# Capítulo 11

**1.** A velocidade do carro é constante,

$$\vec{v} = +(80\text{ km/h})(1000\text{ m/km})(1\text{ h}/3600\text{ s})\,\hat{\text{i}} = (+22\,\text{m/s})\hat{\text{i}},$$

e o raio da roda é $r = 0{,}66/2 = 0{,}33$ m.

(a) No referencial do carro (referencial no qual a mulher se considera em repouso), a estrada está se movendo com uma velocidade $\vec{v}_{\text{estrada}} = (-22\,\text{m/s})\hat{\text{i}}$ e o movimento dos pneus é apenas de rotação. Neste referencial, o centro do pneu está "em repouso" e, portanto, $\vec{v}_{\text{centro}} = 0$.

(b) Como, neste referencial, o movimento dos pneus é apenas de rotação (não há translação), a Eq. 10-18 nos dá $\vec{v}_{\text{alto}} = (+22\,\text{m/s})\hat{\text{i}}$.

(c) A base dos pneus está (momentaneamente) em contato com a estrada e tem a mesma velocidade da estrada: $\vec{v}_{\text{base}} = (-22\,\text{m/s})\hat{\text{i}}$.

(d) Como o referencial da mulher está se movendo com velocidade constante, a aceleração de qualquer ponto que esteja em repouso em relação a esse referencial é zero; assim, $a_{\text{centro}} = 0$.

(e) Neste referencial, o movimento dos pneus não só é apenas de rotação, mas é de rotação com velocidade angular constante, o que significa que a aceleração dos pontos na borda do pneu é apenas a aceleração radial (centrípeta). Assim, o módulo da aceleração é

$$a_{\text{alto}} = \frac{v^2}{r} = \frac{(22\text{ m/s})^2}{0{,}33\text{ m}} = 1{,}5\times10^3\text{ m/s}^2\,.$$

(f) O módulo da aceleração é o mesmo do item (e): $a_{\text{base}} = 1{,}5 \times 10^3$ m/s$^2$.

(g) Agora examinamos a mesma situação no referencial da estrada (ou seja, em um referencial no qual a estrada está "em repouso" e é o carro que está se movendo). Nesse caso, o centro dos pneus descreve um movimento apenas de translação, enquanto os pontos da borda dos pneus descrevem um movimento que é uma combinação de translação e rotação. A velocidade do centro dos pneus é $\vec{v} = (+22\,\text{m/s})\hat{\text{i}}$.

(h) Como, de acordo com o item (b), $\vec{v}_{\text{alto,carro}} = +v$, temos, de acordo com a Eq. 4-39:

$$\vec{v}_{\text{alto,estrada}} = \vec{v}_{\text{alto, carro}} + \vec{v}_{\text{carro,estrada}} = v\,\hat{\text{i}} + v\,\hat{\text{i}} = 2v\,\hat{\text{i}}$$

o que nos dá $v_{\text{alto, estrada}} = 2v = +44$ m/s.

(i) Podemos proceder como no item (h) ou simplesmente observar que, como a base dos pneus está em contato com a estrada, deve ter a mesma velocidade que a estrada. Seja qual for o método usado, a resposta é zero.

(j) Como o centro dos pneus tem um movimento de translação com velocidade constante, a aceleração é zero.

(k) Como estamos passando de um referencial para outro que se move com velocidade constante em relação ao primeiro, as acelerações não mudam. Assim, a resposta é a mesma do item (e): $1{,}5 \times 10^3$ m/s$^2$.

(1) A resposta é a mesma do item (f): $a = 1{,}5 \times 10^3$ m/s$^2$.

**2.** A velocidade inicial do carro é

$$v = (80\text{ km/h})(1000\text{ m/km})(1\text{ h}/3600\text{ s}) = 22{,}2\text{ m/s}\,.$$

O raio dos pneus é $R = 0{,}750/2 = 0{,}375$ m.

(a) Como a velocidade inicial do carro é igual à velocidade inicial do centro de massa dos pneus, a Eq. 11-2 nos dá

$$\omega_0 = \frac{v_{CM0}}{R} = \frac{22,2\ \text{m/s}}{0,375\ \text{m}} = 59,3\ \text{rad/s}.$$

(b) Para $\theta = (30,0)(2\pi) = 188$ rad e $\omega = 0$, a Eq. 10-14 nos dá

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \quad \Rightarrow \quad |\alpha| = \frac{(59,3\ \text{rad/s})^2}{2(188\ \text{rad})} = 9,31\ \text{rad/s}^2.$$

(c) De acordo com a Eq. 11-1, a distância percorrida pelo carro é $R\theta = 70,7$ m.

**3. PENSE** O trabalho necessário para fazer o aro parar é o negativo da energia cinética inicial do aro.

**FORMULE** De acordo com a Eq. 11-5, a energia cinética inicial do aro é $K_i = I\omega^2/2 + mv^2/2$, em que $I = mR^2$ é o momento de inércia do aro em relação ao centro de massa. Como, de acordo com a Eq. 11-2, $\omega = v/R$, temos

$$K_i = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(mR^2)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2$$

**ANALISE** Para $m = 140$ kg e $v = 0,150$ m/s,

$$K_i = mv^2 = (140\ \text{kg})(0,150\ \text{m/s})^2 = 3,15\ \text{J}$$

e, portanto, o trabalho necessário é $W = \Delta K = K_f - K_i = -K_i = -3,15$ J.

**APRENDA** De acordo com o teorema do trabalho e energia cinética, o trabalho é negativo, já que a energia cinética final é menor que a energia cinética inicial. Um corpo que está rolando tem dois tipos de energia cinética: energia cinética de rotação e energia cinética de translação.

**4.** Usamos os resultados da Seção 11.3.

(a) Fazemos $I = \frac{2}{5}M\,R^2$ [Tabela 10-2(f)] e $a = -\,0,10g$ na Eq. 11-10:

$$-0,10g = -\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{1 + (\frac{2}{5}MR^2/MR^2)} = -\frac{g\,\text{sen}\,\theta}{7/5},$$

o que nos dá $\theta = \text{sen}^{-1}\,(0,14) = 8,0°$.

(b) O módulo da aceleração seria maior. Podemos analisar a questão em termos de forças ou em termos de energia. Em termos de forças, a força de atrito estático, que aponta para cima, não estaria presente, de modo que a força da gravidade agiria sozinha, produzindo uma aceleração maior. Em termos de energia, a energia de rotação da Eq. 11-5 não estaria presente, de modo que a energia potencial inicial seria toda transformada em energia cinética de translação $\frac{1}{2}mv^2$ (não seria necessário "compartilhá-la" com a energia de rotação) e, para compensar, a velocidade teria que ser maior (e, por causa da Eq. 2-16, a aceleração também teria que ser maior).

**5.** Seja $M$ a massa do carro (que, presumivelmente, inclui a massa das rodas) e seja $v$ a velocidade. Seja $I$ o momento de inércia de uma das rodas e seja $\omega$ a velocidade angular das rodas. A energia cinética de rotação é

$$K_{rot} = 4\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right),$$

na qual o fator 4 aparece porque o carro tem quatro rodas. A energia cinética total é dada por

$$K = \tfrac{1}{2}Mv^2 + 4(\tfrac{1}{2}I\omega^2)\,.$$

A fração da energia cinética total que se deve à rotação é

$$\text{fração} = \frac{K_{\text{rot}}}{K} = \frac{4I\omega^2}{Mv^2 + 4I\omega^2}$$

O momento de inércia de um disco homogêneo em relação ao centro de massa é $I = \tfrac{1}{2}mR^2$ [Tabela 10-2(c)]. Como as rodas rolam sem deslizar, $\omega = v/R$ (Eq. 11-2). Assim, o numerador da fração é

$$4I\omega^2 = 4\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = 2mv^2$$

e a fração se torna

$$\text{fração} = \frac{2mv^2}{Mv^2 + 2mv^2} = \frac{2m}{M + 2m} = \frac{2(10)}{1000} = \frac{1}{50} = 0{,}020.$$

Assim, o raio das rodas não aparece na expressão final e não é necessário especificar o seu valor.

**6.** Fazemos $a = -3{,}5$ m/s$^2$ (o módulo desse número pode ser estimado a partir da inclinação do gráfico), $\theta = 30°$, $M = 0{,}50$ kg e $R = 0{,}060$ m na Eq. 11-10 e calculamos o momento de inércia. O resultado é $I = 7{,}2 \times 10^{-4}$ kg · m$^2$.

**7.** (a) Podemos calcular a velocidade angular do cilindro ao deixar o telhado usando a lei de conservação da energia. A energia cinética inicial é $K_i = 0$ e a energia potencial inicial é $U_i = Mgh$, em que $h = 6{,}0$ sen 30° = 3,0 m (estamos usando a borda do telhado como nível de referência para calcular a energia potencial). De acordo com a Eq. 11-5, a energia cinética final (na borda do telhado) é

$$K_f = \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2,$$

na qual $v$ é a velocidade do centro de massa e $\omega$ é a velocidade angular. Como, até esse momento, o cilindro rolou sem deslizar, sabemos que $v = R\omega$, sendo $R = 0{,}10$ m. Como $I = \tfrac{1}{2}MR^2$ [Tabela 10-2(c)], temos, de acordo com a lei de conservação da energia,

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{4}MR^2\omega^2 = \frac{3}{4}MR^2\omega^2$$

Dividindo a equação pela massa $M$, obtemos

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = \frac{1}{0{,}10\text{ m}}\sqrt{\frac{4}{3}(9{,}8\text{ m/s}^2)(3{,}0\text{ m})} = 63\text{ rad/s}.$$

(b) Depois que o cilindro atinge a borda do telhado, temos um problema de movimento balístico do tipo que foi discutido no Capítulo 4. Colocamos a origem na posição do centro de massa no instante em que o cilindro deixa o telhado (a posição "inicial" para esta parte do problema) e tomamos como positivos o sentido para esquerda do eixo $x$ e o sentido para baixo do eixo $y$. De acordo com o resultado do item (a), $v_0 = R\omega = 6{,}3$ m/s, cujas componentes são (com essa escolha de eixos)

$$v_{0x} = v_0 \cos 30° = 5{,}4\text{ m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \,\text{sen}\, 30° = 3{,}1\text{ m/s}.$$

Assim, o movimento balístico se torna

$$x = v_{0x}t \quad \text{e} \quad y = x_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2.$$

Para começar, usamos a segunda equação para determinar o instante em que $y = H = 5{,}0$ m. Escolhendo a raiz positiva da solução da equação do segundo grau, temos:

$$t = \frac{-v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gH}}{g} = 0{,}74\,\text{s}.$$

Substituindo esse valor na primeira equação, obtemos $x = (5{,}4\text{ m/s})(0{,}74\text{ s}) = 4{,}0$ m.

**8.** (a) Vamos chamar de $P$ o ponto de retorno. De acordo com a lei de conservação da energia, a energia mecânica no ponto $x =$ 7,0 m é igual à energia mecânica no ponto $P$. Assim, de acordo com a Eq. 11-5, temos:

$$75\text{ J} = mv_\text{p}^2/2 + I_\text{CM}\,\omega_\text{p}^2/2 + U_\text{p}\,.$$

De acordo com o item (*f*) da Tabela 10-2 e a Eq. 11-2 (segundo a qual, se existe um ponto de retorno, $\omega_\text{p} = v_\text{p} = 0$), obtemos $U_\text{p} =$ 75 J. No gráfico, isso parece corresponder a $x = 2{,}0$ m e concluímos que existe um ponto de retorno (e acabamos de encontrá-lo). A bola, portanto, não chega à origem.

(b) Notamos que não existe nenhum ponto no gráfico, à direita de $x = 7{,}0$ m, que esteja "mais alto" que 75 J. Por isso, suspeitamos que não existe um ponto de retorno nessa direção e tentamos calcular a velocidade $v_\text{p}$ em $x = 13$ m. Se conseguimos obter uma solução real diferente de zero, é porque nossa suspeita está correta (ou seja, a bola não atinge o ponto $P$ antes de chegar a $x = 13$ m). De acordo com a lei de conservação da energia, a energia mecânica no ponto $x = 7{,}0$ m é igual à energia mecânica no ponto $P$. Assim,

$$75\text{ J} = mv_\text{p}^2/2 + I_\text{CM}\,\omega_\text{p}^2/2 + U_\text{p}.$$

Usando novamente o item (*f*) da Tabela 11-2, a Eq. 11-2 (desta vez, o cálculo é menos trivial) e $U_\text{p} = 60$ J (valor obtido no gráfico), além dos dados do enunciado do problema, obtemos $v_\text{p} = 7{,}3$ m/s.

**9.** Para calcular a posição do ponto em que a bola toca o chão, determinamos primeiro, usando a lei de conservação da energia, a velocidade com a qual a bola deixa a pista. A energia cinética inicial é $K_i = 0$ e a energia potencial inicial é $U_i = MgH$. A energia cinética final da bola (ao deixar a pista) é $K_f = Mv^2/2 + I\omega^2/2$ (Eq. 11-5), em que $v$ é a velocidade do centro de massa e $\omega$ é a velocidade angular, e a energia potencial final é $Mgh$. Como, até esse momento, a bola rola sem deslizar, sabemos que $\omega = v/R$. Como o momento de inércia é dado por $I = 2MR^2/5$ [Tabela 10-2(f)], a lei de conservação da energia nos dá

$$\begin{aligned} MgH &= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{2}{10}Mv^2 + Mgh \\ &= \frac{7}{10}Mv^2 + Mgh. \end{aligned}$$

Dividindo a equação por $M$, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}g(H-h)} = \sqrt{\frac{10}{7}(9{,}8\text{ m/s}^2)(6{,}0\text{ m} - 2{,}0\text{ m})} = 7{,}48\text{ m/s}.$$

A partir do momento em que a bola deixa a pista, temos um movimento balístico do tipo que foi discutido no Capítulo 4. Colocamos a origem na posição do centro de massa no instante em que a bola deixa a pista (a posição "inicial" para esta parte do problema) e tomamos como positivos o sentido para direita do eixo $x$ e o sentido para baixo do eixo $y$. Nesse caso, como a velocidade inicial é horizontal, as equações do movimento balístico se tornam

$$x = vt \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}gt^2.$$

Fazendo $y = h$ da segunda equação, obtemos $t = \sqrt{2h/g}$. Substituindo $t$ pelo seu valor na primeira equação, temos:

$$x = v\sqrt{\frac{2h}{g}} = (7{,}48\text{ m/s})\sqrt{\frac{2(2{,}0\text{ m})}{9{,}8\text{ m/s}^2}} = 4{,}8\text{ m}.$$

**10.** Como, neste caso, $I = \frac{2}{3}MR^2$ [Tabela 10-2(g)], temos:

$$= \frac{}{\;^{2}} = \frac{3\left(0{,}040\ \text{kg}\cdot\text{m}\ \right)}{2\left(0{,}15\ \text{m}\right)^2} = 2{,}7\ \text{kg}.$$

Também sabemos que $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{3}MR^2\omega^2$ e que, como a esfera rola sem deslizar, $v_{\text{CM}} = R\omega$. Assim,

$$\frac{K_{\text{rot}}}{K_{\text{CM}} + K_{\text{rot}}} = \frac{\frac{1}{3}MR^2\omega^2}{\frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{3}MR^2\omega^2}$$

(a) Simplificando a equação acima, obtemos $K_{\text{rot}}/K = 0{,}4$. Assim, 40% da energia cinética é rotacional e

$$K_{\text{rot}} = (0{,}4)(20\ \text{J}) = 8{,}0\ \text{J}.$$

(b) Como $K_{\text{rot}} = \frac{1}{3}M\,R^2\omega^2 = 8{,}0\,\text{J}$, usando o valor conhecido de $M$, obtemos

$$\omega = \frac{1}{0{,}15\ \text{m}}\sqrt{\frac{3(8{,}0\ \text{J})}{2{,}7\ \text{kg}}} = 20\ \text{rad/s},$$

o que nos dá $v_{\text{CM}} = (0{,}15\ \text{m})(20\ \text{rad/s}) = 3{,}0\ \text{m/s}$.

(c) Note que uma distância de 1,0 m ao longo da superfície corresponde a uma altura $h = 1{,}0\ \text{sen}\ 30° = 0{,}50\ \text{m}$. De acordo com a lei de conservação da energia mecânica,

$$K_i = K_f + U_f \quad \Rightarrow \quad 20\,\text{J} = K_f + Mgh,$$

o que nos dá (usando os valores conhecidos de $M$ e $h$) $K_f = 6{,}9$ J.

(d) Como determinamos no item (a) que 40% da energia cinética total é rotacional, temos:

$$\frac{1}{3}MR^2\omega_f^2 = (0{,}40)K_f \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \frac{1}{0{,}15\ \text{m}}\sqrt{\frac{3(0{,}40)(6{,}9\ \text{J})}{2{,}7\ \text{kg}}},$$

o que nos dá $\omega_f = 12$ rad/s e

$$v_{\text{CM}f} = R\omega_f = (0{,}15\ \text{m})(12\ \text{rad/s}) = 1{,}8\ \text{m/s}.$$

**11.** Com , resolvemos o problema usando as Eqs. 9-14 e 11-37.

(a) Aplicando a Segunda Lei de Newton na direção $x$, temos:

$$F_{\text{ap}} - f_s = ma \quad \Rightarrow f_s = 10\,\text{N} - (10\,\text{kg})\left(0{,}60\ \text{m/s}^2\right) = 4{,}0\ \text{N}.$$

Na notação de vetores unitários, temos $\vec{f}_s = (-4{,}0\ \text{N})\hat{\text{i}}$, que aponta para a esquerda.

(b) Para $R = 0{,}30$ m, o módulo da aceleração angular é, de acordo com a Eq. 11-6,

$$|\alpha| = |a_{\text{CM}}|\ /\ R = 2{,}0\ \text{rad/s}^2.$$

A única força cuja linha de ação não passa pelo centro de massa é $\vec{f}_s$; o módulo do torque produzido por essa força é dado por

$$|\tau| = I|\alpha| \quad \Rightarrow \quad (0{,}30\,\text{m})(4{,}0\,\text{N}) = I\left(2{,}0\,\text{rad/s}^2\right),$$

o que permite calcular o momento de inércia da roda em relação ao centro de massa: $I = 0{,}60\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

**12.** Usando o solo como posição de referência para a energia potencial, a lei de conservação da energia mecânica nos dá

$$U_{\text{liberada}} = K_{\text{alto}} + U_{\text{alto}} \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(2R).$$

Fazendo $I = \frac{2}{5}mr^2$ [Tabela 10-2(f)] e $\omega = v_{\text{CM}}/r$ (Eq. 11-2), temos:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v_{\text{CM}}}{r}\right)^2 + 2mgR \quad \Rightarrow \quad gh = \frac{7}{10}v_{\text{CM}}^2 + 2gR$$

sendo que, no lado direito, a equação foi dividida pela massa $m$.

(a) Para a bola estar na iminência de perder contato com o trilho no ponto mais alto do percurso, a força normal deve se anular nesse ponto. Sendo assim, a aplicação da Segunda Lei de Newton na direção do eixo $y$ leva a

$$mg = ma_r \Rightarrow g = \frac{v_{\text{CM}}^2}{R-r}$$

em que usamos a Eq. 10-23 para expressar a aceleração radial (centrípeta) do centro de massa, que, nesse instante, está a uma distância $R - r$ do centro da curva. Substituindo o resultado $v_{\text{CM}}^2 = g(R-r)$ na expressão obtida anteriormente, temos:

$$gh = \frac{7}{10}(g)(R-r) + 2gR$$

o que nos dá $h = 2{,}7R - 0{,}7r \approx 2{,}7R.$ Para $R = 14{,}0$ cm, temos

$$h = (2{,}7)(14{,}0\ \text{cm}) = 37{,}8\ \text{cm}.$$

(b) As considerações de energia usadas no item anterior (agora com $h = 6R$) podem ser aplicadas ao ponto $Q$, o que nos dá

$$g(6R) = \frac{7}{10}v_{\text{CM}}^2 + gR$$

ou $v_{CM}^2 = 50gR/7$. Aplicando a Segunda Lei de Newton ao eixo horizontal no ponto $Q$ e usando o raciocínio anterior quanto à aceleração radial, temos:

$$N = m\frac{v_{\text{CM}}^2}{R-r} = m\frac{50gR}{7(R-r)}$$

que, para $R \gg r$, nos dá

$$N \approx \frac{50mg}{7} = \frac{50(2{,}80\times10^{-4}\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2)}{7} = 1{,}96\times10^{-2}\ \text{N}.$$

(c) A orientação é para o centro da curva.

**13.** O estudo dos objetos que rolam requer uma discussão que vai além dos princípios básicos da rotação analisados no Capítulo 10; isso é feito nas primeiras três seções do Capítulo 11. A força normal exercida sobre um objeto que descreve uma trajetória circular é discutida na Seção 6-6. Adaptando a Eq. 6-19 às forças presentes na parte mais baixa da curva, temos:

$$F_N - Mg = Mv^2/r,$$

o que mostra (já que sabemos que $F_N = 2Mg$) que a velocidade do centro de massa (ao quadrado) é $v^2 = gr$, em que $r$ é o raio da pista (0,48 m). Assim, a velocidade angular da bola (ao quadrado) é

$$\omega^2 = v^2/R^2 = gr/R^2,$$

na qual $R$ é o raio da bola. Substituindo na Eq. 10-5 e explicitando o momento de inércia (em relação ao centro de massa), temos:

$$I_{CM} = 2MhR^2/r - MR^2 = MR^2[2(0{,}36/0{,}48) - 1]\ .$$

Assim, o valor do parâmetro $\beta$ definido no enunciado do problema é

$$\beta = 2(0{,}36/0{,}48) - 1 = 0{,}50.$$

**14.** Para calcular qual é a velocidade $v$ do centro de massa da bola no platô, usamos as equações do movimento balístico do Capítulo 4. Com $v_{oy} = 0$ (e substituindo $h_2$ por $h$), a Eq. 4-22 nos dá um tempo de percurso $t = \sqrt{2h/g}$ . Nesse caso, de acordo com a Eq. 4-21 (elevada ao quadrado, e usando $d$ com alcance horizontal), $v^2 = gd^2/2h$. Para calcular a velocidade $v_p$ no ponto $P$, aplicamos a lei de conservação da energia, ou seja, o fato de que a energia mecânica no platô deve ser igual à energia mecânica no ponto $P$. De acordo com a Eq. 11-5, temos:

$$mv^2/2 + I_{CM}\,\omega^2/2 + mgh_1 = mv_p^{\ 2}/2 + I_{CM}\,\omega_p^{\ 2}/2\ .$$

Usando o item ($f$) da Tabela 10-2, a Eq. 11-2, a expressão $v^2 = gd^2/2h$, obtida anteriormente, temos:

$$gd^2/2h + 10gh_1/7 = v_p^{\ 2}$$

o que nos dá (usando os dados do problema) $v_p = 1{,}34$ m/s.

**15.** (a) Escolhemos o sentido de rotação anti-horário e o sentido de movimento para a direita como positivos. Nesse caso, no momento em que a bola passa a rolar sem deslizar, a Eq. 11-2 nos dá

$$v_{CM} = -R\omega = (-0{,}11\ \text{m})\omega.$$

Essa velocidade é positiva (para a direita) e $\omega$ é negativa (no sentido horário), como mostra a figura.

(b) Chamando de $m$ a massa da bola, a força de atrito a que a bola está sujeita é $-\mu_k mg$ (negativa, já que aponta para a esquerda). Igualando essa força a $ma_{CM}$, temos:

$$a_{CM} = -\mu g = -(0{,}21)(9{,}8\ \text{m/s}^2) = -2{,}1\ \text{m/s}^2$$

em que o sinal negativo indica que a aceleração do centro de massa é para a esquerda, no sentido oposto ao da velocidade da bola, ou seja, a velocidade da bola está diminuindo.

(c) Medido em relação ao centro de massa, o torque exercido pela força de atrito sobre a bola é dado por $\tau = -\mu mgR$ . De acordo com a Eq. 10-45 e usando o momento de inércia da Tabela 10-2(f), temos:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{-\mu mgR}{2mR^2/5} = \frac{-5\mu g}{2R} = \frac{-5(0{,}21)(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{2(0{,}11\ \text{m})} = -47\ \text{rad/s}^2$$

na qual o sinal negativo indica que a aceleração angular é no sentido horário, o mesmo de $\omega$ (ou seja, a velocidade angular está aumentando).

(d) Enquanto a bola está deslizando, a velocidade do centro de massa diminui de $v_{CM,0}$ para $v_{CM}$ de acordo com a Eq. 2-11: $v_{CM} = v_{CM,0} - \mu gt$. Durante esse tempo, a velocidade angular da bola aumenta (em módulo) de zero para $|\omega|$ de acordo com a Eq. 10-12:

$$|\omega| = |\alpha|t = \frac{5\mu gt}{2R} = \frac{v_{CM}}{R}$$

na qual usamos o resultado do item (a) na última igualdade. Como temos duas equações envolvendo $v_{CM}$, podemos eliminar essa variável, o que nos dá

$$t = \frac{2v_{CM,0}}{7\mu g} = \frac{2(8,5 \text{ m/s})}{7(0,21)(9,8 \text{ m/s}^2)} = 1,2 \text{ s}.$$

(e) De acordo com a Eq. 2-15, a distância que a bola percorre enquanto está deslizando é

$$\Delta x = v_{CM,0}t - \frac{1}{2}(\mu g)t^2 = (8,5 \text{ m/s})(1,2 \text{ s}) - \frac{1}{2}(0,21)(9,8 \text{ m/s}^2)(1,2 \text{ s})^2 = 8,6 \text{ m}.$$

(f) A velocidade do centro de massa no instante calculado no item (d) é

$$v_{CM} = v_{CM,0} - \mu gt = 8,5 \text{ m/s} - (0,21)(9,8 \text{ m/s}^2)(1,2 \text{ s}) = 6,1 \text{ m/s}.$$

**16.** Combinando a lei de conservação da energia com a Eq. 11-5 e explicitando o momento de inércia (em relação ao centro de massa), temos:

$$I_{CM} = 2MhR^2/r - MR^2 = MR^2[2g(H - h)/v^2 - 1]\ .$$

Comparando a expressão de $I_{CM}$ com a expressão $I = \beta MR^2$ apresentada no enunciado, obtemos:

$$\beta = 2g(H - h)/v^2 - 1.$$

Para prosseguir, precisamos determinar a velocidade $v$ do centro de massa, o que fazemos usando as equações do movimento balístico do Capítulo 4. Com $v_{oy} = 0$, a Eq. 4-22 nos dá o tempo de percurso como $t = \sqrt{2h/g}$ . Nesse caso, a Eq. 4-21 (elevada ao quadrado, e chamando o alcance de $d$) nos dá $v^2 = gd^2/2h$. Substituindo na expressão de $\beta$, obtemos

$$2g(H - h)/v^2 - 1 = 4h(H - h)/d^2 - 1.$$

Assim, para os dados do problema, obtemos $\beta = 0,25$.

**17. PENSE** O ioiô tem dois tipos de movimento: translação e rotação.

**FORMULE** A aceleração do centro de massa do ioiô é dada pela Eq. 11-13:

$$a_{CM} = -\frac{g}{1 + I_{CM}/MR_0^2}$$

em que $M$ é a massa, $I_{CM}$ é o momento de inércia e $R_0$ é o raio do eixo. O tempo que o ioiô leva para chegar à extremidade da corda pode ser calculado resolvendo a Eq. 2-15, com $y_0 = 0$ e $v_0 = 0$, $y_{CM} = a_{CM}t^2/2$.

**ANALISE** (a) Para $I_{CM} = 950 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$, $M = 120$ g, $R_0 = 0,320$ cm e $g = 980 \text{ cm/s}^2$, temos

$$|a_{CM}| = \frac{980 \text{ cm/s}^2}{1 + (950 \text{ g} \cdot \text{cm}^2)/(120 \text{ g})(0,32 \text{ cm})^2} = 12,5 \text{ cm/s}^2 \approx 13 \text{ cm/s}^2$$

(b) Fazendo $y_{CM} = 120$ cm na equação $y_{CM} = a_{CM}t^2/2$, obtemos

$$t = \sqrt{\frac{2y_{CM}}{a_{CM}}} = \sqrt{\frac{2(120 \text{ cm})}{12,5 \text{ cm/s}^2}} = 4,38 \text{ s} \approx 4,4 \text{ s}$$

(c) A velocidade do centro de massa do ioiô no instante em que o ioiô chega à extremidade da corda é dada pela Eq. 2-11:

$$v_{CM} = a_{CM}t = (12{,}5\ \text{cm/s}^2)(4{,}38\ \text{s}) = 54{,}8\ \text{s}$$

e, portanto, a velocidade linear é aproximadamente 55 cm/s.

(d) A energia cinética de translação do ioiô é

$$K_{\text{trans}} = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 = \frac{1}{2}(0{,}120\ \text{kg})(0{,}548\ \text{m/s})^2 = 1{,}8\times10^{-2}\ \text{J}$$

(e) Como a velocidade angular do ioiô é $\omega = v_{CM}/R_0$, a energia cinética de rotação é

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_{CM}\,\omega^2 = \frac{1}{2}I_{CM}\left(\frac{v_{CM}}{R_0}\right)^2 = \frac{1}{2}(9{,}50\times10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\left(\frac{0{,}548\ \text{m/s}}{3{,}2\times10^{-3}\ \text{m}}\right)^2$$
$$= 1{,}393\ \text{J} \approx 1{,}4\ \text{J}$$

(f) A velocidade angular do ioiô é

$$\omega = \frac{|v_{CM}|}{R_0} = \frac{0{,}548\ \text{m/s}}{3{,}2\times10^{-3}\ \text{m}} = 1{,}7\times10^2\ \text{rad/s} \ = 27\,\text{rev/s}$$

**APRENDA** Quando o ioiô rola para baixo, parte da energia potencial gravitacional é transformada em energia cinética de translação e parte é transformada em energia cinética de rotação. Para mostrar que a energia total é conservada, basta notar que a energia cinética inicial é

$$U_i = Mgy_i = (0{,}120\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2)(1{,}20\ \text{m}) = 1{,}411\ \text{J}$$

que é igual à soma de $K_{\text{trans}}$ (0,018 J) e $K_{\text{rot}}$ (1,393 J).

**18.** (a) O cálculo da aceleração aparece na Seção 11-4; de acordo com a Eq. 11-13,

$$a_{CM} = -\frac{g}{1 + I_{CM}/MR_0^2}$$

na qual o sentido positivo é para cima. Fazendo $I_{CM} = MR^2/2$, sendo $R$ = 0,32 m e $M$ = 116 kg, a massa *total* (levando em conta o fato de que existem dois discos), obtemos

$$a = -\frac{g}{1 + (MR^2/2)/MR_0^2} = \frac{g}{1 + (R/R_0)^2/2}$$

que nos dá $a = -g/51$ quando fazemos $R_0 = R/10 = 0{,}032$ m. Assim, o módulo da aceleração do centro de massa é 0,19 m/s$^2$.

(b) Como foi observado na Seção 11-4, o resultado do item (a) se aplica tanto à descida como à subida do ioiô.

(c) As forças externas a que está submetido o centro de massa do ioiô são a tração da corda (para cima) e a força da gravidade (para baixo). De acordo com a Segunda Lei de Newton,

$$T - Mg = ma \Rightarrow T = M\left(g - \frac{g}{51}\right) = 1{,}1\times10^3\ \text{N}.$$

(d) O resultado do item (c) mostra que a tração era bem menor que o limite de resistência da corda.

(e) Como vimos no cálculo da aceleração, tudo que importava era a razão $R/R_0$ (e, naturalmente, o valor de $g$). Assim, em uma versão ampliada do ioiô, a aceleração seria a mesma.

(f) Como a tração depende da massa do ioiô, em uma versão ampliada a tração da corda seria maior.

**19.** De acordo com a Eq. 3-30, se $\vec{r} = x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}}$, $\vec{r} \times \vec{F}$ é dado por

$$\left(yF_z - zF_y\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(zF_x - xF_z\right)\hat{\mathrm{j}} + \left(xF_y - yF_x\right)\hat{\mathrm{k}}.$$

Se (em unidades do SI) $x = 0$, $y = -4{,}0$, $z = 5{,}0$, $F_x = 0$, $F_y = -2{,}0$ e $F_z = 3{,}0$ (os últimos dois valores são os das forças aplicadas à pulga), a expressão acima nos dá

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (-2{,}0\ \mathrm{N \cdot m})\hat{\mathrm{i}}.$$

**20.** De acordo com a Eq. 3-30, se $\vec{r} = x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}}$, $\vec{r} \times \vec{F}$ é dado por

$$\left(yF_z - zF_y\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(zF_x - xF_z\right)\hat{\mathrm{j}} + \left(xF_y - yF_x\right)\hat{\mathrm{k}}.$$

(a) Se (em unidades do SI) $x = -2{,}0$, $y = 0$, $z = 4{,}0$, $F_x = 6{,}0$, $F_y = 0$ e $F_z = 0$,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (24\,\mathrm{N \cdot m})\hat{\mathrm{j}}.$$

(b) Se (em unidades do SI) $x = -2{,}0$, $y = 0$, $z = 4{,}0$, $F_x = -6{,}0$, $F_y = 0$ e $F_z = 0$,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (-24\,\mathrm{N \cdot m})\hat{\mathrm{j}}.$$

(c) Se (em unidades do SI) $x = -2{,}0$, $y = 0$, $z = 4{,}0$, $F_x = 0{,}0$, $F_y = 0$ e $F_z = 6{,}0$,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (12\ \mathrm{N \cdot m})\hat{\mathrm{j}}.$$

(d) Se (em unidades do SI) $x = -2{,}0$, $y = 0$, $z = 4{,}0$, $F_x = 0{,}0$, $F_y = 0$ e $F_z = -6{,}0$,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (-12\ \mathrm{N \cdot m})\hat{\mathrm{j}}.$$

**21.** De acordo com a Eq. 3-30, se $\vec{r} = x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}}$, $\vec{r} \times \vec{F}$ é dado por

$$\left(yF_z - zF_y\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(zF_x - xF_z\right)\hat{\mathrm{j}} + \left(xF_y - yF_x\right)\hat{\mathrm{k}}.$$

(a) Se (em unidades do SI) $x = 0$, $y = -4{,}0$, $z = 3{,}0$, $F_x = 2{,}0$, $F_y = 0$ e $F_z = 0$, temos:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(6{,}0\hat{\mathrm{j}} + 8{,}0\hat{\mathrm{k}}\right)\mathrm{N \cdot m}.$$

Este vetor tem módulo $\sqrt{(6{,}0\ \mathrm{N \cdot m})^2 + (8{,}0\ \mathrm{N \cdot m})^2} = 10\ \mathrm{N \cdot m}$ e está no plano $yz$. O ângulo do vetor (medido no sentido anti-horário a partir do semieixo $y$ positivo) é $\tan^{-1}\left(8/6\right) = 53°$.

(b) Fazendo $x = 0$, $y = -4{,}0$, $z = 3{,}0$, $F_x = 0$, $F_y = 2{,}0$ e $F_z = 4{,}0$ na expressão acima, obtemos $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (-22\,\mathrm{N \cdot m})\hat{\mathrm{i}}$. Este vetor tem módulo $22\ \mathrm{N \cdot m}$ e aponta no sentido negativo do eixo $x$.

**22.** De acordo com as Eqs. 3-30 e 11-14, temos:

$$\vec{\ } = \vec{r} \times F\ = 4{,}00\,\hat{\mathrm{i}} + (12{,}0 + 2{,}00F_x)\,\hat{\mathrm{j}} + (14{,}0 + 3{,}00F_x)\,\hat{\mathrm{k}}$$

na qual o uso de unidades do SI está implícito. Comparando com a expressão do torque, dada no enunciado do problema, vemos que $F_x$ deve satisfazer duas condições:

$$12{,}0 + 2{,}00F_x = 2{,}00 \text{ e } 14{,}0 + 3{,}00F_x = -1{,}00.$$

A resposta ($F_x = -5{,}00$ N) satisfaz as duas condições.

**23.** Usamos a notação $\vec{r}\,'$ para indicar um vetor que aponta do eixo de rotação para a posição da partícula. De acordo com a Eq. 3-30, se $\vec{r}\,' = x'\,\hat{\mathrm{i}} + y'\,\hat{\mathrm{j}} + z'\,\hat{\mathrm{k}}$, $\vec{r}\,' \times \vec{F}$ é igual a

$$\left(y'F_z - z'F_y\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(z'F_x - x'F_z\right)\hat{\mathrm{j}} + \left(x'F_y - y'F_x\right)\hat{\mathrm{k}}.$$

(a) Nesse caso, $\vec{r}\,' = \vec{r}$. Descartando as plicas na expressão acima, fazemos (com unidades do SI implícitas) $x = 0$, $y = 0{,}5$, $z = -2{,}0$, $F_x = 2{,}0$, $F_y = 0$ e $F_z = -3{,}0$, o que nos dá

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(-1{,}5\hat{\mathrm{i}} - 4{,}0\hat{\mathrm{j}} - 1{,}0\hat{\mathrm{k}}\right)\mathrm{N \cdot m}.$$

(b) Nesse caso, $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_o$, sendo $\vec{r}_o = 2{,}0\hat{\mathrm{i}} - 3{,}0\hat{\mathrm{k}}$. Assim, na expressão acima fazemos $x' = -2{,}0, y' = 0{,}5, z' = 1{,}0, F_x = 2{,}0, F_y = 0$ e $F_z = -3{,}0$. O resultado é

$$\vec{\tau} = \vec{r}\,' \times \vec{F} = \left(-1{,}5\,\hat{\mathrm{i}} - 4{,}0\,\hat{\mathrm{j}} - 1{,}0\hat{\mathrm{k}}\right)\ \mathrm{N \cdot m}.$$

**24.** De acordo com a Eq. 3-30, se $\vec{r}\,' = x'\,\hat{\mathrm{i}} + y'\,\hat{\mathrm{j}} + z'\,\hat{\mathrm{k}}$, $\vec{r}\,' \times \vec{F}$ é igual a

$$\left(y'F_z - z'F_y\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(z'F_x - x'F_z\right)\hat{\mathrm{j}} + \left(x'F_y - y'F_x\right)\hat{\mathrm{k}}.$$

(a) Nesse caso, $\vec{r}\,' = \vec{r}$, na qual $\vec{r} = 3{,}0\hat{\mathrm{i}} - 2{,}0\hat{\mathrm{j}} + 4{,}0\hat{\mathrm{k}}$, e $\vec{F} = \vec{F}_1$. Descartando as plicas na expressão acima, fazemos (com unidades do SI implícitas) $x = 3{,}0$, $y = -2{,}0$, $z = 4{,}0$, $F_x = 3{,}0$, $F_y = -4{,}0$ e $F_z = 5{,}0$. O resultado é

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F}_1 = (6{,}0\hat{\mathrm{i}} - 3{,}0\hat{\mathrm{j}} - 6{,}0\hat{\mathrm{k}})\ \mathrm{N \cdot m}$$

(b) O cálculo é o mesmo do item (a), mas com $\vec{F} = \vec{F}_2$. Fazendo $F_x = -3{,}0$, $F_y = -4{,}0$ e $F_z = -5{,}0$, temos:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_1 = (26\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\hat{\mathrm{j}} - 18\hat{\mathrm{k}})\ \mathrm{N \cdot m}$$

(c) Podemos proceder de duas formas: somar (vetorialmente) as respostas dos itens (a) e (b) ou somar as duas forças [o que, de qualquer forma, terá que ser feito no item (d)] e calcular o valor de $\vec{\tau} = \vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)$. O resultado é o mesmo:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) = \left(32\,\hat{\mathrm{i}} - 24\,\hat{\mathrm{k}}\right)\ \mathrm{N \cdot m}.$$

(d) Nesse caso, $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_o$, em que $\vec{r}_o = 3{,}0\hat{\mathrm{i}} + 2{,}0\hat{\mathrm{j}} + 4{,}0\hat{\mathrm{k}}$. Assim, na expressão acima temos que fazer $x' = 0, y' = -4{,}0, z' = 0$, $F_x = 3{,}0 - 3{,}0 = 0$, $F_y = -4{,}0 - 4{,}0 = -8{,}0$ e $F_z = 5{,}0 - 5{,}0 = 0$. O resultado é o seguinte:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\,' \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) = 0.$$

**25. PENSE** O torque que age sobre a partícula é igual ao produto vetorial de $\vec{r}$ por $\vec{F}$.

**FORMULE** De acordo com a Eq. 3-27, se $\vec{r} = x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}}$ e $\vec{F} = F_x\hat{\mathrm{i}} + F_y\hat{\mathrm{j}} + F_z\hat{\mathrm{k}}$, a expressão geral para o torque é

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(yF_z - zF_y\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(zF_x - xF_z\right)\hat{\mathrm{j}} + \left(xF_y - yF_x\right)\hat{\mathrm{k}}$$

**ANALISE** (a) Para $\vec{r} = (3{,}0\text{ m})\hat{\text{i}} + (4{,}0\text{ m})\hat{\text{j}}$ e $\vec{F} = (-8{,}0\text{ N})\hat{\text{i}} + (6{,}0\text{ N})\hat{\text{j}}$, temos

$$\vec{\tau} = \left[(3{,}0\text{m})(6{,}0\text{N}) - (4{,}0\text{m})(-8{,}0\text{N})\right]\hat{\text{k}} = (50\text{N}\cdot\text{m})\,\hat{\text{k}}$$

(b) Para determinar o ângulo $\phi$ entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$, podemos usar a Eq. 3-24: $|\vec{r}\times\vec{F}| = rF\,\text{sen}\,\phi$. Como $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 5{,}0\text{ m}$ e $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 10\text{ N}$.

$$rF = (5{,}0\text{ m})(10\text{ N}) = 50\text{ N}\cdot\text{m}$$

que é igual ao módulo do vetor calculado no item (a). Isso significa que sen $\phi$ = 1 e $\phi$ = 90°.

**APRENDA** O resultado do item (b), $\phi$ = 90°, significa que $\vec{r}$ e $\vec{F}$ são mutuamente perpendiculares. Uma forma de saber se o resultado está correto é verificar se o produto escalar é igual a zero, o que realmente acontece:

$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\vec{F} &= [(3{,}0\text{ m})\hat{\text{i}} + (4{,}0\text{ m})\hat{\text{j}}]\cdot[(-8{,}0\text{ N})\hat{\text{i}} + (6{,}0\text{ N})\hat{\text{j}}]\\ &= (3{,}0\text{ m})(-8{,}0\text{ N}) + (4{,}0\text{ m})(6{,}0\text{ N}) = 0\end{aligned}$$

**26.** Note que a componente de $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{r}$ tem módulo $v$ sen $\theta_2$, com $\theta_2$= 30°.

(a) A Eq. 11-20 nos dá

$$\ell = rmv_\perp = (3{,}0\text{ m})(2{,}0\text{ kg})(4{,}0\text{ m/s})\,\text{sen}\,30° = 12\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

(b) Usando a regra da mão direita para produtos vetoriais, vemos que $\vec{r}\times\vec{p}$ aponta para fora do papel, ou seja, no sentido positivo do eixo $z$.

(c) De acordo com a Eq. 10-38,

$$\tau = rF\text{ sen }\theta_2 = (3{,}0\text{ m})(2{,}0\text{ N})\text{ sen }30° = 3{,}0\text{N}\cdot\text{m}.$$

(d) Usando a regra da mão direita para produtos vetoriais, vemos que $\vec{r}\times\vec{F}$ também aponta para fora do papel, no sentido positivo do eixo $z$.

**27. PENSE** Podemos usar o produto vetorial $m\vec{r}\times\vec{v}$ para calcular o momento angular $\vec{\ell}$ do objeto e o produto vetorial $\vec{r}\times\vec{F}$ para calcular o torque $\vec{\tau}$.

**FORMULE** Sejam $\vec{r} = x\hat{\text{i}} + y\hat{\text{j}} + z\hat{\text{k}}$ o vetor posição, $\vec{v} = v_x\hat{\text{i}} + v_y\hat{\text{j}} + v_z\hat{\text{k}}$ o vetor velocidade, e $m$ a massa do objeto. De acordo com a Eq. 3-27, o produto vetorial de $\vec{r}$ e $\vec{v}$ é

$$\vec{r}\times\vec{v} = (yv_z - zv_y)\hat{\text{i}} + (zv_x - xv_z)\hat{\text{j}} + (xv_y - yv_x)\hat{\text{k}}$$

Como apenas as componentes $x$ e $z$ dos vetores posição e velocidade são diferentes de zero (ou seja, $y$ = 0 e $v_y$ = 0), a expressão anterior se torna $\vec{r}\times\vec{v} = (-xv_z + zv_z)\hat{\text{j}}$. Quanto ao torque, escrevendo o vetor força na forma $\vec{F} = F_x\hat{\text{i}} + F_y\hat{\text{j}} + F_z\hat{\text{k}}$, obtemos

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = (yF_z - zF_y)\hat{\text{i}} + (zF_x - xF_z)\hat{\text{j}} + (xF_y - yF_x)\hat{\text{k}}$$

**ANALISE** (a) Para $\vec{r} = (2{,}0\text{ m})\hat{\text{i}} - (2{,}0\text{ m})\hat{\text{k}}$ e $\vec{v} = (-5{,}0\text{m/s})\hat{\text{i}} + (5{,}0\text{ m/s})\hat{\text{k}}$, o momento angular do objeto é

$$\vec{\ell} = m(-xv_z + zv_x)\hat{\text{j}} = (0{,}25\text{ kg})\big(-(2{,}0\text{ m})(5{,}0\text{ m/s}) + (-2{,}0\text{ m})(-5{,}0\text{ m/s})\big)\hat{\text{j}} = 0$$

(b) Para $x$ = 2,0 m, $y$ = 0, $z$ = –2,0 m, $F_x$ = 0, $F_y$ = 4,0 N e $F_z$ = 0, o torque que age sobre o objeto é

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (8{,}0 \text{ N}\cdot\text{m})\hat{\text{i}} + (8{,}0 \text{ N}\cdot\text{m})\hat{\text{k}}$$

**APRENDA** O fato de que $\vec{\ell} = 0$ significa que $\vec{r}$ e $\vec{v}$ são paralelos $(\vec{r} \times \vec{v} = 0)$. De acordo com a equação $\tau = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = rF \operatorname{sen} \phi$, temos

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{\tau}{rF} = \frac{8\sqrt{2}\text{ N}\cdot\text{m}}{(2\sqrt{2}\text{ m})(4{,}0\text{ N})} = 1 \;\Rightarrow\; \phi = 90°$$

Portanto, $\vec{r}$ e $\vec{F}$ são mutuamente perpendiculares.

**28.** De acordo com a Eq. 3-30, se $\vec{r}\,' = x'\hat{\text{i}} + y'\hat{\text{j}} + z'\hat{\text{k}}$, o produto vetorial de $\vec{r}\,'$ e $\vec{v}$ é

$$\left(y'v_z - z'v_y\right)\hat{\text{i}} + \left(z'v_x - x'v_z\right)\hat{\text{j}} + \left(x'v_y - y'v_x\right)\hat{\text{k}}.$$

(a) Nesse caso, $\vec{r}\,' = \vec{r}$, sendo $\vec{r} = 3{,}0\hat{\text{i}} - 4{,}0\hat{\text{j}}$. Assim, descartando as plicas na expressão acima e fazendo (com unidades do SI implícitas) $x = 3{,}0$, $y = -4{,}0$, $z = 0$, $v_x = 30$, $v_y = 60$, $v_z = 0$ e $m = 2{,}0$ kg, temos:

$$\vec{\ell} = m\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = (6{,}0 \times 10^2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\hat{\text{k}}.$$

(b) Nesse caso, $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_o$, sendo $\vec{r}_o = -2{,}0\hat{\text{i}} - 2{,}0\hat{\text{j}}$. Assim, fazendo

$$x' = 5{,}0,\; y' = -2{,}0,\; z' = 0,\; v_x = 30,\; v_y = 60 \text{ e } v_z = 0,$$

temos:

$$\vec{\ell} = m\left(\vec{r}\,' \times \vec{v}\right) = (7{,}2 \times 10^2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\hat{\text{k}}.$$

**29.** No caso da partícula de 3,1 kg, a Eq. 11-21 nos dá

$$\ell_1 = r_{\perp 1} m v_1 = (2{,}8\text{ m})(3{,}1\text{ kg})(3{,}6\text{ m/s}) = 31{,}2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

Usando a regra da mão direita para produtos vetoriais, constatamos que o vetor $\left(\vec{r}_1 \times \vec{p}_1\right)$ aponta para fora do papel, ou seja, no sentido positivo do eixo $z$, perpendicular ao plano da Fig. 11-41.
No caso da partícula de 6,5 kg, temos:

$$\ell_2 = r_{\perp 2} m v_2 = (1{,}5\text{ m})(6{,}5\text{ kg})(2{,}2\text{ m/s}) = 21{,}4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

Usando novamente a regra da mão direita, constatamos que o vetor $\left(\vec{r}_2 \times \vec{p}_2\right)$ aponta para dentro do papel, ou seja, no sentido negativo do eixo $z$.

(a) Como os dois vetores momento angular têm a mesma direção e sentidos opostos, a soma vetorial é a *diferença* dos módulos: $L = \ell_1 - \ell_2 = 9{,}8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

(b) O momento angular resultante aponta no sentido positivo do eixo $z$.

**30.** (a) O vetor aceleração é obtido dividindo o vetor força pela massa (uma grandeza escalar):

$$\vec{a} = \vec{F}/m = (3{,}00 \text{ m/s}^2)\hat{\text{i}} - (4{,}00 \text{ m/s}^2)\hat{\text{j}} + (2{,}00 \text{ m/s}^2)\hat{\text{k}}.$$

(b) De acordo com a Eq. 11-18, temos:

$$\vec{L} = (42{,}0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\hat{\text{i}} + (24{,}0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\hat{\text{j}} + (60{,}0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\hat{\text{k}}.$$

(c) O torque é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (-8{,}00\ \text{N}\cdot\text{m})\,\hat{\text{i}} - (26{,}0\ \text{N}\cdot\text{m})\,\hat{\text{j}} - (40{,}0\ \text{N}\cdot\text{m})\,\hat{\text{k}}.$$

(d) De acordo com o teorema de Pitágoras, o módulo do vetor velocidade é 7,35 m/s e o módulo da força é 10,8 N. O produto escalar dos dois vetores é $\vec{v}\cdot\vec{F} = -48$ (em unidades do SI). Assim, a Eq. 3-20 nos dá

$$\theta = \cos^{-1}[-48{,}0/(7{,}35 \times 10{,}8)] = 127°.$$

**31.** (a) Como a velocidade é (momentaneamente) nula no instante em que a bola atinge a altura máxima, o momento angular nesse instante é zero.

(b) Com a convenção (usada em vários pontos deste livro) de que o sentido horário está associado ao sinal negativo, $L = -r_\perp m v$, sendo $r_\perp = 2{,}00$ m, $m = 0{,}400$ kg e $v$ pode ser calculado a partir das equações de queda livre (como no Capítulo 2). Especificamente, $y_{máx}$ pode ser calculado fazendo a velocidade igual a zero na Eq. 2-16; o resultado é $y_{máx} = v_o^2/2g$, em que $v_o = 40{,}0$ m/s. Nesse caso, com $y = 1/2y_{máx}$, a Eq. 2-16 nos dá $v = v_o/\sqrt{2}$. Substituindo $v$ por esse valor, obtemos $L = -22{,}6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

(c) Como foi mencionado no item anterior, usamos o sinal negativo para o torque, o que nos dá $\tau = -r_\perp F$, em que $F = mg$. Assim, $\tau = -7{,}84\ \text{N}\cdot\text{m}$.

(d) Devido ao modo como $r_\perp$ é definido, a altura da bola é irrelevante. Assim, a resposta é a mesma do item (c), $\tau = -7{,}84\ \text{N}\cdot\text{m}$.

**32.** A taxa de variação do momento angular é

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = (2{,}0\ \text{N}\cdot\text{m})\hat{\text{i}} - (4{,}0\ \text{N}\cdot\text{m})\hat{\text{j}}.$$

Isso significa que o módulo do vetor $d\vec{\ell}/dt$ é $\sqrt{(2{,}0\ \text{N}\cdot\text{m})^2 + (-4{,}0\ \text{N}\cdot\text{m})^2} = 4{,}5\ \text{N}\cdot\text{m}$ e que o vetor faz um ângulo $\theta$ (no plano $xy$ ou em um plano paralelo ao plano $xy$) com o semieixo $x$ positivo

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-4{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}}{2{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}}\right) = -63°,$$

na qual o sinal negativo indica que o ângulo é medido no sentido horário quando visto "de cima" (por uma pessoa situada no semieixo $z$ positivo).

**33. PENSE** Podemos usar o produto vetorial $m\vec{r}\times\vec{v}$ para calcular o momento angular $\vec{\ell}$ do objeto e o produto vetorial $\vec{r}\times\vec{F}$ para calcular o torque $\vec{\tau}$.

**FORMULE** Sejam $\vec{r} = x\hat{\text{i}} + y\hat{\text{j}} + z\hat{\text{k}}$ o vetor posição, $\vec{v} = v_x\hat{\text{i}} + v_y\hat{\text{j}} + v_z\hat{\text{k}}$ o vetor velocidade e $m$ a massa do objeto. De acordo com a Eq. 3-27, o produto vetorial de $\vec{r}$ e $\vec{v}$ é

$$\vec{r}\times\vec{v} = (yv_z - zv_y)\hat{\text{i}} + (zv_x - xv_z)\hat{\text{j}} + (xv_y - yv_x)\hat{\text{k}}$$

Escrevendo o vetor força na forma $\vec{F} = F_x\hat{\text{i}} + F_y\hat{\text{j}} + F_z\hat{\text{k}}$, obtemos

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = (yF_z - zF_y)\hat{\text{i}} + (zF_x - xF_z)\hat{\text{j}} + (xF_y - yF_x)\hat{\text{k}}$$

**ANALISE** (a) Substituindo os valores conhecidos nessa expressão, obtemos

$$\vec{\ell} = (3{,}0\ \text{kg})\,[(3{,}0\ \text{m})(-6{,}0\ \text{m/s}) - (8{,}0\ \text{m})(5{,}0\ \text{m/s})]\hat{\text{k}} = (-174\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\hat{\text{k}}$$

(b) Como $\vec{r} = x\hat{\text{i}} + y\hat{\text{j}}$ e $\vec{F} = F_x\hat{\text{i}}$, o torque é

$$\vec{\tau} = \left(x\hat{\text{i}} + y\hat{\text{j}}\right) \times \left(F_x\hat{\text{i}}\right) = -yF_x\hat{\text{k}}$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$\vec{\tau} = -(8{,}0\,\text{m})(-7{,}0\,\text{N})\,\hat{\text{k}} = (56\,\text{N}\cdot\text{m})\hat{\text{k}}$$

(c) Como, de acordo com a segunda lei de Newton para rotações, $\vec{\tau} = d\vec{\ell}/dt$, a taxa de variação do momento angular é 56 kg· m²/s², no sentido positivo do eixo $z$.

**APRENDA** Como são obtidos a partir de produtos vetoriais, o momento angular $\vec{\ell}$ é sempre paralelo a $\vec{r}$ e a $\vec{v}$ e o torque $\vec{\tau}$ é sempre perpendicular a $\vec{r}$ e a $\vec{F}$.

**34.** Usamos um sistema de coordenadas dextrogiro, com a orientação do vetor unitário $\hat{\text{k}}$ compatível com um sentido positivo para as rotações no sentido anti-horário (e com a regra da mão direita). Nesse caso, todos os momentos angulares do problema estão orientados no sentido contrário ao do vetor $\hat{\text{k}}$; no item (b), por exemplo, $\vec{\ell} = -4{,}0t^2\hat{\text{k}}$ em unidades do SI. Para calcular o torque, usamos a Eq. 11-23.

(a) Como o momento angular é constante, a derivada em relação ao tempo é nula e, portanto, o torque é nulo.

(b) O torque é calculado derivando o momento angular em relação ao tempo:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \left(-4{,}0\hat{\text{k}}\right)\frac{d(t^2)}{dt} = (-8{,}0t\ \text{N}\cdot\text{m})\hat{\text{k}}$$

Este vetor aponta no sentido contrário ao do vetor $\hat{\text{k}}$ (aumentando a velocidade angular dos objetos que giram no sentido horário) para $t > 0$ e no sentido do vetor $\hat{\text{k}}$ para $t < 0$.

(c) Como $\vec{\ell} = (-4{,}0\sqrt{t})\hat{\text{k}}$ em unidades do SI, o torque é

$$\vec{\tau} = \left(-4{,}0\hat{\text{k}}\right)\frac{d(\sqrt{t})}{dt} = \left(-4{,}0\hat{\text{k}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) = \left(-\frac{2{,}0}{\sqrt{t}}\hat{\text{k}}\right)\text{N}\cdot\text{m}$$

Este vetor aponta no sentido contrário ao do vetor $\hat{\text{k}}$ (aumentando a velocidade angular dos objetos que giram no sentido horário) para $t > 0$ e não é definido para $t < 0$.

(d) Finalmente, temos

$$\vec{\tau} = \left(-4{,}0\hat{\text{k}}\right)\frac{d(t^{-2})}{dt} = \left(-4{,}0\hat{\text{k}}\right)\left(\frac{-2}{t^3}\right) = \left(\frac{8{,}0}{t^3}\hat{\text{k}}\right)\text{N}\cdot\text{m}.$$

Este vetor aponta no sentido do vetor $\hat{\text{k}}$ (diminuindo a velocidade angular dos objetos que giram no sentido horário) para $t > 0$ e no sentido contrário ao do vetor $\hat{\text{k}}$ para t < 0.

**35.** (a) Notamos que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 8{,}0t\ \hat{\text{i}} - (2{,}0 + 12t)\,\hat{\text{j}}$$

com unidades do SI implícitas. De acordo com as Eqs. 3-30 e 11-18, o momento angular da partícula é $8t^2\hat{\text{k}}$. De acordo com a Eq. 11-23, $\vec{\tau} = (48t\ \hat{\text{k}})\ \text{N}\cdot\text{m}$.

(b) Como o momento angular calculado no item (a) é proporcional a $t^2$, o módulo do momento parcial da partícula aumenta com o passar do tempo.

**36.** Podemos comparar os movimentos dos discos calculando, com o auxílio da Eq. 10-18, a velocidade linear de cada disco. O fato de que a velocidade linear da borda do disco $A$ é igual à velocidade linear da borda do disco $C$ significa que $\omega_A = 2\omega_C$. O fato de que a velocidade linear do cubo do disco $A$ é igual à velocidade linear da borda do disco $B$ significa que $\omega_A = \omega_B/2$. Assim, $\omega_B = 4\omega_C$. A razão dos momentos depende da velocidade angular dos discos, mas também depende do momento de inércia (veja o item (c) da Tabela 11-2), que, por sua vez, depende da massa dos discos. Se $h$ é a espessura e $\rho$ é a massa específica de um disco, a massa é $\rho\pi R^2 h$. Assim,

$$\frac{L_C}{L_B} = \frac{(1/2)\rho\pi R_C^2 h\omega_C}{(1/2)\rho\pi R_B^2 h\omega_B} = 1024.$$

**37.** (a) Cada partícula contribui com $mr^2$ para o momento de inércia, em que $r$ é a distância a que a partícula se encontra da origem $O$. O momento de inércia total é

$$\begin{aligned} I &= m(3d)^2 + m(2d)^2 + m(d)^2 = 14md^2 = 14(2,3\times10^{-2}\,\text{kg})(0,12\text{ m})^2 \\ &= 4,6\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2. \end{aligned}$$

(b) O momento angular da partícula do meio é dado por $L_m = I_m\omega$, onde $I_m = 4md^2$ é o momento de inércia da partícula. Assim,

$$L_m = 4md^2\omega = 4(2,3\times10^{-2}\,\text{kg})(0,12\text{ m})^2(0,85\text{ rad/s}) = 1,1\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

(c) O momento angular total é

$$I\omega = 14md^2\omega = 14(2,3\times10^{-2}\,\text{kg})(0,12\text{ m})^2(0,85\text{ rad/s}) = 3,9\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

**38.** (a) A Eq. 10-34 nos dá $a = \tau/I$ e, de acordo com a Eq. 10-12, $\omega = \alpha t = \tau t/I$. Assim, o momento angular no instante $t = 0,033$ s é

$$I\omega = \tau\, t = (16\,\text{N}\cdot\text{m})(0,033\,\text{s}) = 0,53\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

no que é, na verdade, uma versão angular do teorema do impulso e do momento.

(b) Temos:

$$\omega = \frac{\tau\, t}{I} = \frac{(16\text{ N}\cdot\text{m})(0,033\text{ s})}{1,2\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} = 440\,\text{rad/s}$$

que podemos converter da seguinte forma:

$$\omega = (440\text{ rad/s})(60\text{ s/min})(1\text{ rev}/2\pi\text{ rad}) \approx 4,2\times10^3\text{ rev/min}.$$

**39. PENSE** No caso de uma aceleração angular constante, podemos analisar o movimento do volante usando as equações da Tabela 10-1.

**FORMULE** Como o torque é igual à taxa de variação do momento angular, o torque médio em um intervalo de tempo $\Delta t$ é dado por $\tau_{\text{méd}} = (L_f - L_i)/\Delta t$, em que $L_i$ é o momento angular inicial e $L_f$ é o momento angular final. No caso de uma aceleração angular constante, o ângulo de rotação é dado por $\theta = \omega_0 t + \alpha t^2/2$, e o trabalho realizado sobre o volante é dado por $W = \tau\theta$.

**ANALISE** (a) Substituindo os valores dados, obtemos

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{L_f - L_i}{\Delta t} = \frac{(0,800\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}) - (3,00\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})}{1.50\text{ s}} = -1,47\text{ N}\cdot\text{m}$$

ou $|\tau_{méd}|$ = 1,47 N · m. O sinal negativo indica que o torque tem o sentido contrário ao do momento angular inicial, que foi tomado implicitamente como positivo.

(b) Se a aceleração angular é constante, o torque também é constante e $\alpha = \tau/I$. Além disso, como $\omega_0 = L_i/I$, temos

$$\theta = \frac{L_i t + \tau t^2/2}{I} = \frac{(3{,}00\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})(1{,}50\ \text{s}) + (-1{,}467\,\text{N}\cdot\text{m})(1{,}50\ \text{s})^2/2}{0{,}140\,\text{kg}\cdot\text{m}^2} = 20{,}4\,\text{rad}$$

(c) Usando os valores de $\tau$ e de $\theta$ calculados nos itens (a) e (b), obtemos

$$W = \tau\theta = (-1{,}47\,\text{N}\cdot\text{m})(20{,}4\,\text{rad}) = -29{,}9\ \text{J}$$

(d) A potência média do volante é igual ao trabalho realizado pelo volante (o negativo do trabalho realizado sobre o volante) dividido pelo intervalo de tempo:

$$P_{méd} = -\frac{W}{\Delta t} = -\frac{-29{,}9\ \text{J}}{1{,}50\,\text{s}} = 19{,}9\,\text{W}$$

**APRENDA** Uma forma alternativa de calcular o trabalho realizado sobre o volante consiste em usar o teorema do trabalho e energia cinética:

$$W = \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}I(\omega_f^2 - \omega_i^2) = \frac{1}{2}I\left[\left(\frac{L_f}{I}\right)^2 - \left(\frac{L_i}{I}\right)^2\right] = \frac{L_f^2 - L_i^2}{2I}$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$W = \frac{L_f^2 - L_i^2}{2I} = \frac{(0{,}800\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})^2 - (3{,}00\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})^2}{2(0{,}140\,\text{kg}\cdot\text{m}^2)} = -29{,}9\ \text{J}$$

que é igual ao valor calculado no item (c).

**40.** Como o torque é igual à derivada do momento angular em relação ao tempo, a variação do momento angular é igual à integral do torque em relação ao tempo. Para $\tau = (5{,}00 + 2{,}00t)\ \text{N}\cdot\text{m}$, o momento angular (em $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$) é dado por

$$L(t) = \int \tau\, dt = \int (5{,}00 + 2{,}00t)dt = L_0 + 5{,}00t + 1{,}00t^2.$$

Como $L = 5{,}00\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ para $t = 1{,}00\ \text{s}$, a constante de integração é $L_0 = -1$. Assim, a expressão completa do momento angular é

$$L(t) = -1 + 5{,}00t + 1{,}00t^2.$$

Para $t = 3{,}00\ \text{s}$, temos $L(t = 3{,}00) = -1 + 5{,}00(3{,}00) + 1{,}00(3{,}00)^2 = 23{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

**41.** (a) No caso do aro, usamos a Tabela 10-2(h) e o teorema dos eixos paralelos para obter

$$I_1 = I_{CM} + mh^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

No caso das barras, o momento de inércia da barra que coincide com o eixo de rotação é desprezível (por se tratar de uma barra fina) e o momento de inércia da barra paralela ao eixo de rotação, de acordo com o teorema dos eixos paralelos, é dado por

$$I_2 = I_{CM} + mR^2 = 0 + mR^2 = mR^2$$

Por simetria, as duas barras perpendiculares ao eixo de rotação têm o mesmo momento de inércia ($I_3 = I_4$). Podemos calcular o valor de $I_3$ usando a Tabela 10-2(e) e o teorema dos eixos paralelos:

$$I_3 = I_{\text{CM}} = MR^2 = \frac{1}{12}mR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mR^2.$$

Assim, o momento de inércia total é

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{19}{6}mR^2 = 1,6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

(b) A velocidade angular é constante:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{2,5} = 2,5\ \text{rad/s}.$$

Assim, $L = I_{total}\omega = 4,0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

**42.** Este problema pode ser resolvido integrando a Eq. 11-29 em relação ao tempo, tendo em mente que $\vec{L}_i = 0$ e que a integração pode ser vista como a soma das áreas sob os segmentos de reta, com as áreas sob o eixo dos tempos contribuindo negativamente. Também é útil saber que a área de um triângulo é (base)(altura)/2.

(a) $\vec{L} = 24\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

(b) $\vec{L} = 1,5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

**43.** Supomos que, a partir do momento em que as patinadoras agarram a vara, elas não mudam mais a postura, de modo que o sistema pode ser analisado como um corpo rígido simétrico, com o centro de massa na metade da distância entre as duas patinadoras.

(a) O momento linear total é zero (as patinadoras têm massas iguais e velocidades de mesmo módulo e sentidos opostos). Assim, o centro de massa do sistema (o centro da vara) permanece fixo e as patinadoras executam um movimento circular (de raio $r$ = 1,5 m) em torno do centro de massa.

(b) De acordo com a Eq. 10-18, a velocidade angular das patinadoras (no sentido anti-horário, como mostra a Fig. 11-47) é

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1,4\ \text{m/s}}{1,5\ \text{m}} = 0,93\ \text{rad/s}.$$

(c) Como o momento de inércia é igual ao de duas partículas em movimento circular, temos, de acordo com a Eq. 10-33,

$$I = \sum mr^2 = 2(50\ \text{kg})(1,5\ \text{m})^2 = 225\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

Assim, a Eq. 10-34 nos dá

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(225\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(0,93\,\text{rad/s})^2 = 98\ \text{J}.$$

(d) O momento angular é conservado neste processo. Chamando a velocidade angular calculada no item (b) de $\omega_i$ e o momento de inércia calculado no item (c) de $I_i$, temos:

$$I_i\omega_i = (225\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(0,93\,\text{rad/s}) = I_f\omega_f.$$

Como o momento de inércia final é $\sum mr_f^2$ , em que $r_f$ = 0,5 m, $I_f = 25\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Usando este valor, a expressão acima nos dá $\omega_f = 8,4$ rad/s.

(e) Temos:

$$K_f = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2}\left(25\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\right)\left(8,4\ \text{rad/s}\right)^2 = 8,8\times 10^2\ \text{J}.$$

(f) Podemos explicar o grande aumento da energia cinética [item (e) menos item (c)] notando que as patinadoras executam um trabalho considerável (convertendo sua energia interna em energia mecânica) para se aproximar uma da outra, "lutando" contra o que parecem ser "forças centrífugas" que tendem a separá-las.

**44.** Para que o leitor não se confunda com os sinais positivos e negativos, vamos escrever a velocidade angular *escalar* do disco como $|\omega|$ e reservar o símbolo $\omega$ para a velocidade escalar (que, por convenção, consideramos positiva se a rotação é no sentido anti-horário e negativa se a rotação é no sentido horário). Quando dizemos que a barata "parou", isso significa que ela está em repouso em relação ao disco, não em relação ao solo.

(a) De acordo com a lei de conservação do momento angular, temos:

$$mvR + I\omega_0 = \left(mR^2 + I\right)\omega_f$$

que podemos escrever (de acordo com nossa discussão a respeito de velocidade angular escalar e velocidade angular) na forma

$$mvR - I|\omega_0| = -(mR^2 + I)|\omega_f|.$$

Explicitando a velocidade angular final do sistema, temos:

$$\begin{aligned} |\omega_f| &= \frac{mvR - I|\omega_0|}{mR^2 + I} = \frac{(0{,}17\ \text{kg})(2{,}0\ \text{m/s})(0{,}15\ \text{m}) - (5{,}0\times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(2{,}8\ \text{rad/s})}{(5{,}0\times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2) + (0{,}17\ \text{kg})(0{,}15\ \text{m})^2} \\ &= 4{,}2\ \text{rad/s}. \end{aligned}$$

(b) Não, $K_f \neq K_i$ e podemos calcular a diferença:

$$K_i - K_f = \frac{mI}{2}\frac{v^2 + \omega_0^2 R^2 + 2Rv|\omega_0|}{mR^2 + I}$$

que é necessariamente positiva. Assim, parte da energia cinética inicial é "perdida", ou seja, transferida para outra forma de energia. A culpada é a barata, que, ao parar, tem que fazer um certo esforço para "internalizar" essa energia.

**45. PENSE** Como não existe uma força externa agindo sobre o homem, os tijolos e a plataforma, o momento angular total do sistema é conservado.

**FORMULE** De acordo com a lei de conservação do momento angular, se $I_i$ é o momento de inércia inicial do sistema e $I_f$ é momento de inércia final, devemos ter $I_i\omega_i = I_f\omega_f$, em que $\omega_i$ é a velocidade angular inicial e $\omega_f$ é a velocidade angular final. A energia cinética de rotação é dada por $K = I\omega^2/2$.

**ANALISE** (a) A velocidade angular final do sistema é

$$\omega_f = \left(\frac{I_i}{I_f}\right)\omega_i = \left(\frac{6{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}{2{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}\right)(1{,}2\ \text{rev/s}) = 3{,}6\ \text{rev/s}$$

(b) Como a energia cinética inicial é $K_i = I_i\omega_i^2/2$ e a energia cinética final é $K_f = I_f\omega_f^2/2$, temos

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{I_f\omega_f^2/2}{I_i\omega_i^2/2} = \frac{\left(2{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\right)\left(3{,}6\ \text{rev/s}\right)^2/2}{\left(6{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\right)\left(1{,}2\ \text{rev/s}\right)^2/2} = 3{,}0$$

(c) A energia cinética adicional é igual ao trabalho realizado pelo homem para aproximar os tijolos do corpo. A energia necessária para realizar esse trabalho é igual à diferença entre a energia interna do homem antes e depois da realização do trabalho.

**APRENDA** Como foi dito na resposta do item (c), o trabalho realizado pelo homem é igual à variação de energia cinética:

$$W = K_f - K_i = 3K_i - K_i = 2K_i = I_i\omega_i^2 = (6{,}0\,\text{kg}\cdot\text{m}^2)(2\pi\cdot 1{,}2\,\text{rad/s})^2 = 341\text{ J}$$

**46.** De acordo com a lei de conservação do momento angular, $I_i\omega_i = I_f\omega_f$ e, portanto,

$$\frac{\omega_f}{\omega_i} = \frac{I_i}{I_f} = 3$$

e

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{I_f\omega_f^2/2}{I_i\omega_i^2/2} = \frac{I_f}{I_i}\left(\frac{\omega_f}{\omega_i}\right)^2 = 3.$$

**47. PENSE** Como não existe um torque externo agindo sobre o sistema formado pelo trem e a roda, o momento angular total do sistema, que inicialmente era zero, deve continuar igual a zero.

**FORMULE** Seja $I = MR^2$ o momento de inércia da roda (que vamos tratar como um aro). O momento angular da roda é

$$\vec{L}_{\text{roda}} = (I\omega)\hat{\text{k}} = -MR^2|\omega|\hat{\text{k}}$$

em que o vetor unitário $\hat{\text{k}}$ aponta *para cima* na Fig. 11-48 e o sinal negativo resulta do fato de que estamos supondo que a roda, vista de baixo, se move no sentido horário. A velocidade linear de um ponto da roda é dada por $-|\omega|R$, e a velocidade do trem (que, visto de baixo, está se movendo no sentido anti-horário na Fig. 11-48 com velocidade $v'$ em relação a um observador externo) é, portanto, $v' = v - |\omega|R$, em que $v$ é a velocidade do trem em relação aos trilhos. O momento angular do trem é, portanto, $\vec{L}_{\text{trem}} = m(v - |\omega|R)R\hat{\text{k}}$. De acordo com a lei de conservação do momento angular,

$$0 = \vec{L}_{\text{roda}} + \vec{L}_{\text{trem}} = -MR^2|\omega|\hat{\text{k}} + m\left(v - |\omega|R\right)R\hat{\text{k}}$$

que nos permite obter o valor de $|\omega|$.

**ANALISE** Explicitando o módulo da velocidade angular na equação anterior, obtemos

$$|\omega| = \frac{mvR}{(M+m)R^2} = \frac{v}{(M/m+1)R} = \frac{0{,}15\text{ m/s}}{(1{,}1+1)(0{,}43\text{ m})} = 0{,}17\text{ rad/s}$$

**APRENDA** De acordo com a lei de conservação do momento angular, $\vec{L}_{\text{roda}} = -\vec{L}_{\text{trem}}$, o que significa que o trem e a roda giram em sentidos opostos.

**48.** Combinando a Eq. 11-31 com a lei de conservação do momento angular, $\vec{L}_i = \vec{L}_f$ (Eq. 11-33), vemos que a razão dos momentos de inércia é inversamente proporcional à razão das velocidades angulares: $I_f/I_i = 6/5 = 1{,}0 + 0{,}2$. Interpretamos o "1,0" como a razão entre o momento de inércia do disco e o próprio momento de inércia do disco (que, naturalmente, é igual à unidade) e o "0,2" como a razão entre o momento de inércia da barata e o momento de inércia do disco. Assim, a resposta é 0,20.

**49.** (a) De acordo com a lei de conservação do momento angular,

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega.$$

A velocidade angular após o acoplamento é, portanto,

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2} = \frac{(3{,}3\,\text{kg}\cdot\text{m}^2)(450\text{ rev/min}) + (6{,}6\,\text{kg}\cdot\text{m}^2)(900\text{ rev/min})}{3{,}3\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 + 6{,}6\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}$$
$$= 750\text{ rev/min}.$$

(b) Nesse caso, temos:

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2} = \frac{\left(3{,}3\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\right)\left(450\ \text{rev/min}\right) + \left(6{,}6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\right)\left(-900\ \text{rev/min}\right)}{3{,}3\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 6{,}6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$
$$= -450\ \text{rev/min}$$

ou $|\omega| = 450\ \text{rev/min}$ .

(c) O sinal negativo de $\omega$ indica que os discos giram no sentido horário, ou seja, no mesmo sentido que o segundo disco antes do acoplamento.

**50.** De acordo com a lei de conservação do momento angular,

$$I_m\omega_m = I_s\omega_s.$$

A relação entre os ângulos de rotação $\theta_m$ do motor e $\theta_s$ da sonda é a seguinte:

$$\int I_m\omega_m dt = I_m\theta_m = \int I_s\omega_s dt = I_s\theta_s$$

o que nos dá

$$\theta_m = \frac{I_s\theta_s}{I_m} = \frac{(12\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(30^\circ)}{2{,}0\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} = 180.000^\circ.$$

O número de revoluções do rotor é, portanto,

$$N = (1{,}8\times10^5)^\circ/(360^\circ/\text{rev}) = 5{,}0\times10^2\ \text{rev}.$$

**51. PENSE** Como não existe um torque externo agindo sobre o sistema formado pelas duas rodas, o momento angular total do sistema é conservado.

**FORMULE** De acordo com a lei de conservação do momento angular, se $I_1$ é o momento de inércia da roda que está girando inicialmente com velocidade angular $\omega_i$, e $I_2$ é o momento de inércia da roda que está inicialmente em repouso, $I_1\omega_i = (I_1 + I_2)\omega_f$ e

$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i$$

em que $\omega_f$ é a velocidade final das duas rodas.

**ANALISE** (a) Para $I_2 = 2I_1$ e $\omega_i = 800$ rev/min, temos

$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i = \frac{I_1}{I_1 + 2(I_1)}(800\ \text{rev/min}) = \frac{1}{3}(800\ \text{rev/min}) = 267\ \text{rev/min}$$

(b) Como a energia cinética inicial é $K_i = I_1\omega_i^2/2$ e a energia cinética final é $K_f = (I_1 + I_2)\omega_i^2/2$ , temos

$$K_f = \frac{1}{2}\left(I_1 + 2I_1\right)\left(\frac{I_1\omega_i}{I_1 + 2I_1}\right)^2 = \frac{1}{6}I\omega_i^2$$

Assim, a fração perdida é

$$\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{K_i - K_f}{K_i} = 1 - \frac{K_f}{K_i} = 1 - \frac{I\omega_i^2/6}{I\omega_i^2/2} = \frac{2}{3} = 0{,}667$$

**APRENDA** Esta situação é análoga à de uma colisão perfeitamente inelástica, na qual o momento é conservado, mas parte da energia é perdida.

**52.** Vamos usar o índice 1 para a barata e o índice 2 para o disco. A massa da barata é $m_1 = m$ e a massa do disco é $m_2 = 4{,}00\ m$.

(a) Inicialmente, o momento angular do sistema formado pela barata e pelo disco é

$$L_i = m_1 v_{1i} r_{1i} + I_2\omega_{2i} = m_1\omega_0 R^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_0 R^2 .$$

Depois que a barata executa a caminhada, sua posição (em relação ao eixo) é $r_{1f} = R/2$ e, portanto, o momento angular final do sistema é

$$L_f = m_1\omega_f \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_f R^2 .$$

Como $L_f = L_i$, temos:

$$\omega_f\left(\frac{1}{4}m_1R^2 + \frac{1}{2}m_2R\right) = \omega_0\left(m_1R^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\right).$$

Assim,

$$\omega_f = \left(\frac{m_1R^2 + m_2R^2/2}{m_1R^2/4 + m_2R^2/2}\right)\omega_0 = \left(\frac{1+(m_2/m_1)/2}{1/4+(m_2/m_1)/2}\right)\omega_0 = \left(\frac{1+2}{1/4\ +\ 2}\right)\omega_0 = 1{,}33\omega_0 .$$

Como $\omega_0 = 0{,}260$ rad/s, $\omega_f = 0{,}347$ rad/s.

(b) Fazendo $I = L/\omega$ na equação $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, obtemos $K = \frac{1}{2}L\omega$. Como $L_i = L_f$, a razão entre as energias cinéticas se torna

$$\frac{K}{K_0} = \frac{L_f\omega_f/2}{L_i\omega_i/2} = \frac{\omega_f}{\omega_0} = 1{,}33.$$

(c) Porque a barata realiza um trabalho positivo ao caminhar na direção do centro do disco, o que aumenta a energia cinética total do sistema.

**53.** O eixo de rotação está no centro da barra, a $r = 0{,}25$ m de distância das extremidades. De acordo com a Eq. 11-19, o momento angular inicial do sistema (que é apenas o da bala, antes da colisão) é $rmv$ sen$\theta$, em que $m = 0{,}003$ kg e $\theta = 60°$. O ângulo é medido no sentido anti-horário e, portanto (por convenção), positivo. Após a colisão, o momento de inércia do sistema é

$$I = I_{\text{barra}} + mr^2$$

em que, de acordo com a Tabela 10-2(e), $I_{\text{barra}} = ML^2/12$, com $M = 4{,}0$ kg e $L = 0{,}5$ m. De acordo com a lei de conservação do momento angular,

$$rmv\ \text{sen}\,\theta = \left(\frac{1}{12}ML^2 + mr^2\right)\omega.$$

Assim, para $\omega = 10$ rad/s, temos:

$$v = \frac{\left(\frac{1}{12}(4{,}0\ \text{kg})(0{,}5\ \text{m})^2 + (0{,}003\ \text{kg})(0{,}25\ \text{m})^2\right)(10\,\text{rad/s})}{(0{,}25\ \text{m})(0{,}003\ \text{kg})\,\text{sen}\,60°} = 1{,}3\times10^3\ \text{m/s}.$$

**54.** Vamos usar o índice 1 para o gato e o índice 2 para o anel. A massa do gato é $m_1 = M/4$ e a massa do anel é $m_2 = M = 8{,}00$ kg. O momento de inércia do anel é $I_2 = m_2(R_1^2 + R_2^2)/2$ (Tabela 10-2) e o momento de inércia do gato é $I_1 = m_1 r^2$, em que $r$ é a distância entre o gato e o eixo de rotação.

Inicialmente, o momento angular do sistema formado pelo gato (que está a uma distância $r = R_2$ do eixo de rotação) e o anel é

$$L_i = m_1 v_{1i} r_{1i} + I_2\omega_{2i} = m_1\omega_0 R_2^2 + \frac{1}{2}m_2(R_1^2 + R_2^2)\omega_0 = m_1 R_2^2\,\omega_0\left[1 + \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2} + 1\right)\right].$$

Depois que o gato rasteja até a borda interna do disco (e, portanto, está a uma distância  do eixo de rotação), o momento angular do sistema se torna

$$L_f = m_1\omega_f R_1^2 + \frac{1}{2}m_2(R_1^2 + R_2^2)\omega_f = m_1 R_1^2\,\omega_f\left[1 + \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1}\left(1 + \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right].$$

Como $L_f = L_i$, temos:

$$\frac{\omega_f}{\omega_0} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2} + 1\right)}{1 + \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1}\left(1 + \frac{R_2^2}{R_1^2}\right)} = (2{,}0)^2\,\frac{1 + 2(0{,}25 + 1)}{1 + 2(1 + 4)} = 1{,}273$$

Assim, $\omega_f = 1{,}273\omega_0$. Para $\omega_0 = 8{,}00$ rad/s, temos $\omega_f = 10{,}2$ rad/s. Fazendo $I = L/\omega$ na equação $K = I\omega^2/2$, obtemos $K = L\omega/2$. Como $L_i = L_f$, a razão entre as energias cinéticas se torna

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{L_f\omega_f/2}{L_i\omega_i/2} = \frac{\omega_f}{\omega_0} = 1{,}273,$$

o que significa que $\Delta K = K_f - K_i = 0{,}273K_i$. Este resultado é coerente com o fato de que o gato realiza um trabalho positivo ao rastejar em direção ao centro do anel, aumentando a energia cinética total do sistema.

Como a energia cinética inicial é

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2}\left[m_1 R_2^2 + \frac{1}{2}m_2(R_1^2 + R_2^2)\right]\omega_0^2 = \frac{1}{2}m_1 R_2^2\omega_0^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2} + 1\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}(2{,}00\text{ kg})(0{,}800\text{ m})^2(8{,}00\text{ rad/s})^2[1 + (1/2)(4)(0{,}5^2 + 1)] \\ &= 143{,}36\text{ J}, \end{aligned}$$

o aumento de energia cinética é

$$\Delta K = (0{,}273)(143{,}36\text{ J}) = 39{,}1\text{ J}.$$

**55.** Antes da queda da massa, o momento angular do sistema é ${}_i\ {}_i$, com $I_i = 5{,}0 \times 10^{-4}$ kg·m² e $\omega_i = 4{,}7$ rad/s. Depois da queda, o momento de inércia do conjunto disco + massa passa a ser

$$I_f = I_i + mR^2$$

com $m = 0{,}020$ kg e $R = 0{,}10$ m. A massa do disco (0,10 kg), embora apareça nos dados do problema, não é usada na solução. De acordo com a lei de conservação do momento angular,

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_i\omega_i}{I_i + mR^2} = 3{,}4 \text{ rad/s}.$$

**56.** A Tabela 10-2 fornece o momento de inércia de uma barra fina que gira em torno de um eixo perpendicular passando pelo centro da barra. As velocidades angulares dos dois braços são:

$$\omega_1 = \frac{(0{,}500 \text{ rev})(2\pi \text{ rad/rev})}{0{,}700 \text{ s}} = 4{,}49 \text{ rad/s}$$
$$\omega_2 = \frac{(1{,}00 \text{ rev})(2\pi \text{ rad/rev})}{0{,}700 \text{ s}} = 8{,}98 \text{ rad/s}.$$

Os momentos angulares dos braços, supondo que podem ser considerados como barras finas com 4,0 kg de massa e 0,60 m de comprimento, são

$$L_1 = I\omega_1 = mr^2\omega_1 = (4{,}0 \text{ kg})(0{,}60 \text{ m})^2(4{,}49 \text{ rad/s}) = 6{,}46 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$
$$L_2 = I\omega_2 = mr^2\omega_2 = (4{,}0 \text{ kg})(0{,}60 \text{ m})^2(8{,}98 \text{ rad/s}) = 12{,}92 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

No referencial do atleta, um dos braços gira no sentido horário e o outro gira no sentido anti-horário. Assim, o momento angular total em relação a um eixo de rotação comum passando pelos ombros é

$$L = L_2 - L_1 = 12{,}92 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} - 6{,}46 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} = 6{,}46 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

**57.** De acordo com a Tabela 10-2(c), o momento de inércia inicial do sistema é

$$I_0 = I_{\text{discomaior}} + I_{\text{discomenor}}$$

em que $I_{\text{discomaior}} = MR^2/2$ e $I_{\text{discomenor}} = mr^2/2$. O novo momento do disco menor, depois de sofrer o deslizamento, pode ser calculado usando o teorema dos eixos paralelos, fazendo $h = R - r$. O novo momento de inércia do sistema é

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + m(R-r)^2.$$

(a) Chamando de $\omega_0$ a velocidade angular comum dos dois discos antes do deslizamento, podemos usar lei de conservação do momento angular, $I_0\omega_0 = I\omega$, para obter a nova velocidade angular:

$$\omega = \omega_0 \frac{(MR^2/2) + (mr^2/2)}{(MR^2/2) + (mr^2/2) + m(R-r)^2}.$$

Para $M = 10m$ e $R = 3r$, $\omega = \omega_0(91/99)$. Assim, com $\omega_0 = 20$ rad/s, obtemos $\omega = 18$ rad/s.

(b) De acordo com os resultados do item anterior,

$$\frac{I_0}{I} = \frac{91}{99} \quad \text{e} \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{91}{99}.$$

Substituindo esses valores na razão das energias cinéticas, obtemos

$$\frac{K}{K_0} = \frac{I\omega^2/2}{I_0\omega_0^2/2} = \frac{I}{I_0}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{99}{91}\left(\frac{91}{99}\right)^2 = 0{,}92.$$

**58.** O momento de inércia inicial do sistema é $I_i = I_{\text{disco}} + I_{\text{estudante}}$, em que $I_{\text{disco}} = 300 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ [o que está de acordo com a Tabela 10-2(c)] e $I_{\text{estudante}} = mR^2$, com $m = 60$ kg e $R = 2{,}0$ m.

O momento de inércia do estudante em um ponto onde $r = 0{,}5$ m é $I_f = I_{\text{disco}} + mr^2$. De acordo com a lei de conservação do momento angular, temos:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \omega_f = \omega_i \frac{I_{\text{disco}} + mR^2}{I_{\text{disco}} + mr^2}$$

que, para $\omega_i = 1{,}5$ rad/s, nos dá uma velocidade angular final $\omega_f = 2{,}6$ rad/s.

**59.** De acordo com a lei de conservação do momento angular (Eq. 11-33), o momento angular após a liberação é igual ao momento angular antes da liberação:

$$L'_p + L'_b = L_p + L_b$$

$$\frac{C}{2}mv_p + \frac{1}{12}MC^2\omega' = I_p\omega + \frac{1}{12}MC^2\omega$$

em que $C$ é o comprimento da barra. Note que, de acordo com a Eq. 10-33, $I_p = m(C/2)^2$ e, de acordo com o enunciado do problema,

$$\omega' = v_{\text{barra}}/r = (v_p - 6)/(C/2)$$

Como sabemos que $C = 0{,}800$ m, $M = 3m$ e $\omega = 20$ rad/s, temos informações suficientes para calcular a velocidade da partícula: $v_p = 11{,}0$ m/s.

**60.** (a) Para $r = 0{,}60$ m, temos $I = 0{,}060 + (0{,}501)r^2 = 0{,}24$ kg · m².

(b) De acordo com a lei de conservação do momento angular, usando unidades do SI, temos:

$$\ell_0 = L_f \;\Rightarrow\; mv_0r = I\omega \;\Rightarrow\; (0{,}001)v_0(0{,}60) = (0{,}24)(4{,}5),$$

o que nos dá $v_0 = 1{,}8 \times 10^3$ m/s.

**61.** Usamos a convenção pouco habitual de considerar as rotações no sentido horário como positivas para que as velocidades angulares deste problema sejam positivas. Para $r = 0{,}60$ m e $I_0 = 0{,}12$ kg · m², o momento de inércia do sistema bola-barra (após a colisão) é

$$I = I_0 + (0{,}20)r^2 = 0{,}19 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

De acordo com a lei de conservação do momento angular, $L_0 = L_f$ ou $I_0\omega_0 = I\omega$, o que nos dá

$$\omega = \frac{I_0}{I}\omega_0 = \frac{0{,}12 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}{0{,}19 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}(2{,}4 \text{ rad/s}) = 1{,}5 \text{ rad/s}.$$

**62.** Como o trapezista mantém o corpo esticado, com $I_1 = 19{,}9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, no primeiro e no último quarto de volta (ou seja, em um oitavo do ângulo total), o ângulo descrito em um certo tempo $t_1$ com esse momento angular é $\theta_1 = 0{,}500$ rev. No resto do percurso, realizado em um certo tempo $t_2$, o corpo está na posição grupada, $I_2 = 3{,}93 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, e o ângulo total descrito é $\theta_2 = 3{,}500$ rev. Como não existe nenhum torque externo aplicado, o momento angular é conservado e, portanto, $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$. Assim, o tempo total do percurso é

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\theta_1}{\omega_1} + \frac{\theta_2}{\omega_2} = \frac{\theta_1}{I_2\omega_2/I_1} + \frac{\theta_2}{\omega_2} = \frac{1}{\omega_2}\left(\frac{I_1}{I_2}\theta_1 + \theta_2\right).$$

Explicitando $\omega_2$ e substituindo os valores conhecidos, temos:

$$\omega_2 = \frac{1}{t}\left(\frac{I_1}{I_2}\theta_1 + \theta_2\right) = \frac{1}{1{,}87 \text{ s}}\left(\frac{19{,}9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}{3{,}93 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}(0{,}500 \text{ rev}) + 3{,}50 \text{ rev}\right) = 3{,}23 \text{ rev/s}.$$

**63.** Trata-se de uma colisão perfeitamente inelástica, que podemos analisar usando a lei de conservação do momento angular. Sejam $m$ e $v_0$ a massa e a velocidade inicial da bola e seja $R$ o raio do carrossel. O momento angular inicial é

$$\vec{\ell}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{p}_0 \Rightarrow \ell_0 = R\left(mv_0\right)\cos\phi$$

em que $\phi$ = 37° é o ângulo entre $\vec{v}_0$ e a reta tangente à borda do carrossel. Substituindo os valores conhecidos, obtemos $\ell_0 = 19\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$. Em unidades do SI, temos:

$$\ell_0 = L_f \quad \Rightarrow \quad 19\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 = I\omega = \left(150 + (30)R^2 + (1{,}0)R^2\right)\omega,$$

o que nos dá $\omega$ = 0,070 rad/s.

**64.** Tratamos a bailarina como um objeto rígido girando em torno de um eixo fixo, inicialmente e quando está quase atingindo a altura máxima. O momento de inércia inicial (do tronco e de uma perna fazendo um ângulo de $90°$ com o tronco) é

$$I_i = I_{\text{tronco}} + I_{\text{perna}} = 0{,}660\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 1{,}44\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 = 2{,}10\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

O momento de inércia final (do tronco e das duas pernas fazendo um ângulo $\theta = 30°$ com o tronco) é

$$\begin{aligned} I_f &= I_{\text{tronco}} + 2I_{\text{perna}}\,\text{sen}^2\,\theta = 0{,}660\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 2(1{,}44\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\,\text{sen}^2\,30° \\ &= 1{,}38\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, \end{aligned}$$

em que fizemos uso do fato de que o comprimento efetivo da perna estendida fazendo um ângulo $\theta$ com o tronco é $L_\perp = L\,\text{sen}\,\theta$ e $I \sim L_\perp^2$. Depois que a bailarina inicia o salto, não existe nenhum torque externo agindo sobre o seu corpo e, portanto, seu momento angular permanece constante. Assim, $L_i = L_f$ ou $I_i\omega_i = I_f\omega_f$ e a razão das velocidades angulares é

$$\frac{\omega_f}{\omega_i} = \frac{I_i}{I_f} = \frac{2{,}10\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}{1{,}38\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} = 1{,}52.$$

**65. PENSE** Em um pequeno intervalo de tempo no entorno do instante em que a massa de modelar se choca com a bola, o momento angular do sistema é conservado. O momento angular inicial é o momento da massa de modelar.

**FORMULE** Imediatamente antes do choque, a massa de modelar está se movendo ao longo de uma reta vertical que está a uma distância $d/2$ do eixo de rotação, em que $d$ é o comprimento da barra. O momento angular da barra é $mvd/2$, em que $m$ e $v$ são a massa e a velocidade inicial da barra, respectivamente. Imediatamente após o choque, a barra tem uma velocidade angular $\omega$ e um momento angular $I\omega$, em que $I$ é o momento de inércia do sistema formado pela barra, as duas bolas e a massa de modelar em uma das extremidades da barra. De acordo com a lei de conservação do momento angular, $mvd/2 = I\omega$, em que $I = (2M + m)(d/2)^2$, o que permite determinar o valor de $\omega$.

**ANALISE** (a) Para $M$ = 2,00 kg, $d$ = 0,500 m, $m$ = 0,0500 kg e $v$ = 3,00 m/s, temos

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{mvd}{2I} = \frac{2mv}{(2M+m)d} = \frac{2(0{,}0500\ \text{kg})(3{,}00\ \text{m/s})}{\left(2(2{,}00\ \text{kg}) + 0{,}0500\ \text{kg}\right)(0{,}500\ \text{m})} \\ &= 0{,}148\ \text{rad/s} \end{aligned}$$

(b) A energia cinética inicial é $K_i = mv^2/2$, a energia cinética final é $K_f = I\omega^2/2$, e a razão é

$$K_f/K_i = I\omega^2/mv^2$$

Fazendo $I = (2M + m)d^2/4$, $\omega = 2mv/(2M + m)d$ e substituindo por valores numéricos, obtemos

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{m}{2M+m} = \frac{0{,}0500\ \text{kg}}{2(2{,}00\ \text{kg}) + 0{,}0500\ \text{kg}} = 0{,}0123$$

(c) Quando a barra gira, a soma da energia cinética com a energia potencial é conservada. Quando uma das bolas desce uma distância $h$, a outra bola sobe a mesma distância; portanto, a soma das energias potenciais das duas bolas não varia. Assim, precisamos considerar apenas a energia potencial da massa de modelar. Enquanto ela descreve um arco de 90º para chegar ao ponto mais baixo do percurso, a energia cinética aumenta e a energia potencial diminui. Em seguida, ela descreve um ângulo $\theta$ para cima, perdendo energia cinética e ganhando energia potencial, até ficar momentaneamente em repouso. Vamos tomar como referência para a energia potencial o ponto mais baixo do percurso. Como a massa de modelar está inicialmente a uma distância $d/2$ acima desse ponto, a energia potencial inicial é $U_i = mgd/2$. Se a massa de modelar fica momentaneamente em repouso após descrever um ângulo $\theta$ para cima, a altura final está a uma distância $(d/2)(1 - \cos\theta)$ do ponto mais baixo do percurso, e a energia potencial final é

$$U_f = mg(d/2)(1 - \cos\theta)$$

A energia cinética inicial é a soma da energia cinética das bolas com a energia cinética da massa de modelar:

$$K_i = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(2M+m)(d/2)^2\,\omega^2$$

Como, na posição final, $K_f = 0$, a lei de conservação da energia nos dá

$$U_i + K_i = U_f + K_f \quad \Rightarrow \quad mg\frac{d}{2} + \frac{1}{2}(2M+m)\left(\frac{d}{2}\right)^2\omega^2 = mg\frac{d}{2}(1-\cos\theta)$$

Explicitando $\cos\theta$ nessa equação, obtemos

$$\begin{aligned}\cos\theta &= -\frac{1}{2}\left(\frac{2M+m}{mg}\right)\left(\frac{d}{2}\right)\omega^2\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{2(2{,}00\text{ kg})+0{,}0500\text{ kg}}{(0{,}0500\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)}\right)\left(\frac{0{,}500\text{ m}}{2}\right)(0{,}148\text{ rad/s})^2\\ &= -0{,}0226\end{aligned}$$

o que nos dá $\theta = 91{,}3^\circ$. O ângulo total de rotação é, portanto, $90^\circ + 91{,}3^\circ \approx 181^\circ$.

**APRENDA** Este problema é bastante complexo. Para resumir, calculamos $\omega$ usando a lei de conservação do momento angular. Parte da energia da massa de modelar é perdida na colisão com uma das bolas. No movimento que se segue, por outro lado, não há dissipação de energia e, portanto, podemos usar a lei de conservação da energia para determinar o ângulo para o qual o sistema para momentaneamente.

**66.** Ao contrário do que costumamos fazer, escolhemos o sentido *horário* de rotação como positivo para que as velocidades angulares (e os ângulos) deste problema sejam positivos. Aplicando a lei de conservação da energia mecânica à partícula (antes do impacto), obtemos a relação

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

que nos dá a velocidade da partícula no momento do impacto. Aplicando a lei de conservação do momento angular à colisão, temos:

$$mvd = (I_{\text{barra}} + md^2)\omega$$

em que $I_{\text{barra}}$ pode ser calculado usando a Tabela 10-2(e) e o teorema dos eixos paralelos:

$$I_{\text{barra}} = \frac{1}{12}Md^2 + M\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Md^2.$$

Assim, a velocidade angular do sistema imediatamente após a colisão é

$$\omega = \frac{md\sqrt{2gh}}{(Md^2/3)+md^2},$$

o que significa que o sistema possui uma energia cinética $\left(I_{\text{barra}} + md^2\right)\omega^2/2,$ que é totalmente convertida em energia potencial na posição em que o bloco para momentaneamente depois de atingir uma altura $H$ em relação ao ponto mais baixo da trajetória. Nesse instante, o centro de massa da barra está a uma altura $H/2$. Usando relações trigonométricas, é fácil demonstrar que $H = d(1 - \cos\theta)$, que nos leva à seguinte relação:

$$\frac{1}{2}\left(I_{\text{barra}} + md^2\right)\omega^2 = mgH + Mg\frac{H}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\frac{m^2d^2\left(2gh\right)}{(Md^2/3)+md^2} = \left(m + \frac{M}{2}\right)gd\left(1-\cos\theta\right).$$

Explicitando $\theta$, temos:

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}\left(1 - \frac{m^2h}{\left(m+M/2\right)\left(m+M/3\right)}\right) = \cos^{-1}\left(1 - \frac{h/d}{\left(1+M/2m\right)\left(1+M/3m\right)}\right)\\ &= \cos^{-1}\left(1 - \frac{(20\text{ cm}/40\text{ cm})}{(1+1)(1+2/3)}\right) = \cos^{-1}(0{,}85)\\ &= 32°.\end{aligned}$$

**67.** (a) De acordo com a lei de conservação do momento angular (Eq. 11-33), temos:

$$L_i = L_f \;\Rightarrow\; -dmv + \frac{1}{12}ML^2\omega = 0$$

na qual consideramos negativo o sentido horário de rotação e usamos a Tabela 11-2(e) e a Eq. 11-21 com $r_\perp = d$. Explicitando $d$, temos:

$$d = \frac{ML^2\omega}{12mv} = \frac{M(0{,}60\text{ m})^2(80\text{ rad/s})}{12(M/3)(40\text{ m/s})} = 0{,}180\text{ m}.$$

(b) Se $d$ for maior que o valor calculado, o termo negativo da equação acima será maior, o que tornará o momento angular total negativo após a colisão. Isso significa que a barra e a partícula irão girar no sentido horário.

**68.** (a) A velocidade angular do pião é $\omega = 30\text{ rev/s} = 30(2\pi)\text{ rad/s}$. A velocidade de precessão do pião pode ser calculada usando a Eq. 11-46:

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} = \frac{(0{,}50\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(0{,}040\text{ m})}{(5{,}0\times10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(60\pi\text{ rad/s})} = 2{,}08\text{ rad/s} \approx 0{,}33\text{ rev/s}.$$

(b) O sentido da precessão é o sentido horário quando o pião é visto de cima.

**69.** A velocidade de precessão pode ser calculada usando a Eq. 11-46 com $r = (11/2)$ cm $= 0{,}055$ m. Como $I_{\text{disco}} = MR^2/2$, a velocidade angular do disco é

$$\omega = 1000\text{ rev/min} = \frac{2\pi(1000)}{60}\text{ rad/s} \approx 1{,}0\times10^2\text{ rad/s}$$

e

$$\Omega = \frac{Mgr}{(MR^2/2)\omega} = \frac{2gr}{R^2\omega} = \frac{2(9{,}8\text{ m/s}^2)(0{,}055\text{ m})}{(0{,}50\text{ m})^2(1{,}0\times10^2\text{ rad/s})} \approx 0{,}041\text{ rad/s}.$$

**70.** De acordo com a lei de conservação da energia, a energia mecânica antes que a bola comece a subir a rampa é igual à energia mecânica no momento em que bola para momentaneamente. Assim, temos:

$$\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_f^2+mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2$$

na qual $v_f = \omega_f = 0$. Note que a altura $h$ está relacionada à distância $d$ percorrida pela bola ao longo da rampa através da equação $h = d\,\text{sen}(15^o)$. De acordo com a Tabela 10-2(f) e a Eq. 11-2, temos:

$$mgd\,\text{sen}\,15°=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{5}mv^2=\frac{7}{10}mv^2.$$

Dividindo a equação por $m$ e fazendo $d$ = 1,5 m, obtemos $v$ = 2,33 m/s.

**71. PENSE** A força aplicada produz um torque que faz o cilindro rolar para a direita com aceleração angular constante.

**FORMULE** Considerando positivos o sentido de rotação no sentido horário e o sentido do movimento para a direita, a aceleração angular e o movimento do centro de massa são positivos. De acordo com a segunda lei de Newton para rotações, $\tau = I_C\alpha$, em que $\tau$ é o torque em relação à reta de contato do cilindro com a superfície, $\alpha$ é a aceleração angular e, de acordo com a Tabela 10-2(c) e o teorema dos eixos paralelos,

$$I_P=\frac{1}{2}MR^2+MR^2=\frac{3}{2}MR^2$$

Como o torque produzido pela força aplicada $F_{\text{ap}}$ é $2RF_{\text{ap}}$, temos

$$\tau=I_P\alpha=\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\alpha=2RF_{\text{ap}}$$

A equação anterior pode ser usada para calcular a aceleração angular $\alpha$, que está relacionada à aceleração $a_{\text{CM}}$ do centro de massa pela equação $\alpha = a_{\text{CM}}/R$.

**ANALISE** (a) Para $M$ = 10 kg, $R$ = 0,10 m e $F_{\text{ap}}$ = 12 N, temos

$$a_{\text{CM}}=\alpha R=\frac{2R^2F_{\text{ap}}}{3MR^2/2}=\frac{4F_{\text{ap}}}{3M}=\frac{4(12\text{ N})}{3(10\text{ kg})}=1{,}6\text{ m/s}^2$$

(b) O módulo da aceleração angular é

$$\alpha=a_{\text{CM}}/R=(1{,}6\text{ m/s}^2)/(0{,}10\text{ m})=16\text{ rad/s}^2$$

(c) De acordo com a segunda lei de Newton para translações, $F_{\text{ap}} - f = Ma_{\text{CM}}$, o que nos dá $f = F_{\text{ap}} - Ma_{\text{CM}}$ = 12 – (10)(1,6) = –4,0 N. Isso significa que, ao contrário do que supusemos ao escrever a equação, a força de atrito, de módulo 4,0 N, aponta *para a direita*, ou seja, $\vec{f}=(4{,}0\text{ N})\hat{\text{i}}$.

**APRENDA** Quando o cilindro rola para a direita, a força de atrito também aponta para a direita para evitar que o cilindro escorregue.

**72.** A energia cinética de rotação é $K=\frac{1}{2}I\omega^2$, em que $I = mR^2$ é o momento de inércia em relação a um eixo passando pelo centro de massa [Tabela 10-2(a)], $m$ = 140 kg e $\omega = v_{\text{CM}}/R$ (Eq. 11-2). A razão pedida é

$$\frac{K_{\text{transl}}}{K_{\text{rot}}}=\frac{\frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2}{\frac{1}{2}\left(mR^2\right)\left(v_{\text{CM}}/R\right)^2}=1{,}00.$$

**73.** Este problema envolve o produto vetorial de vetores que estão no plano $xy$. Para vetores desse tipo, que podem ser representados na forma $\vec{r}'=x'\hat{\text{i}}+y'\hat{\text{j}}$, a Eq. 3-30 nos dá

$$\vec{r}'\times\vec{v}=\left(x'v_y-y'v_x\right)\hat{\mathrm{k}}.$$

(a) Sabemos que $\vec{r}'$ aponta na direção $+\hat{\mathrm{i}}$ ou na direção $-\hat{\mathrm{i}}$, já que a partícula está se movendo ao longo do eixo $x$. Como nem $\vec{r}'$ nem $\vec{v}$ possuem uma componente $y$, podemos concluir a partir da expressão acima (ou mais simplesmente, a partir do fato de que $\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{i}}=0$) que $\vec{\ell}=m\left(\vec{r}'\times\vec{v}\right)=0$.

(b) Como a força é aplicada na direção $-\hat{\mathrm{i}}$ (o que podemos constatar derivando a expressão da velocidade para obter a aceleração), argumentos semelhantes aos usados no item anterior mostram que $\tau=\vec{r}'\times\vec{F}=0$.

(c) Nesse caso, $\vec{r}'=\vec{r}-\vec{r}_o$, em que $\vec{r}_o=2{,}0\hat{\mathrm{i}}+5{,}0\hat{\mathrm{j}}$ (com unidades do SI implícitas), é um vetor que aponta do ponto (2,0; 5,0; 0) para a posição instantânea do carro [indicada pelo vetor posição $\vec{r}$, que aponta na direção $+x$, na direção $-x$ ou é nulo (se o carro estiver passando pela origem)]. Como $\vec{r}\times\vec{v}=0$, temos:

$$\vec{\ell}=m(\vec{r}'\times\vec{v})=-m(\vec{r}_o\times\vec{v})=-(3{,}0)\left[(2{,}0)(0)-(5{,}0)(-2{,}0t^3)\right]\hat{\mathrm{k}},$$

o que nos dá $\vec{\ell}=(-30t^3\hat{\mathrm{k}})\ \mathrm{kg\cdot m/s^2}$.

(d) O vetor aceleração é dado por $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-6{,}0t^2\hat{\mathrm{i}}$ em unidades do SI e a força exercida sobre o carro é $m\vec{a}$. Usando um raciocínio semelhante ao do item anterior, temos:

$$\vec{\tau}=m(\vec{r}'\times a)=-m(\vec{r}_o\times\vec{a})=-(3{,}0)\left[(2{,}0)(0)-(5{,}0)(-6{,}0t^2)\right]\hat{\mathrm{k}},$$

o que nos dá $\vec{\tau}=(-90t^2\hat{\mathrm{k}})\ \mathrm{N\cdot m}$.

(e) Nesse caso, $\vec{r}'=\vec{r}-\vec{r}_o$, em que $\vec{r}_o=2{,}0\hat{\mathrm{i}}-5{,}0\hat{\mathrm{j}}$ (com unidades do SI implícitas), é um vetor que aponta do ponto (2,0; –5,0; 0) para a posição instantânea do carro [indicada pelo vetor posição $\vec{r}$, que aponta na direção $+x$, na direção $-x$ ou é nulo (se o carro estiver passando pela origem)]. Como $\vec{r}\times\vec{v}=0$, temos:

$$\vec{\ell}=m(\vec{r}'\times\vec{v})=-m(\vec{r}_o\times\vec{v})=-(3{,}0)\left[(2{,}0)(0)-(-5{,}0)(-2{,}0t^3)\right]\hat{\mathrm{k}},$$

o que nos dá $\vec{\ell}=(30t^3\hat{\mathrm{k}})\ \mathrm{kg\cdot m/s^2}$.

(f) O vetor aceleração é dado por $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-6{,}0t^2\hat{\mathrm{i}}$ em unidades do SI e a força exercida sobre o carro é $m\vec{a}$. Usando um raciocínio semelhante ao do item anterior, temos:

$$\vec{\tau}=m(\vec{r}'\times a)=-m(\vec{r}_o\times\vec{a})=-(3{,}0)\left[(2{,}0)(0)-(-5{,}0)(-6{,}0t^2)\right]\hat{\mathrm{k}}$$

o que nos dá $\vec{\tau}=(90t^2\hat{\mathrm{k}})\ \mathrm{N\cdot m}$.

**74.** No caso de um torque constante, a Eq. 11-29 se torna

$$\vec{\tau}\ =\ \frac{d\vec{L}}{dt}\ =\ \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}\ .$$

Assim, temos:

$$\Delta t=\frac{\Delta L}{\tau}=\frac{600\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}}{50\ \mathrm{N\cdot m}}=12\ \mathrm{s}\ .$$

**75. PENSE** Como não existe um torque externo agindo sobre o sistema formado pela criança e o carrossel, o momento angular total do sistema é conservado.

**FORMULE** De acordo com a Eq. 11-21, o módulo do momento angular da criança em relação ao eixo de rotação do carrossel é $mvR$, em que $R$ é o raio do carrossel.

**ANALISE** (a) Em termos do raio de giração $k$, o momento de inércia do carrossel é dado por $I = Mk^2$. Para $M = 180$ kg e $k = 0{,}91$ m, obtemos

$$I = (180\text{ kg})\,(0{,}910\text{ m})^2 = 149\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

(b) O módulo do momento angular da criança em relação ao eixo de rotação do carrossel é

$$L_{\text{cri}} = mvR = (44{,}0\text{ kg})(3{,}00\text{ m/s})(1{,}20\text{ m}) = 158\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

(c) Como o carrossel está inicialmente em repouso, o momento angular inicial do sistema é $L_i = L_{\text{cri}} = mvR$. O momento angular final é $L_f = (I + mR^2)\omega$, em que $\omega$ é a velocidade angular final do carrossel e da criança. Conforme a lei de conservação do momento angular, $mvR = (I + mR^2)\omega$, o que nos dá

$$\omega = \frac{mvR}{I + mR^2} = \frac{158\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{149\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + (44{,}0\text{ kg})(1{,}20\text{ m})^2} = 0{,}744\text{ rad/s}$$

**APRENDA** A velocidade angular inicial da criança é

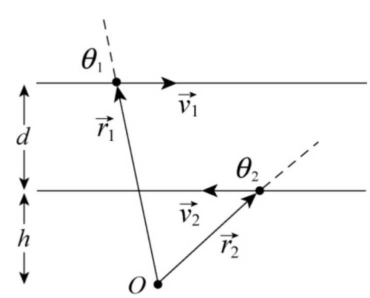
$$\omega_0 = \frac{v}{R} = \frac{3{,}00\text{ m/s}}{1{,}20\text{ m}} = 2{,}5\text{ rad/s}$$

Depois que a criança pula no carrossel, o momento de inércia do sistema (criança + carrossel) aumenta; portanto, de acordo com a lei de conservação do momento angular, a velocidade angular deve diminuir, o que realmente acontece.

**76.** A expressão ($i$) da Tabela 10-2 permite calcular o momento de inércia de uma placa em relação ao centro de massa em função da largura $a$ (0,15 m, no caso) e do comprimento $b$ (0,20 m). A distância entre o centro de massa e o ponto por onde passa o eixo de rotação é $\sqrt{(a/4)^2 + (b/4)^2}$. Chamando a espessura da placa de $h$ (0,012 m), o volume é $abh$, o que significa que a massa é $\rho abh$ (em que $\rho = 2640$ kg/m³ é a massa específica). Podemos escrever a energia cinética em termos do momento angular fazendo $\omega = L/I$ na Eq. 10-34:

$$K = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I} = \frac{1}{2}\frac{(0{,}104)^2}{\rho abh\left[(a^2+b^2)/12 + (a/4)^2 + (b/4)^2\right]} = 0{,}62\text{ J}.$$

**77. PENSE** Neste problema, o sistema é formado por duas partículas que se movem em sentidos opostos ao longo de retas paralelas. O momento angular do sistema em relação a um ponto qualquer é a soma dos momentos angulares das duas partículas em relação a esse ponto.




**FORMULE** O diagrama anterior mostra as partículas e suas trajetórias. O ponto $O$ é um ponto escolhido arbitrariamente. Vamos definir um sistema de coordenadas no qual o eixo $x$ aponta para a direita, o eixo $y$ aponta para cima e o eixo $z$ aponta para fora da tela. O momento angular do sistema em relação ao ponto $O$ é

$$\vec{\ell} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = m(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{v}_2)$$

já que $m_1 = m_2 = m$.

**ANALISE** (a) Como $\vec{v}_1 = v_1\hat{\mathrm{i}}$, o momento angular da partícula 1 tem módulo

$$\ell_1 = mvr_1 \operatorname{sen}\theta_1 = mv(d+h)$$

e aponta no sentido negativo do eixo $z$, ou seja, para dentro da tela. Por outro lado, como $\vec{v}_2 = -v_2\hat{\mathrm{i}}$, o momento angular da partícula 2 tem módulo $\ell_2 = mvr_2 \operatorname{sen}\theta_2 = mvh$ e aponta no sentido positivo do eixo $z$, ou seja, para fora da tela. O momento angular total tem módulo

$$\ell = mv(d+h) - mvh = mvd$$

que depende apenas da distância entre as duas trajetórias. Assim, se o ponto $O$ estiver no ponto médio da distância entre as duas trajetórias, o módulo do momento angular total será

$$\ell = mvd = (2{,}90\times10^{-4}\ \text{kg})(5{,}46\ \text{m/s})(0{,}042\ \text{m}) = 6{,}65\times10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

(b) Como foi dito anteriormente, a resposta é não.

(c) Se a partícula 2 estiver se movendo para a direita, o módulo do momento angular total será

$$\ell = mv(d+h) + mvh = mv(d+2h)$$

Portanto, o resultado passará a depender de $h$, a distância entre o ponto $O$ e uma das trajetórias. Se o ponto $O$ estiver no ponto médio da distância entre as duas trajetórias, $h = -d/2$ e $\ell = 0$.

(d) Como foi dito antes, a resposta é sim.

**APRENDA** O momento angular é uma grandeza vetorial. No caso de um sistema de muitas partículas, o momento angular total em relação a um ponto é

$$\vec{\ell} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \cdots = \sum_i \vec{\ell}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i\ .$$

**78.** (a) Usando a Eq. 2-16 para descrever o movimento de translação do centro de massa da roda, temos:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \Rightarrow a = -\frac{v_0^2}{2\Delta x}$$

que nos dá $a = -4{,}11$ para $v_0 = 43$ e $\Delta x = 225$ (unidades do SI estão implícitas). O módulo da aceleração linear do centro de massa é, portanto, 4,11 m/s$^2$.

(b) Para $R$ = 0,250 m, a Eq. 11-6 nos dá

$$|\alpha| = |a|/R = 16{,}4\ \text{rad/s}^2.$$

Se a roda está se movendo para a direita, está girando no sentido horário. Se a velocidade da roda está diminuindo, a aceleração angular é no sentido anti-horário, de modo que, usando a convenção usual de que os ângulos e movimentos no sentido anti-horário são positivos, não há necessidade de usar o valor absoluto de $\alpha$ em vez do próprio $\alpha$.

(c) Podemos usar a Eq. 11-8, com $Rf_s$ representando o módulo do torque associado à força de atrito. Temos:

$$Rf_s = I\alpha = (0{,}155\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\ (16{,}4\ \text{rad/s}^2) = 2{,}55\ \ \text{N}\cdot\text{m}\ .$$

**79.** Usamos as equações $L = I\omega$ e $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ e observamos que a velocidade dos pontos da borda das rodas $A$ e $B$ (que é igual à velocidade dos pontos da correia) deve ser igual nas duas rodas e, portanto, $\omega_A R_A = \omega_B r_B$.

(a) Se $L_A = L_B = L$, a razão dos momentos de inércia é

$$\frac{I_A}{I_B}=\frac{L/\omega_A}{L/\omega_B}=\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{R_A}{R_B}=\frac{1}{3}=0,333.$$

(b) Se $K_A = K_B$, a razão dos momentos de inércia é

$$\frac{I_A}{I_B}=\frac{2K/\omega_A^2}{2K/\omega_B^2}=\left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)^2=\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2=\frac{1}{9}=0,111.$$

**80.** O momento angular total em relação à origem antes da colisão pode ser calculado usando as Eqs. 3-30 e 11-18 para cada partícula e somando os resultados, o que nos dá

$$\vec{L}_i = [(0,5\text{ m})(2,5\text{ kg})(3,0\text{ m/s}) + (0,1\text{ m})(4,0\text{ kg})(4,5\text{ m/s})]\,\hat{\text{k}}\,.$$

De acordo com a Eq. 11-33, o momento angular final das partículas (que se movem juntas após a colisão), medido em relação à origem, é

$$\vec{L}_f = \vec{L}_i = (5,55\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\,\hat{\text{k}}\,.$$

**81. PENSE** Quando a roda desce o plano inclinado, rolando, sem deslizar, parte da energia potencial gravitacional é convertida em energia cinética de translação e parte é convertida em energia cinética de rotação.

**FORMULE** Quando o sistema roda-eixo desce uma distância $d$, a variação de energia potencial é $\Delta U = -mgd$ sen $\theta$. De acordo com a lei de conservação da energia, o ganho total de energia cinética é

$$-\Delta U=\Delta K=\Delta K_{\text{trans}}+\Delta K_{\text{rot}} \quad\Rightarrow\quad mgd\,\text{sen}\,\theta=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

Como o eixo rola sem deslizar, a velocidade angular é dada por $\omega = v/r$, em que $r$ é o raio do eixo. Assim, a equação anterior pode ser escrita na forma

$$mgd\,\text{sen}\,\theta=\frac{1}{2}I\omega^2\left(\frac{mr^2}{I}+1\right)=\Delta K_{\text{rot}}\left(\frac{mr^2}{I}+1\right)$$

**ANALISE** (a) Para $m = 10,0$ kg, $d = 2,00$ m, $r = 0,200$ m e $I = 0,600$ kg · m², temos

$$\Delta K_{\text{rot}}=\frac{mgd\,\text{sen}\,\theta}{\dfrac{mr^2}{I}+1}=\frac{(10,0\text{ kg})(9,80\text{ m/s}^2)(2,00\text{ m})\text{sen}30,0°}{\dfrac{(10,0\text{ kg})(0,200\text{ m})^2}{0,600\text{ kg}\cdot\text{m}^2}+1}=58,8\text{ J}\,.$$

(b) A energia cinética de translação é $\Delta K_{\text{trans}} = \Delta K - \Delta K_{\text{rot}} = 98,0\text{ J} - 58,8\text{ J} = 39,2$ J.

**APRENDA** É fácil mostrar que, para os dados do problema, $mr^2/I = 2/3$, o que significa que $\Delta K_{\text{rot}}/\Delta K = 3/5$ e $\Delta K_{\text{trans}}/\Delta K = 2/5$, ou seja, enquanto a roda está rolando, 60% da energia cinética é energia cinética de rotação, e 40%, energia cinética de translação.

**82.** (a) Usamos a Tabela 10-2(e) e o teorema dos eixos paralelos para calcular o momento de inércia da barra em relação a um eixo que passa por uma das extremidades:

$$I=I_{\text{CM}}+Mh^2=\frac{1}{12}ML^2+M\left(\frac{L}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ML^2$$

em que $L = 6,00$ m e $M = 10,0/9,8 = 1,02$ kg. Assim, o momento de inércia é $I=12,2\text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

(b) De acordo com a Eq. 11-31, para $\omega = (240)(2\pi/60) = 25{,}1$ rad/s, o módulo do momento angular é

$$I\omega = \left(12{,}2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\right)\left(25{,}1\,\text{rad/s}\right) = 308\ \ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\,.$$

Como a barra está rodando no sentido horário quando vista de cima, a regra da mão direita mostra que o sentido do momento angular é para baixo.

**83.** Sabemos que a massa da esfera é $M = 36/9{,}8 = 3{,}67$ kg e que o momento de inércia em relação ao centro de massa é $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$ [Tabela 10-2(f)].

(a) De acordo com as Eqs. 11-2 e 11-5,

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 = \frac{7}{10}Mv_{CM}^2,$$

o que nos dá $K = 61{,}7$ J para $v_{CM} = 4{,}9$ m/s.

(b) A energia cinética calculada no item (a) é convertida integralmente em energia potencial $Mgh$ na altura $h = d$ sen $\theta$ na qual a esfera para de subir. Assim, podemos usar a lei de conservação da energia para calcular a distância que a esfera sobe ao longo do plano:

$$\frac{7}{10}Mv_{CM}^2 = Mgd\ \text{sen}\,\theta \quad\Rightarrow\quad d = \frac{7v_{CM}^2}{10g\ \text{sen}\,\theta} = 3{,}43\,\text{m}.$$

(c) Como foi visto no item anterior, a massa $M$ não aparece na expressão final de $d$. Como a resposta não depende da massa, também não depende do peso da esfera.

**84.** (a) A aceleração é dada pela Eq. 11-13:

$$a_{CM} = \frac{g}{1 + I_{CM}/MR_0^2}$$

em que o sentido para cima é tomado como sendo positivo. Escolhendo a posição inicial como origem, a Eq. 2-15 nos dá

$$y_{CM} = v_{CM,0}t + \frac{1}{2}a_{CM}t^2 = v_{CM,0}t - \frac{\frac{1}{2}gt^2}{1 + I_{CM}/MR_0^2}$$

em que $y_{CM} = -1{,}2$ m e $v_{CM,0} = -1{,}3$ m/s. Resolvendo a equação do segundo grau em $t$ e fazendo $I_{CM} = 0{,}000095\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, $M = 0{,}12$ kg, $R_0 = 0{,}0032$ m e $g = 9{,}8$ m/s², temos:

$$t = \frac{\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR_0^2}\right)\left(v_{CM,0} \pm \sqrt{v_{CM,0}^2 - \frac{2gy_{CM}}{1 + I_{CM}/MR_0^2}}\right)}{g}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{0{,}000095}{(0{,}12)(0{,}0032)^2}\right)\left(-1{,}3 \pm \sqrt{(1{,}3)^2 - \frac{2(9{,}8)(-1{,}2)}{1 + 0{,}000095/(0{,}12)(0{,}0032)^2}}\right)}{9{,}8}$$

$$= -21{,}7 \text{ ou } 0{,}885$$

em que escolhemos $t = 0{,}89$ s como resposta.

(b) Notamos que a energia potencial inicial é $U_i = Mgh$ e $h$ = 1,2 m (usando a extremidade inferior da corda como nível de referência para calcular $U$). A energia cinética inicial é dada pela Eq. 11-5, na qual as velocidades angular e linear estão relacionadas pela Eq. 11-2. De acordo com a lei de conservação da energia, temos:

$$\begin{aligned}K_f = K_i + U_i &= \frac{1}{2}mv_{\text{CM},0}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_{\text{CM},0}}{R_0}\right)^2 + Mgh\\ &= \frac{1}{2}(0{,}12\text{ kg})(1{,}3\text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}\left(9{,}5\times10^{-5}\text{ kg}\cdot\text{m}^2\right)\left(\frac{1{,}3\text{ m/s}}{0{,}0032\text{ m}}\right)^2 + (0{,}12\text{ kg})\left(9{,}8\text{ m/s}^2\right)(1{,}2\text{ m})\\ &= 9{,}4\text{ J.}\end{aligned}$$

(c) Quando o ioiô chega à extremidade da corda, a velocidade do centro de massa é dada pela Eq. 2-11:

$$v_{\text{CM}} = v_{\text{CM},0} + a_{\text{CM}}t = v_{\text{CM},0} - \frac{gt}{1 + I_{\text{CM}}/MR_0^2}.$$

Assim, temos:

$$v_{\text{CM}} = -1{,}3\text{ m/s} - \frac{\left(9{,}8\text{ m/s}^2\right)(0{,}885\text{ s})}{1 + \dfrac{0{,}000095\text{ kg}\cdot\text{m}^2}{(0{,}12\text{ kg})(0{,}0032\text{ m})^2}} = -1{,}41\text{ m/s}$$

e, portanto, a velocidade linear escalar nesse instante é aproximadamente 1,4 m/s.

(d) A energia cinética de translação é

$$\tfrac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}12\text{ kg})(-1{,}41\text{ m/s})^2 = 0{,}12\text{ J.}$$

(e) A velocidade angular é

$$\omega = -\frac{v_{\text{CM}}}{R_0} = -\frac{-1{,}41\text{ m/s}}{0{,}0032\text{ m}} = 441\text{ rad/s} \approx 4{,}4\times10^2\text{ rad/s}$$

(f) A energia cinética de rotação é

$$\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 = \frac{1}{2}(9{,}50\times10^{-5}\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(441\text{ rad/s})^2 = 9{,}2\text{ J.}$$

**85.** O momento angular inicial do sistema constituído pela menina e o carrossel é zero. O momento angular final é $(I + MR^2)\omega$, que vamos tomar como sendo positivo. O momento angular final que associamos à pedra é negativo e igual a $-mRv$, sendo que $v$ é a velocidade escalar (positiva, por definição) da pedra em relação ao solo.

(a) De acordo com a lei de conservação do momento angular, temos:

$$0 = \left(I + MR^2\right)\omega - mRv \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{mRv}{I + MR^2}.$$

(b) A velocidade linear da menina é dada pela Eq. 10-18:

$$R\omega = \frac{mvR^2}{I + MR^2}.$$

**86.** (a) Interpretando $h$ como o aumento de altura do centro de massa do corpo e aplicando a lei da conservação de energia mecânica ($K_i = U_f$), obtemos, com o auxílio da Eq. 11-5,

$$\frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^3 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 = mg\left(\frac{3v^2}{4g}\right)$$

o que nos dá $I = mR^2/2$.

(b) De acordo com a Tabela 10-2(c), o corpo pode ser um cilindro.