МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Математический факультет

Кафедра алгебры и математических методов гидродинамики

# Изучение единственности слабых решений уравнений Навье-Стокса

Бакалаврская работа

01.03.01 Математика

Математическое моделирование

Зав. кафедрой _______ д.ф.-м.н., проф. Звягин В.Г. __.__.20__г.
подпись

Обучающийся _______ Мукасеева Д.А.
подпись

Руководитель _______ к.ф.-м.н., доцент Звягин А.В.
подпись

Воронеж 2020

# Содержание

# Введение

В данной бакалаврской работе изучается система уравнений Навье-Стокса. Данная система уравнений датируется 1822г., когда Навье [1] впервые записал уравнение в частных производных для потока вязкой жидкости. Стокс [2] внес свой вклад в 1842 и 1843гг. Эйлер записал уравнения в частных производных для жидкости с нулевой вязкостью — совершено невязкой в 1757г. Это уравнение тоже полезно, но большинство реальных жидкостей, включая воду и воздух, является вязкими, поэтому Навье и Стокс моделировали уравнение Эйлера таким образом, чтобы учесть это свойство. Они вывели примерно одинаковые уравннения независимо друг от друга, поэтому оно называется в честь них обоих. Навье сделал в процессе вывода несколько математических ошибок, но получил верный ответ, а у Стокса с математикой все было в порядке, и именно поэтому мы знаем, что ответ Навье верен, несмотря на ошибку.

Несмотря на довольно долгие математические изучения данной системы уравнений (начиная с 1822г.), вопрос существования и гладкости решений для системы Навье-Стокса остался открытым до сих пор. В анализе решений данной системы заключается суть одной из семи "проблем тысячилетия за решение которых Математический институт Клэя назначил огромную премию. Одним из главных и глобальных толчков при изучении данной системы было доказательство Жаном Лере в 1934г существования и в ряде случаев единственности слабых решений для данной системы. Данная бакалаврская работа посвящена как раз рассмотрению и изучению понятия слабого решения для системы уравнений Навье-Стокса, а так же изучению единственности слабых решений в двумерном случае.

[1] Клод-Луи Навье — французский инженер и физик
[2] Джордж Стокс — ирландский математик и физик

# 1 Понятие слабого решения

Пусть $\Omega$ — ограниченная область в пространстве $R^n$, где $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0; \tag{2}$$

$$v|_{t=0} = v_0; \tag{3}$$

$$v|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Здесь $v = (v_1(t,x), \ldots, v_n(t,x))$ — вектор-функция скорости движения частицы жидкости, $p = p(t,x)$ — функция давления, $f = f(t,x)$ — вектор-функция плотности внешних сил, $\nu > 0$ — коэффициент вязкости. $\Delta v = (\Delta v_1, \ldots, \Delta v_n)$, $\Delta v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_n^2}$; $\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$; $\nabla p = (\frac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x_n})$.

Сформулируем определение сильного решения рассматриваемой задачи (1)-(4). Для этого введем необходимые функциональные пространства:

$L_p(\Omega)$ — множество измеримых функций, суммируемых с $p$-ой степенью, где $1 \leq p < \infty$, и нормой $\|v\|_{L_p(\Omega)} = (\int\limits_{\Omega} |v(x)|^p dx)^{1/p}$.

Пространство $L_\infty(\Omega)$ состоит из измеримых существенно ограниченных функций $v : \Omega \to R^n$. Функция $v : \Omega \to R^n$ называется существенной ограниченной, если существует число $C_1 < \infty$, что $|v(x)| \leq C_1$ при почти всех $x \in \Omega$. Норма в $L_\infty(\Omega)$ задается $\|v\|_{L_\infty(\Omega)} = ess \sup\limits_{x\in\Omega} |v(x)|$.

$W_p^m(\Omega)$ — где $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, пространство Соболева, состоящее из функции, которые со своими обобщенными частными производными до порядка $m$ включительно принадлежат пространству $L_p(\Omega)$.

Норма в $W_p^m(\Omega)$ задается $\|v\|_{W_p^m(\Omega)} = \left( \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha v(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

$C_0^\infty(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\Omega$

со значениями в $R^n$ и с компактным носителем, содержащимся в $\Omega$.

$\mathcal{V}$ — множество функций $v \in C_0^\infty(\Omega)$, таких что $\operatorname{div} v = 0$;

$H$ — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)$;

$V$ — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_1^1(\Omega)$;

$L_p(a, b; X)$ — где $1 \le p < \infty$ пространство суммируемых с $p$-ой степенью функций на $[a, b]$ со значениями в банаховом пространстве $X$. Норма пространства $L_p(a, b; X)$ задается $\|v\|_{L_p(a,b;X)} = (\int\limits_0^T \|v(s)\|_X^p ds)^{1/p}$.

Через $L_\infty(a, b; X)$ будем обозначать множество всех измеримых существенно ограниченных функций $v : [a, b] \to X$. Множество $L_\infty(a, b; X)$ является банаховым пространством относительно нормы $\|v\|_{L_\infty(a,b;X)} = ess\ \sup\limits_{x\in\Omega} \|v(s)\|_X$.

Будем обозначать $E^*$ сопряженное пространство к пространству $E$.

$< f, \varphi >$ — обозначим действие функционала $f$ из $E^*$ на элемент $\varphi$ из $E$.

$C_i$ — будем обозначать положительные константы.

Пусть $f$ и $v_0$ — заданные функции, где $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $v_0 \in V$.

**Определение 1.1.** *Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций* $v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ *и* $p \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, *удовлетворяющих следующим условиям:*

1. обобщенные частные производные функций, содержащихся в равенствах (1)-(2), принадлежат пространству $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;

2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве $L_2(0, T; L_2(\Omega))$;

3. функция $v$ удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Введем понятие слабого решения. Для этого пусть $v$ и $p$ — сильное решение задач (1)-(4).

Чтобы обеспечить понимание определения слабого решения, мы временно предположим, что $v = v(t, x)$ и $p = p(t, x)$ являются, фактически, гладкими решениями задачи. Сопоставим функции $v$ отображение

$v : [0,T] \to W_2^1(\Omega)$, определенное по формуле

$$[v(t)](x) = v(t,x), t \in [0,T], x \in \Omega.$$

Другими словами, $v$ рассматривается не как функции переменных $t$ и $x$, а как функция переменной $t$, определенная на отрезке $[0,T]$ и принимающая значения в функциональном пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Аналогично определим $p : [0,T] \to L_2(\Omega)$ по формуле

$$[p(t)](x) = p(t,x), t \in [0,T], x \in \Omega$$

и функцию $f : [0,T] \to L_2(\Omega)$ по формуле

$$[f(t)](x) = f(t,x), t \in [0,T], x \in \Omega.$$

Умножая равенство (1) при фиксированных значениях $t \in [0,T]$ на функцию $\varphi(x) \in V$ скалярно в $L_2(\Omega)$, получим

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t}\ \varphi dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\ \varphi dx -$$

$$-\nu \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i}\ \varphi_i dx = \int\limits_{\Omega} f \varphi dx.$$

Выполним преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям [3]

$$-\nu \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx = \nu \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx.$$

[3] Теорема Грина (теорема об интегрировании по частям функций нескольких переменных)
Пусть $\Omega$ — область с липшецевой границей и пусть $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ и $g(x) = g(x_1, ..., x_n) \in W_2^1(\Omega)$.
Тогда выполнено соотношение:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = \int\limits_{\partial\Omega} f g v_i\ ds - \int\limits_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx,$$

где $v_i$ — $i$—ая координата единичного вектора внешней нормали.

Здесь символ «:» обозначает покомпонентное матричное произведение, т. е. для $C = (c_{ij}), D = (d_{ij}), i, j = 1, \ldots, m$, имеем $C : D = \sum\limits_{i,j=1}^{m} c_{ij} d_{ij}$.

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx = -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} p \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx = \int\limits_{\Omega} p \; div \; \varphi \; dx = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx = -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i \varphi) dx =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \varphi dx - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} v \; \varphi \; div \; v \; dx - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Таким образом, приходим к равенству

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} v \varphi dx - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int\limits_{\Omega} f \varphi dx. \tag{5}$$

Заметим, что равенство (5) может выполняться и при более слабых требованиях на функцию $v(t, x)$. Покажем, что достаточно предполагать, что $v \in L_2(0, T; V)$ для того, чтобы каждый интеграл, входящий в равенство (5), имел смысл.

В силу теоремы вложений Соболева[4] вложение $W_2^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ непрерывно при $n \leqslant 4$. Поэтому, так как $V \subset W_2^1(\Omega)$, то $v_i(t,x)v(t,x) \in L_2(\Omega)$ и $v_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in L_1(\Omega)$ при каждом фиксированном значении $t$. Следовательно, интеграл $\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx$ определен.

Кроме того, это слагаемое определяет линейный непрерывный функционал на $V$. Обозначим этот функционал через $K(v)$:

$$\langle K(v), \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx.$$

Отметим, что $\int\limits_{\Omega} v\varphi dx \in L_2(0,T)$ и производная в выражении $\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx$ понимается в смысле распределений на интервале $(0,T)$. Поэтому равенство (5) выполняется в смысле распределений. Все слагаемые равенства, исключая первое, принадлежат пространству $L_1(0,T)$, поэтому $\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx \in L_1(0,T)$ и равенство (5) выполняется для почти всех значений $t \in (0,T)$.

Подводя итог рассуждениям, приходим к следующему определению слабого решения.

**Определение 1.2.** *Пусть $f \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ и $v_0 \in H$. Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция $v \in L_2(0,T;V)$, удовлетворяющая для всех $\varphi \in V$ и для почти всех значений $t \in (0,T)$ равенству*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} v_i v \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx + \nu\int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla\varphi dx = \int\limits_{\Omega} f\varphi dx \tag{6}$$

*и условию*

$$v(0) = v_0. \tag{7}$$

Выше показано, что равенство (6) корректно для $v \in L_2(0,T;V)$ и если $(v,p)$ сильное решение задачи (1)-(4), то $v$ является слабым решением. Поэтому задачу о поиске сильных решений заменим задачей об исследовании слабых решений.

[4] Пусть $p_1 \geq p$ и æ$(W_{p_1}^{m_1}(\Omega)) >$ æ$(W_p^m(\Omega))$, то пространство $W_p^m(\Omega)$ компактно вложено в пространоство $W_{p_1}^{m_1}(\Omega)$, где æ$(W_p^m(\Omega)) = \frac{n}{p} - m$.

Заметим, однако, что для функции $v \in L_2(0,T;V)$ условие (7) не имеет смысла, так как не определено значение функции $v(t)$ в каждой точке $t \in (0,T)$. Покажем, что функция $v(t)$, удовлетворяющая равенству (6), является непрерывной на $[0,T]$ со значениями в $V^*$ и слабо непрерывной со значениями в $H$. Поэтому равенство (7) имеет смысл и определение слабого решения корректно.

Преобразуем равенство (6). Скалярное произведение $(v(t),\varphi)_{L_2(\Omega)}$ определяет линейный непрерывный функционал на $H$, а следовательно, элемент из $H^*$. Учитывая отождествление $H \equiv H^*$ и цепочку вложений $V \subset H \subset H^* \subset V^*$, элемент $v(t)$ можно рассматривать как функционал на $V$, действие которого на функцию $\varphi \in V$ определяется равенством $\langle v(t),\varphi\rangle = (v(t),\varphi)_{L_2(\Omega)}$.Тогда можно считать, что функция $v(t)$ на $[0,T]$ принимает значения в $V^*$ и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi dx = \frac{d}{dt}\langle v(t),\varphi\rangle.$$

С учетом введенных обозначений равенство (6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle v(t),\varphi\rangle - \nu\langle\Delta v(t),\varphi\rangle - \langle K(v(t)),\varphi\rangle = \langle f(t),\varphi\rangle,$$

где $\Delta : V \to V^*$, обозначает оператор Лапласа, действующий по правилу $\langle\Delta v(t),\varphi\rangle = -\int\limits_{\Omega}\nabla v : \nabla\varphi dx$. Или можно (6) переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}\langle v(t),\varphi\rangle = \langle\nu\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t),\varphi\rangle. \tag{8}$$

Исследуем свойства операторов, входящих в правую часть равенства.

**Лемма 1.1.**

1. *Оператор* $\Delta : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ *линейный и непрерывный, причем*

$$\|\Delta v\|_{L_2(0,T;V^*)} = \|v\|_{L_2(0,T;V)},\ \forall v \in L_2(0,T;V^*). \tag{9}$$

*2. Оператор $K : L_2(0,T;V) \to L_1(0,T;V^*)$ непрерывен и справедлива оценка*

$$\|K(v)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_2\|v\|^2_{L_2(0,T;V)},\ \forall v \in L_2(0,T;V^*), \tag{10}$$

*для некоторой константы $C_2$.*

*Доказательство.* Покажем, что оператор $\Delta : V \to V^*$ линейный. Для этого возьмем $v$ и $u$, принадлежащая пространству $V$и применим к ним оператор Лапласа

$$\Delta(\alpha v + \beta u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\alpha v_i + \beta u_i) = \alpha \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} + \beta \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = \alpha\Delta v + \beta\Delta u.$$

Заметим, что оператор $\Delta : V \to V^*$ определяет изометрию пространств. Действительно:

$$\|\Delta v\|_{V^*} = \underset{\varphi\in V}{sup}\frac{|\langle\Delta v, \varphi\rangle|}{\|\varphi\|_V} = \underset{\varphi\in V}{sup}\frac{\left|\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx\right|}{\|\varphi\|_V} \leq \underset{\varphi\in V}{sup}\frac{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}}{\|\varphi\|_V} \leq$$

$$\leq \underset{\varphi\in V}{sup}\frac{\|v\|_V\|\varphi\|_V}{\|\varphi\|_V} = \|v\|_V.$$

То есть $\|\Delta v\|_{V^*} \leq \|v\|_V$. С другой стороны, положим $\varphi = v :$

$$|\langle\Delta v, v\rangle| = |\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v dx| = \|v\|_V^2.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского

$$\|v\|_V^2 = |\langle\Delta v, v\rangle| \leq \|\Delta v\|_{V^*}\|v\|_V.$$

Сократив на $\|v\|_V$, получим $\|\Delta v\|_{V^*} \geq \|v\|_V$. Следовательно получаем $\|\Delta v\|_{V^*} = \|v\|_V$. Заметим, что линейный ограниченный оператор является непрерывным.

Отсюда для $v \in L_2(0,T;V)$ имеем $\|\Delta v\|_{V^*} = \|v(t)\|_V$ для почти всех $t \in [0,T]$. Так как $\|v(t)\|_V \in L_2(0,T)$, то $\|\Delta v(t)\|_{V^*} \in L_2(0,T)$. Следовательно, $\Delta v \in L_2(0,T;V^*)$ и справедливо равенство (9). Таким образом, линейный оператор $\Delta$ определяет изометрию пространств $L_2(0,T;V)$ и $L_2(0,T;V^*)$.

2) По определению оператора $K$ для любых $v, \varphi \in V$ действует по правилу

$$\langle K(v), \varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx.$$

Значит для любого $v \in V$ получим

$$\Big|\langle K(v), \varphi\rangle\Big| \leq \Big|\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx\Big| \leq$$

$$\leq (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big|v_i v_j\Big|^2 dx)^{1/2} (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\Big|^2 dx)^{1/2} \leq$$

$$\leq (\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big|v_i\Big|^4 dx)^{1/4} (\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big|v_j\Big|^4 dx)^{1/4} (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \Big|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\Big|^2 dx)^{1/2} \leq \|v\|^2_{L_4(\Omega)} \|\varphi\|_V.$$

По теореме вложения Соболева вложение $V \in L_4(\Omega)^n$ непрерывно для $n \leq 4$, поэтому, $\|v\|_{L_4(\Omega)^n} \leq C_3 \|v\|_V$ и, следовательно, $\|K(v)\|_{V^*} \leq C_3^2 \|v\|_V^2$. Отсюда для $v \in L_2(0,T;V)$ имеем $K(v) \in L_1(0,T;V^*)$ и

$$\|K(v)_{L_1(0,T;V^*)}\| \leq \int\limits_0^T \|K(v(t))\|_{V^*} dt \leq C_3^2 \int\limits_0^T \|v(t)\|_V^2 dt = C_3^2 \|v(t)\|^2_{L_2(0,T;V)}.$$

Докажем непрерывность оператора $K$. Для любых функций $v, u \in L_2(0,T;V)$ справедлива оценка

$$\int\limits_0^T \|K(v) - K(u)\|_{V^*} dt \leq \int\limits_0^T (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (v_i v_j - u_i u_j)^2 dx)^{1/2} dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^T (\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (v_i(v_j - u_j) + (v_i - u_i) u_j)^2 dx)^{1/2} dt \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^T \Big(\Big(\int_\Omega v_i^2(v_j-u_j)^2dx\Big)^{1/2}+\Big(\int_\Omega (v_i-u_i)^2u_jdx\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^T (\|v_i\|_{L_4(\Omega)}\|v_j-u_j\|_{L_4(\Omega)}+\|v_i-u_i\|_{L_4(\Omega)}\|u_j\|_{L_4(\Omega)})dt \leq$$

$$\leq C_2(\|v\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}+\|u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))})\|v-u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}.$$

Отсюда, если $\|v-u\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}\to 0$, то $\|K(v)-K(u)\|_{L_1(0,T;V)}\to 0$. Поэтому отображние $K$ непрерывно.

□

По утверждению леммы $\nu\Delta v\in L_2(0,T;V^*), K(v)\in L_1(0,T;V^*)$, поэтому $\nu\Delta v(t)+K(v(t))+f(t)\in L_1(0,T;V^*)$. Тогда из равенства (8) и теоремы [5] следует:

1. что функция $v(t)$ имеет суммируемую производную $v'(t)$;
2. в силу равенства $\frac{d}{dt}\langle\phi,u(t)\rangle=\langle\phi,g(t)\rangle$;
$$\frac{d}{dt}\langle v(t),\varphi\rangle=\langle v'(t),\varphi\rangle;$$
3. равенство $\frac{d}{dt}\langle v(t),\varphi\rangle=\langle\Delta v(t)+K(v(t))+f(t),\varphi\rangle$ можно записать в виде
$$v'(t)=\nu\Delta v(t)+K(v(t))+f(t).$$

[5] Теорема Пусть $X$ — банахово пространство с сопряженным $X^*$ и функции $u,g$ принадлежат пространству $L_1(a,b,X)$. Тогда следующие три условия эквивалентны:
(a) функция $u(t)$ почти всюду равна первообразной от $g(t)$ и для п.в. $t\in[a,b]$

$$u(t)=\xi+\int_a^b g(s)ds, \xi\in X;$$

(b) для каждой пробной функции $\eta\in\mathcal{D}(a,b)$

$$\int_a^b u(t)\eta'(t)dt=-\int_a^b g(t)\eta(t)dt;$$

(c) для кажого $\phi\in X^*$
$$\frac{d}{dt}\langle\phi,u(t)\rangle=\langle\phi,g(t)\rangle$$
в смысле скалярных распределений на $(a,b)$. Если условия (a)-(c) выполнены, то $u$, в частности, почти всюду равна некоторой непрерывной функции.

Подводя итог рассуждений, отметим, что так как $v'(t) \in L_1(0,T;V^*)$, в силу леммы 1.2

**Лемма 1.2.** *Для* $p_0 \geq 1$, $p_1 \geq 1$ *имеет место вложение* $W_{p_0,p_1} = \{v \in L_{p_0}(a,b,X_0),\ v_1 \in L_{p_0}(a,b,X_0)\} \subset C([a,b],X_1)$ *и это вложение непрерывно.*

поэтому функция $v(t)$ непрерывна на отрезке $[0,T]$ со значениями в $V^*$. Кроме того, в виду леммы 1.3,

**Лемма 1.3.** *Пусть* $X$ *и* $Y$ *— банаховы пространства, такие, что* $X$ *— рефлективно и вложение* $X \subset Y$ *непрерывно. Если функция* $v \in L_\infty(a,b;X)$ *слабо непрерывна как функция со значениями в* $Y$*,то и слабо непрерывна и как функция со значениями в* $X$.

если функция $v \in L_\infty(0,T;H)$, то эта функция слабо непрерывна со значениями в $H$. Поэтому начальное условие (7) имеет смысл.

Переформулируем понятие слабого решения

**Определение 1.3.** *Пусть* $n \leq 4$, $f \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ *и* $v \in H$. *Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция* $v \in L_2(0,T;V) \cap L_\infty(0,T;H)$ *и условию*$v' \in L_1(0,T;V^*)$, *удовлетворяющая при почти всех значений* $t \in (0,T)$ *равенству*

$$v'(t) - \nu\Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \tag{11}$$

*и начальному условию*

$$v(0) = v_0. \tag{12}$$

Для системы уравнений Навье-Стокса (1)-(4) Ж. Лере в 1934 был получен следующий результат:

**Теорема 1.1.** *Пусть* $n = 2,3$. *Для каждой функции* $f \in L_2(0,T;V^*)$ *и* $v_0 \in H$ *начально-краевая задача (1)-(4) имеет хотя бы одно слабое решение* $v$.

# 2 Единственность слабого решения

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о единственности слабого решения начально-краевой задачи (1)-(4) для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса. Покажем, что в случае $\Omega \subset R^2$ слабое решение начально-краевой задачи единственно. Однако для размерности $n > 2$ аналогичное утверждение неверно. Примером, показывающим, что слабое решение задачи не единственно, служит результат о бифуркации решений, содержащийся, например, в [1, гл.II, §4,п.4.4].

Сформулируем и докажем утверждение о единственности слабого решения в случае $n = 2$.

**Теорема 2.1.** *Пусть $\Omega$ ограниченная область в $R^2$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда слабое решение $v$ решение задачи (1)-(4) единственно.*

*Доказательство.* Покажем единственность слабого решения. Предположим, что $u$ и $v$ – слабые решения начально-краевой задачи (1)-(4). Значит, для этих функций выполнено операторное равентво (11). Рассмотрим разность полученных равенств. Для разности $w = v - u$ получим равенство

$$w' - \nu\Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0$$

Применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции $w(t)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w(t,x)w(t,x)dt + \nu\int\limits_{\Omega} \nabla w(t,x) : \nabla w(t,x)dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega} v_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega} u_i(t,x)u(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx. \tag{13}$$

Оценим правую часть полученного равенства.

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega} v_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega} u_i(t,x)u(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\Bigg[\int\limits_{\Omega} v_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} u_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega} u_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx - \int\limits_{\Omega} u_i(t,x)u(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx\Bigg] =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\Bigg[\int\limits_{\Omega} v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}(v_i(t,x) - u_i(t,x))dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega} u_i(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}(v(t,x) - u(t,x))dx\Bigg] = \sum_{i=1}^{2}\Bigg[\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i} +$$

$$+\int\limits_{\Omega} w(t,x)u_i(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}\Bigg]dx.$$

Используем интегрирование по частям для вычисления первого интеграла

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)v(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx = -\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx,$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{\partial w_i(t,x)}{\partial x_i} = \operatorname{div}\, w(t,x) = 0$. Используем интегрирование по частям для вычисления второго из интегралов

$$\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_{\Omega} u_i(t,x)w(t,x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_i}dx = \sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_{\Omega} u_i(t,x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \mid w(t,x)\mid^2}{\partial x_i}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n=2}\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x_i}\cdot \mid w(t,x)\mid^2 dx = 0,$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x_i} = \operatorname{div} u(t,x) = 0$. Отсюда и из равенства (13) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} w(t,x)w(t,x)dx + \nu\int\limits_{\Omega}\nabla w(t,x) : \nabla w(t,x)dx =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_{\Omega} w_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2+\nu\|w(t)\|_V^2 \le \Big|\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_\Omega w_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx\Big|. \qquad (14)$$

Оценим правую часть неравенства, используя неравенства Шварца:

$$\Big|\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_\Omega w_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx\Big| = \Big|\sum_{i,j=1}^{n=2}\int\limits_\Omega w_i(t,x)\frac{\partial v_j(t,x)}{\partial x_i}w_j(t,x)dx\Big| \le$$

$$\le \left(\sum_{i,j=1}^{n=2}\int\limits_\Omega \mid w_i(t,x)\mid^2 \, |w_j(t,x)\mid^2 dx\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n=2}\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial v_j(t,x)}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2} \le$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_\Omega \mid w_i(t,x)\mid^4 dx\right)^{1/4} \left(\sum_{j=1}^{n=2}\int\limits_\Omega \mid w_j(t,x)\mid^4 dx\right)^{1/4} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n=2}\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial v_j(t,x)}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2}$$

или

$$\Big|\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_\Omega w_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx\Big| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n=2}\|w_i(t)\|_{L_4(\Omega)}\|w_j(t)\|_{L_4(\Omega)}\|\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Учитывая, суммирование по повторяющимся индексам, получаем

$$\Big|\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_\Omega w_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx\Big| \le \|w(t)\|_{L_4(\Omega)}^2\|v(t)\|_V.$$

Применим неравенство О.А. Ладыженской и далее неравенство Коши $a\cdot b=\varepsilon a^2+\frac{b^2}{4\varepsilon}c\ \varepsilon=\frac{\nu}{2^{1/2}}$, получим

$$\Big|\sum_{i=1}^{n=2}\int\limits_\Omega w_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}w(t,x)dx\Big| \le$$

$$\leq 2^{1/2}\|w(t)\|_{L_2(\Omega)}\|w(t)\|_V\|v(t)\|_V \leq$$

$$\leq \nu\|w(t)\|_V^2 + \frac{1}{2^{3/2}\nu}\|w(t)\|_{L_2(\Omega)}^2\|v(t)\|_V.$$

Подставляя полученное соотношение в неравенство (14), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2^{3/2}\nu}\|w(t)\|_H^2\|v(t)\|_V.$$

Тогда из неравенства Гронуолла-Беллмана [1, теорема 2б, глава IV, с.188] следует

$$\|w(t)\|_H^2 \leq \|w(0)\|_H^2 \exp\left(\int_0^t \frac{1}{2^{1/2}\nu}\|v(s)\|_V ds\right).$$

Поскольку $w(0) = v(0) - u(0) = 0$, то из полученного выше неравенства приходим к выводу, что $w(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Следовательно, $v = u$ и слабое решение задачи (1)-(4) единственно. $\square$

# Список литературы


1. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. / Р. Темам : Москва, 1987. — с. 409.

2. Аппроксимационно-топологический переход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье-Стокса. / В.Г. Звягин , В.Т. Дмитриенко Москва: Едиториал УРСС, 2004. — с. 112.

3. Математические вопросы / О.А. Ладыжская М.: Наука, 1970. — с. 288.

4. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс, М.: Мир, 1972г., — с. 587.

5. Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'space // Leray J., Aeta. Math 1934 V. 63 p. 193-248.