

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого»

Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Направление: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Вычислительная математика
Лабораторная работа №2. Аппроксимация
Вариант 36

Студент,
группы 5130201/30002

_____ Михайлова А. А.

Руководитель,

_____ Пак В. Г.

«_____» _____ 20 __ г.

Санкт-Петербург, 2024, осенний семестр

1 Заданная таблица

Для данной табличной функции (см. Таблица 1) построить методом наименьших квадратов линейную и квадратичную полиномиальные модели, вычислить наилучшие среднеквадратические отклонения.

Таблица 1: Значения функции

x	y
0.10	0.21
0.22	0.34
0.34	0.37
0.46	0.41
0.58	0.48
0.70	0.53
0.82	0.57
0.94	0.59
1.06	0.62
1.18	0.64
1.30	0.41
1.42	0.29
1.54	0.16
1.66	0.07
1.78	0.01
1.90	-0.04
2.02	-0.09
2.14	-1.02
2.26	-1.09
2.38	-2.04

2 Линейная модель

Необходимо найти линейную регрессию для заданной табличной функции. Линейная регрессия имеет вид: $\hat{y} = b + ax$ Вычислим коэффициенты a и b уравнения линейной регрессии по известным формулам.

$$a = \frac{\sum x_i \sum y_i - n \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2} = \frac{24.8 \cdot 1.42 - 20 \cdot (-4.94)}{(24.8)^2 - 20 \cdot 40.328} \approx -0.6997;$$

$$b = \frac{\sum x_i \sum y_i - \sum x_i^2 \sum y_i}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2} = \frac{24.8 \cdot (-4.94) - 40.328 \cdot 1.42}{(24.8)^2 - 20 \cdot 40.328} \approx 0.9387.$$

Искомое уравнение линейной регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = -0.6997x + 0.9387$$

3 Квадратичная модель

Найдём коэффициенты a , b и c уравнения квадратичной регрессии $\hat{y} = ax^2 + bx + c$ из системы уравнений

$$\begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i + nc = \sum y_i, \\ a \sum x_i^4 + b \sum x_i^2 + c \sum x_i = \sum x_i y_i, \\ a \sum x_i^4 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i; \end{cases}$$

Решим эту систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 40.328 & 24.8 & 20 \\ 73.7552 & 40.328 & 24.8 \\ 143.854 & 73.7552 & 40.328 \end{vmatrix} = -697.2117;$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 1.42 & 24.8 & 20 \\ -4.94 & 40.328 & 24.8 \\ -17.3622 & 73.7552 & 40.328 \end{vmatrix} = 690.9061 \implies a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{690.9061}{-697.2117} \approx -0.991;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 40.328 & 1.42 & 20 \\ 73.7552 & -4.94 & 24.8 \\ 143.854 & -17.3622 & 40.328 \end{vmatrix} = -1225.5737 \implies b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{-1225.5737}{-697.2117} \approx 1.7578;$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 40.328 & 24.8 & 1.42 \\ 73.7552 & 40.328 & -4.94 \\ 143.854 & 73.7552 & -17.3622 \end{vmatrix} = 77.0662 \implies c = \frac{\Delta_c}{\Delta} = \frac{77.0662}{-697.2117} \approx -0.1105.$$

Итак, искомое уравнение квадратичной регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = -0.991x^2 + 1.7578x - 0.1105.$$

4 Проверка и среднеквадратические отклонения в Engage

```
1 import Pkg; Pkg.add("LinearAlgebra")
2 import Pkg; Pkg.add("Statistics")
3 using Plots
4
5 function custom_mean(data::Vector{T}) where T
6     total = sum(data)
7     return total / length(data)
8 end
9
10 x = [0.10, 0.22, 0.34, 0.46, 0.58, 0.70, 0.82, 0.94, 1.06, 1.18,
11      1.30, 1.42, 1.54, 1.66, 1.78, 1.90, 2.02, 2.14, 2.26, 2.38]
12 y = [0.21, 0.34, 0.37, 0.41, 0.48, 0.53, 0.57, 0.59, 0.62, 0.64,
13      0.41, 0.29, 0.16, 0.07, 0.01, -0.04, -0.09, -1.02, -1.09, -2.04]
14
15 x = collect(x)
16 y = collect(y)
17
18 X_linear = hcat(ones(length(x)), x)
19 beta_linear = X_linear \ y
20 y_pred_linear = X_linear * beta_linear
21
22 X_quad = hcat(ones(length(x)), x, x.^2)
23 beta_quad = X_quad \ y
24 y_pred_quad = X_quad * beta_quad
25
26 mse_linear = custom_mean((y .- y_pred_linear).^2)
27 mse_quad = custom_mean((y .- y_pred_quad).^2)
28
29 println("Коэффициенты линейной модели: ", beta_linear)
30 println("Среднеквадратическое отклонение линейной модели: ", mse_linear)
31
32 println("Коэффициенты квадратичной модели: ", beta_quad)
33 println("Среднеквадратическое отклонение квадратичной модели: ", mse_quad)
34
35 plot(x, y, seriestype=:scatter, label="Данные", xlabel="x", ylabel="y")
36 plot!(x, y_pred_linear, label="Линейная модель", lw=2)
37 plot!(x, y_pred_quad, label="Квадратичная модель", lw=2, linestyle=:dash)
```

Рис. 1: Код в Engage

Коэффициенты линейной модели: $[0.9386892230576438, -0.6997493734335838]$
Среднеквадратическое отклонение линейной модели: 0.21679496992481204
Коэффициенты квадратичной модели: $[-0.11053491050859757, 1.7578213209792204, -0.9909559251664535]$
Среднеквадратическое отклонение квадратичной модели: 0.03805188949646849

Рис. 2: Проверка значений и среднеквадратические отклонения

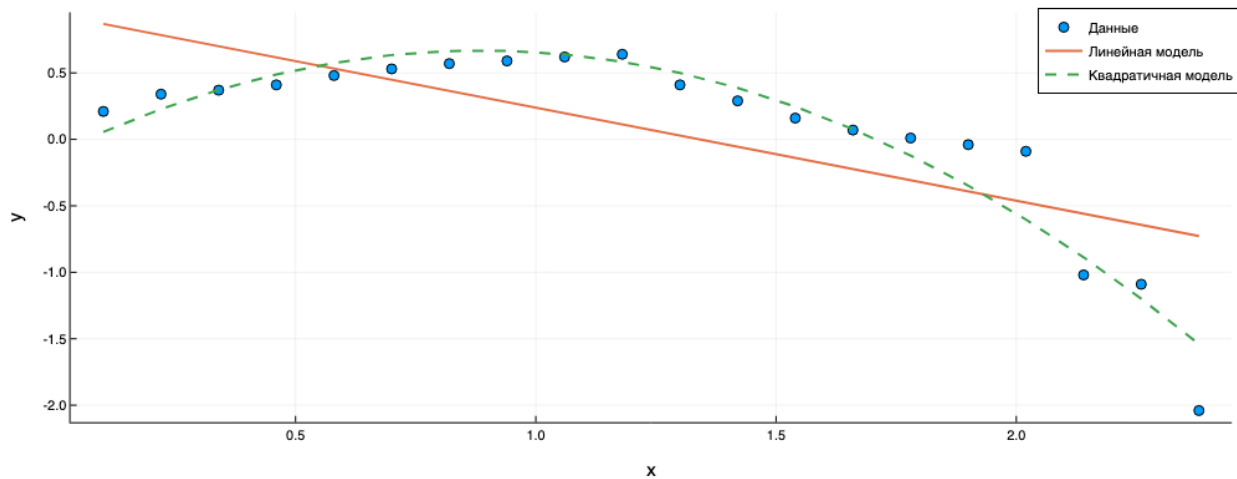


Рис. 3: Графики

Вывод: наши значения верны