# Übungsblatt 3 für Numerische Analysis

Dr. Michael Lehn Tobias Born

Abgabe bis: Tutorien 14.05./15.05.

**Aufgabe 1** (**Konvergenz des Newton-Verfahrens bei mehrfachen Nullstellen**, 7+2 Punkte)

Die Konvergenzaussage für lokal quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens auf Blatt 2 fordert, dass $f'(x^\star) \neq 0$ gilt, also dass die eindeutige Nullstelle $x^\star$ eine einfache Nullstelle ist.

a) *Definition:* Eine konvergente Folge $(x_n)$ mit $|x_n - x^\star| \neq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}_0$ ist *asymptotisch linear konvergent* mit Konvergenzfaktor $\varrho$ zum Grenzwert $x^\star$, wenn $\varrho \in (0,1)$ existiert, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^\star|}{|x_n - x^\star|} \leq \varrho \; .$$

*Aufgabe:* Zeige, dass das Newton-Verfahren im Falle einer eindeutigen m-fachen Nullstelle $x^\star$ mit $m \in \{2, 3, \ldots\}$ von $f \in C^{m+1}(\mathbb{R})$ und wenn der Startwert $x_0$ so gewählt ist, dass das Newton-Verfahren konvergiert, es asymptotisch linear konvergiert mit Konvergenzfaktor $\varrho = 1 - \frac{1}{m}$.

*Hinweis:* Eine $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f$ hat genau dann eine $m$-fache Nullstelle bei $x^\star$, wenn es eine $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $g$ gibt, sodass gilt

$$f(x) = (x - x^\star)^m \, g(x)$$

und

$$g(x^\star) \neq 0 \; .$$

Was bringt uns diese Aussage jetzt?

- Man kann analog zum Fall einer einfachen Nullstelle zeigen, dass das Newton-Verfahren bei mehrfachen Nullstellen lokal konvergiert. Also es gibt eine Umgebung um die Nullstelle, in dem das Newton-Verfahren für alle Startwerte konvergiert.
- Die Teilaufgabe a) sagt uns, dass das Verfahren dann asymptotisch linear konvergiert. Praktisch bedeutet das, dass das Verfahren für Iterierte, die nah genug an der Nullstelle sind, sich fast so verhält, als wäre es linear konvergent mit Faktor $1 - \frac{1}{m}$.

b) Schauen wir uns das an Beispielen an. Die Funktion

$$f_1(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) e^{3x}$$

hat eine dreifache Nullstelle und die Funktion

$$f_2(x) = (x-1)^2 \, (\sin(x) + 2)$$

hat eine zweifache Nullstelle bei $x^\star = 1$. Das Programm `test_newton.m` bestimmt beide Nullstellen mit dem Newton-Verfahren und plottet den Fehler. Außerdem wird in beiden Fällen ein Steigungsdreieck eingezeichnet, das die Steigung angibt, mit der eine lineare Konvergenz mit Faktor $1 - \frac{1}{m}$ fallen würde ($\log(\frac{2}{3})$ für $f_1$ und $\log(\frac{1}{2})$ für $f_2$).
Schau dir die Plots an und ordne ein.

**Aufgabe 2** (**Modifiziertes Newton-Verfahren für mehrfache Nullstellen**, 7+7+2 Punkte)

Man kann das Newton-Verfahren modifizieren, sodass es im Fall einer mehrfachen Nullstelle bessere Konvergenzeigenschaften besitzt. Dafür muss nur die Vorschrift für die Iterierten geändert werden zu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot k \ .$$

Dabei ist $k = \{1, 2, \ldots, m\}$ und $m$ ist die Vielfachheit der Nullstelle.

a) Zeige, dass das modifizierte Newton-Verfahren im Falle einer eindeutigen m-fachen Nullstelle $x^\star$ mit $m \in \{2, 3, \ldots\}$ von $f \in C^{m+1}(\mathbb{R})$ und wenn der Startwert $x_0$ so gewählt ist, dass das Newton-Verfahren konvergiert, es asymptotisch linear konvergiert mit Konvergenzfaktor $\varrho = 1 - \frac{k}{m}$, wenn man $k < m$ wählt.

b) *Definition:* Eine konvergente Folge $(x_n)$ mit $|x_n - x^\star| \neq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}_0$ ist *asymptotisch quadratisch konvergent* zum Grenzwert $x^\star$, wenn $\varrho > 0$ existiert, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^\star|}{|x_n - x^\star|^2} \leq \varrho \ .$$

*Aufgabe:* Zeige, dass das Newton-Verfahren im Setting von Aufgabe 2a) mit $k = m$ asymptotisch quadratisch konvergiert.

c) Testen wir das modifizierte Newton-Verfahren an den Beispielen von Aufgabe 1b). Das MATLAB-Programm `test_modified_newton.m` führt für beide Beispiele das modifizierte Newton-Verfahren für verschiedene Werte $k$ aus. Die Funktion $f_1$ hat eine dreifache Nullstelle, deswegen ist $k = 1, 2, 3$. Die Funktion $f_2$ hat eine doppelte Nullstelle, also ist $k = 1, 2$. Dann werden die Fehler geplottet. Außerdem werden für alle asymptotisch linear konvergenten Fälle die passenden Steigungsdreiecke eingezeichnet.
Schau dir die Plots an und ordne ein.

**Aufgabe 3** (**Fixpunktiterationen**, 7+7+3+4+2+2 Punkte)

Für Systeme nicht-linearer Gleichungen lohnt es sich, das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ in ein Fixpunkt-Problem umzuschreiben. Dafür benötigt man eine Funktion

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ ,$$

für die gilt, dass

$$\phi(x^\star) = x^\star \quad \Longleftrightarrow \quad f(x^\star) = 0 \ .$$

Den Punkt $x^\star$ nennt man dann Fixpunkt von $\phi$. Es gibt unendlich viele solcher Funktionen $\phi$. Das einfachste Beispiel ist

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ x \mapsto x - f(x) \ .$$

Im $\mathbb{R}$ ist für $f \in C^1(\mathbb{R})$ auch die Newton-Vorschrift

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

so eine Funktion.

Die zugehörige Fixpunktiteration ist für einen Startwert $x_0$ definiert als

$$x_{n+1} = \phi(x_n) \ .$$

Konvergiert die Fixpunktiteration gegen den Fixpunkt $x^\star$, ist dieser auch die Lösung des Nullstellenproblems.

Der Banach'sche Fixpunktsatz liefert Bedingungen für die Konvergenz von Fixpunktiterationen. Im Reellen sagt er aus, dass wenn

- für eine abgeschlossene Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ gilt, dass $\phi(X) \subset X$,
- und wenn $\phi$ eine Kontraktion ist, also wenn es Lipschitz-stetig auf $X$ ist mit Lipschitz-Konstante $0 \leq L < 1$, also

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq L\|x - y\| \ \forall x, y \in X, \ 0 \leq L < 1 \ ,$$

dann

- existiert genau ein Fixpunkt $x^\star$ von $\phi$ in $X$
- und die Fixpunktiteration $x_{n+1} = \phi(x_n)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in X$ gegen $x^\star$.
- Außerdem gelten die a-priori Fehlerschranke

$$\|x_n - x^\star\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\| \tag{1}$$

- sowie die a-posteriori Fehlerschranke

$$\|x_n - x^\star\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \ . \tag{2}$$

a) Sei $\phi$ eine Fixpunktiteration, die die Voraussetzungen für den Banach'schen Fixpunktsatz erfüllt. Zeige, dass die a-priori-Fehlerschranke (1) gilt.

b) Sei $\phi$ eine Fixpunktiteration, die die Voraussetzungen für den Banach'schen Fixpunktsatz erfüllt. Zeige, dass die a-posteriori-Fehlerschranke (2) gilt.

Ist die Ableitung einer Funktion auf einem Intervall betragsweise beschränkt, dann ist die Funktion auf diesem Intervall auch Lipschitz-stetig. So kann man Lipschitz-Stetigkeit oft einfach zeigen. Das gilt im $\mathbb{R}^n$, wir beschränken uns hier aber auf den $\mathbb{R}$.

c) Sei $a < b$ mit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und für die Funktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ gelte $\phi \in C^1([a, b])$. Beweise, dass $\phi$ Lipschitz-stetig auf $[a, b]$ ist mit Lipschitz-Konstante

$$L := \max_{x \in [a,b]} \left| \phi'(x) \right| \ .$$

d) Die Funktion $f(x) = x - \cos(x)$ hat eine Nullstelle bei ca. $x^\star \approx 0.7391$. Wir betrachten die Fixpunktiteration

$$\phi(x) = x - f(x) = \cos(x) \ .$$

Zeige, dass $\phi$ auf $[0, 1]$ die Bedingungen für den Banach'schen Fixpunktsatz erfüllt mit $L = \sin(1)$.

e) Das MATLAB-Programm `test_fixpunktiteration.m` führt die Fixpunktiteration aus d) aus für einen zufälligen Startwert in $(0, 1)$ und plottet den Fehler. Außerdem werden die a-priori (1) und die a-posteriori Schranke (2) eingezeichnet mit $L = \sin(1)$.
Führe das Programm aus und ordne ein.

f) Die Funktion $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$ hat Nullstellen bei $x^\star = \pm\sqrt{2}$, wir werden die positive Wurzel betrachten. Eine Fixpunktiteration ist gegeben durch

$$\phi(x) = x - f(x) = x - \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \ .$$

Es gibt Intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$, für die der Banach'sche Fixpunktsatz für diese Fixpunktiteration gilt. Ein Möglicher ist $[1.4, 1.5]$, für ihn ist der Banach'sche Fixpunktsatz erfüllt mit Lipschitz-Konstante

$$L = \phi'(1.5) \ .$$

Das MATLAB-Programm `test_2_fixpunktiteration.m` führt die Fixpunktiteration aus für verschiedene Startwerte und plottet den Fehler zu $x^\star = \sqrt{2}$ sowie die Fehlerschranken. Führe das Programm aus und ordne ein.