

# 1 Эволюционная система уравнений Навье-Стокса

## 1.1 Понятие слабого решения

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в пространстве  $R^n$ , где  $n = 2, 3$ , с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$ . Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v + \nabla p = f; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0; \quad (2)$$

$$v|_{t=0} = v_0; \quad (3)$$

$$v|_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $v = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$  - вектор-функция скорости движения частицы жидкости,  $p = p(t, x)$  - функция давления,  $f = f(t, x)$  - вектор-функция плотности внешних сил,  $\nu > 0$  - коэффициент вязкости.  $\Delta v = (\Delta v_1, \dots, \Delta v_n)$ ,  $\Delta v_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_n^2}$ ,  $\operatorname{div} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n}$ ,  $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial p}{\partial x_n}$ . Сформулируем определение сильного решения рассматриваемой задачи (1)-(4). Для этого введем необходимые функциональные пространства:

$L_p(\Omega)$  - где  $1 \leq p \leq \infty$ , множество измеримых функций, суммируемых с  $p$ -ой степенью,

$W_p^m(\Omega)$  - где  $m \geq 1$ ,  $p \geq 1$ , пространство Соболева, функции, которые со своими производными до порядка  $m$  включительно принадлежат пространству  $L_p(\Omega)$ ,

$C_0^\infty(\Omega)$  - бесконечно дифференцируемых функций на  $\Omega$  со значениями  $R^n$  ( $n = 2, 3$ ) и компактным носителем  $\Omega$ ,

$\nu$  - множество  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\operatorname{div} u = 0$

$H$ -....,

$V$ -....,

$L_p(a, b; X)$  - мы обозначим банаховы пространства непрерывных, слабо

непрерывных и суммируемых с  $p$ -ой степенью функций на  $[a, b]$  со значениями в банаховом пространстве  $X$ ,

$$X^* \text{---},$$

$\langle f, \varphi \rangle$  - обозначим действие функционала  $f$  из  $V^{-\alpha}$  на элемент  $\varphi$  из  $V^\alpha$ ,  $\alpha \geq 0$

Пусть  $f$  и  $v_0$ -заданные функции, где  $f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$  и  $v_0 \in V$ .

**Определение 1.1.** *Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций  $v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$  и  $p \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ , удовлетворяющие следующим условиям:*

1. обобщенные частные производные функции, содержащиеся в равенствах (1)-(2), принадлежат пространству  $L_2(0, T; L_2(\Omega))$ ;
2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве  $L_2(0, T; L_2(\Omega))$ ;
3. функция  $v$  удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Введем понятие слабого решения. Для этого пусть  $v$  и  $p$ -сильное решение задач (1)-(4). Умножим равенство (1) на пробную функцию  $\varphi(x) \in V$  скалярно в  $L_2(\Omega)$

Пусть  $(v, p)$ -сильное решение задачи (1)-(4). Чтобы обеспечить понимание определения слабого решения, мы временно предположим, что  $v = v(t, x)$ ,  $p = p(t, x)$  являются, фактически, гладкими решениями задачи. Сопоставим функции  $v$  отображение  $v : [0, T] \rightarrow W_2^1(\Omega)$ , определенное по формуле

$$[v(t)](x) = v(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Другими словами,  $v$  рассматривается не как функции переменных  $t$  и  $x$ , а как функция переменной  $t$ , определенная на отрезке  $[0, T]$  и принимающая значения в функциональном пространстве  $W_2^1(\Omega)$ .

Аналогично определим  $p : [0, T] \rightarrow L_2(\Omega)$  по формуле

$$[p(t)](x) = p(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega$$

и функцию  $f : [0, T] \rightarrow L_2(\Omega)$  по формуле

$$[f(t)](x) = f(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega.$$

Умножая равенство (1) при фиксированных значениях  $t \in [0, T]$  на функцию  $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$  скалярно в  $L_2(\Omega)$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx - \\ & - \nu \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx = \int_{\Omega} f \varphi dx. \end{aligned}$$

Выполним преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям,

$$\begin{aligned} & -\nu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx = \nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx; \\ & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \varphi_i dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} p \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \varphi dx = 0; \\ & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i \varphi) dx = \\ & = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \\ & = - \int_{\Omega} v \varphi \operatorname{div} v dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \end{aligned}$$

приходим к равенству

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad (5)$$

Здесь символ «:» обозначает покомпонентное матричное произведение, т. е. для  $C = (c_{ij}), D = (d_{ij}), i, j = 1, \dots, m$ , имеем  $C : D = \sum_{i,j=1}^m c_{i,j} d_{i,j}$

Заметим, что тоже равенство (5) верно для любой функции  $\varphi \in V$ , так как каждая часть этого равенства линейно и непрерывно зависит от  $\varphi$  в  $W_2^1(\Omega)$ . Кроме того, равенство может выполняться и при более слабых требованиях на функцию  $v(t, x)$ . Покажем, что достаточно предполагать, что  $v \in L_2(0, T; V)$  для того, чтобы каждый интеграл, входящий в равенство (5), имеет смысл.

В силу теоремы вложений Соболева<sup>1</sup> вложение  $W_2^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$  непрерывно при  $n \leq 4$ . Поэтому, так как  $V \subset W_2^1(\Omega)$ , то  $v_i(t, x)v(t, x) \in L_2(\Omega)$  и  $v_i(t, x)v(t, x)\partial_i\varphi \in L_1(\Omega)$  при каждом фиксированном значении  $t$ . Следовательно, интеграл  $\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$  определен.

Кроме того, это слагаемое определяет линейный непрерывный функционал на  $V$ . Обозначим этот функционал через  $K(v)$ :

$$\langle K(v), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Отметим, что  $\int_{\Omega} v \varphi dx \in L_2(0, T)$  и производная в выражении  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx$  понимается в смысле распределений на интервале  $(0, T)$ . Поэтому равенство (5) выполняется в смысле распределений. Все слагаемые равенства, исключая первое, принадлежат пространству  $L_1(0, T)$ , поэтому  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx \in L_1(0, T)$  и равенство (5) выполняется для почти всех значений  $t \in (0, T)$ .

Подводя итог рассуждениям, приходим к следующему определению слабого решения.

**Определение 1.2.** Пусть  $f \in L_2(Q_T)$  и  $v_0 \in H$ . Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция  $v \in L_2(0, T; V)$  такая, что равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + v \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad (6)$$

выполняется для почти всех значений  $t \in (0, T)$  и выполнено для этой

---

<sup>1</sup>Тут будет теорема вложений Соболева :)

функции  $v$  начальное условие

$$v(0) = v_0. \quad (7)$$

Выше показано, что равенство (6) корректно для  $v \in L_2(0, T; V)$  и если  $(v, p)$  сильное решение задачи (1)-(4), то  $v$  является слабым решением. Поэтому задачу о поиске сильных решений заменим задачей об исследовании слабых решений.

Заметим, однако, что для функции  $v \in L_2(0, T; V)$  условие (7) не имеет смысла, так как не определено значение функции  $v(t)$  в каждой точке  $t \in (0, T)$ . Покажем, что функция  $v(t)$ , удовлетворяющая равенству (6), является непрерывной на  $[0, T]$  со значениями в  $V^*$  и слабо непрерывной со значениями в  $H$ . Поэтому равенство (7) имеет смысл и определение слабого решения корректно.

Преобразуем равенство (6). Скалярное произведение  $(v(t), \varphi)_{L_2(\Omega)}$  определяет линейный непрерывный функционал на  $H$ , а следовательно, элемент из  $H^*$ . Учитывая отождествление  $H \equiv H^*$  и цепочку вложений  $V \subset H \subset H^* \subset V^*$ , элемент  $v(t)$  можно рассматривать как функционал на  $V$ , действие которого на функцию  $\varphi \in V$  определяется равенством  $\langle v(t), \varphi \rangle = (v(t), \varphi)_{L_2(\Omega)}$ . Тогда можно считать, что функция  $v(t)$  на  $[0, T]$  принимает значения в  $V^*$  и

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \varphi dx = \frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle$$

С учетом введенных обозначений равенство (6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle - \nu \langle \Delta v(t), \varphi \rangle - \langle K(v(t)), \varphi \rangle = \langle f(t), \varphi \rangle$$

где  $\Delta : V \rightarrow V^*$ , обозначает оператор Лапласа, действующий по правилу  $\langle \Delta v(t), \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx$ . Или можно (6) переписать в виде:

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), \varphi \rangle = \langle \nu \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t), \varphi \rangle. \quad (8)$$

Исследуем свойства операторов, входящих в правую часть равенства.

**Лемма 1.1.**

1. Оператор

$\Delta : L_2(0, T; V) \rightarrow L_2(0, T; V^*)$  линейный и непрерывный, причем

$$\| \Delta v \|_{L_2(0, T; V^*)} = \| v \|_{L_2(0, T; V)}, \quad \forall v \in L_2(0, T; V^*). \quad (9)$$

2. Оператор  $K : L_2(0, T; V) \rightarrow L_1(0, T; V^*)$  непрерывен и справедлива оценка

$$\| K(v) \|_{L_1(0, T; V^*)} \leq C_1 \| v \|_{L_2(0, T; V)}^2, \quad \forall v \in L_2(0, T; V^*), \quad (10)$$

для некоторой константы  $C_1$ .

*Доказательство.*

1. В главе 2 показано, что отображение  $\Delta : V \rightarrow V^*$  линейно, непрерывно и определяет изометрию пространств. Следовательно,  $\| \Delta u \|_{V^*} = \| u \|_V$  для всех  $u \in V$ . Отсюда для  $u \in L_2(0, T; V)$  имеем  $\| \Delta u \|_{V^*} = \| u(t) \|_V$  для почти всех  $t \in [0, T]$ . Так как  $\| u(t) \|_V \in L_2(0, T)$ , то  $\| \Delta u(t) \|_{V^*}^* \in L_2(0, T)$ . Следовательно,  $\Delta u \in L_2(0, T; V^*)$  и справедливо равенство (9). Таким образом, линейный оператор  $\Delta$  определяет изометрию пространств  $L_2(0, T; V)$  и  $L_2(0, T; V^*)$ .

2. По определению оператора  $K$

$$\langle K(t), u \rangle = \int_{\Omega} u_i(x) u_j(x) \cdot \partial_i u_j(x) dx$$

для  $u, v \in V$ . Повторяя рассуждения доказательства леммы 3.1 или используя оценки (3.10), получим

$$\| K(v(t)) \|_{V^*} \leq c_0 \| v(t) \|_V^2, \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T],$$

с некоторой константой  $c_0$ . Отсюда для  $v \in L_2(0, T; V)$  имеем  $K(v) \in$

$L_1(0, T; V^*)$  и

$$\begin{aligned} \| K(v) \|_{L_1(0, T; V^*)} &\leq \int_0^T \| K(v(t)) \|_{V^*} dt \leq c_0 \int_0^T \| v(t) \|_V^2 dt = \\ &= c_0 \| v(t) \|_{L_2(0, T; V)}^2 \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения доказательства леммы 3.1, получим, что для  $v, u \in L_2(0, T; V)$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_0^T \| K(v) - K(u) \|_{V^*} dt &\leq \int_0^T \left( \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_i v_j - u_i u_j)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \int_0^T \left( \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_i(v_j - u_j) + (v_i - u_i)u_j) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sqrt{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \left( \int_{\Omega} v_i^2 (v_j - u_j)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Omega} (v_i - u_i)^2 u_j^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \\ &\leq \sqrt{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^T (\| v_i(t) \|_{L_4(\Omega)} \| v_j(t) - u_j(t) \|_{L_4(\Omega)} + \\ &\quad + \| v_i(t) - u_i(t) \|_{L_4(\Omega)} \| u_j(t) \|_{L_4(\Omega)}) dt \leq \\ &\leq C_2 (\| v \|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))} + \| u \|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))}) \| v - u \|_{L_2(0, T; L_4(\Omega))} \end{aligned}$$

Кроме того, вложение  $V \subset (L_4(\Omega))^n$ , а следовательно, и вложение  $L_2(0, T; V) \subset L_2(0, T; (L_4(\Omega))^n)$  непрерывны. Поэтому достаточно доказать непрерывность отображений

$$\phi_{ij} : L_2(0, T; (L_4(\Omega))^n) \rightarrow L_1(0, T; L_2(\Omega)), \varphi_{ij}(v) = v_i v_j$$

для  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Для любых  $u, v \in L_2(0, T; (L_4(\Omega))^n)$  с помощью неравенства Шварца получаем оценку

$$\| \phi_{ij}(u) - \phi_{ij}(v) \|_{L_1(0, T; L_2(\Omega))} = \int_0^T \left( \int_{\Omega} (v_i v_j - u_i u_j)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^T \left( \int_{\Omega} v_i^2 (v_j - u_j)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Omega} (v_i - u_i)^2 u_j^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \\
&\int_0^T (\|v_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \|v_j(t) - u_j(t)\|_{L_4(\Omega)} + \\
&+ \|v_i(t) - u_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \|u_j(t)\|_{L_4(\Omega)}) dt \leq \\
&\leq \|v_i\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \|v_j - u_j\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} + \\
&+ \|v_i - u_i\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \|u_j\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}
\end{aligned}$$

Отсюда, если  $\|v - u\|_{L_2(0,T;(L_4(\Omega))^n)} \rightarrow 0$ , то  $\|\phi_{ij}(u) - \phi_{ij}(v)\|_{L_1(0,T;L_2(\Omega))} \rightarrow 0$ . Поэтому каждое из отображений  $\phi_{ij}$ , а следовательно, и отображение  $K$  непрерывны.

□

По утверждению леммы  $\Delta v \in L_2(0,T;V^*)$ ,  $K(v) \in L_1(0,T;VV^*)$ , поэтому  $\Delta v(t) + K(v(t)) + f(t) \in L_1(0,T;VV^*)$ . Тогда из равенства (8) и теоремы 4.6 следует

1. что функция  $v(t)$  имеет суммируемую производную  $v'(t)$ ;
2. в силу равенства (4.3)

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), u \rangle = \langle v'(t), u \rangle$$

3. равенство (5.8) можно записать в виде

$$v'(t) = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t)$$

Подводя итог рассуждений, отметим, что так как  $v'(t) \in L_1(0,T;V^*)$ , то  $v \in W_{2,1}X_0 = V$ ,  $X_1 = V^*$ . Поэтому в силу леммы 4.5 функция  $v(t)$  непрерывна на отрезке  $[0,T]$  со значениями в  $V^*$ . Кроме того, по лемме 4.6 эта функция слабо непрерывна со значениями в  $H$ . Поэтому начальное условие (7) имеет смысл.

Переформулируем понятие слабого решения

**Определение 1.3.** Пусть  $n \leq 4$ ,  $f \in L_2(0,T;(L_2(\Omega))^n)$  и  $v^0 \in H$ . Слабым (вариационным) решением задачи (1)-(4) называется функция  $v \in$



$L_2(0, T; V)$  такая, что  $v^0 \in L_1(0, T; V^*)$ , равенство

$$v'(t) - \Delta v(t) - K(v(t)) = f(t) \quad (11)$$

выполняется для почти всех значений  $t \in (0, T)$  и

$$v(0) = v^0 \quad (12)$$

## 1.2 О единственности слабого и полного слабого решений в случае $n = 2$

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о единственности слабого и полного слабого решений краевой задачи (1)-(4) для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса. Будем показано, что в случае  $\Omega \subset R^2$  слабое и полное слабое решение краевой задачи единственно. Однако для размерности  $n > 2$  аналогичное утверждение неверно. Примером, показывающим, что слабое решение задачи не единственно, служит результат о бифуркации решений, содержащийся, например, в [22, гл.II, §4, п.4.4].

Сформулируем и докажем утверждение о единственности слабого решения в случае  $n = 2$ , следуя [22, гл.III, §3, теорема 3.2].

**Теорема 1.1.** *Пусть  $\Omega$  ограниченная область в  $R^2$  с локально липшицевой границей. Тогда слабое решение  $v$  и полное слабое решение  $(v, p)$  (при условии  $(p)\Omega = 0$ ) задачи (1)-(4) единственно. Кроме того, функция  $v$  непрерывна на отрезке  $[0, T]$  со значениями в  $H$  и*

$$v(t) \rightarrow v_0 \text{ в } H \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (13)$$

*Доказательство.* Достаточно установить единственность слабого решения  $v$ , так как компонента  $p$  полного слабого решения определяется компонентой  $v$  из равенства (5.34) единственным образом.

Пусть  $v$  – решение задачи (5.31), (5.32). Покажем, что  $v \in W$ , т.е.  $v' \in L_2(0, T; V^*)$ . Воспользуемся оценкой

$$\|K_\varepsilon(v)\|_{(H^{-1}(\Omega))^n} \leq c_0 \|v\|_{(L_4(\Omega))^n}^2,$$

полученной при выводе неравенства (3.10), в случае  $n = 2$  и  $\varepsilon = 0$ . Применяя неравенство О.А. Ладыженской (1.7), получим для любого  $t \in [0, T]$

$$\sup_{v \in V} \langle K(v), \frac{u}{\|v\|} \rangle \leq c_0 2^{1/2} \left( \int_{\Omega} v(t)^2 dt \right)^{1/2} \cdot \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt$$

Отсюда, возводя обе части неравенства в квадрат и интегрируя по  $t$  на отрезке  $[0, T]$ , приходим к оценке

$$\begin{aligned} \int_0^T \sup(\langle K(v), \frac{u}{\|v\|} \rangle)^2 dt &\leq 2c_0 \int_0^T \left( \int_{\Omega} v(t)^2 \right) \cdot \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt \leq \\ &\leq 2c_0 \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} v(t)^2 dt \cdot \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial v^2}{\partial x_i} dt \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left( \int_0^T \sup(\langle K(v), \frac{u}{\|v\|} \rangle)^2 dt \right)^{1/2} \leq c_0 2^{1/2} \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} v(t)^2 dt \cdot \int_0^T \int_{\Omega} v(t)^2 dt$$

Из представления  $v' = \Delta v(t) + K(v(t)) + f(t)$  очевидно, что  $v' \in L_2(0, T; V^*)$  и  $v \in W$ . Воспользовавшись вложением  $W \subset C([0, T], H)$ , получаем  $v \in C([0, T], H)$  и заключение (13) теоремы.

Покажем теперь единственность слабого решения. Предположим, что  $u$  и  $v$  – слабые решения задачи (5.31), (5.32). Подставим эти решения в уравнение (5.31) и рассмотрим разность полученных равенств. Для разности  $w = v - u$  получим равенство

$$w' - \Delta w(t) - K(v(t)) + K(u(t)) = 0$$

Применим функционалы, стоящие в равенстве, к функции  $w(t)$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(t, x) w(t, x) dt + v(w(t, x), w(t, x)) = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} \cdot v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \cdot \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx \end{aligned} \tag{14}$$

Оценим правую часть полученного равенства.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx = \\
& = \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx + \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx = \\
& = \int_{\Omega} \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial t} \cdot v(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} w(t, x) \cdot \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial x_i} dx
\end{aligned}$$

Используем интегрирование по частям для вычисления первого интеграла

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial t} v(t, x) \cdot w(t, x) = - \int_{\Omega} \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial t} \cdot \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx$$

так как  $\partial_i w_i(t, x) = \operatorname{div} w(t, x) = 0$ . Используем интегрирование по частям для вычисления второго из интегралов

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} w(t, x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x_i} dx &= \sum_{i=0}^{n=2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial |w|^2(t, x)}{\partial x_i} dx = \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n=2} \frac{\partial^2 u_i(t, x)}{\partial t \partial x_i} \cdot |w|^2(t, x) dx = 0
\end{aligned}$$

так как  $\sum_{i=1}^2 \partial_i u_i(t, x) = \operatorname{div} u(t, x) = 0$  Отсюда и из равенства (14) получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(t, x) w(t, x) dx + v(w(t, x) w(t, x)) = \\
& = - \int_{\Omega} \frac{\partial w_i(t, x)}{\partial t} \cdot \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} w(t, x) dx
\end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_H^2 + v \|w(t)\|_H^2 = \left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| \quad (15)$$

Оценим правую часть неравенства, используя неравенства Шварца,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_j v(t, x) w_j(t, x) dx \right| \leq \\ &\left( \int_{\Omega} |w_i(t, x)|^2 |w_j(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left( \int_{\Omega} |\partial_i v_j(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\left( \int_{\Omega} |w_i(t, x)|^4 dx \right)^{1/4} \left( \int_{\Omega} |w_j(t, x)|^4 dx \right)^{1/4} \cdot \left( \int_{\Omega} |\partial_i v_j(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| \leq \\ &\leq \|w_i(t)\|_{L_4(\Omega)} \cdot \|w_j(t)\|_{L_4(\Omega)} \cdot \|\partial_i v_j(t)\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

Учитывая, что запись, содержащая повторяющиеся индексы, предполагает суммирование по этим индексам, получаем

$$\left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| \leq \|w(t)\|_{(L_4(\Omega))^n}^2 \cdot \|v(t)\|_V$$

Применим неравенство О.А. Ладыженской и далее неравенство Коши  $a \cdot b = \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} c\varepsilon = \frac{v}{2^{1/2}}$ , получим

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega} w_i(t, x) \cdot \partial_i v(t, x) w(t, x) dx \right| \leq \\ &\leq 2^{1/2} \|w(t)\|_{(L_2(\Omega))^n} \cdot \|w(t)\|_V \cdot \|v(t)\|_V \leq \\ &\leq v \|w(t)\|_V^2 + \frac{1}{2^{3/2}v} \|v(t)\|_{(L_2(\Omega))^n}^2 \cdot \|w(t)\|_V \end{aligned}$$

Подставляя полученное соотношение в неравенство (15), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{2^{3/2}v} \|w(t)\|_H^2 \cdot \|v(t)\|_V$$

Тогда из неравенство Гронуолла-Беллмана [1, теорема 26 глава IV, с.188] следует

$$\|w(t)\|_H^2 \leq \|w(0)\|_H^2 \exp \left( \int_0^t \frac{1}{2^{1/2}v} \cdot \|v(s)\|_V ds \right)$$

Поскольку  $w(0) = v(0) - u(0) = 0$ , то из полученного выше неравенства приходим к выводу, что  $w(t) = 0$  для всех  $t \in [0, T]$ . Следовательно,  $v = u$  и слабое и полное слабое решение задачи (1)-(4) единственно.  $\square$