Яковлева Дарья
M3439

Домашнее задание 2
Вариант 17

Исходные данные

- Матрица для задачи:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Задание
Для марковского источника с заданной матрицей переходных вероятностей найти $H(X), H(X \mid X^{\infty}), H_2(X), H_n(X)$. Построить коды Хаффмена для ансамблей X, X^2. Указать наилучший алгоритм кодирования для данного источника.

Решение

p_1, p_2, p_3 – стационарные состояния

Найдем их, решив систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_3 = p_1 \\ \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{4}p_3 = p_2 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{9}{31};\ p_2 = \frac{10}{31};\ p_3 = \frac{12}{31}$$

$$H(X) = \sum_i p(x_i) \cdot \log(p(x_i))$$

$$H(X) = -(\frac{9}{31}\log\left(\frac{9}{31}\right) + \frac{10}{31}\log\left(\frac{10}{31}\right) + \frac{12}{31}\log\left(\frac{12}{31}\right)) = \mathbf{1.5746}$$

$$H(X|X^{\infty}) = H(X|X^1) = \sum_i p(x_i) \cdot H(X|X_i)$$

$$H(X|X_i) = -\sum_j p_{ij}(x) \cdot \log(p_{ij}(x))$$

$$H(X|X_1) = -\left(\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\log\left(\frac{1}{6}\right)\right) = 1.46$$

$$H(X|X_2) = -\left(0 + \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\log\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 0.811$$

$$H(X|X_3) = -\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 1.5$$

$$H(X|X^{\infty}) = \frac{9}{31} * 1.46 + \frac{10}{31} * 0.81 + \frac{12}{31} * 1.5 = \mathbf{1.266}$$

$H_2(X) = \frac{H(X^2)}{2} = \frac{1}{2}\left(H(X) + H(X|X^1)\right) = \frac{1}{2}(1.5746 + 1.266) = 1.4203$

$$H_n(X) = \frac{H(X^n)}{n} = \frac{1}{n}\left(H(X) + (n-1)H(X|X^1)\right) = \mathbf{1.266} + \frac{\mathbf{0.3086}}{\boldsymbol{n}}$$

Рассчитаем коды Хаффмена для ансамбля $X = \{a_1, a_2, a_3\}$

$p_1 = \frac{9}{31};\ p_2 = \frac{10}{31};\ p_3 = \frac{12}{31}$

Дерево Хаффмена

a3 – 12/31 -------------

|_____1

a2 – 10/31 --- |

|19/31--

a1 – 9/31 ----

Коды Хаффмена

a1 = 11

a2 = 10

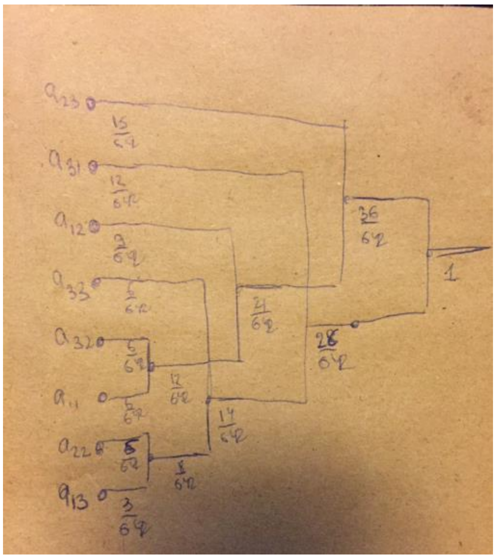
a3 = 0

Среднее количество бит на символ для n = 1 $\sum len(\text{код}) * p_i = \frac{12}{31} + \frac{20}{31} + \frac{18}{31} = 1.6129$

Рассчитаем коды Хаффмена для ансамбля $X^2 = \{a_{11}, .., a_{33}\}$

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{matrix} \frac{6}{62} & \frac{9}{62} & \frac{3}{62} \\ 0 & \frac{5}{62} & \frac{15}{62} \\ \frac{12}{62} & \frac{6}{62} & \frac{6}{62} \end{matrix}$$



A23 = 00
A31 = 10
A12 = 010
A33 = 111
A32 = 0110
A11 = 0111
A22 = 1110
A13 = 1111

Среднее количество бит на символ для n = 2 $(\sum len(\text{код}) * p_i)/2 = \frac{30}{62} + \frac{24}{62} + \frac{27}{62} + \frac{18}{62} + \frac{24}{62} + \frac{24}{62} + \frac{20}{62} + \frac{12}{62} = 1.4435$

Так как при кодировании Хаффменом двух символов среднее количество бит на символ уменьшилось, следовательно наилучший алгоритм кодирования -- коды Хаффмена для ансамбля X^2.