Вар. 30 (513020125)

Плотность двумерного нормального распределения имеет вид:
$p_{\xi,\eta}(x,y) = C \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x + 2y + 5)\right)$;

1. Вычислить вектор мат. ожиданий и ковариационные характеристики данного случайного вектора.
2. Найти аффинное преобразование, переводящее исходный случайный вектор в стандартный нормальный.
3. Найти ортогональное преобразование, переводящее соответствующий центрированный случайный вектор в вектор с независимыми компонентами.
4. Вычислить характеристики совместного распределения случайного вектора $(-5\xi - \eta, -\xi + 2\eta)$ и записать его плотность.
5. Найти условное распределение ξ при условии η.

Яшнова Д.
5130201/20102

1) $p_{\xi,\eta}(x,y) = C \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x + 2y + 5)\right)$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\rho^2}\right)\left(\frac{(x-b_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-b_1)(y-b_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)$$

$$q(x,y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x + 2y + 5 =$$

$$2(x^2 + 2xy - 2x) + 5y^2 + 2y + 5 =$$

$$= 2(x+y-1)^2 + 5y^2 + 2y + 5 - 2y^2 - 2 + 4y =$$

$$= 2(x+y-1)^2 + 3y^2 + 6y + 3 = 2(x+y-1)^2 + 3(y+1)^2 = 2((x-2)+(y+1))^2 + 3(y+1)^2 =$$

$$= 2(x-2)^2 + 2(y+1)^2 + 4(x-2)(y+1) + 3(y+1)^2 =$$

$$= 2(x-2)^2 + 4(x-2)(y+1) + 5(y+1)^2$$

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = C \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(2(x-2)^2 + 4(x-2)(y+1) + 5(y+1)^2\right)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{R^{-1}} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{5}{6}$$

$$R = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2^2 = \frac{2}{6}$$

$$\rho = \frac{-2 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$C = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-0{,}4} \cdot \sqrt{\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6}}} = \frac{\sqrt{6}}{2\pi}$$

2

$$\frac{1}{|A|} p_\xi \left(A^{-1}(t-B)\right) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\overbrace{2((x-2)+(y+1))^2}^{t_1^2} + \overbrace{3(y+1)^2}^{t_2^2}\right)}$$

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$A(\xi - B) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 - 2 \\ \xi_2 + 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\xi_1 - 2) + \sqrt{2}(\xi_2 + 1) \\ \sqrt{3}(\xi_2 + 1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2 - \sqrt{2} \\ \sqrt{3}\xi_2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Var}\,\xi = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\eta_1 = \sqrt{2}\,\xi_1 + \sqrt{2}\,\xi_2 - \sqrt{2}$$

$$\eta_2 = \sqrt{3}\,\xi_2 + \sqrt{3}$$

Проверка: $A \operatorname{Var}\xi A^T =$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2\sqrt{6}+2\sqrt{6} & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \right)$

$B R B^T = \mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$

1) $(R - \lambda I) X = 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{6} - \lambda & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{2}{6} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{6} - \lambda\right)\left(\frac{2}{6} - \lambda\right) + \frac{4}{36} =$$

$$= \lambda^2 - \frac{7}{6}\lambda + \frac{1}{6} = \left(\lambda - \frac{1}{6}\right)(\lambda - 1)$$

$\lambda_1 = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $\lambda_2 = 1$

$R - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ $\qquad$ $R - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$X_1 = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $X_2 = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$m = BE\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

④

$$\nu = (-5\xi_1 - \xi_2, -\xi_1 + 2\xi_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$Var\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = A\, Var\, \xi\, A^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -23 & 8 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 107 & 39 \\ 39 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{107}{6} & \frac{13}{2} \\ \frac{13}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{107}{6} \qquad \sigma_2^2 = \frac{7}{2}$$

$$\rho = \frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{\frac{107}{6} \cdot \frac{7}{2}}} = \frac{13\sqrt{2247}}{749}$$

⑤

$$p_{\xi/\eta}(x) = \frac{p_{\xi,\eta}(x, y_0)}{p_\eta(y_0)} =$$

$$= c_1(y_0)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(2(x+y_0-1)^2\right) + c_2(y_0)\right) =$$

$$= \underset{c_1(y_0)\cdot e^{c_2(y_0)}}{\underset{\parallel}{c_3(y_0)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot 2\left(x-(-y_0+1)\right)^2\right)$$

$$\sigma^2(x_0) = \frac{1}{2}$$

$$m(x_0) = -y_0+1$$

$$E(\xi|\eta) = -y_0+1$$

$$D(\xi|\eta) = \frac{1}{2}.$$