

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого»

Институт компьютерных наук и кибербезопасности  
Высшая школа технологий искусственного интеллекта  
Направление: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

## Отчёт о выполнении лабораторной работы №3

по дисциплине Вычислительная математика  
Кубические сплайны

Вариант 36

Студент,

группа 5130201/30002

\_\_\_\_\_ Михайлова А. А.

Преподаватель

\_\_\_\_\_ Пак В. Г.

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024г.

Санкт-Петербург, 2024

# 1 Задание

Построить по таблице интерполяционный кубический сплайн с заданными граничными условиями.

Таблица 1. Табличные данные

$x_i$	$y_i$
-10,121	0,1425
-9,993	0,3465
-9,874	0,3568
-9,710	0,6891
-9,653	0,7571
-9,518	0,8251
-9,412	0,9612
-9,397	1,0121
-9,248	0,1520

## 2 Решение

На каждом частичном отрезке  $[x_{i-1}; x_i]$  сплайн третьей степени определяется по формуле:

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = y_{i-1} + \frac{(x - x_i)^2(2(x - x_{i-1}) + h_i)}{h_i^3} +$$

$$+ \frac{s_{i-1}}{h_i^2}(x - x_i)(x - x_{i-1}) + y_i + \frac{(x - x_{i-1})^2(2(x_i - x) + h_i)}{h_i^3} + \frac{s_i}{h_i^2}(x - x_{i-1})(x - x_i)$$

Для каждого отрезка напомним систему уравнений:

$$1. S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$$

$$2. S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$$

$$3. S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$$

$$4. S'_0(x_0) = S'_7(x_8); S''_0(x_0) = S''_7(x_8) - \text{добавочные условия для периодичности}$$

Напишем программу на языке программирования julia в среде разработки Engage для нахождения коэффициентов уравнений каждого отрезка (Рис. 1).

```

1  using LinearAlgebra
2
3  xi = [-10.121, -9.993, -9.874, -9.710, -9.653, -9.518, -9.412, -9.397, -9.248]
4  yi = [0.1425, 0.3465, 0.3568, 0.6891, 0.7571, 0.8251, 0.9612, 1.0121, 0.1520]
5
6  n = length(xi)
7  T = xi[end] - xi[1]
8
9  h = [xi[i+1] - xi[i] for i in 1:n-1]
10
11  A = zeros(n, n)
12  b = zeros(n)
13
14  for i in 2:n-1
15      A[i, i-1] = h[i-1]
16      A[i, i] = 2 * (h[i-1] + h[i])
17      A[i, i+1] = h[i]
18      b[i] = 3 * ((yi[i+1] - yi[i]) / h[i] - (yi[i] - yi[i-1]) / h[i-1])
19  end
20
21  A[1, 1] = 2 * (h[1] + h[end])
22  A[1, 2] = h[1]
23  A[1, end] = h[end]
24  b[1] = 3 * ((yi[2] - yi[1]) / h[1] - (yi[end] - yi[end-1]) / h[end])
25
26  A[end, 1] = h[end]
27  A[end, end-1] = h[end-1]
28  A[end, end] = 2 * (h[end] + h[end-1])
29  b[end] = 3 * ((yi[1] - yi[end]) / T - (yi[end] - yi[end-1]) / h[end-1])
30
31  c = A \ b
32
33  b_coeff = zeros(n-1)
34  d_coeff = zeros(n-1)
35
36  for i in 1:n-1
37      b_coeff[i] = (yi[i+1] - yi[i]) / h[i] - h[i] * (2 * c[i] + c[i+1]) / 3
38      d_coeff[i] = (c[i+1] - c[i]) / (3 * h[i])
39  end
40
41  a_coeff = yi[1:end-1]
42
43  println("Коэффициенты a[i], b[i], c[i], d[i]:")
44  for i in 1:n-1
45      println("На отрезке [", xi[i], ", ", xi[i+1], "]")
46      println("a[i] = $(round(a_coeff[i], digits=4))")
47      println("b[i] = $(round(b_coeff[i], digits=4))")
48      println("c[i] = $(round(c[i], digits=4))")
49      println("d[i] = $(round(d_coeff[i], digits=4))")
50  end

```

Рис. 1. Программа для нахождения коэффициентов уравнения куб. сплайна.

Получив коэффициенты получаем следующий набор уравнений кубического сплайна для каждого отрезка.

$$f(x) = \begin{cases} -3.4061 \cdot 10^1 \cdot x^3 - 1.0342 \cdot 10^3 \cdot x^2 - 1.0465 \cdot 10^4 \cdot x - 3.5291 \cdot 10^4, & \text{if } x \in [-10.121, -9.993], \\ 8.2295 \cdot 10^1 \cdot x^3 + 2.4540 \cdot 10^3 \cdot x^2 + 2.4393 \cdot 10^4 \cdot x + 8.0822 \cdot 10^4, & \text{if } x \in (-9.993, -9.874], \\ -5.6061 \cdot 10^1 \cdot x^3 - 1.6443 \cdot 10^3 \cdot x^2 - 1.6074 \cdot 10^4 \cdot x - 5.2371 \cdot 10^4, & \text{if } x \in (-9.874, -9.710], \\ 4.6879 \cdot 10^1 \cdot x^3 + 1.3543 \cdot 10^3 \cdot x^2 + 1.3042 \cdot 10^4 \cdot x + 4.1871 \cdot 10^4, & \text{if } x \in (-9.710, -9.653], \\ 4.9430 \cdot 10^3 \cdot x^3 + 1.3988 \cdot 10^2 \cdot x^2 + 1.3196 \cdot 10^3 \cdot x + 4.1507 \cdot 10^3, & \text{if } x \in (-9.653, -9.518], \\ 1.0457 \cdot 10^2 \cdot x^3 + 2.9847 \cdot 10^3 \cdot x^2 + 2.8396 \cdot 10^4, & \text{if } x \in (-9.518, -9.412], \\ -2.6064 \cdot 10^3 \cdot x^3 - 7.3561 \cdot 10^4 \cdot x^2 - 6.9206 \cdot 10^5 \cdot x - 2.1702 \cdot 10^6, & \text{if } x \in (-9.412, -9.397], \\ 1.9082 \cdot 10^2 \cdot x^3 + 5.2941 \cdot 10^3 \cdot x^2 + 4.8950 \cdot 10^4 \cdot x + 1.5083 \cdot 10^5, & \text{if } x \in (-9.397, -9.248]. \end{cases} \quad (1)$$

Данная система уравнений и будет являться ответом на задание. Также с помощью языка программирования python напомним программу для построения графика этого кубического сплайна (Рис. 2).

```

1 import numpy as np
2 from scipy.interpolate import CubicSpline
3 x = np.array([-10.121, -9.993, -9.874, -9.710, -9.653, -9.518, -9.412, -9.397, -9.248])
4 y = np.array([0.1425, 0.3465, 0.3568, 0.6891, 0.7571, 0.8251, 0.9612, 1.0121, 0.1520])
5 cs = CubicSpline(x, y)
6 x_new = np.linspace(-10.121, -9.248, 100)
7 y_new = cs(x_new)
8 # Визуализация
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 plt.plot(x, y, 'o', label="Данные")
11 plt.plot(x_new, y_new, label='Кубический сплайн')
12 plt.legend()
13 plt.xlabel('x')
14 plt.ylabel('y')
15 plt.title('Интерполяционный кубический сплайн (периодический)')
16 plt.show()

```

Рис. 2. Программа для отображения графика кубического сплайна

После выполнения программы получаем следующий график (Рис. 3).

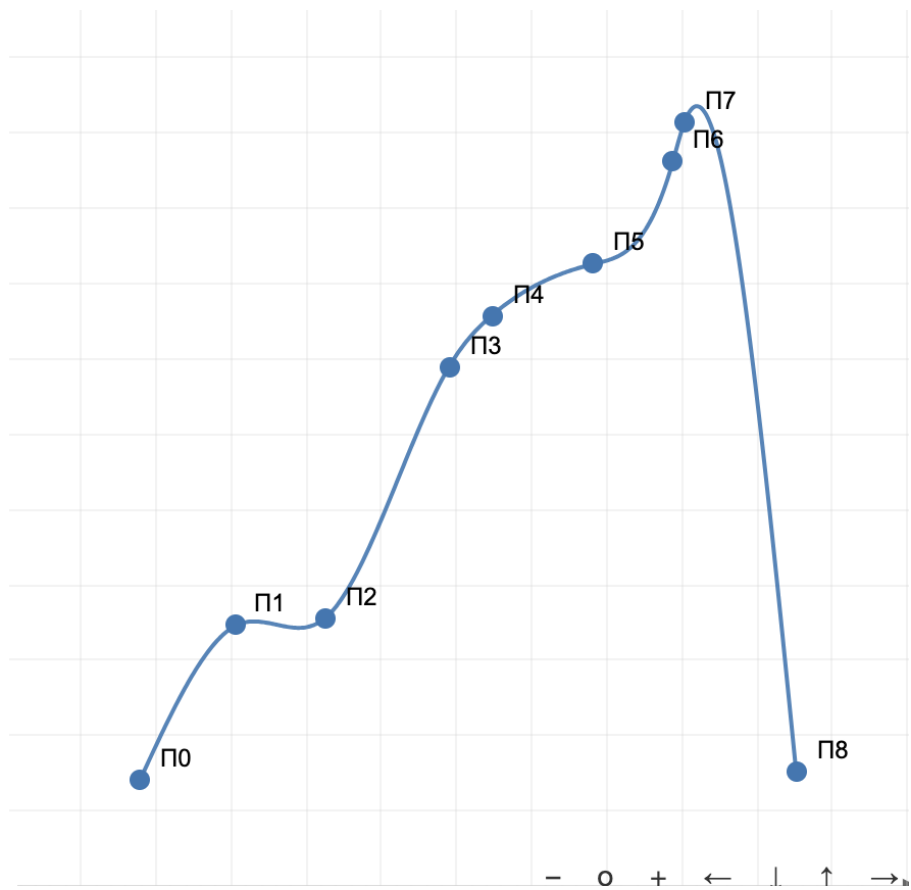


Рис. 3. График кубического сплайна

### 3 Ответ

Кубическим сплайном для заданной таблицы является следующая система уравнений.

$$f(x) = \begin{cases} -3.4061 \cdot 10^1 \cdot x^3 - 1.0342 \cdot 10^3 \cdot x^2 - 1.0465 \cdot 10^4 \cdot x - 3.5291 \cdot 10^4, & \text{if } x \in [-10.121, -9.993], \\ 8.2295 \cdot 10^1 \cdot x^3 + 2.4540 \cdot 10^3 \cdot x^2 + 2.4393 \cdot 10^4 \cdot x + 8.0822 \cdot 10^4, & \text{if } x \in (-9.993, -9.874], \\ -5.6061 \cdot 10^1 \cdot x^3 - 1.6443 \cdot 10^3 \cdot x^2 - 1.6074 \cdot 10^4 \cdot x - 5.2371 \cdot 10^4, & \text{if } x \in (-9.874, -9.710], \\ 4.6879 \cdot 10^1 \cdot x^3 + 1.3543 \cdot 10^3 \cdot x^2 + 1.3042 \cdot 10^4 \cdot x + 4.1871 \cdot 10^4, & \text{if } x \in (-9.710, -9.653], \\ 4.9430 \cdot 10^3 \cdot x^3 + 1.3988 \cdot 10^2 \cdot x^2 + 1.3196 \cdot 10^3 \cdot x + 4.1507 \cdot 10^3, & \text{if } x \in (-9.653, -9.518], \\ 1.0457 \cdot 10^2 \cdot x^3 + 2.9847 \cdot 10^3 \cdot x^2 + 2.8396 \cdot 10^4, & \text{if } x \in (-9.518, -9.412], \\ -2.6064 \cdot 10^3 \cdot x^3 - 7.3561 \cdot 10^4 \cdot x^2 - 6.9206 \cdot 10^5 \cdot x - 2.1702 \cdot 10^6, & \text{if } x \in (-9.412, -9.397], \\ 1.9082 \cdot 10^2 \cdot x^3 + 5.2941 \cdot 10^3 \cdot x^2 + 4.8950 \cdot 10^4 \cdot x + 1.5083 \cdot 10^5, & \text{if } x \in (-9.397, -9.248]. \end{cases}$$

(2)