18. Применение рядов Тейлора и Маклорена к приближенным вычислениям. Стандартные разложения (разложение элементарных функций) и их интервалы сходимости. Сведение вычислений к применению стандартных разложений. Демонстрационные примеры.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \ldots \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad -1 < x \le 1$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \quad -1 \le x \le 1$$

1) Используя разложение ф-и в ряд вычислить число e, ограничившись 5 членами ряда.

$$e^1 \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} \approx 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}167 + 0{,}042 = 2{,}708$$

2) Используя разложение ф-и в ряд вычислить $\sin 0{,}8$ с точностью до 0,001

$$\sin 0{,}8 = 0{,}8 - \frac{(0{,}8)^3}{6} + \frac{(0{,}8)^5}{120} - \frac{(0{,}8)^7}{7!} + \frac{(0{,}8)^9}{9!} - \ldots \approx$$

$$\approx 0{,}8 - 0{,}085333 + 0{,}002731 - 0{,}000042 + 0{,}0000004 - \ldots \approx$$

$$\approx 0{,}717, \text{ т.к. } |-0{,}000042| < 0{,}001$$

В ПИЗДУ

19. ТОТ ЖЕ 18

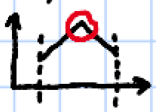
20. Ряд Фурье. Сходимость ряда в точках непрерывности и точках разрыва 1 рода. Важность рядов Фурье для передачи периодических

сигналов. Понятие спектра. Математические причины искажения передачи сигналов.

20. Ряд Фурье. Сходимость ряда в точках непрерывности...

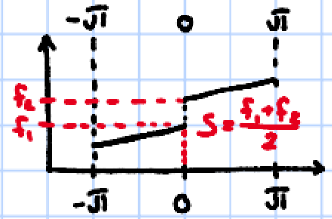
Ряд Фурье - способ разложения переодических функций с неизменяемым периодом в сумму ряда более простых тригонометрических функций

Есть ровно одно достаточное условие при котором данную функцию можно разложить в ряд Фурье:

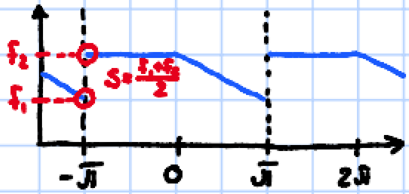
Теорема Дирихле: если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π - кусочно-монотонная (т.е. функцию можно разбить на интервалы в пределах которых функция будет монотонной, т.е. без разрывов и резких перегибов по типу таким: ) и ограниченная (т.е. не уходит в $+\infty$ или $-\infty$) на отрезке $[-\pi; \pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции сходится во всех точках. Тогда сумма ряда равна:

1) $S(x) = f(x)$ - в точках непрерывности

2) $S(x) = \frac{1}{2}\left(f(x_0-0) + f(x_0+0)\right)$ - в точке x_0 разрыва функции, т.е.:



3) $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right)$



Базовое (каноническое) представление для периода 2π:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx + b_n \sin nx \quad , \text{где}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

— оно нарушается только в точках разрыва функции и на концах интервала

Общая формула выглядит следующим образом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T}\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T} dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T} dx$$

Понятие спектра

По сути есть два способа представления ряда Фурье →

1. Напрямую с помощью a_n и b_n
2. С помощью амплитуды и фазы

Тогда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T} - \varphi_n\right)$, где: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$

$(T = 2\pi)$

если $a_n = 0 \to$ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{a_n \cos nx} + b_n \sin nx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

$A_n = \sqrt{0 + b_n^2} = b_n$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{0} = \operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2} \to$

$\to f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(nx - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

Как пример $f(x) = \sin x + 0{,}5 \cos 2x$, тогда спектр будет содержать две частоты:

1. $A = 1$, $\omega = 1$ $\left(\omega = \frac{1}{T} - \text{частота}\right)$
2. $A = 0{,}5$, $\omega = 2$

– Данное разложение и является спектром, т.е. это анализ частот, амплитуд и фаз для дальнейшего изучения св-в функции

![[Pasted image 20241224102405.png]]

Сходимость ряда

Если функция непрерывна в точке x_0, то ряд Фурье сходится к значению в этой точке.

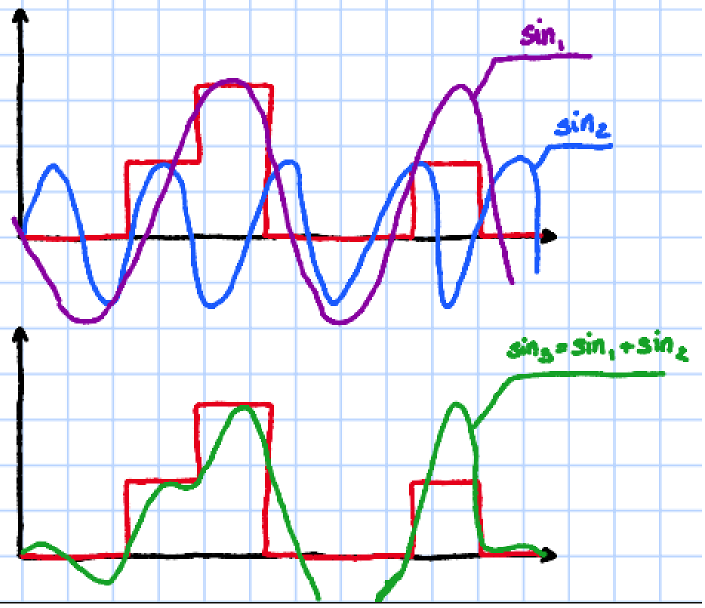
Если $f(x)$ имеет разрыв первого рода в точке x_0, то ряд Фурье сходится к среднему значению правого и левого пределов: $S(x_0) = \dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$

Важность рядов Фурье для передачи периодич. сигналов

Ряды Фурье позволяют:

1. Разложить сложный сигнал на состовляющие частоты спектра
2. Оптимизировать обработку и фильтрацию сигналов

Т.е. бесконечн. суммой синусоид повторяются очертания период. функции, которая нам нужна



Понятие спектра

По сути есть два способа представления ряда Фурье →

1. Напрямую с помощью a_n и b_n
2. С помощью амплитуды и фазы

Тогда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T} - \varphi_n\right)$, где: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$

$(T = 2\pi)$

если $a_n = 0 \rightarrow$ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{a_n \cos nx}^{\,0} + b_n \sin nx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

$A_n = \sqrt{0 + b_n^2} = b_n$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{0} = \operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2} \rightarrow$

$$\rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(nx - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

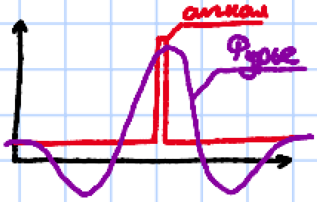
Как пример $f(x) = \sin x + 0{,}5 \cos 2x$, тогда спектр будет содержать две частоты:

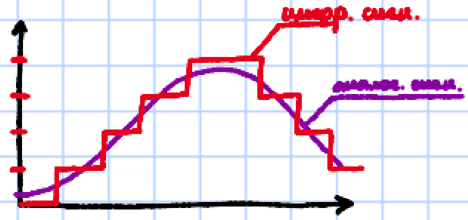
1. $A = 1,\ \omega = 1$ $\left(\omega = \frac{1}{T} \text{ - частота}\right)$
2. $A = 0{,}5,\ \omega = 2$

- Данное разложение и является спектром, т.е. это анализ частот, амплитуд и фаз для дальнейшего изучения св-в функции

Искажения при передаче сигнала:

1. Фильтрация: резкие скачки функции сглаживаются:



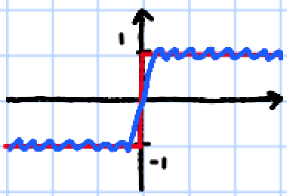


2. Квантование: при цифровой передаче сигнала часть информации теряется:

3. Огранич. ширина канала – общая проблема

Демонстрационный пример

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0 \leqslant x < \pi \\ -1, & \pi \leqslant x < 2\pi\end{cases}$$, разрыв в π →



Значит ряд Фурье в $x_0=0$ → будет также 0

21. Ряды Фурье. Аналитическое (чётное и нечётное) продолжение периодических функций, заданных на правой полуплоскости. Понятие спектра.

21. Ряды Фурье. Аналитическое продолж. периодич. функц...

Аналитическое приближение – способ расширить функцию, заданную на ограниченной области, до более широкой области.

В контексте рядов Фурье есть четное и нечетное продолжение функции

$\exists$ $f(x)$ задана на интервале $[0;L]$, для построения ряда Фурье необходимо продлить его до $[-L;L]$

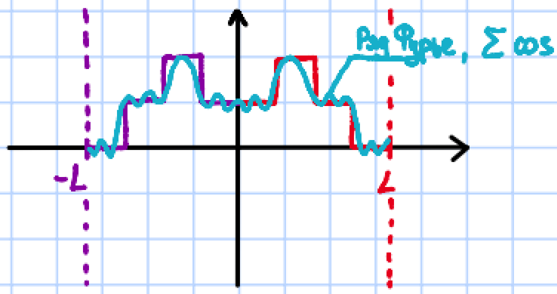
1. Четное продолжение

$f(x)=f(-x)$, в таком случае функция становится четной, а значит в ряде остаются только четные cos:

$$f_ч(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx\,,$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$



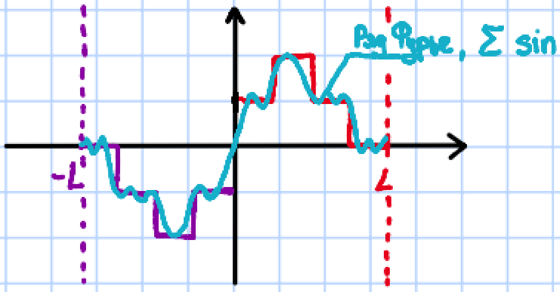
1. Четное продолжение

$f(-x) = -f(x)$, в таком случае функция становится нечетной, а значит в ряде остаются только нечетные sin:

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

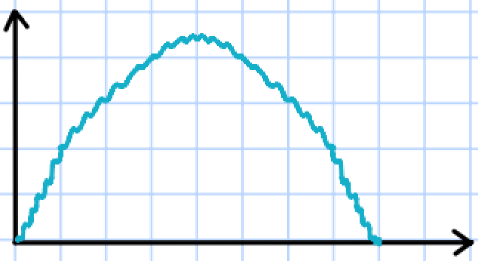
($a_0 = 0$, т.к. чтобы функция была нечетной она должна проходить через ноль)



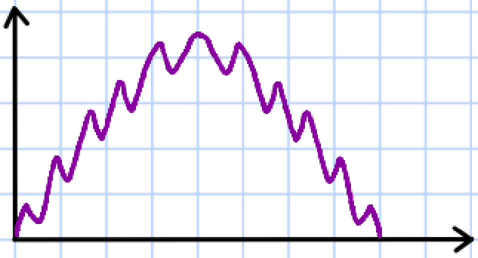
Понятие спектра

Спектр функции показывает распред. частотных составляющих в ряде Фурье. Он состоит из:

1. Амплитудных компонентов $|a_n|$ и $|b_n|$, определ. вклад каждой частоты:

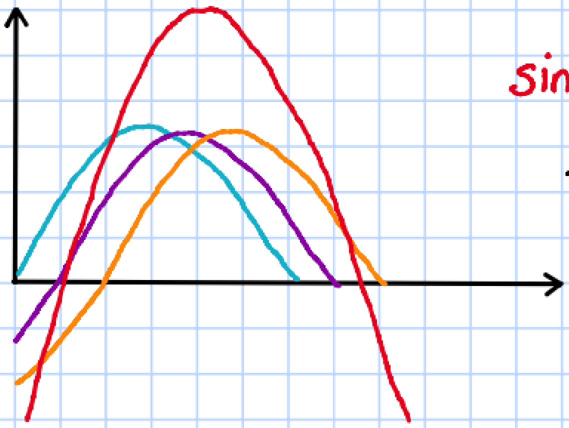


маленький вклад высокой частоты



большой вклад высокой частоты

2. Фазовых коэффициентов, которые задают сдвиг фаз



$\sin = \sin + \sin + \sin$

– влияет на формирование резонансов

Очевидно, четное продолжен. создает спектр только с cos-компонентами, а нечетное → sin-компонентами

Демонстрац. примеры:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;\pi] \\ x-\pi, & x \in [\pi;2\pi] \end{cases}$$, продолжить четно →

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n x}{T}$$, тогда

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx + \frac{2}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(x-\pi)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(x^2\Big|_0^{\pi}\right) + \frac{1}{\pi}\left((x-\pi)^2\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}\cdot\pi^{\cancel{2}} + \frac{1}{\pi}(\pi^2 - 0) = \pi + \pi = 2\pi$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx + \frac{2}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(x-\pi)\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(x-\pi)\cos nx\,dx =$$ интегрир. по частям

22. Ряд Фурье в амплитудно-фазовой форме. Понятие спектра. Математические причины искажения передачи сигналов.

22. Ряды Фурье в амплит.-фаз. форме. Понятие спектра...

Понятие спектра

По сути есть два способа представления ряда Фурье →

1. Напрямую с помощью a_n и b_n
2. С помощью амплитуды и фазы

Тогда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T} - \varphi_n\right)$, где: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$

$(T = 2\pi)$

если $a_n = 0$ → $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{a_n \cos nx} + b_n \sin nx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

$A_n = \sqrt{0 + b_n^2} = b_n$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{0} = \operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2}$ →

→ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(nx - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

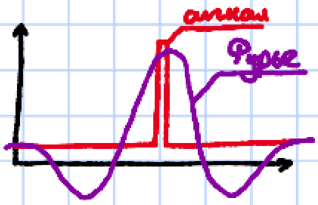
Как пример $f(x) = \underline{\sin x} + \underline{0{,}5 \cos 2x}$, тогда спектр будет содержать две частоты:

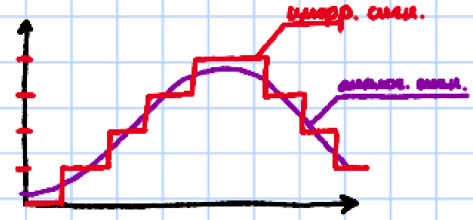
1. $\underline{A = 1,\ \omega = 1}$ $\left(\omega = \frac{1}{T} \text{ - частота}\right)$
2. $\underline{A = 0{,}5,\ \omega = 2}$

– Данное разложение и является спектром, т.е. это анализ частот, амплитуд и фаз для дальнейшего изучения св-в функции

Искажения при передаче сигнала:

1. Фильтрация: резкие скачки функции сглаживаются:



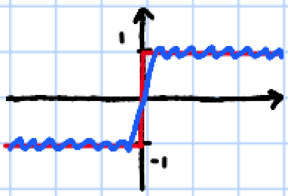


2. Квантование: при цифровой передаче сигнала часть информации теряется:

3. Огранич. ширина канала – общая проблема

Демонстрационный пример

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < \pi \\ -1, & \pi \leqslant x < 2\pi \end{cases}$$, разрыв в π →



Значит ряд Фурье в $x_0 = 0$ → будет также 0

Дальше пока что отсутствуют