**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)**

**Кафедра МОЭВМ**

# ОТЧЕТ

**по лабораторной работе №2**

**по дисциплине «Элементы функционального анализа»**

**Тема: Норма оператора**

| | | |
|---|---|---|
| Студентка гр. 1384 | ____________________ | Усачева Д. В. |
| Преподаватель | ____________________ | Коточигов А.М. |

Санкт-Петербург, 2024

**Задание.**

Вариант 17

1) Вычислить нормы оператора А в пространствах $l_4^1$ и $l_4^\infty$
2) Вычислить нормы обратного оператора в пространствах $l_4^1$ и $l_4^\infty$
3) Вычислить число обусловленности оператора А в пространствах $l_4^1$ и $l_4^\infty$
4) Сформировать матрицу G=A*A, показать, что она положительно определена. Найти ее собственные числа и векторы.
5) Вычислить число обусловленности оператора А в пространстве $l_4^2$.

$$A = \begin{matrix} 135 & -84 & 126 & -27 \\ \frac{450}{11} & -\frac{201}{11} & \frac{306}{11} & -\frac{225}{11} \\ -\frac{216}{11} & \frac{144}{11} & -\frac{135}{11} & \frac{108}{11} \\ \frac{1440}{11} & -\frac{960}{11} & \frac{1692}{11} & \frac{171}{11} \end{matrix} \quad A: R^4 \to R^4$$

**Основные теоретические положения.**

1. Оператором называется отображение $A$: $F \rightarrow G$, где F, G – некоторые пространства.
2. Оператор A: $X \rightarrow Y$ действующий из линейного пространства X в линейное пространство Y называется линейным, если: $A(k1x1 + k2x2) = k1Ax1 + k2Ax2$ $\forall\ k1, k2 \in \mathbb{C}\ \ \forall\ x1, x2 \in X$
3. Нормой оператора A: $X \rightarrow Y$ называется число $\|A\| = sup\{\|Ax\|: \|x\| < 1\}$
4. Линейный оператор A, отображающий пространство X на себя, называется обратимым, если существует $B$: $X \rightarrow X$ такой, что $AB = BA = I$, где I – единичный (тождественный) оператор.
5. Пусть A – линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H. Сопряженным к нему называется оператор A∗, определяемый соотношением $(Ax, y) = (x, A{*}y)$ для любых x, y ∈ H
6. Числом обусловленности линейного оператора A называется: $cond(A) = \|A\| \cdot \|A{-}1\|$. Число обусловленности определяет то, насколько чувствительна система

ЛУ к изменению правой части.

**Выполнение работы**

1. <u>Вычислим нормы оператора A в пространствах $l_4^1$ и $l_4^\infty$</u>

Для $l_4^1$ норму считаем как максимум столбцовых сумм $\frac{3591}{11}$ достигается норма на векторе $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

Для $l_4^\infty$ норму считаем как максимум строковых сумм $\frac{4263}{11}$ достигается норма на векторе $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$

2. <u>Вычисление нормы обратного оператора в пространствах $l_4^1$ и $l_4^\infty$</u>

$$A^{-1} = \begin{matrix} -\frac{89}{297} & \frac{244}{891} & -\frac{446}{891} & \frac{139}{891} \\ -\frac{2}{33} & \frac{5}{33} & \frac{10}{99} & \frac{1}{33} \\ \frac{8}{33} & -\frac{16}{99} & \frac{155}{297} & -\frac{4}{33} \\ -\frac{64}{297} & \frac{128}{891} & -\frac{340}{891} & \frac{107}{891} \end{matrix}$$

Для $l_4^1$ норму считаем как максимум столбцовых сумм $\frac{149}{99}$ достигается норма на векторе $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

Для $l_4^\infty$ норму считаем как максимум строковых сумм $\frac{1096}{891}$ достигается норма на векторе $\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$

3. <u>Вычислим число обусловленности оператора A в пространствах $l_4^1$ и $l_4^\infty$</u>

$l_4^\infty cond(A) = \frac{1096}{891} \cdot \frac{4263}{11} = 476{,}7113$

$l_4^1\ cond(A) = \frac{149}{99} \cdot \frac{3591}{11}$ = 491,3305

4. Сформируем матрицу G=A*A, покажем, что она положительно определена. Найдем ее собственные числа и векторы.

Матрица G используется для расчета нормы оператора, отражающего в пространство $l_4^2$, когда $A \neq A^{-1}$ .

$$G = \begin{matrix} 37421.0248 & -23766.2802 & 38528.9256 & -2639.7190 \\ -23766.2802 & 15177.6033 & -24669.5041 & 1414.1736 \\ 38528.9256 & -24669.5041 & 40302.3967 & -1702.4793 \\ -2639.7190 & 1414.1736 & -1702.4793 & 1480.6942 \end{matrix}$$

Собственные числа матрицы G:

$\lambda_1$ = 0.9701

$\lambda_2$= 22.1559

$\lambda_3$= 1748.5478

$\lambda_4$= 92773.4005

Заметим, что все собственные числа положительны, откуда можно судить о положительной определённости матрицы G.

Собственные векторы матрицы G:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1.3871 \\ 0.066 \\ -1.2747 \\ 1 \end{bmatrix} e_2 = \begin{bmatrix} -7.4584 \\ -23.9284 \\ -7.4545 \\ 1 \end{bmatrix} e_3 = \begin{bmatrix} 2.3154 \\ 3.5234 \\ -4.9057 \\ 1 \end{bmatrix} e_4 = \begin{bmatrix} -2.269 \\ -1.7367 \\ 1.671 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Вычислим число обусловленности оператора A в пространстве $l_4^2$.

Необходимо вычислить число обусловленности матрицы A в пространстве $l_4^2$

Норма A в этом пространстве выражается как корень из максимального из собственных чисел матрицы A A*, т.е. G. Таким образом,

||A|| = $\sqrt{\lambda\_4} = \sqrt{92773.4005}$ = 304.5766

Норму $A^{-1}$ можно получить из того факта, что, если матрица A имеет собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, то матрица $A^{-1}$ будет иметь собственные числа $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_4}$. Отсюда получаем, что норма $A^{-1}$ будет равна корню из обратного к минимальному собственному числу матрицы G.

$||A|| = \frac{\sqrt{1}}{\lambda_1} = \sqrt{1}/0.9701 = 1.0152$

$cond(A) = 304.5766 \cdot 1.0152 = 309.2813$