МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МОЭВМ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №4
по дисциплине «Элементы функционального анализа»
Тема: Продолжение функционала.

Студентка гр. 1384	____________________	Усачева Д. В.
Преподаватель	____________________	Коточигов А.М.

Санкт-Петербург
2024

Задание.

Вариант 17

Подпространство: $(x, k) = \ 0$

$$k = \{4, 1, 5, 5\}$$

Функционал на K:

$$g(x) = (g, x)$$

$$g = \{8, 6, 6, 8\}$$

Основные теоретические положения.

Норму функционала можно вычислить как максимум его значений на аргументах с нормой не более единицы:

$$f : X \to R \quad ||f|| = sup|f(x)| : ||x|| \leq 1$$

<u>*Теорема Хана-Банаха*</u>: линейный непрерывный функционал, заданный на подпространстве банахова пространства можно продолжить на все пространство с сохранением нормы.

<u>*Теорема Рисса-Фишера*</u>: любой функционал в гильбертовом пространстве можно отождествить с некоторым элементом в этом пространстве:

$$f : H \to R, \quad f(x) = (f, x)$$

Выполнение работы.

1. <u>Вычисление нормы g как функционала на $\mathbb{R}^4$.</u>

Построим базис $\{e_i\}_{i=1}^4$ под функционал такой, что$(g, e_1) \neq 0$

$(g, e_k) = 0, k = 2{,}3{,}4.$

Определим $e_1 = g$, $e_2 = (0\ 1\ 0\ 0), e_3 = (0\ 0\ 1\ 0), e_4 = (0\ 0\ 0\ 1)$

Теперь проведём ортогонализацию Грама-Шмидта и нормирование полученных векторов:

$$e_1 = \frac{\sqrt{2}}{10}\begin{pmatrix}4\\3\\3\\4\end{pmatrix}, e_2 = \frac{\sqrt{82}}{205}\begin{pmatrix}-6\\20\\-9\\-6\end{pmatrix}, e_3 = \frac{\sqrt{82}}{82}\begin{pmatrix}-3\\0\\8\\-3\end{pmatrix}, e_4 = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Рассмотрим скалярное произведение:

$$(g,x)=(g,x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)=\sum_{i=1}^{4}x_i(g,e_i)=\ x_1(g,e_1)$$

Теперь, так как $||g||=\max\limits_{||x||\le 1}(g,x)=\max\limits_{||x||\le 1}(g,x_1e_1)=\max\limits_{||x||\le 1}x_1(g,e_1)=(g,e_1)\max\limits_{||x||\le 1}x_1$, имеет смысл для максимизации скалярного данного выражения взять $x=(1\ 0\ 0\ 0)$, тогда $||g||=(g,e_1)=10\sqrt{2}$

2. <u>Вычисление нормы g как функционала на K.</u>

Построим базис такой a,b,c,d, что

$(a,k)=0,(a,g)=1$ – в подпространстве K, но вне ядра функционала

$(b,k)=0,(b,g)=0$ – в подпространстве K и в ядре функционала

$(c,k)=0,(c,g)=0$ – в подпространстве K и в ядре функционала

$(d,a)=0,(d,b)=0,(d,c)=0$ – вне подпространства K

Составим СЛУ для a:

$$\begin{cases}4a_1+a_2+5a_3+5a_4=0\\8a_1+6a_2+6a_3+8a_4=1\end{cases}$$

Решением будет $\left(-\frac{3a_3}{2}-\frac{11a_4}{8}-\frac{1}{16},a_3+\frac{a_4}{2}+\frac{1}{4},a_3,a_4\right)$,

Для a возьмём $a_3=a_4=0$. Итак, $a=\left(-\frac{1}{16},\frac{1}{4},0{,}0\right)$.

СЛУ для b,c одинаковы:

$$\begin{cases}4x_1+x_2+5x_3+5x_4=0\\8x_1+6x_2+6x_3+8x_4=0\end{cases}$$

Тогда решением будет: $\left(-\frac{3x_3}{2}-\frac{11x_4}{8},x_3+\frac{x_4}{2},x_3,x_4\right)$.

Для b возьмём $x_3=2;x_4=0$. $b=(-3,2,2,0)$

Для c возьмём $x_3=0;x_4=8$. $c=(-11,4,0,8)$

Теперь составим СЛУ для d:

$$\begin{cases}-\frac{d_1}{16}+\frac{d_2}{4}=0\\-3d_1+\ 2d_2+\ 2d_3=0\\-11d_1+4d_2+\ 8d_4=0\end{cases}$$

Общее решение которой выглядит как $(\frac{4d_4}{5},\frac{d_4}{5},d_4,d_4)$.

Положим $d = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 1, 1\right)$.

Ортонормируем полученный базис:

$$a = \frac{\sqrt{17}}{17}\begin{pmatrix}-1\\4\\0\\0\end{pmatrix}\ b = \frac{\sqrt{714}}{714}\begin{pmatrix}-20\\-5\\12\\0\end{pmatrix}\ c = \frac{\sqrt{2814}}{2814}\begin{pmatrix}-10\\-5\\-25\\30\end{pmatrix}\ d = \frac{\sqrt{67}}{67}\begin{pmatrix}4\\1\\5\\5\end{pmatrix}$$

Теперь можно вычислить норму в K: $\left|\left|g\right|\right|_K = (g, a) = 16\frac{\sqrt{17}}{17}$,

Что меньше $\left|\left|g\right|\right|_{\mathbb{R}^4}$.

3. Продолжение функционала

Необходимо определить функционал на базисе a, b, c, d такой, что

$$f(a) = g(a), f(b) = f(c) = f(d) = 0$$

Тогда $\left|\left|f\right|\right| = \max\limits_{||x||\leq 1}(f, x) = (f, a)\max\limits_{||x||\leq 1} x_1 = (f, a) = (g, a) = \left|\left|g\right|\right|$, что и требовалось.

Составим СЛУ для условий выше:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{17}}{17}(-f_1 + 4f_2) = 16\frac{\sqrt{17}}{17} \\ \frac{\sqrt{714}}{714}(-20f_1 - 5f_2 + 12f_3) = 0 \\ \frac{\sqrt{2814}}{2814}(-10f_1 - 5f_2 - 25f_3 + 30f_4) = 0 \\ \frac{\sqrt{67}}{67}(4f_1 + f_2 + 5f_3 + 5f_4) = 0 \end{cases}$$

Решением которой является $f = (-16/17, 64/17, 0, 0)$

Так, условия на сохранение нормы соблюдены и значение функционала f будет совпадать со значениями функционала g на подпространстве K в силу поставленных на f условий.