Вар. 25 (513020125)

Плотность двумерного нормального распределения имеет вид:

$p_{\xi,\eta}(x,y) = C \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(3x^2+3xy+7y^2+9x+17y+13)\right);$

1. Вычислить вектор мат. ожиданий и ковариационные характеристики данного случайного вектора.
2. Найти аффинное преобразование, переводящее исходный случайный вектор в стандартный нормальный.
3. Найти ортогональное преобразование, переводящее соответствующий центрированный случайный вектор в вектор с независимыми компонентами.
4. Вычислить характеристики совместного распределения случайного вектора $(-4\xi-4\eta, \xi-3\eta)$ и записать его плотность.
5. Найти условное распределение ξ при условии η.

① $p_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = C\cdot \exp(-\frac{1}{2}(3x^2+3xy+7y^2+9x+$

$+17y+13)$

$q(x,y) = 3x^2+3xy+7y^2+9x+17y+13 =$

$= 3(x^2+xy+3x)+7y^2+17y+13 =$

$[(x+0,5y+1,5)^2 = x^2+0,25y^2+1,5^2+xy+3x+1,5y]$

$= 3(x+0,5y+1,5)^2+7y^2+17y+13-0,75y^2-$

$-2,25\cdot 3 - 4,5y = 3(x+0,5y+1,5)^2+$

$+6,25y^2+12,5y+6,25 =$

$= 3(x+0,5y+1,5)^2 + 6,25(y^2+2y+1) =$

$= 3(x+0,5y+1,5)^2+6,25(y+1)^2 =$

$= 3(x+1+0,5y+0,5)^2+6,25(y+1)^2 =$

$= 3((x+1)+0,5(y+1))^2+6,25(y+1)^2 =$

$= 3((x+1)^2+(x+1)(y+1)+0,25(y+1)^2)+$

$+6,25(y+1)^2 =$

$$= 3(x+1)^2 + 3(x+1)(y+1) + 7(y+1)^2$$

$$p_{\xi_1, \xi_2}(x,y) = C \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(3(x+1)^2 + 3(x+1)(y+1) + 7(y+1)^2\right)\right)$$

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 7 \end{pmatrix}}_{R^{-1}} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 28 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1^2 = \frac{28}{75} \qquad \sigma_2^2 = \frac{12}{75}$$

$$\rho = \frac{\frac{-6}{75}}{\sqrt{\frac{28 \cdot 12}{75^2}}} = -\frac{\sqrt{21}}{14}$$

$$C = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{1-\frac{21}{14^2}}\sqrt{\frac{28}{75}} \cdot \sqrt{\frac{12}{75}}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{4\pi}$$

②

$$t_1^2 = 3\left((x+1) + 0{,}5(y+1)\right)^2$$
$$t_2^2 = 6{,}25(y+1)^2$$

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$A(\xi - B) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 + 1 \\ \xi_2 + 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}\xi_1 + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5}{2}\xi_2 + \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\eta_1 = \sqrt{3}\xi_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\eta_2 = \frac{5}{2}\xi_2 + \frac{5}{2}$$

$$\mathrm{Var}\,\xi = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 28 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathrm{Var}\,\xi \cdot A^T = \frac{1}{75} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 28 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{75} \cdot \begin{pmatrix} 25\sqrt{3} & 0 \\ -15 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{75} \cdot \begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, D \right)$$

$$B R B^T = D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

1) $(R - \lambda I) X = 0$

$$|R - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{28}{75} - \lambda & -6/75 \\ -6/75 & \frac{12}{75} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{28}{75} - \lambda \right)\left(\frac{12}{75} - \lambda \right) - 36/75^2 =$$

$$= \frac{112}{1875} - \frac{8}{15}\lambda + \lambda^2 - \frac{36}{75^2} = \frac{4}{75} - \frac{8}{15}\lambda + \lambda^2 =$$

$$= \left(\lambda - \frac{2}{15} \right) \cdot \left(\lambda - \frac{2}{5} \right)$$

$\lambda_1 = \frac{2}{15}$

$$R - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} & -\frac{2}{25} \\ -\frac{2}{25} & \frac{2}{25} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{25} & \frac{2}{75} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = \frac{2}{5}$

$$R - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -\frac{2}{75} & -\frac{2}{75} \\ -\frac{2}{25} & -\frac{6}{25} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -\frac{2}{25} & -\frac{6}{25} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X_2 = x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|X_1| = \sqrt{1^2 + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$|X_2| = \sqrt{10} = \sqrt{10}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$m = B E \xi = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} \\ -\frac{4}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\xi \sim N\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} \\ -\frac{4}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \right).$$

4 $\quad \nu = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$

$$E \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Var} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = A \operatorname{Var} \xi A^T = \frac{1}{75} \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 28 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{75}\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -88 & 46 \\ -24 & -42 \end{pmatrix} = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 448 & -16 \\ -16 & 172 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{448}{75} \qquad \sigma_2 = \frac{172}{75}$$

$$\rho = \frac{\frac{-16}{75}}{\sqrt{\frac{448\cdot 172}{75^2}}} = -\frac{\sqrt{301}}{301}$$

Ответ: $\nu \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 448 & -16 \\ -16 & 172 \end{pmatrix}\right)$

5) $$p_{\xi|\eta=y_0}(x) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y_0)}{p_\eta(y_0)} =$$

$$= c_1(y_0)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(3\left((x+1)+0{,}5(y_0+1)\right)^2 + \underbrace{6{,}25(y_0+1)^2}_{c_2(y_0)}\right)\right) =$$

$$= c_1(y_0)\cdot e^{c_2(y_0)}\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(3(x+0{,}5y_0+1{,}5)^2\right)\right)$$

$$\sigma^2(y_0) = \frac{1}{3}$$

$$m(y_0) = -0{,}5y_0 - 1{,}5$$

$$E(\xi|\eta) = -0{,}5\eta - 1{,}5$$

$$D(\xi|\eta) = \frac{1}{3}$$