Степаненко Денис 1384, вариант 15.

Теория:

1) **Оператором** называется отображение $A: F \to G$, где F, G – некоторые пространства.
2) Оператор $\mathrm{A}: X \to Y$ действующий из линейного пространства X в линейное пространство Y называется **линейным**, если:
$$A(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1Ax_1 + k_2Ax_2 \ \forall\ k_1, k_2\ \in \mathbb{C}\ \ \forall\ x_1, x_2\ \in X$$
3) **Нормой** оператора $\mathrm{A}: X \to Y$ называется число
$$\|A\| = sup\{\|Ax\|: \|x\| < 1\}$$
4) Линейный оператор А, отображающий пространство X на себя, называется **обратимым**, если существует $B: X \to X$ такой, что $AB = BA = I$, где I – единичный (тождественный) оператор.
5) В конечномерных пространствах: **критерий обратимости** - оператор обратим тогда и только тогда, когда ядро оператора содержит только нулевой элемент.
6) Оператор A: X → Y называется **непрерывным**, если $\forall x_n \in X, \|x_n – x_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, выполнено $\|Ax_n – Ax_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$
7) Пусть A – линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H. **Сопряженным** к нему называется оператор A*, определяемый соотношением $(Ax, y)\ = (x,\ A^*y)$ для любых x, y ∈ H
8) Теорема: для любого линейного оператора A если сопряженный к нему оператор A* существует, то оператор A* линейный.
Пусть $x, y\ \in E, \alpha, \beta \in R$. Тогда для любого $z\ \in E$: $(\ A^*(\alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y}), z) = ((\alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y}), Az) = \alpha(x, Az) + \beta(y, Az) = \alpha(\ A^*x, z) + \beta(\ A^*y, z) = (\alpha\ A^*x + \beta\ A^*y, z)$
Так как вектор z – любой, то справедливо: $A^*(\alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y}) =\ \alpha\ A^*x + \beta\ A^*y$ ■
9) Числом обусловленности линейного оператора A называется: $cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$
10) (Следствие теоремы о достаточном условии обратимости оператора) Пусть линейный непрерывный оператор A отображает банахово пространство X в себя. Если уравнение $Ax = b$ после перезаписи $(I - B)x = b$ допускает оценку $\|\mathrm{B}\| = q < 1$, то последовательность $x_{n+1} = b + Bx_n, n \in \overline{1:n}, x_0$ – произвольный элемент пространства X.
11) Неравенство для оценки относительной погрешности:
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 18.4286 & -6.8571 & 10.2857 & -3.4286 \\ -30.2143 & 6.4286 & 57.8571 & -55.2857 \\ 4.7143 & 3.4286 & 32.1429 & -19.7143 \\ 36 & 0 & -54 & 63 \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Вычислим нормы оператора А в пространствах l_4^1 и l_4^∞.

В l_4^∞: $\|A\| = sup_m \sum_k |a_{(m,k)}|$ – максимум строковых сумм;

$\|A\| = 154.2857$

Достигается на векторе, где: $x_k = sign(a_{4,k})$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\sum_m \lvert a_{(m,1)} \rvert$	$\sum_m \lvert a_{(m,2)} \rvert$	$\sum_m \lvert a_{(m,3)} \rvert$	$\sum_m \lvert a_{(m,4)} \rvert$
39	149.7857	60	153

В l_4^1: $\|A\| = sup_k \sum_m |a_{(m,k)}|$ – максимум столбцовых сумм;

$\|A\| = 153$

Достигается на векторе, где: $x_k = \begin{cases} 0, \text{если k} \neq \text{ n, где достигается масимум} \\ 1, \text{если k} \neq \text{ n, где достигается масимум} \end{cases}$

Достигается на векторе: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\sum_k \lvert a_{(1,k)} \rvert$	$\sum_k \lvert a_{(2,k)} \rvert$	$\sum_k \lvert a_{(3,k)} \rvert$	$\sum_k \lvert a_{(4,k)} \rvert$
89.3571	16.7143	154.2857	141.4286

2. Вычисление нормы обратного оператора в пространствах l_4^1 и l_4^∞.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1429 & 0.0847 & -0.127 & 0.0423 \\ 0.1561 & 0.2063 & -0.2169 & 0.1217 \\ -0.1146 & -0.0423 & 0.1499 & 0.0035 \\ -0.1799 & -0.0847 & 0.2011 & -0.0053 \end{pmatrix}$$

В l_4^{∞}: $\|A^{-1}\| = 0.7011$– максимум строковых сумм;

Достигается на векторе: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\sum_m \lvert a_{(m,1)} \rvert$	$\sum_m \lvert a_{(m,2)} \rvert$	$\sum_m \lvert a_{(m,3)} \rvert$	$\sum_m \lvert a_{(m,4)} \rvert$
0.3968	0.7011	0.3104	0.4709

В l_4^1: $\|A^{-1}\| = 0.6949$ – максимум столбцовых сумм;

Достигается на векторе: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\sum_k \lvert a_{(1,k)} \rvert$	$\sum_k \lvert a_{(2,k)} \rvert$	$\sum_k \lvert a_{(3,k)} \rvert$	$\sum_k \lvert a_{(4,k)} \rvert$
0.5935	0.418	0.6949	0.1728

3. Число обусловленности оператора A в пространствах l_4^1 и l_4^{∞}.

Число обусловленности для ограниченного оператора показывает, как сильно малые возмущения аргумента ($\pm\delta$) влияют на возмущения решения.

a) в l_4^{∞}: $cond(A) = 153.0 \cdot 0.7011 = 107.2619$

b) в l_4^1: $cond(A) = 154.2857 \cdot 0.6949 = 107.2109$

4. Сформировать матрицу G=A*A, показать, что она положительно определена. Найти ее собственные числа и векторы.

Матрица G используется для расчета нормы оператора, отражающего в пространство l_4^2, когда $A \neq A^{-1}$.

$$G = \begin{pmatrix} 504.1837 & 614.2041 & 191.0204 & -102.8571 \\ 614.2041 & 6492.3061 & 3251.0204 & -4955.5102 \\ 191.0204 & 3251.0204 & 4875.0612 & -5109.6122 \\ -102.8571 & -4955.5102 & -5109.6122 & 7425.9184 \end{pmatrix}$$

Положительную определенность матрица доказываем через критерий Сильвестра:

δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
504.1837>0	2896068.0962>0	9315683475.3149>0	12569622362718.049>0

Все угловые миноры больше 0, следовательно, матрица положительно определена.

Собственные числа матрицы G:

Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
15376.0599	2710.1661	350.3905	860.8528

Собственные векторы матрицы G:

e_1	e_2	e_3	e_4
$(0.0339\ \ 0.1647\ 0.9109\ \ 0.3768\ )^T$	$(0.5556\ \ 0.7966\ - 0.2106\ \ 0.111\ )^T$	$(0.4967\ - 0.4967\ - 0.2101\ \ 0.6801)^T$	$(-0.666\ \ 0.3026\ - 0.286\ \ 0.619)^T$

5. Число обусловленности оператора A в пространстве $\boldsymbol{l_4^2}$.

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \ = \sqrt{\max_i \Lambda_i}\sqrt{(min_i\, \Lambda_i)^{-1}} = \ 6.6244$$

Оценим норму линейного оператора A:

$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (Gx, x) = \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\, \Lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{4} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{4} \Lambda_i x_i^2 \le \max_i \Lambda_i\, \|x\|^2$.

Отсюда $\|A\|^2 \le \max_i \Lambda_i$ -> $\|A\| \le \max_i \Lambda_i$.

Если $x \ = \ max_i e_i$, то $\|Ax\| = \left\|\max_i \Lambda_i \cdot \max_j \mathrm{e}_j\right\| = \ \max_i \Lambda_i$. Таким образом, $\|A\| = \max_i \Lambda_i$

В случае пространства l_4^2 она будет вычислять по формуле $\sqrt{\max_\mathrm{i} \Lambda_i}$, где Λ_i – собственные числа матрицы G. Так как для обратного оператора собственные числа обратные, то мы будем искать корень из максимального обратного собственного числа оператора G.

Вектора, на которых достигается нормы $\|A\|$ и $\left\|A^{-1}\right\|$ соответственно: e_1 и e_3.

6. Методом итераций решить систему уравнений $\boldsymbol{Ax = b}$. Начальное приближение $\boldsymbol{x_0} = (\boldsymbol{1, 1, 1, 1}), \boldsymbol{A = I - B},\ \boldsymbol{B = G^{-1}},\ \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{1/2, 1/3, 1/4, 1/5})$. Найти точное решение и сравнить его с 5 и 10 итерациями.

Метод реализуется через итерационную последовательность, опирающуюся на свойство о допустимости оценки B (см. теорию).

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0.0025 & -0.0004 & -0.0003 & -0.0005 \\ -0.0004 & 0.0004 & 0.0001 & 0.0003 \\ -0.0003 & 0.0001 & 0.0008 & 0.0006 \\ -0.0005 & 0.0003 & 0.0006 & 0.0007 \end{pmatrix},\ \ \|B\| = 0.0037 < 1,$$ значит последовательность

$x_{n+1} = b + Bx_n$ сходится к решению уравнения x*.

$$x* = \begin{pmatrix} 0.501 \\ 0.3333 \\ 0.2502 \\ 0.2002 \end{pmatrix} \quad x_5 = \begin{pmatrix} 0.501 \\ 0.3333 \\ 0.2502 \\ 0.2002 \end{pmatrix} \quad x_{10} = \begin{pmatrix} 0.501 \\ 0.3333 \\ 0.2502 \\ 0.2002 \end{pmatrix}$$

Результаты на 5 и 10 итерациях совпадают с точным решением, т.к. скорость сходимости метода очень высокая (сходятся за 2 итерации) из-за небольшого значения нормы матрицы B (можно говорить также о спектральном радиусе).