ТАУ. 2 семестр

0. Повторение - мать учения

База

Вообще чем мы управляем? По сути у нас есть системы с каким-то входом, какими-то внешними обстоятельствами, и у которых мы хотим получить необходимый выходной сигнал.
Любую систему можно представить как дифур:

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\dots+a_0 y(t)=b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}+\dots+b_0 u(t)$$

Примером будет следующая система (уравнение RC-цепи т.е. цепи с конденсатором и сопротилвением):

$$\tau\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Ku(t)$$

Преобразование Лапласса

Но решать дифуры это очень трудоемкий процесс, который уже при 4-ом порядке не представляется возможным для решения, из-за чего был разработан новый метод - переход к проекции функции с помощью преобразования Лапласса:

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

Но нет необходимости считать этот интеграл каждый раз, достаточно знать самые базовые преобразования, которые позволяют с помощью их композиции находить преобразования Лапласса от более сложных функций.

Также важно знать, что при нулевых начальных условиях:

$$L\{\frac{d^k f}{dt^k}\}=p^k\overline{f}(p)$$

Тем самым, для RC-цепи мы получаем:

$$\tau p\overline{f(p)} + \overline{f(p)} = K\overline{u(p)}$$

$$(\tau p + 1)\overline{f(p)} = K\overline{u(p)}$$

Передаточная функция

Передаточная функция $H(p)$ линейной системы это отношения выходного сигнала ко входной величине:

$$H(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} \to y = H(p)u$$

По данной передаточной функции можно судить о системе и о том, как она будет вести себя во время возмущений, обращаясь все к той же RC-цепи, ее передаточная функция будет следующей:

$$H(p) = \frac{K}{\tau p + 1}$$

Устойчивость

При рассматривании передаточной функции обычно рассматривают только знаменатель, так как именно он является характеристическим для конкретной передаточной функции:

рассмотрим передаточную функцию в общем виде:

$$\alpha(D)y = \beta(D)u$$

теперь немного возмутим систему, в итоге управление не изменилось, но сам y поменялся:

$$\alpha(D)y^* = \beta(D)u$$

и тогда при вычитании получаем, что:

$$\alpha(D)\Delta y = 0$$

тем самым на изменение y (или то, насколько устойчив y влияет только $\alpha(D)$)

Если мы продолжим решать полученное ДУ, то получим что:

$$\Delta y = \sum Ce^{\lambda_i t}$$

значит, если мы хотим чтобы "ошибка" Δy была минимальна, значит нам нужно, чтобы все собственные числа были ≤ 0, при этом, если они будут равны нулю, значит система будет не до конца устойчива, в том плане, что при колебании системы, у нас будет конечная ошибка, которая никогда не станет равной нулю.

Иначе, если хотя бы один корень λ_i будет больше нуля, система будет неустойчивая.

В случае с комплексным параметром:

$$\alpha(p)\overline{y} = \beta(p)\overline{u}$$

все аналогично, только нас интересует именно вещественная часть, так как мнимая часть не влияет на рост ошибки, в отличие от вещественной части.

Устойчивость

Тогда получается у нас имеется самый общий критерий устойчивости, а именно:

$$\alpha(p) = a_0 p^n + \cdots + a_n \quad \to \quad \forall p_i \ (Re(p_i) < 0)$$

где p_i является корнем характеристического многочлена.

От сюда можно сформулировать

От сюда следует несколько простых критериев, основанных на этом свойстве:

Условие Стодолы

При порядке системы (порядке характеристического многочлена) $\leq$ 2, необходимо и достаточно для чтобы все коэффициенты были одного знака (если a_0 > 0, то соответсвенно, чтобы и все остальные были больше нуля)

Условие Гурвица

При порядке системы больше 2-ух применимо условие Гурвица:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}>0; \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & 0_1 & a_3 \end{vmatrix}>0$$

-- условие Гурвица по сути означает, что все центральные миноры должны быть больше нуля, при условии, что $a_0 > 0$.

Условие Льенара-Шипара

Аналогично условию Гурвица, только теперь можно рассматривать не все центральные миноры, а только четные, или только нечетные.

Частотные характеристики

Периодически процессы очень часты для природы, а с помощью ряда Фурье можно представить любые периодические процессы можно представить как совокупность гармоник.

Так что важно рассмотреть данные достаточно частые процессы

Для начала допустим, что мы подаем следующее воздействие:

$$u = u_0 \cos(\omega t)$$

в таком случае, мы можем заменить u на обобщенную гармоническую функцию, которой возможно описать любую гармонику:

$$u = u_0 \exp(j\omega t) = u_0 \cos(\omega t) + j u_0 \sin(\omega t)$$

Введением такого управления, мы явно определяем вид частного y: $y = Ce^{j\omega t}$.

Характеристика Михайлова

Рассмотрим характеристический многочлен:

$$\alpha(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$$

по теореме Безу данный многочлен можно представить в следующем виде:

$$\alpha(p) = a_0(p - p_0)(p - p_1)\cdots(p - p_n)$$

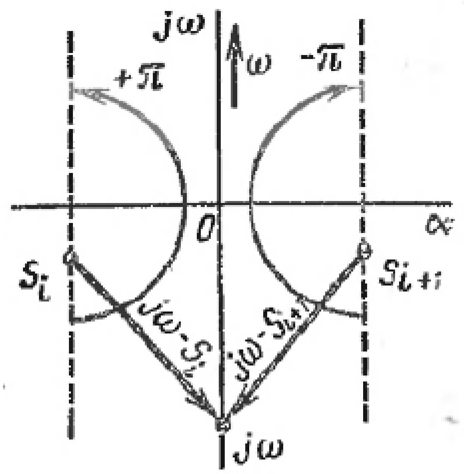
А значит аргумент характеристического многочлена будет определяться как:

$$\arg(\alpha(p)) = arg(a_0(p - p_0)\cdots(p - p_n)) = \sum_{i=0}^{n} \arctan(p - p_i)$$

или если переходить к частотной характеристике:

$$\arg(\alpha(j\omega)) = \sum_{i=0}^{n} \arctan(j\omega - p_i)$$

Пусть движение против часовой стрелки будет положительным, а по часовой - отрицательным, тогда у нас есть следующая картина:



И получается, что если мы будем считать изменение аргумента от $-\infty$ до $+\infty$, а также примем что у нас справа находится m корней (а следовательно слева n-m), то у нас будет следующая картина:

$$\Delta arg(\alpha(j\omega))|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \pi(n - m) - \pi m = \pi(n - 2m)$$

или если рассмотреть только положительные частоты

$$\Delta arg(\alpha(j\omega))|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi}{2}(n - 2m)$$

от сюда сразу же можно получить формулу для нахождения кол-ва неустойчивых корней:

$$m = \frac{\pi n - 2\Delta arg(\alpha(j\omega))|_{\omega=0}^{\omega=+\infty}}{2\pi}$$

И в таком случае, число правых корней m будет равно нулю только в одном случае:

$$\Delta arg(\alpha(j\omega))|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi n}{2}$$

От сюда и следует условие, что для устойчивости системы нужно, чтобы гойдограф прошел n квадрантов, тем самым мы получим необходимый угол для того, чтобы кол-во правых корней m было равно 0.

1. Частотный критерий устойчивости Найквиста. Правило Цыпкина

- невырождена, а значит с пмоомощью урпавлеправления матрицы обратной связи K мы можем задать любыми собсобствыеенными числами, какие захотим

Если мы как в случае с Михайловым перейдем на частотную передаточную функцию, где $p = j\omega$, тогда:

$$H(j\omega) = \frac{\beta(j\omega)}{\alpha(j\omega)} = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_n} = U(\omega) + jV(\omega)$$

Т.е. передаточная функция разделилась на мнимую и действительную часть, которые мы и будем рассматривать для нахождения устойчивости через фазу и амплитуда. Тогда:

$$U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega) exp(j\psi(\omega))$$

где:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad \psi(\omega) = \arctan(\frac{V(\omega)}{U(\omega)})$$

Как показал критерий Михайлова необходимо и достаточно, чтобы гойдограф прошел n квадрантов. Но мы хотим научиться определять устойчивость по разомкнутой системе, чтобы не утруждать себя долгим расчетом замыкания системы, поэтому рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\phi(p) = 1 + H(p) = \frac{\alpha(p) + \beta(p)}{\alpha(p)}$$

Заметим также, что степень полинома α равный n в реальных системах всегда больше чем степень полинома β m. Из чего следует что степени знаменателя и числителя функции ϕ равны.

Опять же перейдем к частотной характеристике:

$$\phi(j\omega) = 1 + H(j\omega) = \frac{\alpha(j\omega) + \beta(j\omega)}{\alpha(j\omega)} = \frac{\alpha_{зам}(j\omega)}{\alpha_{раз}(j\omega)}$$

В таком случае, пусть у $\alpha_{зам}$ будет m правых корней и n-m левых, а у $\alpha_{раз}$ будет l правых корней и n-l левых, в таком случае получается, что

$$\Delta arg(\phi(j\omega))|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \pi((n-m)-m) - \pi((n-l)-l) = 2\pi(l-m)$$

Или если опять же рассматривать только неотрицательные частоты:

$$\Delta arg(\phi(j\omega))|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \pi(l-m)$$

Мы все также хотим, чтобы у нашей замкнутой системы не было корней в правой части, значит зануляем m и получается, что условие устойчивости системы выглядит следующим образом:

$$\Delta arg(\phi(j\omega))|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \pi l$$

Но данное условие охвата действует для нашей функции ϕ а значит, что если мы рассмотрим нашу оригинальную функцию, то получим:

$$\Delta arg(H_{раз}(j\omega) + 1)|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \pi l$$

Или что то же самое: кол-во охватов точки (-1; 0). Это значит, что по сути критерий Найквиста заключается в том, что:

Для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы: гойдограф разомкнутой передаточной функции огибал точку (-1; 0) кол-во раз, равное половине количества неустойчивых корней у $\alpha_{раз}$. Ну или половине неустойчивых корней знаменателя разомкнутой передаточной функции.

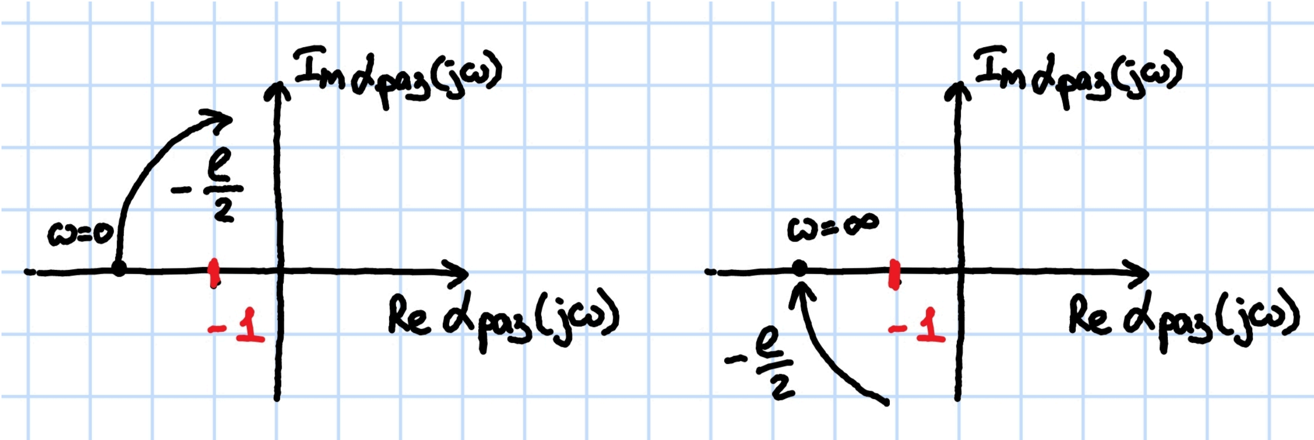
Правило Цыпкина

По сути Цыпкин просто обобщил выводы Найквиста, а именно:

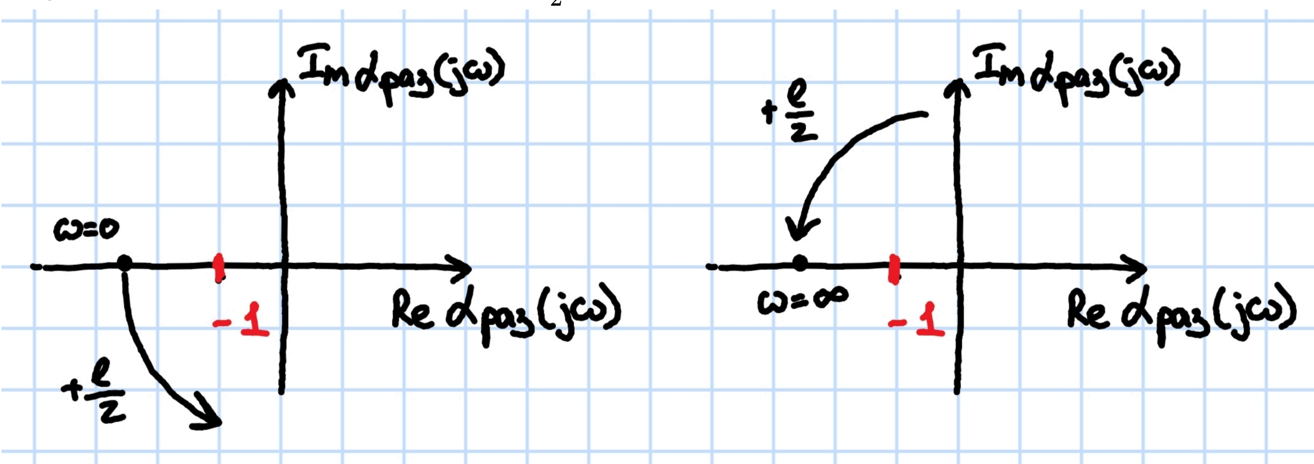
1. Нам все также необходимо посчитать кол-во неустойчивых корней у знаменателя разомкнутой передаточной функции l
2. Далее строим гойдограф разомкнутой передаточной функции (что как правило проще)

Теперь считаем по следующим правилам:

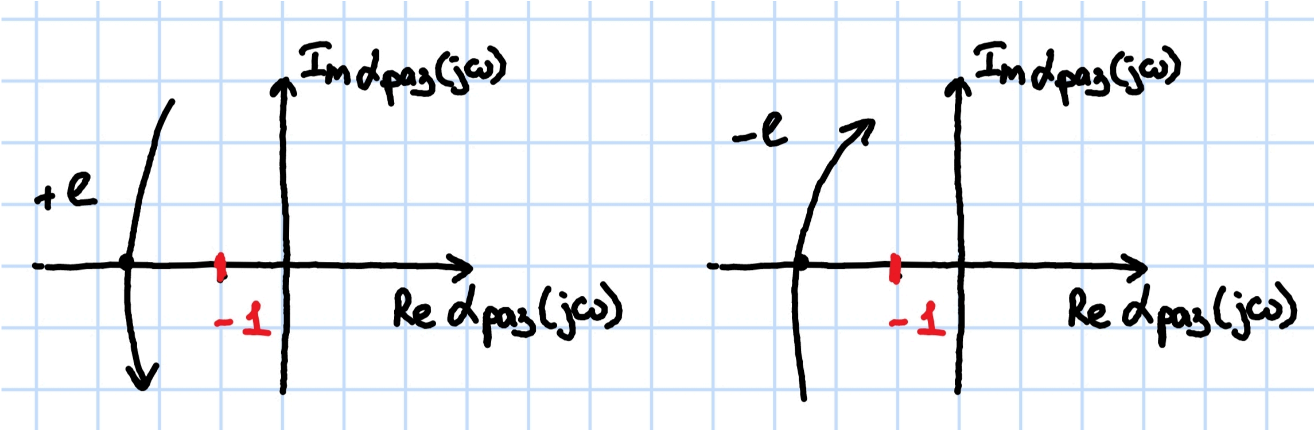
Если мы начинаем или заканчиваем против часовой стрелки, вычитаем $\frac{l}{2}$



Если мы начинаем или заканчиваем, двигаясь против часовой стрелки, тогда добавляем $\frac{l}{2}$



Если мы проходим целиком против часовой стрлеки - добавляем l , иначе вычитаем l



И того, после подсчетов, рассчитанное кол-во l должно совпадать с теоретическим значением $\alpha_{раз}$. Если совпадает, значит замкнутая система - устойчива, в противном же случае замкнутая система неустойчива.

2. Критические случаи критерия устойчивости Найквиста

Критическими случаями называются такие, когда мы не можем определенно построить гойдограф по передаточной функции, т.е. такие случаи, когда в знаменателе может появиться 0.

Для начала рассмотрим случай, когда в знаменателе находится p тогда мы имеем следующую передаточную функцию размокнутой системы:

$$H_{раз}(p) = \frac{\beta(p)}{p \cdot \alpha(p)}$$

В таком случае будем считать что данный корень будет равен очень маленькому отрицательному числу $-r$, т.е. $p \to (p+r)$, тогда:

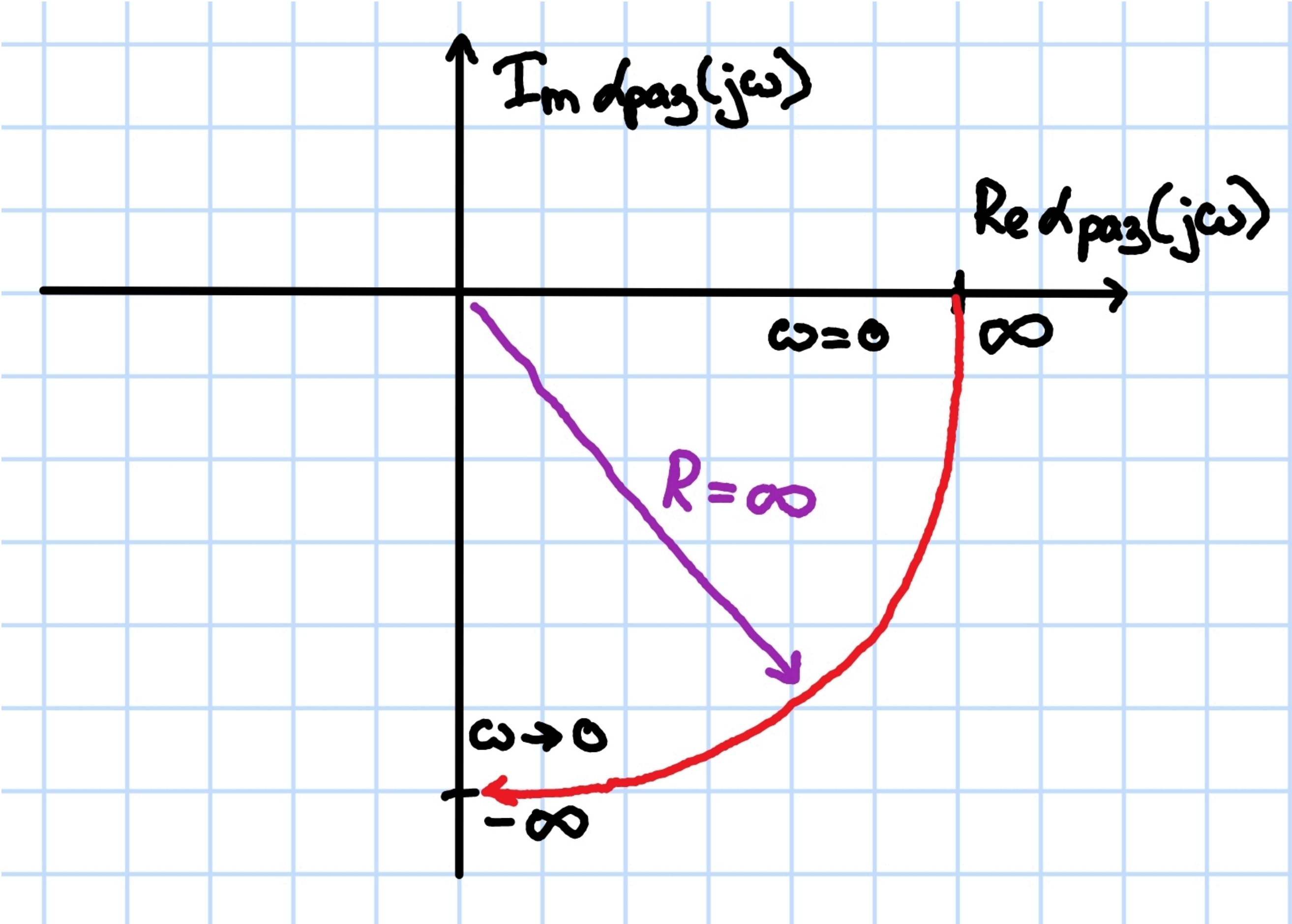
$$|H_{раз}(j\omega)| = \frac{|\beta(j\omega)|}{\sqrt{r^2+\omega^2}|\alpha(j\omega)|}$$

Что равняется ∞ при $\omega \to 0$.

$$\arg(H_{раз}(p)) = \arg(\beta(j\omega)) - [\arctan(\frac{\omega}{r}) + \arg(\alpha(j\omega))]$$

Что стремится от $-\frac{\pi}{2}$ до 0 при приближении $\omega \to 0$.

Тем самым получается следующая картина:

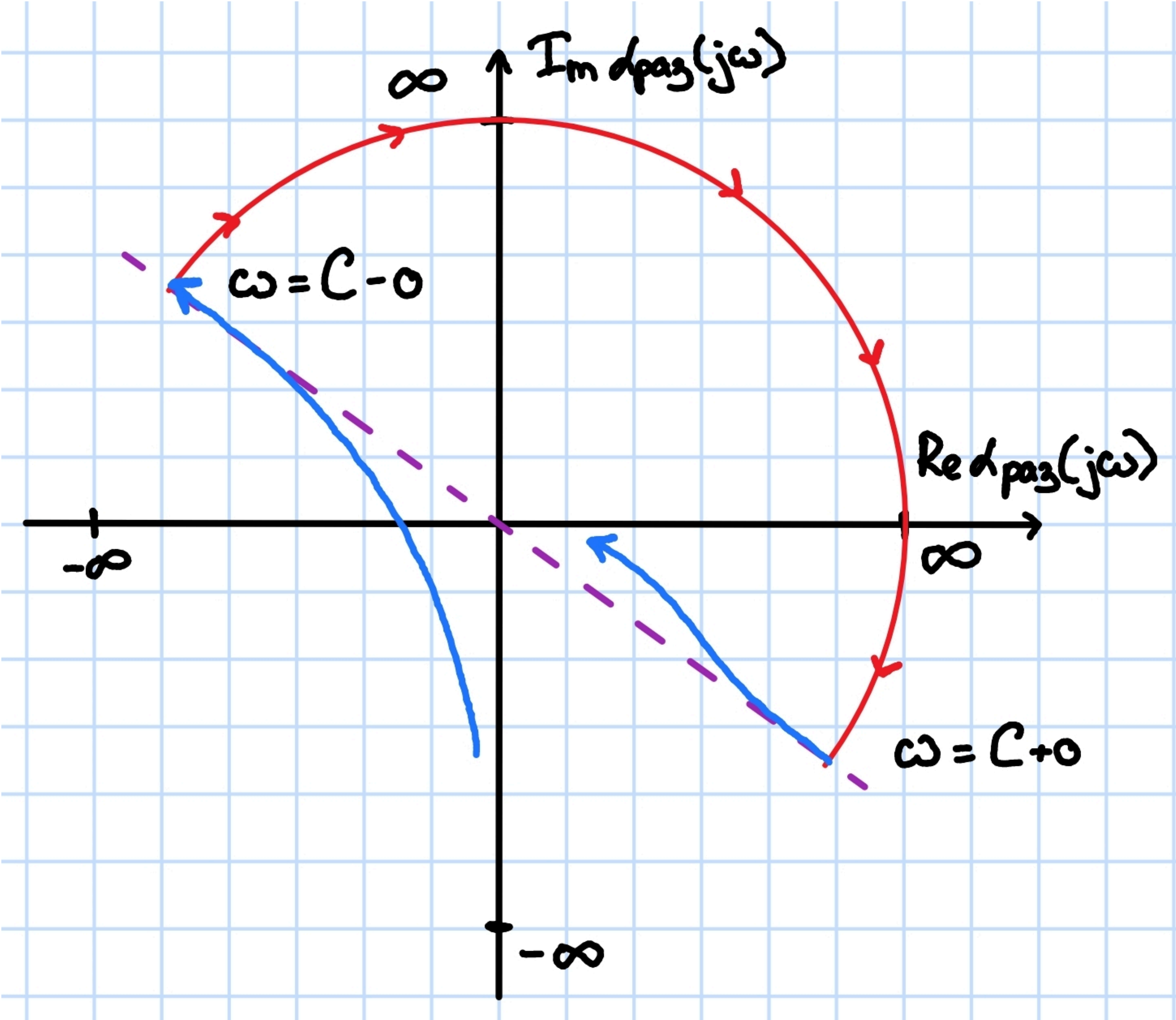


Получается четверть окружности проходящая от $-\frac{\pi}{2}$ до 0, бесконечного радиуса.
Несложно проверить, что если кратных p будет кратным корнем, находящимся в знаменателе:

$$H_{раз}(p) = \frac{\beta(p)}{p^n \cdot \alpha(p)}$$

То данная бесконечная окружность пройдет не один квадрант, а n квадрантов, радиус при этом продолжит быть бесконечным.

Случай, при котором в знаменателе находится выражение $(p - C)$ по большей части аналогичен, т.е. в случае, амплитуды: при $\omega = C - 0$ амплитуда будет равняться ∞, а вот фаза пройдет половину окружности по часовой стрелке. Чтобы соединиться в точке где $\omega = C + 0$, т.е. это диаметрально противоположная точка, где амплитуда тоже равна ∞



3. Точность ЛСАУ. Полиномиальное и гармоническое воздействие на ЛСАУ

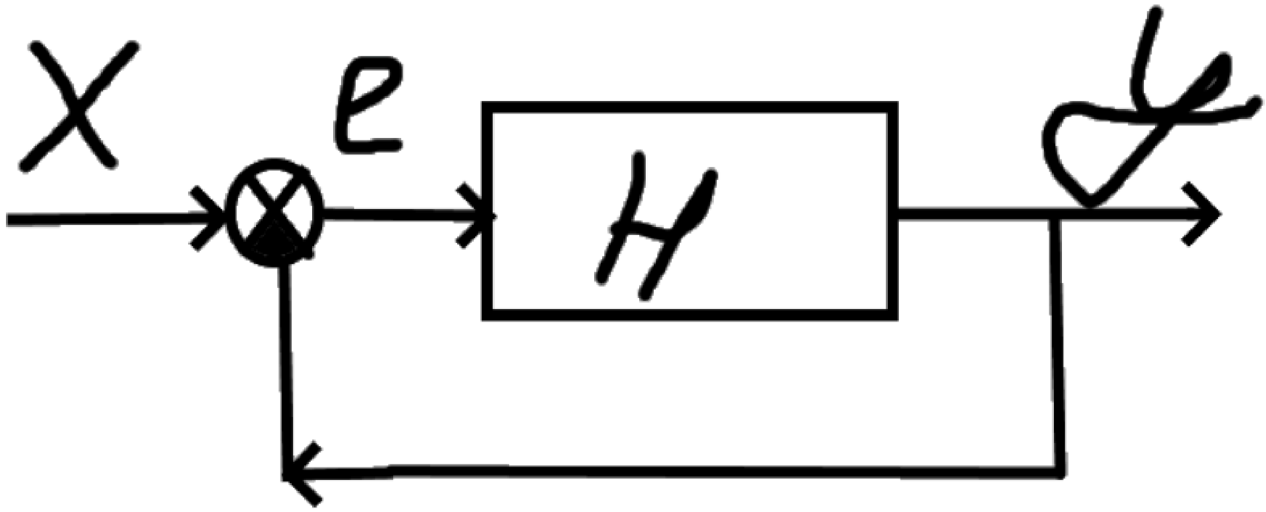
Точность ЛСАУ - это величина установившейся ошибки, как мы помним при ассимптотической устойчивости система приходит к нулевой ошибки через бесконечное время. В остальных устойчивых системах, ошибка останавливается на каком-то конечном значении.

Следящая система - система с единичной обратной связью. При этом следящая система старается приравнять вход к выходу, таким образом ее точность составляет $e = x - y$. И очевидно что величина данной ошибки зависит от параметров системы.

Как мы уже знаем, при гармоническом воздействии происходит сдвиг по фазе в выходном сигнале из-за инерции системы, из-за чего стоит рассматаривать полиномиальное и гармоническое воздействие по-отдельности, ведь при гармоническом воздействии ошибка имеет другую природу.

Динамичная система - система, которая быстро реагирует на обратную связь, из-за чего в среднем имеет меньшую ошибку.

Для данной системы распишем ошибку:



Полиномиальное воздействие

Получается, что наша ошибка $e = x - y$ и тогда:
$e(t) = H_{xe}(D)x(t) = \frac{1}{1+H(D)}x(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}x(t)$, у данной передаточной функции и сверху и снизу степень n, и получается, что можно применить разложение в ряд Тейлора вблизи нуля:

Как мы из дроби делаем просто сумму: так как у нас и сверху и снизу степени равны, мы можем выделить целую часть - C_0, затем вычитаем из $H_{xe}(D)$ C_0, достаем от туда оператор дифференцирования и получаем C_1 и так далее повторяем

$$= (C_0 + C_1 D + C_2 D^2 + \cdots)x(t) =$$

В данном случае (D = 0) означает, что система почти не меняется, т.е. изменения происходят очень маленькие и незначительные.

- $C_0 = H_{xe}(0)$ - коэффициент ошибки по положению
- $C_1 = \frac{1}{1!}\frac{\partial H_{xe}(D)}{\partial D}\Big|_{D=0}$ - коэффициент ошибки по скорости
- C_2 - коэффициент ошибки по ускорению

Далее после того, как мы вынесли операторы дифференцирования, объединяем их с функцией $x(t)$, после чего получаем следующее выражение с производными:

$$= C_0 x + C_1 \dot{x} + C_2 \ddot{x} + \dots = y_{частное} = y_\infty$$

Так как мы любую функцию в первом приближении можем представить как кусочно-линейную, рассмотрим следующий пример:
Пусть: $x = a_0 + a_1 t$, тогда при разложении получаем, что
$e = c_0 a_0 + c_0 a_1 t + c_1 a_1$

1. Если предположим, что ошибка по положению c_0 равна нулю, тогда $e = c_1 a_1$ - статичная ошибка, не растущая со временем, поэтому можем предположить, что минимальным требованием к системе будет $C_0 = 0$.

Астатизм первого порядка - требование к системе, удовлетворяющей минимальному требованию (когда ошибка конечна).

Астатизм r-го порядка - это астатизм для которого характерно следующее:

1. при $x = t^{r-1} \to e_\infty = 0$.
2. при $x = t^r \to 0 < e_\infty < \infty$.
3. при $x = t^{r+1} \to e_\infty = \infty$.

Рассмотрим систему 0-го порядка с одним интегратором, тогда:

$$x(t) = 1[t] \ \to \ \overline{x} = L\{1\} = \frac{1}{p}$$

$$\overline{e} = H_{xe} \cdot \overline{x} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{p})H(p)} \overline{x} = \frac{p}{(p+1)H(p)} \frac{1}{p} = \frac{1}{(p+1)H(p)}$$

Тогда по предельной теореме:

$$e_\infty = \lim_{p \to 0} p\overline{e} = \lim_{p \to 0} \frac{p}{(p+1)H(p)} = 0$$

Получается для системы первого порядка достаточно одного интегратора, чтобы избежать ошибки.

Теперь рассмотрим систему r-го порядка с r интеграторами, тогда:

$$x(t) = x^r \ \rightarrow \ \overline{x} = L\{x^r\} = \frac{r!}{p^{r+1}}$$

$$\overline{e} = H_{xe} \cdot \overline{x} = \frac{1}{(1+\frac{1}{p^r})H(p)}\overline{x} = \frac{p^r}{(p^r+1)H(p)} \frac{r!}{p^{r+1}} = \frac{r!}{p(p^r+1)H(p)}$$

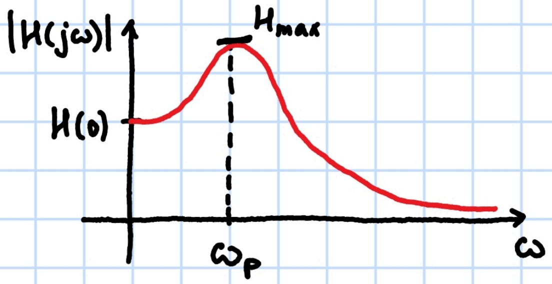
$$e_\infty = \lim_{p\to 0} p\overline{e} = \lim_{p\to 0} \frac{p \cdot r!}{p(p^r+1)H(p)} = \lim_{p\to 0} \frac{r!}{(p^r+1)H(p)} = \frac{r!}{H(0)} = \frac{r!}{C}$$

В итоге мы получили статическую ошибку (ограниченную).
Если бы было на один интегратор больше - получили бы нулевую ошибку, на один меньше - получили бы бесконечную ошибку.

Гармоническое воздействие

В идеале мы хотим следующее:

$y_\infty(t) = X_0 \left|H(j\omega)\right| \sin(\omega t + \varphi)$, где $\varphi = \arg H(j\omega)$



Мы хотим $\frac{H_{max}}{H(0)} \leq \sqrt{2}$ (1 Бел)

Чтобы амплитуда не превышала корня из двух от амплитуды в нулевой точке, эта величина также называется Белом, когда какая-то величина меньше другой в корень из двух раз.

Потом он начал разгонять про звук, что если мощность динамика увеличить в 10 раз, то субъективно громкость будет ощущать в два раза больше, короче как десятичный логарифм

Частота среза - частота при которой амплитуда падает в $\sqrt{2}$ раз.
Полоса пропускания - полоса в которой система пропускает сигнал (хз, че это значит, возможно максимальная ширина

полосы равная максимальной амплитуде).

$$\frac{H_{\max}}{|H(j\omega)|} = \sqrt{2},$$

где $H_{\max} = \max\limits_{\omega} |H(j\omega)|$.

Относительная разность одноименных сигналов в СИ измеряется в Беллах:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{A_2^2}{A_1^2} \to \lg\frac{A_2^2}{A_1^2} = 2\lg\frac{A_2}{A_1}$$

Если $A_2 = 10A_1$, то $= 2$

Децибеллы:

$$L = 20\lg\frac{A_2}{A_1}$$

Если $\frac{A_2}{A_1} = \sqrt{2} \to L = 3$ дБ.

В нашем случае

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{y_0}{x_0} = \left|H\left(j\omega_{\text{пп}}\right)\right|$$

Частота среза $\omega = \omega_{\text{ср}}$ — решение уравнения $\left|H_{\text{раз}}(j\omega)\right| = 1$.

4. Переходные процессы в ЛСАУ. Быстродействие

База переходных процессов:

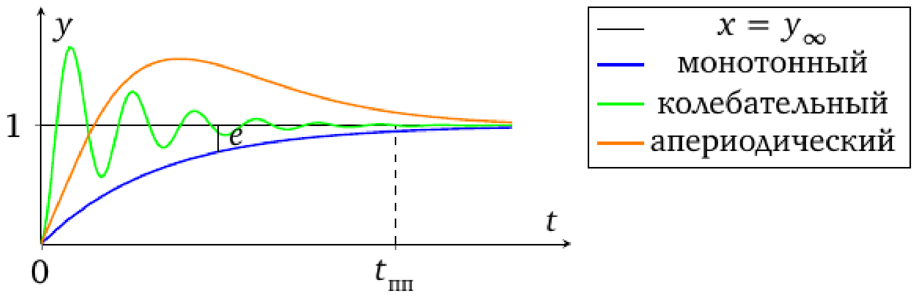
Быстродействие — время выхода на установившуюся ошибку. Определяется $t_{\text{пп}}$.

Быстродействие тестируется на единичной функции Хевисайда $x(t) = 1[t]$.

$\exists$ система имеет по крайней мере 1 порядок астатизма и нулевые начальные условия.

В линейных системах при таких условиях могут быть только три варианта для переходного процесса на выходе:

- *монотонный процесс* Характеризуется тем, что производная не меняет знака (нет решения системы).
- *апериодический процесс* Характеризуется тем, что производная меняет знак только один раз (одно решение системы).
- *колебательный процесс* Характеризуется тем, что производная меняет свой знак бесконечно (бесконечное количество решений).



t_{nn} - время переходного процесса, то есть время выхода на заданную ошибку.

В линейных системах время переходного процесса выхода нулевую ошибку составляет $t_{nn} = \infty$

Поэтому необходим был другой критерий, в итоге эмпирическим путем пришли к данной формулировке:

$$\frac{|y_\infty - y_t|}{|y_\infty|} <= 0.05 \quad \text{при } \forall t \geq t_{nn}.$$

Также фактор выбора именно 0.05 в следующем: $0.05 = \frac{1}{20} \approx \frac{1}{e^3}$.

Что касается колебательных процессов, тут тоже все вроде понятно:

Количество колебаний за время переходного процесса N должно быть $\leqslant 3$ (хотим).

Логарифмический декремент затухания

$$\delta = \ln \frac{\Delta y_1}{\Delta y_2},$$

где Δy_1 и Δy_2 — соседние амплитуды в колебательном процессе. Хотим $\delta \geqslant 1$ $\left(\Rightarrow \frac{\Delta y_1}{\Delta y_2} \geqslant e\right)$.

Частота среза $\omega_{\text{ср}}$ — это частота, при которой $|H_p(j\omega_{\text{ср}})| = 1$. Чем выше частота среза, тем меньше время переходного процесса.

$$\boxed{t_{\text{пп}} \approx \frac{3}{\omega_{\text{ср}}}.}$$

5. Синтез ЛСАУ. Проблема управляемости.

Управляемость

Мы как обычно хотим построить такое управление, что $y(t) \approx y_d(t)$ И путем замены переменных можем перейти к другой форме:

$$e = y - y_d \quad \to \quad e(t) \approx 0$$

Тогда мы будем иметь дело с задачей стабилизации, при которой мы хотим свести наши внутренние условия x к нулю. Т.е. наша главная задача сделать так, чтобы ошибка уменьшалась, а потом просто добавив y_d мы получим необходимое управление. Т.е. грубо говоря есть самолету не обязательно решать задачу поддержанию необходимой высоты. Автопилот может только исправлять ошибку, а вот пилот уже будет заниматься y_d. Чтобы самолет летел туда, куда надо.

Это и есть задача стабилизации.

Тогда введем следящую обратную связь:

$$u = -KX \quad \text{или} \quad u = -(K_1, K_2, \cdots, K_n) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

В таком случае наше управление будет скаляром, которым мы и будем стабилизировать нашу систему (почему именно скаляр, потому что мы хотим упростить себе работу там, где это возможно. Зачем нам делать K матрицей), а управление строкой с множеством параметров в задачах где это не надо (для большинства задач как показывает практика достаточно скалярного управления).

Тогда подставим данное выражение в пространство состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} = AX - BU \\ y = CX \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = AX - BU = AX - B(-KX) = (A - BK)X = \overline{A}X \\ y = CX \end{cases}$$

Назовем $\overline{A}$ - матрицей замкнутой системы

И тогда в итоге:

$$\dot{x} = \overline{A}x \quad (2.2)$$

Теперь для стабилизации системы остается только подобрать такие K, чтобы все собственные числа имели отрицательную вещественную часть, (учитывая то, что матрицы A и B заданы).

Проблема управляемости

Что, если управление - скаляр?

Да, задача управления системой только с помощью одного скаляра разрешима для целого класса система - ПУ (Полностью Управляемых систем). Есть три определения:

Система называется полностью управляемой (ПУ) -- если для любого начального начального значения (НУ) x_0 и для любого времени T существует такое управление $u(t)$, что $x(T) = 0, t \in [0, T]$;

$$\forall x_0, T > 0 \quad \exists u(t), t \in [0, T] : x(T) = 0 \quad (2.3)$$

И того получается, что если условие (2.3) выполнено не для всех компонент x_i то система называется частично управляемой (ЧУ)

Если же условие (2.3) не выполнено ни для одной компоненты, то система называется полностью неуправляемой (ПНУ)

> ⓘ Info
>
> Теорема Калмана: Система (2.1) является полностью управляемой $\iff$ пара матриц (A, B) - невырожденная

> ⓘ Info
>
> Пара матриц (A,B) невырожденная, если:
>
> $$rankA_u = rank(B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B) = n$$
>
> , где n - порядок системы, A_u - матрица управляемости

> Tip
>
> Если $rankA_u = r < n$ - то система называется частично управляемой, причем управляться будут только r координат. Если неуправляемая часть системы - устойчивая, то неуправляемые координаты будут стремиться к нулю так, как им захочется.

Пример частично-управляемой системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

Тогда имеем следующую картину:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_u = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, rankA_u = 1$$

Получается есть ровно одна управляемая компонента, и действительно, если мы перейдем к замене переменной: $\xi = x_1 - x_2$, тогда:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \quad \text{- управляемая часть} \\ \dot{\xi} = -\xi \quad \text{- неуправляемая, но устойчивая часть} \end{cases}$$

(устойчивая, потому что при переносе кси влево получим: $\dot{\xi} + \xi = 0$ - система первого порядка, все коэффициенты больше нуля)

> **Info**
>
> По теореме Фробениуса: если система ПУ $\iff$ пара матриц (A, B) - невырождена, а значит с помощью матрицы обратной связи K мы можем задать любыми собственными числами, какие захотим

Тогда алгоритм нахождения матрицы K будет выглядеть следующим образом:
0. Раз x - вектор, а u - это скаляр, значит при $u = -KX$, K должен быть строкой, задаем параметры этой строки: $K = (K_1, K_2, \cdots, K_n)$

1. Задаемся желаемыми собственными числами
2. Строим на базе желаемых собственных значений искомый характеристический многочлен: $\overline{\alpha}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$
3. Строим реальный характеристический полином:

$$\alpha(\lambda) = |\overline{A} - \lambda E| = |A - BK - \lambda E|$$

4. Решая уравнение: $\overline{\alpha}(\lambda) = \alpha(\lambda)$ мы и получим наши неизвестые коэффициенты при K.

Что если не получается сделать управление скаляром?

В таком случае имеет смысл рассматривать не всю матрицу K, а например заполнить все столбцы случайно кроме первого, первый и необходимо найти, в таком случае задача сводится к описанной выше но чуть с большими затратами времени на вычисление.

6. Построение управления с обратной связью. Алгоритм

определения матрицы ОС

Был рассмотрен в предыдущем билете

7. Проблема наблюдаемости

Но осталась еще одна проблема, в большинстве своем мы не можем пронаблюдать за всеми x (т.е. за внутренним состоянием системы), например у нас есть следующая система:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = \dot{u} + u$$

Эта система по своей сути уравнение движения, но измерить ускорение например, очень сложно, со скоростью тоже могут быть проблемы, путь уже измерить проще, и нам хочется зная только путь уметь определять и другие компоненты.

Рассмотрим опять же пространство состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} = AX - BU \\ y = CX \end{cases}$$

Тогда получается, что мы можем вычислить вектор X следующим образом (если матрица C неособая, а значит обратимая):

$$X = C^{-1}y$$

Но зачастую C - это строка, из-за специфики управления, а потому данный вариант не подойдет, в таком случае есть еще один способ:

Система полностью наблюдаема (ПН) - если разрешима задача вычисления всех иксов по выходам y, управлениям и их производным.

> ⓘ Info
>
> Критерий полной наблюдаемости Калмана:
> Система является ПН, если пара матриц (A^T, C^T) - невырожденная, т.е.:
> $rankA_y = rank\left(C^T, A^TC^T, \cdots, (A^T)^{n-1}C^T\right)$

Доказательство:

$$y = Cx$$

$$\dot{y} = C\dot{x} = C(Ax + Bu) = CAx + CBu$$

$$\ddot{y} = C\dot{x} + B\dot{u} = C(CAx + CBu) + B\dot{u} = C^2Ax + CBu + C\dot{u}$$

В таком случае, если выполняется критерий Калмана, то разрешима следующая задача:

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x + \overline{f}(u, \dot{u}, \cdots)$$

А значит мы последовательно сможем найти каждую строку и восстановить все компоненты x (производные y)

8. Оценка состояния. Асимптотический оцениватель Калмана

Получается, если мы не можем наблюдать все компоненты, но система ПН, то все хорошо, мы сможем последовательно найти все компоненты, но есть одно но, подсчет производных всегда идет с большими погрешностями, из-за чего точность больших моделей может очень и очень сильно просесть, в таком случае есть немного иное решение: ассимпотический оцениватель Калмана.

> **Info**
>
> Если система ПН, то существует фильтр Калмана (т.е. существует матрица L), такой, что его решение: $\hat{x}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} x(t). \hat{x} \in R^n$
> Сам фильтр Калмана выглядит следующим образом:
>
> $$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 - \text{любые}$$

Доказательство:

Рассмотрим ошибку оценивания $\epsilon = x - \hat{x}$

$$\dot{\epsilon} = A\epsilon - L(y - C\hat{x}) = A\epsilon - L(Cx - C\hat{x}) = A\epsilon - LC\epsilon = (A - LC)\epsilon$$

Мы хотим, чтобы $\epsilon \to 0$. Так как у однородного уравнения частное решение - нулевое и если $\hat{A} - \text{устойчивая} \to Re\lambda_{\hat{A}} < 0$, где:

$$\hat{A} = (A - LC)$$

И получается, что для того, чтобы оцениватель работал корректно нам необходимо, чтобы было возможно задаться желаемыми собственными числами (чтобы их вещ. часть была меньше нуля), а для этого необходимо, чтобы пара матриц (A^T, C^T) была невырожденной. Следовательно мы сможем проделать все те же шаги, что и при нахождении матрицы K.

Также очень важно, что чем ближе мы возьмем наше первое приближение $\hat{x}(0)$ тем быстрее оцениватель дойдет до решения. Зачастую мы знаем начальные условия системы, а потому логичнее всего взять за начальные условия оценивателя начальные условия системы: $\hat{x}(0) = x(0) \to \epsilon(0) = 0$

9. Стабилизирующая обратная связь по косвенным наблюдениям

Хорошо, мы научились находить иксы по наблюдениям, но теперь нам нужно уметь находить обратную связь, которая будет учитывать решение оценивателя. Пусть тогда:

$$u = -K\hat{x}$$

где $\hat{x}$ - решение фильтра Калмана

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 - \text{любые}$$

Докажем пригодность данной обратной связи:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

$$\dot{\epsilon} = A\epsilon - L(y - C\hat{x}) = (A - LC)\epsilon$$

Так же вспоминаем для ПУ систем:

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax - BK\hat{x} = Ax - BK(x - \epsilon) = (A - BK)x + BK\epsilon$$

Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BK\epsilon \\ \dot{\epsilon} = (A - LC)\epsilon \end{cases}$$

Введем теперь вектор $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ \epsilon \end{pmatrix}$

Тогда система в матричной форме будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK & BK \\ \mathbf{0} & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

Главную блочную матрицу обозначим как $\mathbf{A}$

При этом мы теперь хотим, чтобы к нулю стремился не только x , но и ϵ. Решение *получившейся* однородной системы:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

стремится к частному $\mathbf{X} \to \mathbf{X}_ч = 0 \iff \mathbf{A}$ - устойчивая, поскольку по свойству блочной матрицы получается так, что:

$$\lambda_{\mathbf{A}} = \lambda_{A-BK} \cup \lambda_{A-LC}$$

Следовательно мы можем задаться желаемыми собственными числами, если обе пары (A, B) и (A^T, C^T) - невырожденные.

По сути теперь решение любой задачи будет сводиться к следующему:

1. Проверка пар матриц на невырожденность
2. Нахождения обратной связи K (по ПУ)
3. Нахождение матрицы L, аналогично поиску матрицы K (По ПН)
4. Подставляем полученные значения в систему (для каждой данной компоненты):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bu = Ax - BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) = LCx + (A - BK - LC)\hat{x} \end{cases}$$

10. Оптимизация стабилизирующей обратной связи

Мы научились находить обратную связь, и вроде все понятно, так как чем меньше собственные числа - тем быстрее система будет стабилизироваться, но есть несколько но:

1. Нам может не хватить мощности на слишком сильное управление
2. Самое главное: с ростом силы управления, растет сила выбросов, так например, если машина едет очень быстро, и мы очень быстро хотим остановиться, тогда могут возникнуть очень большие разрушающие силы на корпус.

Получается что время переходного процесса, это плохой критерий оптимизации, значит нам нужен какой-то компромисс:

$$J = \int_0^\infty \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overbrace{q_i}^{\geqslant 0} x_i^2}_{\text{ошибка}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \overbrace{r_k}^{>0} u_k^2}_{\text{регуляризатор}} \, dt \to \min_{u \in U},$$

Таким компромиссом стал интегрально-квадратичный функционал, который с помощью коэффициентов ошибки положения и ошибки управления старается оптимизировать управление.

Данный функционал можно записать в общем виде:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)\, dt \to \min_{u \in U},$$

где $Q = \operatorname{diag}\{q_i\}$ или неотрицательно определенная матрица, $R = \operatorname{diag}\{r_i\}$ или положительно определённая матрица.

> ⓘ Info
>
> Матрица M положительно (неотрицательно) определенная
> $\iff$
> $\forall x \in R^n : x^T M x > 0 (\geq 0)$

Данная задача оптимизации известна как LQR-проблема

> ⓘ Info

Теорема Риккати-Лурье:
Пусть существует положительно определенная матрица P^* размером $m \times n$, являющаяся решением уравнения Риккати-Лурье:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Тогда существует оптимальное управление u, минимизирующее функционал в виде:

$$u = u^{opt} = -K^* x,\ K^* = R^{-1}B^T P^*$$

При этом минимальное значение функционала:

$$J_{min} = x_0^T P^* x_0.$$

Info

Теорема Лурье:
Для существования и единственности матрицы P^* (положительно определенной и являющейся решением уравнения Риккати-Лурье) достаточно:

1. Система ПУ
2. $R > 0$ - положительно определенная
3. $Q \geq 0$ - положительно определенная

Tip

О запасе устойчивости:
Иногда корни получаются вблизи оси, но в таком случае нам может не хватить запаса устойчивости системы, в таком случае ужесточим требования к системе:
Т.е. вместо: $Re\lambda_A < 0$, мы установим ограничение: $Re\lambda_A < -\sigma$. Получается мы просто берем не обычные собственные числа, а наши, тогда в таком случае система продолжит быть устойчивой (так как мы вычитаем, а значит устойчивость системы не изменится)

> Tip
>
> Обезразмеривание:
> Чтобы не вводить никаких дополнительных матриц (для совпадения единиц измерения) можно обезразмерить функционал, возведя его в квадрат и разделив на максимальный квадрат, тем самым у нас значения будут безразмерные:
>
> $$J = \int_0^\infty \left(\sum_i \frac{x_i^2}{\overline{x}_i^2} + \sum_k \frac{u_k^2}{\overline{u}_k^2} \right) dt \to \min,$$
>
> $$Q = \operatorname{diag}\left\{ \frac{1}{\overline{x}_i^2} \right\}, \quad R = \operatorname{diag}\left\{ \frac{1}{\overline{u}_k^2} \right\}$$

11. Линейные дискретные системы автоматического управления (ЛДСАУ)

Начнем описание системы с пространства состояний:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + u_k - w_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

Если в непрерывном случае мы могли наблюдать нашу систему в любой момент, то сейчас мы можем это делать только в дискретные моменты времени

Так же можно непрерывную систему (НС) свести к дискретной (ДС) следующим преобразованием:

$$\dot{x} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{h} \to \begin{cases} x_{k+1} \approx (Ah + E)x_k + Bhu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

Т.е.

$$\dot{x} = Ax + Bu \to \frac{x_{k+1} - x_k}{h} = Ax_k + Bu \to x_{k+1} = (Ah - E)x_k + Bhu_k$$

В дискретных системах есть возможность рекурентного нахождения всех x_i.

12. Устойчивость ЛДСАУ

> ⓘ Info
>
> Дискретная система называется устойчивой по начальным условиям, если для любого начального значения x_0 при отсутствии управления $(u_k = 0)$ получаем $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ (грубо говоря система не расшатывается, а делает только то, что от нее требуется)

> ⓘ Info
>
> Дискретная система называется устойчивой по начальным условиям, если $|\lambda_A| < 1$

Диаганолизация матрицы

Пусть все собственные числа различны, если же корни все же совпадут, будем считать, что они различаются на ϵ, формально корни разные, а отличие в 20 знаке не повлияет на точность описания системы.

λ - собственное число, значит $Ax = \lambda x$, для некоторого $x \in R^n$. $(A - \lambda E)x = 0$ - однородная СЛАУ имеет решения помимо тривиального $x = 0$:

$$|A - \lambda E| = 0$$

Первая часть, это характеристический многочлен матрицы: $\alpha(\lambda) = |A - \lambda E|$, и у этого многочлена n "различных" корней, а раз они различны, значит все собственные вектора линейно независимы. Тогда пусть U - блочная матрица собственных векторов:

$$U = (x_1|x_2|x_3|\cdots|x_n)$$

И так как все вектора линейно независимы, то мы можем утверждать, что существует обратная матрица U^{-1}.

Равенство $Ax = x\lambda$ запишем для всех $x = x_i$ (имеем n уравнений). Запишем правую часть в матричном виде, и тогда получим: $U \times \Lambda$, где Λ - диагональная матрица собственных чисел. В таком случае имеем:

$$AU = U\Lambda \; \rightarrow \; \Lambda = U^{-1}AU$$

Само доказательство

Имеем: $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$, но $u_k = 0$ по условию, значит: $x_{k+1} = Ax_k$, а это в свою очередь значит: $x_k = A^k x_0$.

$A = U\Lambda U^{-1}$
$A^2 = U\Lambda U^{-1}U\Lambda U^{-1} = U\Lambda^2 U^{-1}$
$A^k = U\Lambda^k U^{-1}$

Сделаем замену: $x_k = U\xi_k$, где ξ_k - это некий "выбирающий" вектор, при умножении на который мы получаем исходный вектор. Тогда:

$U\xi_k = A^k U\xi_0 = U\Lambda^k U^{-1}U\xi_0 = U\Lambda^k \xi_0$
А значит: $\xi_k = \Lambda^k \xi_0$ иными словами система распалась на компоненты, а значит:

$$\xi_k^i = (\lambda_i)^k \xi_0^i$$

В таком случае очевидно, что если $k \rightarrow \infty$, то тогда:

$$\text{при } |\lambda_i| < 1, \quad \xi_k^i \rightarrow 0$$

$$\text{при } |\lambda_i| > 1, \quad \xi_k^i \rightarrow \infty$$

А если $\xi_k \rightarrow \infty$, значит и $x_k = U\xi_k \rightarrow \infty$

Устойчивость по входному воздействию

Опять большое доказательство, по большей части делаем ту же замену и те же действия, только теперь у нас плюсом появляется еще и управление, ну а так как оно ограничено, то раскрутив рекуренцию получим геометрическую прогрессию собственных чисел, а следовательно опять тот же вывод, что модуль собственных чисел должен быть меньше 1.

Устойчивость

Система называется устойчивой, когда она устойчива по начальным условиям и по входному воздействию, следовательно, те же условия - модуль собственных чисел < 1.

13. Управляемость ЛДСАУ

Дискретная система называется полностью управляемой, когда мы можем за N шагов провести ее полную стабилизацию:

$$\forall x_0 \ \ \exists \{u_k\}_{k=0}^{N} : x_N = 0$$

> **Info**
>
> Дискретная система полностью управляема когда пара матриц (A, B) - невырожденная.

Доказательство:

Раскрутим рекуренцию на n шагов:

$$\begin{cases} x_1 = Ax_0 + Bu_0 \\ x_2 = Ax_1 + Bu_1 = A^2x_0 + (ABu_0 + Bu_1) \\ x_3 = Ax_2 + Bu_2 = A^3x_0 + (A^2Bu_0 + ABu_1 + Bu_2) \\ \vdots \\ x_n = A^nx_0 + A^{n-1}Bu_0 + \dots + ABu_{n-2} + Bu_{n-1} \end{cases}$$

Мы хотим, чтобы для $\forall x_0 : x_n = 0$

Рассмотрим последний n-ый шаг и оставим управление в одной стороне, а состояние в другой:

$$Bu_{n-1}, ABu_{n-2}, \dots, A^{n-1}Bu_0 = x_n - A^nx_0$$

Или можно то же самое представить в матричной форме:

$$(B, AB, \dots, A^{n-1}B) \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix} = x_n - A^nx_0$$

Заметим, что в левой части у нас получилась ранее рассмотренная матрица A_u. И получается чтобы решить данное СЛАУ нам необходимо, чтобы матрица A_u была невырожденная. Тогда мы точно сможем найти какое угодно решение данной системы, с произволным x_n в том числе и нулевым.

14. Наблюдаемость ЛДСАУ

> Info
>
> Дискретная система называется полностью наблюдаемой, если разрешима задача восстановления компонент x_k по y_k и u_k

> Info
>
> Дискретная система полностью наблюдаема, когда пара матриц (A^T,C^T) - невырожденна, аналогично (НС).

Доказательство:

Опять же раскрутим рекуренцию

$$\begin{cases} y_0 = Cx_0 \\ y_1 = Cx_1 = C(Ax_0 + Bu_0) = CAx_0 + CBu_0 \\ y_2 = Cx_2 = C(Ax_1 + Bu_1) = CA^2x_0 + CABu_0 + CBu_1 \\ \vdots \\ y_n = CA^nx_0 + CA^{n-1}Bu_0 + \dots + CBu_{n-1} \end{cases}$$

Нас интересует только та часть, которая без управления, поэтому управление заменим на $\phi(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$

Тогда в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^n \end{pmatrix} x_0 + \phi(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$$

Получается в следующей СЛАУ, если пара матриц A, C - невырождена, значит разрешима задача последовательного нахождения каждой из компонент

15. Построение дискретного управления с обратной связью

Опять же возьмем линейную обратную связь, как наиболее подходящую для линейных систем, тогда: $u_k = -Kx_k$, где K - матрица коэффициентов обратной связи.

Тогда:

$$x_{k+1} = (A - BK)x_k = \overline{A}x_k$$

где $\overline{A}$ - матрица замкнутой системы

Мы хотим, чтобы $x_k \to 0$ для этого нам нужно, чтобы матрица $\overline{A}$ была устойчивой.

> Info
>
> Если система ПУ, то $\exists K : x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Доказательство: условие ПУ состоит в невырожденности пары матриц A, B, следовательно разрешим задача нахождения коэффициентов K для получения произвольных собственных чисел, в том числе и внутри единичной окружности.

> Info
>
> Получается в ДС мы с помощью линейной обратной связи можем получить полную стабилизацию системы не более чем за n шагов.

Доказательство: Так как мы можем задаться любыми $\lambda_{\overline{A}}$, поэтому возьмем $\lambda = 0$, поскольку это наиболее удаленная точка от границ, а значит и наиболее устойчивая к возмущениям.

> Tip

Теорема Кэли-Гамильтона: Любая матрица квадратная A всегда является решением своего характеристического многочлена: $\alpha(A) = 0$.

По теореме Кэли-Гамильтона $\alpha(\overline{A}) = 0$, с другой стороны раз желаемые $\lambda_{\overline{A}} = 0$, то по теореме Безу: $\alpha(\lambda) = \lambda^n$. Что означает :

$$\alpha(\overline{A}) = \overline{A}^n = 0$$

И теперь уже получается, что: $x_n = \overline{A}^n x_0 = 0$, что и требовалось.

16. Дискретное управление при неполных наблюдениях

Но что теперь если вектор x_k недоступен для измерения. И доступна только линейная комбинация или какая-то конкретная компонента. В таком случае задача разрешима только для ПН систем

ⓘ Info

Дискретный фильтр Калмана:
Пусть нам известны только наблюдения $y_k = Cx_k$, тогда введем фильтр Калмана:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C\hat{x}_k), \quad \hat{x}_0\text{- любое}$$

Тогда если система ПН, то $\exists L : \hat{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_k$

Доказательство:

Пусть $\epsilon_k = x_k - \hat{x}_k$, тогда:

$$\epsilon_{k+1} = A\epsilon_k - LC\epsilon_k = (A - LC)\epsilon_k = \hat{A}\epsilon_k$$

Мы хотим чтобы ошибка $\epsilon_k \to 0 \iff \hat{A} = A - LC$ должна быть устойчивой, или иначе говоря: $\forall \lambda_{\hat{A}} : |\lambda_{\hat{A}}| < 1$

Рассмотрим: $\hat{A}^T = A^T - C^T L^T$, а по условию (A^T, C^T) - невырожденная пара, значит мы можем подобрать такие коэффициенты, чтобы были произвольные собственные числа, в том числе и нулевые.

Управление с ОС в условиях неполных наблюдений

Имеем данную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k = Ax_k + B(-\mathbf{K}(x_k - \epsilon_k)) \\ \epsilon_k + 1 = (A - LC)\epsilon_k \end{cases}$$

В принципе, действия которые необходимо сделать полностью аналогичны действиям НС:

Приведем данную систему:

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A - BK)x_k + BK\epsilon_k \\ \epsilon_{k+1} = (A - LC)\epsilon_k \end{cases}$$

К матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \epsilon_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - B\mathbf{K} & B\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \epsilon_k \end{pmatrix}$$

Значит если СЛАУ устойчива, то должна быть устойчива центральная матрица $\mathbf{A}$.

Доказательство:

Применим опять же теорему Кэли-Гамильтона и теорему Безу: Пусть $\lambda_{\mathbf{A}} = 0$, тогда $\alpha(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{2n} = 0$ (2n так как размер блочной матрицы $\mathbf{A}$ ровно в два раза больше за счет блоков размером n). Поэтому потребуется в два раза больше шагов.

Дискретная оптимизация

Все бля, точно также как и в НС, тут даже разбирать нечего (ну за условием того, что в дискретных системах выбор собственных чисел сильно проще, ведь есть почти всегда подходящий 0):

Задача менее актуальная, т.к. в случае ДС напрашиваются желаемые собственные числа все равные 0. Однако,

пусть имеется та же самая система: $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$. Будем искать управление так, чтобы минимизировать некоторый функционал. Вот он:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty}(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \to \min_{u_k}, \quad \begin{matrix} Q \geqslant 0 \text{ (неотрицательно определенная)}, \\ R > 0 \text{ (положительно определенная)} \end{matrix}$$

Оптимальное управнение в таком случае будет иметь вид линейной обратной связи:

$$u_k^{\text{opt}} = -\mathbb{K}^* x_k,$$

где $\mathbb{K}^* = (\ldots P^* \ldots)$.

Чему равно $\mathbb{K}^*$, АА в точности на лекции не сказал — упомянул, что там комбинация чуть сложнее, чем для непрерывных систем, и вытекает из уравнения Рикатти.

Достигаемое значение функционала в случае дискретных систем имеет тот же (ср. 3.5) вид, что и у НС:

$$J_{\min} = x_0^T P^* x_0,$$

где P^* — решение дискретного аналога уравнения Рикатти-Лурье (ср. 3.4).

17. Решение разностных уравнений

Рассмотрим аналогию:

Непрерывные системы:

1. $\alpha(D)y = \beta(D)u$ - в операторном виде
2. $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ - в пространстве состояний

Дискретные системы:

1. $\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$ - в пространстве состояний

Сделаем аналог дифференциального уравнения n-го порядка для дискретных систем:

$$\alpha_n y_{k+n} + \cdots + \alpha y_k = \beta_m u_{k+m} + \cdots + \beta_0 u_k$$

Тогда для k = 0:

$$y_n = \frac{1}{\alpha_{\ n}} [\beta_m u_m + \dots + \beta_0 u_0 - \alpha_0 y_0 - \alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_{n-1} y_{n-1}]$$

Для k > 0:

$$y_{n+k} = \frac{1}{\alpha_{\ n}} [\beta_m u_{m+k} + \dots + \beta_0 u_k - \alpha_0 y_k - \alpha_1 y_{k+1} - \dots - \alpha_{n-1} y_{n+k-1}]$$

> ⓘ Info
>
> Важно, что должно выполняться условие реализуемости: n > m, ведь иначе y_n будет зависеть от будущих управлений (машина времени)

Упростим себе жизнь и введем оператор сдвига на один такт вперед ξ аналогично оператору дифференцирования в НС:

$$\xi f_k = f_{k+1}$$

$$\xi^2 f_k = \xi(\xi f_k) = f_{k+2}$$

Тогда разностное уравнение можно записать как:

$$\alpha_n \xi^n y_k + \dots + \alpha_1 \xi y_k + \alpha_0 y_k = \beta_m \xi^m u_k + \dots + \beta_0 u_k$$

А это уже можно переписать в привычном виде:

$$\alpha(\xi) y_k = \beta(\xi) u_k$$

И тогда можно получить дискретную передаточную функцию:

$$y_k = \frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)} u_k = H^*(\xi) u_k$$

Общее решение разностных уравнений

Тогда теперь вместо раскручивания рекуренции, мы можем сразу же получить решение y_k:

$$y_k = y_k^* + y_k^{**}$$

- $y_k^* : \alpha(\xi) y_k = 0$ - общее решение однородного разностного уравнения
- $y_k^{**} : \alpha(\xi) y_k = \beta(\xi) u_k$ - частное решение однородного разностного уравнения

Используем подстановку: $y_k^* = \lambda^k$, заметим тогда, что:

$$\xi\lambda^k = \xi y_k^* = y_{k+1}^* = \lambda \cdot \lambda^k$$

По этому свойству получаем:

$$\alpha(\xi) y_k = \alpha(\lambda) \cdot \lambda^k = 0$$

Не рассматривая тривиальное решение получаем:

$$\alpha(\lambda) = 0 \iff y_k^* = \sum C_i \lambda_i^k \quad \text{- в случае простых корней}$$

В случае кратных - понятно, просто добавляются дополнительные $(C_0 + C_1 k + C_2 k^2 + \ldots)$

Мы снова получили условие устойчивости: из общего решения очевидно, что

$$y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \iff |\lambda_i| < 1$$

18. Z-преобразование и его свойства

Для НС мы использовали преобразование Лапласа, в случае если система описана в виде дифура.

Для ДС тоже есть свое преобразование - z-преобразование:

Для этого рассмотрим несколько вспомогательных функций:

Дискретная функция Дирака (модулирующая функция):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kh)$$

Это точная аналогия непрерывной функции Дирака - эта функция суммирует только один участок со временем t, остальное она зануляет.

Теперь также возьмем некоторую вспомогательную фукнцию $f(t)$, совпадающую с f_k во всех точках дискретизации. В таком случае можно вывести формурующую функцию:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t)\delta(t-kh)$$

Получается, что это функция, представляющая из себя "расческу". В том смысле, что во всех точках дискретизации она представляет из себя импульсы площадью равной f_k, а во всех точках (между дискретизацией) функция равна нулю, тем самым она принимает вид:

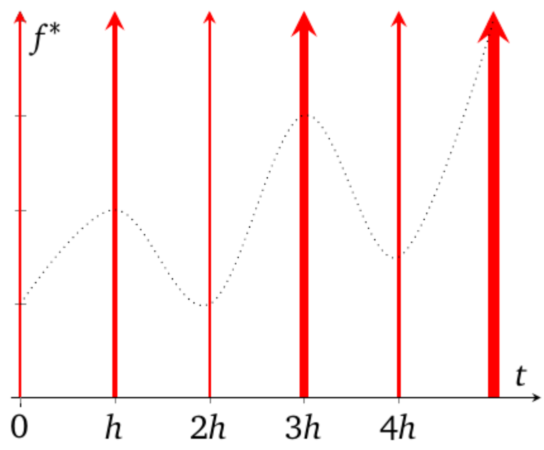


Рис. 6.2: График $f^*(t)$. Толщиной стрелок показана площадь «зубов расчёски» $S = f_k$.

Данная функция теперь непрерывная, а значит от нее можно взять привычное преобразование Лапласа:

$$L\{f^*(t)\} = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(t)\delta(t-kh)e^{-pkh}dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f(t)\delta(t-kh)e^{-pkh}dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh)e^{-pk}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}, \quad где\ z = e^{ph}$$

ⓘ Info

Z-преобразование от дискретной последовательности f_k

$$Z\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} = \overline{f}(z)$$

Example

Единичная функция, $f_k = 1[k]$.

$$Z\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Example

Дискретная экспонента, $f_k = a^k$.

$$Z\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = 1 + \frac{a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \dots = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

Свойства и теоремы Z-преобразования:

Info

Линейность Z-преобразования: $Z\{\alpha f_k + \beta \overline{g}(z)\} = \alpha \overline{f}(z) + \beta \overline{g}(z)$

Доказательство: по определению (разбиваем на две суммы, и получаем два преобразования)

Info

Теорема смещения: $Z\{f_{k+1}\} = z\overline{f}(z) - zf_0$
Теорема смещения $\times 2$: $Z\{f_{k+2}\} = z^2\overline{f}(z) - z^2 f_0 - zf_1$

Доказательство:

$$Z\{f_{k+1}\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1} z^{-k} = \sum_{k_1=1}^{\infty} f_{k_1} z^{-(k_1-1)} = z\sum_{k_1=1}^{\infty} f_{k_1} z^{-k_1} = z\left[\sum_{k_1=0}^{\infty} f_{k_1} z^{-k_1} - f_0\right] = z\overline{f}(z) -$$

Info

Дискретная свертка: $(f \cdot g)_k = \sum_{l=0}^{k} f_l g_{k-l}$
Z-преобразование от свертки есть произведение Z-преобразований:

$$Z\{f_k \cdot g_k\} = \overline{f}(z) \cdot \overline{g}(z)$$

Свертка коммутативна: $(f \cdot g)_k = (g \cdot f)_k$

Доказательство:

$$Z\left\{\sum_{l=0}^{k} f_l g_{k-l}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} f_l g_{k-l} z^{-k} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} f_l g_{k-l} z^{-k} = \sum_{l=0}^{\infty} f_l z^{-l} \sum_{k=l}^{\infty} g_{k-l} z^{-(k-l)} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} f_l z^{-l} \sum_{k_1=0}^{\infty} g_{k_1} z^{-k_1} = \overline{f}(z) \cdot \overline{g}(z)$$

Info

Предельные теоремы:

$$f_0 = \lim_{z \to \infty} \overline{f}(z) = \lim_{z \to \infty} \left(f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \cdots\right)$$

$$f_\infty = \lim_{z \to 1} (z-1)\overline{f}(z) = \lim_{z \to 1} (z-1) \left(f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \cdots\right)$$

Доказательство (для 1-ой теоремы его нет, т.к. там все тупо зануляется, кроме f_0):

$$Z\{f_{k+1} - f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} (f_{k+1} - f_k) z^{-k}$$

Найдем $\lim_{z \to 1}$ от обеих частей:

$$Z\{f_{k+1} - f_k\} = Z\{f_{k+1}\} - \overline{f} = z\overline{f} - zf_0 - \overline{f} = (z-1)\overline{f} - zf_0 =_{z \to 1} (z-1)\overline{f} - f_0$$

$$\lim_{z \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} (f_{k+1} - f_k) z^{-k} = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} (f_{k+1} - f_k) = \lim_{N \to \infty} [(f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \cdots + (f_N -$$

$$= \lim_{N \to \infty} [-f_0 + f_{N+1}] = f_\infty - f_0$$

Приравняв результаты получим:

$$\lim_{z \to 1} (z-1)\overline{f} - f_0 = f_\infty - f_0$$

$$f_\infty = \lim_{z \to 1} (z-1)\overline{f} = \lim_{z \to 1} (z-1) \left(f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \cdots\right)$$

> Info
>
> Теорема затухания: $Z\{a^k f_k\} = \overline{f}\left(\frac{z}{a}\right)$

Доказательство:

$$Z\{a^k f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k s^{-k} = \overline{f}(s) = \overline{f}\left(\frac{z}{a}\right)$$

Таблица Z-преобразований

№	f_k	$\overline{f}(z)$
1	$1[k]$	$\frac{z}{z-1}$
2	a^k	$\frac{z}{z-a}$
3	k	$\frac{z}{(z-1)^2}$
4	k^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	$\sin bk$	$\frac{z\sin b}{z^2-2z\cos b+1}$
6	$\cos bk$	$\frac{z(z-\cos b)}{z^2-2z\cos b+1}$

Преобразование от $1[z]$

$$Z\{1[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right)$$

Обозначим:

$$S_n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n}$$

Теперь домножим это на $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z}S_n = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^{n+1}}$$

Теперь вычтем эти два выражения:

$$S_n - \frac{1}{z}S_n = \left(1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^n}\right) - \left(\frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

После вычитания почти все слагаемые сократятся:

$$S_n\left(1 - \frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{z^{n+1}}$$

Теперь решим это уравнение относительно S_n:

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{z^{n+1}}}{1 - \frac{1}{z}}$$

Теперь найдём предел при $n \to \infty$. Если $|z| > 1$, то $\frac{1}{z^{n+1}} \to 0$, и тогда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Это и есть ответ:

$$\boxed{Z\{1[k]\} = \frac{z}{z-1}} \quad \text{при } |z| > 1$$

Преобразование от a^k

Оно абсолютно аналогично преобразованию от $1[k]$ выше приводился пример почему

Преобразование от k

Имеем следующее преобразование: $Z\{1[k]\} = \frac{z}{z-1}$

Попробуем найти производную от преобразования $Z\{1[k]\}$:

$$\frac{d}{dz}Z\{1[k]\} = \frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \left(\frac{z}{z-1}\right)\frac{d}{dz}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-k)z^{-k-1} = \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{-1}{(z-1)^2}$$

Но:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-k)z^{-k-1} = (-1)\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot z^{-1}\cdot z^{-k} = -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot z^{-k} = -\frac{1}{z}Z\{k\} = \frac{-1}{(z-1)^2}$$

Следовательно:

$$Z\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Преобразование от k^2

Данное преобразование происходит в точности как преобразование от k, шаг за шагом, за исключением того, что берем производную мы уже от $Z\{k\}$.

Преобразование от $\sin bk$

Для начала представим синус в стандартной форме:

$$f_k = \sin bk = \frac{e^{jbk} - e^{-jbk}}{2j}$$

Пусть $a = e^{jb}$, так как это константа и не меняется, тогда:

$$f_k = \frac{a^k - a^{-k}}{2j} = \frac{a^k}{2j} - \frac{a^{-k}}{2j}$$

$$Z\{f_k\} = \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-a^{-1}}\right) = \frac{z}{2j}\frac{(z-e^{-jb}-(z-e^{jb}))}{z^2 - z(e^{jb}+e^{-jb})+1} = \frac{z\cdot\sin b}{z^2-2z\cos b+1}$$

Преобразование от $\cos bk$

Аналогично представляем $\cos bk$ в стандартной форме:

$$f_k = \cos bk = \frac{e^{jbk} + e^{-jbk}}{2}$$

Аналогично делаем замену переменных и получаем:

$$f_k = \frac{a^k + a^{-k}}{2j} = \frac{a^k}{2j} + \frac{a^{-k}}{2j}$$

$$Z\{f_k\} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-a^{-1}}\right) = \frac{z}{2}\frac{(z-e^{-jb}) + (z-e^{jb})}{z^2 - z(e^{jb}+e^{-jb}) + 1} = \frac{z}{2}\frac{(2z - (e^{jb}+e^{-jb}))}{z^2 - 2z\cos b + 1}$$

$$= \frac{z}{2}\frac{(2z - 2\cos b)}{z^2 - 2z\cos b + 1} = \frac{z(z-\cos b)}{z^2 - 2z\cos b + 1}$$

Способы обратного Z-преобразования

1. Взять интеграл (не будем):

$$f_k = \mathscr{Z}^{-1}\left\{\overline{f}(z)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\oint \overline{f}(z) z^k \frac{dz}{z}$$

2. Разложить образ в ряд Лорана:

$$\overline{f}(z) = f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$$

3. Разложить образ на сумму простейших

$$\overline{f}(z) = \ldots$$

4. Разложить на множители → свертка

$$\overline{f}(z) = \overline{f}_1 \overline{f}_2$$

5. По таблице $\mathscr{Z}$-преобразований.

19. Анализ ЛДСАУ при помощи Z-преобразования. Дискретная передаточная функция

Пусть у нас есть разностное уравнение в операторном виде:

$$\alpha(\xi) y_k = \beta(\xi) u_k, \quad \text{вместе с НУ:} y_0, \ldots, y_{n-1}$$

Берем Z-преобразование слева и справа:

При нулевых НУ:

$$\alpha(z)\overline{y}(z) = \beta(z)\overline{u}(z)$$

Тогда:

$$\overline{y}(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}\overline{u}(z) = H^*(z)\overline{u}(z)$$

где $H^*(z)$ - дискретная комплексная передаточная функция

$$H^*(z) = H^*(\xi)|_{\xi \to z}$$

При ненулевых НУ:

$$\overline{y}(z) = H^*(z)\overline{u}(z) + \frac{\phi(НУ)}{\alpha(z)}$$

20. Эквивалентность различных видов описания ЛДСАУ. Дискретная весовая функция

> Info
>
> Дискретная весовая функция - это обратное Z-преобразование от дискретной передаточной функции: $\overline{y} = H^*(z)\overline{u}$
>
> $$h[k] = Z^{-1}\{H^*(z)\}$$

Для дискретных систем:

$$y[k] = \sum_{l=0}^{k} h[k-l]u[l] = h[k] \cdot u[k]$$

Докажем, что $y[k] = h[k] \cdot u[k]$

$$Z\{h[k] \cdot u[k]\} = \overline{h}(z) \cdot \overline{u}(z) = \overline{y}(z) = Z\{y[k]\}$$

Так как в отображении все свойства сохраняются, следовательно:

$$y = H(\xi)u \iff \overline{y} = \overline{h}(z)\overline{u}$$

Ну а тогда применив обратное Z-преобразование, получим:

$$Z^{-1}\{\overline{y}\} = Z^{-1}\{\overline{h}(z) \cdot \overline{u}(z)\}$$

$$y[k] = \sum_{l=0}^{k} h[k-l]u[l]$$

> ⓘ Info
>
> Физический смысл дискретной весовой функции - реакция дискретной системы ан импульс (дискретную функцию Дирака) при нулевых начальных условиях.

21. Критерии устойчивости дискретных систем. Конформное преобразование

Делаем очень комфортное (конформное) преобразование:

$$z = \frac{p+1}{p-1}$$

и жестко кайфуем от того, что мы вернулись в НС.

22. Построение точной дискретной модели по непрерывному описанию