Чем вам может быть полезен это курс...

Обучение и технический прогресс

До 60-х годов студент технического вуза изучал "аналитическую геометрию"

(Евклид + Декарт на плоскости без матриц и прочей линейной алгебры)

Бурный рост вычислительной техники заставил ввести курс линейной алгебры в вузах

Это прошло гладко – большинство преподавателей это знали

этому давно учили в университетах

заодно решили ввести дифференциальное исчисление в школы

но там не было людей готовых этому учить

в результате в школ настоящая геометрия заменилась фиктивной производной

но навык учить производной все же есть

сложнее с программированием

Кемени Введение...

программисты без компьютера

"аналоговое обучение"

календарный план

Лекция 1. Линейные нормированные пространства. Дз-1.

аналог R^n

должно быть: сложение элементов, умножение на число

Пример (из рядов Фурье – равенство Парсевля)

функции на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ такие, что $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$

коэффициенты Фурье $\{c_n\} : \sum |c_n|^2 < \infty$

Функциональный анализ – наследник математического анализа и линейной алгебры.

Должны быть определены пределы

здесь (!) рассматриваются нормированные пространства

Определение

Нормой в линейном пространстве X называется любая функция, отображающая пространство X в множество вещественных неотрицательных чисел $x \to ||x||$ такая, что

1) для любого $x \in X$ и для любого $k \in K$ выполнено равенство $||kx|| = |k|||x||$;

2) для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$;

3) для любого $x \in X$ справедливо неравенство $||x|| \geq 0$, причем равенство $||x|| = 0$ возможно только для $x = 0$.

Норма позволяет измерять расстояние $||x - y||$ между парой элементов линейного пространства $x, y \in X$. Следовательно, можно говорить о пределах последовательностей $x_n \in X : x_n \to x_0$, если $||x_n - x_0|| \to 0$(!! линейное пространство).

Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ образует линейное пространство. Норма там есть. Но последовательность рациональных чисел, сходящуюся к числу $\sqrt{2}$, нельзя назвать сходящейся в смысле нашего определения.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n, k > N \quad ||x_n - x_k|| < \epsilon.$$

Приняв такое определение, всегда можно **расширить** исходное пространство так, что всякая фундаментальная последовательность в нем имеет предел.

Определение нормы допускает множество реализаций в одном и том же линейном пространстве.

Примеры

1) $l_n^1 = \{x = (x_1, \dots, x_n) : ||x|| = |x_1| + \dots + |x_n|\}$.

2) $l_n^2 = \{x = (x_1, \dots, x_n) : ||x|| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}\}$ – это стандартное n-мерное евклидово пространство.

3) $l_n^\infty = \{x = (x_1, \dots, x_n) : ||x|| = \max\{|x_k|,\ k = 1, \dots, n\}\}$.

Свойства пространства с нормой во многом определяются **геометрией его шара** $\{x : ||x|| < 1\}$.

В этих примерах для малых размерностей легко изобразить шары графически.

Конечномерные пространства (то есть **пространства с конечным базисом**) играют в ФА вспомогательную роль.

Главный предмет изучения бесконечномерные пространства.

1a) $l^1 = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) : ||x|| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$.

2a) $l^2 = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) : ||x|| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} < \infty\}$

3a) $l^\infty = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) : ||x|| = \sup\{|x_k|,\ k = 1, \dots, n, \dots\} < \infty\}$.

1b)$L^1(a, b) = \{f(x) : ||f|| = \sqrt{\int_a^b |f(x)| dx} < \infty\}$

2b)$L^2(a, b) = \{f(x) : ||f|| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} < \infty\}$

L^∞ 3b) $L^i nfty(a, b) = \{f(x) : ||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in (a, b) < \infty\}$
Необходимо проверить что введенные в примерах функции являются нормами – удовлетворяют свойствам, перечисленным в определении. Для пространств с первое и третье свойство очевидны. Проверка неравенства треугольника в первом и третьем примерах переводится на координаты и сводится к числовым неравенствам

$$|a + b| \le |a| + |b|, \quad \max\{|a|, |b|\} \le |a| + |b|.$$

Свойство 3 –неравенство треугольника в l^2
легко вывести из не отрицательности нормы :

$0 \le ||x - \lambda y||^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - \lambda y_k)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\lambda \sum_{k=1}^n x_k y_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^n y_k^2$.

Из не отрицательности квадратного трехчлена следует, что его дискриминант меньше либо равен 0. Это дает оценку (неравенство Коши–Буняковского)

$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \ \le\ \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\ \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$ и далее

$||x+y||^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^2 \leq$

$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^2 = (||x|| + ||y||)^2.$

Переход к бесконечной размерности вносит специфику в работу с таким объектами большие трудности.
Например, приходится заменять максимум на супремум.

$$A = \sup\{x_n\}, \text{ если } \forall\, n \;\; x_n \leq A \text{ и } \forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, n : A - x_n < \epsilon.$$

Еще одно отличие заключается в том, что эти пространства существенно различаются по составу элементов:

если $x = (1, \dots, 1, \dots)$, то $x \in l^\infty$, но $x \notin l^1,\; x \notin l^2$;

если $x = (1, 1/2, \dots, 1/n, \dots)$, то $x \in l^2$, но $x \notin l^1$.

$$l^1 \subset l^2 \subset l^\infty$$

Это обстоятельство естественно увязывается с геометрией шаров.

Для норм в пространствах L^p однородность тоже очевидна. Неравенство треугольника доказывается как и для пространств l^p. Однако, третье свойство не выполняется, поскольку среди функций с нулевой нормой окажется не только ноль, но и функция отличная от 0 в одной точке. Правильно ввести норму в таком пространстве можно только с использованием понятия меры

Пример 4
Пространство непрерывных функций на отрезке $C[a,b] = \{f(x) : f[a,b], ||f|| = \max(|f(x)| : x \in [a,b]\}$

Все возможные нормы можно описать в геометрических терминах – они соответствуют выпуклым множествам, для которых 0 является внутренней точкой и центром симметрии.

Определение

Пусть W - выпуклое множество в линейном пространстве X

0 является его внутренней точкой и **точкой симметрии** и

для любого $x \in X, x \neq 0$ существует положительное число k такое, что $\frac{1}{k}x \in W$ тогда

Нормой Минковского, порожденной множеством W, называется

$$||x|| = \inf\left\{\lambda : \frac{x}{\lambda} \in W,\; \lambda > 0\right\}$$

Комментарий. Плоский круг $\{(x,y,z): x^2+y^2<1,\ z=0\}$ является выпуклым множеством, но не определяет норму в пространстве $\mathbb{R}^3$.

В бесконечномерных пространствах требуется более аккуратное описание множества. Например, в конечномерном пространстве открытое выпуклое множество W, в котором существует такая точка w, что для любого $x \in X$ найдется число $\epsilon(x) > 0$ такое, что множество W содержит отрезок $w + tx$, при всех $t \in (-\epsilon(x); \epsilon(x))$ является выпуклым. Однако в бесконечномерных пространствах это не так ....пример(Колмогоров)

Слово норма в определении надо обосновать, то есть проверить свойства нормы

Теорема Минковского

Если W – множество описанное в определении, то выражение
$||x|| = \inf\left\{\lambda : \frac{x}{\lambda} \in W,\ \lambda > 0\right\}$
задает норму в пространстве X.

Верно и обратное, единичный шар в линейном нормированном пространстве является выпуклым ограниченным множеством и 0 является его внутренней точкой.

Доказательство теоремы имеется в методичке.

Домашнее задание 1. Норма, заданная многогранником в R^3

На мудле размещена папка «дз-1. Условия» с вариантами задания

вариант – координаты шести точек положительном квадранте

$$A(*,0,0),\ B(0,*,0), C(0,0,*),\ D(*,*,0),\ E(*,0,*),\ H(0,*,*)$$

по этим точкам строится многогранник W(правило построения приведено ниже)

требуется вычислить норму, которую задает многогранник W
для точек $x = 2D - 3E,\ \ y = 3H - 2E,\ \ z = x + y$

и проверить для них неравенство треугольника.

В задание входит построение **центрально симметричного** многогранника в R^3 по вершинам в положительном квадранте

$$A(*,0,0),\ B(0,*,0), C(0,0,*),\ D(*,*,0),\ E(*,0,*),\ H(0,*,*)$$

точки симметрично отображаются во все квадранты
$A \to A_1(-*,0,0)$ аналогично B и C (6 вершин)
$D \to D_1(-*,*,0),\ D_2(*,-*,0),\ \ D_3(-*,-*,0),$ аналогично E и H (12 вершин)

Всего 18 вершин, по которым строится многогранник W. Многогранник содержит точку 0 внутри и центрально симметричен.

Более того, он симметричен относительно координатных плоскостей, следовательно

$$||(x, y, z)|| = ||(\pm x, \pm y, \pm z)||$$

следовательно, достаточно научится считать норму в положительном квадранте.
Чтобы воспользоваться теоремой Минковского, надо проверить условие выпуклости. Для этого достаточно для каждой точки на поверхности многогранника построить плоскость такую, что все вершины многогранника лежат по одну сторону от плоскости. Достаточно проверить это для всех граней, выбирая в качестве плоскости саму грань. Симметрия многогранника позволяет ограничиться проверкой для граней положительного квадранта.
То есть написать уравнение каждой из четырех плоскостей
$Px + Qy + Rz = D$
и вычислить значение функции $f(x, y, z) = Px + Qy + Rz - D$ во всех вершинах (таблица). В таблице не должно быть чисел разных знаков.

Для вычисления нормы надо разбить положительный квадрант на конуса с вершиной в 0, определяемые гранями многогранника. Научится выяснять принадлежит ли данная точка данному конусу, и вычислять норму точки внутри конуса. Поскольку каждая грань – треугольник, то вектора, идущие из нуля в вершину образуют базис. Как будет показано, все поставленные вопросы решаются в терминах координат точки в этом базисе.

Для вычисления координат точки в базисе, не являющемся ортогональным, надо построить биортогональный базис
Определение
Базис $\vec{b_1},\ \vec{b_2},\ \vec{b_3}$ называется биортогональным по отношению к базису $\vec{a_1},\ \vec{a_2},\ \vec{a_3}$, если

$$(\vec{a_k}, \vec{b_k}) = 1,\ k = 1, 2, 3, \quad (\vec{a_k}, \vec{b_m}) = 0,\ k \neq m$$

Биортогональный базис всегда существует

ортогональность $\vec{B_1} = \vec{a_2} \times \vec{a_3},\ \vec{B_2} = \vec{a_1} \times \vec{a_3},\ \vec{B_3} = \vec{a_1} \times \vec{a_2}$

нормировка $\vec{b_k} = \dfrac{\vec{B_k}}{(\vec{B_k}, \vec{a_k})},\ k = 1, 2, 3$

Свойства биортогонального базиса

1) $\vec{x} = x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + x_3\vec{a_3} \ \rightarrow\ x_k = (\vec{x}, \vec{b_k})$

2) вектор $\vec{x}$ лежит в конусе векторов $\vec{a_1},\ \vec{a_2},\ \vec{a_3}$ тогда и только тогда, когда $x_k \geq 0$

3) вектор $\vec{x}$ лежит в треугольнике, образованном векторами $\vec{a_1},\ \vec{a_2},\ \vec{a_3}$ тогда и только тогда, когда $x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_k \geq 0$

4) если вектор $\vec{x}$ лежит в конусе векторов $\vec{a_1},\ \vec{a_2},\ \vec{a_3}$ и $\lambda = x_1 + x_2 + x_3$,
то вектор $\frac{1}{\lambda}\ \vec{x}$ лежит в треугольнике, образованном векторами $\vec{a_1},\ \vec{a_2},\ \vec{a_3}$

Такие базисы надо построить для четырех граней многогранника в положительном квадранте

Перевести каждую из точек в точку положительного квадранта с такой же нормой

Определить в какой из конусов попадает каждая из точек и вычислить ее норму