

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
«Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого»

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

Высшая школа технологий искусственного интеллекта

Направление: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Отчет о выполнении лабораторной работы №2
Вычислительная математика
Аппроксимация методом наименьших квадратов

Студент,

группа 5130201/30002

_____ Овчинников Т. А.

Преподаватель

_____ Пак В. Г.

« _____ » _____ 2024г.

Санкт-Петербург, 2024

1 Заданная таблица

Для данной табличной функции (см. Таблица 1) построить методом наименьших квадратов линейную и квадратичную полиномиальные модели, вычислить наилучшие средне-квадратические отклонения.

Таблица 1. Данные функции

x_i	y_i
0.10	-5.02
0.22	-5.08
0.34	-5.15
0.46	-5.29
0.58	-5.44
0.70	-5.30
0.82	-5.26
0.94	-5.13
1.06	-4.94
1.18	-4.88
1.30	-4.79
1.42	-4.65
1.54	-4.41
1.66	-4.29
1.78	-4.13
1.90	-3.92
2.02	-3.84
2.14	-3.77
2.26	-3.60
2.38	-3.38

2 Линейная модель

Необходимо найти линейную регрессию для заданной табличной функции. Линейная регрессия имеет вид:

$$\hat{y} = b + ax$$

Вычислим коэффициенты a и b уравнения линейной регрессии по известным форму-

лам:

$$a = \frac{\sum x_i \sum y_i - n \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2} = \frac{24.8 \cdot (-92.24) - 20 \cdot (-106.3112)}{24.8^2 - 20 \cdot 40.328} \approx 0.8424;$$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \sum x_i^2 \sum y_i}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2} = \frac{24.8 \cdot (-106.3112) - 40.328 \cdot (-92.24)}{24.8^2 - 20 \cdot 40.328} \approx -5.6565.$$

Значит линейное приближение функции имеет вид:

$$\hat{y} = -5.6565 + 0.8424x$$

3 Квадратичная регрессия

Необходимо найти квадратичную регрессию для заданной табличной функции. Квадратичная регрессия имеет вид:

$$\hat{y} = c + bx + ax^2$$

Найдём коэффициенты a, b и c уравнения квадратичной регрессии из системы уравнений:

$$\begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i + nc = \sum y_i, \\ a \sum x_i^3 + b \sum x_i^2 + c \sum x_i = \sum x_i y_i, \\ a \sum x_i^4 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i; \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 40.328 & 24.8 & 20 & -92.24 \\ 73.7552 & 40.328 & 24.8 & -106.3112 \\ 143.854 & 73.7552 & 40.328 & -164.2664 \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 40.328 & 24.8 & 20 & -92.24 \\ 73.7552 & 40.328 & 24.8 & -106.3112 \\ 143.854 & 73.7552 & 40.328 & -164.2664 \end{array} \right)$$

Решим эту систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 40.328 & 24.8 & 20 \\ 73.7552 & 40.328 & 24.8 \\ 143.854 & 73.7552 & 40.328 \end{vmatrix} = -697.2117;$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} -92.24 & 24.8 & 20 \\ -106.3112 & 40.328 & 24.8 \\ -164.2664 & 73.7552 & 40.328 \end{vmatrix} = -329.7331 \Rightarrow a = \frac{\Delta_a}{\Delta} \approx 0.4729;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 40.328 & -92.24 & 20 \\ 73.7552 & -106.3112 & 24.8 \\ 143.854 & -164.2664 & 40.328 \end{vmatrix} = 230.4376 \Rightarrow b = \frac{\Delta_b}{\Delta} \approx -0.3305;$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 40.328 & 24.8 & -92.24 \\ 73.7552 & 24.8 & -106.3112 \\ 143.854 & 40.328 & -164.2664 \end{vmatrix} = 3594.6716 \Rightarrow c = \frac{\Delta_c}{\Delta} \approx -5.1558.$$

Итак, искомое уравнение квадратной регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = 0.4729x^2 - 0.3305x - 5.1558.$$

4 Проверка и среднеквадратичные отклонения

Напишем программу на Engage и проверим правильность вычислений, а также найдем среднеквадратичные отклонения (см. Рис. 1).

```
1 import Pkg; Pkg.add("LinearAlgebra")
2 using Plots
3 import Pkg; Pkg.add("Statistics")
4
5 function custom_mean(data::Vector{T}) where T
6     total = sum(data)
7     return total / length(data)
8 end
9
10 x = [0.10, 0.22, 0.34, 0.46, 0.58, 0.70, 0.82, 0.94, 1.06, 1.18,
11      1.30, 1.42, 1.54, 1.66, 1.78, 1.90, 2.02, 2.14, 2.26, 2.38]
12 y = [-5.02, -5.08, -5.15, -5.29, -5.44, -5.30, -5.26, -5.13, -4.94, -4.85,
13      -4.79, -4.65, -4.41, -4.29, -4.13, -3.92, -3.84, -3.77, -3.60, -3.38]
14
15 x = collect(x)
16 y = collect(y)
17
18 X_linear = hcat(ones(length(x)), x)
19 beta_linear = X_linear \ y
20 y_pred_linear = X_linear * beta_linear
21
22 X_quad = hcat(ones(length(x)), x, x.^2)
23 beta_quad = X_quad \ y
24 y_pred_quad = X_quad * beta_quad
25
26 mse_linear = custom_mean((y .- y_pred_linear).^2)
27 mse_quad = custom_mean((y .- y_pred_quad).^2)
28
29 println("Коэффициенты линейной модели: ", beta_linear)
30 println("Среднеквадратическое отклонение линейной модели: ", mse_linear)
31
32 println("Коэффициенты квадратичной модели: ", beta_quad)
33 println("Среднеквадратическое отклонение квадратичной модели: ", mse_quad)
34
35 plot(x, y, seriestype=:scatter, label="Данные", xlabel="x", ylabel="y")
36 plot!(x, y_pred_linear, label="Линейная модель", lw=2)
37 plot!(x, y_pred_quad, label="Квадратичная модель", lw=2, linestyle=:dash)
38
```

```
Resolving package versions...
No Changes to `~/project/Project.toml`
No Changes to `~/project/Manifest.toml`
Resolving package versions...
No Changes to `~/project/Project.toml`
No Changes to `~/project/Manifest.toml`
```

```
Коэффициенты линейной модели: [-5.656521303258146, 0.8423558897243113]
Среднеквадратическое отклонение линейной модели: 0.05434702255639099
Коэффициенты квадратичной модели: [-5.155781891597682, -0.33051315156578204, 0.4729310650363278]
Среднеквадратическое отклонение квадратичной модели: 0.013635603098655724
```

Рис. 1. Линейная и квадратичная регрессии в Engage

Наши вычисления верны. Среднеквадратичное отклонение для линейной модели 0.0543, а для квадратичной 0.0136.