САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Институт прикладной математики и механики

Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики

Отчет
по лабораторной работе
по дисциплине
«Вычислительные комплексы»
Тема: Вычисления в классической интервальной арифметике

Выполнил студент:
Смирнова Дарья
группа: 5030102/80201

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2021 г.

Оглавление

Список иллюстраций

0.1 Постановка задачи

1. Определить, при каком значении e интервальные матрицы (1) и (2) содержат особенные точечные матрицы.

$$\begin{pmatrix} [1-e,\ 1+e] & 1 \\ [1.1-e,\ 1.1+e] & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} [1-e,\ 1+e] & [1-e,\ 1+e] \\ [1.1-e,\ 1.1+e] & [1-e,\ 1+e] \end{pmatrix} \tag{2}$$

2. Для функции с несколькими локальными экстремумами применить алгоритм интервальной глобальной оптимизации и провести анализ сходимости метода.

0.2 Теория

0.2.1 Особенная интервальная матрица

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{nxn}$ называется неособенной, если неособенны все точечные матрицы $A \in \mathbf{A}$. Интервальная матрица называется особенной, если она содержит особенную точечную матрицу.

0.2.2 Критерий Баумана

Интервальная матрица $\mathbf{A}$ неособенна тогда и только тогда, когда определители всех ее крайних матриц имеют одинаковый знак, т.е.

$$det(A^{'}) * det(A^{''}) > 0 \ \ \forall A^{'}, A^{''} \in vert\mathbf{A} \tag{3}$$

0.2.3 Признак Бека

Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{nxn}$ такова, что ее середина mid A неособенна и

$$\rho(|(midA)|^{-1} \cdot radA) < 1 \tag{4}$$

Тогда $\mathbf{A}$ неособенна.

0.2.4 Теорема

Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{nxn}$ такова, что ее середина mid A неособенна и

$$\max_{i \le j \le n} (radA \cdot |(midA)|^{-1})_{jj} \ge 1 \tag{5}$$

Тогда $\mathbf{A}$ - особенная.

0.2.5 Теорема Адамара

Интервальная матрица с диагональным преобладанием является неособенной.

0.2.6 Признак Румпа

Пусть интервальная матриза $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что $\sigma_{\max}(\mathrm{rad}\,\mathbf{A}) < \sigma_{\min}(\mathrm{mid}\,\mathbf{A})$ тогда $\mathbf{A}$ неособенна.

$\sigma(A)$ - множество сингулярных чисел матрицы, вычисляемых как арифметический квадратный корень из собственных значений матрицы AA^T.

0.2.7 Интервальная глобальная оптимизация

Алгоритм GlobOpt

Алгоритм для глобальной минимизации функции GlobOpt оперирует с рабочим списком ζ, в котором будут храниться все брусы, получающиеся в результате дробления исходного бруса области определения на более мелкие подбрусы.
Одновременно с самими подбрусами будем хранить в рабочем списке и нижние оценки областей значений целевой функции по этим подбрусам, так что элементами списка ζ будут записи-пары вида:

$$\zeta : (Y, y), \text{где} Y \subseteq X, y = f(Y). \tag{6}$$

Далее каждый шаг алгоритма состоит в извлечении из этого списка бруса, который обеспечивает рекордную (т. е. наименьшую) на данный момент оценку минимума снизу, его дроблении на более мелкие подбрусы, оценивании на них целевой функции, занесении результатов обратно в рабочий список.

0.2.8 Функция Химмельблау

$$f(x,y) = (x^2 + y - 11)^+(x + y^2 - 7)^2 \tag{7}$$

Минимум функции достигается в 4 точках, при значении аргумента $(x,y) = (3,2)$, $(x,y) = (-2.805118, 3.131312)$, $(x,y) = (-3.779310, -3.283186)$, $(x,y) = (3.584428, -1.848126)$ и равен 0.

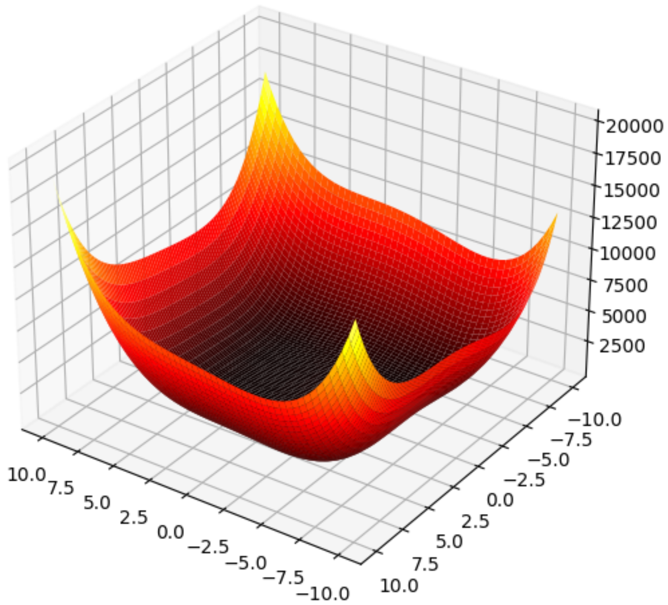

Рис. 1: График функции Химмальблау

0.2.9 Функция Растригина

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - cos(18 * x) - cos(18 * y) \tag{8}$$

Минимум функции достигается при значении аргумента $(x, y) = (0, 0)$ и равен -2.

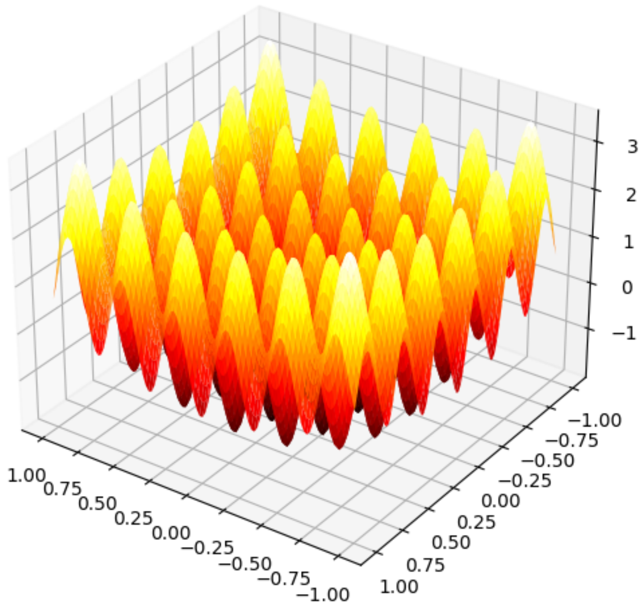

Рис. 2: График функции Растригина

0.3 Реализация

Лабораторная работа выполнена в среде MATLAB2021b.

0.4 Результаты

0.4.1 Оссобенность матрицы

Рассмотим сначала первую матрицу. Точечная матрица будет особенной, если линейно зависимы ее строки. Поэтому необходимо выбрать такое e, при котором пересечение итервалов в первой и второй строке будет не пустым, это и будет по определению означать, что интервальная матрица особенная. Отсутствие пересечения возможно только при $1 + e < 1.1 - e$, то есть при $e < 0.05$. При $e \geq 0.05$ интервальная матрица является особенной.

По критерию Баумана:
$vert(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1-e & 1 \\ 1.1-e & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+e & 1 \\ 1.1-e & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-e & 1 \\ 1.1+e & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+e & 1 \\ 1.1+e & 1 \end{pmatrix} \right\}$
Вычислим определители:
$\Delta_1 = -0.1$, $\Delta_2 = 2e - 0.1$, $\Delta_3 = -2e - 0.1$, $\Delta_4 = -0.1$
По критерию баумана матрица $\mathbf{A}$ будет неособенной, если $2e - 0.1 < 0$, т.е. если $e < 0.05$. Так как критерий Баумана является необходимым и достаточным условием, то можно сказать, что матрица $\mathbf{A}$ будет особенной, если $e \geq 0.05$.

По признаку Румпа:
$rad(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix}$, $mid(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1.1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2.1 \\ 2.1 & 2.21 \end{pmatrix}$$

$\sigma_{\max}(\mathrm{rad}\,\mathbf{A}) = \sqrt{2}e$, $\sigma_{\min}(\mathrm{mid}\,\mathbf{A}) = 0.0488$

Итак, при $\sqrt{2}e < 0.0488$, то есть при приблизительно $e < 0.0345$ матрица $\mathbf{A}$ неособенна, что согласуется с ранее полученными результатами.

Теперь рассмотрим вторую матрицу. Для начала воспользуемся критерием Баумана. Имеем 16 элементов в множестве $vert(\mathbf{A})$ и соответствующие определители равны: $\Delta_1 = -0.1 + 0.1e$, $\Delta_2 = -0.1 + 2e + 0.1e - 2e^2 = -0.1 + 2.1e - 2e^2$, $\Delta_3 = -0.1 - 2.1e + 2e^2$, $\Delta_4 = -0.1 - 1.9e + 2e^2$, $\Delta_5 = -0.1 - 0.1e$, $\Delta_6 = -0.1 + 2.1e - 2e^2$, $\Delta_7 = -0.1 + 4.1e$, $\Delta_8 = -0.1 + 0.1e$, $\Delta_9 = -0.1 - 4.1e$, $\Delta_{10} = -0.1 - 0.1e$, $\Delta_{11} = -0.1 + 0.1e$, $\Delta_{12} = -0.1 - 2.1e - 2e^2$, $\Delta_{13} = -0.1 + 1.9e + 2e^2$, $\Delta_{14} = -0.1 - 2.1e - 2e^2$, $\Delta_{15} = -0.1 + 2.1e + 2e^2$, $\Delta_{16} = -0.1 - 0.1e$
Учтем, что $e > 0$, тогда $\Delta_{16} < 0$ и тогда все определители должны быть отрицательными. Записывая неравенства для каждого из условий получим, что решением системы будет $e < \frac{1}{41}$. При таких значениях имеем неособенную матрицу, значит при $e \geq \frac{1}{41}$ матрица

A будет особенной.

Теперь применим критерий Румпа.
$rad(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix}$, $mid(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}$

Итак, как и ранее $\sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{A}) = 0.0488$

При этом $\sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{A}) = 2e$. Значит при $2e < 0.0488$, то есть при $e < 0.0244$ матрица является неособенной.

0.4.2 Оптимизация. Функция Химмельблау

Начальное множество допустимых значений имеет вид: $X = [-4, 1] \times [-5, -1]$.

Полученное значение глобального экстремума $Z = 6.3e - 12$.

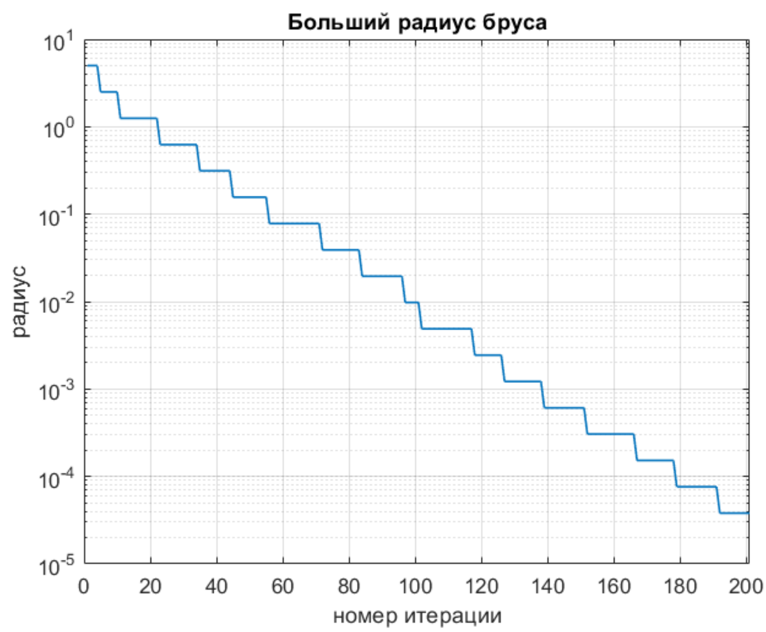

Рис. 3: Зависимость ширины бруска для функции Химмельблау

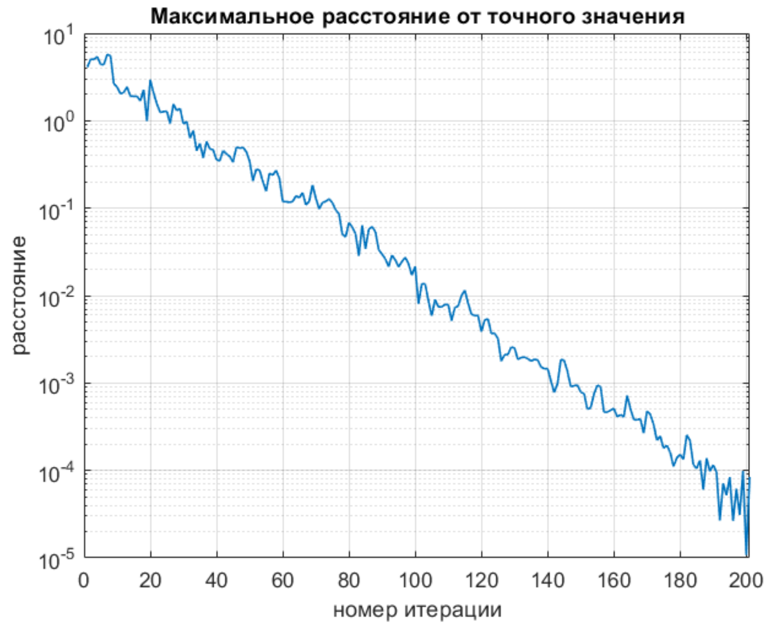

Рис. 4: Зависимость ошибки от номера итерации для функции Химмельблау

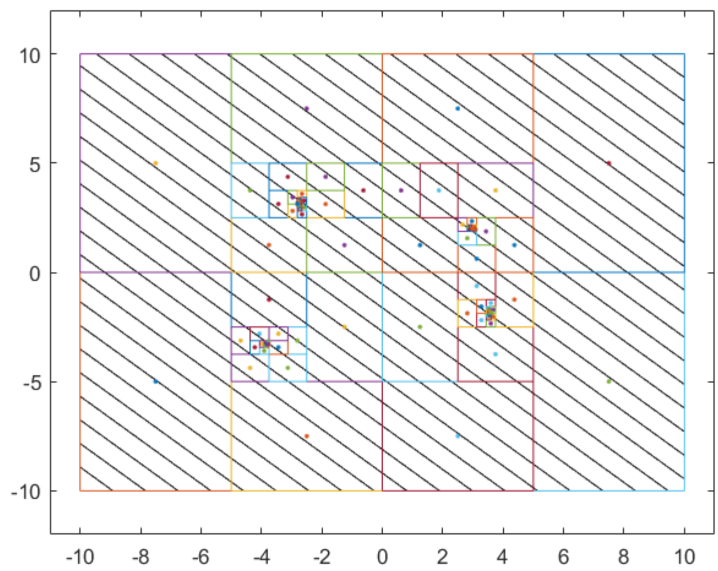

Рис. 5: Траектория брусов для функции Химмельблау

0.4.3 Оптимизация. Функция Растригина

Начальное множество допустимых значений имеет вид: $X = [-1.5, 2] \times [-3, 1]$.

Полученное значение глобального экстремума $Z = -1.92$.

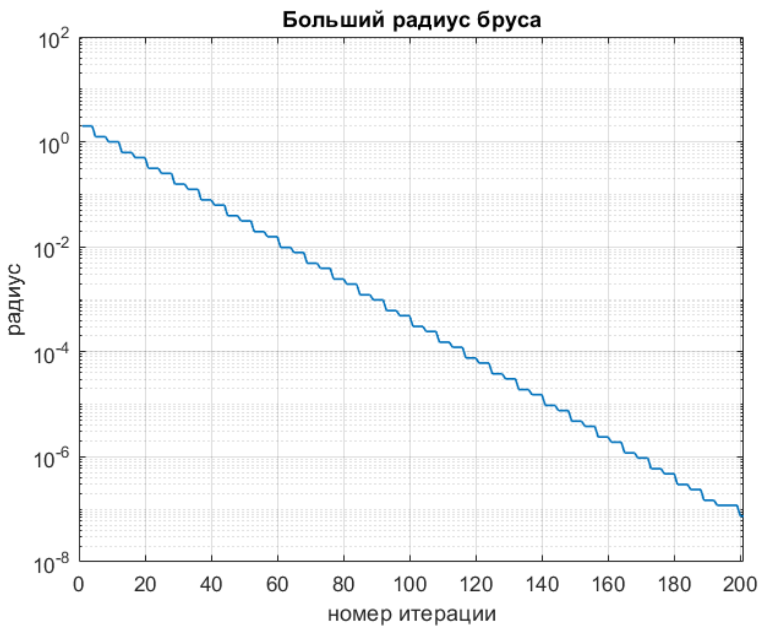

Рис. 6: Зависимость ширины бруска для функции Растригина

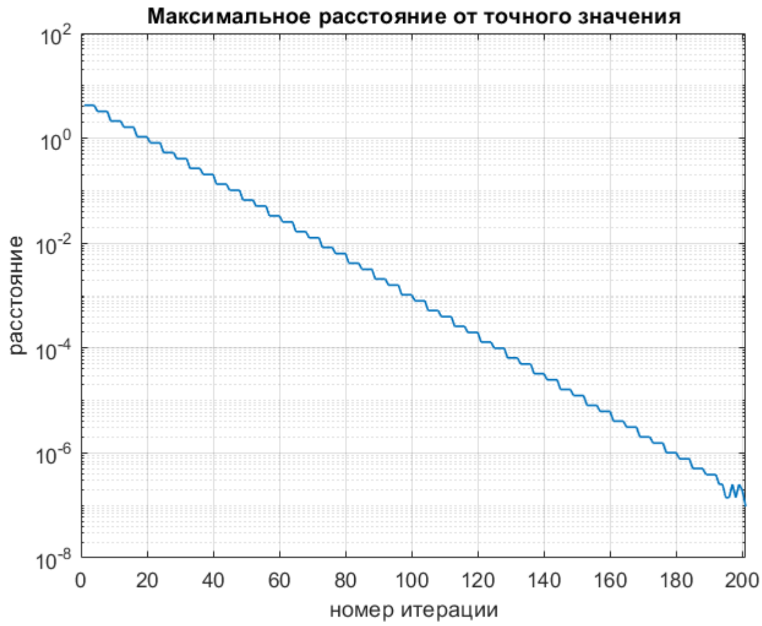

Рис. 7: Зависимость ошибки от номера итерации для функции Растригина

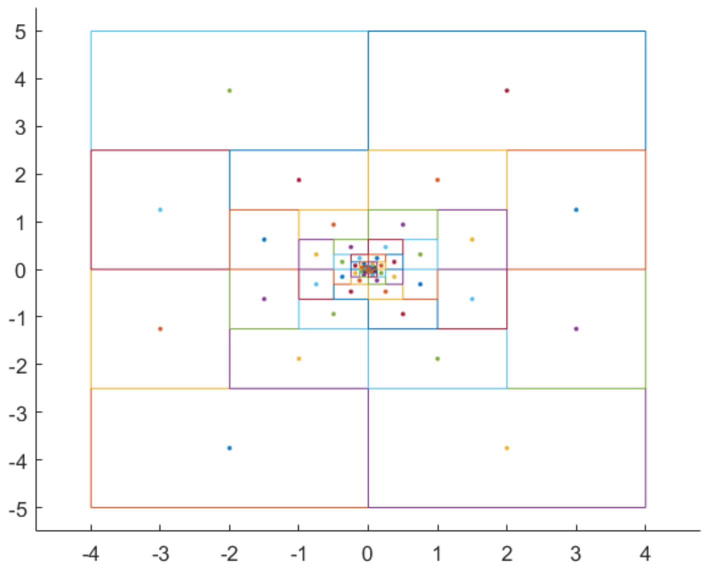

Рис. 8: Траектория брусов для функции Растригина

0.5 Обсуждение

0.5.1 особенность ИСЛАУ

В первой задаче при переходе от линейной регрессии к полиномиальной так же верно, что матрица особенна, если одна из точечных матриц особенна, что происходит в случае пересечения интервалов. При этом величина e, при которой матрица будет являться неособенной, может значительно уменьшиться, так как на эту величину будет налагаться большее количество условий. И чем меньше будут величины, входящие в $\operatorname{mid} \mathbf{X}_n$, тем меньше будет норма этой матрицы, следовательно, норма Фробениуса также будет уменьшаться. Это приведет к тому, что $\sigma_{\min}(\operatorname{mid} \mathbf{X}_n)$ будет приближаться к 0.

При увеличении количества интервальных коэффициентов с ненулевым радиусом в исходную ИСЛАУ быстро возрастает сложность оценивания особенности и неособенности матрицы, причем становится сложнее добиться неособенности матрицы, так как у строк матрицы больше шансов быть зависимыми.

0.5.2 Интервальная глобальная оптимизация

Для обеих функций алгоритм нахождения минимума функции дал правильную оценку значения минимума функции, при этом чуть хуже оценил аргументы, сообщающие минимум. По изображению брусов так же можно увидеть, что ко многим минимумам сходимость хорошая. Скачкообразное поведение графиков объясняется самим алгоритмом: ведущий брус, который будет далее дробиться, выбирается на каждой итерации путем полного итерирования по рабочему списку, то есть не обязательно последний брус дает наилучшее приближение к минимуму. По этой причине монотонного убывания не наблюдается ни на одном из данных графиков.

Примечание

С кодом работы можно ознакомиться по ссылке:
`https://github.com/DariaWelt/IntAnalysis`