ДЗ 2. Норма оператора.

Вариант 12.

Выполнила: Пчелинцева Кристина Романовна, студентка группы 1384

Теоретические положения

1. Норма оператора

   $\|\mathrm{A}\| = \sup\{\|\mathrm{Ax}\|, \|\mathrm{x}\| \leq 1\}$

   Можно показать, что норма оператора в l^1 будет равна максимуму среди сумм модулей в столбце, а в l^∞ - в строке

2. Число обусловленности

   Число обусловленности определяет то, насколько чувствительна система ЛУ к изменению правой части.
   $\mathrm{cond}(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\| \cdot \|\mathrm{A}^{-1}\|$

   Для систем $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}; \mathrm{A}(\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x}) = \mathrm{b} + \Delta\mathrm{b}$
   Справедливо неравенство $\frac{\|\Delta\mathrm{x}\|}{\|\mathrm{x}\|} \leq \mathrm{cond}(\mathrm{A})\frac{\|\Delta\mathrm{b}\|}{\|\mathrm{b}\|}$

Задана матрица $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 645 & -1422 & 954 & -1266 \\ -684 & 1521 & -1008 & 1332 \\ -1074 & 2412 & -1611 & 2154 \\ 246 & -522 & 342 & -435 \end{bmatrix}$

Задание 1

Необходимо посчитать её норму в l_4^1 и l_4^∞

Для l_4^1 норму можно посчитать как максимум столбцовых сумм. Она будет равна $\mathbf{5877}$ И достигается норма на векторе $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Для l_4^∞ норму можно посчитать как максимум строковых сумм. Она будет равна $\mathbf{7251}$ И достигается норма на векторе $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Необходимо посчитать норму A^{-1} в l_4^1 и l_4^∞

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{235}{81} & \frac{58}{9} & -\frac{122}{27} & \frac{470}{81} \\ \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{16}{27} & -\frac{20}{27} \\ 6 & -\frac{116}{9} & \frac{247}{27} & -\frac{314}{27} \\ \frac{206}{81} & -\frac{50}{9} & \frac{106}{27} & -\frac{403}{81} \end{bmatrix}$$

Для l_4^1 норму можно посчитать как максимум столбцовых сумм. Она будет равна $\frac{77}{3}$ И достигается норма на векторе $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Для l_4^∞ норму можно посчитать как максимум строковых сумм. Она будет равна $\frac{119}{3}$ И достигается норма на векторе $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Задание 3

Необходимо посчитать число обусловленности матрицы A в рассмотренных ранее пространствах.

$\mathrm{cond}(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$

1. l_4^1: $\mathrm{cond}(A) = 5877 \cdot \frac{77}{3} = 150843$
2. l_4^∞: $\mathrm{cond}(A) = 7251 \cdot \frac{119}{3} = 287623$

Задание 4

Получим матрицу $G = A^*A$

$$G = \begin{bmatrix} 2097873 & -4676454 & 3119148 & -4148064 \\ -4676454 & 10425753 & -6954012 & 9248742 \\ 3119148 & -6954012 & 4638465 & -6169284 \\ -4148064 & 9248742 & -6169284 & 8205921 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2.098 \cdot 10^6 & -4.676 \cdot 10^6 & 3.119 \cdot 10^6 & -4.148 \cdot 10^6 \\ -4.676 \cdot 10^6 & 1.043 \cdot 10^7 & -6.954 \cdot 10^6 & 9.249 \cdot 10^6 \\ 3.119 \cdot 10^6 & -6.954 \cdot 10^6 & 4.638 \cdot 10^6 & -6.169 \cdot 10^6 \\ -4.148 \cdot 10^6 & 9.249 \cdot 10^6 & -6.169 \cdot 10^6 & 8.206 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

И найдём её собственные числа и вектора:

$\lambda_1 = 0.0017, \lambda_2 = 72.9004, \lambda_2 = 1139.3792, \lambda_2 = 25366799.7187$

$d_1 = \begin{bmatrix} -1.1586 \\ 0.1479 \\ 2.3309 \\ 1.0 \end{bmatrix}, d_2 = \begin{bmatrix} -3.8096 \\ -3.9768 \\ -2.0702 \\ 1.0 \end{bmatrix}, d_2 = \begin{bmatrix} 0.8056 \\ -0.5227 \\ 0.0046 \\ 1.0 \end{bmatrix}, d_2 = \begin{bmatrix} -0.5056 \\ 1.1272 \\ -0.7519 \\ 1.0 \end{bmatrix}$ 1

Заметим, что все собственные числа положительны, откуда можно судить о положительной определённости матрицы G.

Матрица G позволяет определить норму матрицы A в l_4^2 в случае, когда $A \neq A^{-1}$.

$||G|| = \max \lambda_i$

$||A|| = \sqrt{\max \lambda_i}$ следует из того, что $||Ax||^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (Gx, x) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i x_i^2 \leq \max \lambda_i ||x|| = \max \lambda_i$

Задание 5

Необходимо вычислить число обусловленности матрицы A в пространстве l_4^2

Норма A в этом пространстве выражается как корень из максимального из собственных чисел матрицы AA^*, т.е. G.

Таким образом, $||A|| = \sqrt{\lambda_4} = \sqrt{25366799.7187} \approx 5037$

Норму A^{-1} можно получить из того факта, что, если матрица A имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то матрица A^{-1} будет иметь собственные числа $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$. Отсюда получаем, что норма A^{-1} будет равна корню из обратного к минимальному собственному числу матрицы G.

$||A^{-1}|| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{\sqrt{0.0017}} \approx 24.2$

Тогда $\mathrm{cond}(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \approx 5037 \cdot 24.2 = 121895.4$