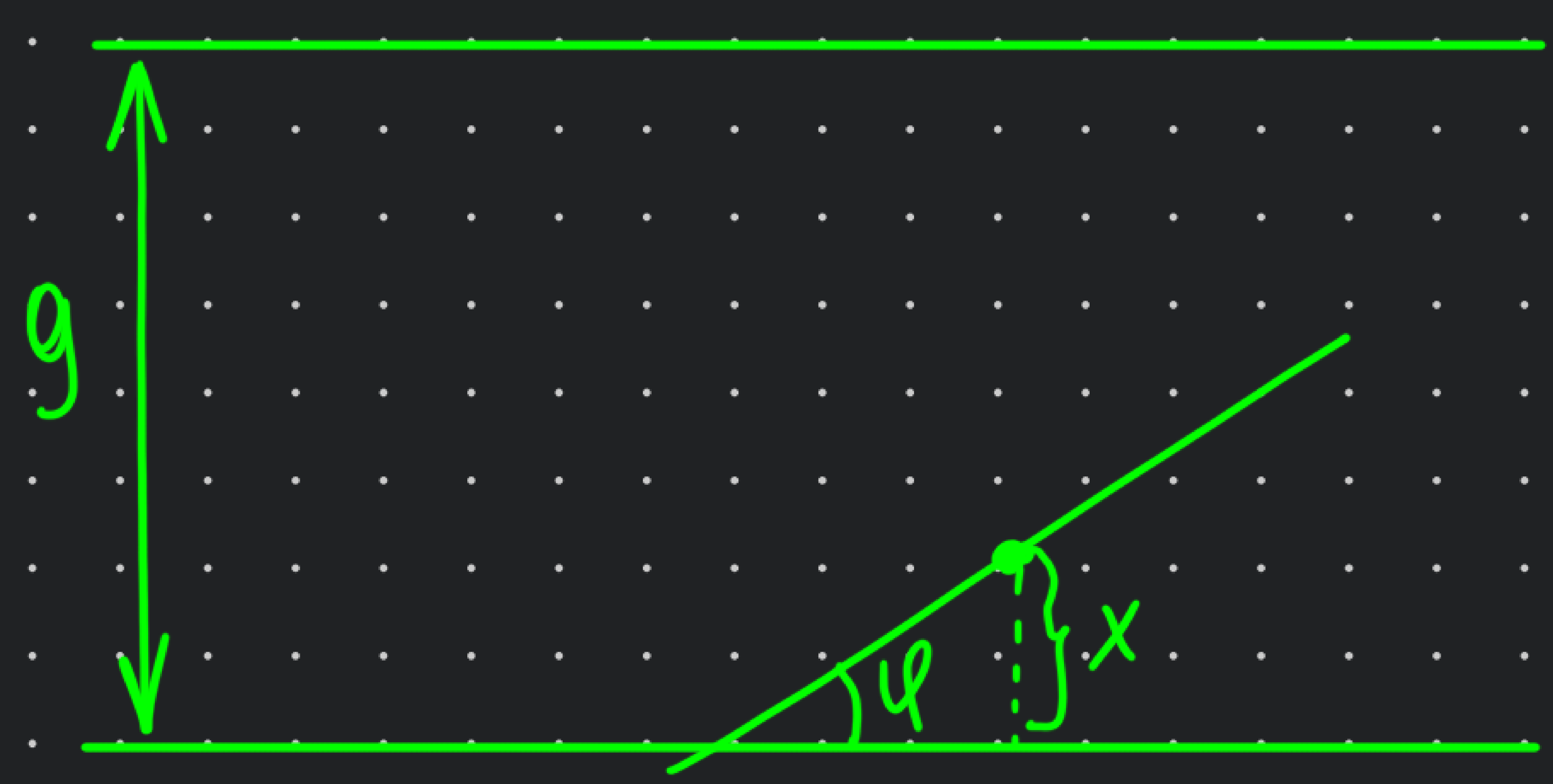
Вар. 2 (513203224)

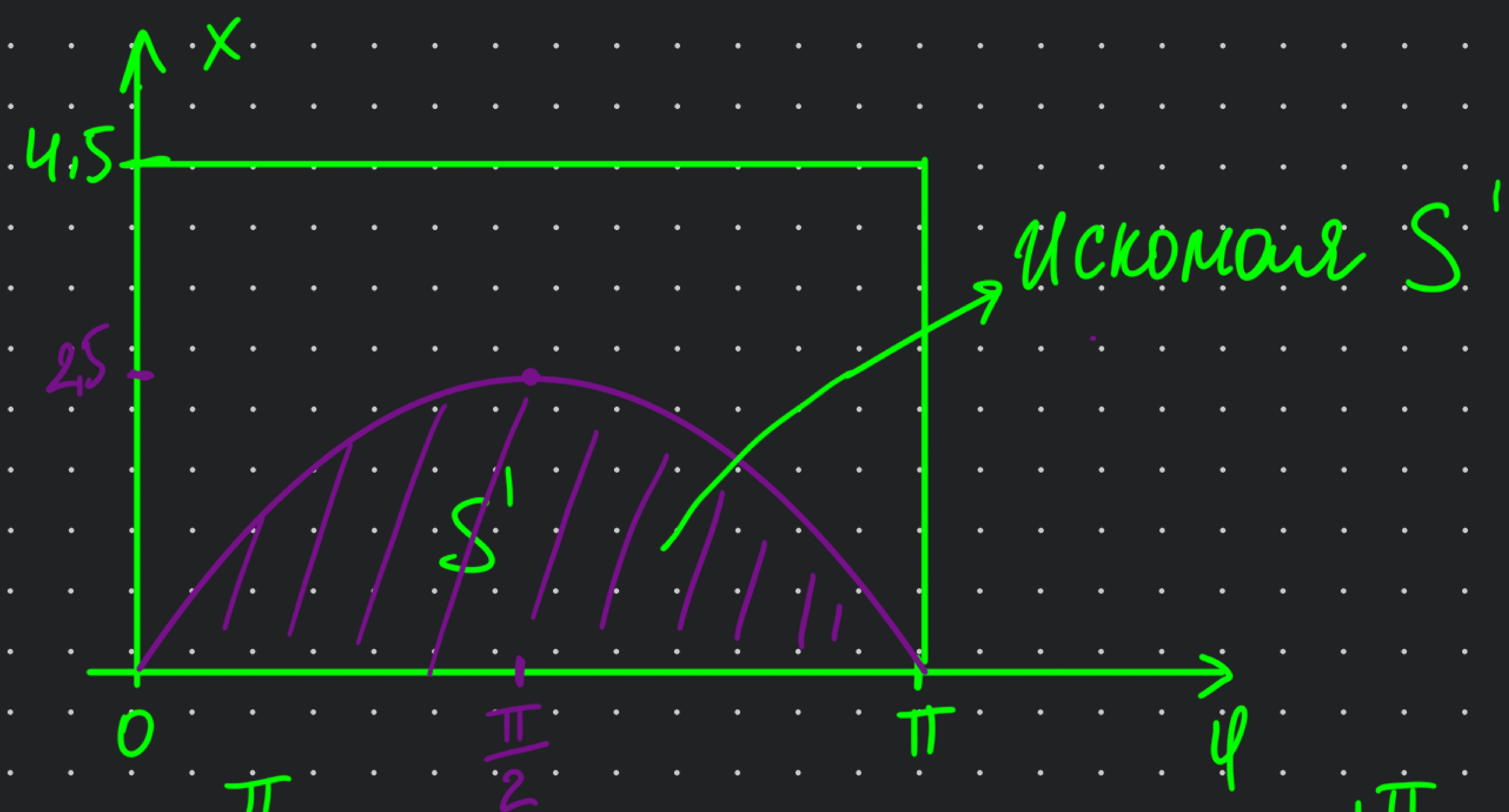
1. Прямые разбивают плоскость на полосы ширины 9. Определить вероятность того, что отрезок длины 5, наугад брошенный на плоскость, не пересечет ни одной прямой.



$P(\sin\varphi \cdot 2{,}5 > x)$

$\varphi \in [0; \pi]$

$x \in [0; 4{,}5]$



$$S' = \int_0^{\pi} 2{,}5\sin\varphi\, d\varphi = -\cos\varphi \cdot 2{,}5 \Big|_0^{\pi} =$$

$$= 2{,}5 - (-(1 \cdot 2{,}5)) = 5$$

$$P = \frac{5}{4{,}5\pi}$$

прямой.

2. Распределение случайной величины ξ задано таблицей $\begin{array}{ccccc} \text{k} & -3 & -1 & 0 & 1 \\ \text{p}_k & 1/7 & 3/7 & 2/7 & 1/7 \end{array}$. Вычислить $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, энтропию ξ и распределение $\eta = \xi^3$.

$$E\xi = -\frac{3}{7} + \left(-\frac{3}{7}\right) + \frac{1}{7} = -\frac{5}{7}$$

$$D\xi = \frac{9}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7} - \frac{25}{49} = \frac{13 \cdot 7}{49} - \frac{25}{49}$$

$$= \frac{91-25}{49} = \frac{66}{49}$$

$$H\xi = \sum_{-3}^{1} p_k \log_2 p_k =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{7} \log_2 \frac{1}{7} + \frac{3}{7} \log_2 \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \log_2 \frac{2}{7}$$

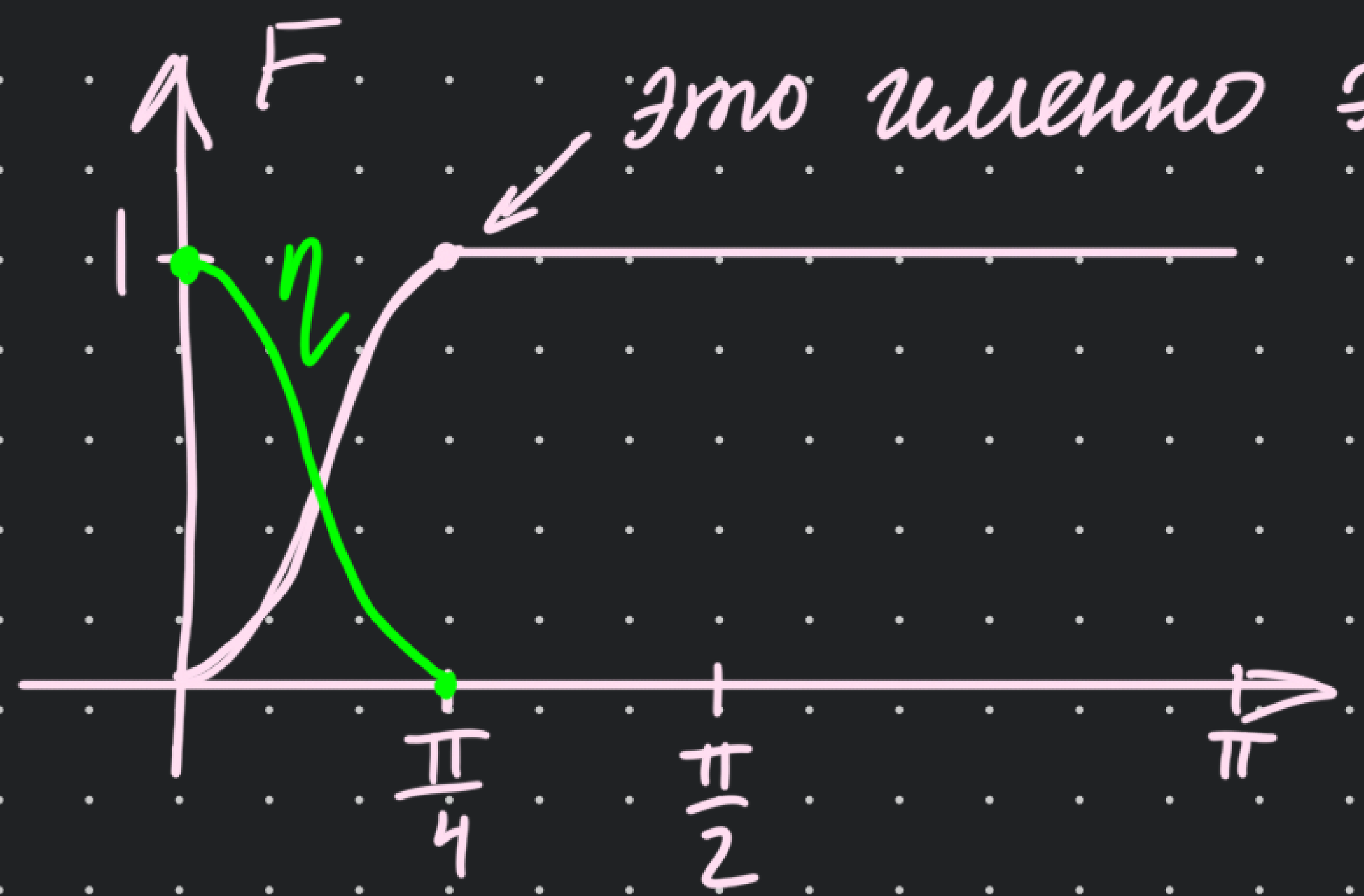
$$\eta = \xi^2 = \begin{array}{c|c|c|c} X & 0 & 1 & 9 \\ \hline p & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{array}$$

3. Дана функция распределения абс. непр. случайной величины ξ: $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ \sin(2x), \ x \in (0, C] \\ 1, \ x > C \end{cases}$. Найти C, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, энтропию ξ и распределение $\eta = \cos(2\xi)$.

$$P(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 2\cos 2x, x \in (0; C] \\ 0, x > C \end{cases}$$

$$\int_0^C 2\cos 2x \, dx = \sin 2x \Big|_0^C = \sin 2C - 0 =$$

$$= \sin 2C = 1$$



это именно эта точка, т.к F - должна возрастать

$$C = \frac{\pi}{4}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \sin 2x, x \in (0; \frac{\pi}{4}] \\ 1, x > C \end{cases}$$

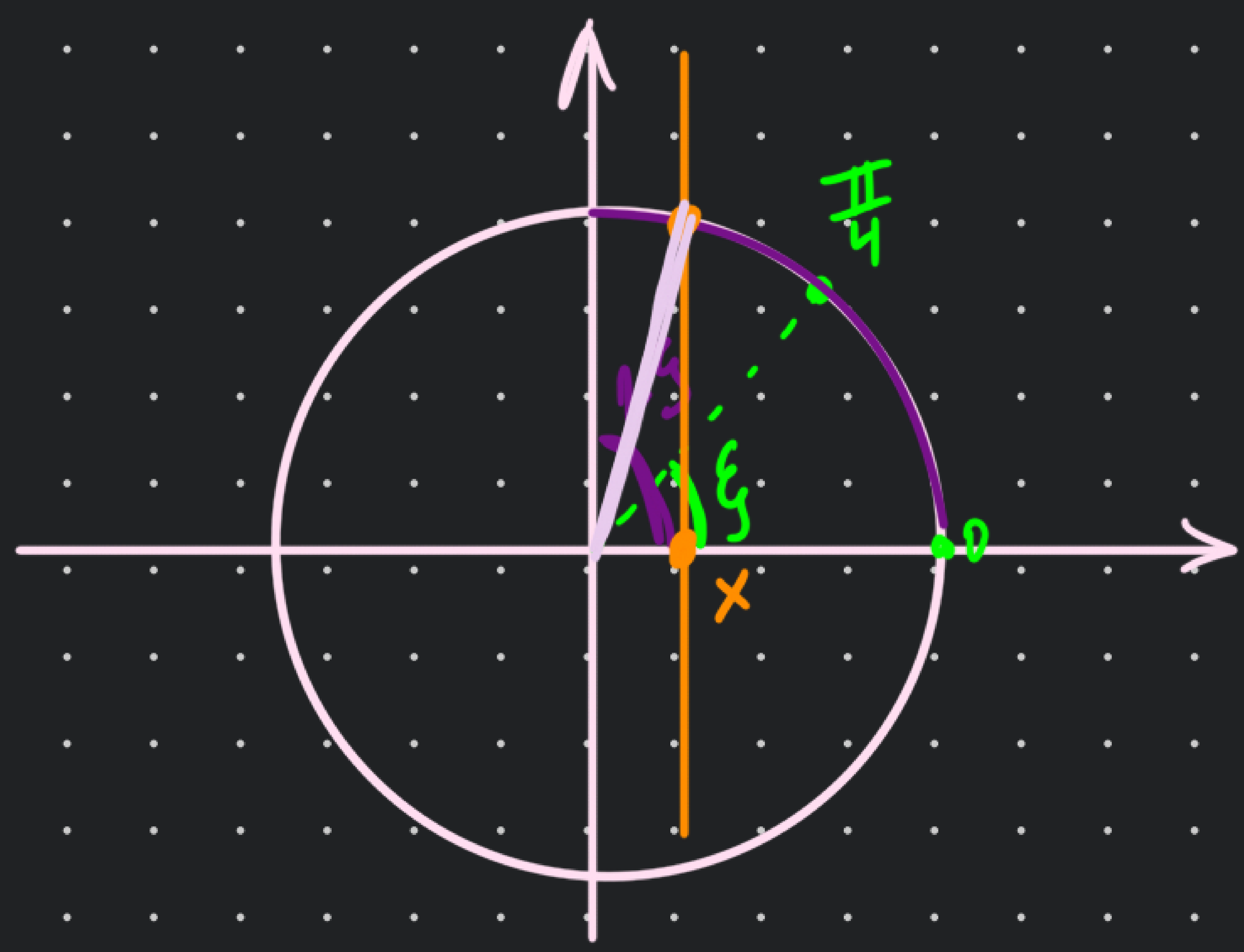
$\operatorname{supp} \xi = [0; \frac{\pi}{4}]$ $\quad$ $\operatorname{supp} \eta = [0; 1]$

$\cos 2\xi$

зеленое на гр.

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ *, x \in (0; 1] \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\cos 2\xi < x)$$



$\arccos x \le 2\xi$

$$P\left(\frac{\arccos x}{2} < \xi\right) = 1 - P\left(\xi < \frac{\arccos}{2}\right)$$

$$= 1 - F_{\xi}\left(\frac{\arccos x}{2}\right) =$$

$$= 1 - \sin 2\left(\frac{\arccos x}{2}\right)$$

$$F_{\eta} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - \sin(\arccos x), & x \in (0; 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$p_{\eta} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ +\cos(\arccos x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (0; 1] \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$E\xi = \int_0^{\pi/4} 2\cos 2x \cdot x \, dx = \begin{bmatrix} x = u & \cos 2x = v' \\ dx = du & v = \frac{\sin 2x}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= 2\left(\frac{x \cdot \sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{2} \right) =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{8} - \left(-\frac{\cos 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)$$

$$D\xi = \int_0^{\pi/4} x^2 \, 2\cos 2x \, dx =$$ [так же по частям, только 2 раза]

$$= \frac{1}{16}\left(\pi^2 - 8\right) - \left(2\cdot\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)\right)^2$$