1. Найти обратную матрицу, собственные числа и собственный вектор данной матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 2i & 3i \end{pmatrix}$

Подставим $i = 25$, тогда имеем матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 50 & 75 \end{pmatrix}$

** Найдем обратную матрицу A^{-1} **

1. Определитель данной матрицы равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 50 \\ 50 & 75 \end{vmatrix} = 75 - 2500 = -2425$$

2. Определитель $\Delta \neq 0$, значит обратная матрица су тв.

3. Найдем союзную матрицу $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^2 \cdot 75 & (-1)^3 \cdot 50 \\ (-1)^3 \cdot 50 & (-1)^4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & -50 \\ -50 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Транспонируем союзную матрицу

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 75 & -50 \\ -50 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Тогда обратная матрица A^{-1} равняется:

$$A^{-1} = -\frac{1}{\Delta} \tilde{A}^T = -\frac{1}{2425} \cdot \begin{pmatrix} 75 & -50 \\ -50 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{97} & \frac{2}{97} \\ \frac{2}{97} & -\frac{1}{2425} \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 50 & 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{97} & \frac{2}{97} \\ \frac{2}{97} & -\frac{1}{2425} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{97} + \frac{100}{97} & \frac{2}{97} - \frac{50}{2425} \\ -\frac{150}{97} + \frac{150}{97} & \frac{100}{97} - \frac{75}{2425} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{97}{97} & \frac{2-2}{97} \\ \frac{150-150}{97} & \frac{100-3}{97} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-\frac{3}{97} & \frac{2}{97}\\ \frac{2}{97} & -\frac{1}{2425}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 50\\ 50 & 75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{97}+\frac{100}{97} & -\frac{150}{97}+\frac{150}{97}\\ \frac{2}{97}-\frac{50}{2425} & \frac{100}{97}-\frac{75}{2425}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{100-3}{97} & \frac{150-150}{97}\\ \frac{2-2}{97} & \frac{100-3}{97}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Проверка сошлась $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, значит

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{97} & \frac{2}{97}\\ \frac{2}{97} & -\frac{1}{2425}\end{pmatrix}$$

** Найдем собственные числа матрицы A **

1. Из уравнения $AX=\lambda X \rightarrow (A-\lambda E)X=0$ получаем

$A-\lambda=\begin{pmatrix}1-\lambda & 50\\ 50 & 75-\lambda\end{pmatrix}$, тогда составим характеристич. уравнение

$$(1-\lambda)(75-\lambda)-2500=0$$

$$\lambda^2-76\lambda+75-2500=0$$

$$\lambda^2-76\lambda-2425=0$$

$$D=76^2+4\cdot 2425=5776+9700=15476=4\cdot 3869$$

тогда $\sqrt{D}=\sqrt{4\cdot 3869}=2\sqrt{3869}$

$$\lambda_1=\frac{76-2\sqrt{3869}}{2}=38-\sqrt{3869}$$

$$\lambda_2=\frac{76+2\sqrt{3869}}{2}=38+\sqrt{3869}$$

** Найдем собственные векторы **

Рассмотрим $\lambda_1=38-\sqrt{3869}$ и $X^1=\begin{pmatrix}x_1^1\\ x_2^1\end{pmatrix}$, тогда

$$(A-\lambda_1 E)X^1=0$$

$$\begin{pmatrix} 1-38+\sqrt{3869} & 50 \\ 50 & 75-38+\sqrt{3869} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} (\sqrt{3869}-37)x_1^1+50x_2^1=0 \\ 50x_1^1+(37+\sqrt{3869})x_2^1=0 \end{cases}$$

$$x_1^1=-\frac{50x_2^1}{\sqrt{3869}-37}=\frac{50}{37-\sqrt{3869}}x_2^1$$

Тогда пусть $x_2^1=1$, тогда $x_1^1=\frac{50}{37-\sqrt{3869}}$, а собств. вектор

$$X^1=\begin{pmatrix} \frac{50}{37-\sqrt{3869}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим $\lambda_2=38+\sqrt{3869}$, а $X^2=\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$, тогда

$$(A-\lambda_2 E)X^2=0$$

$$\begin{pmatrix} 1-38-\sqrt{3869} & 50 \\ 50 & 75-38-\sqrt{3869} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} -(37+\sqrt{3869})x_1^2+50x_2^2=0 \\ 50x_2^2+(37+\sqrt{3869})x_2^2=0 \end{cases}$$

$$x_1^2=\frac{50x_2^2}{37+\sqrt{3869}}$$

Тогда пусть $x_2^2=1$, а $x_1^2=\frac{50}{37+\sqrt{3869}}$, тогда собствен. вектор

$$X^2=\begin{pmatrix} \frac{50}{37+\sqrt{3869}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{97} & \frac{2}{97} \\ \frac{2}{97} & -\frac{1}{2425} \end{pmatrix}$, $\lambda=38\pm\sqrt{3869}$, $X=\begin{pmatrix} \frac{50}{37\pm\sqrt{3869}} \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Решить данное дифференц. уравнение

$\ddot{x} + k^2 x = a \sin \omega t$

Начальные условия $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = V_0$

1. Найдем общее решение ДУ: $\ddot{x} + k^2 x = 0$

пусть $x = e^{\lambda t}$, тогда

$\lambda^2 e^{\lambda t} + k^2 e^{\lambda t} = 0$

$(\lambda^2 + k^2) e^{\lambda t} = 0 \quad / : e^{\lambda t} > 0$

$\lambda^2 + k^2 = 0$

$\lambda^2 = -k^2$

$\lambda = \pm ki$, получается общее решение ДУ имеет вид:

$x_0 = C_1 e^{ki} + C_2 e^{-ki}$, что по формуле Эйлера равняется

$x_0 = C_1 e^{ikt} + C_2 e^{-ikt} = C_1 \cos kt + C_1 i \sin(kt) + C_2 \cos(kt) + C_2 i \sin(-kt) =$

$= (C_1 + C_2) \cos kt + (C_1 - C_2) i \cdot \sin kt = D_1 \cos kt + D_2 \sin kt$

2. Найдем частное решение:

$x_2 = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

$\dot{x}_2 = A\omega \cdot \cos \omega t - B\omega \cdot \sin \omega t$

$\ddot{x}_2 = -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t$

Тогда исходное ДУ имеет вид:

$-A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t + Ak^2 \sin \omega t + Bk^2 \cos \omega t = a \cdot \sin \omega t$

$\begin{cases} -A\omega^2 + Ak^2 = a \\ -B\omega^2 + Bk^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} A = \frac{a}{k^2 - \omega^2} \\ B = 0 \end{cases}$, где $|k| \neq |\omega|$

Тогда $y_2 = \frac{a}{k^2-\omega^2} \cdot \sin \omega t$

3. Получается итоговое решение ДУ

$$X = D_1 \cos kt + D_2 \sin kt + \frac{a}{k^2-\omega^2} \sin \omega t$$

$$x(0) = D_1 = X_0 \rightarrow D_1 = X_0$$

$$\dot{X} = -Dk \cdot \sin kt + D_2 k \cdot \cos kt + \frac{a\omega}{k^2-\omega^2} \cos \omega t$$

$$\dot{x}(0) = D_2 k + \frac{a\omega}{k^2-\omega^2} = V_0$$, тогда

$$D_2 = \frac{1}{k}\left(V_0 - \frac{a\omega}{k^2-\omega^2}\right) = \left(\frac{V_0}{k} - \frac{a\omega}{k(k^2-\omega^2)}\right)$$

Тогда итоговое решение при $|k| \neq |\omega|$

$$X = X_0 \cdot \cos kt + \left(\frac{V_0}{k} - \frac{a\omega}{k(k^2-\omega^2)}\right) \sin kt + \frac{a}{k^2-\omega^2} \sin \omega t$$

Проверка:

$$\dot{x} = -x_0 k \cdot \sin kt + \left(V_0 - \frac{a\omega}{k^2-\omega^2}\right) \cos kt + \frac{a\omega}{k^2-\omega^2} \cos \omega t$$

$$\ddot{x} = -X_0 k^2 \cos kt - \left(V_0 k - \frac{a\omega k}{k^2-\omega^2}\right) \sin kt - \frac{a\omega^2}{k^2-\omega^2} \sin \omega t$$

Подставляем в начальное ДУ:

$$\cancel{-X_0 k^2 \cos kt} \cancel{- \left(V_0 k - \frac{a\omega k}{k^2-\omega^2}\right) \sin kt} - \frac{a\omega^2}{k^2-\omega^2} \sin \omega t + \cancel{X_0 k^2 \cos kt} +$$

$$\cancel{+ \left(V_0 k - \frac{a\omega k}{k^2-\omega^2}\right) \sin kt} + \frac{a k^2}{k^2-\omega^2} \sin \omega t = (k^2-\omega^2) X_0 \cos \omega t +$$

$$+ \frac{\cancel{k^2-\omega^2}^{\,1}}{\cancel{k^2-\omega^2}} \cdot a \cdot \sin \omega t = a \sin \omega t$$

Проверка сошлась $a \sin \omega t = a \sin \omega t$

Проверка сошлась $a \sin \omega t = a \sin \omega t$

Ответ:

Рассмотрим случай $k = \omega + \Delta\omega$, где $\Delta\omega \to 0$, тогда

$$\begin{cases} -A\omega^2 + Ak^2 = a \to -\cancel{A\omega^2} + \cancel{A\omega^2} + 2A\omega\cdot\Delta\omega + \cancel{A\Delta\omega^2} = a \\ -B\omega^2 + Bk^2 = 0 \to B = 0 \end{cases}$$

0

Тогда $2A\omega\cdot\Delta\omega = a$, где $\Delta\omega \to 0$, тогда

$$A = \frac{a}{2\omega\cdot\Delta\omega}, \text{ тогда}$$

$$X_2 = \frac{a}{2\omega\Delta\omega}\sin\omega t$$

3. Тогда решение ДУ получается

$$X = D_1\cos kt + D_2\sin kt + \frac{a}{2\omega\Delta\omega}\sin\omega t$$

$$X(0) = D_1 = X_0$$

$$\dot{X} = -D_1 k\sin kt + D_2\cos kt + \frac{a}{2\Delta\omega}\cos\omega t$$

$$\dot{X}(0) = D_2 + \frac{a}{2\Delta\omega} = V_0 \to D_2 = V_0 - \frac{a}{2\Delta\omega}$$

$$X = X_0\cos kt + \left(V_0 - \frac{a}{2\Delta\omega}\right)\sin kt + \frac{a}{2\Delta\omega}\cos\omega t$$

$$X = \left(V_0 - \frac{a}{2\Delta\omega}\right)\sin kt + \left(X_0 + \frac{a}{2\Delta\omega}\right)\cos\omega t$$

Так как $\Delta\omega \to 0$, тогда $\frac{a}{2\Delta\omega} \gg V_0$ и $\frac{a}{2\Delta\omega} \gg X_0 \to$

$$X = -\frac{a}{2\Delta\omega}\sin kt + \frac{a}{2\Delta\omega}\cos kt$$

$$X = \frac{a}{2\Delta\omega}(\cos kt - \sin kt)$$

$$X = \frac{a}{\sqrt{2}\Delta\omega}\left(\cos kt\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \sin kt\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$X = \frac{a}{\sqrt{2}\Delta\omega}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} + kt\right)$$

1. Найти обратную матрицу, собственные числа и собственный вектор данной матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 3i \\ 2i & 2i \end{pmatrix}$

Подставим $i = 25$, тогда имеем матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 50 & 75 \end{pmatrix}$

Найдем обратную матрицу, приоединив к начальн. матрице единичную и с помощью элементарных преобразований получив из начальной матрицы единичную, тогда приоединеная матрица и будет обратной:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 50 & 1 & 0 \\ 50 & 75 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Умножим первую строку на -50 и сложим со 2-ой строкой

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 50 & 1 & 0 \\ 0 & -2425 & -50 & 1 \end{array}\right)$$

Разделим 2-ую строку на (-2425)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 50 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{97} & -\frac{1}{2425} \end{array}\right)$$

Умножим вторую строку на -50 и сложим ее с 1-ой строкой

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{97} & \frac{2}{97} \\ 0 & 1 & \frac{2}{97} & -\frac{1}{2425} \end{array}\right)$$