу (I.2.64),

$$((w_j, v)) = (A w_j, v) = \lambda_j (w_j, v) \quad \forall v \in V. \tag{3.154}$$

Поэтому мы можем переписать (3.153) (после умножения на λ_j) в виде

$$((u_m', w_j)) + \nu ((A u_m, A w_j) + (B u_m, A w_j) = (f, A w_j).$$

Умножая это равенство на g_j (см. (3.21)) и суммируя по $j = 1, \ldots, m$, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_m \|^2 + \nu | A u_m |^2 + (B u_m, A u_m) = (f, A u_m). \tag{3.155}$$

Из леммы 3.8 выводим, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_m \|^2 + \nu | A u_m |^2 \leqslant |f| \, | A u_m | + c_1 | u_m |^{1/2} \| u_m \| \, | A u_m |^{3/2} \leqslant \frac{\nu}{4} | A u_m |^2 + \frac{1}{\nu} |f|^2 + \frac{\nu}{4} | A u_m |^2 + c_7 | u_m |^2 \| u_m \|^4.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \| u_m \|^2 + \nu | A u_m |^2 \leqslant \frac{2}{\nu} |f|^2 + 2 c_7 | u_m |^2 \| u_m \|^4. \tag{3.156}$$

В частности, полагая $\sigma_m(t) = 2 c_7 | u_m(t) |^2 \| u_m(t) \|^2$, получаем $(d/dt) \| u_m \|^2 \leqslant (2/\nu) |f|^2 + \sigma_m \| u_m \|^2$. В силу оценок (3.30), (3.31), $\int_0^T \sigma_m(t)\, dt \leqslant \mathrm{const} = c_8$. На основании леммы Гронуолла и (3.153) заключаем, что

$$\text{последовательность } u_m \text{ ограничена в } L^\infty(0, T; V). \tag{3.157}$$

---

[1] Sp обозначает взятие линейной оболочки (от английского span).— *Прим. ред.*

Возвращаясь к (3.156), имеем теперь

$$\|u_m(T)\|^2+\nu\int_0^T |Au_m|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \|u_{0m}\|^2+\frac{2}{\nu}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t + 2c_7\int_0^T |u_m|^2\|u_m\|^4\,\mathrm{d}t;$$

таким образом, в силу (3.157) и леммы 3.7,

последовательность u_m ограничена в $L^2(0, T; H^2(\Omega))$. (3.158)

Отсюда легко следует, что последовательность u_m сходится к некоторому u, причем $u\in L^\infty(0, T; V)\cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$. Из леммы 3.8 вытекает, что $Bu\in L^4(0, T; H)$; с другой стороны, $Au\in L^2(0, T; H)$ и, вследствие (3.18), $u'=f-Bu-\nu Au\in L^2(0, T; H)$. Тем самым для случая $u_0\in V$ теорема доказана. В случае $u_0\in H$ мы умножим (3.156) на t:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\|u_m\|^2)+\nu t|Au_m|^2\leqslant\|u_m\|^2+\frac{2t}{\nu}|f|+t\sigma_m\|u_m\|^2,$$

и получим, что последовательность $\sqrt{t}\,u_m$ ограничена в $L^\infty(0, T; V)$ и в $L^2(0, T; H^2(\Omega))$. Предельный переход при $m\to\infty$ дает первое включение (3.151); включение $\sqrt{t}\,u'\in L^2(0, T; H)$ устанавливается аналогично: в силу (3.147), $\sqrt{t}\,u'=\sqrt{t}(f-Bu-\nu Au)$, очевидно, принадлежит $L^2(0, T; H)$. □

3.7.3. Трехмерный случай.

Теорема 3.11. *Пусть Ω — ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^3$ класса $\mathscr{C}^2$. Пусть заданные функции u_0 и f удовлетворяют условиям*

$$u_0\in V,\quad f\in L^\infty(0, T; H). \tag{3.159}$$

Тогда можно указать такое T_*, что на интервале $(0, T_*)$ существует единственное решение u задачи 3.2; а именно, $T_*=\min(T, T_1)$, где

$$T_1=3/4c_9\mu^2, \tag{3.160}$$

$$\mu=4\max(\|u_0\|^2,\ 2N(f)^2/c_{10}\nu^2),\quad N(f)=|f|_{L^\infty(0, T; H)} \tag{3.161}$$

Кроме того,

$$u\in L^\infty(0, T_*; V)\cap L^2(0, T_*; H^2(\Omega)), \tag{3.162}$$

$$u'\in L^2(0, T_*; H). \tag{3.163}$$

Доказательство. Поступаем так же, как при доказательстве теоремы 3.10, вплоть до уравнения (3.155). Применяя лемму 3.8, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}_m\|^2+\nu|A\boldsymbol{u}_m|^2 \leqslant |\boldsymbol{f}||A\boldsymbol{u}_m|+c^2\|\boldsymbol{u}_m\|^{3/2}|A\boldsymbol{u}_m|^{3/2} \leqslant \frac{\nu}{4}|A\boldsymbol{u}_m|^2+\frac{1}{\nu}|\boldsymbol{f}|^2+\frac{\nu}{4}|A\boldsymbol{u}_m|^2+c_9\|\boldsymbol{u}_m\|^6.$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}_m\|^2+\nu|A\boldsymbol{u}_m|^2 \leqslant \frac{2}{\nu}|\boldsymbol{f}|^2+2c_9\|\boldsymbol{u}_m\|^6. \tag{3.164}$$

Согласно лемме 3.7, $|A\boldsymbol{v}|\geqslant c_{10}\|\boldsymbol{v}\|$ и поэтому

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}_m\|^2+c_{10}\nu\|\boldsymbol{u}_m\|^2 \leqslant \frac{2}{\nu}N(\boldsymbol{f})+2c_9\|\boldsymbol{u}_m\|^6. \tag{3.165}$$

Теперь мы утверждаем, что

$$\|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2 \leqslant \mu, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_1, \tag{3.166}$$

при условии что $\|\boldsymbol{u}_{0m}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}_0\|$; это условие выполняется, например, если $\boldsymbol{u}_{0m}=P_m\boldsymbol{u}_0$ (проекция $\boldsymbol{u}_0$ (в V или в H) на подпространство, натянутое на $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$). В самом деле, пусть $z=\max(\mu/2, \|\boldsymbol{u}_m\|^2)$. Тогда, согласно одному хорошо известному результату Стампаккьи [1], функция z почти всюду дифференцируема и $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=0$, если $\|\boldsymbol{u}_m\|^2 \leqslant \mu/2$, и $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\|\boldsymbol{u}_m\|^2$ в противном случае. Следовательно, $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t \leqslant 2c_9z^3$, $z(0)=\mu/2$, так что $1/\mu^2 \leqslant 4(1-c_9t\mu^2)/\mu^2 \leqslant 1/z^2$ для $t \leqslant T_1$. Мы заключаем, что последовательность $\boldsymbol{u}_m$ ограничена в $L^\infty(0, T_*; V)$, а значит, как и выше, в $L^2(0, T_*; \boldsymbol{H}^2(\Omega))$. Также и последовательность $\boldsymbol{u}_m'$ ограничена в $L^2(0, T_*; H)$. Предельная функция $\boldsymbol{u}$ является единственным решением задачи 3.2 на $[0, T_*]$. □

Замечание 3.9. Рассуждая непосредственно или переходя к нижнему пределу в (3.156), (3.164), можно показать, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|^2+\nu|A\boldsymbol{u}|^2 \leqslant \frac{2}{\nu}|\boldsymbol{f}|^2+2c_7|\boldsymbol{u}|^2\|\boldsymbol{u}\|^4 \quad (n=2,\ 0<t<T), \tag{3.167}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|^2+\nu|A\boldsymbol{u}|^2 \leqslant \frac{2}{\nu}|\boldsymbol{f}|^2+2c_9\|\boldsymbol{u}\|^6 \quad (n=3,\ 0<t<T_*). \tag{3.168}$$

3.8. Частный случай $\boldsymbol{f}=0$. Мы хотим показать, что для $\boldsymbol{f}=0$ течение стремится к состоянию покоя при $t\to\infty$.

Теорема 3.12. *Предположим, что Ω — ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^n$ ($n=2, 3$) класса $\mathscr{C}^2$, $\boldsymbol{u}_0\in V$, а $\boldsymbol{f}=0$. Если $n=2$, то $\boldsymbol{u}$ принадлежит $L^\infty(0, \infty; V)$ и стремится к 0 в V при $t\to\infty$. Если $n=3$, то $\boldsymbol{u}$ принадлежит $L^\infty(0, T_2; V)\cap L^\infty(T_3, \infty; V)$ для некоторых T_2 и T_3 ($0<T_2\leqslant T_3$), оцениваемых снизу, и стремится к 0 в V при $t\to+\infty$.*

Доказательство. Пусть u — некоторое решение задачи 3.2, даваемое теоремой 3.1 (*единственное* при $n=2$). В силу (3.47),

$$|u(t)|^2+2\nu\int_0^t \|u(s)\|^2\,\mathrm{d}s \leqslant |u_0|^2 \quad \forall t>0, \tag{3.169}$$

и из (3.167), (3.168) следует, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+c_{10}\nu\|u\|^2 \leqslant c_{11}\|u\|^{2n}, \tag{3.170}$$

где $c_{11}=2c_7|u_0|^2$ для $n=2$ и $c_{11}=2c_9$ для $n=3$.

Если для некоторого t_1 мы имеем $u(t_1)\in V$ и норма $\|u(t_1)\|$ настолько мала, что

$$\|u(t_1)\|^{2(n-1)} \leqslant \nu c_{10}/2c_{11}, \tag{3.171}$$

то $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\|u(t_1)\|^2+(\nu c_{10}/2)\|u(t_1)\|^2\leqslant 0$, так что после момента t_1 норма $\|u(t)\|$ будет убывать; более того, (3.171) остается верным для любого $t\geqslant t_1$, $u\in L^\infty(t_1,\infty;V)$ и $\|u(t)\|\to 0$ экспоненциально при $t\to+\infty$. Существование t_1, для которого выполняется (3.171), вытекает из (3.169). Действительно, в противном случае мы должны были бы иметь $|u_0|^2\geqslant 2\nu t_1(\nu c_{10}/2c_{11})^{1/(n-1)}$, а это невозможно для достаточно больших t_1.

В случае $n=3$ мы можем в качестве T_2 взять T_1 из теоремы 3.11. Или можно рассуждать непосредственно: $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\|u\|^2\leqslant$ $\leqslant c_{11}\|u\|^6$ дает $\|u(t)\|\leqslant\|u_0\|/(1-2c_{11}t\|u_0\|^4)^{1/4}$ для $t<T_2=$ $=(2c_{11}\|u_0\|^4)^{-1}$. □

§ 4. Другое доказательство существования (с помощью полудискретизации)

Теперь мы приведем другое доказательство существования слабых решений для уравнений Навье — Стокса, пригодное для любой размерности пространства. С помощью полудискретизации по времени строится приближенное решение, а затем производится переход к пределу, с использованием соображений компактности.

В п. 4.1 мы переформулируем задачу в виде, подходящем для любой размерности, и сформулируем результаты о существовании; в п. 4.2. описано построение приближенного решения; пп. 4.3 и 4.4 посвящены априорным оценкам и предельному переходу.

4.1. Формулировка задачи. Прежде чем приводить теорему существования для более высоких размерностей, мы должны переформулировать задачу о слабых решениях. Как и в стационарном случае, при $n>4$ форма b не является непрерывной трилинейной формой на V и формулировки типа (3.10) — (3.14) не имеют смысла, поскольку член $b(u(t),\ u(t),\ v)$ в (3.13) может быть не определен. Чтобы преодолеть это затруднение, мы снова введем (см. гл. II, п. 1.2) пространства V_s:

$$V_s \text{ — замыкание } \mathcal{V} \text{ в } H_0^1(\Omega)\cap H^s(\Omega),\quad s\geqslant 1. \tag{4.1}$$

Пространства $H_0^1(\Omega)\cap H^s(\Omega)$ и V_s снабжены обычной гильбертовой нормой из $H^s(\Omega)$:

$$\|u\|_{H^s(\Omega)}=\left\{\sum_{[j]\leqslant s}|D^j u|^2\right\}^{1/2}\quad (s \text{ — целое}). \tag{4.2}$$

Очевидно ($s\geqslant 1$),

$$V_s\subset V, \tag{4.3}$$

причем вложение непрерывно и V_s плотно в V.

Форма b определена на $V\times V\times V_s$, если $s\geqslant n/2$:

Лемма 4.1. *Форма b является непрерывной трилинейной формой на $V\times V\times V_s$ при $s\geqslant n/2$, и*

$$|b(u, v, w)|\leqslant c\,|u|\,\|v\|\,\|w\|_{V_s}.^{1} \tag{4.4}$$

Доказательство. Для u, v, $w\in\mathcal{V}$ имеем, в силу неравенства Гёльдера,

$$|b(u, v, w)|=|b(u, w, v)|$$
$$\leqslant\sum_{i,\,j=1}^{n}\|u_j\|_{L^2(\Omega)}\|D_i w_j\|_{L^n(\Omega)}\|v_j\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)}$$
$$\leqslant (\text{в силу вложения } H_0^1(\Omega)\subset L^{2n/(n-2)}(\Omega))$$
$$\leqslant c_0\,|u|\,\|v\|\sum_{i,\,j=1}^{n}\|D_i w_j\|_{L^n(\Omega)}.$$

Так как $s\geqslant n/2$, то $H^{s-1}(\Omega)$ вложено в $L^q(\Omega)$, где

$$1/q=1/2-(s-1)/n,\quad q\geqslant n. \tag{4.5}$$

Если $w\in V_s$, то $D_i w_j$ принадлежит $H^{s-1}(\Omega)$ и $L^q(\Omega)$. Поскольку $D_i w_j$ принадлежит $L^q(\Omega)\cap L^2(\Omega)$, то $D_i w_j\in L^n(\Omega)$ и $\|D_i w_j\|_{L^n(\Omega)}\leqslant$ $\leqslant c_1\|w\|_{V_s}$, так что

$$|b(u, v, w)|\leqslant c_2\,|u|\,\|v\|\,\|w\|_{V_s}, \tag{4.6}$$

Эта оценка показывает, что по непрерывности мы можем распространить форму b с $\mathcal{V}\times\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ на $V\times V\times V_s$ и даже на $H\times V\times V_s$, в силу (4.6). □

Лемма 4.2. *Если u принадлежит $L^2(0, T; V)\cap L^\infty(0, T; H)$, то Bu принадлежит $L^2(0, T; V_s')$ для $s\geqslant n/2$.*

Доказательство. Согласно определению B и оценке (4.4),

---

[1] Размерность — любая, область Ω может быть и неограниченной.

$|\langle Bu(t),\ v\rangle| = |b(u(t),\ u(t),\ v)| \leqslant c\,|u(t)|\,\|u(t)\|\,\|v\|_{V_s}\ \forall v \in V_s$, откуда

$$\|Bu(t)\|_{V_s'} \leqslant c\,|u(t)|\,\|u(t)\| \text{ для п.в. } t \in [0,\ T]. \quad \square$$

Для любой размерности пространства мы можем дать следующую слабую формулировку задачи Навье—Стокса.

Задача 4.1. Для заданных f и u_0:

$$f \in L^2(0,\ T;\ V'), \tag{4.7}$$

$$u_0 \in H, \tag{4.8}$$

найти функцию u, *удовлетворяющую условиям*

$$u \in L^2(0,\ T;\ V) \cap L^\infty(0,\ T;\ H), \tag{4.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u,\ v) + \nu((u,\ v)) + b(u,\ u,\ v) = \langle f,\ v\rangle\ \forall v \in V_s\ (s \geqslant n/2), \tag{4.10}$$

$$u(0) = u_0. \tag{4.11}$$

Если u удовлетворяет (4.9) и (4.10), то $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u,\ v\rangle = \langle g,\ v\rangle\ \forall v \in V_s$, где $g = f - Bu - \nu Au$. В силу леммы 4.2, Bu принадлежит $L^2(0,\ T;\ V_s')$, и поскольку $f - \nu Au$ принадлежит $L^2(0,\ T;\ V')$, то

$$g \in L^2(0,\ T;\ V_s'). \tag{4.12}$$

Из леммы 1.1 следует тогда, что

$$u' \in L^2(0,\ T;\ V_s'),\ v' = f - \nu Au - Bu, \tag{4.13}$$

поэтому u п.в. равняется некоторой непрерывной функции из $[0,\ T]$ в V_s' и (4.11) имеет смысл.

Другая формулировка задачи 4.1 выглядит следующим образом.

Задача 4.2. *Заданы* f *и* u_0, *удовлетворяющие* (4.7)—(4.8). *Найти* u, *такое что*

$$u \in L^2(0,\ T;\ V) \cap L^\infty(0,\ T;\ H),\ u' \in L^2(0,\ T;\ V_s')\ (s \geqslant n/2), \tag{4.14}$$

$$u' + \nu Au + Bu = f \text{ на } (0,\ T), \tag{4.15}$$

$$u(0) = u_0. \tag{4.16}$$

Формулировки (4.9)—(4.11) (4.14)—(4.16) эквивалентны.

Существование решений этих задач обеспечивается следующей теоремой, из которой следует, в частности, теорема 3.1.

Теорема 4.1. *Пусть заданы* f и u_0, *удовлетворяющие* (4.7)—(4.8). *Тогда существует по крайней мере одно решение* u *задачи* 4.2. *При этом* u *является слабо непрерывной функцией из* $[0,\ T]$ *в* H.

Эта теорема доказана в пп. 4.2 и 4.3; утверждение о слабой непрерывности непосредственно следует из (4.14) и леммы 1.4.

4.2. Приближенные решения. Пусть N — целое число, которое, в дальнейшем мы устремим к бесконечности, и пусть

$$k = T/N. \tag{4.17}$$

Сейчас мы рекурсивно определим семейство элементов из V, скажем $\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}^1, \ldots, \boldsymbol{u}^N$, такое что $\boldsymbol{u}^m$ будет в некотором смысле аппроксимировать искомую функцию $\boldsymbol{u}$ на интервале $mk < t < (m+1)k$.

Определим сперва следующие элементы $\boldsymbol{f}^1, \ldots, \boldsymbol{f}^N$ из V':

$$\boldsymbol{f}^m = \frac{1}{k} \int\limits_{(m-1)k}^{mk} \boldsymbol{f}(t)\,\mathrm{d}t, \quad m = 1, \ldots, N; \ \boldsymbol{f}^m \in V'. \tag{4.18}$$

Теперь положим

$$\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}_0 \text{ (заданные начальные данные)}. \tag{4.19}$$

Если $\boldsymbol{u}^0, \ldots, \boldsymbol{u}^{m-1}$ уже известны, то определяем $\boldsymbol{u}^m$ как элемент из V, удовлетворяющий соотношению

$$(\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1})/k + \nu A\boldsymbol{u}^m + B\boldsymbol{u}^m = \boldsymbol{f}^m; \tag{4.20}$$

$\boldsymbol{u}^m$ зависит от k, но для простоты записи мы обозначаем его через $\boldsymbol{u}^m$ вместо $\boldsymbol{u}_k^m$.

Существование такого $\boldsymbol{u}^m$ гарантируется леммой 4.3, доказательство которой мы отложим на конец этого пункта.

Лемма 4.3. *Для каждого фиксированного k и каждого $m \geqslant 1$ существует по крайней мере одно $\boldsymbol{u}^m$, удовлетворяющее* (4.20); *кроме того,*

$$|\boldsymbol{u}^m|^2 - |\boldsymbol{u}^{m-1}|^2 + |\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}|^2 + 2k\nu \|\boldsymbol{u}^m\|^2 \leqslant 2k \langle \boldsymbol{f}^m, \ \boldsymbol{u}^m \rangle. \tag{4.21}$$

Для каждого фиксированного k (или N) сопоставим элементам $\boldsymbol{u}^1, \ldots, \boldsymbol{u}^N$ следующие аппроксимирующие функции:

$$\boldsymbol{u}_k : [0, T] \to V, \ \boldsymbol{u}_k(t) = \boldsymbol{u}^m, \ t \in [(m-1)k, mk], \quad m = 1, \ldots, N; \tag{4.22}$$

$$\boldsymbol{w}_k : [0, T] \to H, \ \boldsymbol{w}_k \text{ — непрерывная функция, линейная на каждом интервале } [(m-1)k, mk], \text{ и } \boldsymbol{w}_k(mk) = \boldsymbol{u}^m, \ m = 0, \ldots, N. \tag{4.23}$$

В п. 4.3 мы получим априорные оценки для этих функций, а затем перейдем к пределу при $k \to 0$ (п. 4.4).

Доказательство леммы 4.3. Уравнение (4.20) должно рассматриваться в пространстве, более широком, чем V', например в пространстве V_s', $s \geqslant n/2$. Оно эквивалентно следующему уравнению:

$$(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) + k\nu((\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v})) + kb(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{u}^{m-1} + k\boldsymbol{f}^m, \boldsymbol{v} \rangle \quad \forall \boldsymbol{v} \in V_s. \tag{4.24}$$

Мы используем метод Галёркина, по существу точно так же, как в теореме II.1.2. Выберем какую-нибудь последовательность линейно-независимых элементов $w_1, \ldots, w_i, \ldots$ из V_s, тотальную в V_s, а поэтому и в V. Применяя лемму 1.4, получаем, что для каждого r существует такой элемент φ_r (зависящий от r, k, m), что

$$\varphi_r = \sum_{i=1}^{r} \xi_{i,r} w_i, \tag{4.25}$$

$$(\varphi_r, v) + k\nu((\varphi_r, v)) + kb(\varphi_r, \varphi_r, v) = \langle u^{m-1} + kf^m, v\rangle \; \forall v \in \mathrm{Sp}(w_1, \ldots, w_r). \tag{4.26}$$

Теперь нам надо получить не зависящие от r априорные оценки и перейти к пределу при $r \to \infty$ (k и m фиксированы). Беря $v = \varphi_r$ в (4.26), приходим к равенству

$$(\varphi_r - u^{m-1}, \varphi_r) + k\nu \|\varphi_r\|^2 = k\langle f^m, \varphi_r\rangle. \tag{4.27}$$

Далее,

$$2(a-b, a) = |a|^2 - |b|^2 - |a-b|^2 \; \forall a, b \in H, \tag{4.28}$$

поэтому из (4.27) следует, что

$$\begin{aligned} &|\varphi_r|^2 + |\varphi_r - u^{m-1}|^2 - 2k\nu\|\varphi_r\|^2 = |u^{m-1}|^2 + 2k\langle f^m, \varphi_r\rangle \\ &\leqslant |u^{m-1}|^2 + 2k\|f^m\|_{V'} |\varphi_r| \\ &\leqslant |u^{m-1}|^2 + \nu k\|\varphi_r\|^2 + (k/\nu)\|f^m\|^2_{V'}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Отсюда

$$|\varphi_r|^2 + |\varphi_r - u^{m-1}|^2 + k\nu\|\varphi_r\|^2 \leqslant |u^{m-1}|^2 + (k/\nu)\|f^m\|^2_{V'}. \tag{4.30}$$

Неравенство (4.30) показывает, что последовательность φ_r ограничена в V. Поэтому мы можем извлечь из нее подпоследовательность $\varphi_{r'}$, такую что

$$\varphi_{r'} \to \varphi \text{ слабо в } V \text{ при } r' \to \infty. \tag{4.31}$$

Используя стандартные рассуждения, переходим затем к пределу в (4.26) и доказываем, что $\varphi = u^m$ удовлетворяет (4.24).

Остается установить (4.21). Это было бы очевидным, если бы мы могли положить $v = u^m$ в (4.24); поскольку, вообще говоря, $u_m \notin V_s$, мы поступим иначе, а именно перейдем к нижнему пределу в (4.29) (заметим, что норма полунепрерывна снизу в слабой топологии): $|\varphi|^2 \leqslant \varliminf_{r' \to \infty} |\varphi_{r'}|^2$, $\|\varphi\|^2 \leqslant \varliminf_{r' \to \infty} \|\varphi_{r'}\|^2$. □

4.3. Априорные оценки.

Лемма 4.4. $|u^m|^2 \leqslant d_1, \quad m=1, \ldots, N;$ (4.32)

$$k \sum_{m=1}^{N} \|u^m\|^2 \leqslant \frac{1}{\nu} d_1, \tag{4.33}$$

$$\sum_{m=1}^{N} |u^m - u^{m-1}|^2 \leqslant d_1, \tag{4.34}$$

где d_1 *зависит только от данных:*

$$d_1 = |u_0|^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^T \|f(s)\|_{V'}^2 \, ds. \tag{4.35}$$

Доказательство. Как уже отмечалось в доказательстве леммы 4.3, мы не можем скалярно умножить (4.20) на u^m, по крайней мере для $n > 4$ ($Bu^m \notin V'$). Роль уравнения, которое мы получили бы после этой процедуры, будет для нас играть (4.21).

Оценивая правую часть неравенства (4.21) величиной $2k\|f^m\|_{V'}\|u^m\| \leqslant k\nu\|u^m\|^2 + (k/\nu)\|f^m\|_{V'}^2$, получаем

$$|u^m|^2 - |u^{m-1}|^2 + |u^m - u^{m-1}|^2 + k\nu\|u^m\|^2 \leqslant \frac{k}{\nu}\|f^m\|_{V'}^2, \tag{4.36}$$

$m=1, \ldots, N$. Суммируя неравенства (4.36) для $m=1, \ldots, N$, находим

$$|u^N|^2 + \sum_{m=1}^{N} |u^m - u^{m-1}|^2 + \nu k \sum_{m=1}^{N} \|u^m\|^2 \leqslant |u_0|^2 + \frac{k}{\nu} \sum_{m=1}^{N} \|f^m\|_{V'}^2. \tag{4.37}$$

Суммируя неравенства (4.36) для $m=1, \ldots, r$ и отбрасывая члены вида $\|u^m\|^2$, получаем

$$|u^r|^2 \leqslant |u_0|^2 + \frac{k}{\nu} \sum_{m=1}^{r} \|f^m\|_{V'}^2 \leqslant |u_0|^2 + \frac{k}{\nu} \sum_{m=1}^{N} \|f^m\|_{V'}^2, \tag{4.38}$$

$r=1, \ldots, N$. Лемма вытекает теперь из (4.37)—(4.38) и оценок правых частей этих неравенств, даваемых следующей леммой. □

Лемма 4.5. *Пусть* f^m *определено формулой* (4.18). *Тогда*

$$k \sum_{m=1}^{N} \|f^m\|_{V'}^2 \leqslant \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \, dt. \tag{4.39}$$

Доказательство. В силу неравенства Шварца,

$$\|f^m\|^2_{V'} = \frac{1}{k^2}\left\| \int\limits_{(m-1)k}^{mk} f(t)\,dt \right\|^2_{V'} \leqslant \frac{1}{k} \int\limits_{(m-1)k}^{mk} \|f(t)\|^2\,dt.$$

Суммируя эти неравенства по $m = 1, \ldots, N$, приходим к (4.39). □

Получим последнюю априорную оценку:

Лемма 4.6. *Сумма* $k \sum\limits_{m=1}^{N} \left\| \frac{u^m - u^{m-1}}{k} \right\|^2_{V'}$ *ограничена равномерно по* k.

Доказательство. Из (4.20) вытекает, что

$$\left\| \frac{u^m - u^{m-1}}{k} \right\|_{V'_s} \leqslant \|f^m\|_{V'_s} + \nu \|Au^m\|_{V'_s} + \|Bu^m\|_{V'_s}$$
$$\leqslant c_1 \{\|f^m\|_{V'} + \|u^m\|_V\} + \|Bu^m\|_{V'_s},$$

$$\left\| \frac{u^m - u^{m-1}}{k} \right\|^2_{V'_s} \leqslant c_2 \{\|f^m\|^2_{V'} + \|u^m\|^2_V + \|Bu^m\|^2_{V'_s}\}.$$

В силу (4.4) и (4.32), $\|Bu^m\|^2_{V'_s} \leqslant c_3 |u^m|^2 \|u^m\|^2 \leqslant c_4 \|u^m\|^2$.

Следовательно,

$$k \sum_{m=1}^{N} \left\| \frac{u^m - u^{m-1}}{k} \right\|^2_{V'_s} \leqslant c_5 k \sum_{m=1}^{N} (\|f^m\|^2_{V'} + \|u^m\|^2).$$

Применение оценки (4.33) и леммы 4.5 завершает доказательство. □

Представляет интерес проинтерпретировать изложенное выше в терминах аппроксимирующих функций:

Лемма 3.7. *Последовательности* u_k *и* w_k *ограничены в* $L^2(0, T; V) \cap \cap L^\infty(0, T; H)$, *последовательность* w_k' *ограничена в* $L^2(0, T; V'_s)$ *и*

$$u_k - w_k \to 0 \text{ в } L^2(0, T; H) \text{ при } k \to \infty. \tag{4.40}$$

Доказательство. Оценки для u_k и w_k — это просто другая интерпретация оценок (4.32)—(4.33) и леммы 4.6; (4.40) следует из (4.34) и приводимой ниже леммы. □

Лемма 4.8. $|u_k - w_k|_{L^2(0, T; H)} = \sqrt{\frac{k}{3}} \left(\sum\limits_{m=1}^{N} |u^m - u^{m-1}|^2 \right)^{1/2}$. (4.41)

Доказательство. Имеем

$$w_k(t) - u_k(t) = \frac{(t - mk)}{k}(u^m - u^{m-1}) \text{ для } (m-1)k \leqslant t \leqslant mk,$$

$$\int\limits_{(m-1)k}^{mk} |w_k(t) - u_k(t)|^2\,dt = \frac{k}{3} |u^m - u^{m-1}|^2.$$

Суммируя, получаем (4.41). □

4.4. Предельный переход. Согласно лемме 4.7, мы можем извлечь из u_k подпоследовательность $u_{k'}$, такую что

$$u_{k'} \to u \text{ слабо в } L^2(0, T; V) \text{ и } *\text{-слабо в } L^\infty(0, T; H). \tag{4.42}$$

Мы хотим показать, что u является решением задачи (4.14) — (4.16); для того чтобы перейти к пределу в (4.20), нам необходим результат о сильной сходимости u_k. Функции w_k будут играть полезную вспомогательную роль.

Мы можем выбрать подпоследовательность k', такую что[1]

$$w_{k'} \to u_* \text{ слабо в } L^2(0, T; V) \text{ и } *\text{-слабо в } L^\infty(0, T; H), \tag{4.43}$$

$$\frac{dw_{k'}}{dt} \to u_*' \text{ слабо в } L^2(0, T; V_s'). \tag{4.44}$$

В силу (4.40), $u = u_*$. Из теоремы 2.1 следует, что

$$w_{k'} \to u \text{ в } L^2(0, T; H); \tag{4.45}$$

поэтому, снова в силу (4.40),

$$u_{k'} \to u \text{ в } L^2(0, T; H). \tag{4.46}$$

Уравнения (4.20) могут быть интерпретированы так:

$$\frac{dw_k}{dt} + Au_k + Bu_k = f_k, \tag{4.47}$$

где

$$f_k(t) = f^m, \quad (m-1)k \leqslant t < mk, \quad m = 1, \ldots, N.$$

Вследствие (4.42), (4.46) и лемм 3.2 и 4.2 $Bu_{k'} \to Bu$ слабо в $L^2(0, T; V_s')$. Согласно приводимой ниже лемме 4.9, $f_k \to f$ в $L^2(0, T; V')$; поэтому мы можем перейти к пределу в (4.47). Получим $u' + \nu Au + Bu = f$. Из (4.43), (4.44) и леммы 4.1 вытекает, что

$$\langle w_{k'}(t), \sigma\rangle \to \langle u(t), \sigma\rangle \quad \forall \sigma \in V' \; \forall t \in [0, T].$$

Поскольку $w_{k'}(0) = u_0$, получаем $u(0) = u_0$.

Мы показали, что u удовлетворяет (4.14)—(4.16). Итак, доказательство теоремы 4.1 будет завершено, как только мы докажем следующую лемму.

Лемма 4.9. *$f_k \to f$ в $L^2(0, T; V')$ при $k \to 0$.* (4.48)

Доказательство. Заметим, что отображение $f \mapsto f_k$ является линейным усреднением в $L^2(0, T; V')$; это отображение непрерывно

---

[1] Строго говоря, если $u_0 \in V$, то $w_k(t) \in V$ для $0 \leqslant t \leqslant k$; в этом случае мы просто заменяем $L^2(0, T; V)$ на $L^2_{loc}([0, T]; V)$ всюду, где появляются функции w_k.

по лемме 4.5, и это позволяет нам заключить, что

$$\|f_k\|_{L^2(0,\,T;\,V')} \leqslant \|f\|_{L^2(0,\,T;\,V')}. \tag{4.49}$$

Поэтому достаточно доказать (4.48) лишь для f из некоторого плотного подпространства в $L^2(0, T; V')$; для f из $\mathscr{C}([0, T]; V')$ этот результат элементарен, и мы опустим его доказательство. □

Замечание 4.1. Суммируя равенства (4.21) для $m=1, \ldots, r$ и отбрасывая члены $|u^m-u^{m-1}|^2$, получаем

$$|u^r|^2+2k\nu\sum_{m=1}^{r}\|u^m\|^2 \leqslant |u_0|^2+2k\sum_{m=1}^{r}\langle f^m, u^m\rangle. \tag{4.50}$$

Это неравенство можно интерпретировать так:

$$|u_k(t)|^2+2\nu\int_0^{t_k}\|u_k(s)\|^2\,ds \leqslant |u_0|^2+\int_0^{t_k}\langle f_k(s), u_k(s)\rangle\,ds, \tag{4.51}$$

где

$$t_k=(m+1)k \text{ для } mk \leqslant t < (m+1)k. \tag{4.52}$$

Для каждого фиксированного t значения $u_k(t)$ ограничены в H равномерно по k; при $k' \to 0$ последовательность $u_{k'}(t)$ слабо сходится к $u(t)$ в V'; поэтому[1]

$$u_{k'}(t) \to u(t) \text{ слабо в } H \text{ при } k' \to 0 \ \forall t \in [0, T]. \tag{4.53}$$

Затем мы переходим к нижнему пределу в (4.51) (t фиксировано, $k' \to 0$), используя (4.42) и (4.53). Это приводит к следующему *энергетическому неравенству*:

$$|u(t)|^2+2\nu\int_0^t\|u(s)\|^2\,ds \leqslant |u_0|^2+2\int_0^t\langle f(s), u(s)\rangle\,ds, \ \forall t \in [0, T]. \tag{4.54}$$

В случае $n=2$, используя (3.62) легко непосредственно доказать *энергетическое равенство*

$$|u(t)|^2+2\nu\int_0^t\|u(s)\|^2\,ds = |u_0|^2+2\int_0^t\langle f(s), u(s)\rangle\,ds \ \forall t \in [0, T]. \tag{4.55}$$

§ 5. Дискретизация уравнений Навье — Стокса. Общие теоремы об устойчивости и сходимости

Этот параграф посвящен общему обсуждению дискретизации эволюционных уравнений Навье — Стокса. Здесь мы рассматриваем полную дискретизацию этих уравнений, одновременно по пространственным и временной переменным:

[1] Доказательство от противного.

— Дискретизация по пространственным переменным осуществляется путем введения какой-нибудь внешней аппроксимации пространства V, например одной из аппроксимаций (АПР1) — (АПР4), соответствующих конечным разностям либо конечным элементам. Эти конкретные примеры более подробно разобраны в работе Темам [9].

— Для дискретизации по временной переменной мы предлагаем, кроме многих естественных и классических схем, четыре двухслойные схемы (полностью неявная схема, схема Крэнка — Николсона, схема неявная в линейной и явная в нелинейной части уравнений и схема явного типа).

После описания схем, подлежащих рассмотрению, мы приступаем к изучению устойчивости этих схем. Под задачей об устойчивости в численном анализе понимают задачу о получении априорных оценок для приближенных решений. Классическая дискретизация одновременно по временной и пространственным переменным может приводить к неустойчивым или условно устойчивым схемам: приближенные решения неограничены, если параметры дискретизации не удовлетворяют некоторому ограничению. Мы обсудим во всех подробностях численную устойчивость четырех упомянутых выше схем. Насколько нам известно, используемые здесь методы не являются традиционными при исследовании устойчивости нелинейных уравнений. Изучение нелинейной неустойчивости — задача сложная; наше исследование, основанное на энергетическом методе, дает только достаточные условия устойчивости; полученные условия устойчивости представляются близкими к необходимым, однако проблема нахождения необходимых условий устойчивости в книге не рассматривается.

Последняя тема этого параграфа — сходимость схем. В подходящих пространствах доказываются две общие теоремы сходимости для различных схем. Доказательство сходимости основано на дискретных аналогах теорем о компактности. Из-за отсутствия единственности слабых решений в трехмерном случае результаты о сходимости в двух- и трехмерном случаях различны и лучше, конечно, для $n=2$.

Распределение всего этого материала по пунктам таково. В п. 5.1 описаны основные типы дискретизаций и численных схем, которые будут изучаться. В пп. 5.2—5.4 мы последовательно изучаем устойчивость схем 5.1 и 5.2 (п. 5.2), 5.3 (п. 5.3) и 5.4 (п. 5.4). Пункт 5.5 посвящен вспомогательным априорным оценкам технического характера (в которых фигурируют дробные производные по времени от аппроксимирующих функций). В п. 5.6 приводятся предположения о согласованности, формулировки общих теорем о сходимости и доказательства этих теорем.

Приложением этих результатов к случаю различных конкретных аппроксимаций пространства V мы займемся в § 6. Там же мы рассмотрим практические методы решения дискретных задач (описание некоторых практических примеров дано в приложении II). В § 7 и 8 будет изложен ряд других методов аппроксимации нелинейных эволюционных уравнений Навье—Стокса, в том числе метод дробных шагов (или проекционный) и метод искусственной сжимаемости.

Начиная с этого места, мы ограничимся „реальными" размерностями пространства, $n=2$ и $n=3$.

5.1. Описание аппроксимирующих схем. Итак, мы будем иметь дело с аппроксимацией решений уравнений Навье—Стокса исключительно в двух- и трехмерном случаях и лишь для *ограниченных* областей Ω. Ради простоты мы предполагаем, что данные f, u_0 удовлетворяют условиям

$$f \in L^2(0, T; H) \tag{5.1}$$

и, как и выше,

$$u_0 \in H. \tag{5.2}$$

Теоремы 3.1 и 3.2 говорят нам, что у задачи 3.2 существует единственное решение, если $n=2$, и по крайней мере одно решение, если $n=3$.

Пусть задана некоторая устойчивая и сходящаяся аппроксимация пространства V, скажем $\{(V_h, p_h, r_h)_{h\in\mathscr{H}}, (\overline{\omega}, F)\}$; предполагается, что V_h — конечномерные пространства. Это может быть любая из аппроксимаций (АПР1)—(АПР5), описанных в гл. I. Для простоты мы допустим, что

$$V_h \subset L^2(\Omega)\ \forall h \in \mathscr{H}; \tag{5.3}$$

это условие выполняется для всех указанных выше аппроксимаций. Пространство V_h снабжено, таким образом, двумя нормами: нормой $|\cdot|$, индуцированной из $L^2(\Omega)$, и своей собственной нормой $\|\cdot\|_h$. Поскольку V_h конечномерно, эти нормы должны быть эквивалентны: их отношение ограничено константой, которая может зависеть от h. Более точно, мы предположим, что

$$|u_h| \leqslant d_0 \|u\|_h \quad \forall u_h \in V_h, \tag{5.4}$$

где d_0 не зависит от h, и

$$\|u_h\|_h \leqslant S(h)\,|u_h|\ \forall u_h \in V_h. \tag{5.5}$$

Константа $S(h)$, которая, как правило, действительно зависит от h, играет важную роль при изучении устойчивости численных аппроксимаций. По этой причине $S(h)$ называют иногда *константой устойчивости*. Обычно $S(h) \to +\infty$ при $h \to 0$.

Пусть на V_h задана непрерывная трилинейная форма $b_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)$, удовлетворяющая условиям

$$b_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h \in V_h, \tag{5.6}$$

$$|b_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)| \leqslant d_1 \|\boldsymbol{u}_h\|_h \|\boldsymbol{v}_h\|_h \|\boldsymbol{w}_h\|_h \quad \forall \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h \in V_h \tag{5.7}$$

(d_1 не зависит от h) и ряду дополнительных условий, которые будут накладываться по мере надобности (при исследовании устойчивости и сходимости схем). Разобьем интервал $[0, T]$ на N частей длины k:

$$k = T/N. \tag{5.8}$$

Как и в § 4, для данного k сопоставим всякой функции $\boldsymbol{f}$ элементы $\boldsymbol{f}^1, \ldots, \boldsymbol{f}^N$:

$$\boldsymbol{f}^m = \frac{1}{k} \int_{(m-1)k}^{mk} \boldsymbol{f}(t)\, dt, \quad m = 1, \ldots, N; \quad \boldsymbol{f}^m \in \boldsymbol{L}^2(\Omega). \tag{5.9}$$

Из большого числа интересных схем, предложенных для уравнений Навье—Стокса, многие из которых уже стали классическими, мы опишем и изучим четыре основные схемы.

Для всех четырех схем мы рекуррентно определим для каждого h и каждого k некоторое семейство элементов $\boldsymbol{u}_h^0, \ldots, \boldsymbol{u}_h^N$ из V_h. В действительности эти элементы зависят от h и k (и от данных), и их следовало бы обозначать через $\boldsymbol{u}_{hk}^m$; однако для простоты мы не будем подчеркивать в записи эту зависимость.

В каждой из четырех схем мы начинаем рекуррентный процесс с

$$\boldsymbol{u}_h^0 = (\text{ортогональная проекция в } \boldsymbol{L}^2(\Omega) \text{ функции } \boldsymbol{u}_0 \text{ на } V_h); \tag{5.10}$$

ввиду (5.3) это определение имеет смысл. Отметим сразу, что

$$|\boldsymbol{u}_h^0| \leqslant |\boldsymbol{u}_0| \quad \forall h. \tag{5.11}$$

Схема 5.1. *Если $\boldsymbol{u}_h^0, \ldots, \boldsymbol{u}_h^{m-1}$ уже известны, то в качестве $\boldsymbol{u}_h^m$ берется решение в V_h уравнения*

$$\frac{1}{k}(\boldsymbol{u}_h^m - \boldsymbol{u}_h^{m-1}, \boldsymbol{v}_h) + \nu((\boldsymbol{u}_h^m, \boldsymbol{v}_h))_h + b_h(\boldsymbol{u}_h^{m-1}, \boldsymbol{u}_h^m, \boldsymbol{v}_h) = \\ = (\boldsymbol{f}^m, \boldsymbol{v}_h) \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h. \tag{5.12}$$

Схема 5.2. *Если $\boldsymbol{u}_h^0, \ldots, \boldsymbol{u}_h^{m-1}$ уже известны, то в качестве $\boldsymbol{u}_h^m$ берется решение в V_h уравнения*

$$\frac{1}{k}(\boldsymbol{u}_h^m - \boldsymbol{u}_h^{m-1}, \boldsymbol{v}_h) + \frac{\nu}{2}((\boldsymbol{u}_h^{m-1} + \boldsymbol{u}_h^m, \boldsymbol{v}_h))_h + \\ + \frac{1}{2} b_h(\boldsymbol{u}_h^{m-1}, \boldsymbol{u}_h^{m-1} + \boldsymbol{u}_h^m, \boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{f}^m, \boldsymbol{v}_h) \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h. \tag{5.13}$$

Схема 5.3. *Если $u_h^0, \ldots, u_h^{m-1}$ уже известны, то в качестве u_h^m берется решение в V_h уравнения*

$$\frac{1}{k}(u_h^m - u_h^{m-1}, v_h) + \nu((u_h^m, v_h))_h + b_h(u_h^{m-1}, u_h^{m-1}, v_h) = (f^m, v_h)\ \forall v_h \in V_h. \tag{5.14}$$

Схема 5.4. *Если $u_h^0, \ldots, u_h^{m-1}$ уже известны, то в качестве u_h^m берется решение в V_h уравнения*

$$\frac{1}{k}(u_h^m - u_h^{m-1}, v_h) + \nu((u_h^{m-1}, v_h))_h + b_h(u_h^{m-1}, u_h^{m-1}, v_h) = (f_h^m, v_h)\ \forall v_h \in V_h. \tag{5.15}$$

Для всех этих схем уравнение, определяющее u_h^m, эквивалентно линейному уравнению вида

$$a_h(u_h^m, v_h) = L_h(v_h)\ \forall v_h \in V_h, \tag{5.16}$$

где L_h зависит от m, а a_h зависит от m для схем 5.1 и 5.2 и не зависит для схем 5.3 и 5.4.

Ясно, что во всех четырех случаях

$$a_h(v_h, v_h) \geqslant k^{-1}|v_h|^2, \tag{5.17}$$

поэтому существование и единственность решения задачи (5.16) вытекают из проекционной теоремы (теоремы I.2.2).

Замечание 5.1. (i) Вычисление u_h^m требует обращения соответствующей матрицы; для схем 5.1 и 5.2 эта матрица положительно-определённа, несимметрична и зависит от m; для схем 5.3 и 5.4 — положительно-определенна, симметрична и не зависит от m.

(ii) Схема 5.1 — это стандартная полностью неявная схема; схема 5.2 представляет собой интерпретацию классической схемы Крэнка — Николсона. Схема 5.3 — это частично неявная схема, а именно неявная только в линейной части оператора.

(iii) Схема 5.4 является явной или, точнее, некоторой модификацией явной схемы, поскольку в схемах явного типа u_h^m находится без обращения какой-либо матрицы, а в нашем случае из-за дискретного аналога условия $\operatorname{div} u = 0$, фигурирующего в определении пространства V_h, определение u_h^m необходимо связано с обращением матрицы. Это обстоятельство существенно ограничивает интерес к этой схеме, но мы тем не менее считаем ее достаточно интересной.

(iv) Помимо этого обсуждения типов схем см. § 6, где описаны практические методы вычисления u_h^m.

Замечание 5.2. *Некоторые родственные схемы.* (i) Схемам 5.1 и 5.2 родственны их нелинейные формы:

Схема 5.1′

$$\frac{1}{k}(u_h^m - u_h^{m-1}, v_h) + \nu((u_h^m, v_h))_h + b_h(u_h^m, u_h^m, v_h) = (f^m, v_h)\ \forall v_h \in V_h. \tag{5.18}$$

Схема 5.2′. $\frac{1}{k}(u_h^m - u_h^{m-1}, v_h) + \frac{\nu}{2}((u_h^{m-1} + u_h^m, v_h))_h + \frac{1}{4} b_h(u_h^{m-1} + u_h^m,$
$$u_h^{m-1} + u_h^m, v_h) = (f^m, v_h) \; \forall v_h \in V_h. \tag{5.19}$$

(ii) Схеме 5.3 родственна схема Крэнка—Николсона, неявная в ее линейной части:

Схема 5.3′. $\frac{1}{k}(u_h^m - u_h^{m-1}, v_h) + \frac{\nu}{2}((u_h^{m-1} + u_h^m, v_h))_h$
$$+ b_h(u^{m-1}, u^{m-1}, v_h) = (f^m, v_h) \; \forall v_h \in V_h. \tag{5.20}$$

(iii) Эти схемы могут быть исследованы теми же методами, что и схемы 5.1—5.4.

5.2. *Устойчивость схем 5.1 и 5.2.* Наша задача—доказать некоторые априорные оценки для приближенного решения.

5.2.1. Схема 5.1.

Лемма 5.1. *Решение* u_h^m *задачи* (5.12) *остается ограниченным в следующем смысле*:

$$|u_h^m|^2 \leqslant d_2, \quad m = 0, \ldots, N, \tag{5.21}$$

$$\sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 \leqslant d_2, \tag{5.22}$$

$$k \sum_{m=1}^{N} \| u_h^m \|^2 \leqslant \frac{1}{\nu} d_2, \tag{5.23}$$

где

$$d_2 = |u_0|^2 + \frac{d_0^2}{\nu} \int_0^T |f(s)|^2 \, ds. \tag{5.24}$$

Доказательство. Полагаем $v_h = u_h^m$ в (5.12). Вследствие (5.6) и тождества

$$2(a - b, a) = |a|^2 - |b|^2 + |a - b|^2 \quad \forall a, b \in L^2(\Omega) \tag{5.25}$$

имеем

$$|u_h^m|^2 - |u_h^{m-1}|^2 + |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 + 2k\nu \| u_h^m \|_h^2$$
$$= 2(f^m, u_h^m) \leqslant 2k |f^m| |u_h^m| \leqslant (\text{в силу } (5.4))$$
$$\leqslant 2kd_0 |f^m| \| u_h^m \|_h \leqslant k\nu \| u_h^m \|_h^2 + (kd_0^2/\nu) |f^m|^2. \tag{5.26}$$

Отсюда

$$|u_h^m|^2 - |u_h^{m-1}|^2 + |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 + k\nu \| u_h^m \|_h^2 \leqslant \frac{kd_0^2}{\nu} |f^m|^2, \tag{5.27}$$

$m=1, \ldots, N$. Суммируя эти неравенства по $m=1, \ldots, N$, получаем

$$|u_h^N|^2+\sum_{m=1}^N |u_h^m-u_h^{m-1}|^2+k\nu\sum_{m=1}\|u_h^m\|_h^2 \leqslant |u_h^0|^2+\frac{kd_0^2}{\nu}\sum_{m=1}^N|f^m|^2. \tag{5.28}$$

Как и в лемме 4.5, можно проверить, что

$$k\sum_{m=1}^N|f^m|^2\leqslant\int_0^T|f(s)|^2\,ds; \tag{5.29}$$

поэтому из (5.11) и (5.29) следует, что правая часть (5.28) ограничена константой

$$d_2=|u_0|^2+\frac{d_0^2}{\nu}\int_0^T|f(s)|^2\,ds. \tag{5.30}$$

Тем самым доказаны (5.22) и (5.23). Теперь просуммируем неравенства (5.27) для $m=1, \ldots, r$; отбрасывая некоторые положительные члены, получаем $|u_h^r|^2\leqslant|u_h^0|^2+(kd_0^2/\nu)\sum_{m=1}^r|f^m|^2\leqslant d_2$ (в силу сказанного выше); (5.21) также доказано. □

5.2.2. Схема 5.2.

Лемма 5.2. *Решения* u_h^m *задачи* (5.13) *остаются ограниченными в следующем смысле*:

$$|u_h^m|^2\leqslant d_2,\quad m=1, \ldots, N, \tag{5.31}$$

$$k\sum_{m=1}^N\left\|\frac{u_h^m+u_h^{m-1}}{2}\right\|_h^2\leqslant\frac{d_2}{\nu}, \tag{5.32}$$

где d_2 *то же, что и в* (5.24).

Доказательство. Положим $v_h=u_h^m+u_h^{m-1}$ в (5.13). В силу (5.6),

$$|u_h^m|^2-|u_h^{m-1}|^2+2k\nu\|(u_h^m+u_h^{m-1})/2\|_h^2=k(f^m,\ u_h^m+u_h^{m-1}) \leqslant 2kd_0|f^m|\,\|(u_h^m+u_h^{m-1})/2\|_h\leqslant k\nu\|(u_h^m+u_h^{m-1})/2\|_h^2+k(d_0^2/\nu)\,|f^m|^2. \tag{5.33}$$

Поэтому

$$|u_h^m|^2+k\nu\|(u_h^m+u_h^{m-1})/2\|_h^2\leqslant|u_h^{m-1}|^2+(kd_0^2/\nu)\,|f^m|^2. \tag{5.34}$$

Суммируя эти соотношения для $m=1, \ldots, N$, получаем

$$|u_h^N|^2+k\nu\sum_{m=1}^N\left\|\frac{u_h^m+u_h^{m-1}}{2}\right\|_h^2\leqslant|u_h^0|^2+\frac{kd_0^2}{\nu}\sum_{m=1}^N|f^m|^2\leqslant d_2$$

(по тем же соображениям, что и выше); тем самым (5.32) доказано; суммируя теперь соотношения (5.34) для $m=1, \ldots, r$ и опуская ненужные члены, находим

$$|u_h^r|^2 \leqslant |u_h^0|^2 + \frac{kd_0^4}{\nu} \sum_{m=1}^{r} |f^m|^2 \leqslant d^2,$$

откуда следует (5.31). □

5.2.3. Теоремы об устойчивости. Сначала напомним определение:

Определение 5.1. *Бесконечное множество функций $\mathscr{E}$ называется* $L^p(0, T; X)$-устойчивым *тогда и только тогда, когда оно является ограниченным подмножеством в* $L^p(0, T; X)$.

Представляет интерес вывести некоторые результаты об устойчивости из предыдущих оценок. Чтобы сделать это, введем аппроксимирующие функции u_h:

$$u_h\colon [0, T] \to V_h, \tag{5.35}$$

$$u_h(t) = u_h^m, \quad (m-1)k \leqslant t < mk \quad \text{(схема 5.1)},$$
$$\tag{5.36}$$
$$u_h(t) = (u_h^m + u_h^{m-1})/2, \quad (m-1)k \leqslant t < mk \quad \text{(схема 5.2)},$$

$m=1, \ldots, N$. В силу 5.1 и 5.2,

$$\sup_{t\in[0,T]} |u_h(t)| \leqslant \sqrt{d_2}, \tag{5.37}$$

$$\int_0^T \|u_h(t)\|_h^2\, dt \leqslant d_2/\nu. \tag{5.38}$$

Поскольку операторы продолжения $p_h \in \mathscr{L}(V_h, F)$ устойчивы, мы имеем

$$\|p_h u_h\|_F \leqslant d_3 \|u_h\|_h \quad \forall u_h \in V_h \quad (d_3 \text{ не зависит от } h). \tag{5.39}$$

На основании (5.38) заключаем, что

$$\int_0^T \|p_h u_h(t)\|_F^2\, dt \leqslant d_3^2 d_2/\nu.$$

Эти замечания позволяют нам сформулировать следующую теорему об устойчивости:

Теорема 5.1. *Функции u_h, $h \in \mathscr{H}$, соответствующие схемам* 5.1 *и* 5.2, *безусловно* $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$-*устойчивы; функции $p_h u_h$ безусловно* $L^2(0, T; F)$-*устойчивы.*

Замечание 5.2. Оценка (5.22), как и некоторые аналогичные оценки для других схем, которые мы дадим позднее, не имеет отношения к результатам об устойчивости, но пригодится при доказательстве сходимости схемы. По поводу аналогичной оценки для схемы 5.2 см. п. 5.4.3.

5.3. Устойчивость схемы 5.3. Из (5.5) и (5.7) вытекает, что

$$|b_h(u_h, u_h, v_h)| \leqslant d_1 \| u_h \|_h^2 \| v_h \|_h$$
$$\leqslant d_1 S^2(h) | u_h | \cdot \| u_h \|_h | v_h | \quad \forall u_h, v_h \in V_h. \tag{5.40}$$

Иногда эту оценку можно улучшить, и это приводит к существенному ослаблению некоторых ограничительных условий устойчивости, о которых пойдет речь позднее в этом параграфе; имея это в виду, запишем

$$|b_h(u_h, u_h, v_h)| \leqslant S_1(h) | u_h | \| u_h \|_h | v_h | \quad \forall u_h, v_h \in V_h, \tag{5.41}$$

где, во всяком случае,

$$S_1(h) \leqslant d_1 S^2(h). \tag{5.42}$$

5.3.1. Априорные оценки.

Лемма 5.3. *Предположим, что k и h удовлетворяют условиям*[1]

$$kS_1^2(h) \leqslant d', \quad kS^2(h) \leqslant d'', \tag{5.43}$$

где d' и d'' — некоторые константы, зависящие от данных (их оценки будут даны по ходу доказательства). Тогда u_h^m, задаваемые уравнением (5.14), *остаются ограниченными в следующем смысле*:

$$| u_h^m | \leqslant d_4, \quad m = 0, \ldots, N, \tag{5.44}$$

$$\sum_{m=1}^{N} | u_h^m - u_h^{m-1} |^2 \leqslant d_4, \tag{5.45}$$

$$k \sum_{m=1}^{N} \| u_h^m \|_h^2 \leqslant d_4, \tag{5.46}$$

где d_4 — константа, зависящая только от данных, d' и d''.

Доказательство. Запишем (5.14) с $v_h = u_h^m$. Используя опять (5.25), получим соотношение

$$| u_h^m |^2 - | u_h^{m-1} |^2 + | u_h^m - u_h^{m-1} |^2 + 2k\nu \| u_h^m \|_h^2$$
$$= -2kb_h(u_h^{m-1}, u_h^{m-1}, u_h^m) + 2k(f^m, u_h^m). \tag{5.47}$$

В силу (5.6), правая часть (5.47) равна $-2kb_h(u_h^{m-1}, u_h^{m-1}, u_h^m - u_h^{m-1}) + 2k(f^m, u_h^m)$; это выражение не превосходит (см. (5.4) и (5.41)) $2kS_1(h) | u_h^{m-1} | \| u_h^{m-1} \|_h | u_h^m - u_h^{n-1} | + 2kd_0 | f^m | \| u_h^m \|_h$, а значит и $k\nu \| u_h^m \|_h^2 + 2k^2 S_1^2(h) | u_h^{m-1} |^2 \| u_h^{m-1} \|_h^2 + (1/2) | u_h^m - u_h^{m-1} |^2 + (kd_0^2/\nu) | f^m |^2$. Поэтому

$$| u_h^m |^2 - | u_h^{m-1} |^2 + (1/2) | u_h^m - u_h^{m-1} |^2 + k\nu \| u_h^m \|_h^2$$
$$- 2k^2 S_1^2(h) | u_h^{m-1} |^2 \| u_h^{m-1} \|_h^2 \leqslant (kd_0^2/\nu) | f^m |^2. \tag{5.48}$$

[1] Практически одно из приводимых ниже двух условий всегда является следствием другого (какое именно, зависит от значений S и S_1).

Просуммируем эти неравенства для $m=1, \ldots, r$:

$$|u_h^r|^2+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{r}|u_h^m-u_h^{m-1}|^2+k\nu\sum_{m=1}^{r}\|u_h^m\|_h^2$$
$$-2k^2S_1^2(h)\sum_{m=2}^{r}|u_h^{m-1}|^2\|u_h^{m-1}\|_h^2\leqslant\lambda_m, \tag{5.49}$$

$$\lambda_m=|u_h^0|^2+\frac{kd_0^2}{\nu}\sum_{m=1}^{r}|f^m|^2+2k^2S_1^2(h)|u_h^0|^2\|u_h^0\|_h^2. \tag{5.50}$$

Предположим, что

$$2kS_1^2(h)\lambda_N\leqslant\nu-\delta \text{ для некоторого } \delta,\ 0<\delta<\nu. \tag{5.51}$$

Если это неравенство выполнено, то по индукции легко доказать, что

$$|u_h^r|^2+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{r}|u_h^m-u_h^{m-1}|^2+k\delta\sum_{m=1}^{r}\|u_h^m\|_h^2\leqslant\lambda_r, \tag{5.52}$$

$r=1, \ldots, N$. В самом деле, неравенство (5.48), записанное для $m=1$, показывает, что (5.52) верно для $r=1$. Допустим, что (5.52) верно для $r-1$, и покажем, что оно верно и для r. По предположению,

$$|u_h^m|^2\leqslant\lambda_m\leqslant\lambda_N,\quad m=1, \ldots, r-1. \tag{5.53}$$

Поэтому, в силу (5.51),

$$2k^2S_1^2(h)\sum_{m=2}^{r}|u_h^{m-1}|^2\|u_h^{m-1}\|_h^2\leqslant 2k^2S_1^2(h)\lambda_N\sum_{m=2}\|u_h^{m-1}\|_h$$
$$\leqslant 2k^2S_1^2(h)\lambda_N\sum_{m=1}^{r}\|u_h^m\|_h^2\leqslant k(\nu-\delta)\sum_{m=1}^{r}\|u_h^m\|_h^2.$$

Подставляя эту оценку в (5.49), получим (5.52). Доказательство будет завершено, если мы покажем, что из некоторого условия типа (5.45) следует (5.51). Согласно оценкам, использовавшимся в леммах 5.1 и 5.2 (см. (5.11), (5.29)),

$$\lambda_N\leqslant|u_0|^2+\frac{d_0^2}{\nu}\int_0^T|f(s)|^2\,ds+2k^2S_1^2(h)|u_0|^2\|u_h^0\|_h^2$$
$$\leqslant(\text{см. (5.5) и (5.24)})\ d_2+2k^2S_1^2(h)S^2(h)|u_0|^2.$$

Следовательно, если (5.43) выполнено, то $2kS_1^2(h)\lambda_N \leqslant 2d'(d_2+2d'd''|u_0|^2)$, а правая часть не превосходит $\nu-\delta$, если d' и d'' достаточно малы:

$$2d'(d_2+2d'd''|u_0|^2)\leqslant\nu-\delta.\ \square \tag{5.54}$$

5.3.2. Теорема об устойчивости. Для схемы 5.3 мы определим аппроксимирующие функции u_h так:

$$u_h\colon [0,\ T] \to V_h,$$
$$u_h(t) = u_h^m,\quad (m-1)k \leqslant t < mk,\quad m-1,\ \ldots,\ N. \tag{5.55}$$

Из (5.39), (5.44), (5.45) вытекает, что если выполняется (5.43), то

$$\sup_{t\in[0,\ T]} |u_h(t)| \leqslant \sqrt{d_4},\quad \int_0^T \| p_h u_h(t)\|_F^2\, dt \leqslant d_3 d_4.$$

Таким образом, верна

Теорема 5.2. *Функции u_h и $p_h u_h$, $h \in \mathcal{H}$, отвечающие схеме* 5.3, *соответственно $L^\infty(0,\ T,\ \mathbf{L}^2(\Omega))$- и $L^2(0,\ T;\ F)$-устойчивы, если k и h удовлетворяют условиям* (5.43).

Определение 5.2. *Условия типа* (5.43) *называются* условиями устойчивости. *Они являются достаточными для устойчивости схемы. Схема называется* условно *или* безусловно устойчивой *в зависимости от того, появляются в доказательстве ее устойчивости такие условия или нет.*

5.4. Устойчивость схемы 5.4.

5.4.1. Априорные оценки.

Лемма 5.4. *Предположим, что k и h удовлетворяют условиям*

$$kS^2(h) \leqslant (1-\delta)/4\nu \text{ для некоторого } \delta,\ 0 < \delta < 1, \tag{5.56}$$
$$kS_1^2(h) \leqslant \nu\delta/8d_5, \tag{5.57}$$

где

$$d_5 = |u_0|^2 + \left(\frac{d_0^2}{\nu} + 4T\right)\int_0^T |f(s)|^2\, ds. \tag{5.58}$$

Тогда u_h^m, задаваемые уравнением (5.15), *остаются ограниченными в следующем смысле:*

$$|u_h^m|^2 \leqslant d_5,\quad m = 1,\ \ldots,\ N, \tag{5.59}$$
$$k\sum_{m=1}^N \| u_h^m \|_h^2 \leqslant 2d_5/\delta\nu, \tag{5.60}$$
$$\sum_{m=1}^N |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 \leqslant (d_5/\delta)(2-\delta) + 4T\int_0^T |f(s)|^2\, ds. \tag{5.61}$$

Доказательство. Заменяя v_h на u_h^{m-1} в (5.15) и используя тождество

$$2(a-b,\ b) = |a|^2 - |b|^2 - |a-b|^2 \quad \forall a,\ b \in L^2(\Omega), \tag{5.62}$$

находим

$$|u_h^m|^2-|u_h^{m-1}|^2-|u_h^m-u_h^{m-1}|^2+2k\nu\|u_h^{m-1}\|_h^2$$
$$=2k(f^m,\ u_h^m)\leqslant 2kd_0|f^m|\|u_h^m\|_h\leqslant \nu k\|u_h^m\|_h^2+\frac{kd_0^2}{\nu}|f^m|^2,$$

$$|u_h^m|^2-|u_h^{m-1}|^2-|u_h^m-u_h^{m-1}|^2+k\nu\|u_h^{m-1}\|_h^2\leqslant\frac{kd_0^2}{\nu}|f^m|. \quad (5.63)$$

В отличие от (5.26) здесь член $|u_h^m-u_h^{m-1}|^2$ входит в левую часть со знаком минус, и поэтому мы вынуждены его оценить. Для того чтобы это сделать, запишем (5.15) с $v_h=u_h^m-u_h^{m-1}$. Это дает

$$2|u_h^m-u_h^{m-1}|^2=-2k\nu((u_h^{m-1},\ u_h^m-u_h^{m-1}))_h$$
$$-2kb_h(u_h^{m-1},\ u_h^{m-1},\ u_h^m-u_h^{m-1})+2k(f^m,\ u_h^m-u_h^{m-1}). \quad (5.64)$$

Последовательно оценим все члены в правой части, используя (5.5), (5.41) и неравенство Шварца:

$$-2k\nu((u_h^{m-1},\ u_h^m-u_h^{m-1}))_h\leqslant 2k\nu\|u_h^{m-1}\|_h\|u_h^m-u_h^{m-1}\|_h$$
$$\leqslant 2k\nu S(h)\|u_h^{m-1}\|_h|u_h^m-u_h^{m-1}|_h$$
$$\leqslant\frac{1}{4}|u_h^m-u_h^{m-1}|_h^2+4k^2\nu^2S^2(h)\|u_h^{m-1}\|_h^2;$$

$$-2kb_h(u_h^{m-1},\ u_h^{m-1},\ u^m-u_h^{m-1})$$
$$\leqslant 2kS_1(h)|u_h^{m-1}|\|u_h^{m-1}\|_h|u_h^m-u_h^{m-1}|$$
$$\leqslant\frac{1}{4}|u_h^m-u_h^{m-1}|^2+4k^2S_1^2(h)|u_h^{m-1}|^2\|u_h^{m-1}\|_h^2;$$

$$2k(f^m,\ u_h^m-u_h^{m-1})\leqslant 2k|f^m||u_h^m-u_h^{m-1}|$$
$$\leqslant\frac{1}{4}|u_h^m-u_h^{m-1}|^2+4k^2|f^m|^2.$$

Таким образом, из (5.64) следует, что

$$|u_h^m-u_h^{m-1}|^2\leqslant 4k^2\nu^2S^2(h)\|u_h^{m-1}\|_h^2$$
$$+4k^2S_1^2(h)|u_h^{m-1}|^2\|u_h^{m-1}\|_h^2+4k^2|f^m|^2\leqslant(\text{в силу (5.56)})$$
$$\leqslant k\nu(1-\delta)\|u_h^{m-1}\|_h^2+4k^2S_1^2(h)|u_h^{m-1}|^2\|u_h^{m-1}\|_h^2+4k^2|f^m|^2; \quad (5.65)$$

поэтому (5.63) дает

$$|u_h^m|^2-|u_h^{m-1}|^2+k(\nu\delta-4kS_1^2(h)|u_h^{m-1}|^2)\|u_h^{m-1}\|_h^2$$
$$\leqslant k\left(\frac{d_0^2}{\nu}+4k\right)|f^m|^2\leqslant k\left(\frac{d_0^2}{\nu}+4T\right)|f^m|^2 \quad (5.66)$$

(поскольку $k\leqslant T$). Суммируя эти неравенства для $m=1,\ \ldots,\ r$, получаем

$$|u_h^r|^2+k\sum_{m=1}^{r}(\nu\delta-4kS_1^2(h)|u_h^{m-1}|^2)\|u_h^{m-1}\|_h^2\leqslant\mu_r, \quad (5.67)$$

где

$$\mu_r = |u_h^0|^2 + k\left(\frac{d_0^2}{\nu} + 4T\right)\sum_{m=1}^{r} |f^m|^2. \tag{5.68}$$

Используя (5.57), докажем теперь по индукции, что

$$|u_h^r|^2 + \frac{k\nu\delta}{2}\sum_{m=1}^{r} \|u_h^{m-1}\|_h^2 \leqslant \mu_r, \quad r = 1, \ldots, N. \tag{5.69}$$

Прежде всего заметим, что

$$\mu_r \leqslant \mu_N = |u_h^0|^2 + k\left(\frac{d_0^2}{\nu} + 4T\right)\sum_{m=1}^{N} |f^m|^2$$

$$\leqslant |u_0|^2 + \left(\frac{d_0^2}{\nu} + 4T\right)\int_0^T |f(s)|^2\, ds = d_5. \tag{5.70}$$

Для $r = 1$ неравенство (5.69) очевидно; действительно, записывая (5.66) для $m = 1$ и учитывая (5.57), получаем

$$|u_h^1|^2 + k\nu\delta\|u_h^0\|_h^2 \leqslant |u_h^0|^2 + k(d_0^2/\nu + 4T)|f^1|^2$$
$$+ 4k^2S_1^2(h)|u_h^0|^2\|u_h^0\|_h^2 \leqslant \mu_1 + (\nu\delta/2)\|u_h^0\|_h^2,$$

т. е. в точности (5.69) для $r = 1$. Предположим теперь, что (5.69) верно для $r - 1$, и докажем, что оно верно для r. По предположению индукции

$$|u_h^{r-1}|^2 \leqslant \mu_{r-1} \leqslant \mu_N \leqslant d_5 \tag{5.71}$$

(в силу (5.70)). Поэтому из (5.67) вытекает, что

$$|u_h^r|^2 + k\nu\delta\sum_{m=1}^{r} \|u_h^{m-1}\|_h^2 \leqslant \mu_r$$
$$+ 4k^2S_1^2(h)\,d_5\sum_{m=1}^{r} \|u_h^{m-1}\|_h^2 \leqslant \mu_r + \frac{k\nu\delta}{2}\sum_{m=1}^{r} \|u_h^{m-1}\|_h^2, \tag{5.72}$$

т. е. (5.69) верно для r. Остается доказать (5.61). Для этого вернемся к (5.65); используя (5.56) и (5.57), получаем

$$|u_h^m - u_h^{m-1}|^2 \leqslant k\nu(1 - \delta/2)\|u_h^{m-1}\|_h^2 + 4kT|f^m|^2. \tag{5.73}$$

Суммируя эти неравенства и учитывая (5.29), приходим к (5.61). □

5.4.2. Теорема об устойчивости. Положим теперь

$$u_h: [0, T] \to V_h, \tag{5.74}$$
$$u_h(t) = u_h^{m-1}, \quad (m-1)k \leqslant t < mk, \quad m = 1, \ldots, N. \tag{5.75}$$

Имеет место

Теорема 5.3. *Функции* u_h *и* $p_h u_h$, $h \in \mathcal{H}$, *отвечающие схеме* 5.4, *соответственно* $L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$- *и* $L^2(0, T; F)$-*устойчивы, при условии что* k *и* h *связаны соотношениями* (5.56) — (5.58).

5.5. Одна дополнительная оценка для схемы **5.2.** Используя те же методы, которые мы широко применяли в пп. 5.3 и 5.4, мы можем дополнить результаты п. 5.2 для случая схемы 5.2 одной оценкой, аналогичной оценке

$$\sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 \leqslant \text{const}, \tag{5.76}$$

полученной нами для схем 5.1, 5.3 и 5.4. Как было указано в замечании 5.2, эти оценки пригодятся при доказательстве сходимости.

Лемма 5.5. *Функции* u_h^m, *определяемые равенствами* (5.13) (*схема* 5.2), *удовлетворяют оценке*

$$\sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 \leqslant d(1 + kS^4(h)), \tag{5.77}$$

где d — *константа, зависящая только от данных.*

Доказательство. Положим $v_h = 2k(u_h^m - u_h^{m-1})$ в (5.13). Имеем

$$\begin{aligned}
2|u_h^m - u_h^{m-1}|^2 &= -k\nu \|u_h^m\|_h^2 + k\nu \|u_h^{m-1}\|_h^2 \\
&\quad - kb_h(u_h^{m-1}, u_h^m + u_h^{m-1}, u_h^m - u_h^{m-1}) + 2k(f^m, u_h^m - u_h^{m-1}) \\
&\leqslant (\text{в силу (5.40) и (5.5)}) - k\nu \|u_h^m\|_h^2 + k\nu \|u_h^{m-1}\|_h^2 \\
&\qquad + kd_1 S^2(h)\, |u_h^{m-1}|\, \|u_h^m + u_h^{m-1}\|_h\, |u_h^m - u_h^{m-1}| \\
&\qquad\qquad + 2k|f^m|\, |u_h^m - u_h^{m-1}| \\
&\leqslant -k\nu \|u_h^m\|_h^2 + k\nu \|u_h^{m-1}\|_h^2 + (1/2)|u_h^m - u_h^{m-1}|^2 \\
&\qquad + (k^2/2)\, d_1^2 S^4(h)\, |u_h^{m-1}|^2 \|u_h^m + u_h^{m-1}\|_h^2 \\
&\qquad\qquad + (1/2)|u_h^m - u_h^{m-1}|^2 + 2kT|f^m|^2.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 &\leqslant k\nu \|u_h^0\|_h^2 + 2kT \sum_{m=1}^{N} |f^m|^2 \\
&\qquad + \frac{k^2}{2} d_1^2 S^4(h) \sum_{m=1}^{N} |u_h^{m-1}|^2 \|u_h^m + u_h^{m-1}\|_h^2 \\
&\leqslant (\text{в силу (5.5), (5.11), (5.29), (5.31), (5.32)}) \\
&\leqslant k\nu S^2(h)|u_0|^2 + 2T \int_0^T |f(s)|^2\, ds + \frac{2}{\nu} d_1^2 d_2^2 k S^4(h). \qquad \square
\end{aligned}$$

5.6. Другие априорные оценки. Для того чтобы доказать результаты о сильной сходимости, мы установим некоторые дополнительные априорные оценки, касающиеся дробных производных по t от аппроксимирующих функций. Результаты настоящего пункта носят в основном технический характер и предназначены для использования в п. 5.7, где доказывается сходимость различных схем.

Для всех четырех схем обозначим через w_h функцию из $\mathbb{R}$ в V_h, определяемую следующим образом:

w_h — непрерывная функция из $\mathbb{R}$ в V_h, линейная на каждом интервале $[mk, (m+1)k]$, и $w_h(mk)=u_h^m$, $m=0, \ldots, N-1$; $w_h=0$ вне интервала $[0, T]$. (5.78)

Лемма 5.6. *В предположении, что выполнены те же условия устойчивости, что и в теоремах* 5.1—5.3 [1], *преобразование Фурье $\hat{w}_h$ функции w_h удовлетворяет оценке*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\hat{w}_h(\tau)|^2 \, d\tau \leqslant \text{const} \quad \textit{для} \quad 0<\gamma<1/4, \tag{5.79}$$

где константа зависит от γ и от данных.

Доказательство. Каждое из четырех уравнений (5.12)—(5.15) можно трактовать как уравнение

$$\frac{d}{dt}(w_h(t), v_h)=((g_h(t), v_h))_h \quad \forall v_h \in V_h, \quad t \in (0, T), \tag{5.80}$$

где функция g_h удовлетворяет условию

$$\int_0^T \| g_h(t) \|_h \, dt \leqslant \text{const}. \tag{5.81}$$

Например, для схемы 5.1 функция g_h определяется равенством

$$((g_h(t), v_h))_h=(f^m, v_h)-b_h(u_h^{m-1}, u_h^m, v_h)-\nu((u_h^m, v_h))_h$$
$$\forall v_h \in V_h, \quad (m-1)k \leqslant t < mk.$$

Неравенство (5.81) вытекает из (5.4), (5.7) и предыдущих априорных оценок:

$$\| g_h(t) \|_h \leqslant d_0 |f^m| + d_1 \| u_h^{m-1} \|_h \| u_h^m \|_h + \nu \| u_h^m \|_h,$$
$$\int_0^T \| g_h(t) \|_h \, dt \leqslant k \sum_{m=1}^{N} (d_0 |f^m| + d_1 \| u_h^{m-1} \|_h \| u_h^m \|_h + \nu \| u_h^m \|_h);$$

правая часть последнего неравенства ограничена по лемме 5.1.

Теперь выведем (5.79) из (5.80)—(5.81). Продолжая g_h нулем вне $[0, T]$, мы получаем функцию $\bar{g}_h$, для которой на всей пря-

[1] Условия (5.43) для схемы 5.3, условия (5.56)—(5.57) для схемы 5.4; для схем 5.1 и 5.2 — никаких условий.

мой t выполняется следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{w}_h(t),\ \boldsymbol{v}_h) = ((\tilde{\boldsymbol{g}}_h(t),\ \boldsymbol{v}_h))^h + (\boldsymbol{u}_h^0,\ \boldsymbol{v}_h)\,\delta_0 - (\boldsymbol{u}_h^N,\ \boldsymbol{v}_h)\,\delta_T \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h, \tag{5.82}$$

где δ_0 и δ_T обозначают дельта-функции Дирака, сосредоточенные в точках 0 и T. Применяя преобразование Фурье, приходим к равенству

$$-2i\ \tau(\hat{\boldsymbol{w}}_h(\tau),\ \boldsymbol{v}_h) = ((\hat{\boldsymbol{g}}_h(\tau),\ \boldsymbol{v}_h)) + (\boldsymbol{u}_h^0,\ \boldsymbol{v}_h) - (\boldsymbol{u}_h^N,\ \boldsymbol{v}_h)\exp(-2i\pi\tau T)$$

($\hat{\boldsymbol{g}}_h$ — преобразование Фурье функции $\tilde{\boldsymbol{g}}_h$). Полагая $\boldsymbol{v}_h = \hat{\boldsymbol{w}}_h(\tau)$ и оценивая модуль левой части, получаем

$$2\pi|\tau|\,|\hat{\boldsymbol{w}}_h(\tau)|^2 \leqslant \|\hat{\boldsymbol{g}}_h(\tau)\|_h \|\hat{\boldsymbol{w}}_h(\tau)\|_h + c_1|\hat{\boldsymbol{w}}_h(\tau)|$$

(поскольку $\boldsymbol{u}_h^0$ и $\boldsymbol{u}_h^N$ остаются ограниченными). В силу (5.81) имеем

$$\|\hat{\boldsymbol{g}}_h(\tau)\|_h \leqslant \int_0^T \|\boldsymbol{g}_h(t)\|_h\, dt \leqslant \mathrm{const} = c_2;$$

следовательно,

$$|\tau|\,|\hat{\boldsymbol{w}}_h(\tau)|^2 \leqslant c_3\|\hat{\boldsymbol{w}}_h(\tau)\|_h. \tag{5.83}$$

Теперь заметим, что для всякого фиксированного $\gamma < 1/4$

$$|\tau|^{2\gamma} \leqslant c_4(\gamma)(1+|\tau|)/(1+|\tau|^{1-2\gamma}) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}|\hat{\boldsymbol{w}}_h(\tau)|^2\, d\tau \leqslant c_4(\gamma)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}|\hat{\boldsymbol{w}}_h(\tau)|^2\, d\tau$$

$$\leqslant (\text{в силу (5.83)})\ c_4(\gamma)\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\boldsymbol{w}}_h(\tau)|^2\, d\tau + c_5\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat{\boldsymbol{w}}_h(\tau)\|_h}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}\, d\tau$$

$$\leqslant (\text{в силу неравенства Шварца})\ c_4\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\boldsymbol{w}}_h(\tau)|^2\, d\tau + c_5\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^{1-2\gamma})^2}\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{\boldsymbol{w}}_h(\tau)\|_h^2\, d\tau\right)^{1/2}. \tag{5.84}$$

Для $\gamma < 1/4$ интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\tau|^{1-2\gamma})^{-2}\, d\tau$ конечен. Поэтому правая часть последнего неравенства конечна и, согласно предыдущим оценкам и равенству Парсеваля, ограничена:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{w}_h(\tau)|^2 \, d\tau \leqslant d_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{w}_h(\tau)\|_h^2 \, d\tau \tag{5.85}$$

$$= d_0^2 \int_0^T \|w_h(t)\|_h^2 \, dt \leqslant \text{const}. \quad \square$$

5.7. *Сходимость численных схем.* Наша цель сейчас — доказать сходимость схем 5.1—5.4 в некотором смысле, который будет уточнен позднее. Сначала мы сформулируем предположения о согласованности и компактности, которым должны удовлетворять дискретизованные данные, для того чтобы была обеспечена сходимость. Затем сформулируем и докажем теоремы о сходимости.

5.7.1. Предположения о согласованности и компактности. Эти предположения легче будет формулировать после следующей леммы:

Лемма 5.7. *Пусть* $\{(V_h, p_h, r_h)_{h \in \mathcal{H}}, (\bar{\omega}, F)\}$ — *устойчивая сходящаяся внешняя аппроксимация пространства* V. *Предположим, что для некоторой последовательности* $h' \to 0$ *семейство функций* $u_{h'}$: $[0, T] \to V_{h'}$ *удовлетворяет условию*

$$p_{h'} u_{h'} \to \varphi \text{ слабо в } L^2(0, T; F) \text{ при } h' \to 0. \tag{5.86}$$

Тогда $\varphi(t) = \bar{\omega} u(t)$ *для почти всех* t *и*

$$u = \bar{\omega}^{-1} \varphi \in L^2(0, T; V). \tag{5.87}$$

Доказательство. Пусть θ = произвольная функция из $\mathcal{D}((0, T))$. Легко проверяется, что

$$\int_0^T p_{h'} u_{h'}(t) \theta(t) \, dt \to \int_0^T \varphi(t) \theta(t) \, dt \text{ при } h' \to 0.$$

Но условие (C2) из определения I.3.6[1] показывает нам, что тогда $\int_0^T \varphi(t) \theta(t) \, dt \in \bar{\omega} V$. Поскольку, по определению, $\bar{\omega} V$ изоморфно V, то $\bar{\omega} V$ является замкнутым подпространством пространства F; выбирая какую-нибудь последовательность функций θ_ε, сходящуюся к распределению Дирака, сосредоточенному в точке s, $s \in (0, T)$, мы видим, что для почти всех s из $[0, T]$

$$\int_0^T \varphi(t) \theta_\varepsilon(t) \, dt \to \varphi(s) \text{ в } F,$$

[1] Сходящейся внешней аппроксимации нормированного пространства.

а потому $\varphi(s) \in \bar{\omega} V$ п. в. Поскольку $\bar{\omega}$ — изоморфизм, отсюда вытекает, что $\bar{\omega}^{-1}\varphi$ определено и принадлежит $L^2(0, T; V)$. □

Эта лемма — достаточно общая, но в рассматриваемой нами ситуации мы предположили, что

$$V_h \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \quad \forall_h; \tag{5.88}$$

поэтому может оказаться, что для некоторой последовательности $h' \to 0$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_{h'} \to \boldsymbol{u} \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\ &p_{h'}\boldsymbol{u}_{h'} \to \varphi \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, T; F). \end{aligned}$$

В силу леммы 5.7, $\varphi = \bar{\omega}\boldsymbol{u}_*$, $\boldsymbol{u}_* \in L^2(0, T; V)$. Без дополнительной информации мы не можем заключить, что $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_*$. Однако это будет доказано для каждой из исследуемых нами аппроксимаций. Таким образом, наше первое предположение о согласовании звучит так:

Пусть $\boldsymbol{u}_{h'}$ — *последовательность функций из* $[0, T]$ *в* $V_{h'}$, *такая что при* $h' \to 0$
$\boldsymbol{u}_{h'} \to \boldsymbol{u}$ *слабо в* $L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$,
$p_{h'}\boldsymbol{u}_{h'} \to \varphi$ *слабо в* $L^2(0, T; F)$.
Тогда $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; V)$ и $\varphi = \bar{\omega}\boldsymbol{u}$. (5.89)

Дальнейшие предположения о согласовании таковы[1]:

Пусть $\boldsymbol{v}_{h'}$, $\boldsymbol{w}_{h'}$ — *две последовательности функций из* $[0, T]$ *в* $V_{h'}$, *такие что при* $h' \to 0$

$p_{h'}\boldsymbol{v}_{h'} \to \bar{\omega}\boldsymbol{v}$ *слабо в* $L^2(0, T; F)$,
$p_{h'}\boldsymbol{w}_{h'} \to \bar{\omega}\boldsymbol{w}$ *сильно в* $L^2(0, T; F)$.

Тогда при $h' \to 0$

$$\int_0^T ((\boldsymbol{v}_{h'}(t), \boldsymbol{w}_{h'}(t)))_{h'}\, dt \to \int_0^T ((\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{w}(t)))\, dt. \tag{5.90}$$

Пусть $\boldsymbol{u}_{h'}$, $\boldsymbol{v}_{h'}$ — *две последовательности функций из* $[0, T]$ *в* $V_{h'}$, *такие что при* $h' \to 0$

$p_{h'}\boldsymbol{u}_{h'} \to \bar{\omega}\boldsymbol{u}$ *слабо в* $L^2(0, T; F)$,
$\boldsymbol{u}_{h'} \to \boldsymbol{u}$ *сильно в* $\mathbf{L}^2(Q)$, $Q = \Omega \times (0, T)$,
$p_{h'}\boldsymbol{v}_{h'} \to \bar{\omega}\boldsymbol{v}$ *слабо в* $L^2(0, T; F)$.

---

[1] Ср. со стационарным случаем (гл. I, (3.7), (3.8); гл. II, (3.4), (3.7)).

Тогда при $h' \to 0$

$$\int_0^T b_{h'}(\boldsymbol{u}_{h'}(t),\ \boldsymbol{v}_{h'}(t),\ \psi(t)\boldsymbol{r}_{h'},\ \boldsymbol{w}_{h'})\,dt \to \int_0^T b(\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{v}(t),\ \psi(t)\boldsymbol{w})\,dt$$

для каждой скалярной функции $\psi \in L^\infty(0, T)$ *и каждого* $\boldsymbol{w} \in \mathcal{V}$. *Если, кроме того, последовательность функций* $\psi_{k'}$ *такова, что* $\psi_{k'} \to \psi$ в $L^\infty(0, T)$ *при* $k' \to 0$, *то при* $h' \to 0$, $k' \to 0$

$$\int_0^T b_{h'}(\boldsymbol{u}_{h'}(t),\ \boldsymbol{v}_{h'}(t),\ \psi_{k'}(t)\, r_{h'}\boldsymbol{w}_{h'})\,dt \to \int_0^T b(\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{v}(t),\ \psi(t)\boldsymbol{w})\,dt. \tag{5.91}$$

При проверке факта сильной сходимости, о котором идет речь в (5.91) ($\boldsymbol{u}_{h'} \to \boldsymbol{u}$ сильно в $L^2(Q)$), мы будем использовать следующее предположение о компактности:

Пусть $\boldsymbol{v}_{h'}$ *— последовательность функций из* $\mathbb{R}$ *в* $V_{h'}$ *с носителем в* $[0, T]$, *такая что*

$$\int_0^T \|\boldsymbol{v}_{h'}(t)\|_{h'}^2\,dt \leqslant \text{const},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}\,|\hat{\boldsymbol{v}}_{h'}(\tau)|^2\,d\tau \leqslant \text{const} \quad \textit{для некоторого}$$

$\gamma > 0$, *где* $\hat{\boldsymbol{v}}_{h'}$ *— преобразование Фурье функции* $\boldsymbol{v}_{h'}$. *Тогда последовательность* $\boldsymbol{v}_{h'}$ *относительно компактна в* $L^2(Q)$. *В частности, из нее можно извлечь подпоследовательность (снова обозначаемую через* $\boldsymbol{v}_{h'}$*), такую что*

$$p_h\boldsymbol{v}_{h'} \to \bar{\omega}\boldsymbol{v} \quad \textit{слабо в} \quad L^2(0, T; F),$$

$$\boldsymbol{v}_{h'} \to \boldsymbol{v} \quad \textit{сильно в} \ L^2(Q). \tag{5.92}$$

5.7.2. *Теоремы о сходимости.* Теоремы о сходимости формулируются по-разному в зависимости от размерности пространства ($n = 2$ или 3) и рассматриваемой схемы. Напомним, что элементам $\boldsymbol{u}_h^m$ мы сопоставляем функцию $\boldsymbol{u}_h$: $[0, T] \to V_h$, определяемую немного по-своему для каждой из четырех схем (см. (5.36), (5.55), (5.75)[1]:

$$\text{для } (m-1)k \leqslant t < mk \quad (m=1, \ldots, N)$$

$$u_h(t) = \begin{cases} u_h^m \text{ (схемы 5.1 и 5.3)}, \\ \frac{1}{2}(u_h^m + u_h^{m-1}) \text{ (схема 5.2)}, \\ u_h^{m-1} \text{ (схема 5.4)}. \end{cases} \tag{5.93}$$

Вот формулировки теорем о сходимости:

Теорема 5.4. *Пусть размерность пространства $n=2$ и выполнены предположения* (5.1)—(5.7), (5.9), (5.10), (5.41) *и* (5.89)—(5.92). *Обозначим через u единственное решение задачи* 3.1. *Имеют место следующие утверждения о сходимости: при h и $k \to 0$*

$$u_h \to u \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ и *-слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{5.94}$$

$$p_h u_h \to \bar{\omega} u \text{ слабо в } L^2(0, T; F), \tag{5.95}$$

если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} &\text{(i) схема 5.1: никаких условий,} \\ &\text{(ii) схема 5.2: } kS^2(h) \to 0, \\ &\text{(iii) схема 5.3: (5.43),} \\ &\text{(iv) схема 5.4: (5.56)—(5.57).} \end{aligned} \tag{5.96}$$

Замечание 5.3. (i) Для схем 5.1 и 5.2 можно доказать, без всяких дополнительных предположений, что

$$p_h u_h \to \bar{\omega} u \text{ сильно в } L^2(0, T; F) \text{ при } h,\ k \to 0. \tag{5.97}$$

(ii) Тот же результат верен для двух других схем, если предположить еще, что

$$kS_1^2(h) \to 0 \quad \text{и} \quad kS^2(h) \to 0 \quad \text{(схемы 5.3 и 5.4)}. \tag{5.98}$$

(iii) Предположение (5.96), используемое при доказательстве сходимости схемы 5.2, не является, вероятно, необходимым, поскольку эта схема безусловно $L^2(0, T; F)$- и $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$-устойчива.

Теорема 5.5. *Пусть размерность пространства $n=3$, а в остальном предположения те же, что и в теореме* 5.4. *Тогда существует (двойная) последовательность h', $k' \to 0$, такая что*

$$u_{h'} \to u \text{ сильно в } L^2(Q), \tag{5.99}$$

$$u_{h'} \to u \text{ слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{5.100}$$

$$p_{h'} u_{h'} \to \bar{\omega} u \text{ слабо в } L^2(0, T; F), \tag{5.101}$$

где u — некоторое решение задачи 3.1. *Для любой другой последовательности h', $k' \to 0$, для которой выполнены условия* (5.99)—(5.101), *u должно быть решением задачи* 3.1.

---

[1] Подчеркнем, что u_h зависит от h и k; только ради простоты мы обозначили эти функции через u_h вместо u_{hk}.

Замечание 5.4. Из-за отсутствия единственности решения задачи 3.1 мы не можем доказать сходимость всей последовательности. Мы также не можем доказать сильную сходимость в $L^2(0, T; F)$ из-за отсутствия энергетического равенства для точной задачи (задачи 3.1) (для $n=3$ мы имеем лишь энергетическое неравенство; см. замечание 4.1).

Эти две теоремы будут доказаны в оставшейся части настоящего пункта. Мы докажем со всеми подробностями лишь теорему 5.4 для схемы 5.1 (включая (5.97)), а в остальных случаях только набросаем доказательства, которые в действительности все очень похожи.

5.7.3. Доказательство теоремы 5.4 (*схема* 5.1). Согласно теореме устойчивости (теореме 5.1) и условию (5.89), существует последовательность h', $k' \to 0$, такая что

$$\begin{aligned} &u_{h'} \to u \quad \text{*-слабо в } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)),\\ &p_{h'}u_{h'} \to \bar{\omega} u \quad \text{слабо в } L^2(0, T; F) \end{aligned} \tag{5.102}$$

для некоторого u из $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$. Рассмотрим кусочно-линейную функцию w_h, введенную в п. 5.6 (см. (5.78)). В силу леммы 5.6 и оценок на u_h^m, имеем

$$|w_h|_{L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))} \leqslant \text{const}, \quad \|p_h w_h\|_{L^2(0, T; F)} \leqslant \text{const},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\hat{w}_h(\tau)|^2 d\tau \leqslant \text{const}.$$

Следовательно, согласно (5.92), последовательность h', $k' \to 0$ может быть выбрана так, чтобы

$$\begin{aligned} &w_{h'} \to w \quad \text{*-слабо в } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)),\\ &w_{h'} \to w \quad \text{сильно в } L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)),\\ &p_{h'}w_{h'} \to \bar{\omega} w \quad \text{слабо в } L^2(0, T; F), \end{aligned} \tag{5.103}$$

где $w \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$. Теперь заметим, что справедливы следующие факты:

Лемма 5.8. $u_h - w_h \to 0$ *сильно в* $L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ *при* h, $k \to 0$;

$$\tag{5.104}$$

$$w = u; \tag{5.105}$$

$$u_{h'} \to u \quad \textit{сильно в } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad \textit{при } h', k' \to 0. \tag{5.106}$$

Доказательство. В точности так же, как в лемме 4.8, мы убеждаемся в том, что

$$|u_h - w_h|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))} = \sqrt{k/3}\left(\sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2\right)^{1/2}. \tag{5.107}$$

Поэтому (5.104) следует из оценки (5.22); утверждения (5.105) и (5.106) являются очевидными следствиями (5.102), (5.103) и (5.104). □

Теперь докажем, что u есть решение задачи 3.1.

Лемма 5.9. *Функция* u (*см.* (5.102), (5.103), (5.105)) *является решением задачи* 3.1.

Доказательство. Как нетрудно видеть, (5.12) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{w}_h(t),\ \boldsymbol{v}_h)+\nu((\boldsymbol{u}_h(t),\ \boldsymbol{v}_h))_h+b_h(\boldsymbol{u}_h(t-k),\ \boldsymbol{u}_h(t),\ \boldsymbol{v}_h)$$
$$=(\boldsymbol{f}_k(t),\ \boldsymbol{v}_h)\quad \forall t\in[0,\ T]\ \forall \boldsymbol{v}_h\in V_h, \tag{5.108}$$

где

$$\boldsymbol{f}_k(t)=\boldsymbol{f}^m,\quad (m-1)k\leqslant t<mk. \tag{5.109}$$

Пусть $\boldsymbol{v}$ — произвольный элемент из $\mathcal{V}^0$. Положим $\boldsymbol{v}_h=r_h\boldsymbol{v}$ в (5.108). Пусть ψ — непрерывно дифференцируемая скалярная функция на $[0,\ T]$, такая что

$$\psi(T)=0. \tag{5.110}$$

Умножим (5.108) (с $\boldsymbol{v}_h=r_h\boldsymbol{v}$) на $\psi(t)$ и проинтегрируем по t. Интегрируя первый член по частям, получаем

$$-\int_0^T(\boldsymbol{w}_h(t),\ \psi'(t)\,r_h\boldsymbol{v})\,dt+\nu\int_0^T((\boldsymbol{u}_h(t),\ \psi(t)\,r_h\boldsymbol{v}))_h\,dt$$
$$+\int_0^T b_h(\boldsymbol{u}_h(t-k),\ \boldsymbol{u}_h(t),\ \psi(t)\,r_h\boldsymbol{v})\,dt$$
$$=(\boldsymbol{u}_h^0,\ r_h\boldsymbol{v})\,\psi(0)+\int_0^T(\boldsymbol{f}_k(t),\ \psi(t)\,r_h\boldsymbol{v})\,dt. \tag{5.111}$$

Теперь, используя (5.90), (5.91), (5.102), (5.103) и лемму 5.8, перейдем в (5.111) к пределу по последовательности $h',\ k'\to 0$; напомним еще, что

$$r_h\boldsymbol{v}\to\overline{\omega}\boldsymbol{v}\quad \text{в } F \text{ (сильно)}, \tag{5.112}$$
$$\boldsymbol{u}_h^0\to\boldsymbol{u}_0\quad \text{в } L^2(\Omega) \text{ (сильно)}\,[1], \tag{5.113}$$
$$\boldsymbol{f}_k\to\boldsymbol{f}\quad \text{в } L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega)) \text{ (см. лемму 4.9)}. \tag{5.114}$$

---

[1] Напомним, как доказывается соотношение (5.113): вследствие (5.11) достаточно доказать его для $\boldsymbol{u}_0\in\mathcal{V}^0$, а в этом случае $|\boldsymbol{u}_h^0-\boldsymbol{u}_0|\leqslant|r_h\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_0|\leqslant\|p_hr_h\boldsymbol{u}_0-\overline{\omega}\boldsymbol{u}_0\|_F\to 0$.

В пределе получим

$$-\int_0^T (u(t), \psi'(t) v)\, dt + \nu \int_0^t ((u(t), \psi(t) v))\, dt$$
$$+ \int_0^T b(u(t), u(t), \psi v)\, dt$$
$$= (u_0, v)\, \psi(0) + \int_0^T (f(t), v)\, \psi(t)\, dt. \quad (5.115)$$

Из этого равенства мы выводим, что u является решением задачи 3.1, точно так же как мы выводили это в доказательстве теоремы 3.1 из равенства (3.43). □

Поскольку решение задачи 3.1 единственно (см. теорему 3.2), рассуждением от противного, которое мы уже неоднократно использовали, получаем, что

утверждения о сходимости (5.102) и (5.103) верны для всей последовательности $h, k \to 0$. (5.116)

Это завершает доказательство теоремы 5.4.

5.7.4. *Доказательство утверждения* (5.97). Для полноты изложения мы докажем еще (5.97). При этом нам понадобится один предварительный результат, который является весьма общим и интересен сам по себе.

Лемма 5.10. *Пусть* $\{(V_h, p_h, r_h)_{\mathscr{H}}, (\bar{\omega}, F)\}$ — *устойчивая сходящаяся внешняя аппроксимация пространства* V. *Для заданного элемента* v *из* $L^2(0, T; V)$ *можно определить для каждого* $h \in \mathscr{H}$ *функцию* $v_h^+ \in L^2(0, T; V_h)$, *такую что* $p_h v_h^+ \to \bar{\omega} v$ *в* $L^2(0, T; F)$ *при* $h \to 0$.

Доказательство. Доказательство по существу то же самое, что и для предложения I.3.1. Утверждение очевидно, если v — ступенчатая функция, так как ступенчатые функции плотны в $L^2(0, T; V)$. В общем случае результат получается с помощью двойного предельного перехода, как в предложении I.3.1. □

Лемма 5.11. *Пусть размерность пространства* $n = 2$; *тогда для схемы* 5.1

$$p_h u_h \to \bar{\omega} u \text{ в } L^2(0, T; F) \text{ (сильно) при } h, k \to 0. \quad (5.117)$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$X_h = |u_h^N - u(T)|^2 + \sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 + 2\nu \int_0^T \| u_h(t) - u_h^+(t) \|_h^2\, dt,$$

где u_h^+ определяется так же, как в лемме 5.10. Согласно (5.21) (лемма 5.1), $|u_h^N| \leqslant \text{const}$; следовательно, существует подпоследовательность h', $k' \to 0$, такая что

$$u_{h'}^N \to \chi \text{ слабо в } L^2(\Omega). \tag{5.118}$$

Примем временно на веру, что

$$(\chi - u(T),\ v) = 0 \quad \forall v \in H, \tag{5.119}$$

и докажем, что $X_{h'} \to 0$. Положим $X_h = X_h^1 + X_h^2 + X_h^3$, где

$$X_h^1 = |u(T)|^2 + 2\nu \int_0^T \| u_h^+(t)\|_h^2\, dt \to |u(T)|^2 + 2\nu \int_0^T \|u(t)\|^2\, dt$$

(в силу леммы 5.10 и условия (5.90)),

$$X_h^2 = -2(u_h^N,\ u(T)) -$$
$$-4\nu \int_0^T ((u_h(t), u_h^+(t)))_h dt \to -2|u(T)|^2 - 4\nu \int_0^T \|u(t)\|^2\, dt$$

(в силу леммы 5.10 и условий (5.90), (5.118)—(5.119); напомним также, что $u(T) \in H$) и

$$X_h^3 = |u_h^N|^2 + \sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 + 2\nu \int_0^T \| u_h(t)\|_h^2\, dt$$
$$= |u_h^N|^2 + \sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 + 2k \sum_{m=1}^{N_0} \|u_h^m\|_h^2. \tag{5.120}$$

Суммируя уравнения (5.26) для $m = 1, \ldots, N$, получаем

$$X_h^3 = |u_h^0|^2 + 2k \sum_{m=1}^{N} (f^m,\ u_h^m) = |u_h^0|^2 + 2 \int_0^T (f_k(t),\ u_h(t))\, dt.$$

Далее, очевидно, что

$$X_h^3 \to |u_0|^2 + 2 \int_0^T (f(t),\ u(t))\, dt \text{ при } h,\ k \to 0. \tag{5.121}$$

Отсюда

$$X_{h'} \to |u_0|^2 + 2 \int_0^T (f(t),\ u(t))\, dt - |u(T)|^2$$
$$-2\nu \int_0^T \|u(t)\|^2\, dt, \tag{5.122}$$

и, как следует из (4.55), этот предел равен 0. Рассуждая от противного, мы показываем, что и вся последовательность X_h

сходится к 0: $X_h \to 0$ при h, $k \to 0$. В частности,

$$\int_0^T \| \boldsymbol{u}_h(t) - \boldsymbol{u}_h^+(t) \|_h^2 \, \mathrm{d}t \to 0$$

и

$$\int_0^T \| p_h \boldsymbol{u}_h(t) - \bar{\omega} \boldsymbol{u}(t) \|_F^2 \, \mathrm{d}t \leqslant c \left\{ \int_0^T \| \boldsymbol{u}_h(t) - \boldsymbol{u}_h^+(t) \|_h^2 \, \mathrm{d}t + \int_0^T \| p_h \boldsymbol{u}_h^+(t) - \bar{\omega} \boldsymbol{u}(t) \|_F^2 \, \mathrm{d}t \right\} \to 0,$$

откуда и вытекает (5.117). Остается доказать (5.119). Суммируя (5.12) для $m = 1, \ldots, N$, приходим к равенству

$$(\boldsymbol{u}_h^N - \boldsymbol{u}_h^0, \boldsymbol{v}_h) + k\nu \sum_{m=1}^{N} ((\boldsymbol{u}_h^m, \boldsymbol{v}_h))_h + k \sum_{m=1}^{N} b_h(\boldsymbol{u}_h^{m-1}, \boldsymbol{u}_h^m, \boldsymbol{v}_h) = k \sum_{m=1}^{N} (\boldsymbol{f}^m, \boldsymbol{v}_h),$$

Полагая $\boldsymbol{v}_h = r_h \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$, легко переходим к пределу и получаем

$$(\chi - \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}) + \nu \int_0^T ((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})) \, \mathrm{d}t + \int_0^T b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}t = \int_0^T (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}t \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}.$$

Поскольку интегрирование (3.13) дает аналогичное уравнение с χ, замененным на $\boldsymbol{u}(T)$, мы заключаем, что $(\chi - \boldsymbol{u}(T), \boldsymbol{v}) = 0$ $\forall \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$, откуда и следует (5.119), ибо $\mathscr{V}$ плотно в H. □

5.7.5. Доказательство теорем 5.4 *и* 5.5 (*прочие случаи*). Для схем 5.2—5.4 в случае $n = 2$ доказательство проводится аналогичным образом, с использованием соответствующих априорных оценок.

Для схемы 5.2 мы ввели условие (5.96) как некое достаточное условие для (5.104); более точно, в этом случае аналог (5.104) является следствием (5.77), (5.107) и (5.96). Для схем 5.3, 5.4 условия устойчивости (5.43), (5.56), (5.57) просто обеспечивают ограниченность $\boldsymbol{u}_h$ и $p_h \boldsymbol{u}_h$ в надлежащих пространствах.

Условие (5.98) появляется при доказательстве (5.97) следующим образом:

— Для схемы 5.4 „естественным“ выражением, аналогичным X_h в лемме 5.11, является

$$Y_h = |u_h^N - u(T)|^2 - \sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 + 2\nu \int_0^T \| u_h(t) - u_h^+(t) \|_h^2 \, dt;$$

для того чтобы вывести (5.97) из того факта, что $Y_h \to 0$, достаточно, чтобы $\sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 \to 0$, а это следует из (5.98).

— Для схемы 5.3 мы рассматриваем то же самое выражение X_h, но из-за присутствия некоторых членов, содержащих b_h (см. (5.47)), выражение X_h^3 не такое простое, как (5.121); (5.98) показывает, что дополнительные члены в X_h^3, содержащие b_h, сходятся к 0.

Что касается случая $n=3$, то заметим прежде всего, что хотя условия устойчивости не упоминаются явно в формулировке теоремы 5.5, на самом деле именно с помощью этих условий и априорных оценок, которые из них вытекают, доказывается существование подпоследовательности h', $k' \to 0$, для которой выполняются условия (5.99)—(5.101). То что u является решением задачи 3.1, доказывается точно так же, как выше.

§ 6. Дискретизация уравнений Навье—Стокса. Приложение общих результатов

Мы хотим теперь явно сформулировать все предположения и заключения теорем об устойчивости и сходимости (теорем 5.1—5.5) для конкретных аппроксимаций пространства V. Напомним, что окончательный вид и эффективность рассмотренных в § 5, схем также зависят от выбора аппроксимации пространства V т. е. дискретизации по пространственным переменным.

В п. 6.1 рассматривается аппроксимация пространства V конечными разностями (АПР1). В п. 6.2 мы будем иметь дело с методами согласованных конечных элементов: аппроксимацией V будет одна из аппроксимаций (АПР2)—(АПР4). В п. 6.3 исследуются методы несогласованных конечных элементов (аппроксимация (АПР5)). Затем в п. 6.4 мы изучим некоторые алгоритмы для практического решения возникающих конечномерных задач (т. е. практического вычисления u_h^m для одной из схем 5.1 и 5.4).

***6.1. Конечные разности* ((АПР1)).** Возьмем в качестве аппроксимации пространства V, рассмотренной в начале п. 5.1, конкретную аппроксимацию (АПР1). Мы будем последовательно проверять и интерпретировать для этого случая предположения теорем 5.1—5.5.

6.1.1. Вычисление $S(h)$. Условия (5.3) и (5.4), очевидно, выполнены; согласно предложению 1.3.3,

$$|u_h| \leqslant d_0 \| u_h \|_h, \quad d_0 = 2l, \tag{6.1}$$

где l — наименьшая ширина области Ω в направлениях $x_1, \ldots, x_n$. В следующем предложении наша цель — проверить (5.5) и явно вычислить вид $S(h)$.

Предложение 6.1. *Для аппроксимации* (АПР1)

$$S(h) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^{-2}\right)^{1/2} \quad \forall h = (h_1, \ldots, h_n). \tag{6.2}$$

Доказательство. Имеем

$$\| u_h \|_h^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ h_j^{-2} \int_\Omega | u_{ih}(x + \vec{h}_j/2) - u_{ih}(x - \vec{h}_j/2)|^2 \, dx \right\}$$

$$\leqslant 2 \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ h_j^{-2} \int_{\mathbb{R}^n} (| u_{ih}(x + \vec{h}_j/2)|^2 + | u_{ih}(x - \vec{h}_j/2)|^2) \, dx \right.$$

$$\leqslant 4 \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ h_j^{-2} \int_{\mathbb{R}^n} | u_{ih}(x)|^2 \, dx \right\} \leqslant 4 \left(\sum_{j=1}^{n} h_j^{-2} \right) |u_h|^2,$$

откуда и следует (6.2). □

6.1.2. Форма b_h *и* $S_1(h)$. Для аппроксимации (АПР1) мы выбираем опять форму b_h, определенную в § 3 гл. II (см. (3.27) — (3.29)):

$$b_h(u_h, v_h, w_h) = b_h'(u_h, v_h, w_h) + b_h''(u_h, v_h, w_h), \tag{6.3}$$

$$b_h'(u_h, v_h, w_h) = 2^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_{ih}(\delta_{ih} v_{jh}) w_{jh} \, dx, \tag{6.4}$$

$$b_h''(u_h, v_h, w_h) = b_h'(u_h, w_h, v_h). \tag{6.5}$$

Очевидно, b_h является непрерывной трилинейной формой на $V_h \times V_h \times V_h$ и что (5.6) выполнено; для того чтобы получить оценку константы d_1 в (5.7), докажем следующие леммы.

Лемма 6.1. *Для* $n = 2$ *или* 3

$$|b_h'(u_h, v_h, w_h)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{2}} | u_h |^{1/2} \| u_h \|_h^{1/2} \| v_h \|_h | w_h |^{1/2} \| w_h \|_h^{1/2} \ (n = 2), \\ 3^{3/2} | u_h |^{1/4} \| u_h \|_h^{3/4} \| v_h \|_h | w_h |^{1/4} \| w_h \|_h^{3/4} \ (n = 3). \end{cases} \tag{6.6}$$

$$|b_h''(u_h, v_h, w_h)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{2}} | u_h |^{1/2} \| u_h \|_h^{1/2} | v_h |^{1/2} \| v_h \|_h^{1/2} \| w_h \|_h \ (n = 2), \\ 3^{3/2} | u_h |^{1/4} \| u_h \|_h^{3/4} | v_h |^{1/4} \| v_h \|_h^{3/4} \| w_h \|_h \ (n = 3). \end{cases} \tag{6.7}$$

Доказательство. Доказательство основано на предложении II.2.1. В силу (II.2.12) и (II.2.13),

$$\sum_{i=1}^{n}\|u_{ih}\|^2_{L^4(\Omega)} \leqslant 3\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{|u_{ih}|\left(\sum_{j=1}^{n}|\delta_{jh}u_{ih}|^2\right)^{1/2}\right\} \leqslant 3\sqrt{2}|u_h|\|u_h\|_h \tag{6.8}$$

для $n=2$, а для $n=3$

$$\sum_{i=1}^{n}\|u_{ih}\|^2_{L^4(\Omega)} \leqslant 2\cdot 3^{3/2}\sum_{i=1}^{n}\left\{|u_{ih}|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\left(\sum_{j=1}^{n}|\delta_{jh}u_{ih}|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{3/4}\right\}$$

$$\leqslant \text{(в силу неравенства Гёльдера) } 2\cdot 3^{3/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|u_{ih}|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/4}$$

$$\times\left(\sum_{i,\,j=1}^{n}|\delta_{jh}u_{ih}|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{3/4} \leqslant 2\cdot 3^{3/2}|u_h|^{1/4}\|u_h\|_h^{3/4}. \tag{6.9}$$

Снова используя неравенство Гёльдера, получаем

$$|b'_h(u_h, v_h, w_h)| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\|u_{ih}\|_{L^4(\Omega)}\|\delta_{ih}v_{jh}\|_{L^2(\Omega)}\|w_{jh}\|_{L^4(\Omega)}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\|u_{ih}\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\|w_{jh}\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2}\|v_h\|_h,$$

$$|b''(u_h, v_h, w_h)| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\|u_{ih}\|_{L^4(\Omega)}\|v_{jh}\|_{L^4(\Omega)}\|\delta_{ih}w_{jh}\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\|u_{ih}\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\|v_{jh}\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2}\|w_h\|_h.$$

Поэтому для $n=2$, применяя (6.8), заключаем, что

$$|b'_h(u_h, v_h, w_h)| \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}|u_h|^{1/2}\|u_h\|_h^{1/2}\|v_h\|_h|w_h|_h^{1/2}\|w_h\|_h^{1/2},$$

$$|b''_h(u_h, v_h, w_h)| \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}|u_h|^{1/2}\|u_h\|_h^{1/2}|v_h|^{1/2}\|v_h\|_h^{1/2}\|w_h\|_h.$$

Для $n=3$, используя (6.9), также получаем утверждения (6.6) и (6.7). □

Лемма 6.2.

$$|b_h(u_h, v_h, w_h)| \leqslant d_1\|u_h\|_h\|v_h\|_h\|w_h\|_h \quad \forall u_h, v_h, w_h \in V_h, \tag{6.10}$$

где

$$d_1 = 6\sqrt{2}l \quad \text{для} \quad n=2; \quad d_1 = 6^{3/2}\sqrt{l} \quad \text{для} \quad n=3. \tag{6.11}$$

Доказательство. Эта оценка немедленно следует из (6.1), (6.3), (6.6) и (6.7). □

Предложение 6.2. *Для аппроксимации* (АПР1) *неравенство* (5.41) *выполняется с*

$$S_1(h) = \begin{cases} 3\sqrt{2}\, S(h) & \text{при } n=2, \\ 2\cdot 3^{3/2} S^{3/2}(h) & \text{при } n=3, \end{cases} \tag{6.12}$$

где $S(h)$ *задано равенством* (6.2).

Доказательство. Используя (6.1), (6.6) и (6.7), мы можем записать

$$\begin{aligned}
|b_h'(u_h, u_h, w_h)| &\leqslant \frac{3}{\sqrt{2}} |u_h|^{1/2} \|u_h\|_h^{3/2} |w_h|^{1/2} \|w_h\|_h^{1/2} \\
&\leqslant \frac{3}{\sqrt{2}} S(h) |u_h| \|u_h\|_h |w_h| \quad (n=2), \\
|b_h'(u_h, u_h, w_h)| &\leqslant 3^{3/2} |u_h|^{1/4} \|u_h\|_h^{3/4} \|v_h\|_h |w_h|^{1/4} \|w_h\|_h^{3/4} \\
&\leqslant 3^{3/2} S^{3/2}(h) |u_h| \|u_h\|_h |w_h| \quad (n=3), \\
|b_h''(u_h, u_h, w_h)| &\leqslant \frac{3}{\sqrt{2}} |u_h| \|u_h\|_h \|w_h\|_h \\
&\leqslant \frac{3}{\sqrt{2}} S(h) |u_h| \|u_h\|_h |w_h| \quad (n=2), \\
|b_h''(u_k, u_h, w_h)| &\leqslant 3^{3/2} |u_h|^{1/2} \|u_h\|_h^{3/2} \|w_h\|_h \\
&\leqslant 3^{3/2} S^{3/2}(h) |u_h| \|u_h\|_h |w_h| \quad (n=3),
\end{aligned}$$

откуда легко получаем (6.12). □

6.1.3. Приложение теорем об устойчивости и сходимости. Схемы 5.1 и 5.2 безусловно устойчивы. Условия устойчивости схемы 5.3 даны в теореме 5.2 и лемме 5.3:[1]

$$n=2:\ k\left(\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{h_i^2}\right) \leqslant \min\left(\frac{d'}{2^3 3^2}, \frac{d''}{2^2}\right), \tag{6.13}$$

$$n=3:\ k\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i^2}\right)^{3/2} \leqslant \frac{d'}{2^5 3^3},\quad k\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i^2}\right) \leqslant \frac{d''}{4}, \tag{6.14}$$

где d' и d'' определены в доказательстве леммы 5.3.

[1] Второе из условий (6.14) является следствием первого для достаточно малых h.

Для схемы 5.4 условия устойчивости, указанные в теореме 5.3, имеют следующий вид:

$$n=2:\ k\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{h_i^2}\right)\leqslant\frac{1-\delta}{2^4\nu},\quad k\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{h_i^2}\right)\leqslant\frac{\nu\delta}{3^2 2^6 d_5},\tag{6.15}$$

$$n=3:\ k\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i^2}\right)\leqslant\frac{1-\delta}{2^4\nu};\quad k\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i^2}\right)^{3/2}\leqslant\frac{\nu\delta}{2^8 3^3 d_5}\tag{6.16}$$

для некоторого δ, $0<\delta<1$; d_5 задано равенством (5.58).

Теоремы 5.4 и 5.5 дают (в случае если они применимы)

$$\boldsymbol{u}_h\to\boldsymbol{u}\ \text{сильно в}\ \boldsymbol{L}^2(Q)\ \text{и *-слабо в}\ L^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega)),\tag{6.17}$$

$$\delta_{ih}\boldsymbol{u}_h\to D_i\boldsymbol{u}\ \text{сильно или слабо в}\ \boldsymbol{L}^2(Q)\tag{6.18}$$

(в зависимости от того, какая сходимость имеет место в $L^2(0,T;F)$, сильная или слабая).

Теоремы 5.4 и 5.5 основаны на предположениях (5.89) — (5.92). Нам надо проверить, что эти условия выполнены; этой технической частью доказательства мы сейчас и займемся.

6.1.4. Проверка условий (5.89) — (5.92).

Проверка условия (5.89). Если

$$\boldsymbol{u}_{h'}\to\boldsymbol{u}\ \text{слабо в}\ L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega)),\tag{6.19}$$

$$p_{h'}\boldsymbol{u}_{h'}\to\varphi=(\varphi_0,\ldots,\varphi_n)\ \text{слабо в}\ L^2(0,T;F),\tag{6.20}$$

то (по лемме 5.7) φ должно равняться $\bar{\omega}\boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v}\in L^2(0,T;V)$. С другой стороны, по определению p_h,

$$p_{h'}\boldsymbol{u}_{h'}\to\varphi_0=\boldsymbol{v}\ \text{слабо в}\ \boldsymbol{L}^2(Q);\tag{6.21}$$

сравнение (6.19) и (6.21) показывает, что $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ (как элементы из $\boldsymbol{L}^2(Q)$). Следовательно, $\varphi(t)=\bar{\omega}\boldsymbol{u}(t)$ п. в. и $\boldsymbol{u}\in L^2(0,T;V)$.

Проверка условия (5.90). Если $p_{h'}\boldsymbol{v}_{h'}\to\bar{\omega}\boldsymbol{v}$ слабо в $L^2(0,T;F)$, $p_{h'}\boldsymbol{w}_{h'}\to\bar{\omega}\boldsymbol{w}$ сильно в $L^2(0,T;F)$, то $\delta_{ih}\boldsymbol{v}_{h'}\to D_i\boldsymbol{v}$ слабо в $\boldsymbol{L}^2(Q)$, $\delta_{ih'}\boldsymbol{w}_{h'}\to D_i\boldsymbol{w}$ сильно в $\boldsymbol{L}^2(Q)$ и ясно, что

$$\int_0^T((\boldsymbol{v}_{h'}(t),\boldsymbol{w}_{h'}(t)))_{h'}\,\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ih}\boldsymbol{v}_{h'})(\delta_{ih'}\boldsymbol{w}_{h'})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\to\int_0^T\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{n}D_i\boldsymbol{v}D_i\boldsymbol{w}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_0^T((\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{w}(t)))\,\mathrm{d}t.$$

Проверка условия (5.91). Доказательство аналогично доказательству леммы II.3.1. Предположим, что

$$\boldsymbol{u}_{h'}\to\boldsymbol{u}\ \text{сильно в}\ \boldsymbol{L}^2(Q),\tag{6.22}$$

$$p_{h'}\boldsymbol{v}_{h'}\to\bar{\omega}\boldsymbol{v}\ \text{слабо в}\ L^2(0,T;F),\tag{6.23}$$

$$\psi_{h'}\to\psi\ \text{в}\ L^\infty(0,T),\tag{6.24}$$

и пусть w — фиксированный элемент из $\mathscr{V}$. Из (6.23) следует, что

$$v_{h'} \to v \text{ слабо в } L^2(Q), \tag{6.25}$$

$$\delta_{ih'} v_{h'} \to D_i v \text{ слабо в } L^2(Q), \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n. \tag{6.26}$$

С другой стороны, как было отмечено в доказательстве леммы 11.3,

$$r_h w \to w \text{ в норме } L^\infty(\Omega), \tag{6.27}$$

$$\delta_{ih} r_h w \to D_i w \text{ в норме } L^\infty(\Omega), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{6.28}$$

Рассмотрим сначала форму b'_h;

$$\int_0^T b'_h(u_h(t), v_h(t), \psi_h(t) r_h w)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega u_{ih}(\delta_{ih} v_{jh})\,\psi_h w_{jh}\,dx\,dt.$$

Из (6.22), (6.24), (6.26) и (6.27) вытекает, что для всех i и j

$$\int_0^T\int_\Omega u_{ih'}(\delta_{ih'} v_{jh'})\,\psi_k w_{jh'}\,dx\,dt \to \int_0^T\int_\Omega u_i(D_i v_j)\,\psi w_j\,dx\,dt$$

и, следовательно,

$$\int_0^T b'_{h'}(u_{h'}(t), v_{h'}(t), \psi_{k'}(t) r_{h'} w)\,dt \to \frac{1}{2}\int_0^T b(u(t), v(t), \psi(t) w)\,dt.$$

Аналогично

$$\int_0^T b''_{h'}(u_{h'}(t), v_{h'}(t), \psi_{k'}(t) r_{h'} w)\,dt \to$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T b(u(t), \psi(t) w, v(t))\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T b(u(t), v(t), \psi(t) w)\,dt,$$

чем (5.91) и доказано.

Проверка условия (5.92). Пусть $\{v_{h'}\}$ — последовательность функций из $\mathbb{R}$ в V_h с носителем в $[0, T]$ (или в любом фиксированном компактном подмножестве прямой $\mathbb{R}$), таких что

$$\int_0^T \|v_{h'}(t)\|_{h'}^2\,dt \leqslant \mathrm{const}, \tag{6.29}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}\,|\hat{v}_{h'}(\tau)|^2\,d\tau \leqslant \mathrm{const} \quad (\gamma > 0). \tag{6.30}$$

Нам надо доказать, что эта последовательность относительно компактна в $L^2(Q)$. Поскольку операторы p_h устойчивы, имеем

$$\int_0^T \| p_{h'} \boldsymbol{v}_{h'}(t) \|_F^2 \, dt \leqslant \text{const}, \tag{6.31}$$

и, следовательно, последовательность h' содержит подпоследовательность (также обозначаемую через h'), такую что

$$p_{h'} \boldsymbol{v}_{h'} \to \overline{\omega} \boldsymbol{v} \quad \text{слабо в } L^2(\mathbb{R}; F), \tag{6.32}$$

$$\boldsymbol{v}_{h'} \to \boldsymbol{v} \quad \text{слабо в } L^2(\mathbb{R}; \boldsymbol{L}^2(\Omega)), \tag{6.33}$$

где $\boldsymbol{v}$ — некоторая функция из $L^2(\mathbb{R}; V)$, равная 0 вне интервала $[0, T]$ (здесь мы использовали (5.89)). Достаточно установить, что сходимость (6.33) сильная, т. е. что сходится к нулю следующее выражение:

$$I_{h'} = \int_{-\infty}^{+\infty} | \boldsymbol{v}_{h'}(t) - \boldsymbol{v}(t) |^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} | \hat{\boldsymbol{v}}_{h'}(\tau) - \hat{\boldsymbol{v}}(\tau) |^2 \, d\tau \tag{6.34}$$

(последнее равенство справедливо в силу формулы Парсеваля). Следуя доказательству теоремы 2.2, запишем

$$\begin{aligned} I_{h'} = & \int_{|\tau| \leqslant M} | \hat{\boldsymbol{v}}_{h'}(\tau) - \hat{\boldsymbol{v}}(\tau) |^2 \, d\tau \\ & + \int_{|\tau| > M} (1 + |\tau|^{2\gamma}) | \hat{\boldsymbol{v}}_{h'}(\tau) - \hat{\boldsymbol{v}}(\tau) |^2 \frac{d\tau}{1 + |\tau|^{2\gamma}} \\ \leqslant & \int_{|\tau| \leqslant M} | \hat{\boldsymbol{v}}_{h'}(\tau) - \hat{\boldsymbol{v}}(\tau) |^2 \, d\tau \\ & + \frac{1}{1 + M^{2\gamma}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\tau|^{2\gamma}) | \hat{\boldsymbol{v}}_{h'}(\tau) - \hat{\boldsymbol{v}}(\tau) |^2 \, d\tau \\ \leqslant & \int_{|\tau| \leqslant M} | \hat{\boldsymbol{v}}_{h'}(\tau) \hat{\boldsymbol{v}}(\tau) |^2 \, d\tau + \frac{c}{1 + M^{2\gamma}} \end{aligned}$$

(в силу (6.1), (6.29) и (6.30)). Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем M так, чтобы $C/(1 + M^{2\gamma}) \leqslant \varepsilon/2$. Тогда

$$I_{h'} \leqslant J_{h'} + \varepsilon/2, \tag{6.35}$$

где

$$J_{h'} = \int_{|\tau| \leqslant M} | \hat{\boldsymbol{v}}_{h'}(\tau) - \hat{\boldsymbol{v}}(\tau) |^2 \, d\tau, \tag{6.36}$$

и сходимость $I_{h'}$ к нулю будет установлена, если мы покажем, что

$$J_{h'} \to 0 \text{ при } h', \ k' \to 0. \tag{6.37}$$

Это последнее можно доказать, воспользовавшись теоремой Лебега. А именно, для каждого τ

$$\hat{v}_{h'}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} v_{h'}(t)\,e^{-2i\pi t\tau}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} v_{h'}(t)\,\chi(t)\,e^{-2i\pi t\tau}\,dt, \tag{6.38}$$

где χ — произвольная гладкая функция с компактным носителем, равная 1 на $[0, T]$ (так что $v_{h'}=\chi v_{h'}\ \forall h'$). Тогда

$$|\hat{v}_{h'}(\tau)|\leqslant|v_{h'}|_{L^2(\mathbf{R};\,L^2(\Omega))}\|e^{-2i\pi t\tau}\chi\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\mathrm{const}=C_1, \tag{6.39}$$

$$|\hat{v}_{h'}(\tau)-\hat{v}(\tau)|^2\leqslant 2\,(C_1^2+|\hat{v}(\tau)|^2)\ \ \forall\tau \tag{6.40}$$

и, согласно (6.33) и (6.38),

$$\hat{v}_{h'}(\tau)\to\hat{v}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,\chi(t)\,e^{-2\pi i t\tau}\,dt \quad \text{слабо в } L^2(\Omega) \tag{6.41}$$

для каждого τ. Далее, в силу (6.38),

$$\|v_{h'}(\tau)\|_{h'}\leqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\|v_{h'}(t)\|^2\,dt\right)^{1/2}\|e^{-2i\pi t\tau}\chi\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant\mathrm{const}.$$

Эта последняя оценка и дискретная теорема о компактности (теорема II.2.2 и замечание II.2.4) показывают, что утверждение о сходимости (6.41) имеет место также в норме $L^2(\Omega)$: $|\hat{v}_{h'}(\tau)-\hat{v}(\tau)|^2\to 0\ \forall\tau$. Применяя теорему Лебега, заключаем на основании (6.40) и уже полученных результатов о сходимости, что справедливо (6.37).

6.2. Согласованные конечные элементы **((АПР2) — (АПР4)).** В качестве аппроксимации пространства V, рассмотренной в начале п. 5.1, выбираем теперь одну из аппроксимаций (АПР2) — (АПР4). Проверим и проинтерпретируем для нее предположения теорем 5.1 — 5.5. Для всех этих методов

$$V_h\subset H_0^1(\Omega),\quad \|u_h\|_h=\|u_h\|\ \ \forall u_h\in V_h, \tag{6.42}$$

а p_h — тождественный оператор $\forall h$.

6.2.1. Вычисление $S(h)$. Условия (5.3) и (5.4), очевидно, выполнены; согласно неравенству Пуанкаре (см. (I.1.9)),

$$|u_h|\leqslant d_0\|u_h\|_h,\quad d_0=2l, \tag{6.43}$$

где l — наименьшая ширина области Ω в направлениях $x_1, \ldots, x_n$. Для (5.5) имеем

Предложение 6.3. *Для аппроксимаций* (АПР2) — (АПР4)

$$S(h)=c_a/\rho'(h), \tag{6.44}$$

где c_q — константа, зависящая от степени q рассматриваемых элементов [1].

Доказательство. Пространство V_h — это пространство полиномов степени не выше $q=2, 3$ или 4 для аппроксимаций (АПР2), (АПР3), (АПР4) соответственно. Константа устойчивости $S(h)$ мажорируется квадратным корнем из выражения

$$\sup_{u_h \in V_h} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\operatorname{grad} u_{ih}(x)|^2 \, dx \Big/ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u_{ih}(x)|^2 \, dx \right\}. \tag{6.45}$$

Оценка этого супремума связана с оценкой супремума выражения

$$\int_{\mathscr{S}} |\operatorname{grad} \varphi(x)|^2 \, dx \Big/ \int_{\mathscr{S}} |\varphi(x)^2 \, dx \tag{6.46}$$

по всем функциям φ, которые являются полиномами степени не выше q, и всем $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$. Действительно, пусть μ_q — какая-нибудь верхняя граница для этого супремума; мы можем тогда записать для всех $i=1, \ldots, n$ и $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$

$$\int_{\mathscr{S}} |\operatorname{grad} u_{ih}(x)|^2 \, dx \leqslant \mu_q \int_{\mathscr{S}} |u_{ih}(x)|^2 \, dx,$$

где u_h принадлежит V_h, а q имеет значение, соответствующее действительному выбору пространства V_h. Суммируя по i и $\mathscr{S}$, получаем

$$\begin{aligned} \|u_h\|_h^2 &= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\operatorname{grad} u_{ih}(x)|^2 \, dx \\ &\leqslant \mu_q \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u_{ih}(x)|^2 \, dx = \mu_q |u_h|^2, \end{aligned} \tag{6.47}$$

так что можно положить

$$S(h) = \sqrt{\mu_q}. \tag{6.48}$$

Для того чтобы оценить (6.46), мы используем линейное отображение Λ: $\bar{x} \mapsto x$, переводящее в $\mathscr{S}$ стандартный n-симплекс $\bar{\mathscr{S}}$: $0 \leqslant \bar{x}_i \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \leqslant 1$. Функция $\varphi(\Lambda\bar{x})$ является полиномом степени не выше q на $\bar{\mathscr{S}}$. Заметим, что функционалы

$$\left\{ \int_{\bar{\mathscr{S}}} |\operatorname{grad} \psi(\bar{x})|^2 \, d\bar{x} \right\}^{1/2} \quad \text{и} \quad \left\{ \int_{\bar{\mathscr{S}}} |\psi(\bar{x})|^2 \, d\bar{x} \right\}^{1/2}$$

[1] $\rho'(h)$ было определено в (1.4.19).

представляют собой соответственно полунорму и норму в конечномерном пространстве полиномов степени не выше q на $\bar{\mathscr{S}}$. Поэтому существует константа $\bar{\mu}_q$, зависящая только от q (и $\bar{\mathscr{S}}$), такая что

$$\int_{\bar{\mathscr{S}}} |\operatorname{grad} \psi(\bar{x})|^2 \, d\bar{x} \leqslant \bar{\mu}_q \int_{\bar{\mathscr{S}}} |\psi(\bar{x})|^2 \, d\bar{x}$$

для всех таких полиномов ψ. В частности,

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\bar{\mathscr{S}}} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(\Lambda\bar{x}) \right|^2 d\bar{x} \leqslant \bar{\mu}_q \int_{\bar{\mathscr{S}}} |\varphi(\Lambda\bar{x})|^2 \, d\bar{x} \tag{6.49}$$

для рассматриваемых полиномов φ. Но

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi(\Lambda\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(\Lambda\bar{x}) \cdot \Lambda_{jk},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x) \right|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(\Lambda\bar{x}) \Lambda_{jk} \right|^2 \right\}$$

$$\leqslant \|\Lambda\|^2 \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(\Lambda\bar{x}) \right|^2 \right\}.\ [1]$$

Отсюда и из (6.49) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\bar{\mathscr{S}}} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\Lambda\bar{x}) \right|^2 d\bar{x} \leqslant \bar{\mu}_q \|\Lambda\|^2 \int_{\bar{\mathscr{S}}} |\varphi(\Lambda\bar{x})|^2 \, d\bar{x}.$$

Возвращаясь к симплексу $\mathscr{S}$ с помощью новой замены переменных $\bar{x} = \Lambda^{-1}x$, получаем

$$\int_{\mathscr{S}} |\operatorname{grad} \varphi(x)|^2 \, dx \leqslant \bar{\mu}_q \|\Lambda\|^2 \int_{\mathscr{S}} |\varphi(x)|^2 \, dx.$$

Согласно лемме 1.4.3, $\|\Lambda\| \leqslant \rho_{\bar{\mathscr{S}}}/\rho'_{\mathscr{S}}$. Для рассматриваемой триангуляции $\rho'_{\mathscr{S}} \geqslant \rho'(h)$; следовательно, $\|\Lambda\| \leqslant \rho_{\bar{\mathscr{S}}}/\rho'(h)$ и мы можем положить $\mu_q = \bar{\mu}_q(\rho_{\bar{\mathscr{S}}}/\rho'(h))^2$. Таким образом, (6.44) выполняется с

$$c_q = \sqrt{\bar{\mu}_q}\,\rho_{\bar{\mathscr{S}}}. \ \square \tag{6.50}$$

6.2.2. Форма b_h *и* $S_1(h)$. Для аппроксимаций (АПР2)—(АПР4) мы рассмотрим опять форму b_h, определенную в § 3 гл. II

[1] $\|\Lambda\|$ — норма линейного оператора Λ, отвечающая эвклидовой норме в $\mathbb{R}^n$.

(см. (3.55)):

$$b_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) = b'(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) + b''(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h), \tag{6.51}$$

$$b'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n} \int_\Omega u_i (D_i v_j) w_j \, dx, \tag{6.52}$$

$$b''(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -b'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}). \tag{6.53}$$

Форма b_h является непрерывной трилинейной формой на $V_h \times V_h \times V_h$, удовлетворяющей (5.6); оценка констант d_1 и $S_1(h)$ будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 6.3. *Для* $n=2$ *или* 3 *и для* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$

$$|b'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} |\boldsymbol{u}|^{1/2} \|\boldsymbol{u}\|^{1/2} \|\boldsymbol{v}\| \, |\boldsymbol{w}|^{1/2} \|\boldsymbol{w}\|^{1/2} & (n=2), \\ |\boldsymbol{u}|^{1/4} \|\boldsymbol{u}\|^{3/4} \|\boldsymbol{v}\| \, |\boldsymbol{w}|^{1/4} \|\boldsymbol{w}\|^{3/4} & (n=3), \end{cases} \tag{6.54}$$

$$|b''(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} |\boldsymbol{u}|^{1/2} \|\boldsymbol{u}\|^{1/2} |\boldsymbol{v}|^{1/2} \|\boldsymbol{v}\|^{1/2} \|\boldsymbol{w}\| & (n=2), \\ |\boldsymbol{u}|^{1/4} \|\boldsymbol{u}\|^{3/4} |\boldsymbol{v}|^{1/4} \|\boldsymbol{v}\|^{3/4} \|\boldsymbol{w}\| & (n=3). \end{cases} \tag{6.55}$$

Доказательство. Для $n=2$ результат следует из леммы 3.4, если заметить, что $b'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (1/2) b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$, $b''(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -(1/2) b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$. Для $n=3$ доказательство основано на лемме 3.5:

$$\begin{aligned} |b'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| &\leqslant \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{3} \int_\Omega |u_i (D_i v_j) w_j| \, dx \\ &\leqslant \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{3} \|u_i\|_{L^4(\Omega)} \|D_i v_j\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \left(\sum_{i, j=1}^{3} \|D_i v_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{3} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{3} \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{6.56}$$

В силу (3.67),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 &\leqslant 2 \sum_{i=1}^{3} \left(\|u_i\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\operatorname{grad} u_i\|_{L^2(\Omega)}^{3/2} \right) \\ &\leqslant 2 \left(\sum_{i=1}^{3} \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/4} \left(\sum_{i=1}^{3} \|\operatorname{grad} u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{3/4} \leqslant 2 |\boldsymbol{u}|^{1/2} \|\boldsymbol{u}\|^{3/2}. \end{aligned} \tag{6.57}$$

Аналогично

$$\sum_{j=1}^{3} \|w_j\|^2_{L^4(\Omega)} \leqslant 2\,|w|^{1/2}\,\|w\|^{3/2}, \tag{6.58}$$

и (5.64) следует теперь из (6.56). Для b'' мы просто заметим, что $b''(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -b'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$, и применим (6.54). □

Лемма 6.4.

$$|b_h(u_h, v_h, w_h)| \leqslant d_1 \|u_h\|\,\|v_h\|\,\|w_h\|\ \forall u_h, v_h, w_h \in V_h, \tag{6.59}$$

где

$$d_1 = 2\sqrt{2l}\ \textit{для}\ n=2,\ d_1 = 2^{3/2}\sqrt{l}\ \textit{для}\ n=3. \tag{6.60}$$

Доказательство. Это немедленно следует из (6.43), (6.51), (6.54) и (6.55). □

Предложение 6.4. *Для аппроксимаций* (АПР2)—(АПР4) *неравенство* (5.41) *выполняется с*

$$S_1(h) = \sqrt{2}\,S(h)\ \textit{при}\ n=2,\ S_1(h) = 2S^{3/2}(h)\ \textit{при}\ n=3, \tag{6.61}$$

где $S(h)$ *задано равенством* (6.44).

Доказательство. В силу (6.43), (6.54) и (6.55), имеем

$$|b'_h(u_h, v_h, w_h)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} S(h)\,|u_h|\,\|u_h\|\,|w_h|\ (n=2),$$

$$|b'_h(u_h, v_h, w_h)| \leqslant S^{3/2}(h)\,|u_h|\,\|u_h\|\,|w_h|\ (n=3),$$

$$|b''_h(u_h, v_h, w_h)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} S(h)\,|u_h|\,\|u_h\|\,|w_h|\ (n=2),$$

$$|b''_h(u_h, v_h, w_h)| \leqslant S^{3/2}(h)\,|u_h|\,\|u_h\|\,|w_h|\ (n=3).$$

6.2.3. Применение теорем об устойчивости и сходимости. Схемы 5.1 и 5.2 безусловно устойчивы. Условия устойчивости схемы 5.3 даны в теореме 5.2 и лемме 5.3:

$$n=2:\ \frac{k}{[\rho'(h)]^2} \leqslant \min\left(\frac{d'}{4c_q^2}, \frac{d''}{c_q}\right), \tag{6.62}$$

$$n=3:\ \frac{k}{[\rho'(h)]^3} \leqslant \frac{d'}{4c_q^3},\quad \frac{k}{[\rho'(h)]^2} \leqslant \frac{d''}{c_q^2}, \tag{6.63}$$

где d' и d'' определены в доказательстве леммы 5.3, а c_q—в доказательстве предложения 6.3. Для схемы 5.4 условия устойчивости даны в теореме 5.3 и лемме 5.4:

$$n=2:\ \frac{k}{[\rho'(h)]^2} \leqslant \frac{1-\delta}{4\nu c_q^2},\quad \frac{k}{[\rho'(h)]^2} \leqslant \frac{\nu\delta}{16c_q^2 d_5}, \tag{6.64}$$

$$n=3:\ \frac{k}{[\rho'(h)]^2} \leqslant \frac{1-\delta}{4\nu c_q^2},\quad \frac{k}{[\rho'(h)]^3} \leqslant \frac{\nu\delta}{32c_q^3 d_5} \tag{6.65}$$

для некоторого δ, $0 < \delta < 1$; d_5 задано равенством (5.58).

Интерпретация теорем о сходимости (теорем 5.4 и 5.5) очень проста в рассматриваемом случае, поскольку $F=H_0^1(\Omega)$. Имеем

$$u_h \to u \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ и } *\text{-слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{6.66}$$

$$u_h \to u \text{ в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ сильно или слабо} \tag{6.67}$$

(в зависимости от того, какая сходимость имеет место в $L^2(0, T; F)$ — сильная или слабая).

Предположения (5.89)—(5.92), на которых основано доказательство этих теорем, проверяются совсем легко, поэтому мы остановимся на этом лишь очень бегло.

Проверка условий (5.89)—(5.91). Условие (5.89) выполняется тривиальным образом, когда $F=H_0^1(\Omega)$, а операторы $\overline{\omega}$ и p_h являются тождественными.

Условие (5.90) сводится к утверждению, что если $v_{h'} \to v$ слабо в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ и $w_{h'} \to w$ сильно в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, то

$$\int_0^T ((v_{h'}(t), w_{h'}(t)))\,dt \to \int_0^T ((v(t), w(t)))\,dt;$$

но это очевидно.

Условие (5.91) можно доказать точно так же, как это уже было сделано несколько раз в аналогичных ситуациях[1].

Наконец, условие (5.92) выполняется в силу теоремы 2.2.

6.3. *Несогласованные конечные элементы* **(АПР5).** В качестве аппроксимации пространства V, рассмотренной в начале п. 5.1, выбирается теперь аппроксимация (АПР5) (кусочно-линейные несогласованные элементы). Проверим и проинтерпретируем для этого случая предположения теорем 5.1—5.5.

6.3.1. Вычисление $S(h)$. Условия (5.3) и (5.4), очевидно, выполнены; согласно предложению I.4.13,

$$|u_h| \leqslant d_0 \| u_h \|_h, \tag{6.68}$$

где $d_0=c'(\Omega, \alpha)$ — константа, зависящая от Ω и α (см. (I.4.179), явно вычислить которую довольно трудно; α имеет тот же смысл, что и в (I.4.21)).

Предложение 6.5. *Для аппроксимации* (АПР5)

$$S(h)=c_0(n)/\rho'(h), \tag{6.69}$$

где $c_0(n)$ — *константа, зависящая только от* n, *а* $\rho'(h)$ *определено так же, как в* (I.4.20).

---

[1] Напомним, что для всех рассматриваемых методов конечных элементов $w \in \mathcal{V}$, $r_h w \to w$ в $L^\infty(Q)$, $D_i r_h w \to D_i w$ в $L^\infty(Q)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, при $h \to 0$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 6.3. Константа $S(h)$ не превосходит квадратного корня из

$$\sup_{u_h \in V_h} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u_{ih}(x)|^2 \,dx \Big/ \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |u_{ih}(x)|^2 \,dx \right\}. \tag{6.70}$$

Как и в (6.48), можно показать, что $S(h)^2$ ограничено супремумом μ_1 выражения

$$\int_{\mathscr{S}} |\operatorname{grad} \varphi(x)|^2 \,dx \Big/ \int_{\mathscr{S}} |\varphi(x)|^2 \,dx$$

по всем линейным функциям φ и всем $\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h$. Используя линейное аффинное преобразование Λ, отображающее на $\mathscr{S}$ стандартный n-симплекс $\bar{\mathscr{S}}$ в $\mathbb{R}^n$: $0 \leqslant \bar{x}_i \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \leqslant 1$, заключаем, что $\mu_1 = \bar{\mu}_1 (\rho_{\mathscr{T}}/\rho'(h))^2$, где $\bar{\mu}_1$ — супремум по всем линейным функциям ψ отношения

$$\int_{\bar{\mathscr{S}}} |\operatorname{grad} \varphi(\bar{x})|^2 \,d\bar{x} \Big/ \int_{\bar{\mathscr{S}}} |\psi(x)|^2 \,d\bar{x}.$$

Следовательно, (6.69) выполняется с

$$c_0(n) = \sqrt{\bar{\mu}_1}\, \rho_{\mathscr{T}}. \quad \square \tag{6.71}$$

6.3.2. Форма b_h и $S_1(h)$. Для аппроксимации (АПР5) рассмотрим опять форму b_h, определенную в п. 3.1 гл. II (см. (3.80)—(3.82)):

$$b_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) = b_h'(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) + b_h''(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h), \tag{6.72}$$

$$b_h'(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_{ih} (D_{ih} v_{jh}) w_{jh} \,dx, \tag{6.73}$$

$$b_h''(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) = -b_h'(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}_h). \tag{6.74}$$

Ясно, что b_h', b_h'' и b_h — непрерывные трилинейные формы на $V_h \times V_h \times V_h$ и что выполнено (5.6). Значение константы d_1 из (5.7) можно найти из доказательства следующей леммы.

Лемма 6.5. *Для* $n = 2$

$$|b_h'(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)| \leqslant c_1(\Omega, \alpha, \varepsilon) |\boldsymbol{u}_h|^{1-\varepsilon/2} \|\boldsymbol{u}_h\|_h^{1+\varepsilon/2} \|\boldsymbol{v}_h\|_h |\boldsymbol{w}_h|^{1-\varepsilon/2} \|\boldsymbol{w}_h\|_h^{1+\varepsilon/2}, \tag{6.75}$$

$$|b_h''(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)| \leqslant c_1(\Omega, \alpha, \varepsilon) |\boldsymbol{u}_h|^{1-\varepsilon/2} \|\boldsymbol{u}_h\|_h^{1+\varepsilon/2} |\boldsymbol{v}_h|^{1-\varepsilon/2} \|\boldsymbol{v}_h\|_h^{1+\varepsilon/2} \|\boldsymbol{w}_h\|_h$$

при любом $0<\varepsilon<1$, *где* $c_1(\Omega,\alpha)$ *зависит только от* Ω, α *и* ε. *Для* $n=3$

$$|b'_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h)|\leqslant c_2(\Omega,\alpha)\,|\boldsymbol{u}_h|^{1/4}\,\|\boldsymbol{u}_h\|_h^{3/4}\,\|\boldsymbol{v}_h\|_h\,|\boldsymbol{w}_h|^{1/4}\,\|\boldsymbol{w}_h\|_h^{3/4},$$
$$|b''_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h)|\leqslant c_2(\Omega,\alpha)\,|\boldsymbol{u}_h|^{1/4}\,\|\boldsymbol{u}_h\|_h^{3/4}\,|\boldsymbol{v}_h|^{1/4}\,\|\boldsymbol{v}_h\|_h^{3/4}\,\|\boldsymbol{w}_h\|_h. \tag{6.76}$$

Доказательство. Оценки для b''_h получаются из оценок для b'_h простой перестановкой $\boldsymbol{v}_h$ и $\boldsymbol{w}_h$. Используя неравенство Гёльдера, как в лемме 6.1, находим

$$|b'_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h)|\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\|u_{ih}\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\|w_{ih}\|^2_{L^4(\Omega)}\right)\|\boldsymbol{v}_h\|_h. \tag{6.77}$$

Для того чтобы оценить L^4-нормы u_{ih} и v_{ih}, применим теорему II.2.3 и замечание II.2.6. В случае $n=3$ неравенство Шварца позволяет нам записать

$$\int_\Omega u_{ih}^4\,dx\leqslant\left(\int_\Omega u_{ih}^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega u_{ih}^6\,dx\right)^{1/2}\leqslant|u_{ih}|\,c(n,p,\Omega,\alpha)\|u_{ih}\|_h^3$$

(в силу (II.2.42), $n=2$, $p=2$). Отсюда

$$\sum_{i=1}^{3}\|u_{ih}\|^2_{L^4(\Omega)}\leqslant c_3(\Omega,\alpha)|u_h|^{1/2}\|\boldsymbol{u}_h\|_h^{3/2}, \tag{6.78}$$

и оценка (6.76) для b'_h следует из этой оценки и (6.77). В случае $n=2$ из-за отсутствия оценок такого типа, как в предложении II.2.1, мы поступим иначе. Ввиду неравенства Шварца,

$$\int_\Omega u_{ih}^4\,dx=\int_\Omega|u_{ih}|^{1-\varepsilon}|u_{ih}|^{3+\varepsilon}\,dx$$
$$\leqslant\left(\int_\Omega u_{ih}^2\,dx\right)^{1-\varepsilon/2}\left(\int_\Omega|u_{ih}|^{2(3+\varepsilon)/1+\varepsilon}\,dx\right)^{1+\varepsilon/2}$$
$$\leqslant c(\Omega,\alpha,\varepsilon)\,|u_{ih}|^{1-\varepsilon}\|u_{ih}\|_h^{3+}$$

(вследствие (II.2.48)). Поэтому

$$\sum_{i=1}^{2}\|u_{ih}\|^2_{L^4(\Omega)}\leqslant c_4(\Omega,\alpha,\varepsilon)\,|\boldsymbol{u}_h|^{1-\varepsilon}\|\boldsymbol{u}_h\|_h^{3+\varepsilon}, \tag{6.79}$$

откуда и следует оценка (6 75) для b'_h. □

Из леммы 6.5 в сочетании с (6.68) легко получается (5.7):

$$b_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h)\leqslant d_1\|\boldsymbol{u}_h\|_h\|\boldsymbol{v}_h\|_h\|\boldsymbol{w}_h\|_h\ \forall\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h\in V_h; \tag{6.80}$$

константа d_1 зависит от Ω и α.

Предложение 6.6. *Для аппроксимации* (АПР5) *неравенство* (5.41) *выполняется с*

$$S_1(h)=\begin{cases} c_1(\Omega,\ \alpha,\ \varepsilon)\,S(h)^{1+\varepsilon} & \text{для } n=2, \qquad (6.81)\\ c_2(\Omega,\ \alpha)\,S(h)^{3/2} & \text{для } n=3, \qquad (6.82)\end{cases}$$

где ε — *произвольное число, удовлетворяющее условию* $0<\varepsilon<1$, *а* $S(h)$, c_1, c_2 *заданы в* (6.69), (6.75) *и* (6.76).

Доказательство. В силу (6.69), (6.75) и (6.76), мы имеем для $n=2$

$$|b_h'(u_h,\ u_h,\ w_h)|\leqslant c_1(\Omega,\ \alpha,\ \varepsilon)\,S(h)^{1+\varepsilon}\,|u_h|\,\|u_h\|_h\,|w_h|,$$
$$|b_h''(u_h,\ u_h,\ w_h)|\leqslant c_1(\Omega,\ \alpha,\ \varepsilon)\,S(h)^{1+\varepsilon}\,|u_h|\,\|u_h\|_h\,|w_h|,$$

а для $n=3$

$$|b_h'(u_h,\ u_h,\ w_h)|\leqslant c_2(\Omega,\ \alpha)\,S(h)^{3/2}\,|u_h|\,\|u_h\|_h\,|w_h|,$$
$$|b_h''(u_h,\ u_h,\ w_h)|\leqslant c_2(\Omega,\ \alpha)\,S(h)^{3/2}\,|u_h|\,\|u_h\|_h\,|w_h|.\ \square$$

6.3.3. Применение теорем об устойчивости и сходимости. Схемы 5.1 и 5.2 безусловно устойчивы. Условия устойчивости схемы 5.3, приведенные в теореме 5.2 и лемме 5.3, выглядят следующим образом:

$$n=2:\ \frac{k}{[\rho'(h)]^{2(1+\varepsilon)}}\leqslant\frac{d'}{c_0(n)^{2(1+\varepsilon)}c_1(\Omega,\alpha,\varepsilon)^2},\quad \frac{k}{[\rho'(h)]^2}\leqslant\frac{d''}{c_0(n)^2},\tag{6.83}$$

$$n=3:\ \frac{k}{\rho'(h)^3}\leqslant\frac{d'}{c_0(n)^3\,c_2(\Omega,\alpha)^2},\quad \frac{k}{\rho'(h^2)}\leqslant\frac{d''}{c_0(n)^2},\tag{6.84}$$

где d', d'' — константы, определенные в доказательстве леммы 5.3 (ε — произвольное фиксированное число, удовлетворяющее условию $0<\varepsilon<1$). Для схемы 5.4 условия устойчивости, приведенные в теореме 5.3 и лемме 5.4, выглядят так:

$$n=2:\ \frac{k}{[\rho'(h)]^2}\leqslant\frac{1-\delta}{4\nu c_0^2}\quad \frac{k}{[\rho'(h)]^{2(1+\varepsilon)}}\leqslant\frac{\gamma\delta}{8d_5c_1^2c_0^{2(1+\varepsilon)}},\tag{6.85}$$

$$n=3:\ \frac{k}{[\rho'(h)]^2}\leqslant\frac{1-\delta}{4\nu c_0^2},\quad \frac{k}{[\rho'(h)]^3}\leqslant\frac{\nu\delta}{8d_5c_1^2c_0^3}\tag{6.86}$$

для некоторого δ, $0<\delta<1$, некоторого ε, $0<\varepsilon<1$, и d_5, заданного формулой (5.58).

Конечно, условия устойчивости (6.83)—(6.86) *не являются вполне удовлетворительными, поскольку мы имеем лишь приблизительную информацию о константах в правых частях этих неравенств.*

Интерпретация утверждений теорем о сходимости (теорем 5.4 и 5.5) очень проста:

$$u_h\to u \text{ сильно в } \boldsymbol{L}^2(Q) \text{ и *-слабо в } L^\infty(0,\ T;\ \boldsymbol{L}^2(\Omega)),\tag{6.87}$$

$$D_{ih}u_h\to D_iu \text{ в } \boldsymbol{L}^2(Q) \text{ сильно или слабо}$$

(в зависимости от того, какая сходимость, сильная или слабая, имеет место в $L^2(0, T; F)$).

Теоремы 5.4 и 5.5 основаны на предположениях (5.89)—(5.92). Нам надо показать, что эти условия выполнены; проверка их выполнения осуществляется точно так же, как и для случая конечных разностей,— нужно просто повторить рассуждения п. 6.1.4, заменяя везде δ_{ih} на D_{ih}.

6.4. Численные алгоритмы. Аппроксимация давления. Практическое вычисление элемента u_h^m из V_h, определяемого по одной из рассматриваемых схем, нетривиально. Основная трудность связана с условием „$\operatorname{div} u = 0$“, которое входит в определение пространства V_h, и фактически ситуация здесь та же, что и в гл. I для задачи Стокса. В этом пункте мы покажем, как алгоритмы, описанные в § 5 гл. I (решение задачи Стокса), можно обобщить до алгоритмов, дающих решение задач (5.12)—(5.15). Одновременно мы введем дискретную аппроксимацию давления.

6.4.1. Аппроксимация давления. Для каждого типа аппроксимаций V_h пространства V мы определили также некоторую аппроксимацию W_h пространства $H_0^1(\Omega)$ (см. гл. I, § 3 и 4). По существу элементы u_h из W_h являются элементами того же типа, что и элементы u_h из V_h, только отсутствует условие на дивергенцию. Позднее в этом пункте мы покажем, как элемент u_h^m из V_h может быть аппроксимирован последовательностью $u_h^{m,r}$, $r = 1, \ldots, \infty$, элементов из W_h.

Аппроксимация (АПР1). Пространство W_h — это пространство ступенчатых функций

$$u_h = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \xi_M w_{hM}, \quad \xi_M \in \mathbb{R}^n. \tag{6.88}$$

Дискретное давление является элементом пространства X_h ступенчатых функций вида

$$\pi_h = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \eta_M w_{hM}, \quad \eta_M \in \mathbb{R}. \tag{6.89}$$

Для $u_h \in W_h$ мы определили дискретную дивергенцию $D_h u_h$ как ступенчатую функцию из X_h, задаваемую следующим образом:

$$\begin{gathered} D_h u_h = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} (D_h u_h(M))\, w_{hM}, \\ D_h u_h(M) = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{ih} u_{ih}(M) \ \forall M \in \mathring{\Omega}_h^1. \end{gathered} \tag{6.90}$$

Элемент u_h из W_h принадлежит V_h, если и только если

$$D_h u_h = 0. \tag{6.91}$$

Точно так же, как в п. 3.3 гл. I (см. (I. 3.72)), мы доказываем, что если u_h^m есть решение уравнения (5.12) (схема 5.1), то сущ ствует ступенчатая функция π_h^M вида (6.89), такая что

$$k^{-1}(u_h^m - u_h^{m-1}, v_h) + \nu((u_h^m, v_h))_h + b_h(u_h^{m-1}, u_h^m, v_h) - (\pi_h^m, D_h v_h) = (f^m, v_h) \quad \forall v_h \in W_h. \qquad (6.9$$

Основные отличия (6.92) от (5.12) заключаются в появлении член $-(\pi_h^m, D_h v_h)$ и в том, что (6.92) выполнено для всех v_h из W_h т. е. даже для v_h, не удовлетворяющих условию (6.91) („несо леноидальных").

Для схем 5.2—5.4 верны те же утверждения. В этих тре случаях существует функция π_h^m вида (6.89), такая что соотве ственно

$$k^{-1}(u_h^m - u_h^{m-1}, v_h) + 2^{-1}\nu((u_h^m + u_h^{m-1}, v_h))_h + 2^{-1}b_h(u_h^{m-1}, u_h^m + u_h^{m-1}, v_h) - (\pi_h^m, D_h v_h) = (f^m, v_h) \quad \forall v_h \in W_h, \qquad (6.9$$

(схема 5.2

$$k^{-1}(u_h^m - u_h^{m-1}, v_h) + \nu((u_h^m, u_h))_h + b_h(u_h^{m-1}, u_h^{m-1}, v_h) - (\pi_h^m, D_h v_h) = (f^m, v_h) \quad \forall v_h \in W_h, \qquad (6.94$$

(схема 5.3

$$k^{-1}(u_h^m - u_h^{m-1}, v_h) + \nu((u_h^{m-1}, v_h))_h + b_h(u_h^{m-1}, u_h^{m-1}, v_h) - (\pi_h^m, D_h v_h) = (f^m, v_h) \quad \forall v_h \in W_h. \qquad (6.95$$

(схема 5.4

Другие аппроксимации. Для других аппроксимаций имею место те же самые результаты; разница только в определении D_h пространства X_h, которому принадлежит π_h^m (и, конечно, в опре делении V_h и W_h).

Для аппроксимаций (АПР2), (АПР3) и (АПР5) пространство X есть пространство ступенчатых функций

$$\pi_h = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \eta_{\mathscr{S}} \chi_{\mathscr{S}}, \quad \eta_{\mathscr{S}} \in \mathbb{R},^{1} \qquad (6.96$$

где $\chi_{\mathscr{S}}$ — характеристическая функция симплекса $\mathscr{S}$. Дискретна дивергенция понимается как ступенчатая функция вида (6.96) определяемая соотношениями

$$D_h u_h = \sum_{\mathscr{S} \in \mathscr{T}_h} \eta_{\mathscr{S}} \chi_{\mathscr{S}}, \qquad \eta_{\mathscr{S}} = \frac{1}{\operatorname{mes}\mathscr{S}} \int_{\mathscr{S}} \operatorname{div} u_h \, dx. \qquad (6.97$$

Функция u_h из W_h принадлежит V_h, если и только если ступен чатая функция $D_h u_h$ является нулевой. При таком определени

[1] $\eta_{\mathscr{S}} = \pi_h(x)$, $x \in \mathscr{S}$.

мы также получаем существование функции π_h^m, удовлетворяющей соответственно (6.92)—(6.95) (схемы 5.1—5.4), в случае аппроксимаций (АПР2), (АПР3), (АПР5).

Аналогичный результат можно получить и для аппроксимаций (АПР4), но здесь построение пространства X_h ($\pi_h^m \in X_h$) технически более сложно.

6.4.2. Алгоритм Удзавы. Рассмотрим применение алгоритма Удзавы к решению задач (6.92)—(6.95). Пусть элементы $(m-1)$-го слоя уже вычислены и нам надо вычислить неизвестные

$$\boldsymbol{u}_h^m \in V_h \quad \text{и} \quad \pi_h^m \in X_h. \tag{6.98}$$

Мы хотим получить их как пределы двух последовательностей элементов

$$\boldsymbol{u}_h^{m,r} \in W_h \quad \text{и} \quad \pi_h^{m,r} \in X_h, \quad r=0,\ 1,\ \ldots,\ \infty. \tag{6.99}$$

Как и в пп. 5.1 и 5.3 гл. I, начинаем с произвольного

$$\pi_h^{m,0} \in X_h. \tag{6.100}$$

Если $\pi_h^{m,r}$ уже известны, то мы определяем $\boldsymbol{u}_h^{m,r+1}$ и $\pi_h^{m,r+1}$ $(r \geqslant 0)$ из уравнений:

схема 5.1, или (6.92): $\boldsymbol{u}_h^{m,r+1} \in W_h$ и

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{u}_h^{m,r+1},\ \boldsymbol{v}_h)+k\nu((\boldsymbol{u}_h^{m,r+1},\ \boldsymbol{v}_h))_h+kb_h(\boldsymbol{u}_h^{m-1},\ \boldsymbol{u}_h^{m,r+1},\ \boldsymbol{v}_h)\\ -k(\pi_h^{m,r},\ D_h\boldsymbol{v}_h)=(\boldsymbol{u}_h^{m-1},\ \boldsymbol{v}_h)+k(\boldsymbol{f}^m,\ \boldsymbol{v}_h)\quad \forall \boldsymbol{v}_h \in W_h,\end{gathered} \tag{6.101}$$

$\pi_h^{m,r+1} \in X_h$ и

$$(\pi_h^{m,r+1}-\pi_h^{m,r},\ q_h)+\rho(D_h\boldsymbol{u}_h^{m,r+1},\ q_h)=0 \quad \forall q_h \in X_h. \tag{6.102}$$

Существование и единственность решения $\boldsymbol{u}_h^{m,r+1}$ уравнения (6.101) следуют из проекционной теоремы (задача линейна относительно $\boldsymbol{u}_h^{m,r+1}$). То же соображение применимо и к (6.102), но в действительности (6.102) дает $\pi_h^{m,r+1}$ явно, без обращения какой-либо матрицы. Определение $\boldsymbol{u}_h^{m,r+1}$ сводится к решению дискретной задачи Дирихле (см. гл. I, п. 5.1).

Для схем 5.2—5.4 (т. е. (6.93)—(6.95))мы оставляем (6.102) без изменения, а вместо (6.101) используем соответственно:

схема 5.2, или (6.93): $\boldsymbol{u}_h^{m,r+1} \in W_h$ и

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{u}_h^{m,r+1},\ \boldsymbol{v}_h)+(k\nu/2)((\boldsymbol{u}_h^{m-1}+\boldsymbol{u}_h^{m,r+1},\ \boldsymbol{v}_h))_h\\ +(k/2)b_h(\boldsymbol{u}_h^{m-1},\ \boldsymbol{u}_h^{m-1}+\boldsymbol{u}_h^{m,r+1},\ \boldsymbol{v}_h)-k(\pi_h^{m,r},\ D_h\boldsymbol{v}_h)\\ =(\boldsymbol{u}_h^{m-1},\ \boldsymbol{v}_h)+k(\boldsymbol{f}^m,\ \boldsymbol{v}_h)\quad \forall \boldsymbol{v}_h \in W_h,\end{gathered} \tag{6.103}$$

схема 5.3 или (6.94): $\boldsymbol{u}_h^{m,r+1} \in W_h$ и

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{u}_h^{m,r+1},\ \boldsymbol{v}_h)+k\nu((\boldsymbol{u}_h^{m,r+1},\ \boldsymbol{v}_h))_h+kb_h(\boldsymbol{u}_h^{m-1},\ \boldsymbol{u}_h^{m-1},\ \boldsymbol{v}_h)\\ -k(\pi_h^{m,r},\ D_h,\ \boldsymbol{v}_h)=(\boldsymbol{u}_h^{m-1},\ \boldsymbol{v}_h)+k(\boldsymbol{f}^m,\ \boldsymbol{v}_h)\quad \forall \boldsymbol{v}_h \in W_h,\end{gathered} \tag{6.104}$$

схема 5.4, или (6.95): $u_h^{m,r+1} \in W_h$ и

$$(u_h^{m,r+1}, v_h) + k\nu((u_h^{m-1}, v_h))_h + kb_h(u_h^{m-1}, u_h^{m-1}, v_h)$$
$$-k(\pi_h^{m,r}, D_h v_h) = (u_h^{m-1}, v_h) + k(f^m, v_h)\ \forall v_h \in W_h. \quad (6.105)$$

Подчеркнем, что все элементы $(m-1)$-го слоя известны и для того, чтобы вычислить u_h^m, π_h^m, мы производим итерации по r, вычисляя $u_h^{m,r+1}$, $\pi_h^{m,r+1}$.

Что касается сходимости этого алгоритма, то весьма интересно, что критерий сходимости здесь почти тот же самый, что и для линейной задачи.

Предложение 6.7. *Если число* ρ *удовлетворяет условию*

$$0 < \rho < 2\nu/n\ ^{1}, \quad (6.106)$$

то $u_h^{m,r}$ *сходится при* $r \to \infty$ *к* u_h^m *в* W_h, *а* $\pi_h^{m,r}$ — *к* π_h^m *в* $X_h/\mathbb{R}$.

Доказательство. Мы проведем доказательство лишь для схемы 5.1 (уравнения (6.101) и (6.102), соответствующие (6.92)). Опуская индексы m и h, положим

$$v^r = u_h^{m,r} - u_h^m, \quad (6.107)$$
$$\pi^r = \pi_h^{m,r} - \pi_h^m. \quad (6.108)$$

Вычитание (6.92) из (6.101) дает: $\forall v_h \in W_h$

$$(v^{r+1}, v_h) + k\nu((v^{r+1}, v_h))_h + kb_h(u_h^{m-1}, v^{r+1}, v_h)$$
$$= k(\pi^r, D_h v_h);$$

при $v_h = v^{r+1}$ получаем (с учетом (5.6))

$$|v^{r+1}|^2 + k\nu\|v^{r+1}\|_h^2 = k(\pi^r, D_h v^{r+1}). \quad (6.109)$$

Вспоминая, что $D_h u_h^m = 0$, так как $u_h^m \in V_h$, мы можем записать (6.102) в виде

$$(\pi^{r+1} - \pi^r, q_h) = -\rho(D_h v^{r+1}, q_h) \quad \forall q_h \in X_h;$$

полагая $q_h = \pi^{r+1}$, получаем

$$|\pi^{r+1}|^2 - |\pi^r|^2 + |\pi^{r+1} - \pi^r|^2 = -2\rho(D_h v^{r+1}, \pi^{r+1}). \quad (6.110)$$

Далее продолжаем так же, как в доказательстве теоремы I.5.1. Правая часть (6.110) равна $-2\rho(D_h v^{r+1}, \pi^{r+1} - \pi^r) - 2\rho(D_h v^{r+1}, \pi^r)$ и, как мы докажем ниже,

$$|(D_h v_h, \pi_h)| \leqslant \sqrt{n}\,|\pi_h|\,\|v_h\|_h \quad \forall \pi_h \in X_h,\ v_h \in W_h. \quad (6.111)$$

Временно приняв это на веру, оцениваем правую часть (6.110) величиной

$$-2\rho(D_h v^{r+1}, \pi^r) + 2\rho\sqrt{n}\,\|v^{r+1}\|_h\,|\pi^{r+1} - \pi^r|$$
$$\leqslant \delta|\pi^{r+1} - \pi^r|^2 + \frac{\rho^2 n}{\delta}\|v^{r+1}\|_h^2 + 2\rho(D_h v^{r+1}, \pi^r).$$

[1] $n = 2$ или 3 (размерность пространства).

Теперь прибавим уравнение (6.110), умноженное на k, к уравнению (6.109), умноженному на 2ρ. Приведя подобные члены, получим

$$k|\pi^{r+1}|^2 - k|\pi^r|^2 + (1-\delta)k|\pi^{r+1} - \pi^r|^2 + |v^{r+1}| + k\rho(2\nu - \rho n/\delta)\|v^{r+1}\|^2 \leqslant 0. \tag{6.112}$$

Если ρ удовлетворяет (6.106), то найдется такое δ, $0 < \delta < 1$, что $2\nu - \rho n/\delta > 0$. Суммируя неравенства (6.112) для $r = 0, \ldots, s$, приходим к неравенству

$$k|\pi^{s+1}|^2 + \sum_{r=0}^{s}\{k(1-\delta)|\pi^{r+1} - \pi^r|^2 + |v^{r+1}|^2\} + k\rho(2\nu - \rho n/\delta)\sum_{r=0}^{s}\|v^{r+1}\|^2 \leqslant k|\pi^1|^2. \tag{6.113}$$

Это показывает, что ряды $\sum\limits_{r=0}^{\infty}\|v^r\|^2$, $\sum\limits_{r=0}^{\infty}|v^r|^2$ сходятся и, следовательно,

$$v^r \to 0 \text{ в } W_h \text{ при } r \to \infty. \tag{6.114}$$

Неравенство (6.113) показывает также, что последовательность π^s ограничена. В силу (6.102) и уже доказанного, любая сходящаяся подпоследовательность последовательности π^s должна сходиться к 0 в $X_h/\mathbb{R}$. Поэтому и вся последовательность π^s сходится к 0 в $X_h/\mathbb{R}$ (т. е. в X_h с точностью до аддитивной постоянной). □

Остается доказать (6.111).

Лемма 6.6. *Для аппроксимаций* (АПР1)—(АПР3) *и* (АПР5)

$$|(D_h v_h, \pi_h)| \leqslant \sqrt{n}|\pi_h|\|v_h\|_h \quad \forall \pi_h \in X_h \quad \forall v_h \in W_h. \tag{6.115}$$

Доказательство. Для случая конечных разностей ((АПР1)), поскольку функция π_h постоянна на блоках $\sigma_h(M)$, $M \in \mathring{\Omega}_h^1$, имеем

$$(\pi_h, D_h v_h) = \int_\Omega \pi_h(x)\left(\sum_{i=1}^{n}\nabla_{ih}v_{ih}(x)\right)dx.$$

Согласно неравенству Шварца, эта величина оценивается как

$$|\pi_h|\left\{\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{n}\nabla_{ih}v_{ih}(x)\right)^2 dx\right\}^{1/2} \leqslant |\pi_h|\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|\nabla_{ih}v_{ih}(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Но

$$\int_{\Omega} |\nabla_{ih} v_{ih}(x)|^2 \, dx = \frac{1}{h_i^2} \int_{\mathbb{R}^n} |v_{ih}(x+\vec{h}_i) - v_{ih}(x)|^2 \, dx$$
$$= \frac{1}{h_i^2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| v_{ih}\left(x + \frac{1}{2}\vec{h}_i\right) - v_{ih}\left(x - \frac{1}{2}\vec{h}_i\right)\right|^2 dx$$
$$= \int_{\Omega} |\delta_{ih} v_{ih}(x)|^2 \, dx,$$

а значит,

$$|\pi_h, D_h \boldsymbol{v}_h| \leqslant \sqrt{n}\, |\pi_h| \left(\sum_{i=1}^{n} |\delta_{ih} v_{ih}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\, |\pi_n| \, \|\boldsymbol{v}_h\|_h.$$

Для случая конечных элементов мы снова замечаем, что π_h постоянна на каждом симплексе $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_h$, так что

$$(\pi_h, D_h \boldsymbol{v}_h) = \int_{\Omega} \pi_h(x) \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h(x) \, dx.$$

Поэтому, в силу неравенства Шварца,

$$|(\pi_h, D_h \boldsymbol{v}_h)| \leqslant |\pi_h| \, |\operatorname{div} \boldsymbol{v}_h| \leqslant \sqrt{n}\, |\pi_h| \, \|\boldsymbol{v}_h\|. \ \square$$

6.4.3. Алгоритм Эрроу—Гурвица. Мы вычисляем $\boldsymbol{u}_h^m, \pi_h^m$ как пределы двух последовательностей элементов $\boldsymbol{u}_h^{m,r} \in W_h$, $\pi_h^{m,r} \in X_h$, $r \geqslant 0$, определенных немного иначе, чем в предыдущем подпункте. Введем два положительных параметра ρ и α. Алгоритм начинается с любых

$$\boldsymbol{u}_h^{m,0} \in W_h, \quad \pi_h^{m,0} \in X_h. \tag{6.116}$$

Если $\pi_h^{m,r}$ и $\boldsymbol{u}_h^{m,r}$ уже известны, то мы определяем $\pi_h^{m,r+1}$ и $\boldsymbol{u}_h^{m,r+1}$ как решения уравнений:

схема 5.1, или (6.92): $\boldsymbol{u}_h^{m,r+1} \in W_h$ и

$$k((\boldsymbol{u}_h^{m,r+1} - \boldsymbol{u}_h^{m,r}, \boldsymbol{v}_h))_h + (\boldsymbol{u}_h^{m,r}, \boldsymbol{v}_h) + k\nu((\boldsymbol{u}_h^{m,r}, \boldsymbol{v}_h))_h$$
$$+ kb_h(\boldsymbol{u}_h^{m-1}, \boldsymbol{u}_h^{m,r}, \boldsymbol{v}_h) - k(\pi_h^{m,r}, D_h \boldsymbol{v}_h)$$
$$= (\boldsymbol{u}_h^{m-1}, \boldsymbol{v}_h) + k(\boldsymbol{f}^m, \boldsymbol{v}_h) \ \forall \boldsymbol{v}_h \in W_h, \tag{6.117}$$

$\pi_h^{m,r+1} \in X_h$ и

$$\alpha(\pi_h^{m,r+1} - \pi_h^{m,r}, q_h) + \rho(D_h \boldsymbol{u}_h^{m,r+1}, q_h) = 0 \ \ \forall q_h \in X_h. \tag{6.118}$$

Существование и единственность $\boldsymbol{u}_h^{m,r+1}$ следуют из проекционной теоремы, то же верно и для $\pi_h^{m,r+1}$, хотя в этом последнем случае проще заметить, что $\pi_h^{m,r+1}$ определяется из (6.118) явно.

Для других схем (схемы 5.2—5.4, т. е. (6.93)—(6.95)) мы оставляем (6.118) без изменений, а вместо (6.117) используем соответственно:

схема 5.2, или (6.93): $u_h^{m,r+1} \in W_h$ и

$$\begin{aligned} & k\left(\left(u_h^{m,r+1}-u_h^{m,r}, v_h\right)\right)_h+\left(u_h^{m,r}, v_h\right)+(k\nu/2)\left(\left(u_h^{m,r}+u_h^{m-1}, v_h\right)\right)_h \\ & +(k/2)\, b_h\left(u_h^{m-1}, u_h^{m-1}+u_h^{m,r}, v_h\right)-k\left(\pi_h^{m,r}, D_h v_h\right) \\ & \qquad =\left(u_h^{m-1}, v_h\right)+k\left(f^m, v_h\right) \quad \forall v_h \in W_h, \end{aligned} \tag{6.119}$$

схема 5.3, или (6.94): $u_h^{m,r+1} \in W_h$ и

$$\begin{aligned} & k\left(\left(u_h^{m,r+1}-u_h^{m,r}, v_h\right)\right)_h+\left(u_h^{m,r}, v_h\right)+k\nu\left(\left(u_h^{m,r}, v_h\right)\right)_h \\ & +k b_h\left(u_h^{m-1}, u_h^{m-1}, v_h\right)-k\left(\pi_h^{m,r}, D_h, v_h\right) \\ & \qquad =\left(u_h^{m-1}, v_h\right)+k\left(f^m, v_h\right) \quad \forall v_h \in W_h, \end{aligned} \tag{6.120}$$

схема 5.4, или (6.95): $u_h^{m,r+1} \in W_h$ и

$$\begin{aligned} & k\left(\left(u_h^{m,r+1}-u_h^{m,r}, v_h\right)\right)_h+\left(u_h^{m,r}, v_h\right)+k\nu\left(\left(u_h^{m-1}, v_h\right)\right)_h \\ & +k b_h\left(u_h^{m-1}, u_h^{m-1}, v_h\right)-k\left(\pi_h^{m,r}, D_h v_h\right) \\ & \qquad =\left(u_h^{m-1}, v_h\right)+k\left(f^m, v_h\right) \quad \forall v_h \in W_h. \end{aligned} \tag{6.121}$$

Что касается сходимости, то имеет место

Предложение 6.8. *Предположим, что* ρ *и* α *удовлетворяют условию*

$$0<\rho<2\alpha\nu/(\alpha\nu^2+n)\ ^{1}. \tag{6.122}$$

Тогда $u_h^{m,r}$ *сходится при* $r \to \infty$ *к* u_h^m *в* W_h, *а* $\pi_h^{m,r}$ — *к* π_h^m *в* $X_h/\mathbb{R}$.

Мы опустим доказательство этого предложения, аналогичное доказательствам теоремы I.5.2 и предложения 6.7.

§ 7. Аппроксимация уравнений Навье — Стокса при помощи метода дробных шагов

В этом параграфе мы рассмотрим аппроксимацию уравнений Навье — Стокса методом дробных шагов. *Метод дробных шагов*, или *метод расщепления*, — это метод аппроксимации эволюционных уравнений, основанный на разложении операторов, фигурирующих в уравнениях. Сначала мы изложим идею метода на следующем простом примере. Предположим, что аппроксимируется линейное эволюционное уравнение

$$u'+\mathcal{A}u=0, \quad 0<t<T, \tag{7.1}$$

$$u(0)=u_0, \tag{7.2}$$

где $u(t)$ — конечномерный вектор, $u(t) \in \mathbb{R}^n$, а $\mathcal{A}$ — квадратная матрица порядка m. С помощью обычной неявной схемы (аналогичной схеме 5.1) определим последовательность векторов u^m, $m=0, \ldots, N$, соотношениями ($T=kN$, k — шаг по времени,

---

[1] $n=2$ или 3 (размерность пространства).

N — целое число):

$$u^0 = u_0, \tag{7.3}$$
$$(u^{m+1} - u^m)/k + \mathcal{A} u^{m+1} = 0, \quad m = 0, \ldots, N-1. \tag{7.4}$$

Метод расщепления базируется на каком-либо разложении $\mathcal{A}$ в сумму:

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{q} \mathcal{A}_i. \tag{7.5}$$

Начиная опять с

$$u^0 = u_0, \tag{7.6}$$

мы рекуррентно определяем семейство элементов $u^{m+i/q}$, $m = 0, \ldots$ $\ldots, N-1$, $i = 1, \ldots, q$, полагая

$$(u^{n+i/q} - u^{m+(i-1)/q})/k + \mathcal{A}_i u^{m+i/q} = 0, \tag{7.7}$$
$$i = 1, \ldots, q, \quad m = 0, \ldots, N-1.$$

Если u^m уже известно, то u^{m+1} может быть вычислено в случае обычной неявной схемы (т. е. (7.4)) с помощью обращения матрицы $I + k\mathcal{A}$; в случае метода дробных шагов (т. е. (7.7)) для вычисления u^{m+1} необходимо обратить q матриц $(I + k\mathcal{A}_1), \ldots, (I + k\mathcal{A}_q)$; алгоритм целесообразен, если все эти q матриц вместе обратить проще, чем одну матрицу $I + k\mathcal{A}$.

Этот метод может быть применен к уравнениям Навье — Стокса многими различными способами, соответственно различным возможным разложениям операторов. Мы рассмотрим два из них. В первом $q = 2$,

$$\mathcal{A}_1 u = -\nu \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u, \tag{7.8}$$

а $\mathcal{A}_2$ — некоторый эвристический оператор, учитывающий член $\operatorname{grad} p$ и условие $\operatorname{div} u = 0$. Позднее мы аккуратно всё опишем, а сейчас лишь отметим, что в случае уравнений Навье — Стокса метод, который мы будем рассматривать, является некоторой интерпретацией, а не просто частным случаем метода дробных шагов, представленного формулами (7.5) — (7.7).

Во втором разложении $\mathcal{A}$ мы имеем $q = n + 1$; оператор $\mathcal{A}_{n+1}$ похож на предыдущий оператор $\mathcal{A}_2$, а операторы $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ определяются равенством

$$\mathcal{A}_i u = -\nu D_i^2 u + u_i D_i u, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7.9}$$

Мы можем также совместить этот метод с некоторой дискретизацией по пространственным переменным. Изучать все возможные комбинации было бы бессмысленно и утомительно. Поэтому мы ограничимся двумя характерными случаями: рассмотрим первое из приведенных выше разложений вообще без аппроксимации по пространственным переменным (п. 7.1), а второе — с дискретизацией при помощи конечных разностей (пп. 7.2 и 7.3).

7.1. Схема с двумя промежуточными шагами. Мы опишем здесь аппроксимацию уравнений Навье—Стокса методом дробных шагов без дискретизации по пространственным переменным.

7.1.1. Описание схемы. Размерность пространства $n=2$ или 3. Мы хотим аппроксимировать решение задачи 3.1 (или 3.2). Для простоты предположим, что

$$f \in L^2(0, T; H) \tag{7.10}$$

и, как и выше,

$$u_0 \in H. \tag{7.11}$$

Пусть интервал $[0, T]$ разбит на N интервалов длины k $(T=kN)$. Положим

$$f^m = \frac{1}{k} \int\limits_{(m-1)k}^{mk} f(t)\, \mathrm{d}t, \quad m=1, \ldots, N. \tag{7.12}$$

Мы определим сейчас некоторое семейство $u^{m+i/2}$, $i=0, 1$, $m=0, \ldots, N-1$, элементов из $L^2(\Omega)$. Эти элементы вычисляются последовательно в порядке возрастания значения дробного индекса $m+i/2$. Начинаем с

$$u^0 = u_0. \tag{7.13}$$

Если u^m уже известно $(m \geqslant 0)$, то последовательно определяем $u^{m+1/2}$ и u^{m+1}:

$$u^{m+1/2} \in H_0^1(\Omega) \text{ и } k^{-1}(u^{m+1/2} - u^m, v) + \nu((u^{m+1/2}, v))$$
$$+ \hat{b}(u^{m+1/2}, u^{m+1/2}, v) = (f^m, v) \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{7.14}$$
$$u^{m+1} \in H \text{ и } (u^{m+1}, v) = (u^{m+1/2}, v) \ \forall v \in H. \tag{7.15}$$

Здесь $\hat{b}$ — это форма, введенная в гл. II, кососимметричная часть формы b:

$$\hat{b}(u, v, w) = 2^{-1}\{b(u, v, w) - b(u, w, v)\}. \tag{7.16}$$

Поскольку $n \leqslant 3$, ясно, что $\hat{b}$ является, как и b, непрерывной трилинейной формой на $H_0^1(\Omega)$ и

$$\hat{b}(u, v, v) = 0 \ \forall u, \ v \in H_0^1(\Omega). \tag{7.17}$$

Уравнение (7.14), определяющее $u^{m+1/2}$, представляет собой нелинейное уравнение, очень похожее на стационарное уравнение Навье—Стокса, и доказательство существования по крайней мере одного элемента $u^{m+1/2}$, удовлетворяющего (7.14), проводится точно так же, как в теореме II.1.2, с использованием метода Галёркина и (7.16).

Соотношение (7.15) означает, что u^{m+1} является ортогональной проекцией элемента $u^{m+1/2}$ на H в $L^2(\Omega)$. Поэтому элемент u^{m+1} вполне определен равенством (7.15); запишем

$$u^{m+1} = P_H u^{m+1/2}, \tag{7.18}$$

где P_H обозначает ортогональный проектор в $L^2(\Omega)$ на подпространство H. В силу характеризации H и $H^{\perp}$, данной в теореме I.1.4, разность $u^{m+1/2} - u^{m+1}$ есть градиент некоторой функции из $H^1(\Omega)$. Обозначая эту функцию через kp^{m+1}, имеем

$$(u^{m+1} - u^{m+1/2})/k + \operatorname{grad} p^{m+1} = 0, \quad p^{m+1} \in H^1(\Omega). \tag{7.19}$$

Соотношение (7.15) эквивалентно двум условиям, а именно (7.19) и

$$u^{m+1} \in L^2(\Omega), \quad \operatorname{div} u^{m+1} = 0, \quad \gamma_\nu u^{m+1} = 0. \tag{7.20}$$

Замечание 7.1. Соотношение (7.14), определяющее $u^{m+1/2}$,— это, по существу, нелинейная задача Дирихле; записывая (7.14) для $v \in \mathscr{D}(\Omega)$, получаем

$$k^{-1}(u^{m+1/2} - u^m) - \nu \Delta u^{m+1/2} + \sum_{i=1}^{n} u_i^{m+1/2} D_i u^{m+1/2} + \frac{1}{2}(\operatorname{div} u^{m+1/2})\, u^{m+1/2} = f^m. \tag{7.21}$$

Замечание 7.2. Соотношения (7.19), (7.20), определяющие $u^{m+1/2}$ и p^{m+1}, эквивалентны некоторой задаче Неймана относительно p^{m+1}.[1] Применение оператора div к обеим сторонам (7.19) приводит к уравнению

$$\Delta p^{m+1} = k^{-1} \operatorname{div} u^{m+1/2} \quad (\text{ибо } \operatorname{div} u^{m+1} = 0), \tag{7.22}$$

а применение оператора γ_ν (взятие нормальной компоненты на $\partial\Omega$) приводит к условию

$$\partial p^{m+1}/\partial\nu = 0 \text{ на } \Gamma = \partial\Omega, \tag{7.23}$$

так как $\gamma_\nu u^{m+1} = \gamma_\nu u^{m+1/2} = 0$. Интересно отметить, что граничное условие „$\partial p/\partial\nu = 0$ на Γ“ не выполняется для „настоящего“ давления; это влияет на точность, с которой p^{m+1} аппроксимирует p; однако, как будет показано позднее, это не влияет на сходимость схемы. В другом методе дробных шагов, разбираемом в п. 7.2, эта особенность не возникает.

Наша цель теперь — получить априорные оценки для $u^{m+i/2}$, а затем исследовать схему на сходимость.

7.1.2. Априорные оценки (I).

Лемма 7.1. *Элементы $u^{m+i/2}$ остаются ограниченными в следую-*

[1] Если p^{m+1} известно, то u^{m+1} непосредственно определяется из (7.19).

щем смысле:

$$|u^{m+i/2}|^2 \leqslant d_2, \quad m=0, \ldots, N-1, \quad i=1, 2, \tag{7.24}$$

$$k \sum_{m=0}^{N-1} \| u^{m+1} \|^2 \leqslant d_2/\nu, \tag{7.25}$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} | u^{m+1} - u^{m+1/2} |^2 \leqslant d_2, \tag{7.26}$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} | u^{m+1/2} - u^m |^2 \leqslant d^2, \tag{7.27}$$

где

$$d_2 = | u_0 |^2 - (d_0^2/\nu) \int_0^T | f(s) |^2 \, ds. \tag{7.28}$$

Доказательство. Записывая (7.14) с $v = u^{m+1/2}$ и принимая во внимание (7.17), получаем

$$\begin{aligned} &| u^{m+1/2} |^2 - | u^m |^2 + | u^{m+1/2} - u^m |^2 + 2k\nu \| u^{m+1/2} \|^2 \\ &= 2k (f^m, u^{m+1/2}) \leqslant 2k | f^m | | u^{m+1/2} |^2 \leqslant {}^{1}\, 2kd_0 | f^m | \, \| u^{m+1/2} \| \\ &\leqslant k\nu \| u^{m+1/2} \|^2 + (kd_0^2/\nu) | f^m |^2. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &| u^{m+1/2} |^2 - | u^m |^2 + | u^{m+1/2} - u^m |^2 + k\nu \| u^{m+1} \|^2 \\ &\leqslant (kd_0^2/\nu) | f^m |^2. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Мы можем записать (7.15) с $v = u^{m+1}$; это дает $(u^{m+1} - u^{m+1/2}, u^{m+1}) = 0$, или

$$| u^{m+1} |^2 - | u^{m+1/2} |^2 + | u^{m+1} - u^{m+1/2} |^2 = 0. \tag{7.31}$$

Суммируя соотношения (7.29) и (7.30) для $m=0, \ldots, N-1$, получаем

$$\begin{aligned} &| u^N |^2 + \sum_{m=0}^{N-1} \{ | u^{m+1} - u^{m+1/2} |^2 + | u^{m+1/2} - u^m |^2 \} \\ &+ k\nu \sum_{m=0}^{N-1} \| u^{m+1/2} \|^2 \leqslant | u_0 |^2 + (kd_0^2/\nu) \sum_{m=1}^{N} | f^m |^2 \\ &\leqslant (\text{в силу (5.29)}) \; | u_0 |^2 + (d_0^2/\nu) \int_0^T | f(s) |^2 \, ds = d_2. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Это доказывает оценки (7.25) — (7.27). Теперь просуммируем соотношения (7.30) для $m=0, \ldots, r$ и соотношения (7.31) для $m=0, \ldots, r-1$. Опуская некоторые положительные члены,

---

[1] $| v | \leqslant d_0 \| v \| \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

находим, что

$$|u^{r+1/2}|^2 \leqslant |u^0|^2 + (kd_0^2/\nu)\sum_{m=0}^{r-1}|f^m|^2 \leqslant d_2.$$

Аналогично, суммируя соотношения (7.30) и (7.31) для $m=0, \ldots, r$, получаем после некоторых выкладок

$$|u^{r+1}|^2 \leqslant |u^0|^2 + (kd_0^2/\nu)\sum_{m=1}^{r}|f^r|^2 \leqslant d_2;$$

тем самым доказано и (7.24). □

Аппроксимирующие функции. Введем „аппроксимирующие" функции $u_k^{(i)}$, $i=1, 2$, и u_k следующим образом:

$$\begin{aligned} &u_k^{(i)}\colon [0, T] \to L^2(\Omega),\\ &u_k^{(i)}(t) = u^{m+i/2} \quad \text{для} \quad mk \leqslant t < (m+1)k,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=1,2; \end{aligned} \tag{7.33}$$

$$\begin{aligned} &u_k \text{ — непрерывная функция из } [0, T] \text{ в } L^2(\Omega),\\ &\text{линейная на каждом интервале } [mk, (m+1)k],\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad m=0, \ldots, N-1;\\ &u_k(mk) = u^m, \ m=0, \ldots, N. \end{aligned} \tag{7.34}$$

Из леммы 7.1 непосредственно вытекает

Лемма 7.2. *Функции* u_k, $u_k^{(i)}$, $i=1, 2$, *остаются ограниченными в* $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ *при* $k \to 0$. *Функции* $u_k^{(1)}$ *остаются ограниченными в* $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Лемма 7.3.

$$|u_k^{(2)} - u_k^{(1)}|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leqslant \sqrt{kd_2}, \tag{7.35}$$

$$|u_k - u_k^{(2)}|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leqslant \sqrt{4kd_2/3}. \tag{7.36}$$

Доказательство. Оценка (7.35) является прямым следствием леммы 7.1. Что касается (7.36), то вычисления из леммы 4.8 дают

$$|u_k - u_k^{(2)}|^2_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} = (k/3)\sum_{m=0}^{N-1}|u^{m+1} - u^m|^2.$$

Но

$$|u^{m+1} - u^m| \leqslant |u^{m+1} - u^{m+1/2}| + |u^{m+1/2} - u^m|,$$
$$|u^{m+1} - u^m|^2 \leqslant 2|u^{m+1} - u^{m+1/2}|^2 + 2|u^{m+1/2} - u^m|^2$$

и потому, в силу (7.26)—(7.27), $|u_k - u_k^{(2)}|^2_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leqslant (4k/3)\,d_2$. □

7.1.3. Априорные оценки (II). Для того чтобы применить методы компактности, нам нужно оценить производную от u_k по времени. Продолжим функцию u_k нулем вне интервала $[0, T]$ и обозначим через $\hat{u}_k$ преобразование Фурье продолженной функции.

Лемма 7.4. *Это преобразование Фурье* $\hat{u}_k$ *удовлетворяет оценке*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} \|\hat{u}_k(\tau)\|_V^2 \, d\tau \leqslant \text{const}, \quad 0 < \gamma < 1/4, \tag{7.37}$$

где константа зависит от γ *и от данных.*

Доказательство. Согласно теоремам I.1.4 и I.1.6, $V = H \cap H_0^1(\Omega)$ и соотношения (7.14) и (7.15) выполняются для любого $v \in V$. Суммированием получаем

$$k^{-1}(u^{m+1} - u^m, v) + \nu((u^{m+1/2}, v)) + \hat{b}(u^{m+1/2}, u^{m+1}, v) = (f^m, v) \; \forall v \in V, \; m = 0, \ldots, N-1, \tag{7.38}$$

а это уравнение эквивалентно уравнению[1]

$$\frac{d}{dt}(u_k(t), v) + \nu((u_k^{(1)}(t), v)) + \hat{b}(u_k^{(1)}(t), u_k^{(1)}(t), v) = (f_k(t), v) \; \forall t \in (0, T) \; \forall v \in V, \tag{7.39}$$

или

$$\frac{d}{dt}(u_k(t), v) = \langle g_k(t), v \rangle \; \forall t \in (0, T) \; \forall v \in V, \tag{7.40}$$

где

$$f_k(t) = f^m, \quad mk \leqslant t < (m+1)k, \quad m = 0, \ldots, N-1, \tag{7.41}$$

а $g_k(t) \in V'$ определено соотношением: $\forall v \in V$

$$\langle g_k(t), v \rangle = -\nu((u_k^{(1)}(t), v)) - \hat{b}(u_k^{(1)}(t), u_k^{(1)}(t), v) + (f_k(t), v). \tag{7.42}$$

Из свойств формы $\hat{b}$ очевидным образом следует, что

$$\|g_k(t)\|_{V'} \leqslant \nu \|u_k^{(1)}(t)\| + c\|u_k^{(1)}(t)\|^2 + |f_k(t)|, \tag{7.43}$$

и по лемме 7.2

$$\text{последовательность } g_k \text{ ограничена в } L^2(0, T; V'). \tag{7.44}$$

После этого мы можем в точности повторить доказательство теоремы 2.2 и получить (7.37). □

7.1.4. Сходимость схемы. Поведение аппроксимирующих функций $u_k^{(i)}$, u_k при $k \to 0$ описывается следующими теоремами.

Теорема 7.1. *Пусть размерность пространства* $n = 2$ *и заданные функции* f, u_0 *удовлетворяют* (7.10)—(7.11); *пусть, далее,* u — *единственное решение задачи* 3.1, $u_k^{(i)}$, u_k — *аппроксимирующие*

[1] Шляпка над b не имеет никакого отношения к шляпке, обозначающей преобразование Фурье.

функции, определенные в (7.33), (7.34). *Тогда при* $k \to 0$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_k^{(i)},\ \boldsymbol{u}_k \text{ сходятся к } \boldsymbol{u} \text{ сильно в } \boldsymbol{L}^2(Q) \\ &\text{и } {}^*\text{-слабо в } L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)); \end{aligned} \tag{7.45}$$

$$\boldsymbol{u}_k^{(1)} \text{ сходится к } \boldsymbol{u} \text{ сильно в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \tag{7.46}$$

Теорема 7.2. *Пусть размерность пространства* $n=3$ *и заданные функции* $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u}_0$ *удовлетворяют* (7.10)—(7.11). *Тогда существует последовательность* $k' \to 0$, *такая что*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_{k'}^{(i)},\ \boldsymbol{u}_{k'} \text{ сходятся к } \boldsymbol{u} \text{ сильно в } \boldsymbol{L}^2(Q) \\ &\text{и } {}^*\text{-слабо в } L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)); \end{aligned} \tag{7.47}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_{k'}^{(1)} \text{ слабо сходится к } \boldsymbol{u} \\ &\text{в } \boldsymbol{L}^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)), \end{aligned} \tag{7.48}$$

где $\boldsymbol{u}$ — *некоторое решение задачи* 3.1. *Для любой другой последовательности* $k' \to 0$, *для которой выполняются* (7.47)—(7.48), $\boldsymbol{u}$ *должно быть решением задачи* 3.1.

Доказываются эти две теоремы одинаково, за исключением утверждения о сильной сходимости в $L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega))$.

7.1.5. Сильная сходимость в $\boldsymbol{L}^2(Q)$. По лемме 7.2 существует подпоследовательность $k' \to 0$, такая что

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_{k'}^{(1)} \to \boldsymbol{u}^{(1)} \ {}^*\text{-слабо в } L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)) \\ &\text{и слабо в } L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)), \end{aligned} \tag{7.49}$$

$$\boldsymbol{u}_{k'}^{2} \to \boldsymbol{u}^{(2)} \ {}^*\text{-слабо в } L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)), \tag{7.50}$$

$$\boldsymbol{u}_{k'} \to \boldsymbol{u}_* \ {}^*\text{-слабо в } L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)). \tag{7.51}$$

В силу леммы 7.3,

$$\boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{u}^{(2)} = \boldsymbol{u}_*. \tag{7.52}$$

Функции $\boldsymbol{u}_k^{(2)}$, а значит, и функция $\boldsymbol{u}^{(2)}$ принадлежат $L^\infty(0, T; H)$. Отсюда вытекает, что

$$\boldsymbol{u}_*(t) \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \cap \boldsymbol{H} = V \ \text{ п. в.}$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{u}_* \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \tag{7.53}$$

Результаты о сильной сходимости в $\boldsymbol{L}^2(Q)$, нужные для того, чтобы перейти к пределу, не получаются простым применением теорем о компактности; они требуют некоторых дополнительных соображений, которые мы сейчас и изложим. Напомним, что, согласно определению $\boldsymbol{u}_k^{(2)}$, значения $\boldsymbol{u}_k^{(2)}(t)$ принадлежат H для всех $t \in [0, T]$, а по теореме I.1.4 пространство $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ является прямой суммой H и его ортогонального дополнения $H^\perp$. Обозначая через P_H и $P_{H^\perp}$ ортогональные проекторы в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ на H и

$H^\perp$, имеем $u_k^{(1)} = P_H u_k^{(1)} + P_{H^\perp} u_k^{(1)}$, а потому

$$|u_k^{(1)}(t) - u_k^{(2)}(t)|^2 = |P_H u_k^{(1)}(t) - u_k^{(2)}(t)|^2 + P_{H^\perp} u_k^{(1)}(t)|^2. \tag{7.54}$$

На основании (7.54) и (7.35) мы заключаем, что

$$P_H u_k^{(1)} - u_k^{(2)} \to 0 \text{ сильно в } L^2(0, T; H), \tag{7.55}$$

$$P_{H^\perp} u_k^{(1)} \to 0 \text{ сильно в } L^2(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)). \tag{7.56}$$

Из замечания I.1.6 и леммы 7.2 следует, что $P_H u_k^{(1)}$ является ограниченной последовательностью в $L^2(0, T; \boldsymbol{H}^1(\Omega) \cap H)$; поэтому мы можем выбрать упомянутую выше подпоследовательность k' так, чтобы

$$P_H u_{k'}^{(1)} \to P_H u_* = u_* \text{ слабо в } L^2(0, T; \boldsymbol{H}^1(\Omega) \cap H). \tag{7.57}$$

Теперь применим теорему 2.1 следующим образом: положим $X_0 = \boldsymbol{H}^1(\Omega) \cap H$, $X_1 = V'$ и в качестве последовательностей $\{u_m\}$, $\{v_m\}$ возьмем последовательности $\{u_{k'}\}$, $\{P_H u_{k'}^{(1)}\}$. Эти последовательности обладают всеми требуемыми свойствами. Далее, $\boldsymbol{H}^1(\Omega) \cap H \subset H \subset V'$, и поскольку вложение $\boldsymbol{H}^1(\Omega) \cap H$ в H компактно, то компактно и вложение $\boldsymbol{H}^1(\Omega) \cap H = X_0$ в $V' = X_1$. Теорема 2.1 позволяет нам утверждать, что последовательность $P_H u_{k'}^{(1)}$ относительно компактна в $L^2(0, T; V')$ и поэтому

$$P_H u_{k'}^{(1)} \to P_H u_* = u_* \text{ сильно в } L^2(0, T; V'). \tag{7.58}$$

Применение леммы 2.1 с $X_0 = \boldsymbol{H}^1(\Omega) \cap H$, $X = H$, $X_1 = V'$ приводит к оценке

$$|P_H u_{k'}^{(1)} - u_*|_{L^2(0, T; H)} \leqslant \varepsilon \| P_H u_{k'}^{(1)} - u_* \|_{L^2(0, T; \boldsymbol{H}^1(\Omega) \cap H)} + C(\varepsilon) \| P_H u_{k'}^{(1)} - u_* \|_{L^2(0, T; V')},$$

и так как последовательность $P_H u_{k'}^{(1)}$ ограничена в $L^2(0, T; \boldsymbol{H}^1(\Omega))$, то

$$|P_H u_{k'}^{(1)} - u_*|_{L^2(0, T; H)} \leqslant C\varepsilon + C(\varepsilon) \| P_H u_{k'}^{(1)} - u_* \|_{L^2(0, T; V')}. \tag{7.59}$$

Переходя в (7.59) к верхнему пределу, получаем

$$\overline{\lim_{k' \to 0}} |P_H u_{k'}^{(1)} - u_*|_{L^2(0, T; H)} \leqslant C\varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно мало, этот верхний предел равен нулю и поэтому

$$P_H u_{k'}^{(1)} \to u_* \text{ в } L^2(0, T; H) \text{ при } k' \to 0. \tag{7.60}$$

Сравнивая (7.56) и (7.60), заключаем, что

$$u_{k'}^{(1)} \to u_* \text{ в } L^2(0,\ T;\ \boldsymbol{L}^2(\Omega)) \text{ (сильно) при } k' \to 0. \tag{7.61}$$

Наконец, из (7.35) и (7.36) вытекает, что

$$u_{k'}^{(2)} \to u_* \text{ в } L^2(0,\ T;\ \boldsymbol{L}^2(\Omega)) \text{ (сильно) при } k' \to 0, \tag{7.62}$$

$$u_{k'} \to u_* \text{ в } L^2(0,\ T;\ \boldsymbol{L}^2(\Omega)) \text{ (сильно) при } k' \to 0. \tag{7.63}$$

7.1.6. Доказательство теорем 7.1 *и* 7.2. Пусть ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция на $[0,\ T]$ и $\psi(T)=0$. Умножим (7.39) на $\psi(t)$ и проинтегрируем по t. Интегрируя первый член по частям, получаем ($u_k(0)=u_0$)

$$-\int_0^T (u_k(t),\ \psi'(t)v)\,dt + \nu\int_0^T ((u_k^{(1)}(t),\ v\psi(t)))\,dt$$

$$+\int_0^T \hat{b}(u_k^{(1)}(t),\ u_k^{(1)}(t),\ v\psi(t))\,dt$$

$$= (u_0,\ \psi(0)v) + \int_0^T (f_k(t),\ v\psi(t))\,dt \quad \forall v \in V.$$

В силу (7.49), (7.11) и (7.52),

$$\int_0^T (u_{k'}(t),\ v\psi'(t))\,dt \to \int_0^T (u_*(t),\ v\psi'(t))\,dt,$$

$$\int_0^T ((u_{k'}(t),\ v\psi(t)))\,dt \to \int_0^T ((u_*(t),\ v\psi(t)))\,dt.$$

Вследствие (7.16), (7.61) и леммы 3.2,

$$\int_0^T \hat{b}(u_{k'}^{(1)}(t),\ u_{k'}^{(1)}(t),\ v\psi(t))\,dt \to \int_0^T \hat{b}(u_*(t),\ u_*(t),\ v\psi(t))\,dt.$$

Так как $u_*(t) \in V$ п. в., из леммы II.1.3 и (7.16) вытекает, что $\hat{b}(u_*(t),\ u_*(t),\ v) = b(u_*(t),\ u_*(t),\ v)$ п. в. Из леммы 4.9 легко выводим, что

$$\int_0^T (f_k(t),\ v\psi(t))\,dt \to \int_0^T (f(t),\ v\psi(t))\,dt.$$

Таким образом, в пределе получаем

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}_*(t),\ \boldsymbol{v}\psi'(t))\,\mathrm{d}t + \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}_*(t),\ \boldsymbol{v}\psi(t)))\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T b(\boldsymbol{u}_*(t),\ \boldsymbol{u}_*(t),\ \boldsymbol{v}\psi(t))\,\mathrm{d}t$$
$$= (\boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{v}\psi(0)) + \int_0^T (\boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{v}\psi(t))\,\mathrm{d}t \quad \forall \boldsymbol{v}\in V. \tag{7.64}$$

Это уравнение в точности то же самое, что и уравнение (3.43), и поэтому мы заключаем, как и в теореме 3.1, что $\boldsymbol{u}_*$ является решением задачи 3.1.

Те же рассуждения могут быть проведены для любой другой сходящейся подпоследовательности последовательностей $\boldsymbol{u}_k$, $\boldsymbol{u}_k^{(i)}$. Это завершает доказательство теоремы 7.2 для случая $n=3$. Если $n=2$, то существует только одно решение задачи 3.1; значит, $\boldsymbol{u}_*=\boldsymbol{u}$ и сами последовательности $\boldsymbol{u}_k^{(i)}$, $\boldsymbol{u}_k$ сходятся к $\boldsymbol{u}$, в смысле (7.49)—(7.51). Остается доказать сильную сходимость в $L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega))$; этому посвящен следующий подпункт.

7.1.7. Доказательство теоремы 7.1 *(сильная сходимость).*

Лемма 7.4. *Если $n=2$, то $\boldsymbol{u}^N=\boldsymbol{u}_k^N \to \boldsymbol{u}(T)$ слабо в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ при $k\to 0$.*

Доказательство. Согласно (7.24), $|\boldsymbol{u}_k^N|\leqslant \mathrm{const}$ и, следовательно, подпоследовательность k' можно выбрать так, чтобы

$$\boldsymbol{u}_{k'}^N \to \chi \text{ слабо в } H\ (\boldsymbol{u}_k^N,\ \chi\in H). \tag{7.65}$$

Интегрируя (7.39), получаем, что

$$(\boldsymbol{u}_k(T),\ \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}_k^N,\ \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{v}) - \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}_k^{(1)}(t),\ \boldsymbol{v}))\,\mathrm{d}t$$
$$-\int_0^T \hat{b}(\boldsymbol{u}_k^{(1)}(t),\ \boldsymbol{u}_k^{(1)}(t),\ \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t + \int_0^T (\boldsymbol{f}_k(t),\ \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t \quad \forall \boldsymbol{v}\in V.$$

В этом соотношении легко перейти к пределу по последовательности k':

$$(\chi,\ \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{v}) - \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{v}))\,\mathrm{d}t$$
$$-\int_0^T \hat{b}(\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t + \int_0^T (\boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t.$$

Сравнивая это с (3.13), проинтегрированным от 0 до T, заключаем, что $(\chi,\ \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}(T),\ \boldsymbol{v})$ $\forall \boldsymbol{v}\in V$, и так как $\chi\in H$, то $\boldsymbol{u}(T)=\chi$.

Поскольку предел не зависит от выбора подпоследовательности k', соотношение (7.65) фактически справедливо для всей последовательности k. □

Лемма 7.5. *Если* $n=2$, *то* $\boldsymbol{u}_k^{(1)} \to \boldsymbol{u}$ *сильно в* $L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega))$.

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$X_k = |\boldsymbol{u}^N - \boldsymbol{u}(T)|^2 + 2\nu \int_0^T \|\boldsymbol{u}_k^{(1)}(t) - \boldsymbol{u}(t)\|^2 \, dt.$$

Запишем $X_k = X^{(1)} + X_k^{(2)} + X_k^{(3)}$, где

$$X^{(1)} = |\boldsymbol{u}(T)|^2 + 2\nu \int_0^T \|\boldsymbol{u}(t)\|^2 \, dt,$$

$$X_k^{(2)} = -2(\boldsymbol{u}^N, \boldsymbol{u}(T)) - 4\nu \int_0^T ((\boldsymbol{u}_k^{(1)}(t), \boldsymbol{u}(t))) \, dt,$$

$$X_k^{(3)} = |\boldsymbol{u}^N| + 2\nu \int_0^T \|\boldsymbol{u}_k^{(1)}(t)\|^2 \, dt.$$

Член $X^{(1)}$ не зависит от k; в $X_k^{(2)}$ легко можно перейти к пределу; вследствие (7.49) и леммы 7.4,

$$X_k^{(2)} \to -2|\boldsymbol{u}(T)|^2 - 4\nu \int_0^T \|\boldsymbol{u}(t)\|^2 \, dt = -2X^{(1)}.$$

Для предельного перехода в $X_k^{(3)}$ доказанных результатов о слабой сходимости недостаточно. Однако суммируя соотношения (7.29) и (7.31) для $m=0, \ldots, N-1$, мы можем записать

$$|\boldsymbol{u}^N|^2 + 2k\nu \sum_{m=1}^{N-1} \|\boldsymbol{u}^{m+1/2}\|^2 + \sum_{m=0}^{N-1} \{|\boldsymbol{u}^{m+1} - \boldsymbol{u}^{m+1/2}|^2 + |\boldsymbol{u}^{m+1/2} - \boldsymbol{u}^m|^2\} = |\boldsymbol{u}_0|^2 + 2k \sum_{m=0}^{N-1} (\boldsymbol{f}^m, \boldsymbol{u}^{m+1/2}),$$

или $X_k^{(3)} \leqslant |\boldsymbol{u}_0|^2 + 2\int_0^T (\boldsymbol{f}_k(t), \boldsymbol{u}_k^{(1)}(t)) \, dt$. Переходя к верхнему пределу, получаем $\overline{\lim\limits_{k\to 0}} X_k^{(3)} \leqslant |\boldsymbol{u}_0|^2 + 2\int_0^T (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(t)) \, dt$. В силу энергетического равенства для точной задачи (см. (4.55)), правая часть последнего неравенства равна $X^{(1)}$. Отсюда $\overline{\lim\limits_{k\to 0}} X_k^{(3)} \leqslant X^{(1)}$. Сопоставляя установленные неравенства, заключаем, что $\overline{\lim\limits_{k\to 0}} X_k \leqslant 0$. Это показывает, что $X_k \to 0$ при $k \to 0$. □

7.2. *Схема с $n+1$ промежуточными шагами.* Мы опишем эту схему для случая, когда используется дискретизация по пространственным переменным. А именно, мы рассмотрим аппроксимацию пространства $H_0^1(\Omega)$ конечными разностями, изученную в гл. I, и соответствующую аппроксимацию (АПР1) пространства V. Последующее можно частично распространить и на другие аппроксимации пространства V, но для них схема представляла бы значительно меньший интерес, так как метод расщепления наиболее эффективен в сочетании с конечно-разностными методами.

7.2.1. Разложение операторов. Для каждого $h=(h_1, \ldots, h_n)$, $h_i>0$, мы определили, в гл. I, п. 3.3, аппроксимацию W_h пространства $H_0^1(\Omega)$ и соответствующую аппроксимацию V_h пространства V (конечные разности, аппроксимация (АПР1)). Оба эти аппроксимирующие пространства конечномерны и снабжены либо скалярным произведением $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, индуцированным из $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, либо скалярным произведением

$$((\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h))_h=\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ih}\boldsymbol{u}_h, \delta_{ih}\boldsymbol{v}_h).$$

Определим на W_h (и, следовательно, на V_h) n других скалярных произведений

$$((\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h))_{ih}=(\delta_{ih}\boldsymbol{u}_h, \delta_{ih}\boldsymbol{v}_h), \quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{7.66}$$

Согласно дискретному неравенству Пуанкаре (см. предложение I.3.3),

$$|\boldsymbol{u}_h|\leqslant d_0\|\boldsymbol{u}_h\|_{ih}\ \forall h\in W_h, \quad d_0=2l, \tag{7.67}$$

где l обозначает теперь максимальную ширину Ω в направлениях x_i. Из этого неравенства следует, что $\|\cdot\|_{ih}$ представляет собой норму в W_h, а $((\cdot, \cdot))_{ih}$ — гильбертово скалярное произведение.

Далее, запишем трилинейную форму b_h, рассмотренную в (6.3)—(6.5), в виде

$$b_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)=\sum_{i=1}^{n} b_{ih}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h), \tag{7.68}$$

$$b_{ih}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)=b'_{ih}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)+b''_{ih}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h), \tag{7.69}$$

$$b'_{ih}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\boldsymbol{u}_{ih}(\delta_{ih}\boldsymbol{v}_{ih})\,\boldsymbol{w}_{jh}\,\mathrm{d}x, \tag{7.70}$$

$$b''_{ih}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}u_{ih}v_{jh}(\delta_{ih}w_{jh})\,\mathrm{d}x. \tag{7.71}$$

Все эти формы являются, очевидно, непрерывными трилинейным формами на $W_h \times W_h \times W_h$; ясно также, что

$$b_{ih}(u_h, v_h, v_h) = 0 \quad \forall u_h,\ v_h \in W_h. \tag{7.72}$$

7.2.2. *Описание схемы.* Данные f и u_0 удовлетворяют (7.10)-(7.11). Предположим, что нам задано следующее разложение f:

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i,\ f_i \in L^2(0,\ T;\ H), \tag{7.73}$$

это разложение может быть совершенно произвольным; простей ший случай — это $f_1 = f$, $f_i = 0$, $i = 2, \ldots, n$. Пусть интерва $[0,\ T]$ разбит на N интервалов длины $k\,(T = kN)$. Положим

$$f^{m+i/q} = \frac{1}{k} \int\limits_{mk}^{(m+1)k} f_i(t)\,\mathrm{d}t,\ i = 1, \ldots, n, \tag{7.74}$$

где

$$q = n + 1. \tag{7.75}$$

Определим теперь семейство элементов $u_h^{m+i/q}$ из W_h, $m = 0, \ldots$ $N-1$, $i = 1, \ldots, q$. Эти элементы определяются последователь но в порядке возрастания значения дробного индекса $m + i/q$ Мы начинаем с

$$u_h^0 = (\text{ортогональная проекция } u_0 \text{ на } V_h \text{ в } L^2(\Omega)). \tag{7.76}$$

Это определение имеет смысл, так как $W_h \subset L^2(\Omega)$ и, очевидно

$$|u_h^0| \leqslant |u_0| \quad \forall h. \tag{7.77}$$

Если u_k^m уже известны $(m \geqslant 0)$, то определяем $u^{m+i/q}$ следующим образом:

$$\textit{для } 1 \leqslant i \leqslant n\text{: } u_h^{m+i/q} \in W_h \text{ и}$$
$$k^{-1}(u^{m+i/q} - u_h^{m+i-1/q},\ v_h) + \nu\,((u_h^{m+i/q},\ v_h))_{ih}$$
$$+ b_{ih}(u_h^{m+i-1/q}, u_h^{m+i/q},\ v_h) = (f^{m+i/q},\ v_h) \quad \forall v_h \in W_h; \tag{7.78}$$
$$\textit{для } i = n + 1\ (= q)\text{: } u_h^{m+1} \in V_h \text{ и}$$
$$(u_h^{m+1},\ v_h) = (u_h^{m+n/q},\ v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{7.79}$$

Соотношение (7.79) означает, что u_h^{m+1} является ортогональной проекцией элемента $u_h^{m+n/q}$ на V_h в пространстве W_h со скаляр ным произведением $(\cdot,\ \cdot)$; таким образом, u_h^{m+1} вполне опреде ляется равенством (7.79).

Уравнение (7.78) линейно относительно $u_h^{m+i/q}$. Существова ние и единственность $u_h^{m+i/q}$ гарантируются проекционной теоре мой (теоремой I.2.2). В самом деле, форма

$$\{u_h, v_h\} \mapsto k^{-1}(u_h, v_h) + \nu((u_h, v_h))_{ih} + \\ + b_n(u_h^{m+i-1/q}, u_h, v_h) \tag{7.80}$$

является непрерывной билинейной формой на W_h, а форма

$$v_h \mapsto k^{-1}(u_h^{m+i-1/q}, v_h) + (f^{m+i/q}, v_h)$$

линейна и непрерывна; коэрцитивность формы (7.80) следует из (7.72).

Замечание 7.3. (Интерпретация соотношения (7.79).) Мы дадим здесь интерпретацию соотношения (7.79), которая позволит нам ввести аппроксимацию давления. Поступим так же, как в п. 3.3. Элемент $u_h^{m+1} - u_h^{m+n/q}$ из W_h ортогонален к V_h (в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$). Это равносильно утверждению, что $\left(u_h^{m+n} - u_h^{m+n/q}, v_h\right) = 0$, если $v_h \in W_h$ и (определение V_h)

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla_i v_{ih}(M) = 0 \quad \forall M \in \mathring{\Omega}_h^1. \tag{7.81}$$

В силу классического результата линейной алгебры, существует семейство чисел λ_M, $M \in \mathring{\Omega}_h^1$, таких что

$$(u_h^{m+1} - u_h^{m+n/q}, v_h) = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \lambda_M \left\{ \sum_{i=1}^{n} \nabla_{ih} v_{ih}(M) \right\} \forall v_h \in W_h. \tag{7.82}$$

Пусть π_h^{m+1} обозначает ступенчатую функцию из X_h, определяемую равенством [1]

$$\pi_h^{m+1} = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \frac{k\lambda_M}{h_1 \dots h_n} w_{hM}. \tag{7.83}$$

Тогда отношение (7.82) можно интерпретировать так [2]:

$$k^{-1}(u_h^{m+1} - u_h^{m+n/q}, v_h) - (\pi_h^{m+1}, D_h v_h) = 0 \quad \forall v_h \in W_h,^{3} \tag{7.84}$$

или

$$k^{-1}(u_{ih}^{m+1}(M) - u_{ih}^{m+n/q}(M)) + \overline{\nabla}_{ih} \pi_h^{m+1}(M) = 0 \quad \forall M \in \mathring{\Omega}_h^1. \tag{7.85}$$

---

[1] Ниже w_{hM} — характеристическая функция блока $\sigma_h(M)$.

[2] Ср. с (I.3.71)—(I.3.72).

[3] $D_h v_h(x) = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{ih} v_{ih}(x)$.

Замечание 7.4. (*Решение системы* (7.78)). Уравнения (7.78) эквивалентны уравнениям

$$k^{-1}(u_h^{m+i/q}(M)-u_h^{m+i-1/q}(M))-\nu\delta_{ih}^2 u_h^{m+i/q}(M)$$
$$+2^{-1}u_{ih}^{m+i-1/q}(M)\,\delta_{ih}u_h^{m+i/q}(M)+2^{-1}\delta_{ih}(u_{ih}^{m+i-1/q}u_h^{m+i/q})(M)$$
$$=f_h^{m+i/q}(M)=\frac{1}{h_1\ldots h_n}\int\limits_{\sigma_h(M)} f^{m+i/q}(x)\,dx \quad \forall M\in\mathring{\Omega}_h^1.$$

При вычислении $u_h^{m+i/q}$ неизвестными являются компоненты векторов $u_h^{m+i/q}(M)$; суть метода дробных шагов заключается в том, что предыдущая система в действительности распадается на несколько подсистем, содержащих каждая лишь неизвестные $u_h^{m+i/q}(M)$, где точки M все лежат на одной прямой, параллельной направлению x_i. Благодаря этому система (7.78) очень легко решается.

Замечание 7.5. (*Решение системы* (7.79).) Как и в замечании 7.2, мы можем интерпретировать (7.79) как дискретизацию задачи Неймана для давления π^{m+1} (с некоторым граничным условием, отличным от (7.23)):

$$\Delta\pi^{m+1}=\frac{1}{k}\operatorname{div} u^{m+n/q},\ \frac{\partial\pi^{m+1}}{\partial\nu}=\frac{1}{k}\gamma_\nu u^{m+n/q}. \tag{7.86}$$

Это позволяет нам решать вместо (7.79) соответствующую дискретную задачу Неймана для π_h^{m+1}. По этому поводу см. Чорин [3], Фортэн [1]. В качестве другой процедуры решения (7.79) можно было бы взять итерационный алгоритм типа рассмотренных в гл. I, § 5, и в этой главе, п. 6.3. Ситуация здесь аналогичная, и мы не будем на этом останавливаться.

7.2.3. *Безусловные априорные оценки.* Мы установим далее два типа априорных оценок: безусловные априорные оценки и априорные оценки, полученные в предположении, что k и h удовлетворяют некоторым условиям, аналогичным условиям устойчивости. Этот пункт посвящен безусловным априорным оценкам; условные же будут рассмотрены в п. 7.3.3, после изложения некоторых предварительных результатов в пп. 7.3.1 и 7.3.2.

Лемма 7.6. *Элементы $u_h^{m+i/q}$ остаются ограниченными в следующем смысле:*

$$|u_h^{m+i/q}|^2\leqslant d_2,\ m=0,\ \ldots,\ N-1,\ i=1,\ \ldots,\ q, \tag{7.87}$$

$$k\sum_{m=0}^{N-1}\|u_h^{m+i/q}\|^2\leqslant\frac{d_2}{\nu},\ i=1,\ \ldots,\ n(=q-1), \tag{7.88}$$

$$\sum_{m=0}^{N}|u_h^{m+i/q}-u_h^{m+i-1/q}|^2\leqslant d_2,\ i=1,\ \ldots,\ q, \tag{7.89}$$

где

$$d_2=|u_0|^2+\sum_{i=1}^{n}\int_0^T|f_i(s)|^2 ds. \tag{7.90}$$

Доказательство. Запишем (7.78) с $v_h=u_h^{m+i/q}$; используя (7.72), получаем

$$\begin{aligned}&|u_h^{m+i/q}|^2-|u_h^{m+i-1/q}|^2+|u_h^{m+i/q}-u_h^{m+i-1/q}|^2\\&+2k\nu\|u_h^{m+i/q}\|_{ih}^2\\&\qquad=2k(f^{m+i/q},\ u_h^{m+i/q})\leqslant 2k|f^{m+i/q}|\ |u_h^{m+i/q}|\\&\qquad\leqslant(\text{в силу (7.67)})\ 2kd_0|f^{m+i/q}|\ \|u_h^{m+i/q}\|_{ih}\\&\qquad\leqslant k\nu\|u_h^{m+i/q}\|_{ih}^2+(kd_0^2/\nu)|f^{m+i/q}|^2.\end{aligned}\tag{7.91}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&|u_h^{m+i/q}|^2-|u_h^{m+i-1/q}|^2+|u_h^{m+i/b}-u_h^{m+i-i/q}|^2\\&+k\nu\|u_h^{m+i/q}\|_{ih}^2\leqslant(kd_0^2/\nu)|f^{m+i/q}|^2,\quad 1\leqslant i\leqslant n.\end{aligned}\tag{7.92}$$

Записывая (7.79) с $v=u_h^{m+1}$, находим, что

$$|u_h^{m+1}|^2+|u^{m+n/q}|^2+|u_h^{m+1}-u_h^{m+n/q}|^2=0.\tag{7.93}$$

Суммируем все соотношения (7.92) и (7.93) для $i=1,\ \ldots,\ n$, $m=0,\ \ldots,\ N-1$. После некоторых выкладок получим

$$\begin{aligned}&|u_h^N|^2+\sum_{i=1}^{q}\sum_{m=0}^{N-1}|u_h^{m+i/q}-u_h^{m+i-1/q}|^2+k\nu\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{m=0}^{N-1}\|u_h^{m+i/q}\|_{ih}^2\\&\leqslant|u_h^0|^2+\frac{kd_0^2}{\nu}\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{m=0}^{N-1}|f^{m+i/q}|^2.\end{aligned}\tag{7.94}$$

Вследствие (7.77), $|u_h^0|\leqslant|u_0|$ и поэтому, в силу (5.29),

$$k\sum_{m=0}^{N-1}|f^{m+i/q}|^2\leqslant\int_0^T|f_i(s)|^2ds.$$

Таким образом, правая часть (7.94) не превосходит d_2 и (7.88) — (7.89) доказаны. Теперь при фиксированных r и j, $0\leqslant r\leqslant N-1$, $1\leqslant j\leqslant q$, просуммируем соотношения (7.92) и (7.93) для $m=0,\ \ldots,\ r-1$, $i=1,\ \ldots,\ q$, а также для $m=r$, $1\leqslant i\leqslant j$ [1]; опустив некоторые положительные члены, найдем, что

$$\begin{aligned}|u^{r+j/q}|^2&\leqslant|u_h^0|^2+kd_0^2\nu^{-1}\sum_{\substack{m,\\0\leqslant m+i/q\leqslant r+j/q}}|f^{m+i/q}|^2\\&\leqslant|u_h^0|^2+\frac{kd_0^2}{\nu}\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{m=0}^{N-1}|f^{m+i/q}|^2\leqslant d_2,\end{aligned}$$

$r=0,\ \ldots,\ N-1,\ j=1,\ \ldots,\ q.$ □

[1] Мы предполагаем, что $0\leqslant m+i/q\leqslant r+j/q$.

7.2.4. Теорема об устойчивости. Введем аппроксимирующие функции $u_h^{(i)}$, $i=1, \ldots, q$, и u_h так:

$$u_h^{(i)}: [0, T] \to W_h,$$
$$u_h^{(i)}(t) = u_h^{m+i/q} \text{ для } mk \leqslant t < (m+1)k, \ i=1, \ldots, q, \tag{7.95}$$

u_h — *непрерывная функция из* $[0, T]$ в W_h, *линейная на каждом интервале* $[mk, (m+1)k]$,

$$m=0, \ldots, N-1, \text{ и } u_h(mk) = u_h^m, \ m=0, \ldots, N. \tag{7.96}$$

Из леммы 7.6 вытекает следующая теорема об устойчивости:

Теорема 7.3. *Функции* $u_h^{(i)}$ *и* u_h, *определенные условиями* (7.95), (7.96), *безусловно* $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$-*устойчивы* ($1 \leqslant i \leqslant q$). *Функции* $\delta_{ih} u_h^{(i)}$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) *безусловно* $L^2(0, T; L^2(\Omega))$-*устойчивы*.

Замечание 7.6. (i) Из (7.89) следует, что

$$|u_h^{(i)} - u_h^{(i-1)}|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leqslant \sqrt{kd_2}, \ i=2, \ldots, n. \tag{7.97}$$

(ii) Как и в лемме 7.3,

$$|u_h^{(q)} - u_h|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leqslant \sqrt{kd_2/2}. \tag{7.98}$$

В самом деле, используя вычисления из доказательства леммы 4.8, мы видим, что

$$|u_h^{(q)} - u_h|^2_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} = \frac{k}{2} \sum_{m=0}^{N-1} |u_h^{m+1} - u_h^m|^2$$
$$\leqslant \frac{k}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^{q} |u_h^{m+i/q} - u_h^{m+i-1/q}|^2 \right)$$
$$\leqslant \frac{kq}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{q} |u_h^{m+i/q} - u_h^{m+i-1/q}|^2 \leqslant \frac{kq}{2} d_2.$$

7.3. Сходимость описанной схемы. Мы хотим доказать сходимость описанной выше схемы (7.78)—(7.79). Сначала нам придется установить некоторые дополнительные априорные оценки.

7.3.1. Вспомогательные результаты. Обозначим через A_{ih} ($1 \leqslant i \leqslant n$) линейный оператор из W_h в W_h, определяемый равенством

$$(A_{ih} u_h, v_h) = ((u_h, v_h))_{ih} \ \forall u_h, v_h \in W_h. \tag{7.99}$$

Далее, обозначим через B_{ih} непрерывный билинейный оператор из $W_h \times W_h$ в W_h, определяемый равенством

$$(B_{ih}(u_h, v_h), w_h)$$
$$= b_{ih}(u_h, v_h, w_h) \ \forall u_h, v_h, w_h \in W_h. \tag{7.100}$$

В терминах этих операторов соотношение (7.78) может быть записано в виде

$$k^{-1}(u_h^{m+i/q}-u_h^{m+i-1/q})+\nu A_{ih}u_h^{m+i/q}$$
$$+B_{ih}(u_h^{m+i-1/q},\ u_h^{m+i/q})=f_h^{m+i/q}. \tag{7.101}$$

Лемма 7.7. $\|u_h\|_{ih}\leqslant S_i(h)\,|u_h|\ \forall u_h\in W_h,$ (7.102)
где

$$S_i(h)=2/h_i\ (1\leqslant i\leqslant n). \tag{7.103}$$

Доказательство. Это по существу доказано в предложении 6.1 [1]. □

Лемма 7.8. $|A_{ih}u_h|\leqslant S_i(h)\|u_h\|_{ih}\ \forall u_h\in W_h.$ (7.104)

Доказательство. Вследствие (7.99) и (7.102), $|(A_{ih}u_h,v_h)|$ $=|((u_h,v_h))_{ih}|\leqslant\|u_h\|_{ih}\|v_h\|_{ih}\leqslant S_i(h)\|u_h\|_{ih}|v_h|\ \forall u_h,\ v_h\in W_h.$ □

7.3.2. Оценки для формы b_{ih}.

Лемма 7.9. *В случае $n=2$*

$$|b'_{ih}(u_h,\ v_h,\ w_h)|$$
$$\leqslant\sqrt{3}\ |u_h|^{1/2}\|u_h\|_{jh}^{1/2}\|v_h\|_{ih}|w_h|^{1/2}\|w_h\|_{ih}^{1/2}, \tag{7.105}$$
$$|b''_{ih}(u_h,\ v_h,\ w_h)|$$
$$\leqslant\sqrt{3}|u_h|^{1/2}\|u_h\|_{jh}^{1/2}|v_h|^{1/2}\|v_h\|_{ih}^{1/2}\|w_h\|_{ih}, \tag{7.106}$$
$$|B_{ih}(u_h,\ v_h)|$$
$$\leqslant2\sqrt{3}S_i(h)|u_h|^{1/2}\|u_h\|_{jh}^{1/2}|v_h|^{1/2}\|v_h\|_{ih}^{1/2}, \tag{7.107}$$

где $\{i,\ j\}$ — произвольная перестановка множества $\{1,\ 2\}$.

Доказательство. Мы докажем (7.105) для $i=1$, $j=2$. Чтобы упростить запись, опустим индексы h и положим $u=\{u_1,\ u_2\}$, $v=\{v_1,\ v_2\}$, $w=\{w_1,\ w_2\}$. По определению формы b_{ih},

$$b_{1h}(u,\ v,\ w)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}\int_\Omega u_1(\delta_{1h}v_l)\,w_l\,dx.$$

В силу неравенства Шварца,

$$\left|\int_\Omega u_1(\delta_{1h}v_l)\,w_l\,dx\right|=\left|\int_{\mathbb{R}^2}u_1(\delta_{1h}v_l)\,w_l\,dx\right|$$
$$\leqslant\left\{\int_{\mathbb{R}^2}|\delta_{1h}v_l|^2\,dx\right\}^{1/2}\left\{\int_{\mathbb{R}^2}|u_1w_l|^2\,dx\right\}^{1/2},$$
$$\int_{\mathbb{R}^2}|u_1w_l|^2\,dx\leqslant\int_{\mathbb{R}^2}\left\{\sup_{\xi_2}|u_1(x_1,\ \xi_2)|^2\right\}\left\{\sup_{\xi_2}|w_l(\xi_1,\ x_2)|^2\right\}dx.$$

[1] Доказательство предложения 6.1 надо рассмотреть для фиксированного j.

В последием интеграле переменные интегрирования разделены, поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_1 w_l|^2 \, dx \leqslant \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{\xi_2} u_1(x_1, \xi_2)|^2 \, dx_1 \right\} \times \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{\xi_1} |w_l(\xi_1, x_2)|^2 \, dx_2 \right\}.$$

Согласно (II.2.15), $\sup\limits_{\xi_2} |u_1(x_1, \xi_2)|^2$ не превосходит

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta_{2h} u_1(x_1, \xi_2)| \cdot \left(\sum_{\alpha=-1}^{1} |u_1(x_1, \xi_2 + \frac{\alpha h_2}{2})| \right) d\xi_2,$$

так что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\sup_{\xi_2} |u_1(x_1, \xi_2)|^2) \, dx_1 \leqslant 2 \cdot 3^{1/2} |\delta_{2h} u_1| |u_1|.$$

По тем же причинам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{\xi_2} |w_l(\xi_1, x_2)|^2 \, dx_2 \leqslant 2 \cdot 3^{1/2} |\delta_{1h} w_l| \, |w_l|,$$

и мы можем записать

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_1 w_l|^2 \, dx \leqslant 12 |u_1| \, |\delta_{2h} u_1| \, |w_l| \, |\delta_{1h} w_l|,$$

$$|b'_{1h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant \sqrt{3} \sum_{l=1}^{2} |u_1|^{1/2} |\delta_{2h} u_1|^{1/2} |\delta_{1h} v_l| \, |w_l|^{1/2} |\delta_{1h} w_l|^{1/2}.$$

Наконец, снова используя неравенство Шварца, мы оцениваем правую часть последнего соотношения величиной

$$\sqrt{3} \, |u_1|^{1/2} |\delta_{2h} u_1|^{1/2} \left[\sum_{l=1}^{2} |\delta_{1h} v_l|^2 \right]^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{2} |w_l| \, |\delta_{1h} w_l| \right)$$
$$\leqslant \sqrt{3} |u_1|^{1/2} |\delta_{2h} u_1|^{1/2} \|v\|_{1h} |w|^{1/2} \|w\|_{1h}^{1/2}$$
$$\leqslant \sqrt{3} \, |u|^{1/2} \|u\|_{2h}^{1/2} \|v\|_{1h} |w|^{1/2} \|w\|_{1h}^{1/2},$$

откуда следует (7.105). Для того чтобы установить неравенство (7.106), мы просто заметим, что $b''_{ih}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) = b'_{ih}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)$, и применим (7.105). Что касается (7.107), то здесь мы замечаем, что

$$|b_{ih}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h|$$
$$\leqslant 2\sqrt{3} S_i(h) |\boldsymbol{u}_h|^{1/2} \|\boldsymbol{u}_h\|_{ih}^{1/2} \cdot |\boldsymbol{v}_h|^{1/2} \|\boldsymbol{v}_h\|_{ih}^{1/2} \|\boldsymbol{w}_h\| \ \forall \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h \in W_h. \ \square$$

Лемма 7.10. *В случае* $n=3$

$$|b'_{ih}(u_h, v_h, w_h)| \leqslant 3^{3/2}|u_h|^{1/4}\|u_h\|_h^{3/4}\|v_h\|_{ih}|w_h|^{1/4}\|w_h\|_h^{3/4}, \quad (7.108)$$

$$|b''_{ih}(u_h, v_h, w_h)| \leqslant 3^{3/2}|u_h|^{1/4}\|u_h\|_h^{3/4}|v_h|^{1/4}\|v_h\|_h^{3/4}\|w_h\|_{ih}, \quad (7.109)$$

$$|B_{ih}(u_h, v_h)| \leqslant 3^{3/2}|u_h|^{1/4}\|u_h\|_h^{3/4}\{S^{3/4}(h)\|v_h\|_{ih} + S_i(h)|v_h|^{1/4}\|v_h\|_h^{3/4}\}. \quad (7.110)$$

Доказательство. Доказательство неравенств (7.108) и (7.109) то же самое, что и для леммы 6.1; (7.110) является простым следствием (7.108) и (7.109). □

7.3.3. Условные априорные оценки.

Лемма 7.11. *Пусть* $n=2$. *Предположим, что* k *и* h *удовлетворяют условию*

$$kS(h)^2 \leqslant M, \quad (7.111)$$

где M *сколь угодно велико, но фиксировано. Тогда*

$$k\sum_{m=0}^{N-1}\|u_h^{m+i/3}\|_i^2 \leqslant \text{const}, \quad i=1,\ 2,\ 3, \quad (7.112)$$

где константа зависит от M *и от данных.*

Доказательство. Будем работать со схемой в форме (7.101). В нашем случае $q=3$, и при $i=2$ уравнение (7.101) принимает вид

$$u_h^{m+1/3} = u_h^{m+2/3} + k\nu A_{2h}u_h^{m+2/3} + kB_{2h}(u_h^{m+1/3}, u_h^{m+2/3}) - kf_h^{m+2/3}.$$

Беря от обеих частей норму $\|\cdot\|_{2h}$, получаем

$$\|u_h^{m+1/3}\|_{2h} \leqslant \|u_h^{m+2/3}\|_{2h} + k\nu\|A_{2h}u_h^{m+2/3}\|_{2h} + k\|B_{2h}(u_h^{m+1/3}, u_h^{m+2/3})\|_{2h} + k\|f_h^{m+2/3}\|_{2h}.$$

В силу (7.102), (7.104) и (7.107), правая часть этого неравенства не превосходит

$$\|u_h^{m+1/3}\|_{2h} + k\nu S_2(h)^2\|u_h^{m+2/3}\|_{2h} + 2k\sqrt{3}S_2(h)^2|u_h^{m+1/3}|^{1/2}\|u_h^{m+1/3}\|_{1h}^{1/2}|u_h^{m+2/3}|^{1/2}\|u_h^{m+2/3}\|_{2h}^{1/2} + kS_2(h)|f^{m+2/3}|.$$

Согласно неравенству Шварца,

$$\|u_h^{m+1/3}\|_{2h}^2 \leqslant 4\|u_h^{m+2/3}\|_{2h}^2 + 4k^2\nu^2S_2(h)^4\|u_h^{m+2/3}\|_{2h}^2 + 48k^2S_2(h)^4|u_h^{m+1/3}|\,\|u_h^{m+1/3}\|_{1h}|u_h^{m+2/3}|\,\|u_h^{m+2/3}\|_{2h} + 4k^2S_2(h)^2|f^{m+2/3}|^2.$$

Вследствие оценок из леммы 7.6 и условия (7.111), результат суммирования правой части последнего неравенства по m от 0 до $N-1$ ограничен некоторой константой, умноженной на k^{-1}; тем самым оценка (7.112) доказана для $i=1$. Чтобы доказать ее для $i=2$, записываем (7.101) при $i=2$ ($q=3$) в виде $u_h^{m+2/3} = u_h^{m+1/3} - k\nu A_{2h}u_h^{m+2/3} - kB_{2h}(u_h^{m+1/3}, u_h^{m+2/3}) - kf_h^{m+2/3}$, а затем поступаем, как выше, только берем от обеих частей норму $\|\cdot\|_{1h}$. Чтобы доказать (7.112) для $i=3$, записываем (7.101) для $i=1$ $(q=3)$ в виде $\boldsymbol{u}_h^m=\boldsymbol{u}_h^{m+1/3}-k\nu A_{1h}\boldsymbol{u}_h^{m+1/3}-kB_{1h}(\boldsymbol{u}_h^m, \boldsymbol{u}_h^{m+1/3})$ $-k\boldsymbol{f}_h^{m+1/3}$, а затем берем от обеих частей последовательно нормы $\|\cdot\|_{1h}$ и $\|\cdot\|_{2h}$ и далее рассуждаем по существу так же, как и выше. □

Лемма 7.12. *Пусть $n=3$. Предположим, что k и h удовлетворяют условию*

$$kS(h)^{11/4}\leqslant M, \tag{7.113}$$

где M сколь угодно велико, но фиксировано. Тогда

$$k\sum_{m=0}^{N-1}\|\boldsymbol{u}_h^{m+1/3}\|_h^2\leqslant\text{const},\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{7.114}$$

где константа зависит только от M и от данных.

Доказательство то же самое, что и для леммы 7.11. Оценки (7.107) для B_{ih} заменяются более грубыми оценками (7.110) и по этой причине (7.111) заменяется более сильным условием (7.113). □

Из приведенных выше лемм вытекает следующая теорема об условной устойчивости:

Теорема 7.4. *В предположении, что k и h удовлетворяют условию устойчивости (7.111) (в случае $n=2$) или (7.113) (в случае $n=3$), все функции $\delta_{jh}\boldsymbol{u}_h^{(i)}$, $\delta_{jh}\boldsymbol{u}_h$, $i=1, \ldots, n+1$, $j=1, \ldots, n$, являются $L^2(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$-устойчивыми.*

7.3.4. Теоремы о сходимости.

Теорема 7.5. *Пусть размерность $n=2$. Если k и h удовлетворяют условию (7.111), то при k, $h\to 0$*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}_h^{(i)},\ \boldsymbol{u}_h \text{ сходятся к } \boldsymbol{u} \text{ сильно в } \boldsymbol{L}^2(Q)\\ \text{и *-слабо в } L^\infty(0, T, \boldsymbol{L}^2(\Omega)),\ i=1,\ 2,\ 3;\end{gathered} \tag{7.115}$$

$$\begin{gathered}\delta_{jh}\boldsymbol{u}_h^{(i)},\ \delta_{jh}\boldsymbol{u}_h \text{ слабо сходятся к } D_j\boldsymbol{u} \text{ в } \boldsymbol{L}^2(Q),\\ i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2;\end{gathered} \tag{7.116}$$

$$\delta_{ih}\boldsymbol{u}_h^{(i)} \text{ сильно сходится к } D_i\boldsymbol{u} \text{ в } \boldsymbol{L}^2(Q),\ i=1,\ 2, \tag{7.117}$$

где $\boldsymbol{u}$ — единственное решение задачи 3.1, отвечающее данным $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u}_0$ (удовлетворяющим условиям (7.10), (7.11)).

Теорема 7.6. *В случае когда размерность $n=3$, существует такая сходящаяся к 0 последовательность h', k'* [1], *что*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}_{h'}^{(i)},\ \boldsymbol{u}_{h'} \text{ сходятся к } \boldsymbol{u} \text{ сильно в } \boldsymbol{L}^2(Q) \text{ и *-слабо в}\\ L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)),\end{gathered} \tag{7.118}$$

$$\begin{gathered}\delta_{jh'}\boldsymbol{u}_{h'}^{(i)},\ \delta_{jh'},\ \boldsymbol{u}_{h'} \text{ слабо сходятся к } D_j\boldsymbol{u} \text{ в } \boldsymbol{L}^2(Q),\\ i=1,\ \ldots,\ 4,\ j=1,\ 2,\ 3,\end{gathered} \tag{7.119}$$

где $\boldsymbol{u}$ — некоторое решение задачи 3.1

---

[1] У которой h' и k' удовлетворяют условию (7.113).

Принцип доказательства этих теорем аналогичен принципу доказательства теорем 7.1, 7.2, 5.4 и 5.5, и мы наметим лишь главную линию рассуждений.

7.3.5. Доказательство сходимости.

Лемма 7.13. *При условии* (7.111) (*в случае* $n=2$) *или* (7.113) (*в случае* $n=3$)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\hat{u}_h(\tau)|^2 \, d\tau \leqslant \text{const} \text{ для некоторого } \gamma, 0<\gamma<1/4,$$

где $\hat{u}_h$ — *преобразование Фурье по* t *от функции* u_h, *продолженной нулем вне интервала* $[0, T]$. *Константа зависит от* γ, M *и от данных.*

Доказательство. Просуммируем (7.79) и (7.78) для $=1, \ldots, n$; получим уравнение

$$k^{-1}(u_h^{m+1}-u_h^m, v_h)+\sum_{i=1}^n ((u_h^{m+i/q}, v_h))_{ih}$$
$$+\sum_{i=1}^n b_{ih}(u_h^{m+i-1/q}, u_h^{m+1/q}, v_h)=\sum_{i=1}^n (f^{m+i/q}, v_h) \ \forall v_h \in V_h,$$

эквивалентное (см. (7.95) — (7.96)) уравнению

$$\frac{d}{dt}(u_h(t), v_h)+\sum_{i=1}^n ((u_h^{(i)}(t), v_h))_{ih}+$$
$$\sum_{i=1}^n b_{ih}(u_h^{(i-1)}(t), u_h^{(i)}(t), v_h)$$
$$=(f_{ih}(t), v_h) \ \forall t \in (0, T) \ \forall v_h \in V_h. \quad (7.120)$$

Затем, используя предыдущие априорные оценки, мы повторяем доказательство леммы 5.6. □

Доказательство теорем 7.5 и 7.6. По теореме 7.3 существует последовательность h', $k' \to 0$, такая что

$$u_{h'}^{(i)} \to u^{(i)} \ \text{*-слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \ i=1, \ldots, q, \quad (7.121)$$
$$u_{h'} \to u_* \ \text{*-слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (7.122)$$

В силу замечания 7.6, $u_{h'}^{(i)}-u_{h'}^{(i-1)}$ сильно сходится к 0 в $L^2(Q)$, $i=2, \ldots, q$, и $u_{h'}-u_{h'}^{(q)}$ также сходится к нулю; поэтому все пределы совпадают между собой:

$$u^{(1)}=\ldots=u^{(q)}=u_*. \quad (7.123)$$

Наша цель теперь — показать, что u_* является решением задачи 3.1. Согласно теореме 7.4, последовательность h', $k' \to 0$ можно выбрать так, чтобы

$$\delta_{jh'} u_{h'}^{(i)}, \ \delta_{jh'} u_{h'} \to D_j u_* \ \text{слабо в } L^2(Q). \quad (7.124)$$

Ввиду леммы 7.13 и условия (5.92), которое было доказано в п. 6.1.3 для конечных разностей,

$$u_{h'} \to u_* \text{ сильно в } L^2(Q). \tag{7.125}$$

Снова используя замечание 7.6, мы заключаем, что

$$u_{h'}^{(i)} \to u_* \text{ сильно в } L^2(Q),\ i=1, \ldots, q. \tag{7.126}$$

Утверждения о сходимости (7.121), (7.122) и (7.124)—(7.126) позволяют нам перейти к пределу в (7.120), как мы это делали в доказательствах теорем 5.4, 5.5, 7.1 и 7.2. В результате получаем, что u_* является решением задачи 3.1. Если $n=2$, то решение задачи 3.1 единственно; поэтому $u_*=u$ и указанная выше сходимость имеет место и для всей последовательности k, $h \to 0$. Утверждение о сильной сходимости (7.117) ($n=2$) следует из лемм 5.11 и 7.5, показывающих, что выражение

$$X_h = |u_h^N - u(T)|^2 + 2\nu \sum_{i=1}^{2} \int_0^T |D_i u(t) - \delta_{ih} u_h^{(i)}(t)|^2\, dt$$

сходится к нулю при h, $k \to 0$. □

Замечание 7.7. Схема (7.78)—(7.79) является дискретизованным по пространственным переменным аналогом следующей схемы:

$$\begin{gathered} k^{-1}(u^{m+i/q} - u^{m+i-1/q}) - \nu D_i^2 u^{m+i/q} + \sum_{j=1}^{n} u_j^{m+i-1/q}(D_j u^{m+i/q}) \\ + 2^{-1}(\operatorname{div} u^{m+i-1/q})\, u^{m+i/q} = f^{m+i/q},\quad i=1, \ldots, n, \\ u^{m+1} \in H \text{ и } (u^{m+1}, v) = (u^{m+n/q}, v)\ \forall v \in H. \end{gathered} \tag{7.127}$$

Для уравнений (7.127) ставятся подходящие краевые условия: $u^{m+i/q}$ обращается в нуль на некоторой части Г, которая зависит от i; более точно (см. Темам [1]), $u^{m+i/q}\cos(\nu, X_i)=0$ на Г. Элементы $u^{m+i/q}$ удовлетворяют априорным оценкам, аналогичным тем, которые были получены в лемме 7.6 для $u_h^{m+i/q}$; однако из-за отсутствия априорных оценок, аналогичных установленным в леммах 7.11 и 7.12, мы не можем доказать сходимость этой полудискретизованной схемы. В ситуации с полной дискретизацией как по временной, так и по пространственным переменным эта трудность снимается требованием, чтобы k и h удовлетворяли некоторым условиям устойчивости ((7.111), (7.113)). Эти условия устойчивости позволяют получить дополнительные априорные оценки, достаточные для осуществления предельного перехода.

§ 8. Аппроксимация уравнений Навье—Стокса при помощи метода искусственной сжимаемости

В этом параграфе мы изучим численную аппроксимацию уравнений Навье—Стокса при помощи *метода искусственной сжимаемости*. Это еще один метод преодоления вычислительных трудностей, связанных с условием „$\operatorname{div} \boldsymbol{u}=0$“. Мы введем семейство возмущенных систем (зависящих от положительного параметра ε), которые аппроксимируют уравнения Навье—Стокса и свободны от этого условия. Одна из наиболее распространенных возмущенных систем—это по сути дела система уравнений слабо сжимаемой среды с искусственным уравнением состояния

$$\rho=\rho_0+\varepsilon p, \text{ где } \varepsilon>0 \text{ „мало“}; \tag{8.1}$$

здесь ρ—плотность, p—давление, а ρ_0—некоторая постоянная, представляющая собой первое приближение для плотности [1]. Линеаризируя по ε уравнения движения, мы получаем в качестве первого приближения уравнения:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}-\nu\Delta\boldsymbol{u}+\sum_{i=1}^{n} u_i D_i \boldsymbol{u}+\operatorname{grad} p=\boldsymbol{f}, \tag{8.2}$$

$$\varepsilon\frac{\partial p}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0. \tag{8.3}$$

Эти уравнения и есть те возмущенные уравнения, которые мы будем изучать. Их легче аппроксимировать, чем подлинные уравнения Навье—Стокса, так как условие „$\operatorname{div} \boldsymbol{u}=0$“ заменено эволюционным уравнением (8.3). Вопросы, подлежащие изучению, таковы:

—существование и единственность решений возмущенных уравнений (8.2)—(8.3) (с подходящими начальными и граничными условиями);

—аппроксимирует ли решение $\boldsymbol{u}_\varepsilon$, p_ε уравнений (8.2)—(8.3) решение $\boldsymbol{u}$, p уравнений Навье—Стокса?

— дискретизация возмущенной задачи; сходимость дискретных аппроксимаций к решению уравнений Навье—Стокса.

В п. 8.1 мы точно поставим краевую задачу для уравнений (8.2)—(8.3) и дадим соответствующие теоремы существования и единственности (для фиксированного $\varepsilon>0$). Ситуация здесь по существу такая же, как и для уравнений Навье—Стокса: существование и единственность слабых решений в двумерном случае и существование слабых решений в трехмерном случае [2]. В п. 8.2 мы показываем, как решения возмущенных задач сходятся к решениям уравнений Навье—Стокса при $\varepsilon\to 0$. Пункт 8.3 посвящен численной аппроксимации возмущенных уравнений. Существует целое множество численных методов, пригодных для их аппроксимации, и мы не собираемся давать здесь систематический

[1] Во всех предыдущих параграфах мы всегда выбирали ради простоты $\rho_0=1$. Если $\rho_0\neq 1$, то мы приходим к тем же результатам, разделив уравнения движения на ρ_0.

[2] Мы не исследуем вопрос о существовании и свойствах сильных решений.

обзор различных методов; вместо этого мы предпочли подробно обсудить аппроксимацию возмущенных уравнений одним методом — методом дробных шагов. Мы построим неявную схему, безусловно устойчивую в некоторых пространствах. Наконец, мы изучим сходимость дискретной аппроксимации к решению уравнений Навье—Стокса при ε, h и k, стремящихся к нулю.

8.1. Исследование возмущенных задач.

8.1.1. Постановка задачи. Пусть размерность пространства $n=2$ или 3 и область Ω ограничена. Мы предполагаем, что $\boldsymbol{u}_0$ задано, как в задаче 3.1:

$$\boldsymbol{u}_0 \in H, \tag{8.4}$$

и для простоты предположим, что $\boldsymbol{f}$ лежит в $L^2(0, T; H)$:

$$\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; H). \tag{8.5}$$

Для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу: найти такую вектор-функцию $\boldsymbol{u}_\varepsilon = \{u_{1\varepsilon}, \ldots, u_{n\varepsilon}\}$ из $Q=\Omega\times(0, T)$ в $\mathbb{R}^n$ и такую скалярную функцию p_ε из Q в $\mathbb{R}$, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_\varepsilon}{\partial t} - \nu\Delta \boldsymbol{u}_\varepsilon + \sum_{i=1} u_{i\varepsilon} D_i \boldsymbol{u}_\varepsilon + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon)\boldsymbol{u}_\varepsilon + \operatorname{grad} p_\varepsilon = \boldsymbol{f} \text{ в } Q, \tag{8.6}$$

$$\varepsilon \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon = 0 \text{ в } Q, \tag{8.7}$$

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \tag{8.8}$$

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon = \boldsymbol{u}_0 \text{ при } t=0, \tag{8.9}$$

$$p_\varepsilon = p_0 \text{ при } t=0. \tag{8.10}$$

Функция p_0, которая в задаче 3.1 не задана, выбирается произвольно (но независимо от ε):

$$p_0 \in L^2(\Omega). \tag{8.11}$$

Уравнение (8.6) содержит член $(1/2)(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon)\boldsymbol{u}_\varepsilon$, которого нет ни в (8.2), ни в точной задаче (см. (3.5)). Это стабилизирующий член, уже использовавшийся несколько раз в предыдущих параграфах, который соответствует замене формы b на форму $\hat{b}$[1].

Предположим, что $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ и p_ε — классические решения задачи (8.6)—(8.10), скажем $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in \mathscr{C}^2(\bar{Q})$, $p_\varepsilon \in \mathscr{C}^1(\bar{Q})$. Тогда если $\boldsymbol{v} \in \mathscr{D}(\Omega)$ и $q \in \mathscr{D}(\Omega)$, то, умножая (8.6) на $\boldsymbol{v}$, (8.7) на q и интегрируя по

[1] Напомним, что $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \neq 0$, если $\operatorname{div} \boldsymbol{u} \neq 0$. По этой причине мы ввели форму $\hat{b}$: $\hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$, если $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, и $\hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Это позволяет нам получить возмущенную задачу, разрешимую на всей временной оси.

Ω, мы легко получаем уравнения

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v}) + \nu((\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v})) + \hat{b}(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v}) + (\operatorname{grad} p_\varepsilon, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}),$$

$$\varepsilon \frac{d}{dt}(p_\varepsilon, q) + (\operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon, q) = 0.$$

Эти уравнения будут также выполняться по непрерывности для любого $\boldsymbol{v}$ из $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ и любого q из $L^2(\Omega)$. Это наблюдение приводит к такой первой формулировке задачи:

Задача 8.1. *Для фиксированного* $\varepsilon > 0$ *и заданных* $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u}_0$, p_0, *удовлетворяющих* (8.4), (8.5) *и* (8.11), *найти* $\boldsymbol{u}_\varepsilon$, p_ε, *такие что*

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon \in L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)), \quad p_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \tag{8.12}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v}) + \nu((\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v})) + \hat{b}(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v}) + (\operatorname{grad} p_\varepsilon, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \tag{8.13}$$

$$\varepsilon \frac{d}{dt}(p_\varepsilon, q) + (\operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon, q) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega), \tag{8.14}$$

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad p_\varepsilon(0) = p_0. \tag{8.15}$$

Замечание 8.1. Если $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ и p_ε удовлетворяют лишь (8.12), то условия (8.15), вообще говоря, не имеют смысла. Ниже мы покажем, что, как и для точных уравнений Навье—Стокса, если $\boldsymbol{u}_\varepsilon$, p_ε удовлетворяют (8.12)—(8.14), то $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ и p_ε непрерывны (в достаточно широких пространствах), так что условиям (8.15) можно придать смысл.

Для $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ определим $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ и $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$, положив

$$\langle \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} \rangle = \hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \tag{8.16}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u}) = \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}). \tag{8.17}$$

Лемма 8.1. *Если* $\boldsymbol{u}$ *принадлежит* $L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega))$, *то функция* $t \mapsto \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u}(t))$ *принадлежит* $L^1(0, T; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$.

Доказательство. Как мы уже отмечали, форма $\hat{b}$, задаваемая равенством

$$\hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\{b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})\}, \tag{8.18}$$

является, как и b, непрерывной трилинейной формой на $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$; поэтому

$$|\hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant d_1 \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\| \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega),$$

$$\|\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\|_{\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)} \leqslant d_1 \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|, \quad \|\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u})\|_{\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)} \leqslant d_1 \|\boldsymbol{u}\|^2, \tag{8.19}$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Теперь, если $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ удовлетворяет (8.12) и (8.13), то, согласно (1.6) и (1.8), уравнение (8.13) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{f} + \nu\Delta \boldsymbol{u}_\varepsilon - \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u}_\varepsilon), \boldsymbol{v}\rangle \quad \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

Ясно, что $\Delta \boldsymbol{u}_\varepsilon \in L^2(0, T; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$, $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) \in L^1(0, T; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$, так что $\boldsymbol{f} + \nu\Delta \boldsymbol{u}_\varepsilon - \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u}_\varepsilon)$ принадлежит $L^1(0, T; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$, а значит, по лемме 1.1,

$$\boldsymbol{u}'_\varepsilon \in L^1(0, T; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)), \quad \boldsymbol{u}'_\varepsilon = \boldsymbol{f} + \nu\Delta \boldsymbol{u}_\varepsilon - \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u}_\varepsilon). \tag{8.20}$$

Аналогично из (8.12), (8.14) и леммы 1.1 вытекает, что

$$p'_\varepsilon \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad \varepsilon\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon = 0. \tag{8.21}$$

Другая формулировка задачи 8.1 выглядит поэтому следующим образом:

Задача 8.2. *Для фиксированного* $\varepsilon > 0$ *и заданных* $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u}_0$, p_0, *удовлетворяющих* (8.4), (8.5), (8.11), *найти* $\boldsymbol{u}_\varepsilon$, p_ε, *такие что*

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon \in L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)), \quad \boldsymbol{u}'_\varepsilon \in L^1(0, T; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)), \tag{8.22}$$

$$p_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad p'_\varepsilon \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \tag{8.23}$$

$$\boldsymbol{u}'_\varepsilon - \nu\Delta \boldsymbol{u}_\varepsilon + \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{u}_\varepsilon) + \operatorname{grad} p_\varepsilon = \boldsymbol{f}, \tag{8.24}$$

$$\varepsilon p'_\varepsilon + \operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon = 0, \tag{8.25}$$

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad p_\varepsilon(0) = p_0. \tag{8.26}$$

Мы уже показали, что любое решение задачи 8.1 является решением задачи 8.2; обратное проверяется очень легко (с использованием леммы 1.1), и, таким образом, эти задачи эквивалентны.

Наша цель теперь — изучить вопрос о существовании и единственности решения этих задач для фиксированного $\varepsilon > 0$; затем мы посмотрим, как решения этих задач аппроксимируют решения задач 3.1 и 3.2.

8.1.2. Существование решений возмущенных задач.

Теорема 8.1. *Для всякого фиксированного* $\varepsilon > 0$ *и для любых* $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u}_0$, p_0, *удовлетворяющих* (8.4), (8.5), (8.11), *существует по крайней мере одно решение* $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon, p_\varepsilon\}$ *задач* 8.1 *и* 8.2. *При этом*

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon \in L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))), \quad p_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{8.27}$$

и $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ *(соотв.* p_ε*) слабо непрерывна как функция из* $[0, T]$ *в* $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ *(соотв.* $L^2(\Omega)$*).*

Существование устанавливается в следующем подпункте; слабая непрерывность следует из леммы 8.1 и уже доказанной слабой непрерывности $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ и p_ε как функций со значениями в $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$.

.81.3. Доказательство теоремы 8.1. (i) Имея в виду применить метод Галёркина, рассмотрим базис в $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, состоящий из эле-

ментов $w_i \in \mathscr{D}(\Omega)$, и базис в $L^2(\Omega)$, состоящий из элементов $r_i \in \mathscr{D}(\Omega)$. Для каждого m определим приближенное решение $u_{\varepsilon m}$, $p_{\varepsilon m}$ задачи 8.1 соотношениями

$$u_{\varepsilon m}(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i, \quad p_{\varepsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} \xi_{jm}(t) r_j, \tag{8.28}$$

$$\begin{gathered}(u'_{\varepsilon m}(t), w_k) + \nu((u_{\varepsilon m}(t), w_k)) + \hat{b}(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t), w_k) \\ + (\operatorname{grad} p_{\varepsilon m}(t), w_k) = (f(t), w_k),\ k = 1, \ldots, m,\end{gathered} \tag{8.29}$$

$$\varepsilon(p'_{\varepsilon m}(t), r_l) + (\operatorname{div} u_{\varepsilon m}(t), r_l) = 0,\ l = 1, \ldots, m. \tag{8.30}$$

Кроме того, для этой системы дифференциальных уравнений ставятся начальные условия

$$u_{\varepsilon m}(0) = u_{0m}, \quad p_{\varepsilon m}(0) = p_{0m}, \tag{8.31}$$

где u_{0m} (соотв. p_{0m}) — ортогональная проекция элемента u_0 (соотв. p_0) в $L^2(\Omega)$ (соотв. $L^2(\Omega)$) на подпространство, натянутое на $w_1, \ldots, w_n$ (соотв. $r_1, \ldots, r_m$).

Уравнения (8.29) и (8.30) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно функций $g_{1m}, \ldots, g_{mm}$, $\xi_{1m}, \ldots, \xi_{mm}$. Как и в теореме 3.1, существует решение, определенное по крайней мере на некотором интервале $[0, t_m)$, $0 < t_m \leqslant T$, а приводимые ниже априорные оценки показывают, что фактически $t_m = T$.

(ii) Умножим (8.29) на $g_{km}(t)$, а (8.30) на $\xi_{lm}(t)$ и затем просуммируем все эти уравнения по $k = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, m$; в результате получим

$$\begin{gathered}(u'_{\varepsilon m}, u_{\varepsilon m}) + \nu \| u_{\varepsilon m} \|^2 + \hat{b}(u_{\varepsilon m}, u_{\varepsilon m}, u_{\varepsilon m}) + \\ (\operatorname{grad} p_{\varepsilon m}, u_{\varepsilon m}) + \varepsilon(p'_{\varepsilon m}, p_{\varepsilon m}) + (\operatorname{div} u_{\varepsilon m}, p_{\varepsilon m}) = (f, u_{\varepsilon m}).\end{gathered}$$

В силу (8.18), $\hat{b}(u_{\varepsilon m}, u_{\varepsilon m}, u_{\varepsilon m}) = 0$, и так как $u_{\varepsilon m}$ обращается в нуль на $\partial\Omega$, то $(\operatorname{grad} p_{\varepsilon m}, u_{\varepsilon m}) + (p_{\varepsilon m}, \operatorname{div} u_{\varepsilon m}) = 0$. Поэтому остается такое уравнение:

$$\frac{d}{dt}\{| u_{\varepsilon m} |^2 + \varepsilon | p_{\varepsilon m} |^2\} + 2\nu \| u_{\varepsilon m} \|^2 = 2(f, u_{\varepsilon m}). \tag{8.32}$$

Его правая часть не превосходит $2|f|\,|u_{\varepsilon m}| \leqslant 2d_0 |f|\,\| u_{\varepsilon m} \| \leqslant \nu \| u_{\varepsilon m} \|^2 + (d_0^2/\nu)|f|^2$, так что

$$\frac{d}{dt}\{| u_{\varepsilon m} |^2 + \varepsilon | p_{\varepsilon m} |^2\} + \nu \| u_{\varepsilon m} \|^2 \leqslant \frac{d_0^2}{\nu} |f|^2. \tag{8.33}$$

Интегрируя (8.33) от 0 до s, получаем

$$|u_{\varepsilon m}(s)|^2+\varepsilon|p_{\varepsilon m}(s)|^2\leqslant|u_{0m}|^2+\varepsilon|p_{0m}|^2+\frac{d_0^2}{\nu}\int_0^s|f(t)|^2\,dt$$

$$\leqslant|u_0|^2+\varepsilon|p_0|^2+\frac{d_0^2}{\nu}\int_0^T|f(t)|^2\,dt,\quad 0<s<t_m.$$

Отсюда $t_m=T$ и

$$\sup_{s\in[0,T]}\{|u_{\varepsilon m}(s)|^2+\varepsilon|p_{\varepsilon m}(s)|^2\}\leqslant d_3, \tag{8.34}$$

$$d_3=|u_0|^2+|p_0|^2+\frac{d_0^2}{\nu}\int_0^T|f(t)|^2\,dt\,^1. \tag{8.35}$$

Теперь проинтегрируем (8.33) от 0 до T:

$$|u_{\varepsilon m}(T)|^2+\varepsilon|p_{\varepsilon m}(T)|^2+\nu\int_0^T\|u_{\varepsilon m}(t)\|^2\,dt\leqslant|u_{0m}|^2$$

$$+\varepsilon|p_{0m}|^2+\frac{d_0^2}{\nu}\int_0^T|f(t)|^2\,dt\leqslant|u_0|^2+\varepsilon|p_0|^2$$

$$+\frac{d_0^2}{\nu}\int_0^T|f(t)|^2\,dt\leqslant d_3.$$

Таким образом,

$$\int_0^T\|u_{\varepsilon m}(t)\|^2\,dt\leqslant d_3/\nu. \tag{8.36}$$

(iii) Для того чтобы перейти к пределу в нелинейном члене, нам нужно оценить дробную производную по времени от $u_{\varepsilon m}$. Полагая $\varphi_m(t)=f(t)+\nu\Delta u_{\varepsilon m}-\hat{B}(u_{\varepsilon m})$, получаем из (8.36) и (8.19), что

$$\|\varphi_m(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}\leqslant|f(t)|+\nu\|u_{\varepsilon m}(t)\|+d_1\|u_{\varepsilon m}(t)\|^2. \tag{8.37}$$

Следовательно,

последовательность φ_m ограничена в $L^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$. (8.38)

[1] Нас интересуют малые значения ε; поэтому мы можем, не уменьшая общности, считать, что $\varepsilon\leqslant 1$.

Соотношения (8.29) и (8.30) можно записать в виде

$$(u'_{\varepsilon m}(t), w_k)+(\operatorname{grad} p_{\varepsilon m}(t), w_k)=(\varphi_m(t), w_k),\ k=1, \ldots, m,$$
$$\varepsilon(p'_{\varepsilon m}(t), r_l)+(\operatorname{div} u_{\varepsilon m}(t), r_l)=0,\ l=1, \ldots, m.$$

Как уже неоднократно делалось выше, мы продолжим все функции нулем вне интервала $[0, T]$ и рассмотрим преобразование Фурье соответствующих дифференциальных уравнений. На всей прямой $\mathbb{R}$ справедливы следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt}(\tilde{u}_{\varepsilon m}, w_k)+(\operatorname{grad} \tilde{p}_{\varepsilon m}, w_k)=\langle\tilde{\varphi}_m, w_k\rangle+(u_{0m}, w_k)\,\delta(0)$$
$$-(u_{\varepsilon m}(T), w_k)\,\delta(T),$$
$$\varepsilon\frac{d}{dt}(\tilde{p}_{\varepsilon m}, r_l)+(\operatorname{div} \tilde{u}_{\varepsilon m}, r_l)=\varepsilon(p_{0m}, r_l)\,\delta(0)$$
$$-\varepsilon(p_{\varepsilon m}(T), r_l)\,\delta(T).$$

После применения преобразования Фурье приходим к равенствам

$$2i\pi\tau(\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau), w_k)+(\operatorname{grad} \hat{p}_{\varepsilon m}(\tau), w_k)=\langle\hat{\varphi}_m(\tau), w_k\rangle$$
$$+(u_{0m}, w_k)-(u_{\varepsilon m}(T), w_k)\exp(-2\pi i\tau T),$$
$$2i\pi\tau\varepsilon(\hat{p}_{\varepsilon m}(\tau), r_l)+(\operatorname{div} \hat{u}_{\varepsilon m}(\tau), r_l)=\varepsilon(p_{0m}, r_l)$$
$$-\varepsilon(p_{\varepsilon m}(T), r_l)\exp(-2i\pi\tau T).$$

Умножим первое из них на $\hat{g}_{km}(\tau)$ ($\hat{g}_{km}$ — преобразование Фурье от $\tilde{g}_{km}$), а второе — на $\hat{\xi}_{km}(\tau)$ ($\hat{\xi}_{lm}$ — преобразование Фурье от $\tilde{\xi}_{lm}$) и затем просуммируем эти равенства по $k=1, \ldots, m$, $l=1, \ldots, m$. Получим

$$2i\pi\tau\{|\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)|^2+\varepsilon|\hat{p}_{\varepsilon m}(\tau)|^2\}+(\operatorname{grad} \hat{p}_{\varepsilon m}(\tau), \hat{u}_{\varepsilon m}(\tau))$$
$$+(\operatorname{div} \hat{u}_{\varepsilon m}(\tau), \hat{p}_{\varepsilon m}(\tau))=\langle\hat{\varphi}_m(\tau), \hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)\rangle$$
$$+(u_{0m}, \hat{u}_{\varepsilon m}(\tau))+\varepsilon(p_{0m}, \hat{p}_{\varepsilon m}(\tau))$$
$$-\{(u_{\varepsilon m}(T), u_{\varepsilon m}(\tau))+\varepsilon(p_{\varepsilon m}(T), p_{\varepsilon m}(\tau))\}\exp(-2i\pi T\tau). \tag{8.39}$$

Член $(\operatorname{grad} \hat{p}_{\varepsilon m}, \hat{u}_{\varepsilon m})+(\operatorname{div} \hat{u}_{\varepsilon m}, \hat{p}_{\varepsilon m})$ равен нулю. Учитывая это, выводим из (8.39), что $2\pi|\tau|\{|\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)|^2+\varepsilon|\hat{p}_{\varepsilon m}(\tau)|^2\}\leqslant|\langle\hat{\varphi}_m(\tau), \hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)\rangle|+|u_{0m}||\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)|+\varepsilon|p_{0m}||\hat{p}_{\varepsilon m}(\tau)|+|u_{\varepsilon m}(T)||\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)|$ $+\varepsilon|p_{\varepsilon m}(T)||\hat{p}_{\varepsilon m}(\tau)|$. Ввиду оценок (8.34) и (8.36), $2\pi|\tau||\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)|^2\leqslant$ $\leqslant\|\hat{\varphi}_m(\tau)\|_{H^{-1}\Omega}\|\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)\|+2\sqrt{d_3}|\hat{u}_m(\tau)|+2\sqrt{d_3}\varepsilon|\hat{p}_{\varepsilon m}(\tau)|$. Но

$$\|\hat{\varphi}_m(\tau)\|_{H^{-1}(\Omega)}\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\|\hat{\varphi}_m(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}\,dt\leqslant(\text{в силу }(8.37))$$
$$\leqslant\int_0^T\{|f(t)|+\nu\|u_{\varepsilon m}(t)\|+d_0\|u_{\varepsilon m}(t)\|^2\}\,dt\leqslant\text{const}$$

(в силу (8.38)),

$$\varepsilon |\hat{p}_{\varepsilon m}(\tau)| \leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{p}_{\varepsilon m}(t)| \, dt = \varepsilon \int_0^T |p_{\varepsilon m}(t)| \, dt$$
$$\leqslant (\text{в силу } (8.34)) \sqrt{\varepsilon}\sqrt{d_3} T \leqslant \text{const}.$$

Окончательно получаем

$$2\pi |\tau| |\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)|^2 \leqslant c_1 \| \hat{u}_{\varepsilon m}(\tau) \| + c_2. \tag{8.40}$$

Как и в доказательстве теоремы 2.2, из этого неравенства вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\hat{u}_{\varepsilon m}(\tau)|^2 \, d\tau \leqslant \text{const} \quad \text{для некоторого } \gamma, \ 0 < \gamma < 1/4. \tag{8.41}$$

(iv) Мы хотим теперь перейти к пределу в (8.29)—(8.31) при $m \to \infty$, используя оценки (8.34), (8.36) и (8.41). (Напомним, что в настоящий момент $\varepsilon > 0$ у нас фиксировано и мы имеем дело только с предельным переходом при $m \to \infty$.) Существует последовательность $m' \to \infty$, такая что

$u_{\varepsilon m'} \to u_\varepsilon$ слабо в $L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega))$, *-слабо в $L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$ и (в силу (8.41) и теоремы 2.1) сильно в $L^2(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$; (8.42)

$p_{\varepsilon m'} \to p_\varepsilon$ *-слабо в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. (8.43)

Пусть ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая скалярная функция на $[0, T]$ с $\psi(T) = 0$. Умножим (8.29) (соотв. (8.30)) на $\psi(t)$ и проинтегрируем от 0 до T. Интегрируя первый член по частям, получаем

$$-\int_0^T (u_{\varepsilon m}(t), w_k \psi'(t)) \, dt + \int_0^T \nu ((u_{\varepsilon m}(t), w_k \psi(t))) \, dt$$
$$+ \int_0^T \{\hat{b}(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t), w_k \psi(t)) + (\operatorname{grad} p_{\varepsilon m}(t), w_k \psi(t))\} \, dt$$
$$= (u_{0m}, w_k) \psi(0) + \int_0^T (f(t), w_k \psi(t)) \, dt, \tag{8.44}$$

$$-\int_0^T \varepsilon (p_{\varepsilon m}(t), r_l \psi'(t)) \, dt + \int_0^T (\operatorname{div} u_{\varepsilon m}(t), r_l \psi(t)) \, dt$$
$$= \varepsilon (p_{0m}, r_l) \psi(0), \quad 1 \leqslant k, l \leqslant m. \tag{8.45}$$

В равенствах (8.44) и (8.45) легко перейти к пределу по последовательности m':

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{w}_k\psi'(t))\,dt + \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{w}_k\psi(t)))\,dt$$
$$+\int_0^T \{\hat{b}(\boldsymbol{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{w}_k\psi(0)) + (\operatorname{grad} p_\varepsilon(t), \boldsymbol{w}_k\psi(t))\}\,dt$$
$$= (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{w}_k)\psi(0) + \int_0^T (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{w}_k\psi(t))\,dt, \quad (8.46)$$

$$-\varepsilon\int_0^T (p_\varepsilon(t), r_l\psi'(t))\,dt + \int_0^T (\operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon(t), r_l\psi(t))\,dt$$
$$= \varepsilon(p_0, r_l)\psi(0), \quad 1 \leqslant k,\ l \leqslant m. \quad (8.47)$$

Из (8.46) и (8.47) следует, что $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon, p_\varepsilon\}$ является решением задачи 8.1; доказательство такое же, как изложенное в п. 3.2 для случая уравнения (3.43). Таким образом, существование решения задач 8.1 и 8.2 доказано, чем доказательство теоремы 8.1 и завершено.

Замечание 8.2. Имея в виду предстоящий предельный переход при $\varepsilon \to 0$, полезно установить для $\boldsymbol{u}_\varepsilon$, p_ε некоторые априорные оценки, *не зависящие* от ε. В силу (8.34), (8.36), (8.42) и полунепрерывности снизу нормы в слабой топологии, имеем

$$|\boldsymbol{u}_\varepsilon|_{L^\infty(0, T;\ \boldsymbol{L}^2(\Omega))} \leqslant \varliminf_{m' \to \infty} |\boldsymbol{u}_{\varepsilon m'}|_{L^\infty(0, T;\ \boldsymbol{L}^2(\Omega))} \leqslant \sqrt{d_3}, \quad (8.48)$$

$$\|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2(0, T;\ \boldsymbol{H}_0^1(\Omega))} \leqslant \varliminf_{m' \to \infty} \|\boldsymbol{u}_{\varepsilon m'}\|_{L^2(0, T;\ \boldsymbol{H}_0^1(\Omega))} \leqslant \sqrt{d_3/\nu}. \quad (8.49)$$

Вследствие (8.34) и (8.43),

$$\sqrt{\varepsilon}\,|p_\varepsilon|_{L^\infty(0, T;\ L^2(\Omega))} \leqslant \varliminf_{m' \to \infty} \sqrt{\varepsilon}\,|p_{\varepsilon m'}|_{L^\infty(0, T;\ L^2(\Omega))} \leqslant \sqrt{d_3}. \quad (8.50)$$

Аналогично, анализируя доказательство оценок (8.40) и (8.41), мы замечаем, что фигурирующие в них константы не зависят от ε (и, конечно, от m). Поэтому, ввиду (8.42), мы получаем для $0 < \gamma < 1/4$ оценку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}\,|\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(\tau)|^2\,dt \leqslant \varliminf_{m' \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}\,|\hat{\boldsymbol{u}}_{\varepsilon m'}(\tau)|^2\,d\tau \leqslant \mathrm{const} \quad (8.51)$$

с константой, не зависящей от ε.

8.1.4. Единственность решений возмущенных задач.

Теорема 8.2. *Пусть $n = 2$, а все остальные предположения те же, что и в теореме 8.1. Тогда существует единственное решение $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon, p_\varepsilon\}$ задач 8.1 и 8.2, принадлежащее $L^\infty(0, T;\ \boldsymbol{L}^2(\Omega)) \times$*

$\times L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, *причем* u_ε *является непрерывной функцией из* $[0, T]$ *в* $L^2(\Omega)$.

Теорема следует из ряда лемм; некоторые из них дают дополнительную информацию о свойствах регулярности u_ε.

Лемма 8.2. *Пусть* $n=2$. *Если* $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$, *то*

$$\boldsymbol{u} \in L^4(0, T; \boldsymbol{L}^4(\Omega)), \tag{8.52}$$

$$\hat{B}\boldsymbol{u} \in L^{4/3}(0, T; \boldsymbol{L}^{4/3}(\Omega)). \tag{8.53}$$

Доказательство. Свойство (8.52) вытекает из леммы 3.3, дающей оценку

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 \leqslant c\,|\boldsymbol{u}(t)|^2\,\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 \text{ для п. в. } t. \tag{8.54}$$

Что касается (8.53), то заметим прежде всего, что

$$\hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i, j=1}^{2} \int_\Omega u_i (D_i v_j)\, w_j \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{u})\, v_j w_j \,\mathrm{d}x. \tag{8.55}$$

Это равенство очевидно для $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathscr{D}(\Omega)$; по непрерывности оно справедливо также для $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. В силу неравенства Гёльдера,

$$|\hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant \sum_{i, j=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)} |D_i v_j|_{L^2(\Omega)} |w_j|_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} |\operatorname{div} \boldsymbol{u}|_{L^2(\Omega)} |v_j|_{L^4(\Omega)} |w_j|_{L^4(\Omega)} \tag{8.56}$$

и поэтому

$$|\hat{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})| \leqslant c\,\|\boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)} \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{w}\|_{L^4(\Omega)} \leqslant (\text{в силу } (8.54)) \leqslant c\,|\boldsymbol{u}|^{1/2} \|\boldsymbol{u}\|^{3/2} \|\boldsymbol{w}\|_{L^4(\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\ \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}^4(\Omega).$$

Так как пространство $\boldsymbol{L}^{4/3}(\Omega)$ сопряжено к $\boldsymbol{L}^4(\Omega)$, отсюда следует, что

$$\|\hat{B}\boldsymbol{u}\|_{L^{4/3}(\Omega)} \leqslant c\,|\boldsymbol{u}|^{1/2} \|\boldsymbol{u}\|^{3/2} \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega); \tag{8.57}$$

(8.53) легко выводится из этой оценки. □

Лемма 8.3. *Пусть* $n=2$. *Если* u_ε — *решение задачи* 8.1, *принадлежащее* $L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$, *то*

$$u_\varepsilon \in L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)) \cap L^4(0, T; \boldsymbol{L}^4(\Omega)), \tag{8.58}$$

$$u_\varepsilon' \in L^2(0, T; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)) + L^{4/3}(0, T; \boldsymbol{L}^{4/3}(\Omega)). \tag{8.59}$$

Доказательство. Это сразу следует из леммы 8.2; (8.58) эквивалентно (8.52), а для (8.59) мы используем (8.24): $\boldsymbol{u}'_\varepsilon = \boldsymbol{f} + \nu\Delta\boldsymbol{u}_\varepsilon - \operatorname{grad} p_\varepsilon - \hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}_\varepsilon$. Первые три члена в правой части принадлежат $L^2(0, T; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$, а последний $L^{4/3}(0, T; \boldsymbol{L}^{4/3}(\Omega))$ (в силу (8.53)). □

Лемма 8.4. *Для любой функции* $\boldsymbol{u}_\varepsilon$, *удовлетворяющей* (8.58) — (8.59),

$$2\langle \boldsymbol{u}'_\varepsilon(t), \boldsymbol{u}_\varepsilon(t)\rangle = \frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)|^2 \tag{8.60}$$

в смысле распределений на $(0, T)$. *Кроме того, такая функция* $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ *почти всюду равна некоторой непрерывной функции из* $[0, T]$ *в* $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$.

Доказательство проводится совершенно аналогично доказательству леммы 1.2, если заметить, что пространства, фигурирующие в (8.58) и (8.59), находятся в двойственности. □

Доказательство теоремы 8.2. Нам осталось доказать единственность. Пусть $\{\boldsymbol{u}_1 p_1\}$, $\{\boldsymbol{u}_2, p_2\}$ — два решения задачи 8.1 (для простоты записи мы опускаем индекс ε). Положим $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$, $p = p_1 - p_2$. Вычитая одно из другого соотношения (8.24) (соотв. (8.25)), записанные для $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$ (соотв. для p_1 и p_2), получаем

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}' - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = \hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}_2 - \hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}_1, \\ \varepsilon p' + \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0. \end{gathered} \tag{8.61}$$

Умножая скалярно (8.60) на $\boldsymbol{u}(t)$, а (8.61) — на $p(t)$ и складывая получающиеся соотношения, находим

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{u}'(t), \boldsymbol{u}(t)\rangle + \varepsilon(p'(t), p(t)) + \nu\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 \\ &= -\hat{b}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{u}(t)); \end{aligned} \tag{8.62}$$

член

$$(\operatorname{grad} p, \boldsymbol{u}) + (p, \operatorname{div}\boldsymbol{u})$$

исчез как равный нулю, и мы еще использовали то свойство формы $\hat{b}$, что $\hat{b}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = 0$ $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. На основании леммы 8.4 мы можем записать (8.62) в виде

$$\frac{d}{dt}\{|\boldsymbol{u}(t)|^2 + \varepsilon|p(t)|^2\} + 2\nu\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 = -2\hat{b}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{u}(t)).$$

Неравенства, установленные при доказательстве леммы 8.2, позволяют нам оценить правую часть этого уравнения величиной

$$\begin{aligned} &c_3|\boldsymbol{u}(t)|\,\|\boldsymbol{u}(t)\|\,\|\boldsymbol{u}_2(t)\| + c_4|\boldsymbol{u}(t)|^{1/2}\|\boldsymbol{u}(t)\|^{3/2}|\boldsymbol{u}_2(t)|^{1/2}\|\boldsymbol{u}_2(t)\| \\ &\leqslant \nu\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 + c_5\|\boldsymbol{u}_2(t)\|^2|\boldsymbol{u}(t)|^2 + \nu\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 \\ &+ c_6|\boldsymbol{u}_2(t)|^2\|\boldsymbol{u}_2(t)\|^2|\boldsymbol{u}(t)|^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\{|\boldsymbol{u}(t)|^2 + \varepsilon|p(t)|^2\} \leqslant \sigma(t)|\boldsymbol{u}(t)|^2, \tag{8.63}$$

где σ — некоторая скалярная функция из $L^1(0, T)$; более точно, $\sigma(t) = (c_5 + c_6 |u_2(t)|^2) \|u_2(t)\|^2$. В силу леммы Гронуолла и того факта, что $u(0) = 0$, $p(0) = 0$, из (8.63) следует, что $|u(t)|^2 + \varepsilon |p(t)|^2 = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, чем единственность и доказана.

8.2. Сходимость возмущенных задач к задаче Навье — Стокса.

Теорема 8.3. *Если $n = 2$, то при $\varepsilon \to 0$ решения $\{u_\varepsilon, p_\varepsilon\}$ задачи 8.1 сходятся к решению u задачи 3.1 и соответствующему*[1] *давлению p в следующем смысле:*

$$u_\varepsilon \to u \text{ сильно в } L^2(0, T; \boldsymbol{H}^1\Omega))$$
$$\text{*-слабо в } L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)), \tag{8.64}$$
$$\operatorname{grad} p_\varepsilon \to \operatorname{grad} p \text{ в } \boldsymbol{H}^{-1}(Q). \tag{8.65}$$

Теорема 8.4. *Если $n = 3$, то существует последовательность $u_{\varepsilon'}$, $p_{\varepsilon'}$ решений задачи 8.1, такая что*

$$u_{\varepsilon'} \to u \text{ сильно в } L^2(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)),$$
$$\text{слабо в } L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega))$$
$$\text{и *-слабо в } L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)), \tag{8.66}$$
$$\operatorname{grad} p_{\varepsilon'} \to \operatorname{grad} p \text{ слабо в } \boldsymbol{H}^{-1}(Q), \tag{8.67}$$

где u — некоторое решение задачи 3.1, а p — соответствующее давление. Для любой другой последовательности $u_{\varepsilon'}$, $p_{\varepsilon'}$, для которой имеет место (8.66) — (8.67), u должно быть некоторым решением задачи 3.1, а p — соответствующим давлением.

Доказательство теорем 8.3 и 8.4. Как мы отметили в замечании 8.2, построенные в теореме 8.1 решения u_ε, p_ε удовлетворяют априорным оценкам, не зависящим от ε. Ввиду этих оценок существует последовательность $\varepsilon' \to 0$, такая что

$$u_{\varepsilon'} \to u_* \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$$
$$\text{и слабо в } L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)), \tag{8.68}$$
$$\sqrt{\varepsilon'}\, p_{\varepsilon'} \to \chi \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)). \tag{8.69}$$

В силу (8.68), (8.51) и теоремы о компактности (теоремы 2.1), имеем также

$$u_{\varepsilon'} \to u_* \text{ сильно в } L^2(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)). \tag{8.70}$$

Мы можем перейти к пределу (8.14) по этой последовательности ε'; поскольку $\sqrt{\varepsilon'}\,(d/dt)(p_{\varepsilon'}, q) \to (d/dt)(\chi, q)$ в смысле теории распределений, то $\varepsilon'\,(d/dt)(p_{\varepsilon'}, q) \to 0$ в том же смысле, и (8.14)

[1] Термином „соответствующий" автор подчеркивает тот факт, что предел p последовательности p_ε определен однозначно, в то время как в задаче 3.1 давление определяется лишь с точностью до аддитивной постоянной.— *Прим. перев.*

дает в пределе уравнение $(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_*, q) = 0 \ \forall q \in L^2(\Omega)$, которое показывает, что $\operatorname{div} \boldsymbol{u}_* = 0$ и, следовательно,

$$\boldsymbol{u}_* \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \tag{8.71}$$

Для элементов $\boldsymbol{v}$ из $\mathscr{V}$ уравнение (8.13) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v}) + \nu((\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v})) + \hat{b}(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}), \tag{8.72}$$

так как $(\operatorname{grad} p_\varepsilon, \boldsymbol{v}) = (p_\varepsilon, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) = 0$. Пусть ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая скалярная функция на $[0, T]$ с $\psi(T) = 0$. Умножим (8.72) на $\psi(t)$ и проинтегрируем по t; интегрируя затем по частям, получим

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{v}\psi'(t))\,\mathrm{d}t + \nu \int_0^T ((\boldsymbol{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{v}\psi(t)))\,\mathrm{d}t + \int_0^T \hat{b}(\boldsymbol{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{v}\psi(t))\,\mathrm{d}t = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v})\psi(0) + \int_0^T (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\psi(t))\,\mathrm{d}t \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{8.73}$$

Используя утверждения (8.68) о слабой и (8.69) о сильной сходимости, мы можем перейти к пределу в (8.73). Получим

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}_*(t), \boldsymbol{v}\psi'(t))\,\mathrm{d}t + \nu \int_0^T ((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}\psi(t)))\,\mathrm{d}t + \int_0^T \hat{b}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}\psi(t))\,\mathrm{d}t = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v})\psi(0) + \int_0^T (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\psi(t))\,\mathrm{d}t \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}. \tag{8.74}$$

Соотношение (8.74) совпадает с (3.43), и мы заключаем, как и для (3.43), что $\boldsymbol{u}_*$ является решением задачи 3.1.

Если $n = 2$, то решение $\boldsymbol{u}$ задачи 3.1 единственно и сама полная последовательность $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ сходится к $\boldsymbol{u}$ в смысле (8.68)—(8.69). Сильная сходимость в $L^2(0, T; \boldsymbol{H}_0^1(Q))$ устанавливается с помощью уже использовавшегося ранее приема, который мы сейчас совсем бегло напомним: сначала доказывается, что $(\boldsymbol{u}_\varepsilon(T) - \boldsymbol{u}(T), \boldsymbol{v}) \to 0$ $\forall \boldsymbol{v} \in V$, а используя этот результат в сочетании с уже полученными результатами о слабой сходимости, можно показать, что выражение

$$X_\varepsilon = |u_\varepsilon(T) - u(T)|^2 + \varepsilon |p_\varepsilon(T)|^2 + 2\nu \int_0^T \| u_\varepsilon(t) - u(t) \|^2 \, dt$$

сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Остается доказать (8.65) и (8.67). С этой целью запишем (8.24) в виде $\operatorname{grad} p_\varepsilon = f - u'_\varepsilon + \nu\Delta u_\varepsilon - \hat{B}u_\varepsilon$. Результаты о сходимости для u_ε показывают, что правая часть сходится к $f - u' + \nu\Delta u - Bu$ ($\hat{B} = Bu$) в $H^{-1}(Q)$, а согласно (3.129) это выражение в точности равно $\operatorname{grad} p$. Следовательно, $\operatorname{grad} p_\varepsilon \to \operatorname{grad} p$ в $H^{-1}(Q)$, причем в случае $n=2$ сходимость является сильной и имеет место для всей последовательности ε, а в случае $n=3$ является слабой и имеет место лишь для некоторой подпоследовательности ε'. □

8.3. Аппроксимация возмущенных задач. Наша цель теперь — аппроксимировать возмущенные задачи — задачи 8.1 и 8.2. Среди множества имеющихся здесь методов мы выбрали для изучения один — аппроксимацию методом дробных шагов с дискретизацией по пространственным переменным при помощи конечных разностей. Это изучение будет во многих отношениях аналогично изучению схемы дробных шагов в п. 7.2.

8.3.1. Описание схемы. В качестве дискретизации пространств $H_0^1(\Omega)$ и V выбирается дискретизация (АПР1), и все обозначения п. 7.2.1 сохраняются. Для аппроксимации давления нам понадобится некоторая аппроксимация пространства $L^2(\Omega)$; в качестве таковой возьмем просто пространство X_h, которое уже неоднократно использовалось; X_h — это пространство ступенчатых функций вида

$$\pi_h = \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \xi_M w_{hM}, \quad \xi_M \in \mathbb{R} \quad (\xi_M = \pi_h(M)), \tag{8.78}$$

где w_{hM} — характеристическая функция ячейки $\sigma_h(M)$ с центром в точке M, ребра которой параллельны осям x_i и имеют длины h_i, $i=1, \ldots, n$. Пространство X_h снабжено скалярным произведением, индуцированным из $L^2(\Omega)$:

$$(\pi_h, \pi'_h) = \int_\Omega \pi_h(x) \pi'_h(x) \, dx = (h_1, \ldots, h_n) \sum_{M \in \mathring{\Omega}_h^1} \pi_h(M) \pi'_h(M). \tag{8.79}$$

Далее, данные p_0, u_0, f удовлетворяют (8.11), (8.4) и (8.5). Выберем некоторое разложение f:

$$f = \sum_{i=1}^n f_i, \quad f_i \in L^2(0, T; H). \tag{8.80}$$

Как и в случае (7.73), это разложение совершенно произвольно; простейший случай: $f_1 = f$, $f_i = 0$, $i = 2, \ldots, n$. Интервал $[0, T$

разбит на N интервалов длины $k\,(T=kN)$, и мы полагаем

$$\boldsymbol{f}^{m+i/n}=\frac{1}{k}\int\limits_{mk}^{(m+1)k}\boldsymbol{f}_i(t)\,\mathrm{d}t,\quad i=1,\ \ldots,\ n. \tag{8.81}$$

Схема дробных шагов, которую мы будем изучать, содержит n промежуточных шагов, где n — размерность пространства ($n=2$ или 3). Мы определим семейство пар $\{\boldsymbol{u}_h^{m+i/n},\ \pi_h^{m+i/n}\}$ из $W_h\times X_h$, где $m=0,\ \ldots,\ N-1$ и $i=1,\ \ldots,\ n$. Эти элементы определяются последовательно в порядке возрастания значения дробного индекса $m+i/n$.

Мы начинаем с

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_h^0&=(\textit{ортогональная проекция } \boldsymbol{u}_0 \textit{ на } V_h \textit{ в } \boldsymbol{L}^2(\Omega)),\\ \pi_h^0&=(\textit{ортогональная проекция } p_0 \textit{ на } X_h \textit{ в } L^2(\Omega)).\end{aligned} \tag{8.82}$$

Эти определения имеют смысл ($V_h\subset L^2(\Omega),\ X_h\subset L^2(\Omega)$), и стоит отметить, что

$$|\boldsymbol{u}_h^0|\leqslant|\boldsymbol{u}_0|,\quad |\pi_h^0|\leqslant|p_0|\quad \forall h. \tag{8.83}$$

Если $\boldsymbol{u}_h^{m+i-1/n},\ \pi_h^{m+i-1/n}$ уже известны, то определяем $\boldsymbol{u}_h^{m+i/n},\ \pi_h^{m+i/n}$ ($m=0,\ \ldots,\ N-1,\ i=1,\ \ldots,\ n$) с помощью следующих условий:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}_h^{m+i/n}\in W_h,\ \pi_h^{m+i/n}\in X_h \text{ и}\\ &k^{-1}\left(\boldsymbol{u}_h^{m+i/n}-\boldsymbol{u}_h^{m+i-1/n},\ \boldsymbol{v}_h\right)+\nu\left(\left(\boldsymbol{u}_h^{m+i/n},\ \boldsymbol{v}_h\right)\right)_{ih}\\ &\qquad+b_{ih}\left(\boldsymbol{u}_h^{m+i-1/n},\ \boldsymbol{u}_h^{m+i/n},\ \boldsymbol{v}_h\right)-\left(\pi_h^{m+i/n},\ \nabla_{ih}v_{ih}\right)\\ &\qquad=\left(\boldsymbol{f}^{m+i/n},\ \boldsymbol{v}_h\right)\ \forall\boldsymbol{v}_h\in w_h,\end{aligned} \tag{8.84}$$

$$\varepsilon k^{-1}\left(\pi_h^{m+i/n}-\pi_h^{m+i-1/n},\ \pi_h'\right)+\left(\nabla_{ih}u_{ih}^{m+i/n},\ \pi_h'\right)=0\ \forall\pi_h'\in X_h. \tag{8.85}$$

Здесь нет никаких условий на дискретную дивергенцию вычисляемых элементов $\boldsymbol{u}_h^{m+i/n}$, так как они могут принадлежать W_h, а не только V_h. Уравнения (8.84)—(8.85) образуют линейное вариационное уравнение относительно пары $\{\boldsymbol{u}_h^{m+i/n},\ \pi_h^{m+i/n}\}\in W_h\times X_h$; коэрцитивность билинейной формы $\{(\boldsymbol{u}_h,\ \pi_h),\ (\boldsymbol{u}_h',\ \pi_h')\}\longmapsto\frac{1}{k}(\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}_h')$ $-\nu((\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}_h'))_{ih}+\frac{\varepsilon}{k}(\pi_h,\ \pi_h')+b_{ih}(\boldsymbol{u}_h^{m+i-1/n},\ \boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}_h')-(\pi_h,\ \nabla_{ih}u_{ih}')$ $\times(\nabla_{ih}u_{ih}\pi_h')$ обеспечивается равенством (7.72). Существование $\boldsymbol{u}_h^{m+i/n},\ \pi_h^{m+i/n}$ следует из проекционной теоремы.

Замечание 8.3. Как и в замечании 7.3, мы можем интерпретировать уравнения (8.84)—(8.85) следующим образом:

$$k^{-1}\left(u_h^{m+i/n}(M)-u_h^{m+i-1/n}(M)\right)-\nu\delta_{ih}^2 u_h^{m+i/n}(M)$$
$$+2^{-1}u_{ih}^{m+i-1/n}(M)\,\delta_{ih}u_h^{m+i/n}(M)+2^{-1}\delta_{ih}\left(u_{ih}^{m+i-1/n}u_h^{m+i/n}\right)(M)$$
$$+\bar\nabla_{ih}\pi_h^{m+i/n}(M)=f_h^{m+i/n}(M)\quad \forall M\in\mathring{\Omega}_h, \tag{8.86}$$
$$\varepsilon k^{-1}\left(\pi_h^{m+i/n}(M)-\pi_h^{m+i-1/n}(M)\right)+\nabla_{ih}u_{ih}^{m+i/n}(M)=0\quad \forall M\in\mathring{\Omega}_h^1, \tag{8.87}$$

где

$$f_h^{m+i/n}(M)=\frac{1}{h_1,\ \ldots,\ h_n}\int\limits_{\sigma_h(M)} f^{m+i/n}(x)\,dx\quad \forall M\in\mathring{\Omega}_h^1. \tag{8.88}$$

Когда мы вычисляем $u_h^{m+i/n}$, $\pi_h^{m+i/n}$, неизвестными являются n компонент вектора $u_h^{m+i/n}(M)$ и числа $\pi_h^{m+i/n}$. Здесь снова (см. замечание 7.3) суть метода дробных шагов заключается в том, что приведенная выше система уравнений в действительности распадается на ряд значительно меньших подсистем, которые содержат каждая лишь неизвестные $u_h^{m+i/n}(M)$, $\pi_h^{m+i/n}(M)$, соответствующие узлам, расположенным на одной прямой, параллельной направлению x_i. Это делает решение уравнений (8.86) и (8.87) очень легким.

8.3.2. Безусловные априорные оценки. Устойчивость описанной схемы будет установлена с помощью априорных оценок двух типов (как и в п. 7.2)—безусловных априорных оценок, приводящих к безусловным теоремам об устойчивости, и условных априорных оценок, приводящих к условным теоремам об устойчивости и используемых также в доказательстве сходимости. Настоящий подпункт посвящен выводу безусловных априорных оценок.

Лемма 8.5. *Элементы $u_h^{m+i/n}$ остаются ограниченными в следующем смысле:*

$$|u_h^{m+i/n}|^2\leqslant d_4,\quad \varepsilon\,|\pi_h^{m+i/n}|^2\leqslant d_4,\quad m=0,\ \ldots,\ N-1,\quad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{8.89}$$
$$k\sum_{m=0}^{N-1}\|u_h^{m+i/n}\|_{ih}^2\leqslant d_4/\nu,\quad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{8.90}$$
$$\sum_{m=0}^{N-1}|u_h^{m+i/n}-u_h^{m+i-1/n}|^2\leqslant d_4,\quad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{8.91}$$
$$\varepsilon\sum_{m=0}^{N-1}|\pi_h^{m+i/n}-\pi_h^{m+i-1/n}|^2\leqslant d_4,\quad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{8.92}$$

где $d_4=|u_0|^2+|p_0|^2+\dfrac{d_0^2}{\nu}\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_0^T|f_i(t)|^2\,dt.$

Доказательство. Запишем (8.84) с $v_h = u_h^{m+i/n}$; вследствие (7.72) имеем

$$\begin{aligned}&|u_h^{m+i/n}|^2 - |u_h^{m+i-1/n}|^2 + |u_h^{m+i/n} - u_h^{m+i-1/n}|^2 + 2k\nu\|u_h^{m+i/n}\|_{ih}^2 \\ &- 2k(\pi_h^{m+i/n}, D_h u_h^{m+i/n}) = 2k(f^{m+i/n}, u_h^{m+i/n}) \\ &\leqslant 2k|f^{m+i/n}||u_h^{m+i/n}| \leqslant (\text{в силу (7.67)})\ 2kd_0|f^{m+i/n}|\|u_h^{m+i/n}\|_{ih} \\ &\leqslant k\nu\|u_h^{m+i/n}\|_{ih}^2 + (kd_0^2/\nu)|f^{m+i/n}|^2. \qquad (8.93)\end{aligned}$$

После упрощения остается

$$\begin{aligned}&|u_h^{m+i/n}|^2 - |u_h^{m+i-1/n}|^2 + |u_h^{m+i/n} - u_h^{m+i-1/n}|^2 \\ &+ k\nu\|u_h^{m+i/n}\|_{ih}^2 - 2k(\pi_h^{m+i/n}, \nabla_{ih} u_h^{m+i/n}) \leqslant (kd_0^2/\nu)|f^{m+i/n}|^2. \qquad (8.94)\end{aligned}$$

Далее, полагая $\pi_h' = \pi_h^{m+i/n}$ в (8.85), получаем соотношение

$$\begin{aligned}&\varepsilon|\pi_h^{m+i/n}|^2 - \varepsilon|\pi_h^{m+i-1/n}|^2 - \varepsilon|\pi_h^{m+i/n} - \pi_h^{m+i-1/n}|^2 \\ &+ 2k(\pi_h^{m+i/n}, \nabla_{ih} u_{ih}^{m+i/n}) = 0. \qquad (8.95)\end{aligned}$$

Просуммируем все соотношения (8.94) и (8.95) для $i = 1, \ldots, n$, $m = 0, \ldots, N-1$. После некоторых выкладок, отбрасывая часть положительных членов, получаем

$$\begin{aligned}&|u_h^N|^2 + \varepsilon|\pi_h^N|^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{N-1}\Big\{|u_h^{m+i/n} - u_h^{m+i-1/n}|^2 \\ &+ \varepsilon|\pi_h^{m+i/n} - \pi_h^{m+i-1/n}|^2\Big\} + k\nu\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{N-1}\|u_h^{m+i/n}\|_{ih}^2 \\ &\leqslant |u_h^0|^2 + \varepsilon|\pi_h^0|^2 + kd_0^2/\nu\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{N-1}|f^{m+i/n}|^2. \qquad (8.96)\end{aligned}$$

Как уже делалось несколько раз в других случаях, оцениваем правую часть этого неравенства величиной

$$d_4 = |u_0|^2 + |p_0|^2 + \frac{d_0^2}{\nu}\sum_{i=1}^{m}\int_0^T |f(t)|^2\,dt$$

(см. (8.83) и (5.29); напомним, что $\varepsilon \leqslant 1$). Поэтому из (8.96) следуют (8.90) и (8.91).

При фиксированных r и j, $0 \leqslant r \leqslant N-1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, просуммируем соотношения (8.94) и (8.95) по $m = 0, \ldots, r-1$, $i = 1, \ldots, q$, а также по $m = r$, $i = 1, \ldots, j$ [1]; опуская часть положи-

[1] Суммирование распространяется лишь на пары m, i, удовлетворяющие условию $0 \leqslant m + i/n \leqslant r + j/n$.

тельных членов и производя некоторые упрощения, получаем

$$|u_h^{r+j/q}|^2+\varepsilon|\pi_h^{r+j/q}|^2\leqslant|u_h^0|^2+\varepsilon|\pi_h^0|^2+\frac{kd_0^2}{\nu}\sum_{\substack{i,\ m\\ 0\leqslant m+i/n\leqslant r+j/n}}|f^{m+i/n}|^2\leqslant|u_h^0|^2+\varepsilon|\pi_h^0|^2+\frac{kd_0^2}{\nu}\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{N-1}|f^{m+i/n}|^2\leqslant d_4,$$

$r=0,\ \ldots,\ N-1,\ j=1,\ \ldots,\ n.$

Тем самым установлено (8.89). □

Аппроксимирующие функции. Мы рассмотрим следующие аппроксимирующие функции, связанные с $u_h^{m+i/n}$, $\pi_h^{m+i/n}$:

$$u_h^{(i)}\colon [0,\ T]\to W_h,$$
$$u_h^{(i)}(t)=u_h^{m+i/n}\ \text{для}\ mk\leqslant t<(m+1)k,\ i=1,\ \ldots,\ n. \tag{8.97}$$

$u_h\colon [0,\ T]\to W_h$ — непрерывная функция, линейная на каждом интервале, $[mk,\ (m+1)k]$, $m=0,\ldots,N-1$; $u_h(mk)=u_h^m$, $m=0,\ldots,N$. (8.98)

Утверждения леммы 8.5 могут быть интерпретированы как следующая теорема об устойчивости:

Теорема 8.5. *Функции $u_h^{(i)}$, u_h, определенные условиями* (8.97) — (8.98), *безусловно $L^\infty(0,\ T;\ \boldsymbol{L}^2(\Omega))$-устойчивы* ($1\leqslant i\leqslant n$). *Функции $\delta_{ih}u_h^{(i)}$, $\delta_{nh}u_h$ ($1\leqslant i\leqslant n$) безусловно $L^2(0,\ T;\ \boldsymbol{L}^2(\Omega))$-устойчивы.*

Замечание 8.4. (i) В качестве следствия оценки (8.91) имеем

$$|u_h^{(i)}-u_h^{(i-1)}|_{L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega))}\leqslant\sqrt{kd_4},\quad i=2,\ \ldots,\ n. \tag{8.99}$$

(ii) Как и в лемме 7.3 и в замечании 7.6, имеем

$$|u_h^{(n)}-u_h|^2_{L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega))}=\frac{k}{3}\sum_{m=0}^{N-1}|u_h^{m+1}-u_h^m|^2\leqslant\frac{k}{3}\sum_{m=0}^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{n}|u_h^{m+i/n}-u_h^{m+i-1/n}|\right)^2\leqslant\frac{kn}{3}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{n}|u_h^{m+i/n}-u_h^{m+i-1/n}|^2\leqslant\frac{kn}{3}d_4.$$

Таким образом,

$$|u_h^{(n)}-u_h|_{L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega))}\leqslant\sqrt{knd_4/3}. \tag{8.100}$$

Замечание 8.5. Пусть $\pi_h^{(i)}$, π_h обозначают функции из $[0, T]$ в X_h, определяемые условиями:

$$\pi_h^{(i)}(t) = \pi_h^{m+i/n} \text{ для } mk \leqslant t < (m+1)k, \; i = 1, \ldots, n, \tag{8.101}$$

π_h непрерывна на $[0, T]$, линейна на каждом интервале $[mk, (m+1)k]$ и $\pi_h(mk) = \pi_h^m$. (8.102)

Тогда (8.92) равносильно утверждению, что

$$\sqrt{\varepsilon}\, | \pi_h^{(i)} - \pi_h^{(i-1)} |_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leqslant \sqrt{kd_4}, \; i = 2, \ldots, n. \tag{8.103}$$

С другой стороны, можно показать, как и в случае (8.100), что

$$\sqrt{3}\, | \pi_h^{(n)} - \pi_h |_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leqslant \sqrt{knd_4/3}. \tag{8.104}$$

8.3.3. Условные априорные оценки. Последующие оценки устанавливаются по методу лемм 7.11 и 7.12, с использованием, в частности, лемм пп. 7.3.1 и 7.3.2. Удобно ввести в рассмотрение линейные операторы D_{ih}, непрерывно действующие из X_h в W_h и такие, что

$$(D_{ih}\pi_h, v_h) = (\pi_h \nabla_{ih} v_{ih}) \quad \forall \pi_h \in X_h \quad \forall v_h \in W_h.^{1} \tag{8.105}$$

Привлекая операторы A_{ih}, D_{ih}, B_{ih}, мы можем записать (8.84) в виде

$$k^{-1}(u_h^{m+i/n} - u_h^{m+i-1/n}) + \nu A_{ih} u_h^{m+i/n} + B_{ih}(u_h^{m+i-1/n}, u_h^{m+i/n})$$
$$+ D_{ih}\pi_h^{m+i/n} = f_h^{m+i/n}, \; m = 0, \ldots, N-1, \; i = 1, \ldots, n. \tag{8.106}$$

Лемма 8.6. $|D_{ih}\pi_h| \leqslant S_i(h)|\pi_h| \; \forall \pi_h \in X_h, \; S_i(h) = 2/h_i.$ (8.107)

Доказательство. В силу (8.101),

$$|(D_{ih}\pi_h, v_h)| = |(\pi_h, \nabla_{ih} v_{ih})| \leqslant |\pi_h| \, |\nabla_{ih} v_{ih}| = |\pi_h| \, |\delta_{ih} v_{ih}|$$
$$\leqslant |\pi_h| \, \| v_h \|_{ih} \leqslant S_i(h) |\pi_h| \, |v_h| \; \forall v_h \in W_h. \quad \square$$

Лемма 8.7. *Пусть $n = 2$. Предположим, что k и h удовлетворяют условию*

$$kS(h)^2 \leqslant M, \tag{8.108}$$

где M сколь угодно велико, но фиксировано. Тогда

$$k \sum_{m=0}^{N-1} \| u_h^{m+i/2} \|_h^2 \leqslant \text{const}, \quad i = 1, 2, \tag{8.109}$$

где константа зависит только от M и от данных.

Доказательство. Запишем (8.106) с $i = 2$ (и $n = 2$): $u_h^{m+1} = u_h^{m+1/2} - k\nu A_{2h} u_h^{m+1} - kB_{2h}(u_h^{m+1/2}, u_h^{m+1}) - kD_{2h}\pi_h^{m+1} + kf_h^{m+1}$. Беря норму

---

[1] По существу, $D_{ih}\pi_h$ — это вектор-функция, у которой отлична от нуля только одна, i-я компонента, равная $\overline{\nabla}_{ih}\pi_h$.

$\|\cdot\|_{1h}$ от каждой стороны этого равенства и используя (7.102), (7.104), (7.107), (8.107), получаем

$$\|u_h^{m+1}\|_{1h} \leqslant \|u_h^{m+1/2}\|_{1h} + k\nu\|A_{2h}u_h^{m+1}\|_{1h} + k\|B_{2h}(u_h^{m+1/2}, u_h^{m+1})\|_{1h}$$
$$+ k\|D_{2h}\pi_h^{m+1}\|_{1h} k\|f_h^{m+1}\|_{1h} \leqslant \|u_h^{m+1}\|_{2h} + k\nu S_1(h)S_2(h)\|u_h^{m+1}\|_{2h}$$
$$+2\sqrt{3}\,kS_1(h)S_2(h)|u_h^{m+1/2}|^{1/2}\|u_h^{m+1/2}\|_{1h}^{1/2}|u_h^{m+1}|^{1/2}\|u_h^{m+1}\|_{2h}^{1/2}$$
$$+kS_1(h)S_2(h)|\pi_h^{m+1}| + kS_1(h)|f_h^{m+1}|.$$

Согласно неравенству Шварца,

$$\|u_h^{m+1}\|_{1h}^2 \leqslant 5(1+k^2\nu^2 S_1(h)^2)\|u_h^{m+1}\|_{2h}^2$$
$$+60k^2S_1(h)S_2(h)^2|u_h^{m+1/2}|\|u_h^{m+1/2}\|_{1h}|u_h^{m+1}|\|u_h^{m+1}\|_{2h}$$
$$+5k^2S_1(h)^2S_2(h)^2|\pi_h^{m+1}|^2 + 5k^2S_1(h)^2|f_h^{m+1}|.$$

В силу оценок леммы 8.5 и условия (8.108), результат суммирования правой части этого неравенства по m от 0 до $N-1$ ограничен произведением k^{-1} на некоторую константу. Тем самым (8.109) доказано для $i=2$. Чтобы доказать, что

$$k\sum_{m=0}^{N-1}\|u_h^{m+1/2}\|_{2h}^2 \leqslant \text{const},$$

мы записываем (8.106) с $i=1$ и соответственным образом оцениваем $\|\cdot\|_{2h}$-норму $u_h^{m+1/2}$. □

Лемма 8.8. *Пусть $n=3$. Предположим, что k и h удовлетворяют условию*

$$kS(h)^{11/4}/\sqrt{\varepsilon} \leqslant M, \tag{8.110}$$

где M сколь угодно велико, но фиксировано. Тогда

$$k\sum_{m=0}^{N-1}\|u_h^{m+i/n}\|_h^2 \leqslant \text{const}, \quad i=1, 2, 3, \tag{8.111}$$

где константа зависит только от M и от данных.

Доказательство то же самое, что и у леммы 8.7 (и лемм 7.11, 7.12), только оценки (7.107) для B_{ih} заменяются оценками (7.110). □

Из этих лемм вытекает новый результат об устойчивости:

Теорема 8.6. *В предположении что k, h и ε удовлетворяют условию устойчивости* (8.108) (*при* $n=2$) *или* (8.110) (*при* $n=3$), *все функции $\delta_{jh}u_h^{(i)}$, $1\leqslant i, j\leqslant n$, являются $L^2(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$-устойчивыми.*

8.3.4. Теоремы о сходимости.

Теорема 8.7. *Пусть $n=2$. Предположим, что k, h, ε связаны условием* (8.108). *Тогда если k, h, ε стремятся к нулю и*

$$k/\varepsilon \to 0, \tag{8.112}$$

то

$$u_h^{(i)},\ u_h \text{ сходятся к } u \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ и *-слабо в } L^\infty(0, T;\ L^2(\Omega)),\ i=1, 2; \tag{8.113}$$

$$\delta_{jh} u_h^{(i)},\ \delta_{jh} u_h \text{ слабо сходятся к } D_j u \text{ в } L^2(Q),\ 1 \leqslant r,\ j \leqslant 2; \tag{8.114}$$

$$\delta_{ih} u_h^{(i)} \text{ сильно сходятся к } D_i u \text{ в } L^2(Q),\ i=1, 2, \tag{8.115}$$

где u *— единственное решение задачи* 3.1, *отвечающее данным* f, u_0 (*удовлетворяющим* (8.4) *и* (8.5)).

Теорема 8.8. *Предположим, что размерность* $n=3$. *Существует сходящаяся к нулю последовательность* h', k', ε'[1], *такая что*

$$u_{h'}^{(i)},\ u_{h'} \text{ сходятся к } u \text{ сильно в } L^2(Q) \text{ и *-слабо в } L^\infty(0, T;\ L^2(Q)); \tag{8.116}$$

$$\delta_{jh'} u_{h'}^{(i)},\ \delta_{jh'} u_{h'} \text{ слабо сходятся к } D_j u \text{ в } L^2(Q),\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant 3, \tag{8.117}$$

где u *— некоторое решение задачи* 3.1. *Для любой другой последовательности* h', k', $\varepsilon' \to 0$, *удовлетворяющей условию*

$$k'/\varepsilon' \to 0 \tag{8.118}$$

и такой, что имеют место (8.116) *и* (8.117), u *должно быть решением задачи* 3.1.

Основные моменты доказательства представлены в следующем, заключительном подпункте.

8.3.5. Доказательство сходимости.

Лемма 8.9. *Если выполнено условие* (8.109) (*в случае* $n=2$) *или* (8.110) (*в случае* $n=3$) *и отношение* k/ε *остается ограниченным, то*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} |\hat{u}_h(\tau)|^2 \, d\tau \leqslant \text{const} \text{ для некоторого } \gamma,\ 0 < \gamma < 1/4, \tag{8.119}$$

где $\hat{u}_h$ *— преобразование Фурье по* t *от функции* u_h, *продолженной нулем вне интервала* $[0, T]$, *а константа зависит от* γ, M, *от верхней границы отношения* k/ε *и от данных.*

Доказательство. Просуммируем (по отдельности) соотношения (8.84) и (8.85) для $j=1, \ldots, n$; после несложных выкладок

[1] Для которой ε', h', k' удовлетворяют (8.108) и $k'/\varepsilon' \to 0$.

получим

$$\frac{1}{k}(u_h^{m+1}-u_h^m,\ v_h)+\sum_{i=1}^{n}((u_h^{m+i/n},\ v_h))_{ih}$$
$$+\sum_{i=1}^{n} b_{ih}(u_h^{m+(i-1)/n},\ u_h^{m+i/n},\ v_h)-(\pi_h^{m+1},\ D_h v_h)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(f^{m+i/n},\ v_h)+\sum_{i=1}^{n-1}(\pi_h^{m+1}-\pi_h^{m+i/n},\ \nabla_{ih}v_{ih})\ \forall v_h\in W_h, \tag{8.120}$$
$$(\varepsilon/k)(\pi_h^{m+1}-\pi_h^m,\pi_h')+(D_h u_h^{m+1},\ \pi_h')$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{ih}u_{ih}^{m+1}-\nabla_{ih}u_{ih}^{m+i/n},\ \pi_h')\qquad \forall\pi_h'\in X_h. \tag{8.121}$$

Перепишем эти уравнения в виде

$$\frac{d}{dt}(u_h(t),\ v_h)+\sum_{i=1}^{n}\nu((u_h^{(i)}(t),\ v_h))_{ih}$$
$$+\sum_{i=1}^{n} b_{ih}(u_h^{(i-1)}(t),\ u_h^{(i)}(t),\ v_h)-(\pi_h^{(n)}(t),\ D_h v_h)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(f_{ih}(t),\ v_h)+(\varphi_h(t),\ v_h)\qquad \forall v_h\in W_h\qquad \forall t\in(0,\ T), \tag{8.122}$$
$$\varepsilon\frac{d}{dt}(\pi_h(t),\ \pi_h')+(D_h u_h^{(n)}(t),\ \pi_h')=(\theta_h(t),\ \pi_h')$$
$$\forall\pi_h'\in X_h\forall t\in(0,\ T), \tag{8.123}$$

где φ_h и θ_h — ступенчатые функции из $[0,\ T]$ в W_h и X_h соответственно, определяемые равенствами

$$\varphi_h(t)=\sum_{i=1}^{n-1}(D_{ih}\pi_h^{m+1}-D_{ih}\pi_h^{m+i/n}),$$
$$mk\leqslant t<(m+1)k, \tag{8.124}$$
$$\theta_h(t)=\sum_{i=1}^{n-1}\nabla_{ih}u_{ih}^{m+1}-\nabla_{ih}u_{ih}^{m+i/n},$$
$$mk\leqslant t<(m+1)k,\quad m=0,\ \dots,\ N-1. \tag{8.125}$$

Оценка (8.119) выводится в принципе так же, как и предыдущие аналогичные оценки (см. лемму 5.6 и доказательство теоремы 8.1, пункт (iii)), единственный новый момент — это оценка членов, содержащих φ_h и θ_h. Заметим, что для $t\in(mk,\ (m+1)k)$

$$|(\varphi_h(t),\ v_h)|=\left|\sum_{i=1}^{n-1}(\pi_h^{m+1}-\pi_h^{m+i/n},\ \nabla_{ih}v_{ih})\right|$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n-1}|\pi_h^{m+1}-\pi_h^{m+i/n}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|\nabla_{ih}v_{ih}|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant c_1\|v_h\|_h\left(\sum_{i=2}^{n}|\pi_h^{m+i/n}-\pi_h^{m+(i-1)/n}|^2\right)^{1/2}.$$

Поэтому, обозначая через $\|\cdot\|_{*h}$ норму, дуальную к норме $\|\cdot\|_h$ на W_h, имеем

$$\|\varphi_h(t)\|_{*h}^2\leqslant c_1^2\sum_{i=2}^{n}|\pi_h^{m+i/n}-\pi_h^{m+(i-1)/n}|^2,\qquad mk\leqslant t<(m+1)k,$$

так что

$$\int_0^T\|\varphi_h(t)\|_{*h}^2\,dt\leqslant(\text{в силу (8.92)})\leqslant c_1^2 d_4\frac{k}{\varepsilon}\leqslant\text{const}.\tag{8.126}$$

Аналогично для $t\in(mk,\ (m+1)k)$

$$|\theta_h(t)|\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}|\nabla_{ih}u_{ih}^{m+1}-\nabla_{ih}u_{ih}^{m+i/n}|,$$

$$|\theta_h(t)|^2\leqslant c_2S(h)^2\sum_{i=2}^{n}|u_h^{m+i/n}-u_h^{m+i-1/n}|^2$$

и поэтому (вследствие (8.91), (8.108) и (8.110))

$$\int_0^T|\theta_h(t)|^2\,dt\leqslant\text{const}.\tag{8.127}$$

Оценок (8.126) и (8.127) уже достаточно для того, чтобы оценить члены в (8.122) и (8.123), содержащие φ_h и θ_h. □

Доказательство теорем 8.7 и 8.8. (i) По теореме 8.5 существует последовательность h', $k'\to 0$, такая что

$$u_{h'}^{(i)}\to u^{(i)}\ \text{*-слабо в}\ L^\infty(0,\ T;\ \boldsymbol{L}^2(\Omega)),\quad i=1,\ \ldots,\ n,\tag{8.128}$$
$$u_{h'}\to u_*\ \text{*-слабо в}\ L^\infty(0,\ \boldsymbol{L}^2(\Omega)).\tag{8.129}$$

В силу замечания 8.4, $u_h^{(i)}-u_h^{(i-1)}$ сильно сходится к 0 в $\boldsymbol{L}^2(Q)$ $(2\leqslant i\leqslant n)$ и $u_{h'}-u_{h'}^{(n)}$ тоже. Поэтому все пределы совпадают между собой:

$$u^{(1)}=\ldots=u^{(n)}=u_*.\tag{8.130}$$

Мы утверждаем, что u_* является решением задачи 3.1. Согласно теореме 8.6, последовательность h', $k'\to 0$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись еще соотношения

$$\delta_{jh'}u_{h'}^{(i)},\ \delta_{jh'}u_{h'} \to D_j u_* \text{ слабо в } L^2(Q). \tag{8.131}$$

При этом мы можем подобрать ее так, чтобы также $k'/\varepsilon' \to 0$. Тогда ввиду леммы 8.9 и свойства (5.92)

$$u_{h'} \to u_* \text{ сильно в } L^2(Q).[1] \tag{8.132}$$

Снова используя замечание 8.4, получаем

$$u_{h'}^{(i)} \to u_* \text{ сильно в } L^2(Q), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{8.133}$$

(ii) Переходя к пределу в (8.85), покажем, что $\operatorname{div} u_* = 0$. Пусть σ — произвольная функция из $\mathscr{D}(\Omega)$ и π_h' — функция, определенная равенством $\pi_h'(M) = \sigma(M) \forall M \in \mathring{\Omega}_h^1$. Ясно, что

$$\pi_h' \to \sigma \text{ в } L^\infty(\Omega) \text{ при } h \to 0. \tag{8.134}$$

Пусть, далее, ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая скалярная функция на $[0, T]$ с $\psi(T) = 0$. Умножим (8.85) на $\psi^m = \psi(mk)$, а затем просуммируем по $m = 0, \ldots, N-1$, $i = 1, \ldots, m$; в результате придем к соотношению

$$\varepsilon \sum_{m=1}^{N} (\pi_h^m, (\psi^m - \psi^{m-1}) \pi_h') + k \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=0}^{N-1} (\nabla_{ih} u_{ih}^{m+i/n}, \psi^m \pi_h') = \varepsilon (\pi_h^0, \pi_h' \psi(0)). \tag{8.135}$$

Используя оценки (8.89) для π_h^m и указанную выше слабую сходимость, легко перейти к пределу в (8.135). В пределе получим

$$\int_0^T (\operatorname{div} u_*(t), \sigma\psi(t))\, dt = 0, \tag{8.136}$$

и поскольку $\sigma \in \mathscr{D}(\Omega)$ и ψ были произвольны, то из (8.136) следует, что $\operatorname{div} u_* = 0$. Таким образом,

$$u_* \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \tag{8.137}$$

(iii) Остается перейти к пределу в (8.122). Пусть v — произвольный элемент из $\mathscr{V}$. Запишем (8.122) с $v_h = r_h v$, где r_h — оператор сужения для аппроксимации (АПР[1]) ($D_h r_h v = 0$). Пусть функция ψ такая же, как выше. Умножим (8.122) на $\psi(t)$ и про-

[1] См. п. 6.1.3.

интегрируем по t. Интегрируя затем по частям, находим

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}_h(t),\ \psi'(t)\boldsymbol{v}_h)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \nu \int_0^T ((\boldsymbol{u}_h^{(i)}(t),\ \boldsymbol{v}_h\psi(t)))_{ih}\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \int_0^T b_{ih}(\boldsymbol{u}_h^{(i-1)}(t),\ \boldsymbol{u}_h^{(i)}(t),\ \psi(t)\boldsymbol{v}_h)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^T (\boldsymbol{f}_{ih}(t),\ \boldsymbol{v}_h\psi(t))\,\mathrm{d}t + (\boldsymbol{u}_h^0,\ \boldsymbol{v}_h)\psi(0) + \int_0^T (\boldsymbol{\varphi}_h(t),\ \boldsymbol{v}_h\psi(t))\,\mathrm{d}t. \tag{8.138}$$

Переход к пределу (по последовательности h', k', ε') во всех членах (8.138), за исключением последнего члена в правой части, осуществляется стандартным образом. Этот последний член сходится к нулю в силу оценки (8.126) для φ_h и предположения, что $k'/\varepsilon' \to 0$. Это единственное место в доказательстве, где используется предположение о стремлении отношения k/ε к нулю. В пределе мы получаем уравнение, аналогичное (3.43) (с $\boldsymbol{u}$, замененным на $\boldsymbol{u}_*$), из которого мы заключаем (так же, как это делалось при доказательстве теоремы 3.1), что $\boldsymbol{u}_*$ является решением задачи 3.1. В случае $n=2$ решение задачи 3.1 единственно; поэтому $\boldsymbol{u}_* = \boldsymbol{u}$ и установленные выше результаты о слабой сходимости имеют место для всей последовательности k, h, $\varepsilon \to 0$ (удовлетворяющей условиям (8.108) и $k/\varepsilon \to 0$). Утверждения о сильной сходимости (8.115) следуют из того факта, что

$$X_h = |\boldsymbol{u}_h^N - \boldsymbol{u}(T)|^2 + \varepsilon|\pi_h^N|^2 + 2\nu \sum_{i=1}^2 \int_0^T |D_i\boldsymbol{u}(t) - \delta_{ih}\boldsymbol{u}_h^{(i)}(t)|\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{при} \quad h,\ k,\ \varepsilon \to 0. \quad \square$$

СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА rot И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

В настоящем приложении мы опишем некоторые функциональные свойства оператора rot, действующего на ограниченном множестве в $\mathbb{R}^n$, $n=2$ или 3, и, используя эти свойства, получим усиленный вариант результата о существовании, представленного в теореме 1.5 гл. II. В основном мы следуем изложению, данному в § 1 работы Фояша и Темама [3].

1. Функциональные свойства оператора **rot.** Пусть Ω — открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $n=2$ или 3. Мы предполагаем, что

$$\Omega \text{ связно и принадлежит классу } \mathscr{C}^2 \text{ (ср. (I.1.3)), а его граница } \Gamma \text{ имеет конечное число связных компонент } \Gamma_1, \ldots \Gamma_k \ (k \geqslant 1). \tag{1.1}$$

Множество Ω может быть односвязным или неодносвязным. В последнем случае мы, очевидно, можем сделать его односвязным с помощью конечного числа гладких разрезов (см. рис. 6).

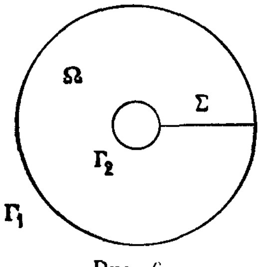

Рис. 6.

Более точно:

Обозначим через $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ $(N \geqslant 0)$ многообразия класса $\mathscr{C}^2$ размерности $n-1$, такие что $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \varnothing$ для $i \neq j$ и открытое множество $\dot{\Omega} = \Omega \setminus \Sigma$, $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \Sigma_i$ односвязно и липшицево (т. е. Σ_i не являются касательными к Γ). (1.2)

В остальном мы используем те же обозначения, что и раньше, в частности обозначения для функциональных пространств, введенные в § 1 и 2 гл. I и в § 1 гл. II ($\mathscr{V}^\circ$, V, H, $H^m(\Omega)$, $\boldsymbol{H}^m(\Omega)$, $H^{1/2}(\Gamma)$, $\boldsymbol{H}^{1/2}(\Gamma)$, ...). Кроме того, нам понадобится еще пространство $H^{m-1/2}(\Gamma)$, m — целое $\geqslant 1$, которое можно определить следующим простым образом (ср. с подстрочным примечанием к предложению I.2.2): это пространство $\gamma_0 H^m(\Omega)$, т. е. пространство следов функций из $H^m(\Omega)$, снабженное нормой

$$\|\psi\|_{H^{m-1/2}(\Gamma)} = \inf_{\gamma_0 u = \psi} \|u\|_{H^m(\Omega)}. \tag{1.3}$$

Систематическое обсуждение таких пространств можно найти у Лионса и Мадженеса [1]. Напомним также ортогональное разложение пространства $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, даваемое теоремой I.1.5:

$$\boldsymbol{L}^2(\Omega) = H \oplus H_1 \oplus H_2, \tag{1.4}$$

где H_1 и H_2 определены в (I.1.41), (I.1.42). Ниже будет указано ортогональное разложение для H.

1.1. Ядро оператора rot. Нет необходимости напоминать определение оператора rot в трехмерном случае. В случае $n=2$ мы полагаем $\operatorname{rot} u = \{-D_2 u, D_1 u\}$ для скалярных функций u: $\Omega \to \mathbb{R}$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = D_1 u_2 - D_2 u_1$ для вектор-функций $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2\}$: $\Omega \to \mathbb{R}^2$.

Оператор rot отображает $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ в $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ в случае $n=3$ (соотв. в $H^{-1}(\Omega)$ в случае $n=2$). Наша цель сейчас — описать его ядро в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, ker(rot). Очевидно, что $\ker(\operatorname{rot}) \supset H_1 \oplus H_2$; найдем элементы из $\ker(\operatorname{rot}) \cap H$. Если $\boldsymbol{u} \in \ker(\operatorname{rot}) \cap H$, то $\boldsymbol{u}$ локально является градиентом некоторой функции; более точно, $\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} q$ в $\dot{\Omega}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \Delta q = 0$, так что функция q принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$ и однозначна на $\dot{\Omega}$, а также принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$ в $\bar{\dot{\Omega}}$, за исключением окрестности множества $\Gamma \cap \Sigma$. В силу (I.1.34) имеем также $\gamma_\nu u = \partial q/\partial \nu = 0$ на Γ.

Обозначим через Σ_i^+ и Σ_i^- две стороны Σ_i и через ν_i — единичную нормаль к Σ_i, направленную от Σ_i^+ к Σ_i^-. Если данная функция θ принимает различные значения на Σ_i^+ и Σ_i^-, то мы полагаем $[\theta]_i = \theta|_{\Sigma_i^+} - \theta|_{\Sigma_i^-}$. Для функции q, о которой шла речь выше, мы имеем $[q]_i = \text{const}$, так как $\operatorname{grad} q$ принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$ и однозначен; пусть, скажем, $[q]_i = a_i \in \mathbb{R}$. Чтобы полностью охарактеризовать u и q, мы должны учесть еще, что $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$

в Ω. Для $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ имеем

$$\langle \operatorname{div} \boldsymbol{u}, \varphi\rangle = -\langle \operatorname{grad} q, \operatorname{grad} \varphi\rangle = -\int\limits_{\Omega \text{ или } \dot{\Omega}} \operatorname{grad} q \cdot \operatorname{grad} \varphi \, dx$$

$$= (\text{так как } \Delta q = 0) = -\int\limits_{\partial\dot{\Omega}} \frac{\partial q}{\partial \nu} \varphi \, d\Gamma$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Sigma_i} \left[\frac{\partial q}{\partial \nu_i}\right]_i \varphi \, d\Sigma = 0.$$

Отсюда вытекает, что $[\partial q/\partial \nu_i]_i = 0$, $i = 1, \ldots, N$. Таким образом, справедлива

Лемма 1.1. *Пространство* $H_c = \ker(\operatorname{rot}) \cap H$ *состоит из функций, являющихся градиентами гармонических функций* q, *многозначных в* Ω, *однозначных в* $\dot{\Omega}$ *и таких, что*

$$\partial q/\partial \nu = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{1.5}$$

$$[q]_i = \text{const}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.6}$$

$$[\partial q/\partial \nu_i]_i = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.7}$$

Мы хотим указать базис пространства H_c. Предварительно докажем следующий результат:

Лемма 1.2. *Для каждого* $i = 1, \ldots, N$ *существует функция* q_i, *единственная с точностью до аддитивной постоянной, такая что*

$$\Delta q_i = 0 \text{ в } \dot{\Omega}; \quad \partial q_i/\partial \nu = 0 \text{ на } \Gamma;$$
$$[\partial q_i/\partial \nu_j]_j = 0, \quad j = 1, \ldots, N; \quad [q_i]_j = 0, \quad j \neq i; \quad [q_i]_i = 1. \tag{1.8}$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу, которая, как будет показано, эквивалентна задаче (1.8):

$$\Delta q_i' = 0 \text{ в } \dot{\Omega}; \quad \partial q_i'/\partial \nu = 0 \text{ на } \Gamma; \quad [\partial q_i'/\partial \nu_j]_j = 0, \quad j = 1, \ldots, N; \tag{1.9}$$
$$[q_i']_j = 0, \quad j \neq i; \quad [q_i']_i = (\text{неопределенная константа});$$
$$\int\limits_{\Sigma_i} (\partial q_i'/\partial \nu_i) \, d\Sigma = 1.$$

Прежде всего заметим, что (1.9) является вариационной задачей. Пусть $X_i = \{p \in H^1(\dot{\Omega}),\ [p]_i = \text{const},\ [p]_j = 0,\ j \neq i\}$. Легко проверить, что задача (1.9) сводится к нахождению элемента $q_i' \in X_i$, такого что

$$\int\limits_{\dot{\Omega}} \operatorname{grad} q_i' \cdot \operatorname{grad} p \, dx = [p]_i \quad \forall p \in X_i. \tag{1.10}$$

Левая часть (1.10) определяет билинейную непрерывную коэрцитивную форму на $X_i/\mathbb{R}$, а правая часть есть непрерывная линейная форма на X_i, которая обращается в нуль на постоянных функциях и поэтому индуцирует непрерывную линейную форму на $X_i/\mathbb{R}$. На основании теоремы I.2.2 заключаем о существовании и единственности q_i' в $X_i/\mathbb{R}$.

Если q_i' является решением (1.10), то $\alpha_i=[q_i']_i\neq 0$ и $q_i=(1/\alpha_i)q_i'$ будет решением (1.8): $\alpha_i\neq 0$, ибо в противном случае q_i' можно было бы продолжить до функции из $H^1(\Omega)$, дающей решение однородной задачи Неймана в Ω, так что q_i' была бы постоянной, вопреки (1.10). Обратно, если q_i является решением (1.8), то $\beta_i=\int\limits_{\Sigma_i}(\partial q_i/\partial\nu_i)\,\mathrm{d}\Sigma$ отлично от нуля и $q_i'=(1/\beta_i)\,q_i$ служит решением (1.9) ($\beta_i\neq 0$, ибо в противном случае q_i было бы решением уравнения (1.10) с нулевой правой частью и мы имели бы $q_i=\mathrm{const}\,(=0$ в $X_i/\mathbb{R})$, в противоречие с тем что $[q_i]_i=1$). □

Лемма 1.3. *Пространство* $H_c=\ker(\mathrm{rot})\cap H$ *порождается элементами* $\mathrm{grad}\,q_1,\ \ldots,\ \mathrm{grad}\,q_N$[1]. *Его размерность равна* N.

Доказательство. Если $u\in H_c$, то $u=\mathrm{grad}\,q$, где q удовлетворяет условиям, указанным в лемме 1.1. Пусть $a_i=[q]_i$ и $r=q-\sum\limits_{i=1}^{N}a_iq_i$. Очевидно, что функция r аналитична в $\dot\Omega$ и $\Delta r=0$ в $\dot\Omega$, $\partial r/\partial\nu=0$ на Γ, $[\partial r/\partial\nu]_i=0$, $[r]_i=0$, $i=1,\ \ldots,\ N$. Следовательно, r постоянна и $u=\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\,\mathrm{grad}\,q_i$. Наконец, ясно, что функции $\mathrm{grad}\,q_i$ линейно-независимы. □

Замечание 1.1. (i) Если Ω односвязно, то $N=0$ и $H_c=\{0\}$.

(ii) Пространство H_c изоморфно пространству одномерных когомологий области Ω, т. е. факторпространству пространства замкнутых дифференциальных форм на Ω по подпространству точных дифференциальных форм на Ω (см. де Рам [1]).

Лемма 1.4. *Пусть* H_0 — *ортогональное дополнение к* H_c *в* H. *Имеет место равенство*

$$H_0=\left\{v\in H,\ \int\limits_{\Sigma_i}v\cdot\nu\,\mathrm{d}\Sigma=0,\ i=1,\ \ldots,\ N\right\}. \tag{1.11}$$

Доказательство. Пусть $v\in H$. Тогда $v\in H_0$, если и только если $(v,\ \mathrm{grad}\,q_i)=0$, $i=1,\ \ldots,\ N$. Но согласно обобщенной формуле

---

[1] Функции $\mathrm{grad}\,q_i$ понимаются здесь в классическом смысле. Обобщенные градиенты q_i представляют собой суммы этих функций и распределений Дирака — $[q]_i\nu_i\delta_{\Sigma_i}$, сосредоточенных на Σ_i.

Стокса (I.1.19),

$$(\boldsymbol{v},\ \operatorname{grad} q_i) = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad} q_i\, \mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu} q_i\, \mathrm{d}\Gamma = \int\limits_{\Sigma_i} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}\, \mathrm{d}\Sigma,$$

откуда и следует (1.11). □

Замечание 1.2. (i) Легко видеть, что для $\boldsymbol{v}\in H$ интеграл $\int\limits_{\Sigma_i} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\Sigma$ не зависит от разреза Σ_i (т. е. значение этого интеграла не изменяется при непрерывной деформации разреза Σ_i): $\int\limits_{\Sigma_i} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\Sigma = \int\limits_{\Sigma_i'} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\Sigma$ (см. рис. 7).

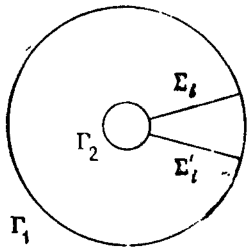

Рис. 7.

(ii) Можно непосредственно проверить, что если $\boldsymbol{v}\in H_c$, $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} q$ и $\int\limits_{\Sigma_i} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\Sigma = \int\limits_{\Sigma_i} (\partial q/\partial\nu)\,\mathrm{d}\Sigma = 0$, $i=1, \ldots, N$, то $\boldsymbol{v}=0$.

Подытожим полученные выше результаты:

Предложение 1.1. *В предположениях* (1.1) *и* (1.2),

$$\boldsymbol{L}^2(\Omega) = H_c \oplus H_0 \oplus H_1 \oplus H_2, \tag{1.12}$$

$$\ker(\operatorname{rot}) = H_c \oplus H_1 \oplus H_2, \tag{1.13}$$

где H_c, H_0, H_1, H_2 — *описанные выше пространства.*

Замечание 1.3. (i) Обозначим через P_{H_c}, P_{H_i} ортогональные проекторы в $\boldsymbol{L}^2\Omega$ на H_c, H_i, $i=0, 1, 2$; проекторы P_{H_1} и P_{H_2} были неявно введены и вычислены в доказательстве теоремы I.1.5 и в замечании I.1.6. Если $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, то

$$\boldsymbol{u}_2 = P_{H_2}\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} p, \tag{1.14}$$

где p — решение задачи Дирихле

$$\Delta p = \operatorname{div}\boldsymbol{u}\in H^{-1}(\Omega),\quad p\in H_0^1(\Omega); \tag{1.15}$$

далее,

$$\boldsymbol{u}_1 = P_{H_1}\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} q, \tag{1.16}$$

где q — решение задачи Неймана

$$\Delta q=0 \text{ в } \Omega,\ \partial q/\partial\nu=\gamma_\nu(u-\operatorname{grad} p) \text{ на } \Gamma; \tag{1.17}$$

это определение корректно (см. (I.1.44) и сказанное вслед за этим соотношением).

Проектор P_{H_c} действует следующим образом:

$$P_{H_c}u=\sum_{i=1}^{N} a_i \operatorname{grad} q_i,$$

где a_i образуют решение линейной системы

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ij}a_i=\int_{\Sigma_j} u\cdot\nu\, d\Sigma,\quad 1\leqslant j\leqslant N, \tag{1.18}$$

с

$$\alpha_{ij}=\int_{\Sigma_j}\frac{\partial q_i}{\partial\nu_j}d\Sigma=\int_{\Sigma_j}\frac{\partial q_j}{\partial\nu_i}d\Sigma=(\operatorname{grad} q_i,\ \operatorname{grad} q_j)$$

(так что матрица, составленная из элементов α_{ij}, *невырожденна*).

(ii) Мы знаем (ср. замечание I.1.6), что P_{H_1} и P_{H_2} отображают $H^m(\Omega)$ в $H_i\cap H^m(\Omega)$, если Ω — область класса $\mathscr{C}^r$, $r\geqslant m+2$. Поскольку $H_c\subset\mathscr{C}^\infty(\Omega)\cap\mathscr{C}^r(\bar\Omega)$, то же верно для P_{H_c} и P_{H_0}.

1.2. Пространство $\operatorname{rot}(H^1(\Omega))$. Прежде всего, справедлива

Лемма 1.5. $\operatorname{rot} H^1(\Omega)=\operatorname{rot}(H^1(\Omega)\cap H_0)$.

Доказательство. Если $u\in H^1(\Omega)$, то $v=P_{H_0}u=u-\operatorname{grad} q$, где $\operatorname{grad} q\in\ker(\operatorname{rot})$ и потому $\operatorname{rot} v=\operatorname{rot} u$. □

Лемма 1.6. *Существует константа* $c_0=c_0(\Omega)$, *такая что*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}\leqslant c_0|\operatorname{rot} u|, \tag{1.19}$$

$$|u|\leqslant c_0|\operatorname{rot} u| \tag{1.20}$$

для всех $u\in H^1(\Omega)\cap H_0$.

Доказательство. У Дюво и Лионса [1] доказано (теорема 6.1 гл. 7), что

$$\{u\in H^1(\Omega),\ \gamma_\nu u=u\cdot\nu|_\Gamma=0\}$$
$$=\{u\in L^2(\Omega),\ \operatorname{div} u\in L^2(\Omega),\ \operatorname{rot} u\in L^2(\Omega),\ \gamma_\nu u=0 \text{ на } \Gamma\} \tag{1.21}$$

и существует константа $c_1=c_1(\Omega)$, такая что

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}\leqslant c_1\{|u|+|\operatorname{div} u|+|\operatorname{rot} u|\} \tag{1.22}$$

для всех u из пространства (1.21). Оценка (1.19) является очевидным следствием (1.20) и (1.22). Чтобы доказать (1.20), будем рассуждать от противного. Если (1.20) неверно, то существует последовательность $u_m\in H^1(\Omega)\cap H_0$, удовлетворяющая условию

$$|u_m|>m|\operatorname{rot} u_m|\ \forall m. \tag{1.23}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $|u_m|=1$. Тогда, в силу (1.22), последовательность u_m ограничена в $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$. Мы можем извлечь из нее подпоследовательность (обозначаемую снова через u_m), которая слабо сходится в $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ к $u\in H^1(\Omega)\cap H_0$; эта сходимость будет сильной в $L^2(\Omega)$, и поэтому $|u|=1$. С другой стороны, вследствие (1.23), $\operatorname{rot} u=0$, так что $u\in H_0\cap\ker(\operatorname{rot})$ и, значит, $v=0$, в противоречие с равенством $|u|=1$. □

Лемма 1.7. *Подпространство* $\operatorname{rot} H^1(\Omega)$ *замкнуто в* $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ *для* $n=3$ (*соотв. в* $L^2(\Omega)$ *для* $n=2$).

Доказательство. В силу (1.19), rot является изоморфизмом из $\boldsymbol{H}^1(\Omega)\cap H_0$ в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ (соотв. в $L^2(\Omega)$). □

Характеризация подпространства $(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^1(\Omega))^{\perp}$. Обозначим через $(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^1(\Omega))^{\perp}$ ортогональное дополнение к $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ $(n=3)$.

Предложение 1.2. *Для* $n=3$ *справедливо равенство* $(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^1(\Omega))^{\perp}=\{u\in\boldsymbol{L}^2(\Omega),\ u=\operatorname{grad} p,\ p\in H^1(\Omega),\ p=\mathrm{const}$ *на каждом* $\Gamma_i\}$.

Доказательство. Если $u\in(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^1(\Omega))^{\perp}$, то $(u, \operatorname{rot}\varphi)=0\ \forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$ и, следовательно, $\operatorname{rot} u=0$. Тогда, поскольку $u\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ и $\operatorname{rot} u\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, мы можем, согласно одной теореме о следах Дюво и Лионса [1], аналогичной теореме I.1.2, определить след функции $u\wedge\mathbf{v}$ на Γ, $u\wedge\mathbf{v}|_\Gamma\in\boldsymbol{H}^{-1/2}(\Gamma)$, и записать обобщенную формулу Стокса

$$(u, \operatorname{rot}\varphi)=(\operatorname{rot} u, \varphi)+\langle u\wedge\mathbf{v}|_\Gamma, \gamma_0\varphi\rangle\quad\forall\varphi\in\boldsymbol{H}^1(\Omega).\tag{1.24}$$

Поэтому $(u, \operatorname{rot}\varphi)=\langle u\wedge\mathbf{v}|_\Gamma, \gamma_0\varphi\rangle=0\ \forall\varphi\in\boldsymbol{H}^1(\Omega)$, так что $u\wedge\mathbf{v}|_\Gamma=0$ и $(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^1(\Omega))^{\perp}=\{u\in\boldsymbol{L}^2(\Omega),\ \operatorname{rot} u=0,\ u\wedge\mathbf{v}|_\Gamma=0\}$. Мы можем уточнить этот результат далее. Для таких u имеем $\operatorname{rot} u=0$, $u=\operatorname{grad} p$, $u\in H_c\oplus H_1\oplus H_2$. Поскольку $\operatorname{grad} p=(\partial p/\partial\nu)\,\nu+\nabla_\tau p$, где $\nabla_\tau p$ — тангенциальная компонента $\operatorname{grad} p$ на Γ, условие $u\wedge\mathbf{v}|_\Gamma=0$ сводится к условию $\nabla_\tau p=0$ на Γ, так что p постоянно на каждом Γ_i. Мы видим, что $P_{H_c}(\operatorname{grad} p)$ необходимо равно 0 и, значит, $p\in H^1(\Omega)$. Обратное проверяется без труда. □

Предложение 1.3. *В предположениях* (1.1) *и* (1.2), *для* $n=3$ *справедливо равенство*

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^1(\Omega)=\left\{u\in\boldsymbol{L}^2(\Omega),\ \operatorname{div} u=0,\ \int_{\Gamma_i} u\cdot\mathbf{v}\,d\Gamma=0\quad\forall i\right\}.$$

Доказательство. Обозначим пространство в правой части этого равенства через Y. Так как $\operatorname{rot}(\boldsymbol{H}^1(\Omega))$ замкнуто, достаточно показать, что $Y=(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^1(\Omega))^{\perp\perp}$. Но если $v=\operatorname{grad} p\in(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^1(\Omega))^{\perp}$ и $u\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $\operatorname{div} u=0$, то

$$(u, v)=\int_\Omega u\cdot\operatorname{grad} p\,dx=\int_\Gamma \gamma_\nu u p\,d\Gamma=\sum_{i=1}^{k} p(\Gamma_i)\int_{\Gamma_i}\gamma_\nu u\,d\Gamma,$$

где $p(\Gamma_i)$ — значение p на Γ_i. Так как $p(\Gamma_i)$ — произвольные числа, отсюда следует доказываемый результат. □

Замечание 1.4. Если граница Γ связна, $k=1$, то установленное только что равенство принимает вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^1(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega),\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}.$$

Замечание 1.5. Для $n=2$ имеют место аналогичные результаты (с теми же доказательствами) для $\operatorname{rot} H^1(\Omega)$ и $(\operatorname{rot} H^1(\Omega))^{\perp}$.

1.3. Замечание о регулярности. Мы можем до некоторой степени дополнить результат Дюво—Лионса (1.21)—(1.22):

Предложение 1.4. *Пусть* Ω — *открытое ограниченное множество в* $\mathbb{R}^n$, $n=2, 3$, *и* m — *целое число* $\geqslant 1$. *Предположим, что имеют место* (1.1.), (1.2) *и* Ω *принадлежит классу* $\mathscr{C}^r$, $r \geqslant m+1$. *Тогда*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^m(\Omega) = \{&\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega),\ \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^{m-1}(\Omega), \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{u} \in H^{m-1}(\Omega),\ \gamma_\nu \boldsymbol{u} \in H^{m-1/2}(\Gamma)\} \end{aligned} \tag{1.25}$$

и существует константа $c_2 = c_2(m, \Omega)$, *такая что*

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}\|_{H^m(\Omega)} \leqslant c_2 \{&|\boldsymbol{u}| + \|\operatorname{rot} \boldsymbol{u}\|_{H^{m-1}(\Omega)} + \\ &|\operatorname{div} \boldsymbol{u}|_{H^{m-1}(\Omega)} + |\gamma_\nu \boldsymbol{u}|_{H^{m-1/2}(\Gamma)}\} \end{aligned} \tag{1.26}$$

для всех $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^m(\Omega)$.

Доказательство. (i) Начнем со случая $m=1$. Пространство в правой части (1.25), очевидно, содержит $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$; нам надо доказать обратное включение. Пусть $\boldsymbol{u}$ — произвольный элемент этого пространства и $\operatorname{grad} p$ — проекция $\boldsymbol{u}$ на $H_1 \oplus H_2$. Мы знаем, что p является решением задачи Неймана

$$\Delta p = \operatorname{div} \boldsymbol{u} \text{ в } \Omega,\quad \partial p/\partial \nu = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu} \text{ на } \Gamma. \tag{1.27}$$

Поэтому $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \operatorname{grad} p$ удовлетворяет условиям $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $\operatorname{div} \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ и $\gamma_\nu \boldsymbol{v} = 0$ на Γ, так что $\boldsymbol{v}$ принадлежит $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$, в силу (1.21), и $\boldsymbol{u}$ тоже, поскольку $p \in H^2(\Omega)$, согласно стандартным результатам о регулярности для задачи Неймана (см. Агмон, Дуглис и Ниренберг [1] или Лионс и Мадженес [1]). Далее, неравенство (1.26) следует из неравенств (1.22) и

$$\|p\|_{H^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leqslant c_3 \{|\Delta p|_{L^2(\Omega)} + |\partial p/\partial \nu|_{H^{1/2}(\Gamma)}\}$$

(см. Агмон, Дуглис и Ниренберг [1]).

(ii) Проведем индукцию по m. Предположим, что (1.25) и (1.26) доказаны для $m-1$. Покажем, что если $\boldsymbol{u}$ принадлежит пространству в правой части (1.25), то $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^m(\Omega)$. По предположению индукции, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^{m-1}(\Omega)$. Если D^{m-1} — произвольный дифференциальный оператор порядка $m-1$, то $\boldsymbol{v} = D^{m-1} \boldsymbol{u}$ удовлетворяет соотношениям

$$v \in L^2(\Omega),\ \operatorname{rot} v \in L^2(\Omega),\ \operatorname{div} v \in L^2(\Omega),$$

$$v \cdot \nu = D^{m-1}(u \cdot \nu) - \sum_{i=1}^{m-1} \binom{l}{m-l} D^l \nu D^{m-1-l} u \in H^{1/2}(\Gamma),$$

и, значит, в силу (i), $v \in H^1(\Omega)$. Отсюда вытекает, что $u \in H^m(\Omega)$, а теперь нетрудно уже установить и (1.26). □

Замечание 1.6. (i) Это предложение можно вывести непосредственно из результатов работы Агмона, Дуглиса и Ниренберга [1].

(ii) Оценку (1.26) можно заменить оценкой

$$\|u - P_{H_c} u\|_{H^m(\Omega)} \leqslant c_3 \{\|\operatorname{rot} u\|_{H^{m-1}(\Omega)} + \|\operatorname{div} u\|_{H^{m-1}(\Omega)} + |\gamma_\nu u|_{H^{m-1/2}(\Gamma)}\}. \tag{1.28}$$

2. *Приложение к неоднородным стационарным уравнениям Навье — Стокса.* Следующий результат дополняет теорему II.1.5 для случая $n = 2$ или 3.

Теорема 2.1. *Предположим, что $n = 2$ или 3 и выполнены условия* (1.1) *и* (1.2). *Пусть заданы $f \in H^{-1}(\Omega)$ и $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, такие что*

$$\int_{\Gamma_i} \varphi \cdot \nu \, d\Gamma = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{2.1}$$

Тогда задачи (II.1.62)—(II.1.64) *имеет по крайней мере одно решение $u \in H^1(\Omega)$, $p \in L^2(\Omega)$.*

Доказательство. Ввиду теоремы II.1.5 нам достаточно показать, что функция φ удовлетворяет условиям (II.1.65), (II.1.66), т.е. (см. замечание II.1.5 (i)) что

$$\varphi \in \gamma_0 \{\operatorname{rot} H^2(\Omega)\}. \tag{2.2}$$

По предположению, φ удовлетворяет (2.1). Решая неоднородную задачу Стокса $-\Delta\Phi + \operatorname{grad} \pi = 0$ в Ω, $\operatorname{div} \Phi = 0$ в Ω, $\Phi = \varphi$ на Γ, мы найдем по теореме I.2.4 функцию $\Phi \in H^1(\Omega)$, такую что $\operatorname{div} \Phi = 0$ и $\varphi = \gamma_0 \Phi$. Вследствие (2.1), лемма 1.5 и предложения 1.3 существует функция $\varphi \in H^1(\Omega) \cap H_0$, такая что $\operatorname{rot} \varphi = \Phi$. Замечая, что $\operatorname{rot} \varphi \in H^1(\Omega)$ и используя предложение 1.4, мы видим, что $\varphi \in H^2(\Omega)$ и (2.2) (или (II.1.65), (II.1.66)) выполнены. □

Замечание 2.1. Как и в (I.2.49), необходимым условием на φ является условие

$$\int_{\Gamma} \varphi \cdot \nu \, d\Gamma = 0, \tag{2.3}$$

которое слабее, чем (2.1).

Замечание 2.2. По поводу регулярности u и p см. замечание II.1.6 и предложение II.1.1.

Замечание 2.3. Для случая когда заданные функции f и φ несколько раз непрерывно дифференцируемы, а φ удовлетворяет (2.1), Лерэ доказал в [1] существование решений задачи (II.1.62)—(II.1.64), которые несколько раз непрерывно дифференцируемы.

Предложение 2.1. *В предположениях теоремы* 2.1, *для любого* $\delta > 0$ *существует непрерывное линейное отображение* Λ_δ *из*

$$\dot{H}^{3/2}(\Gamma)=\left\{\varphi \in H^{3/2}(\Gamma),\quad \int_{\Gamma_i} \varphi\cdot\nu\, d\Gamma=0,\ i=1,\ \ldots,k\right\} \quad (2.4)$$

в $H^2(\Omega)$, *такое что*

$$\operatorname{div} \Lambda_\delta \varphi=0 \text{ в } \Omega, \quad (2.5)$$

$$\gamma_0\Lambda_\delta\varphi \text{ на } \Gamma, \quad (2.6)$$

$$|b(v,\ \Lambda_\delta\varphi,\ v)| \leqslant \delta \|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma)} \|v\|^2 \quad \forall\varphi \in \dot{H}^{3/2}(\Gamma)\quad \forall v \in V. \quad (2.7)$$

Доказательство. Нам надо только внимательно проанализировать доказательства предыдущей теоремы 2.1 и теоремы II.1.5. Построенное в доказательстве теоремы 2.1 отображение $\varphi \mapsto \Phi$ является непрерывным линейным отображением из $\dot{H}^{3/2}(\Gamma)$ в $H^2(\Omega)$ (теорема I.2.4). Согласно предложениям 1.3 и 1.4,

$$\operatorname{rot} H^2(\Omega)=\left\{u \in H^1(\Omega),\ \operatorname{div} u=0,\ \int_{\Gamma_i} u\cdot\nu\, d\Gamma=0\ \forall i\right\},$$

а rot осуществляет изоморфизм $H^2(\Omega)\cap H_0$ на $\operatorname{rot} H^2(\Omega)$. Поэтому $\Phi \in \operatorname{rot} H^2(\Omega)$ и $\Phi=\operatorname{rot}\varphi$, $\varphi \in H^2 \cap H_0$, причем отображение $\Phi \mapsto \varphi$ линейно и непрерывно действует из $\operatorname{rot} H^2(\Omega)$ (снабженного нормой пространства $H^1(\Omega)$) в $H^2(\Omega)\cap H_0$. Теперь обратимся к доказательству теоремы II.1.5 и рассмотрим описанное там соответствие $\varphi=\operatorname{rot}\varphi \mapsto \psi=\operatorname{rot}(\theta_\varepsilon\varphi)$. Отображение $\varphi \mapsto \theta_\varepsilon\varphi$, очевидно, является непрерывным линейным отображением в $H^2(\Omega)$, и для достаточно малого ε, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0=\varepsilon_0(\delta)$, мы можем положить $\Lambda_\delta\varphi = \psi=\operatorname{rot}(\theta_\varepsilon\varphi)$. Тогда (2.7) будет удовлетворено, а (2.5) и (2.6) выполняются очевидным образом (что касается (2.7), см. также (II.1.85)). □

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Ф. ТОМАССЭ

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСОГЛАСОВАННЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

(Аппроксимация (АПР5), двумерный случай)

0. Тестовые задачи. Рассматриваются две тестовые задачи. **Задача 1.** *Течение в каверне*: $\Omega=(0, 1)\times(0, 1)$ — квадрат в плоскости; граничное условие: $\boldsymbol{u}=0$ всюду на $\partial\Omega$, за исключением стороны $y=1$, где $\boldsymbol{u}=\{U, 0\}$ (U должно быть задано).

Задача 2. *Течение между несоосными вращающимися цилиндрами*: Ω — кольцевая область плоскости xy, ограниченная двумя окружностями $C_1: x^2+y^2-25=0$ и $C_2: (x-1)^2+y^2-4=0$, которые вращаются с (алгебраическими) угловыми скоростями σ_1 и σ_2 (последние должны быть заданы).

В обоих случаях объемные силы отсутствуют.

1. Триангуляция. Триангуляция $\mathcal{T}_h$ задается перечислением вершин и треугольников. Некоторый алгоритм автоматической триангуляции выдает нам таблицы, представленные на рис. 8.

	$X(\cdot)$	$Y(\cdot)$
i	$X(i)$	$Y(i)$

(a)

$\mathrm{Nu}(\cdot,\cdot)$

$\mathrm{Nu}(1,j)$	$\mathrm{Nu}(2,j)$	$\mathrm{Nu}(3,j)$

(b)

Рис. 8. (a) Координаты i-й вершины. (b) Номера вершин j-го треугольника.

Необходимо иметь возможность простым образом распознавать граничные вершины; один экономичный способ добиться этого заключается в присвоении им номеров $>N$, где N — общее число внутренних узлов [1]. Существует два различных типа автоматических триангуляционных алгоритмов [2]:

— *метод последовательного подразбиения*, приводящий к регулярным сеткам;

— *метод сокращения области* Элана Джорджа, удобный для областей с криволинейной границей.

Метод последовательного подразбиения. Сначала берется какая-нибудь грубая триангуляция области, затем на каждом шаге каждый треугольник разбивается на k^2 меньших треугольников,

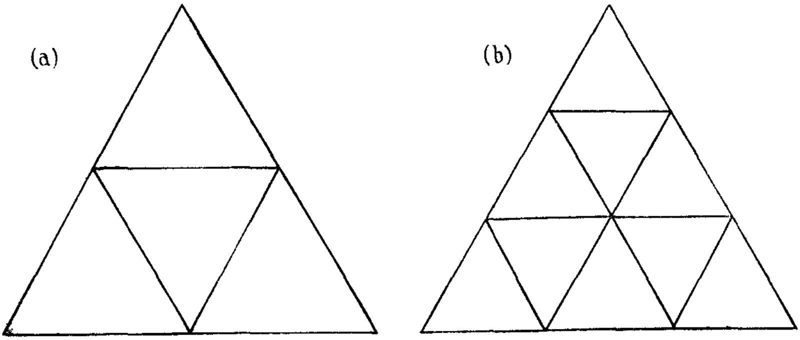

Рис. 9. (a) $k=2$. (b) $k=3$.

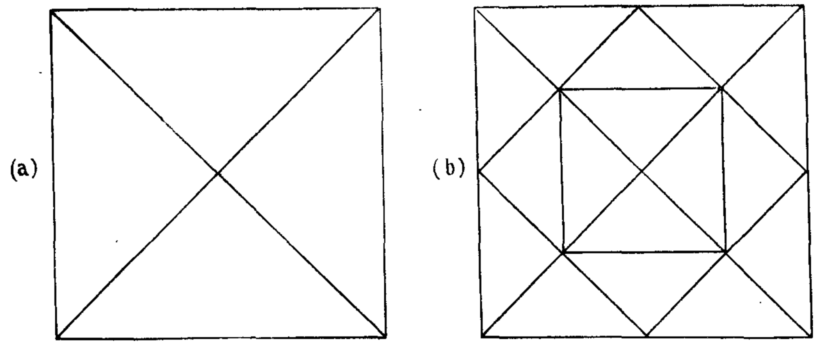

Рис. 10. (a) Начальная триангуляция: $N=1$, $N_1=5$, $M=4$. (b) Первое подразбиение: $N=5$, $N_1=13$, $M=16$.

[1] В случае областей с несколькими границами (т. е. неодносвязных областей) нужны дополнительные меры, чтобы различать точки, принадлежащие разным границам.

[2] Речь идет в случае областей произвольной формы. Конечно, для данной конкретной геометрии областей, которая должна рассматриваться многократно, можно найти более экономичные триангуляции, чем та, которую строит общая программа.

подобных исходному (рис. 9). Процедура повторяется до тех пор, пока мы не получим подходящего числа треугольников. Один пример для $k=2$ представлен на рис. 10.

Для данной триангуляции пусть N — число внутренних вершин, N_1 — общее число вершин, M — число треугольников. Пусть N', N_1', M' — значения соответствующих параметров после того, как выполнено разбиение каждого треугольника на k^2 треугольников. Замечая, что $2C+C_{\text{гр}}=3M$, $C_{\text{гр}}=N_1-N$ (где C и $C_{\text{гр}}$ — соответственно число внутренних и число граничных ребер), находим

$$M^1=k^2\times M,$$
$$N^1=2^{-1}(k-1)(k-2)M+2^{-1}(k-1)(3M+N-N_1)+N,$$
$$N_1^1=N'+k(N_1-N).$$

После n подразбиений имеем

$$M^n=k^{2n}M^0,\quad C_{\text{гр}}^n=k^nC_{\text{гр}}^0,$$
$$M^n=2N^n+C_{\text{гр}}^n+2(T-1),\quad M^0=2N^0+C_{\text{гр}}^0+2(T-1),$$

где T — число „дырок“ в рассматриваемой области. Следовательно, параметры триангуляции равны ($M^0=M,\ \ldots$)

$$N^n=2^{-1}((k^{2n}-1)M^0-(k^n-1)C_{\text{гр}}^0)+N^0,$$
$$N_1^n=2^{-1}((k^{2n}-1)M^0+(k^n+1)C_{\text{гр}}^0)+N^0,$$
$$M^n=k^{2n}M^0,\quad C_{\text{гр}}^0=N_1^0-N^0.$$

Подчеркнем, что треугольники, получаемые подразбиением, подобны треугольникам начальной триангуляции, поэтому углы не становятся меньше, чем в начальной триангуляции.

Метод последовательного подразбиения может быть распространен на области с простой криволинейной границей: мы просто заменяем новые вершины, появляющиеся на граничных ребрах,

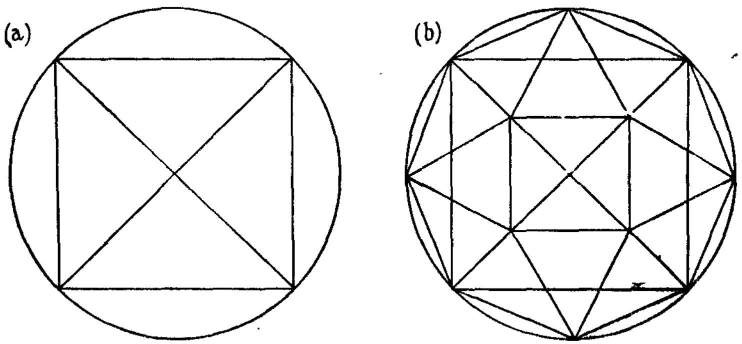

Рис. 11. (a) Начальная триангуляция. (b) Первое подразбиение.

их проекциями на границу области. Пример для $k=2$ представлен на рис. 11.

Метод сокращения области. Идея метода заключается в том, чтобы покрыть Ω треугольниками, максимально близкими к равносторонним (для которых числа σ_l [1] минимальны, а потому и величина погрешности минимальна). Задается некоторая начальная дискретизация границы $\partial\Omega$, образованная замкнутой ломаной. Если область Ω неодносвязна, вводятся дополнительные искусственные границы, которые удаляются после того, как триангуляция будет закончена. При заданном граничном многоугольнике алгоритм строит треугольник [2] одним из двух способов:

— вводится новый внутренний узел („зарубка“);

— соединяются две последовательные граничные вершины („стёсывание“).

Затем мы начинаем с новой области, образованной начальной областью без последнего треугольника, и так далее, пока область не сведется к одному треугольнику (рис. 12).

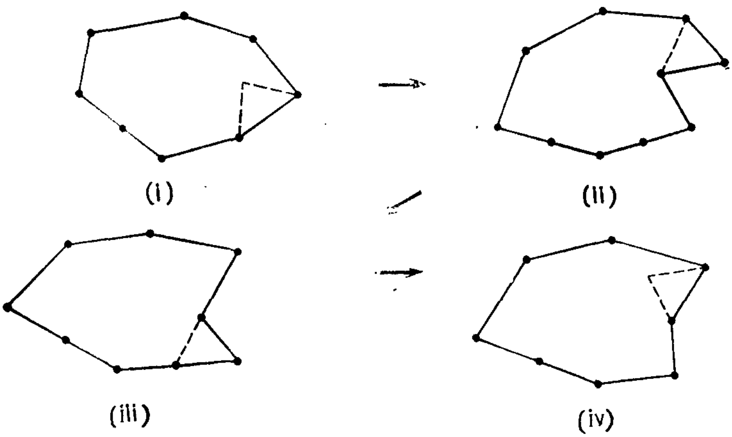

Рис. 12. (i), (iv)—зарубка; (ii), (iii)—стёсывание

Примеры. На рис. 13—16 показано по две триангуляции для двух рассматриваемых областей.

2. *Узлы.* Будем называть середины ребер *узлами* и значения данной функции φ в узлах—*узловыми значениями.* По заданным таблицам X, Y, Nu мы образуем соответствующие таблицы для узлов (рис. 17); граничные узлы нумеруются числами $> N_m$, где N_m—число внутренних узлов; нумерация узлов сводится к нумерации ребер.

---

[1] $\sigma_T = \sigma(h)$.—*Прим. перев.*

[2] На который область будет „сокращена“.—*Прим. ред.*

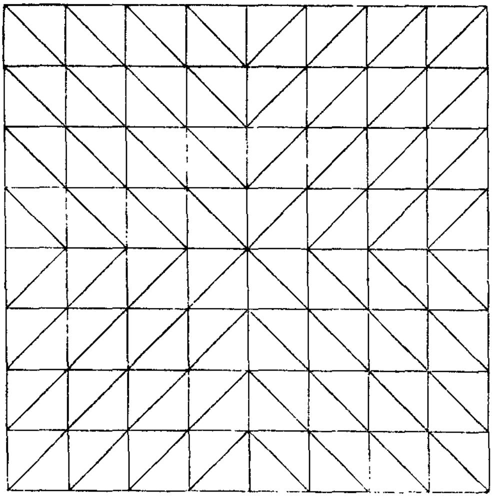

Рис. 13.

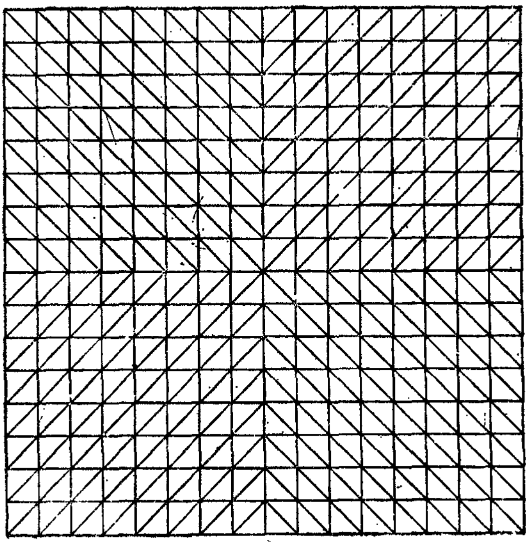

Рис. 14.

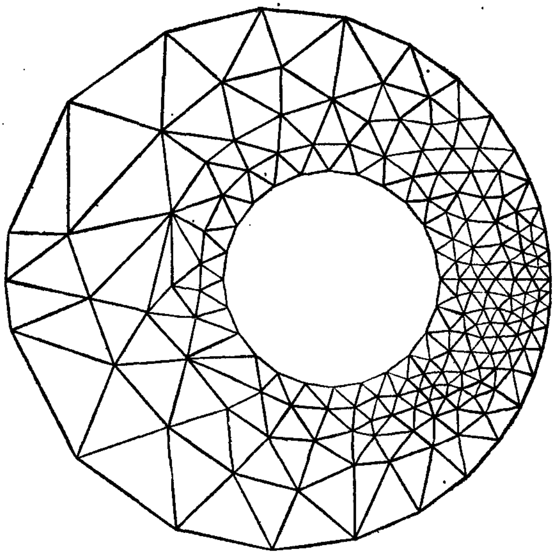

Рис. 15.

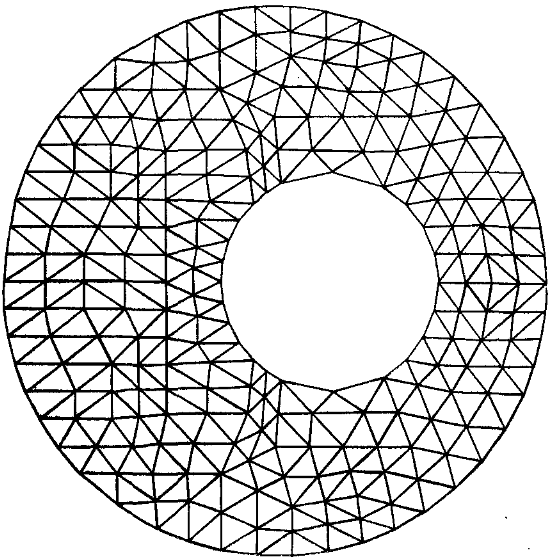

Рис. 16.

	$X_m(\cdot)$	$Y_m(\cdot)$
i	$X_m(i)$	$Y_m(i)$

(a)

$\mathrm{Nu}_m(\cdot,\cdot)$

$\mathrm{Nu}_m(1,j)$	$\mathrm{Nu}_m(2,j)$	$\mathrm{Nu}_m(3,j)$

(b)

Рис. 17. (a) Координаты i-го узла. (b) Номера узлов j-го треугольника.

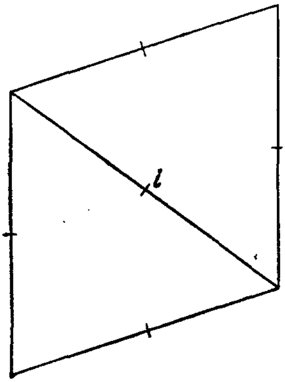

Рис. 18.

TABV(·,·)

TABV(1,i)	TABV(2,i)	TABV(3,i)	TABV(4,i)

Рис. 19. Номера узлов, соседних с i-м узлом.

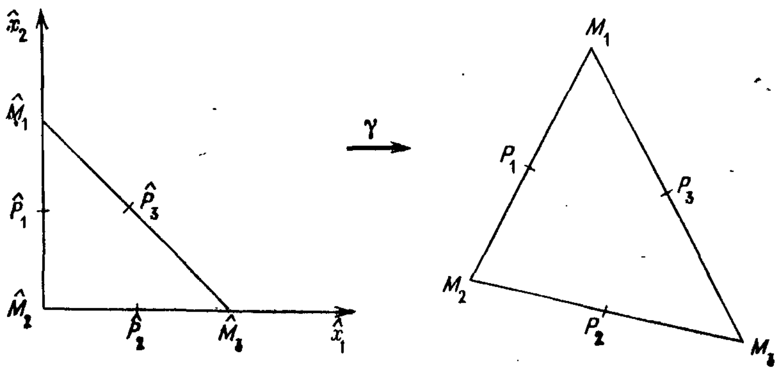

Рис. 20.

Позднее выяснится, что нам нужно уметь быстро определять номера узлов, соседних с данным (т. е. принадлежащих тому же самому треугольнику); очевидно, имеется максимум 4 соседних узла (рис. 18). По этой причине мы вычислим по номерам Nu_m таблицу номеров соседних узлов (рис. 19).

3. Вычисление базисных функций для данного треугольника. Пусть задан треугольник T с вершинами M_1, M_2, M_3 и серединами ребер P_1, P_2, P_3, и пусть ν_1, ν_2, ν_3 обозначают соответствующие базисные функции $(\nu_i(P_j)=\delta_{ij})$. Введем стандартный треугольник $\hat{T}$ и линейное отображение γ, преобразующее $\hat{T}$ в T (см. рис. 20):

$$M=\gamma(\hat{M})=\begin{pmatrix} G(1.1) & G(2.1) \\ G(1.2) & G(2.2) \end{pmatrix}\hat{M}+\begin{pmatrix} G(3.1) \\ G(3.2) \end{pmatrix}.$$

Мы вычисляем $G(\alpha,\beta)$, используя уравнения $M_i=\gamma(\hat{M}_i)$:

$$\begin{pmatrix} G(1.1) & G(2.1) \\ G(1.2) & G(2.2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (M_1-M_3)_1 & (M_2-M_3)_1 \\ (M_1-M_3)_2 & (M_2-M_3)_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\times\begin{pmatrix} (\hat{M}_1-\hat{M}_3)_1 & (\hat{M}_2-\hat{M}_3)_1 \\ (\hat{M}_1-\hat{M}_3)_2 & (\hat{M}_2-\hat{M}_3)_2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{\begin{pmatrix} (M_1-M_3)_1-(M_2-M_3)_? \\ (M_1-M_3)_2 & (M_2-M_3)_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\hat{M}_2-\hat{M}_3)_2 & (\hat{M}_2-\hat{M}_3)_1 \\ -(\hat{M}_1-\hat{M}_3)_2 & (\hat{M}_1-\hat{M}_3)_1 \end{pmatrix}}{(\hat{M}_1-\hat{M}_3)_1(\hat{M}_2-\hat{M}_3)_2-(\hat{M}_1-\hat{M}_3)_2(\hat{M}_2-\hat{M}_3)_1}$$

$$=\begin{pmatrix} (M_1-M_3)_1 & (M_2-M_3)_1 \\ (M_1-M_3)_2 & (M_2-M_3)_2 \end{pmatrix}\cdot\hat{C},$$

где $\hat{C}$ — некоторая матрица размера 2×2, не зависящая от T;

$$\begin{pmatrix} G(3.1) \\ G(3.2) \end{pmatrix}=M_1-\begin{pmatrix} G(1.1) & G(2.1) \\ G(1.2) & G(2.2) \end{pmatrix}\cdot\hat{M}_1.$$

Из формулы для γ легко выводится соответствующая формула для γ^{-1}:

$$\hat{M}=\gamma^{-1}(M)=\begin{pmatrix} G_1(1.1) & G_1(2.1) \\ G_1(1.2) & G_1(2.2) \end{pmatrix}\cdot M+\begin{pmatrix} G_1(3.1) \\ G_1(3.2) \end{pmatrix}.$$

Теперь у нас есть всё необходимое для построения базисных функций. Пусть λ_i обозначают барицентрические координаты в T относительно M_j $(\lambda_i(M_j)=\delta_{ij})$. Имеем

$$\nu_1=\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3,\quad \nu_2=\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1,\quad \nu_3=\lambda_3+\lambda_1-\lambda_2.$$

Но

$$\lambda_1(M)=\hat{x}_2(\hat{M}),\ \lambda_2(M)=1-\hat{x}_1(M)-\hat{x}_2(\hat{M}),\ \lambda_3(M)=\hat{x}_2(\hat{M}),$$

$$\int_T \hat{x}_1^{i_1}\hat{x}_2^{i_2}\,\mathrm{d}\hat{x}_1\,\mathrm{d}\hat{x}_2=\frac{i_1!\,i_2!}{(i_1+i_2+2)!}.$$

Отсюда мы заключаем, что[1] area $T=2^{-1}\det G$,

$$\int_T \nu_i\,\mathrm{d}M=3^{-1}\,\text{area}\,(T),\quad \int_T \nu_i\nu_j\,\mathrm{d}M=3^{-1}\delta_{ij}\,\text{area}\,(T).$$

Стоит заметить, что базисные функции ортогональны в $L^2(T)$. Используя матрицу G_1, можно вычислить градиент ν_i:

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial u_j}=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\hat{x}_k}{\partial x_j}\frac{\partial(\lambda_i\cdot\gamma)}{\hat{d}x_k}=\sum_{k=1}^{2}G_1(j,\ k)\frac{\partial(\lambda_i\cdot\gamma)}{\partial\hat{x}_k},$$

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_j}=G_1(j,\ 2),\quad \frac{\partial\lambda_2}{\partial x_j}=-G_1(j,\ 1)-G_1(j,\ 2),\quad \frac{\partial\lambda_3}{\partial x_j}=G_1(j,\ 1),$$

$$\frac{\partial\nu_1}{\partial x_j}=-2G_1(j,\ 1),\quad \frac{\partial\nu_2}{\partial x_j}=-2G_1(j,\ 2),\quad =\frac{\partial\nu_2}{\partial x_j}=2G_1(j,\ 1)+$$
$$+2G_1(j,\ 2).$$

Численное интегрирование правой части:

$$\int_T f(M)\,\nu_i(M)\,\mathrm{d}M\approx\frac{\text{area}\,(T)}{3}f(P_i),\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

4. Решение задачи Стокса.

4.1. Базисные функции. Базис пространства W_h (аппроксимации пространства $H_0^1(\Omega)$) можно построить с помощью следующих функций w_i $(i=1,\ \ldots,\ N_m)$: w_i линейна на каждом треугольнике; $w_i=0$ на $\partial\Omega_h$; $w_i=0$ в каждом узле (т. е. в середине каждого ребра), исключая i-й узел, где $w_i(i)=1$. (Сужение функции w_i на каждый треугольник T совпадает с одной из трех функций ν_j, определенных в п. 3. Носителем w_i является объединение двух треугольников, содержащих i-й узел.) А именно, одним из базисов пространства W_h служит

$$\{(w_i,\ 0),\ (0,\ w_i),\ i=1,\ \ldots,\ N_m\},$$

где N_m — число внутренних узлов.

[1] Ниже area обозначает площадь.—*Прим. ред.*

Дискретная однородная задача Стокса приводит к решениям вида

$$u_h = \left(\sum_{i=1}^{N_m} X_i w_i,\ \sum_{i=1}^{N_m} Y_i w_i\right), \tag{4.1}$$

$$\nu \sum_{j=1}^{N_m} X_j \alpha_{jk} = \int_\Omega f_x w_k \, dM + \sum_T \pi_h(T) \operatorname{area}(T) \frac{\partial w_k}{\partial x}(T),$$

$$\nu \sum_{j=1}^{N_m} Y_j \alpha_{jk} = \int_\Omega f_y w_k \, dM + \sum_T \pi_h(T) \operatorname{area}(T) \frac{\partial w_k}{\partial y}(T),$$

$(1 \leqslant k \leqslant N_m)$, с $\operatorname{div}(u_h) = 0$ на $T\ \forall T$. Коэффициенты α_{jk} вычисляются по формуле

$$\alpha_{jk} = \sum_{T\,(j,\,k)} \operatorname{area}(T) \cdot \nabla w_j(T) \cdot \nabla w_k(T),$$

где суммирование ведется по всем треугольникам T, содержащим узлы j и k.

Для неоднородной задачи мы введем еще w_i, связанные с граничными узлами $(i > N_m)$. Линейная система будет иметь тот же вид, что и для (4.1), только в правых частях надо добавить соответственно выражения

$$-\sum_{j > N_m} X_j \alpha_{jk},\ -\sum_{j > N} Y_j \alpha_{jk}$$

(X_j и Y_j для $j > N$ известны: они задаются граничными условиями).

4.2. *Алгоритм Удзавы.* Опишем теперь дискретный алгоритм Удзавы. Мы начинаем с произвольного $\pi_h^0 = \{\pi_h^0(T),\ T \in \mathcal{T}_h\}$ (например, с $\pi_h^0(T) = 0\ \forall T$). Если π_h^n уже известно, то вычисляем u_h^{n+1} по формуле

$$u_h^{n+1} = \left(\sum X_i^{n+1} w_i,\ \sum Y_i^{n+1} w_i\right), \tag{4.2}$$

$$\nu \sum_{j=1}^{N_m} X_j^{n+1} \alpha_{jk} = \int_\Omega f_x w_k \, dM - \nu \sum_{j > N_m} X_j \alpha_{jk} + \sum_T \pi_h^n(T) \operatorname{area}(T) \frac{\partial w_k}{\partial x}(T),$$

$$\nu \sum_{j=1}^{N_m} Y_j^{n+1} \alpha_{jk} = \int_\Omega f_y w_k \, dM - \nu \sum_{j > N_m} Y_j \alpha_{jk} + \sum_T \pi_h^n(T) \operatorname{area}(T) \frac{\partial w_k}{\partial y}(T)$$

$(k = 1, \ldots)$, а затем вычисляем π_h^{n+1} по формуле

$$\pi_h^{n+1}(T) = \pi_h^n(T) - \rho \operatorname{div}(u_h^{n+1})(T)\ \forall T. \tag{4.3}$$

Две компоненты скорости в (4.2) в действительности расщепляются; нам нужно просто решать линейные системы вида

$$\sum_{j=1}^{N_m} Z_j \alpha_{jk} = f_k, \quad k = 1, \ \ldots, \ N_m. \tag{4.4}$$

Для этого мы используем метод верхней релаксации (см. Варга [1]).

Оптимальное значение параметра релаксации. Легко проверить, что матрица (α_{jk}) симметрична и положительно-определенна. Пусть ω обозначает параметр релаксации. Мы начинаем с некоторого произвольного вектора Z_j^0; если вектор Z_j^n уже известен, то вычисляем Z_j^{n+1} по формуле

$$Z_k^{n+1} = (1-\omega) Z_k^n - \frac{\omega}{\alpha_{kk}} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{jk} Z_j^{n+1} + \sum_{j=k+1}^{N_m} \alpha_{jk} Z_j^n - \frac{1}{\nu} f_k \right). \tag{4.5}$$

Условием окончания итераций служит, как обычно, условие типа $\max\limits_k |Z_k^{n+1} - Z_k^n| < \varepsilon_{\text{rel}}$

Оптимальное значение параметра релаксации ω можно определить с помощью следующего алгоритма: применяем метод Гаусса—Зайделя для решения однородной системы $\sum\limits_j Z_j \alpha_{jk} = 0$, начиная с какого-нибудь вектора Z^0 с компонентами $Z_j^0 > 0$; имеем

$$Z_k^{n+1} = -\frac{1}{\alpha_{kk}} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{jk} Z_j^{n+1} + \sum_{j=k+1}^{N_m} \alpha_{jk} Z^n \right); \tag{4.6}$$

полагаем для каждого n

$$\rho_p^{n+1} = \min_k (Z_k^{n+1}/Z_k^n), \quad \rho_g^{n+1} = \max_k (Z_k^{n+1}/Z_k^n), \tag{4.7}$$

$$\omega_p^{n+1} = 2/(1+\sqrt{1-\rho_p^{n+1}}), \quad \omega_g^{n+1} = 2/(1+\sqrt{1-\rho_g^{n+1}}). \tag{4.8}$$

Тестовые расчеты показывают, что и ω_p^{n+1}, и ω_g^{n+1} сходятся к ω_{opt} [1].

Хранение матрицы: см. рис. 21. Для решения системы (4.4) можно использовать и прямые методы (метод Холеского, фронтальный метод и т. д.), производя соответствующую перенумерацию узлов. Однако в нелинейном случае применять эти методы уже нелегко.

4.3. Численные результаты. Выбор параметра ρ в алгоритме Удзавы производится экспериментально. Мы решаем несколько тестовых задач с различными ρ и сравниваем результаты для заданного числа итераций Удзавы (скажем, 10, 20, 30, ...).

---

[1] ρ_p^{n+1} и ρ_g^{n+1} сходятся к $\rho(\mathcal{L}_1)$ — спектральному радиусу матрицы Гаусса—Зайделя, — и $\rho(B)^2 = \rho(\mathcal{L}_1)$, $\omega_{\text{opt}} = 2/(1+\sqrt{1-\rho(B)^2})$.

A					TABV			
$A_0(i)$	$A(1,\cdot)$	$A(2,\cdot)$	$A(3,\cdot)$	$A(4,\cdot)$	TABV(1,·)	TABV(2,·)	TABV(3,·)	TABV(4,·)
α_i^0	α_{i,i_1}	α_{i,i_2}	α_{i,i_3}	α_{i,i_4}	i_1	i_2	i_3	i_4

Рис. 21. i_1, i_2, i_3, i_4—узлы, соседние с i-м узлом.

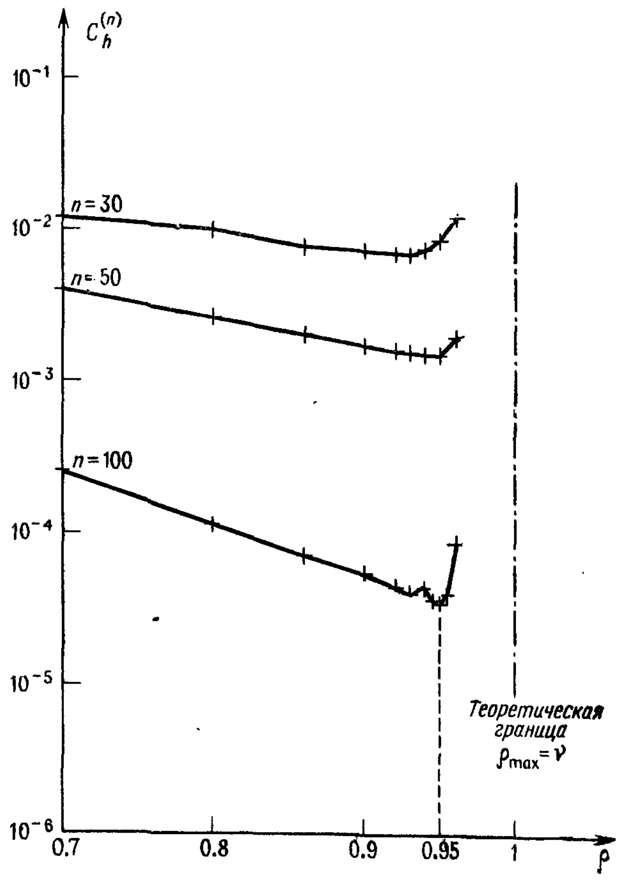

Рис. 22.

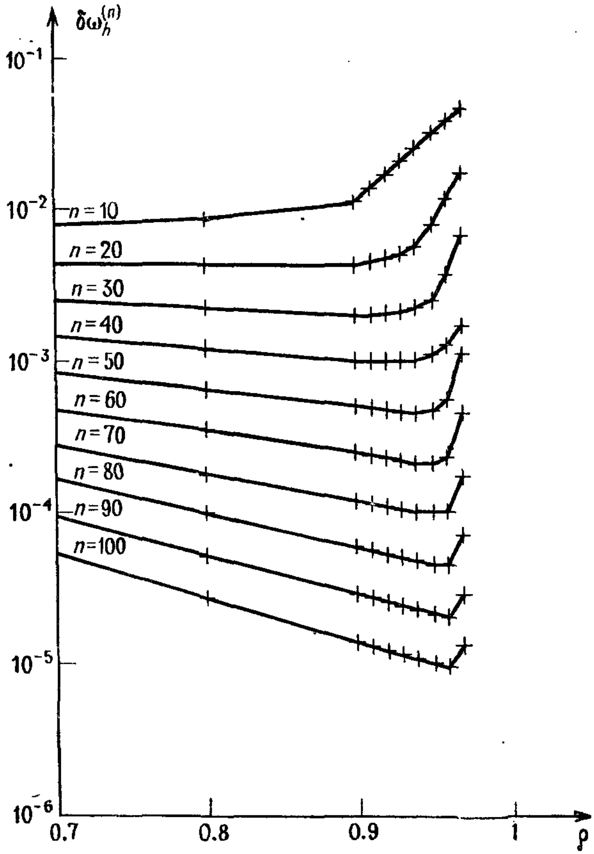

Рис. 23.

Хорошим показателем сходимости служит величина

$$C_h^{(n)} = \max_T |\operatorname{div}(u_h^n)_T|\ ^{1}.$$

На рис. 22 и 23 приведены результаты для второго из рассматриваемых нами случаев с $\nu = 1$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$ (цилиндр C_1 покоится, а цилиндр C_2 вращается с единичной угловой скоростью,

---

[1] Это число, равное $(1/\rho)\max_T |\pi_h^{(n+1)}(T) - \pi_h^n(T)|$, характеризует сходимость дискретных давлений. Мы рассматриваем также величину $\delta\omega_h^{(n)} = \max_i [|X_i^{n+1} - X_i^n|, |Y_i^{n+1} - Y_i^n|]$, характеризующую сходимость дискретиых скоростей.

объемных сил нет). Из этих рисунков ясно видно существование оптимального ρ; в данном случае $\rho_{\text{opt}}=0{,}96$.

4.4. Метод расширенных лагранжианов. Это комбинация метода штрафов с методом Удзавы. Мы просто добавляем к (I.4.209) штраф $(1/\varepsilon)|\operatorname{div}_h v_h|^2$, и это приводит к следующей системе уравнений (Фортэн — Гловински):

$$\nu((\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{v}_h))_h+\frac{1}{\varepsilon}(\operatorname{div}_h \boldsymbol{u}_h,\ \operatorname{div}_h \boldsymbol{v}_h)-(\pi_h,\ \operatorname{div}_h \boldsymbol{v}_h)=$$
$$=(\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{v}_h)\ \forall \boldsymbol{v}_h\in W_h. \tag{4.9}$$

Для (4.9) записываем алгоритм Удзавы. Полагая, как и выше,

$$\boldsymbol{u}_h^{n+1}=\left(\sum X_i^{(n+1)}w_i,\ \sum Y_i^{(n+1)}w_i\right),$$

мы должны только заменить левые части уравнений, приведенных после формулы (4.2), на

$$\begin{aligned}&\nu\sum_{j=1}^{N_m}X_j^{n+1}\alpha_{jk}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{N_{1m}}\{X_j^{n+1}(D_{hx}w_j,\ D_{hx}w_k)\\&\qquad\qquad+Y_j^{n+1}(D_{hy}w_j,\ D_{hx}w_k)\},\\&\nu\sum_{j=1}^{N_m}Y_j^{n+1}\alpha_{jk}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{N_{1m}}\{x_j^{n+1}(D_{hx}w_j,\ D_{hy}w_k)\\&\qquad\qquad+Y_j^{n+1}(D_{hy}w_j,\ D_{hy}w_k)\}\end{aligned}\tag{4.10}$$

соответственно. Из (4.10) видно, что уравнения для компонент X и Y уже не расщепляются и нам надо решать линейную систему, вдвое большую, чем в предыдущем случае при $1/\varepsilon=0$. Далее, хотя метод верхней релаксации применим и для решения системы (4.10), параметр ω уже нельзя найти с помощью метода, описанного в п. 4.2; поэтому выбор ω производится экспериментально.

В результате тестовых расчетов для задачи 2 было выбрано значение $\omega=1.6$. Число итераций n_ε, необходимое для достижения требуемой точности ($C_h^{(n)}\leqslant 10^{-5}$, $\delta w_h^n\leqslant 10^{-5}$), *убывает*, когда $1/w$ возрастает (начиная с 0); в данном случае оно достигает минимума для $1/\varepsilon=8$, с наилучшим $\rho=\rho(\varepsilon)=9.2$. Требуемая точность была достигнута всего за 15 итераций ($n_\varepsilon=15$).

5. Решение уравнений Навье—Стокса. Мы используем следующие обозначения: $\tilde{\boldsymbol{W}}_h$ — аппроксимация пространства $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$; $\tilde{W}_h$ — аппроксимация пространства $H^1(\Omega)$; $\boldsymbol{W}_h$ — аппроксимация пространства $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$; W_h — аппроксимация пространства $H_0^1(\Omega)$; X_h — пространство ступенчатых функций π_h, постоянных на каждом $\mathscr{S}\in\mathscr{T}_h$ и равных нулю вне $\Omega(h)$. Пусть v_k — базисные функции, порождающие W_h $(k\leqslant N_m)$. Полагаем

$$S_k=\int_{\Omega_h}v_k^2\,dM.$$

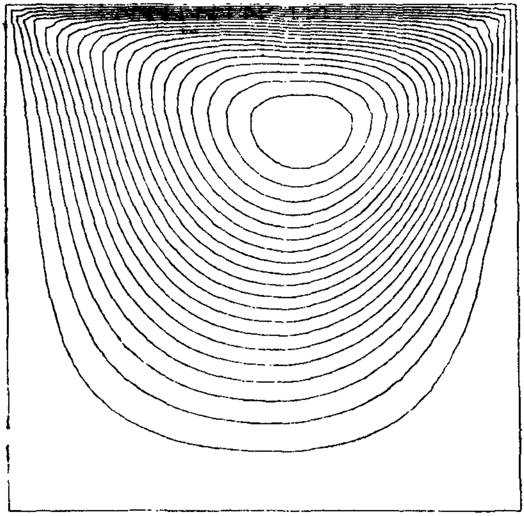

Рис. 24.

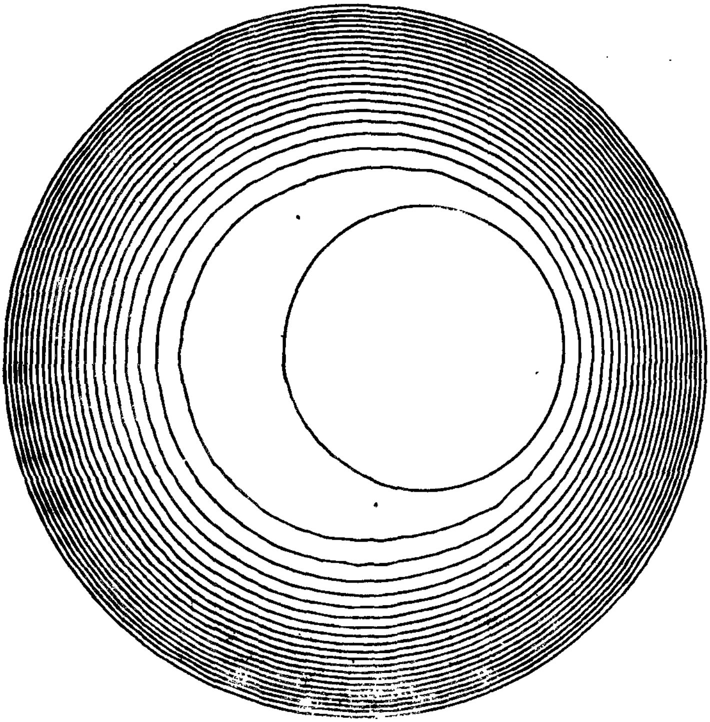

Рис. 25.

Напомним, что

$$\int\limits_{\Omega_h} v_k v_l \, dM = 0 \text{ при } k \neq l.$$

Как и выше, вводим дискретные операторы дифференцирования $D_{hx}v$, $D_{hy}v$ и дискретную дивергенцию $D_h v = D_{hx}v_x + D_{hy}v_y$. Обозначения b_h, a_h имеют тот же смысл, что и в гл. II (см. (II.3.78) и (II.3.80)).

Дискретная задача поставлена в (II.3.93). Мы опробовали два алгоритма из изложенных в гл. II.

Алгоритм 1 (алгоритм Удзавы, см. (II.3.107), (II.3.108)). Начинаем с некоторого $p_h^{(0)} \in X_h$ (например, с $p_h^{(0)} = 0$). Если $p_h^{(m)}$ уже известно ($m \geqslant 0$), то находим u_h^{m+1} из уравнений

$$\begin{aligned}\nu\left(\left(u_h^{m+1}, v_h\right)\right)_h + b_h\left(u_h^{m+1}, u_h^{m+1}, v_h\right) + \varepsilon^{-1}\left(D_h u_h^{m+1}, D_h v_h\right) \\ = \left(p_h^m, D_h v_h\right) + (f, v_h)\ \forall v_h \in W_h \quad (5.1)\end{aligned}$$

(систему (5.1) можно решать методом нижней релаксации). Затем вычисляем p_h^{m+1}:

$$p_h^{m+1} = p_h^m - \rho D_h u_h^{m+1}. \quad (5.2)$$

Алгоритм 2 (неявный метод Эрроу—Гурвица, см. (II.3.122), (II.3.123)). u_h^{m+1} находится из уравнений

$$\begin{aligned}\left(\left(u_h^{m+1} - u_h^m, v_h\right)\right)_h + \rho\left[\nu\left(\left(u_h^m, v_h\right)\right)_h + \varepsilon^{-1}\left(D_h u_h^{m+1}, D_h v_h\right)\right. \\ \left. + b_h\left(u_h^m, u_h^{m+1}, v_h\right) - \left(p_h^m, D_h v_h\right) - (f, v_h)\right] = 0\ \forall v_h \in W_h. (5.3)\end{aligned}$$

Затем p_h^{m+1} вычисляется из уравнения

$$\alpha\left(p_h^{m+1} - p_h^m\right) + \rho D_h u_h^{m+1} = 0.$$

Примеры. На рис. 24 показаны линии тока для течения в задаче 1, отвечающие наилучшему экспериментальному выбору ρ, α, ε (алгоритм 2, $\nu = 10^{-2}$, $U = 1$, 512 треугольников; были опробованы значения $1/\varepsilon = 0$, 5, 7, 10). На рис. 25 показаны линии тока для течения в задаче 2 ($\nu = 4.10^{-2}$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$, 412 треугольников, 655 узлов (рис. 16); параметры были выбраны такие: $\rho = 0$, $1/\varepsilon = 10$, $\alpha = 0.004$).

КОММЕНТАРИИ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Глава 1. Параграф 1 посвящен предварительному исследованию играющих центральную роль в этой книге пространств V и H. Теорема о следе доказана методами, изложенными в монографии Лионса и Мадженеса [1]. Приведенная характеризация пространств H и $H^{\perp}$ основана на теореме де Рама из теории потоков. Более элементарное доказательство дано в книге Ладыженской [1] для $n=3$. Упрощенный вариант доказательства Ладыженской, пригодный для любой размерности пространства, приведен у Темама [9]. Другой способ избежать применения теоремы де Рама указан в замечании 1.9.

Мы не даем ни систематического изложения, ни обзора теории пространств Соболева, а ограничиваемся тем, что напоминаем свойства этих пространств по мере надобности (см., в частности, пункты 1.1 глав I и II). Как уже отмечалось в тексте, по поводу доказательств и дополнительных сведений читатель отсылается к работам: Лионс [1], Лионс и Мадженес [1], Нечас [1], Соболев [1] и др.

Вариационная формулировка уравнений Стокса была впервые введена (в общем случае нелинейных уравнений) Лерэ [1—3] при изучении слабых, или турбулентных, решений уравнений Навье—Стокса. Существование решения вариационной задачи Стокса легко получается с помощью классической проекционной теоремы, доказательство которой напоминается для полноты изложения. Результаты, касающиеся задачи Стокса в невариационной постановке и регулярности решений, основаны на статьях Каттабриги [1] ($n=3$) и Агмона, Дуглиса и Ниренберга [1] об эллиптических системах (любой размерности); эти результаты приводятся без доказательства. Другой подход к регулярности описан в работе Солонникова и Скадилова [1]. См. также Солонников [4], Ворович и Юдович [1].

Понятия аппроксимации нормированного пространства и аппроксимации вариационной задачи изучались многими авторами, в частности Обэном [1] и Сеа [1]; здесь мы придерживаемся изложения, данного в книге Темама [8]. Дискретное неравенство Пуанкаре (п.3.3) и аппроксимация пространства V конечными разностями имеются у Сеа [1]. Аппроксимация пространства V согласованными конечными элементами была впервые изучена и использована Фортэном [2]; наше описание аппроксимаций (АПР2), (АПР3) (согласованные конечные элементы) в основном следует Фортэну [2]. В этой работе можно найти также много результатов вычислений, использующих этот тип дискретизации. Идея использования функций-колоколов принадлежит Равьяру; данное здесь изложение аппроксимации (АПР2′) является новым. Аппроксимация (АПР4) была изучена и применена Томассэ [1]. Результаты, касающиеся использования несогласованных конечных элементов для аппроксимации несоленоидальных вектор-функций, принадлежат Крузею, Гловински, Равьяру и автору. Другие аспекты этой темы (несогласованные конечные элементы высших степеней и более тонкие оценки погрешности) представлены у Крузея и Равьяра [1]; по поводу численных экспериментов см. Томассэ [2], а также Лайи [1] для случая осесимметричного трехмерного течения.

Относительно других приложений конечных элементов в механике жидкости см. Оден, Зенкевич, Гэллахер и Тейлор [1] и материалы конференции в Италии, состоявшейся в июне 1976 г. (в печати). Что касается общей теории конечных элементов, упомянем следующие работы синтетического характера: Бабушка и Азиз [1], Сьярле [1], Равьяр [2], Стрэнг и Фикс [1], Азиз [1]. Дальнейшую литературу по конечным элементам читатель найдет в этих работах. Описание методов конечных элементов, приведенное в книге, почти полностью автономно; мы лишь предположили справедливость нескольких конкретных результатов, доказательство которых потребовало бы введения аппарата, далеко выходящего за рамки наших рассмотрений.

После дискретизации задачи Стокса мы должны решать конечномерную линейную задачу, где неизвестным является элемент u_h некоторого конечномерного пространства V_h. Здесь есть две возможности:

(a) либо пространство V_h обладает естественным и простым базисом, таким что задача сводится к линейной системе с разреженной матрицей относительно компонент вектора u_h; в этом случае мы решаем задачу, разрешая эту линейную систему;

(b) либо это не так, и тогда конечномерную задачу не так просто решить (приходится иметь дело с плохо обусловленными или неразреженными матрицами), даже если она обладает единственным решением; в этом случае для решения задачи должны быть введены подходящие алгоритмы; это и составляет цель § 5.

Алгоритмы, описанные в § 5, были предложены для задач теории оптимизации и экономики в книге Эрроу, Гурвица и Удзавы [1]. Применение этих методов к задачам гидродинамики изучалось в работах Сеа, Гловински и Неделека [1], Фортэна [2], Фортэна, Пейрэ и Темама [1]. Экспериментальное исследование проблемы оптимального выбора параметра ρ (или ρ и α) проведено у Бежи [1] и Фортэна [2]; теоретическое решение этой проблемы для одного весьма частного случая дано Крузеем [2].

Аппроксимацию несжимаемых течений слабо сжимаемыми, как в § 6, изучали Лионс [4] и Темам [2]. Полное асимптотическое разложение u_ε, приведенное в § 6, является новым и принадлежит М. Пелисье. За дальнейшими сведениями по этому вопросу мы отсылаем читателя к работе Пелисье [1]. См. также Фолк [1] и Берковье [1].

Глава II. В § 1 представлены некоторые стандартные результаты о существовании и единственности решений нелинейных стационарных уравнений Навье—Стокса. Мы следуем в основном Ладыженской [1] и Лионсу [2]. Более полное обсуждение вопроса о регулярности решений и теории гидродинамических потенциалов можно найти у Ладыженской [1]; относительно регулярности см. также статью Фудзиты [1]. Стационарные уравнения Навье—Стокса в неограниченной области изучались Финном [1—5], Финном и Смитом [1, 2], Хейвудом [1, 3].

Некоторые новые теоретические результаты, касающиеся стационарных уравнений Навье—Стокса, получены в работах Фояша и Темама [2] *и Темама* [11].

В § 2 приведены дискретные неравенства Соболева и теоремы компактности, доказательства которых носят весьма технический характер. В принципе доказательства для случая конечных разностей аналогичны соответствующим доказательствам для непрерывного случая (см., например, Лионс [1], Лионс и Мадженес [1]). Доказательство дискретных неравенств Соболева ранее не публиковалось, доказательство дискретной теоремы о компактности можно найти у Равьяра [1]. Для согласованных конечных элементов доказательства намного более просты; в частности, для дискретной теоремы о компактности дело совсем просто сводится к непрерывному случаю. Для несогласованных конечных элементов доказательство неравенств Соболева основано на специфической технике теории несогласованных конечных элементов. Дискретная теорема о компактности доказана с помощью сопоставления согласованных и несогласованных конечных элементов; это новые результаты.

Обсуждение дискретизации стационарных уравнений Навье—Стокса ведется в соответствии с принципами, развитыми в гл. 1. Общая теорема о сходимости аналогична изложенной в гл. I, рассмотрены те же самые типы дискретизации пространства V; разница заключается в отсутствии единственности решения точной задачи. Численные алгоритмы п. 3.3 были предложены и опробованы Фортэном, Пейрэ и Темамом [1].

В последние годы были достигнуты успехи в исследовании вопроса о неединственности стационарных решений уравнений Навье—Стокса и родственных им уравнений. Главные результаты в этом направлении принадлежат Рабиновичу [2] и Вельте [1, 2]. В [2] Рабинович установил неединственность решений задачи конвекции, явно построив два различных решения (первое, тривиальное, отвечает покоящейся жидкости, второе строится при помощи некоторого итерационного процесса). Работы Вельте основаны на топологических методах, теории бифуркаций и теории топологической степени; задача, рассмотренная в [1],—это задача о конвекции, как и у Рабиновича [2]. В [2] Вельте доказывает неединственность решения задачи Тейлора; интересно, что ситуация здесь очень похожа на ту, для которой доказано существование в § 1, хотя эти ситуации и не идентичны. Изложение, данное в § 4, близко следует указанным работам. По поводу других приложений теории бифуркаций см., в частности, сборник под редакцией Келлера и Энтмана [1]; книги Нирейберга [1] и Рабиновича [4] и журнал Rocky Mountain J. of Math., 1973, **3**, № 2.

Глава III. Результаты о существовании и единственности решений для линеаризованных уравнений Навье—Стокса (§ 1) являются частным случаем общих результатов о существовании и единственности решений линейных вариационных уравнений (см., например, Лионс и Мадженес [1, т. 2]). Для полноты мы привели элементарные доказательства некоторых технических результатов, обычно получаемых как простые следствия более сильных результатов (имеются в виду, например, лемма 1.1, которая более естественна в рамках теории векторнозначных распределений (Л. Шварц [2]), или лемма 1.2, которую можно доказать интерполяционными методами (Лионс и Мадженес [1])).

Теорема 2.1 — одна из стандартных теорем о компактности, используемых в теории нелинейных эволюционных уравнений. Ряд других теорем о компактности доказан и используется у Лионса [2].

Результаты о существовании и единственности, относящиеся к нелинейным уравнениям Навье—Стокса и приведенные в §§ 3 и 4, являются теперь классическими и продолжают ранние работы Лерэ [1—3]; см. Хопф [1, 2], Ладыженская [1], Лионс [2, 3], Лионс и Проди [1], Серрин [3]. Дальнейшие результаты о регулярности решений и существовании дифференцируемых в классическом смысле решений уравнений Навье—Стокса можно найти во втором издании книги Ладыженской [1]. Относительно аналитичности решений см. Фояш и Проди [1], Фудзита и Масуда [1], Кахан [1], Масуда [1], Серрин [3].

Упомянем также о двух новых и совсем других подходах к изучению вопроса о существовании и единственности, которые мы здесь не рассматривали. Первый принадлежит Фейбсу, Джоунсу и Ривьеру [1] и основан на методах сингулярных интегральных операторов. Он дает существование и единственность в пространствах L^p. Второй — это метод Эбина и Марсдена [1], сводящий изучение задачи Коши для уравнений Навье—Стокса к исследованию геодезических на некотором римановом многообразии и, таким образом, использующий методы глобального анализа.

Материал § 5, посвященного обсуждению устойчивости и сходимости простых дискретных схем для уравнений Навье—Стокса, является в основном новым; аналогичное исследование для других уравнений или других схем приведено в работах Темама [2—4]. Доказательство устойчивости и сходимости некоторых безусловно устойчивых одношаговых схем можно найти у Ладыженской [5]; относительно схем дробных шагов см. Чорин [2], Ладыженская и Ривкинд [1]. Во всех этих работах, исключая работу Чорина [2], сходимость доказывается, как и здесь, получением подходящих априорных оценок приближенных решений и применением подходящей теоремы о компактности;

в [2] Чорин предполагает существованне очень гладкого решения и сравнивает приближенное и точное решения.

Пункт 7.1 служит в основном введением к п. 7.2. Схема дробных шагов, описанная в п. 7.2 (проекционный метод), была независимо предложена Чорином [1—3] и Темамом [3]; Чорин рассматривает несколько иную форму схемы, без стабилизирующего члена $(1/2)(\operatorname{div} u) u$ (т. е. без замены b на $\tilde{b}$). Приложения и другие аспекты этой схемы развиты, в частности, в работах Чжу и Йохансона [1], Чжу, Мортона и Робертса [1], Фортэна, Пейрэ и Темама [1], Фортэна [1], Фортэна и Темама [1], Маршалла [1, 2] и Пескина [1, 2]. Эта схема является интерпретацией метода дробных шагов, введенного и изученного Марчуком [1] и Яненко [1] (см. § 8).

Аппроксимация уравнений Навье—Стокса уравнениями слабо сжимаемой жидкости (п. 8.1) была предложена Яненко [1], который рассматривал чуть более сложные возмущенные уравнения. Введение этих возмущений позволило Яненко использовать метод дробных шагов, который изучается в п. 8.2. Отметим, что схемы § 7 представляют собой схемы дробных шагов, не требующие рассмотрения возмущенных уравнений.

Доказательство сходимости схемы дробных шагов, приведенное здесь, принадлежит Темаму [3, 4] и следует методу, предложенному в работе Темама [1]. Относительно других аспектов метода дробных шагов см. Марчук [1], Яненко [1, 2] и указанную там литературу; см. также Темам [1, 6, 7].

Другие типы возмущенных задач, целью введения которых является преодоление трудностей, связанных с ограничением „$\operatorname{div} u = 0$“ (а не применение метода дробных шагов), изучены в работах Лионса [4] и Темама [2]. Относительно методов переменных направлений и дальнейших результатов по методам дробных шагов см. Ладыженская и Ривкинд [1], Ривкинд и Эпштейн [1], Эпштейн [1].

В §§ 5—8 представлена лишь весьма малая часть из большого количества результатов по аппроксимации уравнений гидродинамики; самые последние результаты и очень полезную библиографию можно найти в сборниках под редакцией Белоцерковского [1], Холта [2], Кабанна и Темама [1], Рихтмайера [1]. См. также Брайен [1], Чжу и Крейсс [1] и, наконец, библиографию, подготовленную в Лос-Аламосской лаборатории (Los Alamos Scientific Laboratory).

С помощью изложенных здесь методов можно решать много других задач. Если говорить лишь о самих уравнениях Навье—Стокса, то можно рассмотреть другие краевые условия (см. Йоосс [1]) или периодические решения (Проузе [1, 2]), вариационные неравенства (Лионс [2]). В работах Бенсусана и Темама [1], Фояша [1], Вишика и Фурсикова [1] изучались стохастические уравнения Навье—Стокса. Задачами оптимального уравнения для систем, управляемых уравнениями Навье—Стокса, занимался Кювелье [1].

Трудности, встречающиеся в математической теории уравнений Навье—Стокса, побудили некоторых авторов к пересмотру гипотез гидродинамики, приводящих к этим уравнениям, и предложению новых моделей с лучшими математическими свойствами; см. Каниэль [1], Ладыженская [1].

Имеются аналогичные модели, связанные с другими уравнениями (чаще всего это уравнения Навье—Стокса, объединенные с какими-нибудь другими уравнениями), как-то: уравнения конвекции, рассмотрение которых почти идентично рассмотрению уравнений Навье—Стокса; различные модели жидкости; модели загрязнения (Маршалл [1]) и кровообращения (Пескин [1]); океанографические модели (в которых фигурирует уравнение для концентрации). Более подробно исследованы уравнения магнитной гидродинамики и уравнения Бингама (см. Дюво и Лионс [1, 2]), служащие примерами моделей неньютоновой жидкости.

Математическая теория уравнений Эйлера здесь не рассматривалась. Относительно одного подхода к ним, основанного на аналитических методах, см. Бардос [1], Като [1, 2], Лионс [2], Темам [10, 12], Юдович [1].

Некоторые результаты о поведении решений уравнений Навье—Стокса при $\nu \longrightarrow 0$ есть у Лионса [2], Юдовича [1]. Аналогичная задача для одного модельного уравнения типа уравнения Бюргерса полностью исследована в статье Бронера, Пенеля и Темама [1] и в диссертации Пенеля [1]; см. также работы Бардоса, Фриша, Пенеля и Сулема в сборнике под редакцией Темама [12].

Добавление ко второму изданию

Укажем здесь самые последние результаты в области теории и численного анализа уравнений Навье—Стокса.

Что касается теории, то получено небольшое усиление теорем существования для стационарных нелинейных уравнений, представленное в приложении I. Некоторые новые результаты относительно структуры множества стационарных (и периодических по времени) решений уравнений Навье—Стокса изложены в работах Фояша и Темама [2—3] и Темама [11], вышедших из печати уже после появления первого издания; см. также Темам [13], Со и Темам [1, 2], где применяются топологические методы (методы трансверсальности), что дает возможность изучить задачу Коши для стационарных линейных уравнений Стокса с возмущающими членами более низкого порядка. Особенности, которыми могут обладать решения эволюционных трехмерных уравнений Навье—Стокса, исследованы в работах Шеффера [1, 2], где оценена хаусдорфова размерность этих особенностей.

Уравнения Навье—Стокса в областях с „большим" количеством дыр рассмотрел Лионс [1] в связи с теорией гомогенизации, течениями в пористых средах и законом Дарси. По поводу продвижений в теории бифуркаций см. Рабинович [1].

Что касается численного анализа уравнений Навье—Стокса, то среди многочисленных новых публикаций, касающихся, в частности, применения методов конечных элементов и методов переменных направлений, отметим следующие: Гэллахер, Зенкевич, Оден, Моранди-Чекки и Тейлор [1], Фортэн и Томассэ [1], Темам [14], Темам и Томассэ [1], Томассэ [3], Вирц [1]. Относительно смешанных и гибридных конечных элементов см. Фортэн [3], Равьяр [3]. См. также литературу, приведенную в указанных работах.

ЛИТЕРАТУРА[1]

Агмон, Дуглис, Ниренберг (S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg)
[1] Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, Comm. Pure Appl. Math., 12, 1959, p. 623—727.
[2] Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions II, Comm. Pure Appl. Math., 17, 1964, p. 35—92.
Азиз (A. K. Aziz)
[1] (ред.) Proceedings of the Symposium on Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, University of Maryland, Baltimore County (June 1972), Academic Press, 1972.
Аракава (A. Arakawa)
[1] Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow (part 1) J. Comp. Physics, 1, 1966, p. 119—143.
Аронсон (D. G. Aronson)
[1] Regularity property of flows through porous media, SIAM J. Appl. Math., 17, 1969, p. 461—467.
[2] Regularity properties of flows through porous media: a counterexample, SIAM J. Appl. Maht., 19, 1970, p. 299—307.
[3] Regularity properties of flows through porous media: the interface, Arch. Rat. Mech. Anal., 37, 1970, p. 1—10.
Бабушка, Азиз (I. Babushka, A. K. Aziz)
[1] Lectures on Mathematical Foundations of the Finite Element Method, Technical Report B. N. 748, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University or Maryland, 1972.
Бардос (C. Bardos)
[1] Existence et unicité de la solution de l'equation d'Euler en dimension deux, J. Math. Anal., Appl., 40, 1972, p. 769—790.
Бардос, Тартар (C. Bardos, L. Tartar)
[1] Sur l'unilcité retrograde des équations paraboliques et quelques questions voisines, Arch. Rat. Mech. Anal., 50, p. 10—25.
Бежи (D. Begis)
[1] Analyse numérique de l'écoulement d'un fluide de Bingham, Thése de 3ème cycle, Université de Paris, 1972.
Белоцерковский О. М.
[1] (ред.) Труды Первой международиой конференции по числениым методам в гидродинамике, Новосибирск, август, 1969.—Изд. АН СССР, 1970.

---

[1] Для переводиых киш в скобках указан год оригинального издания Если он больше года выхода в свет перевода, то это озиачает, что последний делался с более раинего издания, чем то, на которое ссылается автор.—*Прим. ред.*

Бенсусан, Темам (A. Bensoussan, R. Temam)
[1] Équations Stochastiques du type Navier—Stokes, J. Funct. Anal., 13, 1973, p. 195—222.
Берковье (M. Bercovier)
[1] Régularisation duale et problèmes variationnels mixtes, Thèse, 1976.
Борзенберже (A. Borsenberger)
[1] Thèse de $3^{ème}$ cycle, Université de Paris-Sud, à paraitre.
Брайен (K. Bryan)
[1] A numerical investigation of nonlinear model of a wind driven ocean, J. Atmos. Sci. 20, 1963, p. 594—606.
[2] A numerical method for the study of circulation of the world ocean, J. of Comp. Phys., 4, 1969, p. 347—376.
[3] (ред.) Proceedings of a Conference on Oceanography, held in 1972.
Бронер, Пенель, Темам (C. M. Brauner, P. Penel, R. Temam)
[1] Sur une équation d'évolution non linéaire lieé à la théorie de la turbulence, Annali, Sc. Norm. Sup. di Pisa, S. IV, vol. IV, N1, 1977, p. 101—128, and the volume dedicated to J. Leray and H. Lewy.
Бужо, Суле, Темам (J.-P. Boujot, J.-L. Soulé, R. Temam)
[1] Traitement Numérique d'un Problème de Magnetohydrodynamique, in: Холт [2].
Бюи Ан Тон (Bui An Ton)
[1] Nonlinear evolution equations of Sobolev—Halperin type. Math. Z, 151, 1976, p. 219—233.
Варга (R. S. Varga)
[1] Matrix Iterative Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
Вельте (W. Velte)
[1] Stabilitätsverhalten und Verzweigung Stationärer Lösungen der Navier—Stokesschen Gleichungen, Arch. Rational Mech. Anal., 16, 1964, p. 97—125.
[2] Stabilitäts und Verzweigung stationärer Lösunger der Navier—Stokesschen Gleichungen beim Taylor problem, Arch. Rational Mech. Anal., 22, 1966, p. 1—14.
Вирц (H. J. Wirz)
[1] (ред.) Computational fluid dynamics, Agard Lecture Series n° 86, 1977.
Виттинг (H. Witting)
[1] Über den Einfluß der Stromlinienkrümmung auf die Stabilität laminarer Strömungen, Arch. Rat. Mech. Anal., 2 (1958), p. 243—283.
Вишик М. И., Фурсиков А. В.
[1] L'equation de Hopf, les solutions statistiques, les moments correspondants aux systèmes des équations paraboliques quasilinéaires, J. Math. Pures Appl., to appear.
Ворович И. И., Юдович В. И.
[1] Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости.—Матем. сб., 1961, 53, с. 393—428.
Гальярдо (E. Gagliardo)
[1] Propriéta di al classi di funzioni in più variabili, Richerche di Mat., 7, 1958, p. 102—137.
Гловински, Лионс, Тремольер (R. Glowinski, J. L. Lions, R. Trémolières)
[1] Численное исследование вариационных неравенств.— М.: Мир, 1979. (1976).
Годунов С. К.
[1] Решение одномерных задач газовой динамики на подвижных сетках.—М.: Наука, 1970.
Головкин К. К.
[1] О теории потенциала для нестационарных линейных уравнений Навье—Стокса в случае трех пространственных переменных.—Труды МИАН им. Стеклова, 1960, 59, с. 87—99.

[2] О плоском движении вязкой жидкости.—Труды МИАН им. Стеклова, 1960, 59, с. 37—86.
Головкин К. К., Ладыженская О. А.
[1] О решениях нестационарной краевой задачи для уравнений Навье—Стокса.—Труды МИАН им. Стеклова, 1960, 59, с. 100—114.
Головкин К. К., Солонников В. А.
[1] О первой краевой задаче для нестационарных уравнений Навье—Стокса.—ДАН СССР, 1961, 140, с. 287—290.
Гринспэн Д. (D. Greenspan)
[1] Numerical solution of a class of nonsteady cavity flow problems, B. I. T., 8, 1968, p. 287—294.
[2] Numerical studies of prototype cavity flow problems. The Computer Journal, 12, No. 1, 1969, p. 89—94.
[3] Numerical Studies of Steady, Viscous Incompressible Flow in a Channel with a Step. J. of Engineering Mathematics, 3, No. 1, 1969, p. 21—28.
[4] Numerical studies of Flow between rotating coaxial disks, J. Inst. Maths. Applics., 9, 1972, p. 370—377.
Гринспэн Д., Шульц (D. Greenspan, D. Schultz)
[1] Fast finite-difference solution of Biharmonic problems, Comm. of the A. C. M.
Гринспэн X. (H. P. Greenspan)
[1] The theory of rotating fluids, Cambridge University Press, 1969.
Гэллахер, Зенкевич, Оден, Моранди-Чекки, Тейлор (R. H. Gallagher, O. C. Zienckiewicz, J. T. Oden, M. Morandi-Cecchi, C. Taylor)
[1] Finite Elements in Fluids, vol. 3, J. Wiley, 1978 (см. также первые два тома).
Дени, Лионс (J. Deny, J.-L. Lions)
[1] Les espaces du type de BEPPO LEVI, Ann. Inst. Fourier, 5, 1954, p. 305—370.
Деннис (S. C. R. Dennis)
[1] The numerical solution of the vorticity transport equation, Report CERN, Geneva, 1972.
Дюво, Лионс (G. Duvaut, J.-L. Lions)
[1] Les inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, Paris, 1971, English translation, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1977.
[2] Inéquations en thermoelasticité et magnétohydrodynamique, Arch. Rat. Mech. Anal., 46, 1972, p. 241—279.
Женишек (A. Zenisek)
[1] Polynomial interpolations on the triangle, Numer. Math., 15, 1970, p. 283—296.
Зламал (M. Zlamal)
[1] On the finite element method, Numer. Math., 12, 1968, p. 394—409.
[2] A finite element procedure of the second order of accuracy, Numer. Math., 14, 1970, p. 394—402.
Израэли, Гринспэн X. (M. Israeli, H. P. Greenspan)
[1] Nonlinear motions of a confined rotating fluid, Report, Department of Meteorology, M. I. T. To appear.
Йоосс (G. Iooss)
[1] Bifurcation of a T-periodic flow towards an nT-periodic flow and their non-linear stabilities, Archiwum Mechaniki Stojowanej, 26, 5, 1974, p. 795—804.
Кабанн, Темам (H. Cabannes, R. Temam)
[1] (ред.) Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Paris, July 1972, Lecture Notes in Physics, 18 and 19, Springer-Verlag, 1973.
Каниэль (S. Kaniel)
[1] On the initial value problem for an incompressible fluid with non-linear viscosity, J. Math. Mech., 19, 1969—1970, p. 681—707.
Каниэль, Шинброт (S. Kaniel, M. Shinbrot)

[1] Smoothness of weak solutions of the Navier—Stokes equations, Arch. Rational Mech. Anal., 24, 1967, p. 302—324.
[2] A reproductive property of the Navier—Stokes equations, Arch. Rational Mech. Anal., 24, 1967, p. 363—369.
Карлин (S. Karlin)
[1] Total positivity and applications V. I. Stanford University Press, Stanf., Cal. 1967.
Като (T. Kato)
[1] On classical solutions of two dimensional nonstationary Euler equation, Arch. Rational Mech. Anal., 25, 1967, p. 188—200.
[2] Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in R^3, J. Functional Analysis, 9, 1972, p. 296—305.
Като, Фудзита (T. Kato, H. Fujita)
[1] On the stationary Navier—Stokes system, Rend. Sem. Univ. Padova, 32, 1962, p. 243—260.
Каттабрига (L. Cattabriga)
[1] Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes, Rend. Mat. Sem. Univ. Padova, 31, 1961, p. 308—340.
Кахан (C. Kahane)
[1] On the spatial analyticity of solutions of the Navier—Stokes equations, Arch. Rational Mech. Anal., 33, 1969, p. 386—405.
Келлер, Энтман (J. B. Keller, S. Antman)
[1] (ред.) Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems, Benjamin, New York, 1969.
Келлог, Осборн (R. B. Kellog, J. E. Osborn)
[1] A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon, J. Funct. Anal., 21, 1976, p. 341—397.
Кирхгэснер (K. Kirchgässner)
[1] Die Instabilität der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegenüber Taylor-Wirbeln für beliebige Spaltbreiten. Z. A. M. P., 12, 1961, p. 14—30.
Коллинз (R. Collins)
[1] Application de la mécanique des milieux continus à la Biomécanique, Cours de 3ème cycle, Université de Paris VI, 1972.
Красносельский М. А.
[1] Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1956.
Крейн М. Г., Рутман М. А.
[1] Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха.—УМН, 1948, **3**, № 1, с. 3—95.
Крузей (M. Crouzeix)
[1] Résolution Numérique des Equations de Stokes et Navier—Stokes Stationnaires, Séminaire d'Analyse Numérique, Université de Paris IV, 1971—72.
[2] Thesis, Universite de Paris VI, 1975.
Крузей, Равьяр (M. Crouzeix, P. A. Raviart)
[1] Conforming and non conforming Finite Element Methods for Solving the Stationary Stokes Equations, RAIRO, Serie Anal. Num., 3, 1973, p. 33—76.
Кшивицкий (A. Krzywicki), Ладыженская О. А.
[1] Метод сеток для нестационарных уравнений Навье—Стокса.—Труды МИАН им. Стеклова, 1966, **92**, с. 93—99.
Кювелье (Cuvelier)
[1] Thesis, University of Delft, 1976.
Ладыженская О. А.
[1] Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.—М.: Физматгиз, 1961.
[2] О новых уравнениях для описания движения вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач.—Труды МИАН им. Стеклова, 1967, **102**, с. 85—104.

[3] О модификации уравнений Навье—Стокса для больших градиентов скоростей.—Записки научн. сем. ЛОМИ, 1968, 7, с. 126—154.
[4] Об однозначной разрешимости в целом трехмерной задачи Коши для уравнений Навье—Стокса при наличии осевой симметрии.—Записки научн. сем. ЛОМИ, 1968, 7, с. 155—177.
[5] On convergent finite differences schemes for initial boundary value problems for Navier—Stokes equations, Fluid Dyn. Trans., 5, 1969, p. 125—134.
Ладыженская О. А., Ривкинд В. И.
[1] О методе переменных направлений для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах.—ИАН СССР, 1971, 35, с. 259—268.
Ладыженская О. А., Солонников В. А.
[1] О разрешимости краевых и начально-краевых задач для уравнений Навье—Стокса в областях с некомпактными границами.—Вестник ЛГУ, 1977, № 13, с. 39—47.
[2] О некоторых задачах векторного анализа и обобщении уравнений Навье—Стокса.—Записки научн. сем. ЛОМИ, 1976, 59, с. 81—116.
[3] Об однозначной разрешимости начально-краевых задач для вязких несжимаемых течений однородной жидкости.—Записки научн. сем. ЛОМИ, 1975, 52, с. 52—109.
Лайи (P. Lailly)
[1] Thèse, Université de Paris-Sud, Orsay, 1976.
Лакс, Вендрофф (P. Lax, B. Wendroff)
[1] Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy, Comm. Pure Appl. Math., XVII, No. 3, 1964, p. 381—398.
Ласко (P. Lascaux)
[1] Application de la méthode des éléments finis en hydrodynamique bidimensionnelle utilisant les variables de Lagrange, Technical Report, C. E. A. Limeil, 1972.
Лерэ (J. Leray)
[1] Etude de diverses équations intégrales nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, J. Math. Pures Appl., 12, 1933, p. 1—82.
[2] Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, J. Math. Pures et Appl., 13, 1934, p. 331—418.
[3] Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math., 63, 1934, p. 193—248.
Лерэ, Шаудер (J. Leray, J. Schauder)
[1] Topologie et equations fonctionnelles, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 3ème Série, 51, 1934, p. 45—78. [Имеется перевод: УМН, 1946, 1, № 3—4, 71—95.]
Лионс (J.-L. Lions)
[1] Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Presses de l'Université de Montréal, 1962.
[2] Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.
[3] Quelques résultats d'existence dans les equations aux dérivées partielles non linéaires, Bull. Soc. Math. France, 87, 1959, p. 245—273.
[4] On the numerical approximation of some equations arising in hydrodynamics, A. M. S. Symposium, Durham, April 1968.
[5] Sur la régularité et l'unicité des solutions turbulentes des équations de Navier—Stokes, Rend. Sem. Mat. Padova, 30, 1960, p. 16—23.
[6] Some problems with Navier—Stokes equations, Lectures at the VIth Latin-American School of Mathematics, Lima, July 1978.
Лионс, Мадженес (J.-L. Lions, E. Magenes)
[1] Неоднородные граничные задачи и их приложения.—М.: Мир, 1971 (1972).
Лионс, Проди (J.-L. Lions, G. Prodi)
[1] Un théorème d'existence et d'unicité dans les équations de Navier—Stokes en dimension 2, C. R. Acad. Sci. Paris, 248, 1959, p. 3519—3521.

Мадженес, Стампаккья (E. Magenes, G. Stampacchia)
[1] I Problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, 12, 1958, p. 247—357, note (27), p. 320.
Марчук Г. И.
[1] In: Proceedings of the Intern. Congress of Mathematicians, Nice, 1970, Gauthier-Villars, Paris, 1971.
Маршалл (G. Marshall)
[1] On the numerical treatment of viscous flow problems, Report NA-7, Delft, 1972.
[2] Numerical treatment of air pollution problems, to appear.
Масуда (K. Masuda)
[1] On the analyticity and the unique continuation theorem for solutions of the Navier—Stokes equations, Proc. Japan Acad., 43 (No. 9), 1967, p. 827—832.
Мёран (G. Meurant)
[1] Quelques aspects théoriques et numériques de problèmes de valeurs propres non linéaires, Thèse de 3ème cycle, Université de Paris-Sud, 1972.
Моретти (G. Moretti)
[1] Lectures in: Смолдерен [1].
Нечас (J. Nečas)
[1] Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris, 1967.
[2] Equations aux dérivées partielles, Presses de l'Université de Montréal, 1965.
Ниренберг (L. Nirenberg)
[1] Лекции по нелинейному функциональному анализу.—М.: Мир, 1977 (1974).
Нох (W. F. Noh)
[1] A time dependant two spaces Dimensional Coupled Eulerian—Lagrange Code, in: Олдер и Фербах [1].
Обэн (J. P. Aubin)
[1] Приближенное решение эллиптических краевых задач.— М.: Мир, 1977 (1972).
Оден (J. T. Oden)
[1] Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.— М.: Мир, 1976 (1972).
Оден, Зенкевич, Гэллахер, Тейлор (J. T. Oden, O. C. Zienkiewicz, R. H. Gallagher, C. Taylor)
[1] Finite element methods in flow problems, UAM Press, Huntsville, Alabama, 1974.
Олдер, Фербах (B. Alder, S. Ferbach)
[1] (ред.) Methods in Computational Physics, Academic Press, New York, 1965.
Осборн (J. E. Osborn)
[1] Regularity of the Stokes problem in a polygonal domain, in: Numerical Solution of P.D.E. (III), B. Hubbard editior, Academic Press, 1976.
Пелисье (M. C. Pelissier)
[1] Résolution numerique de quelques problèmes raides en mécanique des milieux faiblement compressibles, Calcolo, 12, 1975, p. 275—314.
Пенель (P. Penel)
[1] Sur une équation d'évolution nonlinéaire lieé à la théorie de la turbulence, Thèse, Université de Paris-Sud, 1975.
Пескин (C. S. Peskin)
[1] Flow patterns around heart valves, J. of Comp. Phys., 10 1972, p. 252—271.
Пирронно (Pirronneau)
[1] Sur les problèmes d'optimisation de structure en mécanique des fluides, Thèses, Université de Paris, 1976.
Проди (G. Prodi)
[1] Un teorema di unicita per le equazioni di Navier—Stokes, Annali di Mat., 48, 1959, p. 173—182.

[2] Qualche resultato riguardo alle equazioni di Navier—Stokes nel caso bidimensionale, Rend. Sem. Mat. Padova, 30, 1960, p. 1—15.
Проузе (G. Prouse)
[1] Soluzioni periodiche dell'equazione di Navier—Stokes, Rend. Acad. Naz. Lincei, 35, 1963, p. 443—447.
[2] Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione di Navier—Stokes in due dimensioni, Rend. Sem. Mat. Padova, 33, 1963.
Рабинович (P. H. Rabinowitz)
[1] Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations (I) and (II), Comm. Pure Appl. Math., 20, 1967, p. 145—205, and 22, 1969, p. 25—39.
[2] Existence and nonuniqueness of rectangular solutions of the Bénard problem, Arch. Rational Mech. Anal., 29, 1968, p. 32—57.
[3] Some aspects of nonlinear eigenvalue problems, M.R.C. Technical Summary Report No. 1193, University of Wisconsin, 1972.
[4] Théorie du degré topologique et application à des problèmes aux limites non linéaires, Lecture Notes of a Course at the University of Paris VI and XI, 1973.
[5] A priori bounds for some bifurcation problems in Fluid Dynamics, Arch. Rat. Mech. Anal., 49, 1973, p. 270—285.
[6] (ред.) Application of bifurcation theory, Acad. Press, New York, 1977.
Равьяр (P. A. Raviart)
[1] Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires, J. Math. Pures Appl., 46, 1967, p. 11—107 and 109—183.
[2] Méthode des Elements Finis, Cours de 3ème cycle, Université de Paris VI, 1972.
[3] Finite element methods and Navier—Stokes equations, Lecture at the International Symposium on Numerical methods in Applied Sciences, Versailles 1977, Proceedings edited by R. Glowinski and J.-L. Lions, Springer-Verlag, to appear.
Рам, де (G. de Rham)
[1] Дифференцируемые многообразия.— М.: ИЛ, 1956 (1960).
Раупп (M. A. Raupp)
[1] Galerkin methods for two-dimensional unsteady flows of an ideal incompressible fluid, Thesis, University of Chicago, 1971.
Ривкинд В. И., Эпштейн Б. С.
[1] Проекционные сеточные схемы для решения уравнений Навье—Стокса в ортогональных криволинейных системах координат.— Вестник ЛГУ, 1974, 3, № 13, с. 56—53, 156.
Рисс М. (M. Riesz)
[1] Sur les ensembles compacts de fonctions sommables, Acta Sci. Math. Szeged, 6, 1933, p. 136—142.
Рихтмайер (R. D. Richtmyer)
[1] (ред.) Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Boulder, June 1974, Lecture Notes in Physics, 35, Springer-Verlag, 1975.
Рихтмайер, Мортон (R. D. Richtmyer, K. W. Morton)
[1] Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972 (1967).
Санчес-Паленсия (E. Sanchez-Palencia)
[1] Existence des solutions de certains problèmes aux limites en magnetohydrodynamique, J. Mècanique, 7, 1968, p. 405—426.
[2] Quelques résultats d'existence et d'unicité pour les écoulements magnetohydrodynamiques non stationnaires, J. Mécanique, 8, 1969, p. 509—541.
Сеа (J. Cea)
[1] Approximation variationelle des problèmes aux limites, Ann Inst. Fourier, 14, 1964, p. 345—444.
[2] Оптимизация. Теория и алгоритмы.— М.: Мир, 1973 (1971).

Сеа, Гловински, Неделек (J. Cea, R. Glowinski, J. C. Nedelec)
[1] Minimisation de fonctionelles non différentiables. Conference on Applications of Numerical Analysis (Dundee, March 1971). Lecture Notes in Mathematics No. 128, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1971.
Серрин (J. Serrin)
[1] A note on the existence of periodic solutions of the Navier—Stokes equations, Arch. Rational Mech. Anal., 3, 1959, p. 120—122.
[2] Mathematical Principles of Classical Fluid Dynamics, Encyclopedia of Physics, vol. 13,1, Springer-Verlag, 1959.
[3] The initial value problem for the Navier—Stokes equations, in „Nonlinear Problems", R. E. Langer editor, University of Wisconsin Press, 1963, p. 69—98.
[4] On the interior regularity of weak solutions of Navier—Stokes equations, Arch. Rational Mech. Anal., 9, 1962, p. 187—195.
Смолдерен (J. J. Smolderen)
[1] Numerical Methods in Fluid Dynamics, AGARD Lecture Series, No. 48, 1972.
Со, Темам (J. C. Saut, R. Temam)
[1] Propriétés de l'ensemble des solutions stationnaires ou périodiques des équations de Navier—Stokes: généricité par rapport aux données aux limites, C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. A, 285, 1978, p. 673—676, and article to appear.
[2] Generic properties of nonlinear boundary value problems, Comm. in P.D.E., to appear.
Соболев С. Л.
[1] Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Новосибирск: Изд-во СОАН СССР, 1962.
Солонников В. А.
[1] Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье—Стокса.— Труды МИАН им. Стеклова, 1964, 70, с. 213—317.
[2] О дифференциальных свойствах решений первой краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье—Стокса.— Труды МИАН им. Стеклова, 1964, 73, с. 221—291.
[3] Об общих краевых задачах для эллиптических по Дуглису—Ниренбергу систем. I.— ИАН СССР, 1964, 28, с. 665—706; II.— Труды МИАН им. Стеклова, 1966, 92, с. 233—297.
[4] Об оценках тензоров Грина для некоторых краевых задач.— ДАН СССР, 1960, 130, с. 988—991.
Солонников В. А., Скадилов В. Е.
[1] О краевой задаче для стационарной системы уравнений Навье—Стокса.— Труды МИАН им. Стеклова, 1973, 125, с. 196—210.
Соссэ (J. P. Saussais)
[1] Étude d'un probléme de diffusion non linéaire lié à la physique des plasmas, Thèse de 3$^{\text{ème}}$ cycle, Université de Paris-Sud, 1972.
Стампаккья (G. Stampacchia)
[1] Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Presses de l'Université de Montréal, 1966.
Стрэнг, Фикс (G. Strang, D. J. Fix)
[1] Теория метода конечных элементов.— М.: Мир, 1977 (1973).
Сьярле (P. G. Ciarlet)
[1] Метод конечных элементов для эллиптических задач.— М.: Мир, 1980 (1978).
[2] Numerical analysis of the finite element method, Presses de l'Université de Montréal, 1975.
Сьярле, Равьяр (P. G. Ciarlet, P. A. Raviart)
[1] General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite elements, Arch. Rational Mech. Anal., 46 (No. 3), 1972, p. 177—199.

[2] Interpolation theory over curved elements, with applications to finite element methods, Computer Methods in Applied Mechanics and Engeneering, 1, 1972, p. 217—249.
[3] The Combined Effect of Curved Boundaries and Numerical Integration of Isoparametric Finite Element Methods, in: Бабушка, Азиз [1].
Сьярле, Уэгшолл (P. G. Ciarlet, G. Wagshall)
[1] Multipoint Taylor formulas and applications to the finite element method, Num. Math., 17, 1971, p. 84—100.
Сэзер (J. Sather)
[1] The initial boundary value problems for the Navier—Stokes equations in regions with moving boundaries, Thesis, University of Minnesota, 1963.
Тартар (L. Tartar)
[1] Nonlinear partial differential equations using compactness method, M. R C. Report 1584, Univ. of Wisconsin, 1976.
Темам (R. Temam)
[1] Sur la stailité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, Ann. Math. Pura Appl., 74, 1968, p. 191—380.
[2] Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier — Stokes, Bull. Soc. Math. France, 98, 1968, p. 115—152.
[3] Sur l'approximation de la solution des équations de Navier—Stokes par la méthode des pas fractionnaires (I), Arch. Rational Mech. Anal., 32 (No. 2), 1969, p. 135—153.
[4] Sur l'approximation des equations de Navier—Stokes par la méthode des pas fractionnaires (II), Arch. Rational Mech. Anal., 33 (No. 5), 1969, p. 377—385.
[5] Approximation of Navier—Stokes Equations, AGARD Lecture Notes Series, No. 48, 1970.
[6] Sur la résolution exacte et approchée d'un problème hyperbolique non linéaire de T. Carleman, Arch. Rational Mech. Anal., 35 (No. 5), 1969, p. 351—362.
[7] Méthodes de Décomposition en Analyse Numérique, Proceedings of the International Conference of Mathematicians, Nice, 1970, Gauthier—Villars, Paris, 1971.
[8] Numerical Analysis, Reidel Publishing Company, Holland, 1973 (in English), and P.U.F. Paris, 1969 (in French).
[9] On the theory and numerical analysis of the Navier—Stokes equations, Lecture Note No. 9, Department of Mathematics, University of Maryland, 1973.
[10] On the Euler equations of incompressible perfect fluids, J. Funct. Anal., 20, 1975, p. 32—43.
[11] Une propriété générique de l'ensemble des solutions stationnaires ou périodiques des équations de Navier—Stokes, Actes du Symposium Franco-Japonais, Tokyo, Sept. 1976, Proceedings edited by H. Fujita, Japan Soc. for the Promotion of Science, 1978.
[12] (ред.) Turbulence and Navier—Stokes equations, Lecture Notes in Math., vol. 565, Springer-Verlag, 1976.
[13] Qualitative properties of Navier—Stokes equations, Communication at the International Symposium on Partial Differential Equations and Continuum Mechanic, Rio de Janeiro 1977, Proceedings edited by L. A. Medeiros, North-Holland, 1978.
[14] Some finite element methods in fluid flow, Lecture at the Sixth International Conference on Numerical Methods in fluid mechanics, Tbilissi, 1978, Proceedings edited by Belotserkovskii and Rusanov, Springer-Verlag, to appear.
Темам, Томассэ (R. Temam, F. Thomasset)
[1] Numerical solution of Navier—Stokes equations by a finite element method, Conference at Rapallo, Italy 1976
Томассэ (F. Thomasset)

[1] Étude d'une méthode d'éléments finis de degré 5. Application aux problèmes de plaques et d'écoulement de Fluides, Thèse de 3ème cycle, Université de Paris-Sud, 1974.
[2] Méthodes d'éléments finis non conformes en hydrodynamique. Rapport IRIA Laboria, à paraitre.
[3] Numerical solution of the Navier—Stokes equations by finite elements methods, Lecture at the Von Karman Institute, Computational fluid dynamic course, V.K.I., Rhode—Saint—Genese, March 1977.

Уилкинз (Wilkins)
[1] Calculation of elastic plastic flow, in: Meth. of Comp. Phys., 3, Academic Press, New York, 1964.

Фейбс, Джоунз, Ривьер (E. B. Fabes, B. F. Jones, N. Riviere)
[1] The initial boundary value problem for the Navier—Stokes equations with data in L^p, Arch. Rational Mech. Anal., 45, 1972, p. 222—240.

Финн (R. Finn)
[1] On the exterior stationary problem for the Navier—Stokes equations and associated perturbation problems, Arch. Rational Mech. Anal., 19, 1965, p. 363—406.
[2] On the steady state solution of the Navier—Stokes equations III, Acta Math., 105, 1961, p. 197—244.
[3] Estimates at infinity for stationary solutions of the Navier—Stokes equations, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumanie, 3 (51), 1959, p. 387—418.
[4] On steady state solutions of the Navier—Stokes partial differential equations, Arch. Rational Mech. Anal., 3, 1959, p. 381—396.
[5] Stationary solutions of the Navier—Stokes equations, Proc. Symp., Appl. Math., 17, 1965, p. 121—153.

Финн, Смит (R. Finn, D. R. Smith)
[1] On the lirnearized hydrodynamical equations in two dimensions, Arch. Rational Mech. Anal., 25, 1967, p. 1—25.
[2] On the Stationary solution of the Navier—Stokes equations in two dimensions, Arch. Rational Mech. Anal., 25, 1967, p. 26—39.

Фолк (R. S. Falk)
[1] An Analysis of the penalty method and extrapolation for the Stationary Stokes equations. Advances in Computer Methods for P.D.E's, Proceedings of A.I.C.A. Symposium, R. Vichnevelsky editor.

Фортэн (M. Fortin)
[1] Approximation d'un opérateur de projection et application à un schéma de résolution numérique des équations de Navier—Stokes, Thèse de 3ème cycle, Université de Paris XI, 1970.
[2] Calcul numérique des écoulements des fluides de Bingham et des fluides newtoniens incompressibles par la méthode des éléments finis, Thèse, Université de Paris, 1972.
[3] Résolution numérique des équations de Navier—Stokes par des éléments finis de type mixte, IRIA—LABORIA, Le Chesnay, France, rapport n° 184, 1976.

Фортэн, Пейрэ, Темам (M. Fortin, R. Peyret, R. Temam)
[1] Résolution nimériques des equations de Navier—Stokes pour un fluide incompressible, J. de Mécanique, 10, No. 3, 1971, p. 357—390; результаты анонсированы в сб.: Холт [2].

Фортэн, Темам (M. Fortin, R. Temam)
[1] Numerical Approximation of Navier—Stokes Equations, in: Белоцерковский [1].

Фортэн, Томассэ (M. Fortin, F. Thomasset)
[1] Mixed finite elements methods for incompressible flow problems. Rapport de l'Université Laval, Quebec 1977, and an article to appear.

Фояш (C. Foias)

[1] Essais dans l'étude des solutions des équations de Navier—Stokes dans l'espace—L'unicité el la presque périodicité des solutions petites, Rend. Sem. Mat. Un. Padova, **32**, 1962, p. 261—294.
[2] Solutions statistiques des équations d'évolution non linéaires, Lecture at the C.I.M.E. on non-linear problems, Varenna 1970, Ed. Cremoneze Publishers.
[3] Statistical study of Navier—Stokes equations I and II, Rend. Sem. Mat. Un. Padova, 48, 1973, p. 219—348, and 49, 1973, p. 9—123.
[4] Cours au Collège de France, 1974.
Фояш, Проди (C. Foias, G. Prodi)
[1] Sur le comportement global des solutions non stationnaires des équations de Navier—Stokes en dimension 2, Rend. Sem. Mat. Padova, **39**, 1967, p. 1—34.
Фояш, Темам (C. Foias, R. Temam)
[1] On the stationary statistical solutions of the Navier—Stokes equations and Turbulence, Public. Math. d'Orsay, 1975.
[2] Structure of the set of stationary solutions of the Navier—Stokes equations, Comm. Pure Appl. Math., 30, 1977, p. 149—164.
[3] Remarques sur les équations de Navier—Stokes stationnaires et les phénomenes successifs de bifurcation, Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, Ser. IV, 5, № 1, 1978, p. 26—53 (and the volume dedicated to J. Leray and H. Lewy, to appear).
Фромм (J. E. Fromm)
[1] The time dependent flow of an incompressible viscous fluid, Methods of Comp. Phys. 3, Academic Press, New York, 1964.
[2] A method for computing nonsteady incompressible viscous fluid flows, Los Alamos Scient. Lab. Report LA 2910, Los Alamos, 1963.
[3] Numerical solutions of the nonlinear equations for heater fluid layer. Phys. of Fluids. 8, 1965, p. 1757.
[4] Numerical solution of the Navier—Stokes equations at high Reynolds numbers and the problem of discretization of convective derivatives. Lectures in: Смолдерен [1].
Фудзивара, Миромото (D. Fujiwara, H. Miromoto)
[1] An L_r-theorem of the Helmotz decomposition of vector fields, Journal of the Fac. of Sc., Univ. of Tokyo, Sec. A, vol. 24, 3, 1977, p. 685—700.
Фудзита (H. Fujita)
[1] On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier—Stokes Equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Section I, 9, 1961, p. 59—102.
Фудзита, Като (H. Fujita, T. Kato)
[1] On the Navier—Stokes initial value problem 1, Arch. Rational Mech. Anal., 16, 1964, p. 269—315.
Фудзита, Масуда (H. Fujita, K. Masuda)
[1] To appear.
Фудзита, Сауэр (H. Fujita, N. Sauer)
[1] Construction of weak solutions of the Navier—Stokes equation in a noncylindrical domain, Bull. Amer. Math. Soc., 75, 1969, p. 465—468.
[2] J. Faculty of Sciences of the University of Tokyo.
Харлоу, Эмсден (F. H. Harlow, A. A. Amsden)
[1] A Numerical Fluid Dynamics Calculation Method for all flow speeds, J. Comp. Phys., 8, 1971, p. 197.
[2] "Fluid Dynamics: A LAST Mohograph", Los Alamos Scientific Laboratory report No. La-4700, 1971.
Харлоу, Уэлч (F. H. Harlow, J. E. Welch)
[1] Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface, Phys, Fluids, 8, 1965, p. 2182—2189.
Хейвуд (J. G. Heywood)
[1] The exterior nonstationary problem for the Navier—Stokes equations, Acta Math., 129, 1972, p. 11—34.

[2] On nonstationary Stokes flow past an obstacle, Indiana Univ., Math. J., 24, 1974, p. 271—284.
[3] On some paradoxes concerning two-dimensional Stokes flow past and obstacle, Indiana Univ. Math. J., 24, 1974, 443—450.
[4] On uniqueness questions in the theory of viscous flow, Acta Math., 136, 1976, p. 61—102.
Хёрш (J. E. Hirsh)
[1] The finite element method applied to ocean circulation problems, To appear.
Холт (M. Holt)
[1] (ред.) Basic Developments in Fluid Dynamics, Vol. I, Academic Press, New York, 1965.
[2] (ред.) Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Berkeley, Sept. 1970, Lecture Notes in Physics, 8, Springer-Verlag, 1971.
[3] La Résolution Numérique de Quelques Problémes de Dynamique des Fluides, Lecture Notes No. 25, Université of Paris-Sud. Orsay, France 1972.
[4] Numerical methods in fluid dynamics, Springer- Verlag, Series in Computational Physics, 1977.
Хопф (E. Hopf)
[1] Über die Aufangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachr., 4 (1951), p. 213—231.
[2] On nonlinear partial differential equations, Lecture Series of the Symposium on Partial Differential Equations, Berkeley, 1955, Ed. The Univ. of Kansas (1957), p. 1—29.
Чжу, Йохансон (C. K. Chu, G. Johansson)
[1] Numerical studies of the heat conduction with highly anisotropic tensor conductivity II. To appear.
Чжу, Крейсс (C. K. Chu, H.-O. Kreiss)
[1] Computational Fluid Dynamics, a book, in preparation.
Чжу, Мортон, Робертс (C. K. Chu, K. W. Morton, K. V. Roberts)
[1] Numerical studies of the heat conduction equation with highly anisotropic tensor conductivity; in: Кабанн и Темам [1].
Чорин (A. J. Chorin)
[1] A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, J. of Comp. Phys., 2, 1967, p. 12—26.
[2] Numerical solution of the Navier—Stokes equations, Math. Comp., 23, 1968, p. 341—354.
[3] Numerical solution of incompressible flow problems, Studies in Num. Anal., 2, 1968, p. 64—71.
[4] Computational aspects of the turbulence problem, in: Холт [2].
Шварц Л. (L. Schwartz)
[1] Théorie des Distributions, Hermann, Paris, 1957.
[2] Théorie des distributions à valeurs vectorielles, I, II, Ann. Inst. Fourier, 7, 1957, p. 1—139, and 8, 1958, p. 1—209.
Шептицки (P. Szeptycki)
[1] The equations of Euler and Navier—Stokes on compact Riemannian manifolds, Technical Report, University of Kansas, 1972.
Шеффер (V. Schaeffer)
[1] Partial regularity of solutions to the Navier—Stokes equations, Pac. J. Math., 66, № 2, 1976, p. 535—552.
[2] Hausdorff measure and the Navier—Stokes equations, Comm. Math. Phys., 55, 1977, p. 97—112.
Шинброт, Каниэль (M. Shinbrot, S. Kaniel)
[1] The unitial value problem for the Navier—Stokes equations, Arch. Ratinal Mech. Anal., 21, 1966, p. 270—285.
Эбин, Марсден (D. G. Ebin, J. Marsden)
[1] Groups of diffeomorphisms and the motion of an incomprehensible fluid, Ann. Math., 92, 1970, p. 102—163.

Эмсден, Хёрт (A. A. Amsden, C. W. Hirt)
[1] YAQUI: An arbitrary Lagrangian—Eulerian Computer Program for Fluid Flow at all Speeds, Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA-5100, March 1973.
[2] A simple scheme for generating General Curvilinear frids, J. Comp. Phys., to appear.
Эпштейн Б. С.
[1] О некоторой схеме переменных направлений для уравнений Навье—Стокса.— Вестник *ЛГУ*, 1974, **2**, с. 166—168, 175.
Эрроу, Гурвиц, Удзава (K. Arrow, L. Hurwicz, H. Uzawa)
[1] Исследования по линейному и нелинейному программированию.— М.: ИЛ, 1962 (1968).
Юдович В. И.
[1] Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами.— ПММ, 1966, **30**, № 4, с. 688—698.
[2] О возникновении конвекции.— ПММ, 1966, **30**, № 6, с. 1000—1005.
[3] Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости.— ЖВМ и МФ, 1963, **3**, № 6, с. 1032—1066.
[4] Периодические движения вязкой несжимаемой жидкости.— ДАН СССР, 1960, **130**, с. 1214—1217.
[5] Двумерная нестационарная задача протекания идеальной несжимаемой жидкости через заданную область.— Матем. сб., 1964, **64**, № 4, с. 562—588.
Яненко Н. Н.
[1] Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.— Новосибирск: Наука, 1967.
[2] In: Proceedings of the Intern. Conference of Mathematicians, Nice, 1970, Gauthier-Villars, Paris, 1971.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ