Capítulo 3

1. PENSE Neste problema, conhecemos o módulo e a orientação de um vetor bidimensional e devemos calcular as componentes x e y do vetor.

FORMULE As componentes x e y de um vetor $\vec{a}$ que está no plano xy são dadas por

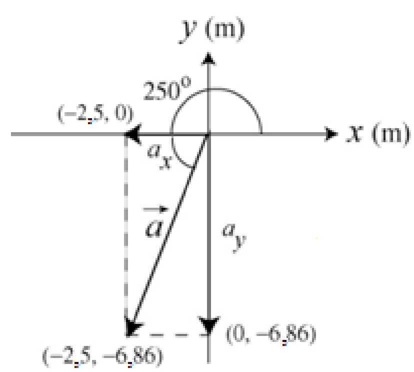
$$a_x = a\cos\theta, \qquad a_y = a\,\text{sen}\,\theta$$

em que $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ é o módulo do vetor, e $\theta = \tan^{-1}(a_y/a_x)$ é o ângulo entre o vetor e o semieixo x positivo. Como $\theta = 250°$, sabemos que o vetor está no terceiro quadrante e, portanto, as componentes x e y são negativas.

ANALISE (a) A componente x de $\vec{a}$ é

$$a_x = a\cos\theta = (7{,}3\text{ m})\cos 250° = -2{,}50\text{ m}$$

(b) A componente y de $\vec{a}$ é $a_y = a\,\text{sen}\,\theta = (7{,}3\text{ m})\,\text{sen}\,250° = -6{,}86\text{ m} \approx -6{,}9\text{ m}.$ Os resultados aparecem na figura a seguir.



APRENDA Existem outras formas de calcular as componentes. Como o vetor faz um ângulo de 70° para baixo com o semieixo x negativo, podemos escrever:

$$a_x = -(7{,}3\text{ m})\cos 70° = -2{,}50\text{ m}, \quad a_y = -(7{,}3\text{ m})\,\text{sen}\,70° = -6{,}86\text{ m}.$$

Por outro lado, como o vetor faz um ângulo de 20° para a esquerda com o semieixo y negativo, podemos escrever

$$a_x = -(7{,}3\text{ m})\,\text{sen}\,20° = -2{,}50\text{ m}, \quad a_y = -(7{,}3\text{ m})\cos 20° = -6{,}86\text{ m}$$

Para verificar que o resultado está correto, note que

$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-2{,}50\text{ m})^2 + (-6{,}86\text{ m})^2} = 7{,}3\text{ m e } \tan^{-1}\left(a_y/a_x\right) = \tan^{-1}[(-6{,}86\text{ m})/(-2{,}50\text{ m})] = 250°,$$

que são os valores dados no enunciado do problema.

2. (a) Se r = 15 m e θ = 30°, a componente x de $\vec{r}$ é dada por

$$r_x = r\cos\theta = (15\text{ m})\cos 30° = 13\text{ m}.$$

(b) A componente y é dada por $r_y = r\,\text{sen}\,\theta = (15\text{ m})\,\text{sen}\,30° = 7{,}5\text{ m}$.

3. PENSE Neste problema, conhecemos as componentes x e y de um vetor bidimensional $\vec{A}$, e devemos determinar o módulo e a orientação do vetor.

FORMULE O vetor $\vec{A}$ pode ser representado na notação *módulo-ângulo* (A, θ), em que

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

é o módulo do vetor, e

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

é o ângulo que o vetor faz com o semieixo x positivo. Essas expressões podem ser usadas para calcular A e θ a partir dos dados do problema, $A_x = -25{,}0$ m e $A_y = 40{,}0$ m.

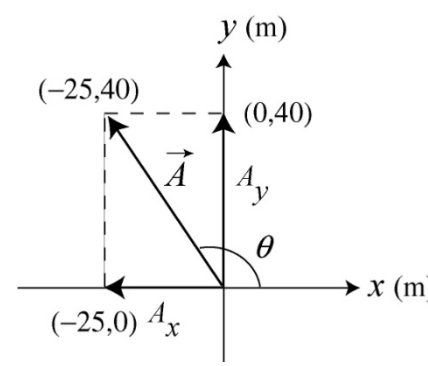
ANALISE (a) O módulo do vetor é

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(-25{,}0\ \text{m})^2 + (40{,}0\ \text{m})^2} = 47{,}2\ \text{m}$$

(b) Lembrando que $\tan\theta = \tan(\theta + 180°)$,

$\tan^{-1}[(40{,}0\ \text{m})/(-25{,}0\ \text{m})] = -58°$ ou $122°$.

Sabendo que o vetor está no segundo quadrante (pelos sinais das componentes x e y), vemos que a resposta correta é $\theta = 122°$. Os resultados aparecem na figura à direita.



APRENDA Podemos verificar se os resultados estão corretos, observando que as componentes x e y do vetor podem ser escritas na forma

$$A_x = A\cos\theta, \qquad A_y = A\,\text{sen}\,\theta$$

Substituindo A e θ pelos valores calculados nos itens (a) e (b), obtemos

$$A_x = (47{,}2\ \text{m})\cos 122° = -25{,}0\ \text{m}, \quad A_y = (47{,}2\ \text{m})\,\text{sen}\,122° = +40{,}0\ \text{m}$$

que são os valores dados no enunciado do problema.

4. Sabendo que uma circunferência completa tem 360° e 2π radianos, podemos fazer as conversões pedidas usando uma simples regra de três:

(a) $20{,}0° = (20{,}0°)\dfrac{2\pi\ \text{rad}}{360°} = 0{,}349$ rad.

(b) $50{,}0° = (50{,}0°)\dfrac{2\pi\ \text{rad}}{360°} = 0{,}873$ rad.

(c) $100{,}0° = (100{,}0°)\dfrac{2\pi\ \text{rad}}{360°} = 1{,}75$ rad.

(d) $0{,}330 \text{ rad} = (0{,}330 \text{ rad})\dfrac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 18{,}9^\circ.$

(e) $2{,}10 \text{ rad} = (2{,}10 \text{ rad})\dfrac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 120^\circ.$

(f) $7{,}70 \text{ rad} = (7{,}70 \text{ rad})\dfrac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 441^\circ.$

5. A soma vetorial dos deslocamentos $\vec{d}_{\text{tempestade}}$ e $\vec{d}_{\text{novo}}$ deve ser igual ao deslocamento desejado inicialmente, $\vec{d}_{\text{o}} = (120 \text{ km})\hat{\text{j}}$, na qual leste é $\hat{\text{i}}$ e norte é $\hat{\text{j}}$. Assim, escrevemos

$$\vec{d}_{\text{tempestade}} = (100 \text{ km})\hat{\text{i}}, \quad \vec{d}_{\text{novo}} = A\hat{\text{i}} + B\hat{\text{j}}.$$

(a) A equação $\vec{d}_{\text{tempestade}} + \vec{d}_{\text{novo}} = \vec{d}_{\text{o}}$ nos dá $A = -100$ km e $B = 120$ km. O módulo de $\vec{d}_{\text{novo}}$ é, portanto, igual a

$$|\vec{d}_{\text{novo}}| = \sqrt{A^2 + B^2} = 156 \text{ km}.$$

(b) A direção é

$$\tan^{-1}(B/A) = -50{,}2^\circ \text{ ou } 180^\circ + (-50{,}2^\circ) = 129{,}8^\circ.$$

Escolhemos o segundo valor porque sabemos que o deslocamento está no segundo quadrante. A resposta pode ser expressa de várias formas diferentes: 129,8° no sentido anti-horário a partir do leste, 39,8° para oeste a partir do norte ou 50,2° para o norte a partir do oeste.

6. (a) A distância vertical é $h = d \operatorname{sen}\theta$, na qual $d = 12{,}5$ m e $\theta = 20{,}0^\circ$. Assim, $h = 4{,}28$ m.

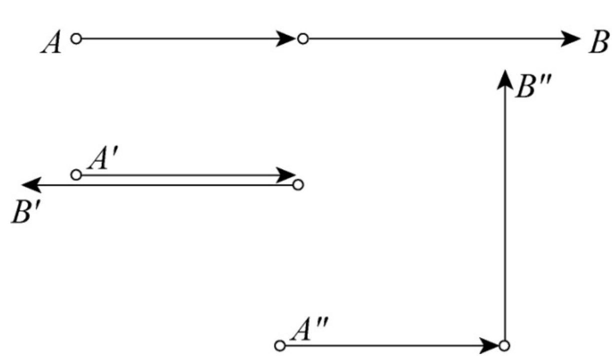
(b) A distância horizontal é $d\cos\theta = 11{,}7$ m.

7. (a) Para que o módulo da resultante seja 7 m, os vetores devem estar paralelos (caso *AB* na figura a seguir).

(b) Para que o módulo da resultante seja 1 m, os vetores devem estar antiparalelos, ou seja, em sentidos opostos (caso *A'B'* na figura a seguir).

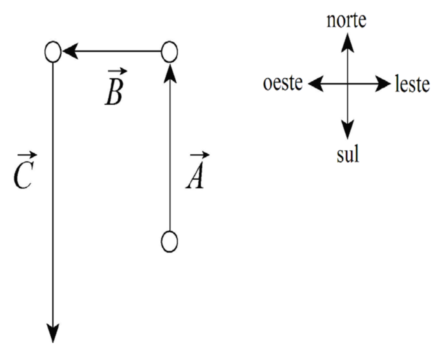
(c) Para que o módulo da resultante seja $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\text{m}$, os vetores devem estar perpendiculares (caso *A''B''* na figura a seguir).

Nas figuras, os vetores foram desenhados posicionando a origem do segundo vetor na extremidade do primeiro; a resultante, que não é mostrada, seria uma reta ligando a origem do primeiro vetor à extremidade do segundo.



8. Chamamos os vetores deslocamento de $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ (e chamamos a soma vetorial de $\vec{r}$). Escolhemos o *leste* como direção $\hat{\text{i}}$ (direção $+x$) e o *norte* como direção $\hat{\text{j}}$ (direção $+y$). Está implícito que todas as distâncias são em quilômetros.

(a) O diagrama vetorial que representa o movimento é o seguinte:



$\vec{A} = (3{,}1 \text{ km})\,\hat{\text{j}}$
$\vec{B} = (-2{,}4 \text{ km})\,\hat{\text{i}}$
$\vec{C} = (-5{,}2 \text{ km})\,\hat{\text{j}}$

(b) O ponto final é representado por

$$\vec{r} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (-2{,}4 \text{ km})\hat{\text{i}} + (-2{,}1 \text{ km})\hat{\text{j}}$$

cujo módulo é

$$|\vec{r}| = \sqrt{(-2{,}4 \text{ km})^2 + (-2{,}1 \text{ km})^2} \approx 3{,}2 \text{ km}.$$

(c) Existem duas possibilidades para o ângulo:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}1 \text{ km}}{-2{,}4 \text{ km}}\right) = 41° \text{ ou } 221°.$$

Escolhemos o segundo ângulo porque sabemos que $\vec{r}$ está no terceiro quadrante. Convém notar que muitas calculadoras gráficas contam com rotinas de conversão de coordenadas retangulares para coordenadas polares que fornecem automaticamente o ângulo correto (medido a partir do semieixo x positivo, no sentido anti-horário. O ângulo pode ser expresso de várias formas: 221° no sentido anti-horário a partir do leste (uma descrição que pode soar meio estranha), 41° ao sul do oeste ou 49° a oeste do sul. A resultante $\vec{r}$ não aparece no desenho; seria uma seta ligando a "cauda" de $\vec{A}$ à "cabeça" de $\vec{C}$.

9. Está implícito que todas as distâncias nesta solução estão expressas em metros.

(a) $\vec{a} + \vec{b} = [4{,}0 + (-1{,}0)]\hat{\text{i}} + [(-3{,}0) + 1{,}0]\hat{\text{j}} + (1{,}0 + 4{,}0)\hat{\text{k}} = (3{,}0\hat{\text{i}} - 2{,}0\hat{\text{j}} + 5{,}0\hat{\text{k}})$ m.

(b) $\vec{a} - \vec{b} = [4{,}0 - (-1{,}0)]\hat{\text{i}} + [(-3{,}0) - 1{,}0]\hat{\text{j}} + (1{,}0 - 4{,}0)\hat{\text{k}} = (5{,}0\hat{\text{i}} - 4{,}0\hat{\text{j}} - 3{,}0\hat{\text{k}})$ m.

(c) A condição de que $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$ leva a $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$, que é o negativo do resultado do item (b). Assim, $\vec{c} = (-5{,}0\,\hat{\text{i}} + 4{,}0\,\hat{\text{j}} + 3{,}0\,\hat{\text{k}})$ m.

10. As componentes x, y e z de $\vec{r} = \vec{c} + \vec{d}$ são, respectivamente,

(a) $r_x = c_x + d_x = 7{,}4 \text{ m} + 4{,}4 \text{ m} = 12 \text{ m}$,

(b) $r_y = c_y + d_y = -3{,}8 \text{ m} - 2{,}0 \text{ m} = -5{,}8 \text{ m}$ e

(c) $r_z = c_z + d_z = -6{,}1 \text{ m} + 3{,}3 \text{ m} = -2{,}8 \text{ m}$.

11. PENSE Este problema envolve a soma de dois vetores bidimensionais, $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Precisamos calcular o módulo e a orientação do vetor resultante.

FORMULE Na notação dos vetores unitários, um vetor bidimensional $\vec{a}$ é escrito na forma $\vec{a}=a_x\hat{\mathrm{i}}+a_y\hat{\mathrm{j}}$ e um vetor bidimensional $\vec{b}$ é escrito na forma $\vec{b}=b_x\hat{\mathrm{i}}+b_y\hat{\mathrm{j}}$. A soma dos dois vetores é dada por

$$\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\hat{\mathrm{i}}+(a_y+b_y)\hat{\mathrm{j}}=r_x\hat{\mathrm{i}}+r_y\hat{\mathrm{j}}$$

ANALISE (a) Como $\vec{a}=(4{,}0\text{ m})\hat{\mathrm{i}}+(3{,}0\text{ m})\hat{\mathrm{j}}$ e $\vec{b}=(-13{,}0\text{ m})\hat{\mathrm{i}}+(7{,}0\text{ m})\hat{\mathrm{j}}$, as componentes *x* e *y* de $\vec{r}$ são

$$r_x = a_x + b_x = (4{,}0\text{ m}) + (-13\text{ m}) = -9{,}0\text{ m}$$
$$r_y = a_y + b_y = (3{,}0\text{ m}) + (7{,}0\text{ m}) = 10{,}0\text{ m}$$

Assim, $\vec{r}=(-9{,}0\text{ m})\hat{\mathrm{i}}+(10\text{ m})\hat{\mathrm{j}}$.

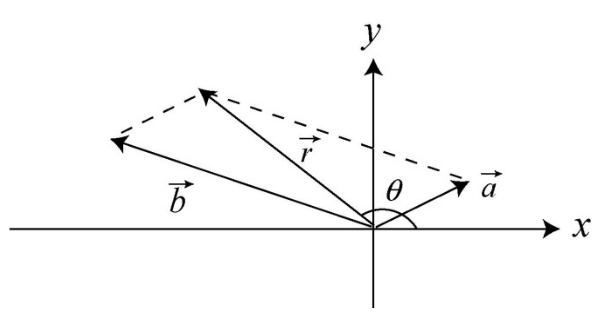
(b) O módulo de $\vec{r}$ é $r=|\vec{r}\,|=\sqrt{r_x^2+r_y^2}=\sqrt{(-9{,}0\text{ m})^2+(10\text{ m})^2}=13\text{ m}$.

(c) O ângulo entre a resultante e o semieixo *x* positivo é

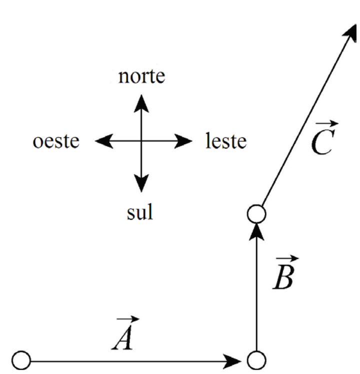
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{r_y}{r_x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{10{,}0\text{ m}}{-9{,}0\text{ m}}\right)=-48°\text{ ou }132°$$

Como a componente *x* da resultante é negativa e a componente *y* é positiva, o vetor está no segundo quadrante e, portanto, o ângulo é 132° (medido no sentido anti-horário a partir do semieixo *x* positivo).

APRENDA A figura a seguir (que não está em escala) mostra a soma dos dois vetores. O desenho confirma o fato de que, se a componente *x* da resultante é negativa e a componente *y* é positiva, o vetor está no segundo quadrante.



12. Chamamos os vetores deslocamento de $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ e a soma dos três vetores de $\vec{r}$. Escolhemos o *leste* como direção $\hat{\mathrm{i}}$ (direção +*x*) e o *norte* como direção $\hat{\mathrm{j}}$ (direção +*y*). Notamos que o ângulo entre $\vec{C}$ e o eixo *x* é 60°. Nesse caso,



$$\vec{A}=(50\text{ km})\hat{\mathrm{i}}$$
$$\vec{B}=(30\text{ km})\hat{\mathrm{j}}$$
$$\vec{C}=(25\text{ km})\cos(60°)\,\hat{\mathrm{i}}+(25\text{ km})\,\mathrm{sen}(60°)\,\hat{\mathrm{j}}$$

(a) O deslocamento total do carro a partir da posição inicial é representado por

$$\vec{r} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (62,5\ \text{km})\,\hat{\mathrm{i}} + (51,7\ \text{km})\,\hat{\mathrm{j}}$$

o que significa que o módulo é

$$|\vec{r}| = \sqrt{(62,5\,\text{km})^2 + (51,7\,\text{km})^2} = 81\ \text{km}.$$

(b) O ângulo (medido no sentido anti-horário a partir do semieixo x positivo) é $\tan^{-1}$ (51,7 km/62,5 km) = 40°, o que significa que a direção de $\vec{r}$ é 40° *ao norte do leste*. A resultante $\vec{r}$ não aparece no desenho; seria uma seta ligando a "cauda" de $\vec{A}$ à "cabeça" de $\vec{C}$.

13. A solução mais simples consiste em obter as componentes e somá-las (não como vetores, mas como escalares). Para d = 3,40 km e θ = 35,0° temos $d\cos\theta + d\,\text{sen}\,\theta$ = 4,74 km.

14. (a) Somando as componentes x, temos

$$20\ \text{m} + b_x - 20\ \text{m} - 60\ \text{m} = -140\ \text{m},$$

o que nos dá $b_x = -80$ m.

(b) Somando as componentes y, temos

$$60\ \text{m} - 70\ \text{m} + c_y - 70\ \text{m} = 30\ \text{m},$$

o que nos dá c_y = 110 m.

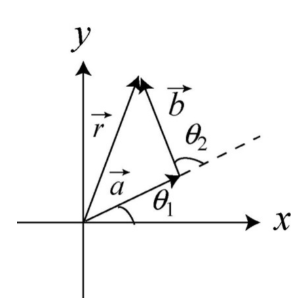
(c) De acordo com o teorema de Pitágoras, o módulo do deslocamento total é dado por $\sqrt{(-140\ \text{m})^2 + (30\ \text{m})^2} \approx 143$ m.

(d) O ângulo é dado por $\tan^{-1}(30/(-140)) = -12°$ (que, como sabemos que o ponto final está no segundo quadrante, pode ser descrito como 12° no sentido horário a partir do semieixo x negativo ou 168° no sentido anti-horário a partir do semieixo x positivo).

15. PENSE Este problema envolve a soma de dois vetores bidimensionais, $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Precisamos calcular as componentes, o módulo e a orientação do vetor resultante.

FORMULE Na notação dos vetores unitários, o vetor $\vec{a}$ pode ser escrito na forma $\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} = (a\cos\alpha)\hat{\mathrm{i}} + (a\,\text{sen}\,\alpha)\hat{\mathrm{j}}$ e o vetor $\vec{b}$ pode ser escrito na forma $\vec{b} = b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} = (b\cos\beta)\hat{\mathrm{i}} + (b\,\text{sen}\,\beta)\hat{\mathrm{j}}$. De acordo com a figura, $\alpha = \theta_1$ e $\beta = \theta_1 + \theta_2$ (já que os ângulos são medidos a partir do semieixo x positivo) e o vetor resultante é

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = [a\cos\theta_1 + b\cos(\theta_1+\theta_2)]\hat{\mathrm{i}} + [a\,\text{sen}\theta_1 + b\,\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2)]\hat{\mathrm{j}} = r_x\hat{\mathrm{i}} + r_y\hat{\mathrm{j}}$$



ANALISE (a) Como $a = b = 10$ m, $\theta_1 = 30°$ e $\theta_2 = 105°$, a componente x de $\vec{r}$ é

$$r_x = a\cos\theta_1 + b\cos(\theta_1+\theta_2) = (10\ \text{m})\cos 30° + (10\ \text{m})\cos(30°+105°) = 1{,}59\ \text{m}$$

(b) A componente y de $\vec{r}$ é

$$r_y = a\,\text{sen}\,\theta_1 + b\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2) = (10\ \text{m})\,\text{sen}\,30° + (10\ \text{m})\,\text{sen}\,(30°+105°) = 12{,}1\ \text{m}$$

(c) O módulo de $\vec{r}$ é $\sqrt{1{,}59^2 + 12{,}1^2}$ = 12,2 m.

(d) O ângulo entre $\vec{r}$ e o semieixo x positivo é

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{r_y}{r_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{12{,}1\text{ m}}{1{,}59\text{ m}}\right) = 82{,}5°$$

APRENDA O desenho confirma o fato de que, se as componentes x e y da resultante são positivas, o vetor está no primeiro quadrante. Note que o módulo de $\vec{r}$ também pode ser calculado usando a lei dos cossenos ($\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{r}$ formam um triângulo isósceles):

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(180 - \theta_2)} = \sqrt{(10\text{ m})^2 + (10\text{ m})^2 - 2(10\text{ m})(10\text{ m})\cos 75°} \\ &= 12{,}2\text{ m} \end{aligned}$$

16. (a) $\vec{a} + \vec{b} = (3{,}0\,\hat{\text{i}} + 4{,}0\,\hat{\text{j}})\text{ m} + (5{,}0\,\hat{\text{i}} - 2{,}0\,\hat{\text{j}})\text{ m} = (8{,}0\text{ m})\,\hat{\text{i}} + (2{,}0\text{ m})\,\hat{\text{j}}$.

(b) O módulo de $\vec{a} + \vec{b}$ é

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(8{,}0\text{ m})^2 + (2{,}0\text{ m})^2} = 8{,}2\text{ m}.$$

(c) O ângulo entre este vetor e o semieixo x positivo é

$$\tan^{-1}[(2{,}0\text{ m})/(8{,}0\text{ m})] = 14°.$$

(d) $\vec{b} - \vec{a} = (5{,}0\,\hat{\text{i}} - 2{,}0\,\hat{\text{j}})\text{ m} - (3{,}0\,\hat{\text{i}} + 4{,}0\,\hat{\text{j}})\text{ m} = (2{,}0\text{ m})\,\hat{\text{i}} - (6{,}0\text{ m})\,\hat{\text{j}}$.

(e) O módulo da diferença $\vec{b} - \vec{a}$ é

$$|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{(2{,}0\text{ m})^2 + (-6{,}0\text{ m})^2} = 6{,}3\text{ m}.$$

(f) O ângulo entre este vetor e o semieixo x positivo é $\tan^{-1}[(-6{,}0\text{ m})/(2{,}0\text{ m})] = -72°$. O vetor faz um ângulo de 72° *no sentido horário* com o eixo definido por $\hat{\text{i}}$.

17. Muitas operações com vetores podem ser executadas nas calculadoras gráficas modernas, que dispõem de rotinas de manipulação e vetores e de transformação da forma retangular para a forma polar, e vice-versa. Nesta solução, vamos usar métodos "tradicionais", como a Eq. 3-6. Quando a unidade de comprimento é omitida, fica implícito que se trata do metro.

(a) Na notação de vetores unitários,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (50\text{ m})\cos(30°)\,\hat{\text{i}} + (50\text{ m})\text{ sen}(30°)\,\hat{\text{j}} \\ \vec{b} &= (50\text{ m})\cos(195°)\,\hat{\text{i}} + (50\text{ m})\text{ sen }(195°)\,\hat{\text{j}} \\ \vec{c} &= (50\text{ m})\cos(315°)\,\hat{\text{i}} + (50\text{ m})\text{ sen }(315°)\,\hat{\text{j}} \\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= (30{,}4\text{ m})\,\hat{\text{i}} - (23{,}3\text{ m})\,\hat{\text{j}}. \end{aligned}$$

O módulo do vetor soma é $\sqrt{(30{,}4\text{ m})^2 + (-23{,}3\text{ m})^2} = 38\text{ m}$.

(b) O cálculo do ângulo entre o vetor encontrado no item (a) e o semieixo x positivo oferece duas possibilidades: $\tan^{-1}[(-23{,}2\text{ m})/(30{,}4\text{ m})] = -37{,}5°$ e $180° + (-37{,}5°) = 142{,}5°$. A primeira possibilidade é a resposta correta, já que, pelos sinais das componentes, sabemos que o vetor está no quarto quadrante. Assim, o ângulo é $-37{,}5°$, que pode ser descrito como um ângulo de 37,5° *no sentido horário* com o semieixo x positivo ou como 322,5° no sentido anti-horário com o semieixo x positivo.

(c) Temos:

$$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=[43,3-(-48,3)+35,4]\,\hat{\mathrm{i}}-[25-(-12,9)+(-35,4)]\,\hat{\mathrm{j}}=(127\,\hat{\mathrm{i}}+2,60\,\hat{\mathrm{j}})\text{ m}$$

na notação de vetores unitários. O módulo do vetor é

$$|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(127\text{ m})^2+(2,6\text{ m})^2}\approx 1,30\times 10^2\text{ m}.$$

(d) O ângulo entre o vetor do item (c) e o semieixo x positivo é $\tan^{-1}(2,6\text{ m}/127\text{ m})\approx 1,2°$.

(e) Usando a notação dos vetores unitários, $\vec{d}$ é dado por $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=(-40,4\,\hat{\mathrm{i}}+47,4\,\hat{\mathrm{j}})\text{ m}$, cujo módulo é

$$\sqrt{(-40,4\text{ m})^2+(47,4\text{ m})^2}=62\text{ m}.$$

(f) O cálculo do ângulo entre o vetor encontrado no item (e) e o semieixo x positivo oferece duas possibilidades: $\tan^{-1}(47,4/(-40,4))=-50,0°$ e $180°+(-50,0°)=130°$. A segunda possibilidade é a resposta correta, já que, pelos sinais das componentes, sabemos que $\vec{d}$ está no segundo quadrante.

18. Para poder usar diretamente a Eq. 3-5, notamos que o ângulo entre o vetor $\vec{C}$ e o semieixo x positivo é 180° + 20,0° = 200°.

(a) As componentes x e y de $\vec{B}$ são

$$B_x = C_x - A_x = (15,0\text{ m})\cos 200° - (12,0\text{ m})\cos 40° = -23,3\text{ m},$$
$$B_y = C_y - A_y = (15,0\text{ m})\,\text{sen}\,200° - (12,0\text{ m})\,\text{sen}\,40° = -12,8\text{ m}.$$

Assim, o módulo de $\vec{B}$ é

$$|\vec{B}|=\sqrt{(-23,3\text{ m})^2+(-12,8\text{ m})^2}=26,6\text{ m}$$

(b) O cálculo do ângulo entre $\vec{B}$ e o semieixo x positivo oferece duas possibilidades: $\tan^{-1}[(-12,8\text{ m})/(-23,3\text{ m})] = 28,9°$ e 180° + 28,9° = 209°. A segunda possibilidade é a resposta certa, já que, pelos sinais das componentes, sabemos que $\vec{B}$ está no terceiro quadrante. Note que o ângulo também pode ser expresso como $-151°$.

19. (a) Com $\hat{\mathrm{i}}$ apontando para a frente e $\hat{\mathrm{j}}$ para a esquerda, o deslocamento total é $(5,00\,\hat{\mathrm{i}} + 2,00\,\hat{\mathrm{j}})$ m. O módulo é dado pelo teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{(5,00\text{ m})^2+(2,00\text{ m})^2} = 5,385\text{ m} \approx 5,39\text{ m}$$

(b) O ângulo é $\tan^{-1}(2,00/5,00) \approx 21,8°$ (para a frente e à esquerda).

20. O resultado desejado é o vetor deslocamento $\vec{A}$ = (5,6 km), 90° (medidos no sentido anti-horário a partir do semieixo x positivo), que também pode ser expresso como $\vec{A}=(5,6\text{ km})\hat{\mathrm{j}}$, em que $\hat{\mathrm{j}}$ é o vetor unitário na direção do semieixo y positivo (norte). Este vetor é a soma de dois deslocamentos: o deslocamento errôneo $\vec{B}=(7,8\text{ km}),\ 50°$ ou

$$\vec{B}=(7,8\text{ km})(\cos 50°\,\hat{\mathrm{i}}+\text{sen}50°\,\hat{\mathrm{j}})=(5,01\text{ km})\hat{\mathrm{i}}+(5,98\text{ km})\hat{\mathrm{j}}$$

e um vetor $\vec{C}$ de correção a ser determinado. Assim, $\vec{A}=\vec{B}+\vec{C}$.

(a) O deslocamento desejado é dado por $\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}=(-5{,}01\text{ km})\,\hat{\text{i}}-(0{,}38\text{ km})\,\hat{\text{j}}$, cujo módulo é

$$\sqrt{(-5{,}01\text{ km})^2+(-0{,}38\text{ km})^2}=5{,}0\text{ km}.$$

(b) O ângulo é $\tan^{-1}[(-0{,}38\text{ km})/(-5{,}01\text{ km})]=4{,}3°$ ao sul do oeste.

21. Lendo com atenção, vemos que as especificações (x, y) das quatro "corridas" podem ser interpretadas como descrições na forma $(\Delta x,\ \Delta y)$ dos vetores deslocamento correspondentes. Combinamos as diferentes partes do problema em uma única solução.

(a) Ao longo do eixo x, temos (com todos os números em centímetros):

$$30{,}0+b_x-20{,}0-80{,}0=-140$$

o que nos dá $b_x = -70{,}0$ cm.

(b) Ao longo do eixo y, temos:

$$40{,}0-70{,}0+c_y-70{,}0=-20{,}0$$

o que nos dá $c_y = 80{,}0$ cm.

(c) O módulo do deslocamento total (–140, –20,0) é $\sqrt{(-140)^2+(-20{,}0)^2}=141$ cm.

(d) Como o deslocamento está no terceiro quadrante, o ângulo do deslocamento total é dado por $\pi+\tan^{-1}[(-20{,}0)/(-140)]$ ou 188° no sentido anti-horário a partir do semieixo x positivo (ou $-172°$ no sentido anti-horário a partir do semieixo x positivo).

22. Como os vetores foram dados na forma "padrão", a Eq. 3-5 pode ser usada diretamente. Usamos esse fato para escrever os vetores na notação dos vetores unitários antes de somá-los. Outra abordagem seria usar os recursos de uma calculadora gráfica.

(a) Levando em conta que alguns ângulos foram dados em graus e outros em radianos, chegamos às seguintes expressões para os vetores na notação dos vetores unitários, em unidades do SI:

$$\begin{aligned}\vec{E}&=3{,}73\,\hat{\text{i}}+4{,}70\,\hat{\text{j}}\\ \vec{F}&=1{,}29\,\hat{\text{i}}-4{,}83\,\hat{\text{j}}\\ \vec{G}&=1{,}45\,\hat{\text{i}}+3{,}73\,\hat{\text{j}}\\ \vec{H}&=-5{,}20\,\hat{\text{i}}+3{,}00\,\hat{\text{j}}\\ \vec{E}+\vec{F}+\vec{G}+\vec{H}&=1{,}28\,\hat{\text{i}}+6{,}60\,\hat{\text{j}}.\end{aligned}$$

(b) O módulo do vetor obtido no item (a) é $\sqrt{(1{,}28\text{ m})^2+(6{,}60\text{ m})^2}=6{,}72\text{ m}$.

(c) O ângulo do vetor é $\tan^{-1}(6{,}60/1{,}28) = 79{,}0°$, no sentido anti-horário a partir do semieixo x positivo.

(d) Usando o fator de conversão π rad = 180°, 79,0° = 1,38 rad.

23. O vetor soma (que, de acordo com o enunciado, tem a orientação do semieixo y positivo e o mesmo módulo que $\vec{B}=\sqrt{(3A)^2+A^2}\ \Rightarrow\ A=\frac{1}{\sqrt{10}}B=2{,}2$ m.) forma com $\vec{C}$ e $\vec{B}$ um triângulo isósceles. Como o ângulo entre $\vec{C}$ e o eixo y é $\theta=\tan^{-1}(3/4)=36{,}87°$, $B = 2C\,\text{sen}(\theta/2)$ e $\vec{C}=\sqrt{3{,}0^2+4{,}0^2}=5{,}0$, $B = 3{,}2$.

24. Podemos expressar matematicamente o enunciado do problema como $\vec{A} + \vec{B} = (3A)\,\hat{j}$, em que $\vec{A} = A\hat{\mathrm{i}}$ e $B = 7{,}0$ m. Como $\hat{\mathrm{i}} \perp \hat{\mathrm{j}}$, podemos usar o teorema de Pitágoras para expressar B em termos dos módulos dos outros dois vetores:

$$\vec{B} = \sqrt{(3A)^2 + A^2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{10}}B = 2{,}2 \text{ m}.$$

25. A estratégia consiste em determinar a posição do camelo ($\vec{C}$) somando os dois deslocamentos consecutivos descritos no problema e calcular a diferença entre essa posição e a posição do oásis ($\vec{B}$). Usando a notação módulo-ângulo, temos:

$$\vec{C} = (24 \angle -15°) + (8{,}0 \angle 90°) = (23{,}25 \angle 4{,}41°)$$

e, portanto,

$$\vec{B} - \vec{C} = (25 \angle 0°) - (23{,}25 \angle 4{,}41°) = (2{,}6 \angle -45°)$$

um cálculo que pode ser feito com facilidade em uma calculadora gráfica no modo polar. A distância é, portanto, 2,6 km.

26. A equação vetorial é $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$. Expressando $\vec{B}$ e $\vec{D}$ na notação dos vetores unitários, temos $(1{,}69\hat{\mathrm{i}} + 3{,}63\hat{\mathrm{j}})$ m e $(-2{,}87\hat{\mathrm{i}} + 4{,}10\hat{\mathrm{j}})$ m , respectivamente.

(a) Somando as componentes, obtemos $\vec{R} = (-3{,}18 \text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (4{,}72 \text{ m})\hat{\mathrm{j}}$.

(b) De acordo com a Eq. 3-6, o módulo é

$$|\vec{R}| = \sqrt{(-3{,}18 \text{ m})^2 + (4{,}72 \text{ m})^2} = 5{,}69 \text{ m}.$$

(c) O ângulo é

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4{,}72 \text{ m}}{-3{,}18 \text{ m}}\right) = -56{,}0° \;\; \text{(com o semieixo } x \text{ negativo)}.$$

Se for medido no sentido anti-horário a partir do semieixo x positivo, o ângulo será $180° - 56{,}0° = 124°$. Convertendo o resultado para coordenadas polares, temos, portanto:

$$\left(-3{,}18, 4{,}72\right) \;\rightarrow\; \left(5{,}69 \angle 124°\right)$$

27. Resolvendo o sistema de equações, obtemos:

(a) $\vec{d}_1 = 4\vec{d}_3 = 8\hat{\mathrm{i}} + 16\hat{\mathrm{j}}$, e

(b) $\vec{d}_2 = \vec{d}_3 = 2\hat{\mathrm{i}} + 4\hat{\mathrm{j}}$

28. Seja $\vec{A}$ a primeira parte da corrida do besouro 1 (0,50 m para leste ou $0{,}5\,\hat{\mathrm{i}}$) e $\vec{C}$ a primeira parte da corrida do besouro 2 (1,6 m em uma direção 40º ao leste do norte). Na segunda parte da corrida do besouro 1, $\vec{B}$ é 0,80 m em uma direção 30º ao norte do leste e $\vec{D}$ é desconhecido. A posição final do besouro 1 é

$$\vec{A} + \vec{B} = (0{,}5 \text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (0{,}8 \text{ m})(\cos 30°\;\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\,30°\;\hat{\mathrm{j}}) = (1{,}19 \text{ m})\;\hat{\mathrm{i}} + (0{,}40 \text{ m})\;\hat{\mathrm{j}}.$$

A equação que relaciona os quatro vetores é $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}+\vec{D}$, em que

$$\vec{C}=(1,60\text{ m})(\cos 50,0°\hat{\text{i}}+\text{sen}50,0°\hat{\text{j}})=(1,03\text{ m})\hat{\text{i}}+(1,23\text{ m})\hat{\text{j}}$$

(a) $\vec{D}=\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}=(-0,16\text{ m})\hat{\text{i}}+(-0,83\text{ m})\hat{\text{j}}$ e o módulo é D = 0,84 m.

(b) O ângulo é $\tan^{-1}(-0,83/0,16)=-79°$, que é interpretado como 79º ao sul do leste (ou 11º a leste do sul).

29. Seja $l_0=2,0\text{ cm}$ o comprimento de cada segmento. O formigueiro está situado na extremidade do segmento *w*.

(a) Usando a notação dos vetores unitários, o vetor deslocamento do ponto *A* é

$$\begin{aligned}\vec{d}_A&=\vec{w}+\vec{v}+\vec{i}+\vec{h}=l_0(\cos 60°\hat{\text{i}}+\text{sen}60°\,\hat{\text{j}})+\left(l_0\,\hat{\text{j}}\right)+l_0(\cos 120°\hat{\text{i}}+\text{sen}120°\,\hat{\text{j}})+\left(l_0\,\hat{\text{j}}\right)\\&=(2+\sqrt{3})l_0\,\hat{\text{j}}.\end{aligned}$$

Assim, o módulo de $\vec{d}_A$ é $|\vec{d}_A|=(2+\sqrt{3})(2,0\text{ cm})=7,5\text{ cm}$.

(b) O ângulo de $\vec{d}_A$ é $\theta=\tan^{-1}(d_{A,y}/d_{A,x})=\tan^{-1}(\infty)=90°$.

(c) O deslocamento do ponto *B* é

$$\begin{aligned}\vec{d}_B&=\vec{w}+\vec{v}+\vec{j}+\vec{p}+\vec{o}\\&=l_0(\cos 60°\hat{\text{i}}+\text{sen }60°\,\hat{\text{j}})+\left(l_0\,\hat{\text{j}}\right)+l_0(\cos 60°\hat{\text{i}}+\text{sen}60°\,\hat{\text{j}})+l_0(\cos 30°\hat{\text{i}}+\sin 30°\,\hat{\text{j}})+\left(l_0\,\hat{\text{i}}\right)\\&=(2+\sqrt{3}/2)l_0\,\hat{\text{i}}+(3/2+\sqrt{3})l_0\,\hat{\text{j}}.\end{aligned}$$

Assim, o módulo de $\vec{d}_B$ é

$$|\vec{d}_B|=l_0\sqrt{(2+\sqrt{3}/2)^2+(3/2+\sqrt{3})^2}=(2,0\text{ cm})(4,3)=8,6\text{ cm}.$$

(d) O ângulo de $\vec{d}_B$ é

$$\theta_B=\tan^{-1}\left(\frac{d_{B,y}}{d_{B,x}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{3/2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}/2}\right)=\tan^{-1}(1,13)=48°.$$

30. Muitas operações com vetores podem ser feitas diretamente em calculadoras gráficas. Nesta solução, usamos métodos "tradicionais", como a Eq. 3-6.

(a) O módulo de $\vec{a}$ é $a=\sqrt{(4,0\text{ m})^2+(-3,0\text{ m})^2}=5,0\text{ m}$.

(b) O ângulo entre $\vec{a}$ e o semieixo *x* positivo é $\tan^{-1}$ [(–3,0 m)/(4,0 m)] = –37°. O vetor faz uma ângulo de 37° *no sentido horário* com o eixo definido por $\hat{\text{i}}$.

(c) O módulo de $\vec{b}$ é $b=\sqrt{(6,0\text{ m})^2+(8,0\text{ m})^2}=10\text{ m}$.

(d) O ângulo entre $\vec{b}$ e o semieixo *x* positivo é $\tan^{-1}$[(8,0 m)/(6,0 m)] = 53°.

(e) $\vec{a}+\vec{b}=(4{,}0\text{ m}+6.0\text{ m})\hat{\imath}+[(-3{,}0\text{ m}+8{,}0\text{ m}]\hat{\jmath}=(10\text{ m})\hat{\imath}+(5{,}0\text{ m})\hat{\jmath}$. O módulo do vetor é $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(10\text{ m})^2+(5{,}0\text{ m})^2}=11\text{ m}$; arredondamos os resultados para dois algarismos significativos.

(f) O ângulo entre o vetor descrito no item (e) e o semieixo x positivo é $\tan^{-1}[(5{,}0\text{ m})/(10\text{ m})] = 27°$.

(g) $\vec{b}-\vec{a}=(6{,}0\text{ m}-4{,}0\text{ m})\ \hat{\imath}+[8{,}0\text{ m}-(-3{,}0\text{ m})]\ \hat{\jmath}=(2{,}0\text{ m})\ \hat{\imath}+(11\text{ m})\ \hat{\jmath}$. O módulo do vetor é

$$|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{(2{,}0\text{ m})^2+(11\text{ m})^2}=11\text{ m},$$

o que, curiosamente, é o mesmo resultado do item (e) (exatamente, não apenas nos dois primeiros algarismos significativos). Essa coincidência se deve ao fato de que $\vec{a}\perp\vec{b}$.

(h) O ângulo entre o vetor descrito no item (g) e o semieixo x positivo é $\tan^{-1}[(11\text{ m})/(2{,}0\text{ m})] = 80°$.

(i) $\vec{a}-\vec{b}=(4{,}0\text{ m}-6{,}0\text{ m})\ \hat{\imath}+[(-3{,}0\text{ m})-8{,}0\text{ m}]\ \hat{\jmath}=(-2{,}0\text{ m})\ \hat{\imath}+(-11\text{ m})\ \hat{\jmath}$. O módulo do vetor é

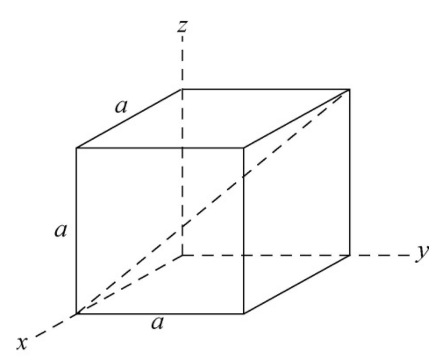
$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-2{,}0\text{ m})^2+(-11\text{ m})^2}=11\text{ m}.$$

(j) O cálculo do ângulo entre o vetor encontrado no item (i) e o semieixo x positivo oferece duas possibilidades: $\tan^{-1}[(-11\text{ m})/(-2{,}0\text{ m})] = 80°$ e $180° + 80° = 260°$. A segunda possibilidade é a resposta correta [veja o item (k)].

(k) Como $\vec{a}-\vec{b}=(-1)(\vec{b}-\vec{a})$, os dois vetores são antiparalelos (apontam em sentidos opostos); por isso, o ângulo entre eles deve ser 180°.

31. (a) Como se pode ver na figura, o ponto diametralmente oposto à origem (0,0,0) é o ponto (a,a,a), cujo vetor posição é $a\ \hat{\imath} + a\ \hat{\jmath} + a\ \hat{k}$, que coincide com a diagonal do cubo.

(b) O ponto diametralmente oposto a (a, 0, 0), que corresponde ao vetor posição $a\ \hat{\imath}$, é o ponto (0, a, a), cujo vetor posição é $a\ \hat{\jmath} + a\ \hat{k}$. O vetor que liga os dois pontos é o vetor diferença, $-a$i + aj + ak.



(c) O ponto diametralmente oposto a (0, a, 0), que corresponde ao vetor posição $a\ \hat{\jmath}$, é o ponto (a, 0, a), cujo vetor posição é $a\ \hat{\imath} + a\ \hat{k}$. O vetor que liga os dois pontos é o vetor diferença, $a\ \hat{\imath} - a\ \hat{\jmath} + a\ \hat{k}$.

(d) O ponto diametralmente oposto a (a, a, 0), que corresponde ao vetor posição $a\ \hat{\imath} + a\ \hat{\jmath}$, é o ponto (0, 0, a), cujo vetor posição é $a\ \hat{k}$. O vetor que liga os dois pontos é o vetor diferença, $-a\ \hat{\imath} - a\ \hat{\jmath} + a\ \hat{k}$.

(e) Considere o vetor que liga o vértice inferior esquerdo ao vértice superior direito, $a\ \hat{\imath}+a\ \hat{\jmath}+a\ \hat{k}$. Podemos pensar nesse vetor como a soma do vetor $a\ \hat{\imath}$, paralelo ao eixo x, com o vetor $a\ \hat{\jmath} + a\ \hat{k}$, perpendicular ao eixo x. A tangente do ângulo entre o vetor e o eixo x é a componente perpendicular dividida pela componente paralela. Como o módulo da componente perpendicular é $\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ e o módulo da componente paralela é a, $\tan\theta = (a\sqrt{2})\ /\ a = \sqrt{2}$. Assim, $\theta = 54{,}7°$. O ângulo entre o vetor e as outras duas arestas vizinhas (os eixos y e z) é o mesmo, o que também acontece com o ângulo entre os outros vetores diagonais e as arestas vizinhas a esses vetores.

(f) O comprimento de todas as diagonais é dado por $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

32. (a) Para a = 17,0 m e θ = 56,0°, obtemos $a_x = a \cos\theta$ = 9,51 m.

(b) $a_y = a$ sen θ = 14,1 m.

(c) O ângulo em relação ao novo sistema de coordenadas é θ' = (56,0° – 18,0°) = 38,0°. Assim, $a'_x = a\cos\theta' = 13,4$ m.

(d) $a'_y = a$ sen θ' = 10,5 m.

33. Observando a figura, vemos que $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ e que $\vec{a}\perp\vec{b}$.

(a) $|\vec{a}\times\vec{b}|$ = (3,0)(4,0) = 12, já que o ângulo entre os vetores é 90º.

(b) Usando a regra da mão direita, vemos que o vetor $\vec{a}\times\vec{b}$ aponta na direção do produto $\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}}=\hat{\mathrm{k}}$, ou seja, no sentido positivo do eixo z.

(c) $|\vec{a}\times\vec{c}| = |\vec{a}\times(-\vec{a}-\vec{b})| = |-(\vec{a}\times\vec{b})| = 12.$

(d) O vetor $-\vec{a}\times\vec{b}$ aponta na direção do produto $-\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}}=-\hat{\mathrm{k}}$, ou seja, no sentido negativo do eixo z.

(e) $|\vec{b}\times\vec{c}| = |\vec{b}\times(-\vec{a}-\vec{b})| = |-(\vec{b}\times\vec{a})| = |(\vec{a}\times\vec{b})| = 12.$

(f) O vetor aponta no sentido positivo do eixo z.

34. Usamos a Eq. 3-30 e a Eq. 3-23.

(a) $\vec{a}\times\vec{b}=(a_x b_y - a_y b_x)\hat{\mathrm{k}}$, já que todos os outros termos são nulos, devido ao fato de que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não possuem componentes z. O resultado é $[(3,0)(4,0)-(5,0)(2,0)]\hat{\mathrm{k}} = 2,0\hat{\mathrm{k}}$.

(b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ nos dá (3,0)(2,0) + (5,0)(4,0) = 26.

(c) $\vec{a}+\vec{b} = (3,0 + 2,0)\,\hat{\mathrm{i}} + (5,0 + 4,0)\,\hat{\mathrm{j}} \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b} = (5,0)\,(2,0) + (9,0)\,(4,0) = 46$.

(d) Várias abordagens são possíveis. Nesta solução, definimos um vetor unitário $\hat{b}$ com a mesma orientação que o vetor $\hat{b}$ e calculamos o produto escalar $\vec{a}\cdot\hat{b}$. O resultado é o seguinte:

$$\hat{b}' = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{2,0\hat{\mathrm{i}}+4,0\hat{\mathrm{j}}}{\sqrt{(2,0)^2+(4,0)^2}}$$

Obtemos então

$$a_b = \vec{a}\cdot\hat{b} = \frac{(3,0)(2,0)+(5,0)(4,0)}{\sqrt{(2,0)^2+(4,0)^2}} = 5,8$$

35. (a) O produto escalar é (4,50)(7,30) cos(320º – 85,0º) = – 18,8.

(b) O produto vetorial aponta na direção do vetor $\hat{\mathrm{k}}$ e o módulo do vetor é |(4,50)(7,30) sen(320º – 85,0º)| = 26,9.

36. Para começar, escrevemos a expressão do enunciado na forma $4(\vec{d}_3 \cdot \vec{d}_4)$, em que $\vec{d}_3 = \vec{c} = \vec{p}a + q\vec{b}$ e $\vec{d}_4 = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2$. Como $\vec{d}_3$ está no plano de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$, e $\vec{d}_4$ é perpendicular ao plano de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$, chegamos à conclusão de que o resultado é nulo, independentemente dos valores de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$, já que o produto escalar de dois vetores perpendiculares é zero.

37. Vamos aplicar as Eqs. 3-23 e 3-30. Se o leitor dispõe de uma calculadora capaz de trabalhar com vetores, pode usá-la para confirmar se os resultados estão corretos.

(a) $\vec{b} \times \vec{c} = -8{,}0\,\hat{\mathrm{i}} + 5{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 6{,}0\hat{\mathrm{k}}$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (3{,}0)\,(-8{,}0) + (3{,}0)(5{,}0) + (-2{,}0)\,(6{,}0) = -21.$$

(b) $\vec{b} + \vec{c} = 1{,}0\,\hat{\mathrm{i}} - 2{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 3{,}0\,\hat{\mathrm{k}}$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (3{,}0)\,(1{,}0) + (3{,}0)\,(-2{,}0) + (-2{,}0)\,(3{,}0) = -9{,}0.$$

(c)

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= [(3{,}0)(3{,}0) - (-2{,}0)(-2{,}0)]\,\hat{\mathrm{i}} + [(-2{,}0)(1{,}0) - (3{,}0)(3{,}0)]\,\hat{\mathrm{j}} \\ &\quad + [(3{,}0)(-2{,}0) - (3{,}0)(1{,}0)]\,\hat{\mathrm{k}} \\ &= 5\hat{\mathrm{i}} - 11\hat{\mathrm{j}} - 9\hat{\mathrm{k}}\end{aligned}$$

38. Usando as relações

$$\hat{\mathrm{i}} \times \hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}},\ \hat{\mathrm{j}} \times \hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{i}},\ \hat{\mathrm{k}} \times \hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}$$

obtemos:

$$2\vec{A} \times \vec{B} = 2(2{,}00\hat{\mathrm{i}} + 3{,}00\hat{\mathrm{j}} - 4{,}00\hat{\mathrm{k}}) \times (-3{,}00\hat{\mathrm{i}} + 4{,}00\hat{\mathrm{j}} + 2{,}00\hat{\mathrm{k}}) = 44{,}0\hat{\mathrm{i}} + 16{,}0\hat{\mathrm{j}} + 34{,}0\hat{\mathrm{k}}$$

Em seguida, usando as relações

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{i}} \cdot \hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}} \cdot \hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}} \cdot \hat{\mathrm{k}} = 1 \\ \hat{\mathrm{i}} \cdot \hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{j}} \cdot \hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{k}} \cdot \hat{\mathrm{i}} = 0\end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B}) &= 3(7{,}00i - 8{,}00\,j) \cdot (44{,}0i + 16{,}0\,j + 34{,}0k) \\ &= 3[(7{,}00)(44{,}0) + (-8{,}00)(16{,}0) + (0)(34{,}0)] = 540.\end{aligned}$$

39. De acordo com a definição de produto escalar entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$, $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$, temos:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

Para $A = 6{,}00$, $B = 7{,}00$ e $\vec{A} \cdot \vec{B} = 14{,}0$, $\cos\theta = 0{,}333$ e $\theta = 70{,}5°$.

40. Em termos dos vetores unitários, os vetores deslocamento são

$$\begin{aligned}\vec{d}_1 &= (4{,}50\text{ m})(\cos 63°\,\hat{\mathrm{j}} + \operatorname{sen} 63°\,\hat{\mathrm{k}}) = (2{,}04\text{ m})\,\hat{\mathrm{j}} + (4{,}01\text{ m})\,\hat{\mathrm{k}} \\ \vec{d}_2 &= (1{,}40\text{ m})(\cos 30°\,\hat{\mathrm{i}} + \operatorname{sen} 30°\,\hat{\mathrm{k}}) = (1{,}21\text{ m})\,\hat{\mathrm{i}} + (0{,}70\text{ m})\,\hat{\mathrm{k}}.\end{aligned}$$

(a) O produto escalar de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ é

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = (2,04\,\hat{j} + 4,01\,\hat{k}) \cdot (1,21\,\hat{i} + 0,70\,\hat{k}) = (4,01\,\hat{k}) \cdot (0,70\,\hat{k}) = 2,81\,\text{m}^2.$$

(b) O produto vetorial de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ é

$$\begin{aligned}\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 &= (2,04\,\hat{j} + 4,01\,\hat{k}) \times (1,21\,\hat{i} + 0,70\,\hat{k}) \\ &= (2,04)(1,21)(-\hat{k}) + (2,04)(0,70)\hat{i} + (4,01)(1,21)\hat{j} \\ &= (1,43\,\hat{i} + 4,86\,\hat{j} - 2,48\,\hat{k})\,\text{m}^2.\end{aligned}$$

(c) Os módulos de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ são

$$\begin{aligned}d_1 &= \sqrt{(2,04\text{ m})^2 + (4,01\text{ m})^2} = 4,50\text{ m} \\ d_2 &= \sqrt{(1,21\text{ m})^2 + (0,70\text{ m})^2} = 1,40\text{ m}.\end{aligned}$$

Assim, o ângulo entre os dois vetores é

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{d_1 d_2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2,81\text{ m}^2}{(4,50\text{ m})(1,40\text{ m})}\right) = 63,5°.$$

41. PENSE O ângulo entre dois vetores pode ser calculado a partir da definição de produto escalar.

FORMULE Como o produto escalar de dois vetores é dado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,,$$

o ângulo entre os vetores é dado por

$$\cos\phi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab} \quad\Rightarrow\quad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}\right)$$

Assim, uma vez conhecidos os módulos e as componentes dos vetores, o ângulo ϕ pode ser facilmente calculado.

ANALISE Para $\vec{a} = (3,0)\hat{i} + (3,0)\hat{j} + (3,0)\hat{k}$ e $\vec{b} = (2,0)\hat{i} + (1,0)\hat{j} + (3,0)\hat{k}$, os módulos dos vetores são

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(3,0)^2 + (3,0)^2 + (3,0)^2} = 5,20$$

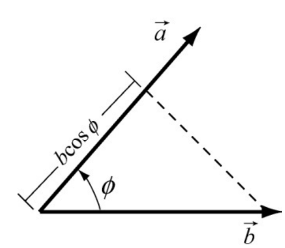
$$b = |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{(2,0)^2 + (1,0)^2 + (3,0)^2} = 3,74$$

O ângulo entre os vetores é

$$\cos\phi = \frac{(3,0)(2,0) + (3,0)(1,0) + (3,0)(3,0)}{(5,20)(3,74)} = 0,926,$$

ou $\phi = 22°$.

APRENDA Como o nome indica, o produto escalar de dois vetores é uma grandeza escalar. Ele pode ser considerado o produto do módulo de um dos vetores pela projeção do segundo vetor na direção do primeiro, como mostra a figura (veja também a Fig. 3-18 do texto).



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi = (a)(b\cos\phi)$$

42. Os dois vetores (com a unidade implícita) são:

$$\vec{d}_1 = 4{,}0\,\hat{\mathrm{i}} + 5{,}0\,\hat{\mathrm{j}} = d_{1x}\hat{\mathrm{i}} + d_{1y}\hat{\mathrm{j}}, \quad \vec{d}_2 = -3{,}0\,\hat{\mathrm{i}} + 4{,}0\,\hat{\mathrm{j}} = d_{2x}\hat{\mathrm{i}} + d_{2y}\hat{\mathrm{j}}$$

(a) O produto vetorial é

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = (d_{1x}d_{2y} - d_{1y}d_{2x})\hat{\mathrm{k}} = [(4{,}0)(4{,}0) - (5{,}0)(-3{,}0)]\hat{\mathrm{k}} = 31\,\hat{\mathrm{k}}$$

(b) O produto escalar é

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = d_{1x}d_{2x} + d_{1y}d_{2y} = (4{,}0)(-3{,}0) + (5{,}0)(4{,}0) = 8{,}0.$$

(c)

$$(\vec{d}_1 + \vec{d}_2)\cdot \vec{d}_2 = \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 + d_2^2 = 8{,}0 + (-3{,}0)^2 + (4{,}0)^2 = 33.$$

(d) O produto escalar de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ é $(6{,}4)(5{,}0)\cos\theta = 8$. Dividindo ambos os membros por 32 e tomando o cosseno inverso, obtemos $\theta = 75{,}5°$. Assim, a componente do vetor $\vec{d}_1$ em relação a é $6{,}4 \cos 75{,}5 \approx 1{,}6$.

43. PENSE Neste problema, são dados três vetores bidimensionais, $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, e devemos calcular as componentes desses vetores.

FORMULE Observando a figura, vemos que $\vec{c} \perp \vec{b}$, o que significa que o ângulo entre $\vec{c}$ e o semieixo x positivo é $\theta + 90°$. Na notação dos vetores unitários, os três vetores são

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= a_x\hat{\mathrm{i}} \\
\vec{b} &= b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} = (b\cos\theta)\hat{\mathrm{i}} + (b\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{\mathrm{j}} \\
\vec{c} &= c_x\hat{\mathrm{i}} + c_y\hat{\mathrm{j}} = [c\cos(\theta + 90°)]\hat{\mathrm{i}} + [c\,\mathrm{sen}(\theta + 90°)]\hat{\mathrm{j}}
\end{aligned}$$

As componentes dos vetores podem ser calculadas usando as expressões anteriores.

ANALISE (a) A componente x de $\vec{a}$ é $a_x = a \cos 0° = a = 3{,}00$ m.

(b) A componente y de $\vec{a}$ é $a_y = a$ sen $0° = 0$.

(c) A componente x de $\vec{b}$ é $b_x = b \cos 30° = (4{,}00 \text{ m}) \cos 30° = 3{,}46$ m.

(d) A componente y de $\vec{b}$ é $b_y = b$ sen $30° = (4{,}00$ m) sen $30° = 2{,}00$ m.

(e) A componente x de $\vec{c}$ é $c_x = c \cos 120° = (10{,}0 \text{ m}) \cos 120° = -5{,}00$ m.

(f) A componente y de $\vec{c}$ é $c_y = c$ sen $30° = (10{,}0$ m) sen $120° = 8{,}66$ m.

(g) Como $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$, temos

$$\vec{c} = c_x\hat{\mathrm{i}} + c_y\hat{\mathrm{j}} = p(a_x\hat{\mathrm{i}}) + q(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}}) = (pa_x + qb_x)\hat{\mathrm{i}} + qb_y\hat{\mathrm{j}}$$

o que nos dá

$$c_x = pa_x + qb_x, \qquad c_y = qb_y$$

Substituindo a_x, b_x e b_y pelos valores calculados nos itens (a), (c) e (d), temos

$$-5{,}00\ \text{m} = p\,(3{,}00\ \text{m}) + q\,(3{,}46\ \text{m})$$
$$8{,}66\ \text{m} = q\,(2{,}00\ \text{m}).$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos $p = -6{,}67$.

(h) A segunda das equações anteriores nos dá $q = 4{,}33$ (note que é mais fácil determinar primeiro o valor de q). Os valores de p e q são adimensionais.

APRENDA Este problema mostra que, quando são dados dois vetores bidimensionais não paralelos e um terceiro vetor no mesmo plano que os outros dois, o terceiro vetor sempre pode ser escrito como uma combinação linear dos outros dois.

44. Aplicando a Eq. 3-23, $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ (na qual q é um escalar) se torna

$$F_x\,\hat{\text{i}} + F_y\,\hat{\text{j}} + F_z\,\hat{\text{k}} = q\left(v_yB_z - v_zB_y\right)\hat{\text{i}} + q\left(v_zB_x - v_xB_z\right)\hat{\text{j}} + q\left(v_xB_y - v_yB_x\right)\hat{\text{k}}$$

que, substituindo por valores numéricos, leva às seguintes igualdades:

$$4{,}0 = 2\,(4{,}0B_z - 6{,}0B_y)$$
$$-20 = 2\,(6{,}0B_x - 2{,}0B_z)$$
$$12 = 2\,(2{,}0B_y - 4{,}0B_x)$$

Como sabemos que $B_x = B_y$, a terceira equação nos dá $B_y = -3{,}0$. Substituindo este valor na primeira equação, obtemos $B_z = -4{,}0$. Assim, a resposta é

$$\vec{B} = -3{,}0\,\hat{\text{i}} - 3{,}0\,\hat{\text{j}} - 4{,}0\,\hat{\text{k}}.$$

45. Na notação dos vetores unitários, os dois vetores são

$$\vec{A} = 8{,}00(\cos 130°\,\hat{\text{i}} + \text{sen}\,130°\,\hat{\text{j}}) = -5{,}14\,\hat{\text{i}} + 6{,}13\,\hat{\text{j}}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\text{i}} + B_y\hat{\text{j}} = -7{,}72\,\hat{\text{i}} - 9{,}20\,\hat{\text{j}}.$$

(a) O produto escalar pedido é

$$5\vec{A}\cdot\vec{B} = 5(-5{,}14\,\hat{\text{i}} + 6{,}13\,\hat{\text{j}})\cdot(-7{,}72\,\hat{\text{i}} - 9{,}20\,\hat{\text{j}}) = 5[(-5{,}14)(-7{,}72) + (6{,}13)(-9{,}20)]$$
$$= -83{,}4.$$

(b) Na notação dos vetores unitários,

$$4\vec{A}\times 3\vec{B} = 12\vec{A}\times\vec{B} = 12(-5{,}14\,\hat{\text{i}} + 6{,}13\,\hat{\text{j}})\times(-7{,}72\,\hat{\text{i}} - 9{,}20\,\hat{\text{j}}) = 12(94{,}6\,\hat{\text{k}}) = 1{,}14\times 10^3\,\hat{\text{k}}$$

(c) Como o ângulo azimutal não é definido para vetores cujo ângulo polar é zero, a resposta correta é simplesmente "$1{,}14 \times 10^3$, $\phi = 0°$".

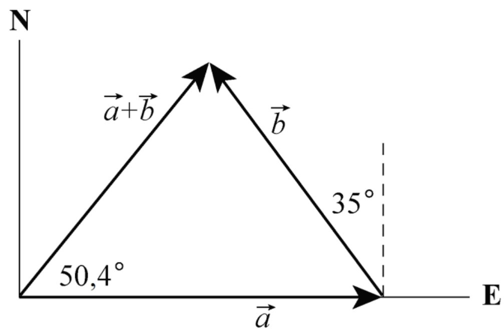
(d) Como $\vec{A}$ está no plano xy e $\vec{A}\times\vec{B}$ é perpendicular ao plano xy, a resposta é 90°.

(e) $\vec{A} + 3{,}00\hat{\text{k}} = -5{,}14\hat{i} + 6{,}13\hat{\text{j}} + 3{,}00\hat{\text{k}}$

(f) De acordo com o teorema de Pitágoras, $A = \sqrt{(5{,}14)^2 + (6{,}13)^2 + (3{,}00)^2} = 8{,}54$. O ângulo azimutal é $\theta = 130°$, como no enunciado do problema [$\vec{A}$ é a projeção no plano xy do novo vetor que foi criado no item (e)]. O ângulo polar é

$$\phi = \cos^{-1}(3{,}00/8{,}54) = 69{,}4°.$$

46. Os vetores são mostrados na figura. O eixo x está na direção oeste-leste e o eixo y na direção sul-norte. Assim, a_x = 5,0 m, a_y = 0, b_x = –(4,0 m) sen 35° = –2,29 m, b_y = (4,0 m) cos 35° = 3,28 m.



(a) Seja $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

$$c_x = a_x + b_x = 5{,}00 \text{ m} - 2{,}29 \text{ m} = 2{,}71 \text{ m} \text{ e } c_y = a_y + b_y = 0 + 3{,}28 \text{ m} = 3{,}28 \text{ m}.$$

O módulo de c é

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{(2{,}71 \text{ m})^2 + (3{,}28 \text{ m})^2} = 4{,}2 \text{ m}.$$

(b) O ângulo θ entre $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ e o semieixo x positivo é

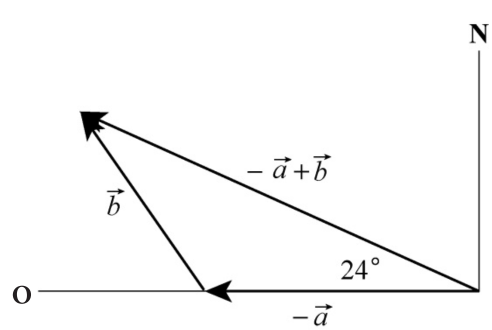
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{c_y}{c_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3{,}28}{2{,}71}\right) = 50{,}5° \approx 50°.$$

A segunda possibilidade (θ = 50,4° + 180° = 230,4°) é rejeitada porque o vetor apontaria no sentido oposto ao de $\vec{c}$.

(c) O vetor $\vec{b} - \vec{a}$ pode ser obtido somando $-\vec{a}$ a $\vec{b}$. O resultado é mostrado no diagrama a seguir. Seja $\vec{C} = 1{,}29\hat{\text{i}} + 7{,}66\hat{\text{j}}$ As componentes são

$$c_x = b_x - a_x = -2{,}29 \text{ m} - 5{,}00 \text{ m} = -7{,}29 \text{ m}$$
$$c_y = b_y - a_y = 3{,}28 \text{ m}.$$

O módulo de $\vec{c}$ é $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = 8{,}0$ m.



(d) A tangente do ângulo θ que $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ faz com o semieixo x positivo (direção leste) é

$$\tan\theta = \frac{c_y}{c_x} = \frac{3{,}28 \text{ m}}{-7{,}29 \text{ m}} = -4{,}50.$$

Existem duas soluções: −24,2° e 155,8°. Como mostra o diagrama, a segunda solução é a correta. A orientação do vetor $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}$ é 24° ao norte do oeste.

47. Notando que o ângulo dado de 130° deve ser medido no sentido anti-horário a partir do semieixo *x* positivo, escrevemos os dois vetores na forma

$$\vec{A} = 8{,}00(\cos 130°\,\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\,130°\,\hat{\mathrm{j}}) = -5{,}14\,\hat{\mathrm{i}} + 6{,}13\,\hat{\mathrm{j}}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\mathrm{i}} + B_y\hat{\mathrm{j}} = -7{,}72\,\hat{\mathrm{i}} - 9{,}20\,\hat{\mathrm{j}}.$$

(a) O ângulo entre o semieixo *y* negativo ($-\hat{\mathrm{j}}$) e o vetor $\vec{A}$ é

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}\cdot(-\hat{\mathrm{j}})}{A}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6{,}13}{\sqrt{(-5{,}14)^2 + (6{,}13)^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6{,}13}{8{,}00}\right) = 140°.$$

Também podemos dizer que a direção −*y* corresponde a um ângulo de 270° e a resposta é simplesmente 270° − 130° = 140°.

(b) Como o eixo *y* está no plano *xy* e o produto vetorial $\vec{A}\times\vec{B}$ é perpendicular ao plano *xy*, a resposta é 90,0°.

(c) O vetor pode ser simplificado da seguinte forma:

$$\vec{A}\times(\vec{B} + 3{,}00\,\hat{\mathrm{k}}) = (-5{,}14\,\hat{\mathrm{i}} + 6{,}13\,\hat{\mathrm{j}})\times(-7{,}72\,\hat{\mathrm{i}} - 9{,}20\,\hat{\mathrm{j}} + 3{,}00\,\hat{\mathrm{k}})$$
$$= 18{,}39\,\hat{\mathrm{i}} + 15{,}42\,\hat{\mathrm{j}} + 94{,}61\,\hat{\mathrm{k}}$$

O módulo é $|\vec{A}\times(\vec{B} + 3{,}00\hat{\mathrm{k}})| = 97{,}6$. O ângulo entre o semieixo *y* negativo ($-\hat{\mathrm{j}}$) e a orientação do vetor é

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-15{,}42}{97{,}6}\right) = 99{,}1°.$$

48. Nos casos em que a unidade de comprimento não é indicada, está implícito que se trata do metro.

(a) Os módulos dos vetores são $a = |\vec{a}| = \sqrt{(3{,}2)^2 + (1{,}6)^2} = 3{,}58$ e $b = |\vec{b}| = \sqrt{(0{,}50)^2 + (4{,}5)^2} = 4{,}53$. Nesse caso,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = ab\cos\phi$$

$$(3{,}2)(0{,}50) + (1{,}6)(4{,}5) = (3{,}58)(4{,}53)\cos\phi$$

o que nos dá ϕ = 57° (o arco cosseno, com o arco tangente, tem dois valores possíveis, mas sabemos que este é o valor correto porque os dois vetores estão no mesmo quadrante).

(b) Como o ângulo de $\vec{a}$ (medido a partir do semieixo *x* positivo) é $\tan^{-1}(1{,}6/3{,}2) = 26{,}6°$, sabemos que o ângulo de $\vec{c}$ é 26,6° −90° = −63,4° (a outra possibilidade, 26,6° + 90°, levaria a $c_x < 0$). Assim,

$$c_x = c\cos(-63{,}4°) = (5{,}0)(0{,}45) = 2{,}2 \text{ m}.$$

(c) $c_y = c\,\mathrm{sen}\,(-63{,}4°) = (5{,}0)(-0{,}89) = -4{,}5$ m.

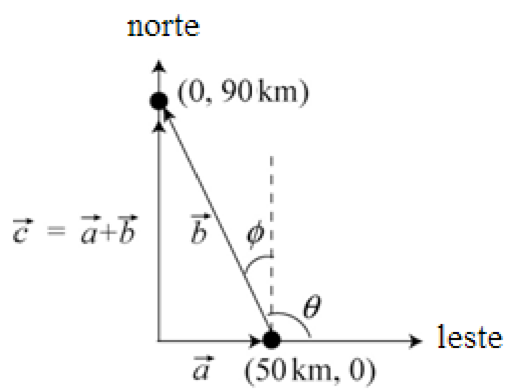
(d) Sabemos que o ângulo de $\vec{d}$ é 26,6° + 90° = 116,6°, o que nos dá

$$d_x = d\cos(116{,}6°) = (5{,}0)(-0{,}45) = -2{,}2 \text{ m}.$$

(e) $d_y = d \operatorname{sen} 116{,}6° = (5{,}0)(0{,}89) = 4{,}5$ m.

49. PENSE Este problema envolve o deslocamento de um barco a vela. Devemos determinar o módulo e a orientação do vetor deslocamento do barco a partir das posições inicial e final.

FORMULE A situação está representada na figura que se segue. Seja $\vec{a}$ a primeira parte do percurso (50,0 km para leste) e seja $\vec{c}$ o percurso desejado (90,0 km para o norte). Estamos interessados em determinar um vetor $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



ANALISE (a) De acordo com o teorema de Pitágoras, a distância percorrida pelo barco a vela é

$$b = \sqrt{(50{,}0 \text{ km})^2 + (90{,}0 \text{ km})^2} = 103 \text{ km}$$

(b) A direção que o barco deve tomar é

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{50{,}0 \text{ km}}{90{,}0 \text{ km}}\right) = 29{,}1°$$

a oeste do norte (o que equivale a 60,9° ao norte do oeste).

APRENDA Este problema também pode ser resolvido expressando primeiro os vetores na notação dos vetores unitários: $\vec{a} = (50{,}0 \text{ km})\hat{\text{i}}, \vec{c} = (90{,}0 \text{ km})\hat{\text{j}}$. Isso nos dá

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a} = -(50{,}0 \text{ km})\hat{\text{i}} + (90{,}0 \text{ km})\hat{\text{j}}$$

O ângulo entre o vetor $\vec{b}$ e o semieixo x positivo (a direção leste) é

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{90{,}0 \text{ km}}{-50{,}0 \text{ km}}\right) = 119{,}1°$$

A relação entre os ângulos θ e ϕ é $\theta = 90° + \phi$.

50. Os vetores $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ são dados por $\vec{d}_1 = -d_1\,\hat{\text{j}}$ e $\vec{d}_2 = d_2\,\hat{\text{i}}$.

(a) O vetor $\vec{d}_2/4 = (d_2/4)\hat{\text{i}}$ aponta na direção do semieixo x positivo. O fator de 1/4 não muda a orientação do vetor.

(b) O vetor $\vec{d}_1/(-4) = (d_1/4)\hat{\text{j}}$ aponta na direção do semieixo y positivo. O sinal negativo (do "–4") inverte o sentido do vetor: $-(-y) = +y$.

(c) $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 0$, já que $\hat{\mathrm{i}} \cdot \hat{\mathrm{j}} = 0$; o produto escalar de dois vetores perpendiculares é zero.

(d) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 / 4) = (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2) / 4 = 0$, como no item (c).

(e) $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = -d_1 d_2 (\hat{\mathrm{j}} \times \hat{\mathrm{i}}) = d_1 d_2\, \hat{\mathrm{k}}$, na direção do semieixo z positivo.

(f) $\vec{d}_2 \times \vec{d}_1 = -d_2 d_1 (\hat{\mathrm{i}} \times \hat{\mathrm{j}}) = -d_1 d_2\, \hat{\mathrm{k}}$, na direção do semieixo z negativo.

(g) O módulo do vetor do item (e) é $d_1 d_2$.

(h) O módulo do vetor do item (f) é $d_1 d_2$.

(i) Como $d_1 \times (\vec{d}_2 / 4) = (d_1 d_2 / 4)\hat{\mathrm{k}}$, o módulo é $d_1 d_2 / 4$.

(j) O vetor $\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2 / 4) = (d_1 d_2 / 4)\hat{\mathrm{k}}$ aponta na direção do semieixo z positivo.

51. Embora seja possível pensar neste movimento como tridimensional, ele é se torna bidimensional quando o deslocamento é considerado apenas no plano da falha.

(a) O módulo do deslocamento total é

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{|AD|^2 + |AC|^2} = \sqrt{(17,0\text{ m})^2 + (22,0\text{ m})^2} = 27,8\text{ m.}$$

(b) O módulo da componente vertical de $\overrightarrow{AB}$ é $|AD|$ sen 52,0° = 13,4 m.

52. Os três vetores são

$$\begin{aligned}\vec{d}_1 &= 4,0\,\hat{\mathrm{i}} + 5,0\,\hat{\mathrm{j}} - 6,0\,\hat{\mathrm{k}}\\ \vec{d}_2 &= -1,0\,\hat{\mathrm{i}} + 2,0\,\hat{\mathrm{j}} + 3,0\,\hat{\mathrm{k}}\\ \vec{d}_3 &= 4,0\,\hat{\mathrm{i}} + 3,0\,\hat{\mathrm{j}} + 2,0\,\hat{\mathrm{k}}\end{aligned}$$

(a) $\vec{r} = \vec{d}_1 - \vec{d}_2 + \vec{d}_3 = (9,0\text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (6,0\text{ m})\hat{\mathrm{j}} + (-7,0\text{ m})\hat{\mathrm{k}}$.

(b) O módulo de $\vec{r}$ é $|\vec{r}| = \sqrt{(9,0\text{ m})^2 + (6,0\text{ m})^2 + (-7,0\text{ m})^2} = 12,9\text{ m}$. O ângulo entre $\vec{r}$ e o semieixo z positivo é dado por

$$\cos\theta = \frac{\vec{r} \cdot \hat{\mathrm{k}}}{|\vec{r}|} = \frac{-7,0\text{ m}}{12,9\text{ m}} = -0,543$$

o que nos dá $\theta = 123°$.

(c) A componente de $\vec{d}_1$ em relação a $\vec{d}_2$ é dada por $d_\parallel = \vec{d}_1 \cdot \hat{\mathrm{u}} = d_1 \cos\varphi$, em que φ é o ângulo entre $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ e $\hat{\mathrm{u}}$ é o vetor unitário na direção de $\vec{d}_2$. Usando as propriedades do produto escalar, temos:

$$d_\parallel = d_1\left(\frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{d_1 d_2}\right) = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{d_2} = \frac{(4,0)(-1,0) + (5,0)(2,0) + (-6,0)(3,0)}{\sqrt{(-1,0)^2 + (2,0)^2 + (3,0)^2}} = \frac{-12}{\sqrt{14}} = -3,2\text{ m.}$$

(d) Agora estamos interessados em encontrar uma componente $d_\perp$ tal que $d_1^2 = (4,0)^2 + (5,0)^2 + (-6,0)^2 = 77 = d_\parallel^2 + d_\perp^2$. Substituindo $d_\parallel$ pelo seu valor, calculado no item (c), temos:

$$d_{\perp} = \sqrt{77\ \text{m}^2 - (-3{,}2\ \text{m})^2} = 8{,}2\ \text{m}.$$

Com isso, ficamos conhecendo o módulo da componente perpendicular (obteríamos o mesmo valor usando a Eq. 3-27), mas se quisermos mais informações, como a orientação do vetor ou uma especificação completa em termos dos vetores unitários, teremos que fazer um cálculo mais complexo.

53. PENSE Este problema envolve o cálculo do produto escalar e do produto vetorial de dois vetores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

FORMULE Podemos usar as Eqs. 3-20 e 3-24 para calcular os produtos pedidos:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\,\text{sen}\,\phi$$

ANALISE (a) Como $a = |\vec{a}| = 10$, $b = |\vec{b}| = 6{,}0$ e $\phi = 60°$, o produto escalar de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi = (10)\,(6{,}0)\cos 60° = 30$$

(b) O módulo do produto vetorial de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\,\text{sen}\,\phi = (10)\,(6{,}0)\,\text{sen}\,60° = 52$$

APRENDA Quando dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos ($\phi = 0$), os produtos escalar e vetorial são $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi = ab$ e $|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\,\text{sen}\,\phi = 0$, respectivamente; quando são perpendiculares ($\phi = 90°$), $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi = 0$ e $|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\,\text{sen}\,\phi = ab$.

54. De acordo com a figura, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$ e $\vec{a}\perp\vec{b}$.

(a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, já que o ângulo entre os dois vetores é 90º.

(b) $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(-\vec{a}-\vec{b}) = -|\vec{a}|^2 = -16.$

(c) $\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot(-\vec{a}-\vec{b}) = -|\vec{b}|^2 = -9{,}0.$

55. Escolhemos o leste como semieixo x positivo e o norte como semieixo y positivo para medir todos os ângulos da forma "convencional" (ângulos positivos no sentido anti-horário a partir do semieixo x positivo). Nesse caso, $\vec{d}_1$ tem módulo d_1 = 4,00 m e orientação θ_1 = 225°, $\vec{d}_2$ tem módulo d_2 = 5,00 m e orientação θ_2 = 0° e $\vec{d}_3$ tem módulo d_3 = 6,00 m e orientação θ_3 = 60°.

(a) A componente x de $\vec{d}_1$ é $d_{1x} = d_1\cos\theta_1 = -2{,}83$ m.

(b) A componente y de $\vec{d}_1$ é $d_{1y} = d_1\,\text{sen}\,\theta_1 = -2{,}83$ m.

(c) A componente x de $\vec{d}_2$ é $d_{2x} = d_2\cos\theta_2 = 5{,}00$ m.

(d) A componente y de $\vec{d}_2$ é $d_{2y} = d_2\,\text{sen}\,\theta_2 = 0$.

(e) A componente x de $\vec{d}_3$ é $d_{3x} = d_3\cos\theta_3 = 3{,}00$ m.

(f) A componente y de $\vec{d}_3$ é $d_{3y} = d_3\,\text{sen}\,\theta_3 = 5{,}20$ m.

(g) A soma das componentes x é

$$d_x = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} = -2{,}83 \text{ m} + 5{,}00 \text{ m} + 3{,}00 \text{ m} = 5{,}17 \text{ m}.$$

(h) A soma das componentes y é

$$d_y = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} = -2{,}83 \text{ m} + 0 + 5{,}20 \text{ m} = 2{,}37 \text{ m}.$$

(i) O módulo do deslocamento resultante é

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(5{,}17 \text{ m})^2 + (2{,}37 \text{ m})^2} = 5{,}69 \text{ m}.$$

(j) O ângulo do deslocamento resultante é

$$\theta = \tan^{-1}(2{,}37/5{,}17) = 24{,}6°,$$

o que significa (lembrando nossa escolha dos eixos de referência) uma direção aproximadamente 25° ao norte do leste.

(k) e (l) Para que a partícula volte ao ponto de partida, a soma vetorial do deslocamento anterior com o novo deslocamento deve ser nula. Assim, o novo deslocamento é o negativo do deslocamento anterior, o que significa um vetor com o mesmo módulo (5,69 m) apontando na direção oposta (25° ao sul do oeste).

56. Para podermos aplicar diretamente a Eq. 3-5, notamos que os ângulos de $\vec{Q}$, $\vec{R}$ e $\vec{S}$ com semieixo x positivo são, respectivamente, 100°, 250°, e 310°.

(a) Na notação dos vetores unitários, com a unidade metro implícita, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= 10{,}0\cos(25{,}0°)\hat{\text{i}} + 10{,}0\,\text{sen}(25{,}0°)\hat{\text{j}} \\
\vec{Q} &= 12{,}0\cos(100°)\hat{\text{i}} + 12{,}0\,\text{sen}(100°)\hat{\text{j}} \\
\vec{R} &= 8{,}00\cos(250°)\hat{\text{i}} + 8{,}00\,\text{sen}(250°)\hat{\text{j}} \\
\vec{S} &= 9{,}00\cos(310°)\hat{\text{i}} + 9{,}00\,\text{sen}(310°)\hat{\text{j}} \\
\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{S} &= (10{,}0 \text{ m})\hat{\text{i}} + (1{,}63 \text{ m})\hat{\text{j}}
\end{aligned}$$

(b) O módulo da soma vetorial é $\sqrt{(10{,}0 \text{ m})^2 + (1{,}63 \text{ m})^2} = 10{,}2 \text{ m}$.

(c) O ângulo é $\tan^{-1}(1{,}63 \text{ m}/10{,}0 \text{ m}) \approx 9{,}24°$ no sentido anti-horário a partir do semieixo x positivo.

57. PENSE Este problema envolve a soma e subtração de dois vetores.

FORMULE De acordo com o enunciado do problema, temos

$$\vec{A} + \vec{B} = (6{,}0)\hat{\text{i}} + (1{,}0)\hat{\text{j}}, \qquad \vec{A} - \vec{B} = -(4{,}0)\hat{\text{i}} + (7{,}0)\hat{\text{j}}$$

Para calcular os valores de $\vec{A}$ e $\vec{B}$, devemos resolver esse sistema de equações.

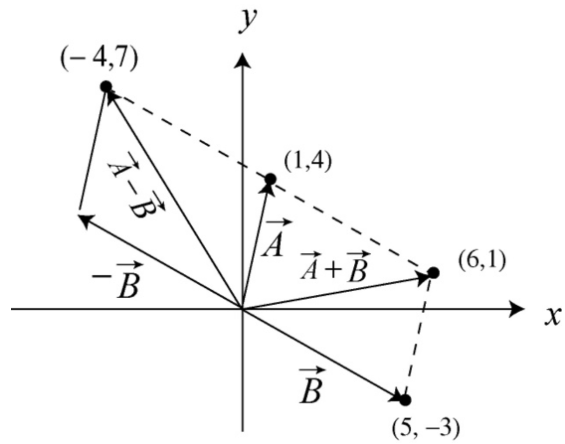
ANALISE Somando as equações anteriores e dividindo por 2, obtemos $\vec{A} = (1{,}0)\hat{\text{i}} + (4{,}0)\hat{\text{j}}$. O módulo de $\vec{A}$ é

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(1{,}0)^2 + (4{,}0)^2} = 4{,}1$$

APRENDA O vetor $\vec{B}$ é $\vec{B} = (5,0)\hat{\text{i}} + (-3,0)\hat{\text{j}}$, e o módulo de $\vec{B}$ é

$$B = |\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(5,0)^2 + (-3,0)^2} = 5,8$$

Os resultados são mostrados na figura ao lado.



58. O vetor pode ser escrito na forma $\vec{d} = (2,5\text{ m})\hat{\text{j}}$, em que tomamos $\hat{\text{j}}$ como um vetor unitário apontando para o norte.

(a) O módulo do vetor $\vec{a} = 4,0\,\vec{d}$ é (4,0)(2,5 m) = 10 m.

(b) A orientação do vetor $\vec{a} = 4,0\vec{d}$ é a mesma do vetor $\vec{d}$ (norte).

(c) O módulo do vetor $\vec{c} = -3,0\vec{d}$ é (3,0)(2,5 m) = 7,5 m.

(d) A orientação do vetor $\vec{c} = -3,0\vec{d}$ é a orientação oposta à do vetor $\vec{d}$, ou seja, o vetor $\vec{c}$ aponta para o sul.

59. Uma consulta à Figura 3-18 e uma leitura da Seção 3-8 do livro podem ajudar. Convertendo $\vec{B}$ para a notação módulo-ângulo (como a do vetor $\vec{A}$), temos $\vec{B} = (14,4 \angle 33,7°)$. Nessa notação, uma rotação dos eixos de +20° equivale a subtrair o mesmo ângulo das definições dos vetores. Assim, $\vec{A} = (12,0 \angle 40,0°)'$ e $\vec{B} = (14,4 \angle 13,7°)'$, em que as plicas indicam que as definições são em termos das novas coordenadas. Convertendo esses resultados para a representação em termos dos vetores unitários, temos:

(a) $\vec{A} = (9,19\text{ m})\hat{\text{i}}' + (7,71\text{ m})\hat{\text{j}}'$

(b) $\vec{B} = (14,0\text{ m})\hat{\text{i}}' + (3,41\text{ m})\hat{\text{j}}'$.

60. Os dois vetores podem ser calculados resolvendo um sistema de equações.

(a) Somando as três equações, obtemos $2\vec{a} = 6\vec{c}$, que leva a $\vec{a} = 3\vec{c} = 9\hat{\text{i}} + 12\hat{\text{j}}$.

(b) Substituindo em uma das equações que envolvem $\vec{a}$ e $\vec{b}$, obtemos $\vec{b} = \vec{c} = 3\hat{\text{i}} + 4\hat{\text{j}}$.

61. Os três vetores dados são

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 5,0\,\hat{\text{i}} + 4,0\,\hat{\text{j}} - 6,0\,\hat{\text{k}}\\ \vec{b} &= -2,0\,\hat{\text{i}} + 2,0\,\hat{\text{j}} + 3,0\,\hat{\text{k}}\\ \vec{c} &= 4,0\,\hat{\text{i}} + 3,0\,\hat{\text{j}} + 2,0\,\hat{\text{k}}\end{aligned}$$

(a) A equação vetorial $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ é

$$\begin{aligned}\vec{r} &= [5,0 - (-2,0) + 4,0]\hat{\text{i}} + (4,0 - 2,0 + 3,0)\hat{\text{j}} + (-6,0 - 3,0 + 2,0)\hat{\text{k}}\\ &= 11\hat{\text{i}} + 5,0\hat{\text{j}} - 7,0\hat{\text{k}}.\end{aligned}$$

(b) Para determinar o ângulo pedido, calculamos o produto escalar de $\vec{r}$ e $\hat{k}$. Como $r = |\vec{r}\,| = \sqrt{(11{,}0)^2 + (5{,}0)^2 + (-7{,}0)^2} = 14$, as Eqs. 3-20 e 3-23 nos dão

$$\vec{r}\cdot\hat{k} = -7{,}0 = (14)(1)\cos\phi \quad\Rightarrow\quad \phi = 120°.$$

(c) A forma mais simples de determinar a componente de um vetor em uma certa direção é calcular o produto escalar do vetor com um vetor unitário na direção desejada. O vetor unitário na direção de $\vec{b}$ é dado por

$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-2{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}}{\sqrt{(-2{,}0)^2 + (2{,}0)^2 + (3{,}0)^2}}.$$

Assim, temos:

$$a_b = \vec{a}\cdot\hat{b} = \frac{(5{,}0)(-2{,}0) + (4{,}0)(2{,}0) + (-6{,}0)(3{,}0)}{\sqrt{(-2{,}0)^2 + (2{,}0)^2 + (3{,}0)^2}} = -4{,}9\,.$$

(d) Uma forma de resolver o problema (se estivermos interessados apenas no módulo do vetor) é usar o produto vetorial, como sugere o enunciado. Outra (que fornece mais informações) é subtrair de $\vec{a}$ o resultado do item (c) multiplicado por $\hat{b}$. Vamos apresentar as duas soluções. No primeiro método, observamos que se $a \cos\theta$ (em que θ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$) fornece a_b (a componente de $\vec{a}$ na direção de $\hat{b}$), é natural que a sen θ forneça a componente de $\vec{a}$ na direção perpendicular a $\hat{b}$:

$$a = \text{sen}\ \theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{b} = 7{,}3$$

[também é possível usar diretamente o ângulo θ calculado no item (c)].
No segundo método, executamos o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}\vec{a} - a_b\hat{b} &= (5{,}0 - 2{,}35)\hat{i} + (4{,}0 - (-2{,}35))\hat{j} + ((-6{,}0) - (-3{,}53))\hat{k}\\ &= 2{,}65\hat{i} + 6{,}35\hat{j} - 2{,}47\hat{k}\end{aligned}$$

Este é o vetor correspondente à parte perpendicular de $\vec{a}$. O módulo do vetor é

$$\sqrt{(2{,}65)^2 + (6{,}35)^2 + (-2{,}47)^2} = 7{,}3$$

o que está de acordo com o resultado obtido usando o primeiro método.

62. Escolhemos o semieixo x positivo como a direção leste, o semieixo y positivo como a direção norte e medimos todos os ângulos da forma "convencional" (em relação ao semieixo x positivo, ângulos positivos no sentido anti-horário e ângulos negativos no sentido horário). Nesse caso, o vetor $\vec{d}_1$, correspondente à primeira tacada, tem módulo d_1 = 3,66 m e ângulo θ_1 = 90°; o vetor $\vec{d}_2$, correspondente à segunda tacada, tem módulo d_2 = 1,83 m e ângulo θ_2 = –45°; o vetor $\vec{d}_3$, correspondente à terceira tacada, tem módulo d_3 = 0,91 e ângulo θ_3 = –135°. Somando as componentes x e y das três componentes, obtemos os seguintes resultados:

$$x: d_1\cos\theta_1 + d_2\cos\theta_2 + d_3\cos\theta_3 = 0{,}65\text{ m}$$
$$y: d_1\,\text{sen}\,\theta_1 + d_2\,\text{sen}\,\theta_2 + d_3\,\text{sen}\,\theta_3 = 1{,}7\text{ m}.$$

(a) O módulo do deslocamento total (da soma vetorial $\vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3$) é $\sqrt{(0{,}65\text{ m})^2 + (1{,}7\text{ m})^2} = 1{,}8$ m.

(b) O ângulo do vetor é $\tan^{-1}(1{,}7/0{,}65) = 69°$. Isso significa que a direção da tacada deve ser 69° ao norte do leste.

63. Os três vetores são

$$\begin{aligned}\vec{d}_1 &= -3{,}0\,\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 2{,}0\,\hat{\mathrm{k}}\\ \vec{d}_2 &= -2{,}0\,\hat{\mathrm{i}} - 4{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 2{,}0\,\hat{\mathrm{k}}\\ \vec{d}_3 &= 2{,}0\,\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 1{,}0\,\hat{\mathrm{k}}.\end{aligned}$$

(a) Como $\vec{d}_2 + \vec{d}_3 = 0\,\hat{\mathrm{i}} - 1{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 3{,}0\,\hat{\mathrm{k}}$, temos:

$$\begin{aligned}\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 + \vec{d}_3) &= (-3{,}0\,\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 2{,}0\,\hat{\mathrm{k}}) \cdot (0\,\hat{\mathrm{i}} - 1{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 3{,}0\,\hat{\mathrm{k}})\\ &= 0 - 3{,}0 + 6{,}0 = 3{,}0\ \mathrm{m}^2.\end{aligned}$$

(b) Usando a Eq. 3-30, obtemos $\vec{d}_2 \times \vec{d}_3 = -10\,\hat{\mathrm{i}} + 6{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 2{,}0\,\hat{\mathrm{k}}$. Assim,

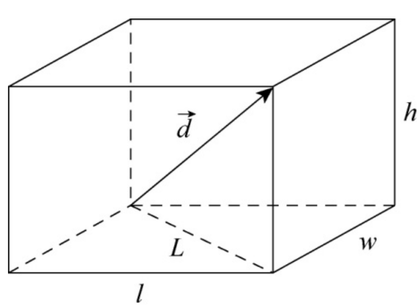
$$\begin{aligned}\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 \times \vec{d}_3) &= (-3{,}0\,\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 2{,}0\,\hat{\mathrm{k}}) \cdot (-10\,\hat{\mathrm{i}} + 6{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 2{,}0\,\hat{\mathrm{k}})\\ &= 30 + 18 + 4{,}0 = 52\ \mathrm{m}^3.\end{aligned}$$

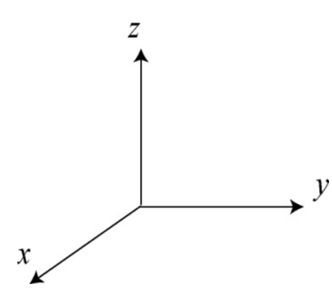
(c) Calculamos $\vec{d}_2 + \vec{d}_3$ no item (a). Usando a Eq. 3-30, obtemos:

$$\begin{aligned}\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2 + \vec{d}_3) &= (-3{,}0\,\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 2{,}0\,\hat{\mathrm{k}}) \times (0\,\hat{\mathrm{i}} - 1{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 3{,}0\,\hat{\mathrm{k}})\\ &= (11\,\hat{\mathrm{i}} + 9{,}0\,\hat{\mathrm{j}} + 3{,}0\,\hat{\mathrm{k}})\ \mathrm{m}^2\end{aligned}$$

64. PENSE Este problema envolve o movimento de uma mosca de um canto de uma sala para o canto diagonalmente oposto. O vetor deslocamento da mosca é tridimensional.

FORMULE O deslocamento da mosca está representado na figura a seguir.





Um sistema de coordenadas como o da figura da direita permite expressar o deslocamento como um vetor tridimensional.

ANALISE (a) O módulo do deslocamento de um canto para o canto diagonalmente oposto é dado por

$$d = |\vec{d}| = \sqrt{w^2 + l^2 + h^2}$$

Substituindo os valores dados, obtemos

$$d = |\vec{d}| = \sqrt{w^2 + l^2 + h^2} = \sqrt{(3{,}70\ \mathrm{m})^2 + (4{,}30\ \mathrm{m})^2 + (3{,}00\ \mathrm{m})^2} = 6{,}42\ \mathrm{m}$$

(b) O módulo do vetor deslocamento é igual ao comprimento da linha reta que liga o ponto inicial ao ponto final. Como a linha reta é a menor distância entre dois pontos, o valor da distância não pode ser menor que o valor calculado no item (a).

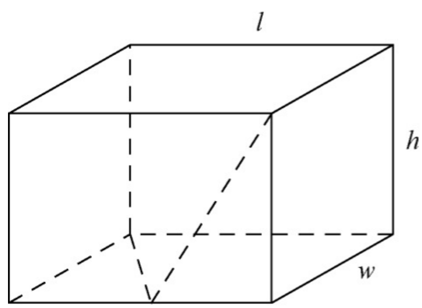
(c) É óbvio que o valor da distância pode ser maior que o valor calculado no item (a). Por exemplo, se a mosca se deslocar apenas ao longo das arestas do cubo, o valor da distância percorrida será $\ell + w + h = 11{,}0$ m.

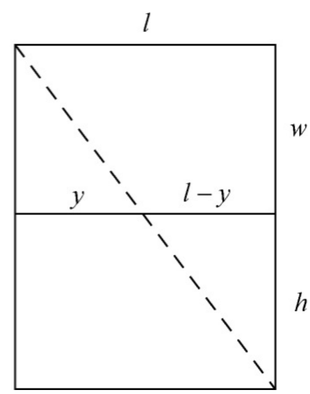
(d) O valor da distância será igual ao módulo do vetor deslocamento, se a mosca voar em linha reta do vértice inicial para o vértice final.

(e) Supondo que o eixo x aponta para fora da tela, o eixo y aponta para a direita e o eixo z aponta para cima, como na figura, a componente x do deslocamento é $w = 3{,}70$ m, a componente y é 4,30 m e a componente z é $3{,}00$ m. Assim, o vetor deslocamento é

$$\vec{d} = (3{,}70\text{ m})\hat{\text{i}} + (4{,}30\text{ m})\hat{\text{j}} + (3{,}00\text{ m})\hat{\text{k}}$$

(f) Suponha que o percurso da mosca seja o que está indicado por linhas tracejadas na figura da esquerda. Suponha que exista uma dobradiça na aresta entre a parede da frente da sala e o piso, e que a parede possa girar em torno da dobradiça até ficar no plano do piso, como na figura da direita.





A menor distância entre o canto inferior esquerdo da sala e o canto superior direito é a reta tracejada que aparece na figura da direita. O comprimento dessa reta é

$$s_{\text{mín}} = \sqrt{(w+h)^2 + l^2} = \sqrt{(3{,}70\text{ m} + 3{,}00\text{ m})^2 + (4{,}30\text{ m})^2} = 7{,}96\text{ m}$$

APRENDA Para demonstrar que o menor percurso é realmente o que está aqui descrito, vamos chamar de y a distância entre o canto inferior esquerdo da sala e o ponto em que a mosca atinge a dobradiça. Nesse caso, aplicando duas vezes o teorema de Pitágoras e somando os resultados, é fácil demonstrar que a distância s percorrida pela mosca é dada por

$$s = \sqrt{y^2 + w^2} + \sqrt{(l-y)^2 + h^2}$$

A condição para que essa distância seja mínima é dada por

$$\frac{ds}{dy} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + w^2}} - \frac{l-y}{\sqrt{(l-y)^2 + h^2}} = 0$$

É possível demonstrar, usando algumas transformações algébricas, que essa condição é satisfeita para $y = lw/(w+h)$, o que nos dá

$$s_{\text{mín}} = \sqrt{w^2\left(1 + \frac{l^2}{(w+h)^2}\right)} + \sqrt{h^2\left(1 + \frac{l^2}{(w+h)^2}\right)} = \sqrt{(w+h)^2 + l^2}$$

Qualquer outro caminho teria um comprimento maior que 7,96 m.

65. (a) Uma resposta possível é $(-40\,\hat{\text{i}} - 20\,\hat{\text{j}} + 25\,\hat{\text{k}})$ m, com $\hat{\text{i}}$ antiparalelo ao primeiro deslocamento, $\hat{\text{j}}$ antiparalelo ao segundo deslocamento, e $\hat{\text{k}}$ apontando para cima (para que o sistema de coordenadas seja dextrogiro). Outras respostas possíveis são $(40\,\hat{\text{i}} + 20\,\hat{\text{j}} + 25\,\hat{\text{k}})$ m e $(40\,\hat{\text{i}} - 20\,\hat{\text{j}} - 25\,\hat{\text{k}})$ m (com definições ligeiramente diferentes dos vetores unitários). Note que o produto das componentes é positivo em todos os casos.

(b) De acordo com o teorema de Pitágoras, $d = \sqrt{(40\text{ m})^2 + (20\text{ m})^2} = 44{,}7\text{ m} \approx 45\text{ m}$.

66. Os vetores podem ser escritos na forma $\vec{a} = a\hat{\text{i}}$ e $\vec{b} = b\hat{\text{j}}$, em que $a > 0$ e $b > 0$.

(a) Devemos determinar a orientação do vetor

$$\frac{\vec{b}}{d} = \left(\frac{b}{d}\right)\hat{\text{j}}$$

para $d > 0$. Como o coeficiente de $\hat{\text{j}}$ é positivo, o vetor aponta no sentido do semieixo y positivo.

(b) Se $d < 0$, o coeficiente de $\hat{\text{j}}$ é negativo e o vetor aponta no sentido do semieixo y negativo.

(c) De acordo com a Eq. 3-20, como cos 90° = 0, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

(d) Como $\vec{a}$ tem a mesma direção que o eixo x, e $\vec{b}/d$ tem a mesma direção do eixo y, usando o mesmo raciocínio do item anterior, $\vec{a} \cdot (\vec{b}/d) = 0$.

(e) De acordo com a regra da mão direita, $\vec{a} \times \vec{b}$ aponta no sentido do semieixo z positivo.

(f) De acordo com a regra da mão direita, $\vec{b} \times \vec{a}$ aponta no sentido do semieixo z negativo. Note que $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ nesse caso e no caso geral.

(g) De acordo com a Eq. 3-24, como sen 90° = 1, $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab$, em que a é o módulo de $\vec{a}$, e b é o módulo de $\vec{b}$.

(h) Nesse caso, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = ab$.

(i) O módulo de $\vec{a} \times (\vec{b}/d)$ é ab/d, qualquer que seja o sinal de d.

(j) Se $d > 0$, o vetor $\vec{a} \times (\vec{b}/d)$ aponta no sentido do semieixo z positivo.

67. Note que os sentidos escolhidos para os vetores unitários estão corretos para um sistema de coordenadas dextrogiro. Como os estudantes às vezes confundem "norte" com "para cima", talvez valha a pena chamar a atenção para o fato de que "norte" e "para cima" são direções mutuamente perpendiculares no mundo real e não devem ser interpretadas como indicações de direção como "para fora da tela" ou "para cima no quadro-negro". Ao calcular produtos escalares e vetoriais, é importante interpretar corretamente as direções.

(a) $\hat{\text{i}} \cdot \hat{\text{k}} = 0$ porque $\hat{\text{i}} \perp \hat{\text{k}}$

(b) $(-\hat{\text{k}}) \cdot (-\hat{\text{j}}) = 0$ porque $\hat{\text{k}} \perp \hat{\text{j}}$.

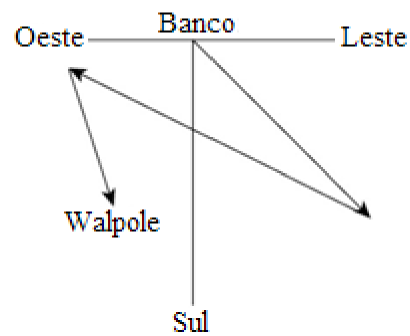
(c) $\hat{\text{j}} \cdot (-\hat{\text{j}}) = -1$.

(d) $\hat{\text{k}} \times \hat{\text{j}} = -\hat{\text{i}}$ (para oeste).

(e) $(-\hat{\text{i}}) \times (-\hat{\text{j}}) = +\hat{\text{k}}$ (para cima).

(f) $(-\hat{\text{k}}) \times (-\hat{\text{j}}) = -\hat{\text{i}}$ (para oeste).

68. A figura mostra os deslocamentos. A resultante (que não aparece na figura) é uma linha reta ligando o ponto inicial (Banco) ao ponto final (Walpole). Fazendo um desenho em escala, concluímos que o vetor resultante tem um módulo de 29,5 km e faz um ângulo de 35° a oeste com a direção sul, o que significa que a extremidade do vetor coincide, no mapa, com a cidade de Walpole.



69. Quando a roda descreve meia revolução, o ponto P sofre um deslocamento vertical de $2R$, em que R é o raio da roda, e um deslocamento horizontal de πR (metade da circunferência da roda). Como R = 0,450 m, a componente horizontal do deslocamento é 1,414 m e a componente vertical do deslocamento é 0,900 m. Tomando o eixo x como eixo horizontal e o eixo y como eixo vertical, o vetor deslocamento, em metros, é $\vec{r} = \left(1{,}414\ \hat{\text{i}} + 0{,}900\ \hat{\text{j}}\right)$. O módulo do deslocamento é

$$|\vec{r}| = \sqrt{(\pi R)^2 + (2R)^2} = R\sqrt{\pi^2 + 4} = 1{,}68\,\text{m}$$

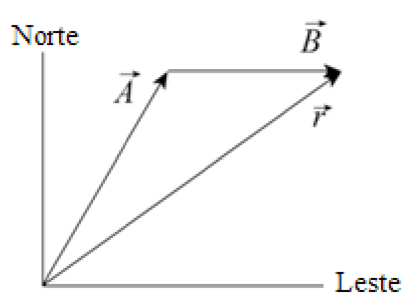
e o ângulo do deslocamento é

$$\tan^{-1}\left(\frac{2R}{\pi R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right) = 32{,}5°$$

para cima em relação ao piso.

70. A figura mostra os vetores deslocamento para as duas partes da caminhada, $\vec{A}$ e $\vec{B}$, e o deslocamento total $\vec{r}$. Vamos tomar o semieixo x positivo como sendo a direção leste, e o semieixo y positivo como sendo a direção norte. Observe que o ângulo entre $\vec{A}$ e o eixo x é 60°. Tomando todas as distâncias em metros, as componentes de $\vec{A}$ são A_x = 250 cos 60° = 125 e A_y = 250 sen 60° = 216,5. As componentes de $\vec{B}$ são B_x = 175 e B_y = 0. As componentes do deslocamento total são

$$r_x = A_x + B_x = 125 + 175 = 300$$
$$r_y = A_y + B_y = 216{,}5 + 0 = 216{,}5$$



(a) O módulo do deslocamento total é

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(300\text{ m})^2 + (216{,}5\text{ m})^2} = 370\text{m}$$

(b) O ângulo entre o deslocamento total e o semieixo x positivo é

$$\tan^{-1}\left(\frac{r_y}{r_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{216{,}5\text{ m}}{300\text{ m}}\right) = 36°$$

Essa direção corresponde a um ângulo de $36°$ para o norte a partir do leste.

(c) A *distância* percorrida pela mulher é d = 250 m + 175 m = 425 m.

(d) Os resultados dos itens (a) e (c) mostram que a distância total percorrida é maior que o módulo do deslocamento. Na verdade, isso acontece sempre que os deslocamentos não são executados na mesma direção e no mesmo sentido.

71. O vetor $\vec{d}$ pode ser representado como $\vec{d} = (3{,}0 \text{ m})(-\hat{\text{j}})$, em que $-\hat{\text{j}}$ é o vetor unitário que aponta para o sul. Assim, $5{,}0\vec{d} = 5{,}0(-3{,}0 \text{ m } \hat{\text{j}}) = (-15 \text{ m})\hat{\text{j}}$.

(a) Quando um vetor é multiplicado por um número positivo, o módulo do vetor é multiplicado pelo número, e a orientação permanece a mesma. Assim, o módulo do vetor $5{,}0\vec{d}$ é 15 m.

(b) A orientação do vetor $5\vec{d}$ é a mesma do vetor $\vec{d}$, ou seja, o vetor aponta para o sul.

O vetor $-2{,}0\vec{d}$ pode ser escrito como $-2{,}0(-3{,}0 \text{ m } \hat{\text{j}}) = (6{,}0 \text{ m})\hat{\text{j}}$.

(c) O módulo do vetor é $\left|(6{,}0 \text{ m})\hat{\text{j}}\right|$ = 6,0 m.

(d) Como a multiplicação por um número negativo inverte o sentido do vetor, a orientação do vetor $-2{,}0\vec{d}$ é $+\hat{\text{j}}$, ou seja, o vetor aponta para o norte.

72. A formiga executa três deslocamentos:

$$\begin{aligned}
\vec{d}_1 &= (0.40 \text{ m})(\cos 225°\,\hat{\text{i}} + \text{sen}\,225°\,\hat{\text{j}}) = (-0{,}28 \text{ m})\hat{\text{i}} + (-0{,}28 \text{ m})\hat{\text{j}} \\
\vec{d}_2 &= (0{,}50 \text{ m})\hat{\text{i}} \\
\vec{d}_3 &= (0{,}60 \text{ m})(\cos 60°\,\hat{\text{i}} + \text{sen}\,60°\,\hat{\text{j}}) = (0{,}30 \text{ m})\hat{\text{i}} + (0{,}52 \text{ m})\hat{\text{j}}
\end{aligned}$$

em que o ângulo é medido em relação ao semieixo x positivo, e os semieixos x e y positivos foram usados para representar as direções leste e norte, respectivamente.

(a) A componente x de $\vec{d}_1$ é $d_{1x} = (0{,}40 \text{ m})\cos 225° = -0{,}28 \text{ m}$.

(b) A componentes y de $\vec{d}_1$ é $d_{1y} = (0{,}40 \text{ m})\,\text{sen}\,225° = -0{,}28 \text{ m}$.

(c) A componente x de $\vec{d}_2$ é $d_{2x} = 0{,}50 \text{ m}$.

(d) A componente y de $\vec{d}_2$ é $d_{2y} = 0 \text{ m}$.

(e) A componente x de $\vec{d}_3$ é $d_{3x} = (0{,}60 \text{ m})\cos 60° = 0{,}30 \text{ m}$.

(f) A componente y de $\vec{d}_3$ é $d_{3y} = (0{,}60 \text{ m})\,\text{sen}\,60° = 0{,}52 \text{ m}$.

(g) A componente x do deslocamento total $\vec{d}_{\text{tot}}$ é

$$d_{\text{tot},x} = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} = (-0{,}28 \text{ m}) + (0{,}50 \text{ m}) + (0{,}30 \text{ m}) = 0{,}52 \text{ m}.$$

(h) A componente y do deslocamento total $\vec{d}_{\text{tot}}$ é

$$d_{\text{tot},y} = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} = (-0{,}28 \text{ m}) + (0 \text{ m}) + (0{,}52 \text{ m}) = 0{,}24 \text{ m}$$

(i) O módulo do deslocamento total é

$$d_{\text{tot}} = \sqrt{d_{\text{tot},x}^2 + d_{\text{tot},y}^2} = \sqrt{(0{,}52 \text{ m})^2 + (0{,}24 \text{ m})^2} = 0{,}57 \text{ m}$$

(j) A orientação do deslocamento total é

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{d_{\text{tot},y}}{d_{\text{tot},x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}24 \text{ m}}{0{,}52 \text{ m}}\right) = 25° \text{ (norte de leste)}$$

Para a formiga voltar diretamente ao ponto de partida, ela deve executar um deslocamento de $-\vec{d}_{\text{tot}}$.

(k) A formiga deve percorrer uma distância de $|-\vec{d}_{\text{tot}}| = 0{,}57$ m.

(l) A formiga deve se mover em uma direção que faz 25º ao sul com a direção oeste.

73. Podemos usar as Eqs. 3-23 e Eq. 3-27.

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = (a_x b_y - a_y b_x)\,\hat{\text{k}}$; todos os outros termos são nulos, já que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não têm componente z. O resultado é

$$[(3{,}0)(4{,}0) - (5{,}0)(2{,}0)]\hat{\text{k}} = 2{,}0\hat{\text{k}}.$$

(b) $\vec{a} \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$ nos dá (3,0)(2,0) + (5,0)(4,0) = 26.

(c) $\vec{a} + \vec{b} = (3{,}0 + 2{,}0)\,\hat{i} + (5{,}0)(4{,}0)\,\hat{j} \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = (5{,}0)(2{,}0) + (9{,}0)(4{,}0) = 46.$

(d) Várias abordagens são possíveis. Na solução apresentada, vamos construir um vetor unitário com a orientação do vetor $\vec{b}$ e calcular o produto escalar do vetor $\vec{a}$ por esse vetor. O vetor unitário é

$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{2{,}0\,\hat{\text{i}} + 4{,}0\,\hat{\text{j}}}{\sqrt{(2{,}0)^2 + (4{,}0)^2}}$$

e a componente pedida é

$$a_b = \vec{a} \cdot \hat{b} = \frac{(3{,}0)(2{,}0) + (5{,}0)(4{,}0)}{\sqrt{(2{,}0)^2 + (4{,}0)^2}} = 5{,}81$$

74. Na notação dos vetores unitários, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são dados por

$$\vec{a} = 3{,}20(\cos 63°\ \hat{\text{j}} + \text{sen}63°\ \hat{\text{k}}) = 1{,}45\ \hat{\text{j}} + 2{,}85\ \hat{\text{k}}$$

$$\vec{b} = 1{,}40(\cos 48°\ \hat{\text{i}} + \text{sen}48°\ \hat{\text{k}}) = 0{,}937\hat{\text{i}} + 1{,}04\ \hat{\text{k}}$$

As componentes de $\vec{a}$ são $a_x = 0$, $a_y = 3{,}20 \cos 63° = 1{,}45$ e $a_z = 3{,}20 \text{ sen } 63° = 2{,}85$. As componentes de $\vec{b}$ são $b_x = 1{,}40 \cos 48° = 0{,}937$, $b_y = 0$ e $b_z = 1{,}40 \text{ sen } 48° = 1{,}04$.

(a) O produto escalar é

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (0)(0{,}937) + (1{,}45)(0) + (2{,}85)(1{,}04) = 2{,}97$$

(b) O produto vetorial é

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\hat{\mathrm{j}} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{\mathrm{k}}\\ &= \left((1{,}45)(1{,}04) - 0\right)\hat{\mathrm{i}} + \left((2{,}85)(0{,}937) - 0\right)\hat{\mathrm{j}} + \left(0 - (1{,}45)(0{,}937)\right)\hat{\mathrm{k}}\\ &= 1{,}51\hat{\mathrm{i}} + 2{,}67\hat{\mathrm{j}} - 1{,}36\hat{\mathrm{k}}\end{aligned}$$

(c) O ângulo θ entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2.97}{(3{,}20)(1{,}40)}\right) = 48{,}5°$$

75. Vamos tomar o vetor $\hat{\mathrm{i}}$ na direção leste, o vetor $\hat{\mathrm{j}}$ na direção norte, o vetor $\hat{\mathrm{k}}$ na direção para cima, e usar os seguintes produtos fundamentais:

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}} &= -\hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{k}}\\ \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{k}} &= -\hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{i}}\\ \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{i}} &= -\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{j}}\end{aligned}$$

(a) "norte vetor oeste" = $\hat{\mathrm{j}}\times(-\hat{\mathrm{i}})=\hat{\mathrm{k}}$ = "para cima".

(b) "para baixo escalar sul" = $(-\hat{\mathrm{k}})\cdot(-\hat{\mathrm{j}})=0$.

(c) "leste vetor para cima" = $\hat{\mathrm{i}}\times(\hat{\mathrm{k}})=-\hat{\mathrm{j}}$ = "sul".

(d) "oeste escalar oeste" = $(-\hat{\mathrm{i}})\cdot(-\hat{\mathrm{i}})=1$.

(e) "sul vetor sul" = $(-\hat{\mathrm{j}})\times(-\hat{\mathrm{j}})=0$.

76. A equação vetorial é $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$, em que B = 8,0 m e $C = 2A$. Sabemos também que o vetor $\vec{A}$ faz um ângulo de 0° com o semieixo x positivo e que o vetor $\vec{C}$ faz um ângulo de 90° com o semieixo x positivo. Isso significa que os três vetores formam um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o módulo do vetor B. De acordo com o teorema de Pitágoras,

$$B = \sqrt{A^2 + C^2} \Rightarrow 8{,}0 = \sqrt{A^2 + 4A^2}$$

o que nos dá $A = 8/\sqrt{5} = 3{,}6$ m.

77. Vamos tomar o vetor $\hat{\mathrm{i}}$ na direção leste, o vetor $\hat{\mathrm{j}}$ na direção norte, e o vetor $\hat{\mathrm{k}}$ na direção para cima.

(a) O deslocamento da moeda é $\vec{d}$ = (1300 m) $\hat{\mathrm{i}}$ + (2200 m) $\hat{\mathrm{j}}$ + (–410 m) $\hat{\mathrm{k}}$

(b) O deslocamento do homem no percurso de volta é $\vec{d}'$ = – (1300 m) $\hat{\mathrm{i}}$ – (2200 m) $\hat{\mathrm{j}}$ e o módulo do deslocamento é

$$d' = \sqrt{(-1300\text{ m})^2 + (-2200\text{ m})^2} = 2{,}56\times10^3\text{ m}.$$

O deslocamento total do homem é zero, já que a posição final coincide com a posição inicial.

78. Seja $\vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}$. O módulo de $\vec{c}$ é $c = ab$ sen θ. Como $\vec{c}$ é perpendicular a $\vec{a}$, o módulo de $\vec{a} \times \vec{c}$ é ac. O módulo de $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})$ é, portanto,

$$|\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})| = ac = a^2 b \operatorname{sen}\phi$$

Substituindo os valores dados, obtemos

$$|\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})| = a^2 b \operatorname{sen}\phi = (3{,}90)^2(2{,}70)\operatorname{sen}63{,}0° = 36{,}6\,.$$

79. A área de um triângulo é metade do produto da base pela altura. Tomando como base o lado formado pelo vetor $\vec{a}$, a altura é b sen θ e a área é $A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.
Substituindo os valores dados, obtemos

$$A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}(4{,}3)(5{,}4)\operatorname{sen}46° \approx 8.4$$