Вар. 19 (513020125)

1. Построить оценку максимального правдоподобия параметра θ по выборке $X_1, \ldots, X_n$ из распределения с плотностью
$p(x;\theta) = \frac{1}{2x\theta}\mathbb{I}_{\{x\in[\exp(-\theta),\exp(\theta)]\}}$.
2. Построить НРМД-оценку параметра $\theta = p^2$ по выборке $X_1, \ldots, X_n$ из распределения с дискретной плотностью $q_\theta(k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k},\ k = 0, 1, \ldots, m$.
3. Даны две независимые выборки $X_1, \ldots, X_n$ из $N(a, \sigma^2)$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ из $N(b, 4\sigma^2)$. Построить доверительный интервал для $a - 2b$.

1 Функция правдоподобия

$$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2x_i\theta}\cdot \mathbb{I}_{\{x_i\in[\exp(-\theta),\exp(\theta)]\}}$$

$$= \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \prod_{1}^{n}\frac{1}{x_i}\cdot\prod_{1}^{n}\mathbb{I}_{\{x_i\in[\exp(-\theta),\exp(\theta)]\}}.$$

$$x_i\in[\exp(-\theta),\exp(\theta)] \Rightarrow |\ln x_i|\le\theta$$

$$\prod_{1}^{n}\mathbb{I}_{\{x_i\in[\exp(-\theta),\exp(\theta)]\}} = \mathbb{I}_{\{\theta\ge\max\limits_{1\le i\le n}|\ln x_i|\}}$$

$$L(x,\theta) = \underbrace{\left(\frac{1}{2\theta}\right)^n\cdot\mathbb{I}_{\{\theta\ge\max\limits_{1\le i\le n}|\ln x_i|\}}}_{h(\theta,\ \max\limits_{1\le i\le n}|\ln x_i|)}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\prod_{1}^{n}\frac{1}{x_i}}_{g(x)}$$

МДС: $\max\limits_{1\le i\le n}|\ln x_i|$

Поскольку $\left(\frac{1}{2\theta}\right)^n$ убывает с ростом θ, максимум достигается при минимально возможном θ, удовлетворяющем условию $\theta \geqslant \max\{|\ln(X_1)|, \ldots |\ln(X_n)|\}$.

$$lL(x,\theta) = -n\ln 2 - \sum_1^n \ln X_i - n\ln\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} lL = -\frac{n}{\theta}$$ – подтверждает убывание

$$\Downarrow$$

$$\hat{\theta} = \max\{|\ln X_1|, \ldots |\ln X_n|\}.$$

(2) **2.** Построить ОМП параметра $\theta = p^2$ по выборке $X_1, \ldots, X_n$ из распределения с дискретной плотностью $q_\theta(k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, \; k = 0, 1, \ldots, m.$

Функция правдоподобия для p:

$$L(p) = \prod_1^n C_m^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m-x_i}$$

$$L(p) = \underbrace{\prod_1^n C_m^{x_i}}_{h(x)} \cdot \underbrace{p^{\sum x_i} (1-p)^{mn - \sum x_i}}_{g(S,p)}$$

$$S = \sum_1^n x_i$$ – МДС.

$$lL(p) = \sum_1^n [\ln C_m^{x_i} + x_i \ln p + (m - x_i)\ln(1-p)]$$

не зависит от p, уйдет при дифффер-и

$$l(p) = S\ln p + (mn - S)\ln(1-p)$$

$(S = \sum x_i)$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{S}{p} - \frac{nm - S}{1-p} = 0$$

$$\frac{S}{p} = \frac{mn - S}{1-p} \Rightarrow S = mnp \Rightarrow \hat{p} = \frac{S}{mn}$$

$$p = \frac{\overline{X}}{m}$$

Так как $\hat{\theta} = p^2$ — монотонно возрастает и является гладкой, то $\hat{\theta}$ можно получить подстановкой:

$$\hat{\theta} = \frac{\overline{X}^2}{m^2}$$

3. Даны две независимые выборки $X_1, \ldots, X_n$ из $N(a, \sigma^2)$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ из $N(b, 4\sigma^2)$. Построить доверительный интервал для $a - 2b$.

$$\theta = a - 2b.$$

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - a}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\sqrt{m}\,\frac{\overline{Y} - b}{2\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\frac{n S_x^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\frac{m S_y^2}{4\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1}$$

$$\bar{x} - a \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\bar{y} - b \sim N\left(0, \frac{4\sigma^2}{m}\right)$$

$$2\bar{y} - 2b \sim N\left(0, \frac{16\sigma^2}{m}\right)$$

$$(\bar{x} - a) - (2\bar{y} - 2b) = \bar{x} - 2\bar{y} - (a - 2b)$$

$$\sim N\left(0, \underbrace{\frac{16\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n}}_{= \frac{\sigma^2(16n+m)}{mn}}\right)$$

$$\frac{\bar{x} - 2\bar{y} - \theta}{\sqrt{\frac{16n+m}{mn}}\,\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\frac{nS_x^2}{\sigma^2} + \frac{mS_y^2}{4\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2}$$

$$\frac{\dfrac{\bar{x} - 2\bar{y} - \theta}{\sqrt{\frac{16n+m}{mn}}\,\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left(\frac{nS_x^2}{\sigma^2} + \frac{mS_y^2}{4\sigma^2}\right)}} \sim S_{n+m-2}$$

$$\frac{\bar{x} - 2\bar{y} - \theta}{\sqrt{nS_x^2 + \frac{mS_y^2}{4}}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{(16n+m)(n+m-2)}{mn}}}_{C(m,n)}$$

$$P_\theta\left(-x_\alpha \le C(n,m)\,\frac{\bar{x}-2\bar{y}-\theta}{\sqrt{nS_x^2+\frac{mS_y^2}{4}}} \le x_\alpha\right)=$$

$$=1-\alpha.$$

$$\bar{x}-2\bar{y}-x_\alpha\cdot\frac{\sqrt{nS_x^2+\frac{mS_y^2}{4}}}{C(n,m)} \le \theta \le \bar{x}-2\bar{y}+x_\alpha\cdot\frac{\sqrt{nS_x^2+\frac{mS_y^2}{4}}}{C(n,m)}$$