

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**  
**ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)**  
**Кафедра МОЭВМ**

**ОТЧЕТ**  
**по лабораторной работе №1**  
**по дисциплине «Элементы функционального анализа»**  
**Тема: Норма элемента**

Студентка гр. 1384

Усачева Д. В.

Преподаватель

Коточигов А.М.

Санкт-Петербург, 2024

## **Задание.**

### **Вариант 17.**

В  $\mathbb{R}^3$  задан многогранник  $W$  и две точки  $x$  и  $y$ . Требуется вычислить норму Минковского для  $\|x\|$ ,  $\|y\|$  и  $\|x+y\|$ . Способ задания  $W$ : в условии даны шесть точек (вершины в первом октанте)  $\{\{7, 11, 0\}, \{10, 0, 8\}, \{0, 9, 12\}, \{13, 0, 0\}, \{0, 13, 0\}, \{0, 0, 13\}\}$

## **Основные теоретические положения.**

**Выпуклость.** Выпуклым телом называется выпуклое множество  $W$ , в котором существует такая точка  $w$ , что для любого  $x \in X$  найдется число  $\varepsilon(x) > 0$  такое, что множество  $W$  содержит отрезок  $w + tx$ , при всех  $t \in (-\varepsilon(x); \varepsilon(x))$ .

**Норма Минковского.** Пусть  $W$  – выпуклое множество и  $0$  является его внутренней точкой. Нормой Минковского, порожденной множеством  $W$ , называется:

$$\|x\| = \inf \{ \lambda : x/\lambda \in W, \lambda > 0 \}, x \in W \Rightarrow -x \in W.$$

**Теорема Минковского.** Если  $W$  – выпуклое ограниченное тело и  $0$  является его внутренней точкой, то выражение  $\|x\| = \inf \{ \lambda : x/\lambda \in W, \lambda > 0 \}$  задает норму в пространстве  $X$ .

**Биортогональный базис.** Это набор векторов в линейном пространстве, для которого каждый вектор ортогонален всем остальным векторам в этом наборе, за исключением самого себя, и все они нормированы (имеют единичную длину).

## **Выполнение работы.**

Для построения многогранника нужно трижды отразить координаты относительно координатных плоскостей.

Для выполнения Теоремы Минковского требуется выполнение свойств:

1. Нулевой элемент является внутренней точкой множества многогранника (верно по условию задания)
2.  $x \in W \Rightarrow -x \in W$  (верно, тк многогранник симметричен)
3. Выпуклость многогранника (верно)

Заданы следующие точки в первом октанте:

	X	Y	Z
D	7	11	0
E	10	0	8
G	0	9	12
A	13	0	0
K2	0	13	0
C	0	0	13

Остальные вершины получаются зеркальным отражением относительно координатных плоскостей (если  $v = (x, y, z)$  вершина, то и  $u = (+x, +y, +z)$  тоже вершина). Всего 18 вершин. Полученный многогранник представлен на рисунке 1.

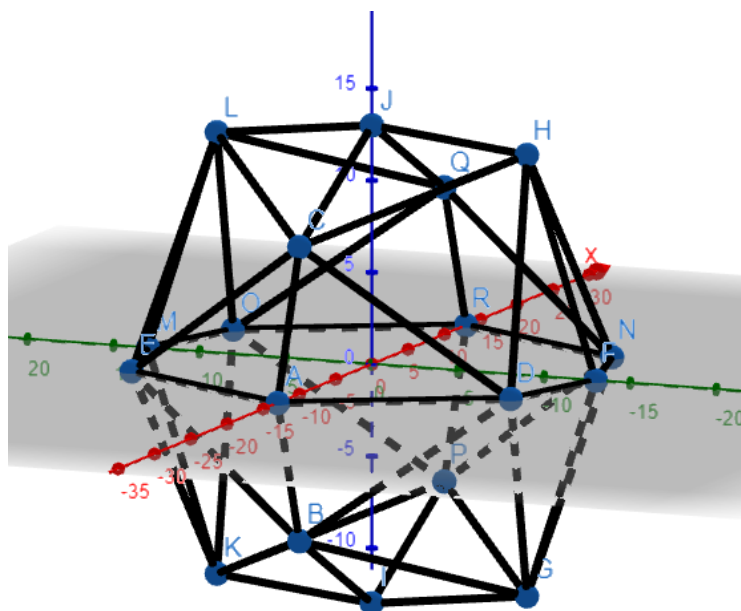


Рис. 1. многогранник.

Уравнения плоскостей для граней в первом октанте:

- ADE:  $88x + 48y + 33z - 1144 = 0$
- CEG:  $45x + 10y + 90z - 1170 = 0$
- K2DG:  $-24x - 84y - 28z + 1092 = 0$
- DEG:  $-116x - 92y - 83z + 1824 = 0$

Проверим, является ли многогранник выпуклым множеством. Для этого воспользуемся следующим условием выпуклости многогранника: для любой

плоскости грани все вершины лежат в одном полупространстве. У W 32 грани, но в силу симметрии, достаточно проверить грани в первом квадранте.

Вершины:

Вершины/Плоскости	ADE	CEG	K2DG	DEG
1. (-13, 0, 0)	-	-	+	+
2. (-10, 0, -8)	-	-	+	+
3. (-10, 0, 8)	-	-	+	+
4. (-7, -11, 0)	-	-	+	+
5. (-7, 11, 0)	-	-	+	+
6. (0, -13, 0)	-	-	+	+
7. (0, -9, -12)	-	-	+	+
8. (0, -9, 12)	-	-	+	+
9. (0, 0, -13)	-	-	+	+
10. (0, 0, 13)	-	0	+	+
11. (0, 9, -12)	-	-	+	+
12. (0, 9, 12)	-	0	0	0
13. (0, 13, 0)	-	-	0	+
14. (7, -11, 0)	-	-	+	+
15. (7, 11, 0)	0	-	0	0
16. (10, 0, -8)	-	-	+	+
17. (10, 0, 8)	0	0	+	0
18. (13, 0, 0)	0	-	+	+

Все знаки совпадают.

Многогранник выпуклый, то есть условия теоремы Минковского выполнены.

Найдем биортогональный базис для каждой из граней в первом октанте:

1) Конус OADE. Найдем биортогональный базис для OA, OE, OD:

$$OA^{\wedge} = (1 / (OA1, OA)) * OA1 = (0.0769, -0.0489, -0.0961), OA1 = OE \times OD$$

$$OE^{\wedge} = (1 / (OE1, OE)) * OE1 = (0, 0, 0.125), OE1 = OA \times OD$$

$$OD^{\wedge} = (1 / (OD1, OD)) * OD1 = (0, 0.0909, 0), OD1 = OA \times OE$$

2) Конус OCEG. Найдем биортогональный базис для OC, OE, OG:

$$OD^{\wedge} = (1 / (OD1, OD)) * OD1 = (0.0656, 0.0492, -0.0820), OD1 = OE \times OG$$

$$OE^{\wedge} = (1 / (OE1, OE)) * OE1 = (0.0541, -0.0344, 0.0574), OE1 = OG \times OD$$

$$OG^{\wedge} = (1 / (OG1, OG)) * OG1 = (-0.0481, 0.0306, 0.0601), OG1 = OD \times OE$$

3) Конус OK2DG. Найдем биортогональный базис для OB, OG, OD:

$$OB^{\wedge} = (1 / (OB1, OB)) * OB1 = (-0.1209, 0.0769, -0.1282), OB1 = OD \times OG$$

$$OD^{\circ} = (1 / (OD1, OD)) * OD1 = (0.1429, 0, 0), OD1 = OG \times OB$$

$$OG^{\circ} = (1 / (OG1, OG)) * OG1 = (0, 0, 0.1111), OG1 = OD \times OB$$

4) Конус ODEG. Найдем биортогональный базис для OE, OG, OD:

$$OC^{\circ} = (1 / (OC1, OC)) * OC1 = (-0.0615, -0.0462, 0.0769), OC1 = OE \times OG$$

$$OE^{\circ} = (1 / (OE1, OE)) * OE1 = (0.1, 0, 0), OE1 = OG \times OC$$

$$OG^{\circ} = (1 / (OG1, OG)) * OG1 = (0, 0.0667, 0), OG1 = OE \times OC$$

Зададим векторы, для которых необходимо вычислить норму.

$$X = -A_{-}(1, 1) * A_{-}1 + E_{-}(1, 3) * E_{-}1 = [89 \ 0 \ 64]$$

$$Y = C_{-}(1, 3) * C_{-}1 - D_{-}(1, 2) * D_{-}1 = [77 \ 121 \ 169]$$

Найдем коэффициенты разложения и норму для каждой точки по каждому базису:

1) Следовательно, раскладываем векторы по базису OA, OE, OD:

$$OX = k1 * OA + k2 * OE + k3 * OD$$

$$k1 = (OX, OA^{\circ}), k2 = (OX, OE^{\circ}), k3 = (OX, OD^{\circ})$$

$$\|X\| = k1 + k2 + k3 = 3.6923076923$$

$$OY = k1 * OA + k2 * OE + k3 * OD$$

$$k1 = (OY, OA^{\circ}), k2 = (OY, OE^{\circ}), k3 = (OY, OD^{\circ})$$

$$\|Y\| = k1 + k2 + k3 = 11.790209790199999$$

$$OZ = OX + OY = k1 * OA + k2 * OE + k3 * OD$$

$$k1 = (OZ, OA^{\circ}), k2 = (OZ, OE^{\circ}), k3 = (OZ, OD^{\circ})$$

$$\|Z\| = k1 + k2 + k3 = 15.482517482500004$$

Точка	k1	k2	k3	$\ W\  = k1 + k2 + k3$
X	0.692	8	0	8.692
Y	-16.25	21.125	11.0	16.875
X+Y=Z	-15.557	29.125	11.0	24.568

Далее все считается аналогичным образом.

2) По базису OE, OG, OD

Точка	k1	k2	k3	$\ W\  = k1 + k2 + k3$
X	0.590	8.487	-0.433	-1.624
Y	-2.852	9.697	10.158	17.694
X+Y=Z	-2.262	18.184	9.726	25.648

3) по базису OB, OG, OD:

Точка	k1	k2	k3	$  W   = k1 + k2 + k3$
X	-18.963	12.714	7.111	1.862
Y	-21.667	11.000	18.778	8.111
X+Y=Z	-40.630	23.714	25.889	9.973

4) по базису OC, OE, OG:

Точка	k1	k2	k3	$  W   = k1 + k2 + k3$
X	-0.554	8.900	-0.433	7.913
Y	2.677	7.700	8.067	18.444
X+Y=Z	2.123	16.600	8.067	26.790