

1 Эволюционная система уравнений Навье-Стокса

1.1 Понятие слабого решения

Пусть Ω -ограниченная область в пространстве R^n , где $n = 2, 3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad (2)$$

$$v|_{t=0} = v_0 \quad (3)$$

$$v|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0 \quad (4)$$

Здесь $v = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$ -скорость движения частицы жидкости, $p = p(t, x)$ -функция давления, $f = f(t, x)$ -функция плотности внешних сил, $\partial > 0$ -коэффициент вязкости. $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_3}$, $\operatorname{div} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_3}$, $\nabla p = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{p}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{p}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{p}_3$. Сформулируем определение сильного решения рассматриваемой задачи (1)-(4). Пусть f и v_0 -заданные функции, где $f \in (L_2(0, T; L_2(\Omega)))$ и $v_0 \in V$.

Определение 1.1. *Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций $v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $p \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, удовлетворяющие следующим условиям:*

Здесь f, v_0 - заданные функции, $f : Q_T \rightarrow R^n, f \in (L_2(Q_T))^n$, где $f \in (L_2(Q_T))^n := f := (f_1, f_2, \dots, f_n)$, и $v^0 : \Omega \rightarrow R^n, v_0 \in V$, где $v \in (L_2(Q_T))^n := v := (v_1, v_2, \dots, v_n)$, такие что:

1. обобщенные частные производные функции, содержащиеся в равенствах (1)-(2), принадлежат пространствам $(L_2(Q_T))^n$ и $L_2(Q_T)$, соответственно;

2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространствах $(L_2(Q_T))^n$ и $L_2(Q_T)$, соответственно;
3. след функции v при $t = 0$ должно равняться v_0 из (3) и v на границе должно равняться 0;
4. след функции v определен на границе области Γ и равен 0.

Введем понятие сильного решения для этого пусть v и p -сильное решение задач (1)-(4). Умножим равенство (1) на пробную функцию $\varphi \in V$ скалярно в $L_2(\Omega)$

Пусть (v, p) -сильное (обобщенное) решение задачи (1)-(2). Чтобы обеспечить понимание определения слабого решения, мы временно предположим, что $v = v(t, x), p = p(t, x)$ являются, фактически, гладкими решениями задачи. Сопоставим функции v отображение $v : [0, T] \rightarrow (H_0^1(\Omega))^n$, определенное по формуле

$$[v(t)](x) = v(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Другими словами, v рассматривается не как функции переменных t и x , а как функция переменной t , определенная на отрезке $[0, T]$ и принимающая значения в функциональном пространстве $(H_0^1(\Omega))^n$.

Аналогично определим $p : [0, T] \rightarrow (L_2(\Omega))^n$ по формуле

$$[p(t)](x) = p(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega$$

и функцию $f : [0, T] \rightarrow (L_2(\Omega))^n$ по формуле

$$[f(t)](x) = f(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Умножая равенство (1) при фиксированных значениях $t \in [0, T]$ на функцию $\varphi \in (D_s(\Omega))^n$ скалярно в $(L_2(\Omega))^n$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx - \\ & - \nu \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \end{aligned}$$

Выполним преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям,

$$-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi dx = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \varphi \Big|_{\Omega} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{\Omega} v dx.$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx = \sum_{i=1}^n p \varphi \Big|_{\Omega} - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} p_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v dx = v_i v \varphi \Big|_{\Omega} - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

приходим к равенству

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + v \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f(t) \varphi dx \quad (5)$$

Заметим, что то же равенство (5) верно для любой функции $\varphi \in V$, так как каждая часть этого равенства линейно и непрерывно зависит от φ в $(H_0^1(\Omega))^n$. Кроме того, равенство может выполняться и при более слабых требованиях на функцию $v(t, x)$. Покажем, что достаточно предполагать, что $v \in L_2(0, T; V)$ для того, чтобы каждый интеграл, входящий в равенство (5), имеет смысл.

В силу теоремы вложений Соболева вложение $(W_0^1(\Omega))^n \subset L_4(\Omega))^n$ непрерывно при $n \leq 4$. Поэтому, так как $V \subset (W_0^1(\Omega))^n$, то $v_i(t, x)v(t, x) \in L_2(\Omega))^n$ и $v_i(t, x)v(t, x)\partial_i \varphi \in L_1(\Omega)$ при каждом фиксированном значении t . Следовательно, интеграл $\int_{\Omega} v_i(t, x)v(t, x) \cdot \partial_i \varphi dx$ определен.

Кроме того, это слагаемое определяет линейный непрерывный функционал на V . Обозначим этот функционал через $K(v)$:

$$\langle (K, v), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

Отметим, что $\int_{\Omega} v \varphi dx \in L_2(0, T)$ и производная в выражении $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx$ понимается в смысле распределений на интервале $(0, T)$. По-

этому равенство (5) выполняется в смысле распределений. Все слагаемые равенства, исключая первое, принадлежат пространству $L_1(0, T)$, поэтому $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx \in L_1(0, T)$ и равенство (5) выполняется для почти всех значений $t \in (0, T)$.

Подводя итог рассуждениям, приходим к следующему определению слабого решения.

Определение 1.2. Пусть $F \in (L_2(Q_T))^n$ и $v_0 \in H$. Слабым (вариационным) решением задачи (1)-(4) называется функция $F \in (L_2(0, T; V))$ такая, что равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + v \int_{\Omega} v \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad (6)$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0, T)$ и

$$v(0) = v_0 \quad (7)$$

Выше показано, что равенство (6) корректно для $v \in L_2(0, T; V)$ и если (v, p) сильное решение задачи (1)-(4), то v является слабым решением. Поэтому задачу о поиске сильных решений заменим задачей об исследовании слабых решений. Заметим, однако, что для функции $v \in L_2(0, T; V)$ условие (7) не имеет смысла, так как не определено значение функции $v(t)$ в точке $t \in (0, T)$. Покажем далее, что функция $v(t)$, удовлетворяющая равенству (6), является непрерывной на $[0, T]$ со значениями в V^* и слабо непрерывной со значениями в H . Поэтому равенство (7) имеет смысл и определение слабого решения корректно.

Преобразуем равенство (6). Скалярное произведение $(v(t), \varphi)_{(L_2(\Omega))^n}$ определяет линейный непрерывный функционал на H , а следовательно, элемент из H^* . Учитывая отождествление $H \equiv H^*$ и цепочку вложений $V \subset H \subset H^* \subset V^*$, элемент $v(t)$ можно рассматривать как функционал на V , действие которого на функцию $\varphi \in V$ определяется равенством $\langle v(t), \varphi \rangle = (v(t), u)_{(L_2(\Omega))^n}$. Тогда можно считать, что функция $v(t)$ на $[0, T]$

принимает значения в V^* и

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx = \frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle$$

С учетом введенных обозначений равенство (6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle - \langle v \int_{\Omega} (v(t) \varphi) dx \rangle - \langle (K, v(t)), \varphi \rangle = \langle \int_{\Omega} (f(t) \varphi) dx \rangle$$

где $\Delta : V \rightarrow V^*$, или в виде

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle = \langle \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), \varphi \rangle \quad (8)$$

Исследуем свойства выражений, входящих в правую часть равенства.

Лемма 1.1.

1. В случае произвольного n отображение $\Delta : L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*)$ линейно и непрерывно, причем

$$\| \Delta u \|_{L_2(0, T; V^*)} = \| \Delta u \|_{L_2(0, T; V)}, \quad \forall u \in L_2(0, T; V^*) \quad (9)$$

2. Пусть $n \leq 4$. Тогда отображение $K : L_2(0, T; V) \rightarrow L_1(0, T; V^*)$ непрерывно и справедлива оценка

$$\| \Delta u \|_{L_2(0, T; V^*)} = \| \Delta u \|_{L_2(0, T; V)} \quad \forall u \in L_2(0, T; V^*) \quad (10)$$

для некоторой константы C_0 .

Доказательство.

1. В главе 2 показано, что отображение $\Delta : V \rightarrow V^*$ линейно, непрерывно и определяет изометрию пространств. Следовательно, $\| \Delta u \|_{V^*} = \| u \|_V$ для всех $u \in V$. Отсюда для $u \in L_2(0, T; V)$ имеем $\| \Delta u \|_{V^*} = \| u(t) \|_V$ для почти всех $t \in [0, T]$. Так как $\| u(t) \|_{V^*} \in$

$L_2(0, T)$, то $\| \Delta u(t) \|_V^* \in L_2(0, T)$. Следовательно, $\Delta u \in L_2(0, T; V^*)$ и справедливо равенство (9). Таким образом, линейный оператор Δ определяет изометрию пространств $L_2(0, T; V)$ и $L_2(0, T; V^*)$.

2. По определению оператора K

$$\langle K(t), u \rangle = \int_{\Omega} u_i(x) u_j(x) \cdot \partial_i u_j(x) dx$$

для $u, v \in V$. Повторяя рассуждения доказательства леммы 3.1 или используя оценки (3.10), получим

$$\| K(v(t)) \|_{V^*} \leq c_0 \| v(t) \|_V^2, \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T],$$

с некоторой константой c_0 . Отсюда для $v \in L_2(0, T; V)$ имеем $K(v) \in L_1(0, T; V^*)$ и

$$\begin{aligned} \| K(v) \|_{L_1(0, T; V^*)} &\leq \int_0^T \| K(v(t)) \|_{V^*} dt \leq c_0 \int_0^T \| v(t) \|_V^2 dt = \\ &= c_0 \| v(t) \|_{L_2(0, T; V)}^2 \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения доказательства леммы 3.1, получим, что для $v, u \in L_2(0, T; V)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_0^T \| K(v) - K(u) \|_{V^*} dt &\leq \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_i v_j - u_i u_j)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_i(v_j - u_j) + (v_i - u_i)u_j) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sqrt{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \left(\int_{\Omega} v_i^2 (v_j - u_j)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} (v_i - u_i)^2 u_j^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \\ &\leq \sqrt{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^T (\| v_i(t) \|_{L_4(\Omega)} \| v_j(t) - u_j(t) \|_{L_4(\Omega)} + \\ &\quad + \| v_i(t) - u_i(t) \|_{L_4(\Omega)} \| u_j(t) \|_{L_4(\Omega)}) dt \leq \end{aligned}$$

$$\leq C_2(\|v\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} + \|u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}) \|v - u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}$$

Кроме того, вложение $V \subset (L_4(\Omega))^n$, а следовательно, и вложение $L_2(0, T; V) \subset L_2(0, T; (L_4(\Omega))^n)$ непрерывны. Поэтому достаточно доказать непрерывность отображений

$$\phi_{ij} : L_2(0, T; (L_4(\Omega))^n) \rightarrow L_1(0, T; L_2(\Omega)), \varphi_{ij}(v) = v_i v_j$$

для $i, j = 1, 2, \dots, n$. Для любых $u, v \in L_2(0, T; (L_4(\Omega))^n)$ с помощью неравенства Шварца получаем оценку

$$\begin{aligned} \|\phi_{ij}(u) - \phi_{ij}(v)\|_{L_1(0,T;L_2(\Omega))} &= \int_0^T \left(\int_{\Omega} (v_i v_j - u_i u_j)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \\ &\leq \int_0^T \left(\int_{\Omega} v_i^2 (v_j - u_j)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} (v_i - u_i)^2 u_j^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \\ &\int_0^T (\|v_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \|v_j(t) - u_j(t)\|_{L_4(\Omega)} + \\ &+ \|v_i(t) - u_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \|u_j(t)\|_{L_4(\Omega)}) dt \leq \\ &\leq \|v_i\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \|v_j - u_j\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} + \\ &+ \|v_i - u_i\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \|u_j\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \end{aligned}$$

Отсюда, если $\|v - u\|_{L_2(0,T;(L_4(\Omega))^n)} \rightarrow 0$, то $\|\phi_{ij}(u) - \phi_{ij}(v)\|_{L_1(0,T;L_2(\Omega))} \rightarrow 0$. Поэтому каждое из отображений ϕ_{ij} , а следовательно, и отображение K непрерывны.

□

По утверждению леммы $\Delta v \in L_2(0, T; V^*)$, $K(v) \in L_1(0, T; VV^*)$, поэтому $\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t) \in L_1(0, T; VV^*)$. Тогда из равенства (8) и теоремы 4.6 следует

1. что функция $v(t)$ имеет суммируемую производную $v'(t)$;
2. в силу равенства (4.3)

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), u \rangle = \langle v'(t), u \rangle$$

3. равенство (5.8) можно записать в виде

$$v'(t) = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t)$$

Подводя итог рассуждений, отметим, что так как $v'(t) \in L_1(0, T; V^*)$, то $v \in W_{2,1}X_0 = V$, $X_1 = V^*$. Поэтому в силу леммы 4.5 функция $v(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$ со значениями в V^* . Кроме того, по лемме 4.6 эта функция слабо непрерывна со значениями в H . Поэтому начальное условие (7) имеет смысл.

Переформулируем понятие слабого решения

Определение 1.3. Пусть $n \leq 4$, $f \in L_2(0, T; (L_2(\Omega))^n)$ и $v^0 \in H$. Слабым (вариационным) решением задачи (1)-(4) называется функция $v \in L_2(0, T; V)$ такая, что $v^0 \in L_1(0, T; V^*)$, равенство

$$v'(t) - \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \quad (11)$$

выполняется для почти всех значений $t \in (0, T)$ и

$$v(0) = v^0 \quad (12)$$

1.2 О единственности слабого и полного слабого решений в случае $n = 2$

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о единственности слабого и полного слабого решений краевой задачи (1)-(4) для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса. Будем показано, что в случае $\Omega \subset R^2$ слабое и полное слабое решение краевой задачи единственно. Однако для размерности $n > 2$ аналогичное утверждение неверно. Примером, показывающим, что слабое решение задачи неединственно, служит результат о бифуркации решений, содержащийся, например, в [22, гл.II, §4, п.4.4].

Сформулируем и докажем утверждение о единственности слабого решения в случае $n = 2$, следуя [22, гл.III, §3, теорема 3.2].

Теорема 1.1. Пусть Ω ограниченная область в R^2 с локально липшицевой границей. Тогда слабое решение v и полное слабое решение (v, p) (при

условии $(p)\Omega = 0$) задачи (1)-(4) единственно. Кроме того, функция v непрерывна на отрезке $[0, T]$ со значениями в H и

$$v(t) \rightarrow v_0 \text{ в } H \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Доказательство. Достаточно установить единственность слабого решения v , так как компонента p полного слабого решения определяется компонентой v из равенства (5.34) единственным образом.

Пусть v – решение задачи (5.31), (5.32). Покажем, что $v \in W$, т.е. $v' \in L_2(0, T; V^*)$. Воспользуемся оценкой

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \leq c_0 \|v\|_{(L_4(\Omega))^n}^2,$$

полученной при выводе неравенства (3.10), в случае $n = 2$ и $\varepsilon = 0$. Применяя неравенство О.А.Ладыженской (1.7), получим для любого $t \in [0, T]$

$$\sup_{v \in V} \langle K(v), \frac{u}{\|v\|} \rangle \leq c_0 2^{1/2} \left(\int_{\Omega} v(t)^2 dt \right)^{1/2} \cdot \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt$$

Отсюда, возводя обе части неравенства в квадрат и интегрируя по t на отрезке $[0, T]$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \int_0^T \sup(\langle K(v), \frac{u}{\|v\|} \rangle)^2 dt &\leq 2c_0 \int_0^T \left(\int_{\Omega} v(t)^2 \right) \cdot \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt \leq \\ &\leq 2c_0 \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} v(t)^2 dt \cdot \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left(\int_0^T \sup(\langle K(v), \frac{u}{\|v\|} \rangle)^2 dt \right)^{1/2} \leq c_0 2^{1/2} \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} v(t)^2 dt \cdot \int_0^T \int_{\Omega} v(t)^2 dt$$

Из представления $v' = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t)$ очевидно, что $v' \in L_2(0, T; V^*)$ и $v \in W$. Воспользовавшись вложением $W \subset C([0, T], H)$, получаем $v \in C([0, T], H)$ и заключение (13) теоремы.

Покажем теперь единственность слабого решения. Предположим, что u и v – слабые решения задачи (5.31), (5.32). Подставим эти решения в уравнение (5.31) и рассмотрим разность полученных равенств. Для разности $w = v - u$ получим равенство

$$w' - \Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0$$

Применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции $w(t)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(t, x) w(t, x) dt + v(w(t, x), w(t, x)) = \\ & = \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} \cdot v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \cdot \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx \end{aligned} \quad (14)$$

Оценим правую часть полученного равенства.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx = \\ & = \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx = \\ & = \int_{\Omega} \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial t} \cdot v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} w(t, x) \cdot \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial x_i} dx \end{aligned}$$

Используем интегрирование по частям для вычисления первого интеграла

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial t} v(t, x) \cdot w(t, x) = - \int_{\Omega} \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial t} \cdot \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx$$

так как $\partial_i w_i(t, x) = \operatorname{div} w(t, x) = 0$. Используем интегрирование по частям для вычисления второго из интегралов

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} w(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx = \sum_{i=0}^{n=2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial |w|^2(t, x)}{\partial x_i} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=2} \frac{\partial^2 u_i(t, x)}{\partial t \partial x_i} \cdot |w|^2(t, x) dx = 0$$

так как $\sum_{i=1}^2 \partial_i u_i(t, x) = \operatorname{div} u(t, x) = 0$ Отсюда и из равенства (14) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(t, x) w(t, x) dx + v(w(t, x) w(t, x)) = \\ = - \int_{\Omega} \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial t} \cdot \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_H^2 + v \|w(t)\|_H^2 = \left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| \quad (15)$$

Оценим правую часть неравенства, используя неравенства Шварца,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_j(t, x) w_j(t, x) dx \right| \leq \\ &\left(\int_{\Omega} |w_i(t, x)|^2 |w_j(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |\partial_i v_j(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\left(\int_{\Omega} |w_i(t, x)|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |w_j(t, x)|^4 dx \right)^{1/4} \cdot \left(\int_{\Omega} |\partial_i v_j(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| \leq \\ \leq \|w_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \cdot \|w_j(t)\|_{L_4(\Omega)} \cdot \|\partial_i v_j(t)\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

Учитывая, что запись, содержащая повторяющиеся индексы, предполагает суммирование по этим индексам, получаем

$$\left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| \leq \|w(t)\|_{(L_4(\Omega))^n}^2 \cdot \|v(t)\|_V$$

Применим неравенство О.А.Ладыженской и далее неравенство Коши $a \cdot b = \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} c\varepsilon = \frac{v}{2^{1/2}}$, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| &\leq 2^{1/2} \| w(t) \|_{(L_2(\Omega))^n} \cdot \| w(t) \|_V \cdot \| v(t) \|_V \leq \\ &\leq v \| w(t) \|_V^2 + \frac{1}{2^{3/2}v} \| v(t) \|_{(L_2(\Omega))^n}^2 \cdot \| w(t) \|_V \end{aligned}$$

Подставляя полученное соотношение в неравенство (15), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| w(t) \|_H^2 \leq \frac{1}{2^{3/2}v} \| w(t) \|_H^2 \cdot \| v(t) \|_V$$

Тогда из неравенство Гронуолла-Беллмана [1, теорема 26 глава IV, с.188] следует

$$\| w(t) \|_H^2 \leq \| w(0) \|_H^2 \exp \left(\int_0^t \frac{1}{2^{1/2}v} \cdot \| v(s) \|_V ds \right)$$

Поскольку $w(0) = v(0) - u(0) = 0$, то из полученного выше неравенства приходим к выводу, что $w(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Следовательно, $v = u$ и слабое и полное слабое решение задачи (1)-(4) единственно. \square