САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт прикладной математики и механики

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Отчет
по лабораторной работе
по дисциплине
«Вычислительные комплексы»
Тема: Вычисления в полной интервальной арифметике.

Выполнил студент:
Смирнова Дарья
группа: 5030102/80201

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2022 г.

Оглавление

Список иллюстраций

0.1 Постановка задачи

1. Дана ИСЛАУ 2x2

$$\begin{cases} [1,2]x_1 + [1,3]x_2 = [1,2] \\ x_1 - [1,3] \cdot x_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

   Необходимо разложить матрицу на диагональную и недиагональную части итерационным процессом. Дополнительно необходимо проиллюстрировать:

   - Последовательность брусов в итерационном процессе
   - Зависимость радиуса бруса от номера итерации

2. Для двух ИСЛАУ:

$$\begin{cases} [3,4]x_1 + [5,6]x_2 = [-3,3] \\ [-1,1]x_1 + [-3,1]x_2 = [-1,2] \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} [3,4]x_1 + [5,6]x_2 = [-3,4] \\ [-1,1]x_1 + [-3,1]x_2 = [-1,2] \end{cases} \tag{3}$$

   Построить субдеффиренциальную схему метода Ньютона и проиллюстрировать последовательность брусов в итерационном процессе.

0.2 Теория

0.2.1 Теорема Зюзина

Пусть в интервальной линейной системе уравнений

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{KR}^{n\times n},\ \mathbf{d} \in \mathbb{KR}^n$$

правильная проекция матрицы $\mathbf{C}$ имеет диагональное преобладание. Тогда формальное решение системы существует и единственно.

0.2.2 Разложение матрицы ИСЛАУ

Итерационный процесс строится следующим образом: берется некоторое начальное $\mathbf{x}^{(0)}$ и элементы последовательности вычисляются по формуле

$$x^{(k+1)} = (\mathrm{inv}\mathbf{D})(\mathbf{d} \ominus \mathbf{E}\mathbf{x}^{(k)}),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

с $\mathrm{inv}\mathbf{D} = \mathrm{diag}\{\mathrm{inv}\mathbf{c}_{ii}\}_{i=1}^{n}$ И по теореме Шрёдера о неподвижной точке, он будет сходиться к единственной неподвижной точке отображения.

$\mathbf{E} = \mathbf{C} \ominus \mathbf{D}$, т.е. матрица, полученная из $\mathbf{C}$ занулением ее диагональных элементов. Формальные решения исходной системы совпадают с формальными решениями системы $\mathbf{D}x + \mathbf{C}x = \mathbf{d}$, которая, в свою очередь, равносильна $\mathbf{D}x = \mathbf{d} \ominus \mathbf{E}x$.

0.2.3 Релаксационный параметр метода Ньютона

τ в алгоритмах субдеффиренциального метода Ньютона является релаксационным параметром с помощью которого в методах ньютоновского типа удаётся расширить область сходимости. На практике рекомендуется сначала брать $\tau = 1$ Тогда при сходимости субдифференциальный метод Ньютона даёт точное решение уравнений $\mathscr{F}(y) = 0$ и $\mathscr{G}(y) = 0$

за небольшое конечное число итераций (которое, как правило, не превосходит размерности n интервальной системы). Такая исключительно быстрая сходимость субдифференциального метода Ньютона при $\tau = 1$ объясняется полиэдральностью функций, фигурирующих в решаемых уравнениях.

Если наблюдаются проблемы в сходимости метода Ньютона, то нужно попробовать уменьшить значение параметра τ.

0.2.4 Субдифференциальный метод Ньютона

Итерационная процедура субдифференциального метода Ньютона описывается следующей формулой:

$$x^k = x^{k-1} - \tau (D^{k-1})^{-1} \mathscr{F}(x^{k-1}),$$

где $\mathscr{F}(x) = \mathrm{sti}\,(C \cdot \mathrm{sti}^{-1}\,(x)) - x + \mathrm{sti}\,(d)$ (sti - операция стандартного погружения, отображения из KR^n в R^{2n}), D^{k-1} - какой-нибудь субградиент отображения $\mathscr{F}$ в точке x^{k-1}.

0.3 Реализация

Лабораторная работа выполнена в среде Octave с использзоанием библиотеки kinterval.

0.4 Результаты

Начальный брус последовательности обозначен зеленым цветом, а конечный - красным.

0.4.1 Разложение матрицы ИСЛАУ

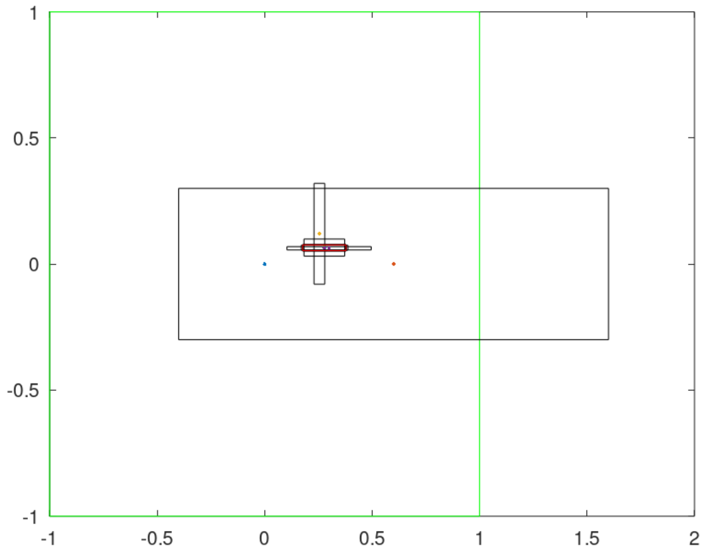

Рис. 1: Изображение брусов последовательности в задаче 1

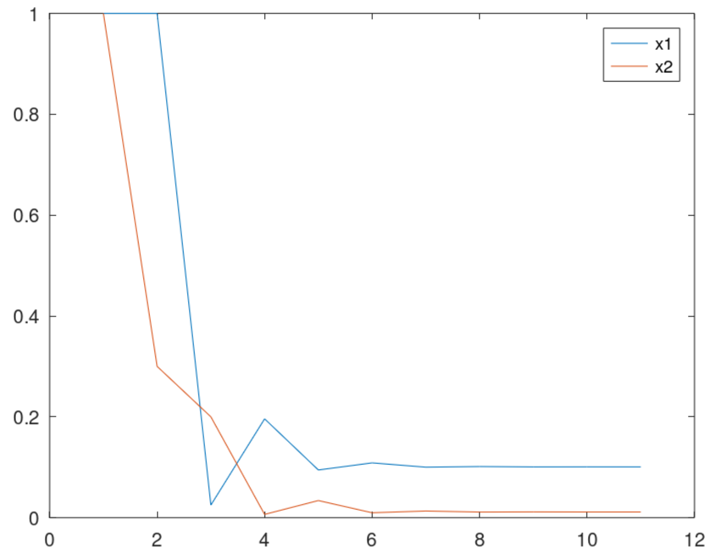

Рис. 2: Зависимость радиусов брусов от числа итераций в задаче 1

0.4.2 Итерационный процесс по субградиентному методу Ньютона

Решение задачи 2 для первой матрицы с параметром $\tau = 1$ получено за 4 итерации.

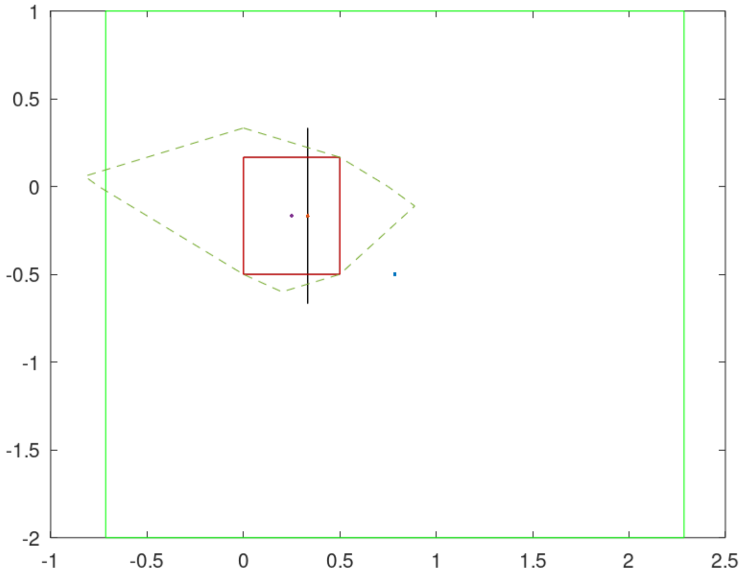

Рис. 3: Решение задачи 2 субградиентным методом Ньютона с $\tau = 1$

Решение задачи 2 для второй матрицы с параметром $\tau = 1$. Число итераций - 200.

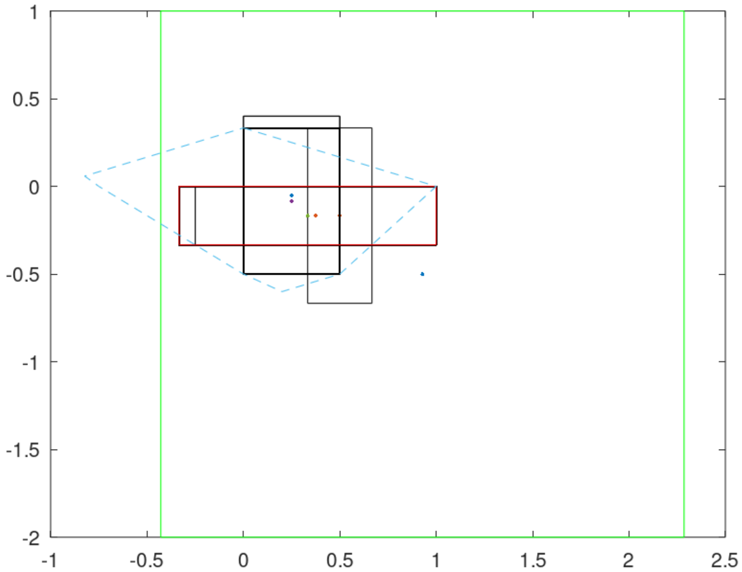

Рис. 4: Решение задачи 2.2 субградиентным методом Ньютона, $\tau = 1$

Решение задачи 2 для второй матрицы с параметром $\tau = 0.05$. Число итераций - 200.

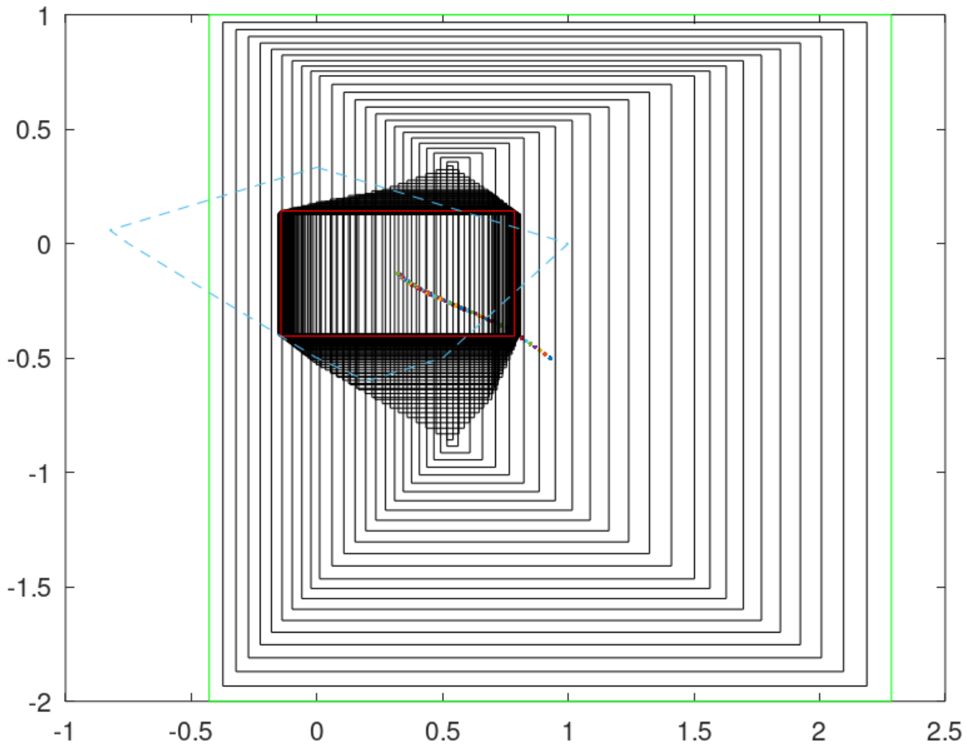

Рис. 5: Решение задачи 2.2 субградиентным методом Ньютона, $\tau = 0.05$

0.5 Обсуждение

При применении итерационной схемы относительно теоремы Зюзина на второй итерации метод выдал более адекватную внутреннюю оценку, а середина брусов практически не меняется по мере итераций, причем после 5 итерации радиусы брусов меняются несущественно.

При применении субградиентного метода Ньютона в задании с первой матрицей получили точную внутреннюю оценку допускового множества за 4 итерации. А при применении данной итерационной схемы для второй матрицы внутренняя оценка не была получена, хотя результирующий брус все же более чем на половину совпадает с такой оценкой по площади. После уменьшения релаксационного параметра метода ньютона получаем другую оценку, которая еще удачней приближает правильную оценку.

Примечание

С кодом работы можно ознакомиться по ссылке:
`https://github.com/DariaWelt/IntAnalysis`