МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №3
по дисциплине «Методы оптимизации»
Тема: Симплексный метод

Студент гр. 1384	_____________________	Усачева Д. В.
Студент гр. 1384	_____________________	Бобков В.Д.
Студент гр. 1384	_____________________	Пчелинцева К.Р.
Преподаватель	_____________________	Балтрашевич В.Э.

Санкт-Петербург

2023

Цель работы.

Исследовать симплексный метод решения задачи линейного программирования (ЗЛП).

Основные теоретические положения.

Симплексный метод решения задачи линейного программирования состоит из двух этапов:

1) поиск крайней точки допустимого множества,

2) поиск оптимальной точки путем направленного перебора крайних точек.

Крайняя точка не существует, если в таблице существует строка все элементы которой неположительны , а последний элемент - отрицательный.

Крайняя точка найдена, если все элементы вектора-столбца B больше нуля. Чтобы найти крайнюю точку, надо:

1) выбрать строку i , в которой b[i] < 0;

2) выбрать столбец s , в котором a[i,s]>=0;

3) в столбце s задать номер строки r разрешающего элемента так, чтобы отрицательное отношение b[r]/a[r,s] было максимальным .

4) поменять местами имена координат в таблице из строки r и столбца s;

5) рассматривая элемент a[r,s] как разрешающий, необходимо преобразовать таблицу по формулам : ARS:= a[r,s]; z1[r,s]:= 1/ARS; z1[r,j]:= -z[r,j]/ARS , j<>s; z1[i,s]:= z[i,s]/ARS , i<>r; z1[i,j]:= (z[i,j]*ARS - z[i,s]*z[r,j])/ARS , i<>r,j<>s; z:=z1, где под z и z1 понимается соответственно первоначальное и преобразованное значение таблицы (кроме левого столбца и верхней строки).

$$a_{ij}' = \frac{a_{ij}\,a_{rs} - a_{is}\,a_{rj}}{a_{rs}},\ \ i \neq r,\ j \neq s;\quad b_i' = \frac{b_i\,a_{rs} - b_r\,a_{is}}{a_{rs}}\ ,\ i \neq r$$

Оптимальная точка найдена , если все элементы вектор-строки C >=0 (при этом все элементы вектор-столбца B >= 0).

Оптимальная точка не существует , если в таблице есть столбец j, в котором c[j] < 0 , а все a[i,j]>0 при любом i .

Чтобы найти оптимальную точку , надо :

1) выбрать столбец s , в котором c[s] < 0;

2) в столбце s задать номер строки r разрешающего элемента так , чтобы отрицательное отношение b[r]/a[r,s] было максимальным ;

3) поменять местами имена координат в таблице из строки r и столбца s;

4) рассматривая элемент a[r,s] как разрешающий , необходимо преобразовать таблицу по формулам (см.выше).

Координаты оптимальной точки определяются следующим образом :

1) если x[j] находится на i-м месте левого столбца , то его значение равно b[i];

2) если x[i] находится на j-м месте верхней строки , то его значение равно 0 .

Задание.

Рассматривается следующая задача линейного программирования.

Найти минимум линейной функции f(x1,x2): f = c[1]*x[1] + c[2]*x[2], где c[i] - постоянные коэффициенты, на множестве , заданном набором линейных ограничений : a[1,1] * x[1] + a[1,2] * x[2] >= b[1] ... a[4,1] * x[1] + a[4,2] * x[n] >= b[4] x[i] >= 0 (1-ый квадрант) где a[i, j], b[i] - постоянные коэффициенты . В матричной форме ограничения записываются следующим образом: AX >= B , X >= 0 . Целевая функция может быть представлена в виде скалярного произведения : f = (C, X).

Выполнение работы.

	x1	**x2**	**-b**
y1	2	-1	1
y2	1	-2	5
y3	-1	-1	7
y4	-1	1	3
C	0	-1	0

Графический способ решения

Представим в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 1 >= 0 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 + 5 >= 0 \\ y_3 = -x_1 - x_2 + 7 >= 0 \\ y_4 = -x_1 + x_2 + 3 >= 0 \\ f(x) = -x_2 \end{cases}$$

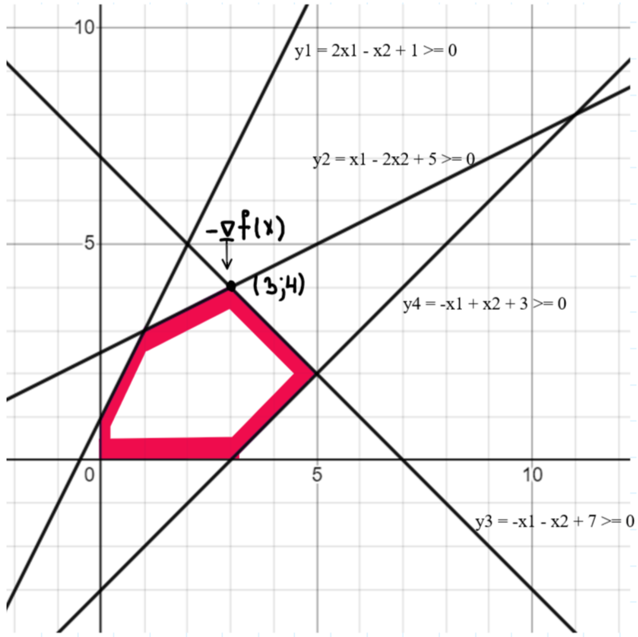
Найти minf на множестве X ≥ 0

Покажем графическое отображение системы.

Для это дополнительно найдём градиент

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

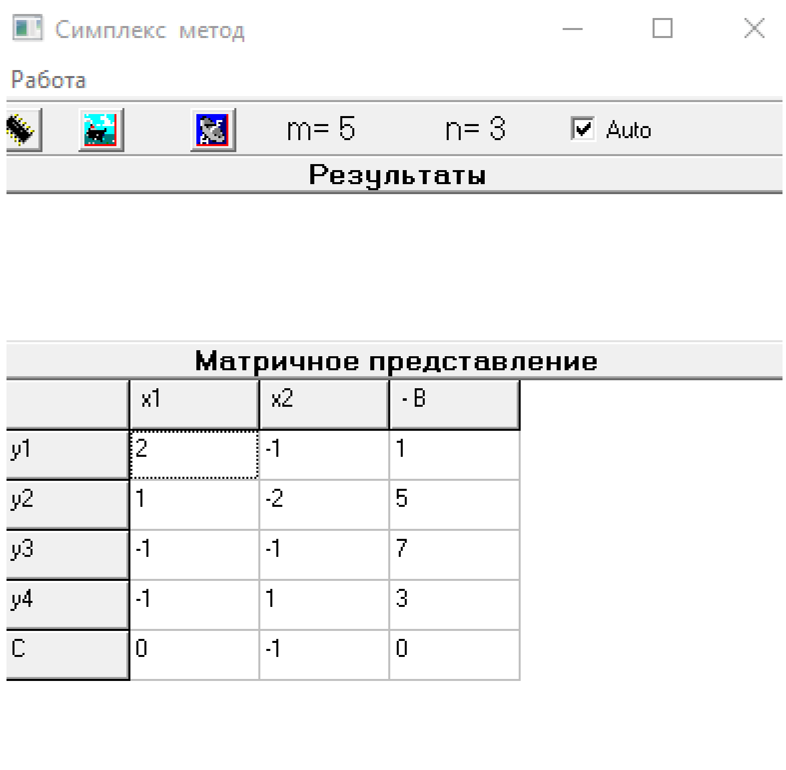
Ограничения



все

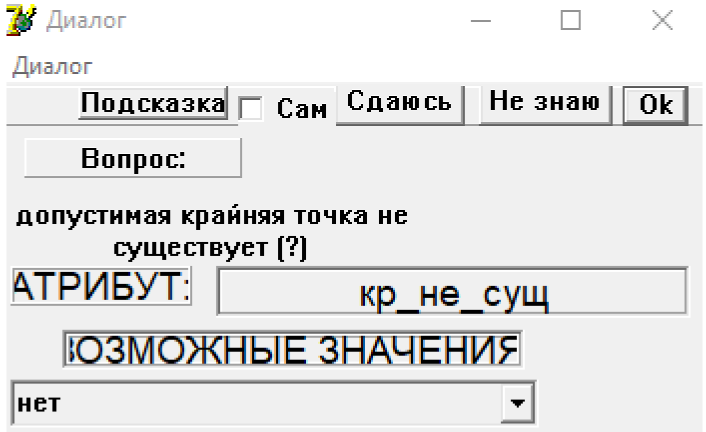
Найдём минимум функции графически. Если будем двигаться в направлении антиградиента, то с учётом ограничений попадём в точку (3, 4).

<u>Первая программа.</u>

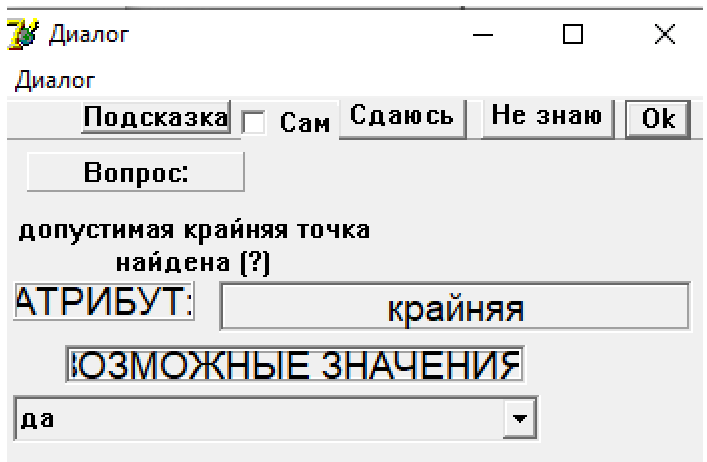


	x1	x2	- B
y1	2	-1	1
y2	1	-2	5
y3	-1	-1	7
y4	-1	1	3
C	0	-1	0

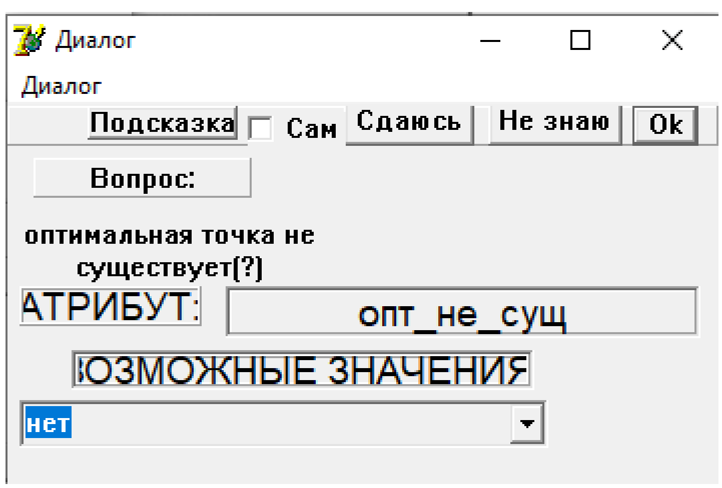
Изначально таблица выглядит следующим образом

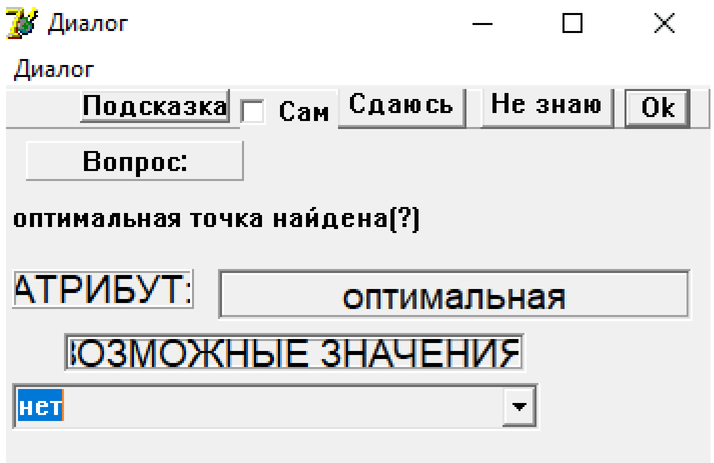


Крайняя точка существует, так как нет строки, в которой все элементы неположительные, а последний отрицательный.

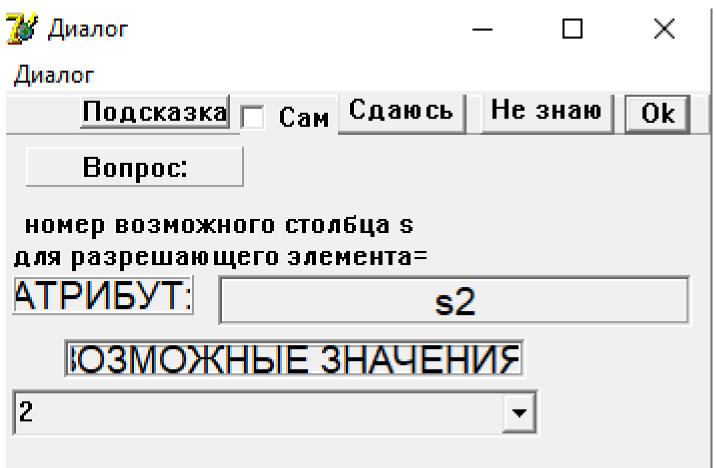


На данный момент находимся в крайней точке, так как все элементы столбца -B положительные.

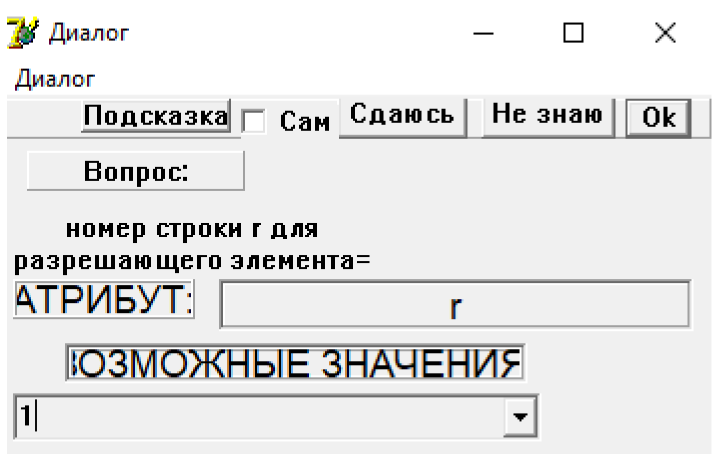




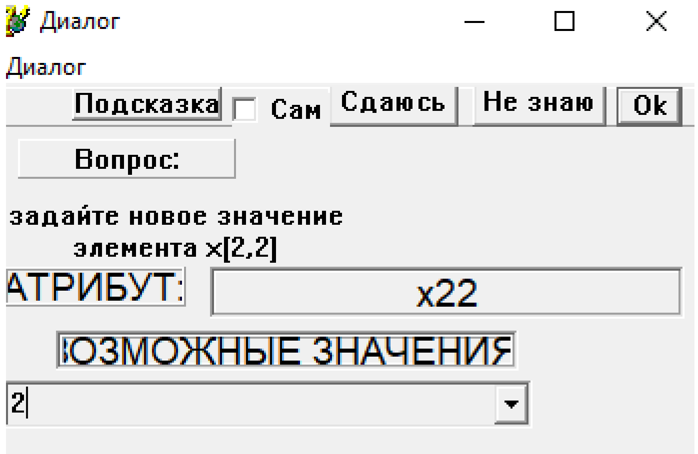
На данный момент это не оптимальная точка, так как не все элементы строки С положительные, но такая точка существует, так как не все элементы столбца с отрицательным С положительные.



Нужно выбрать второй столбец, так как С в этом столбце отрицательное.

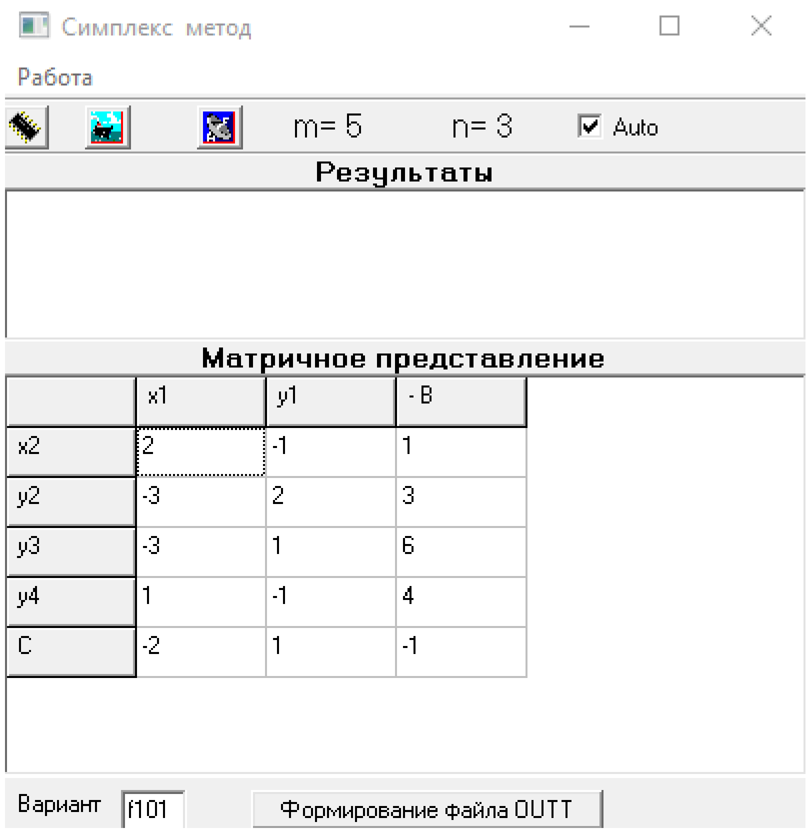


В качестве разрешающего элемента нужно выбрать элемент a[1][2] = -1, так как при делении на него соответствующего b[1] получается максимальный среди подобных случаев результат.



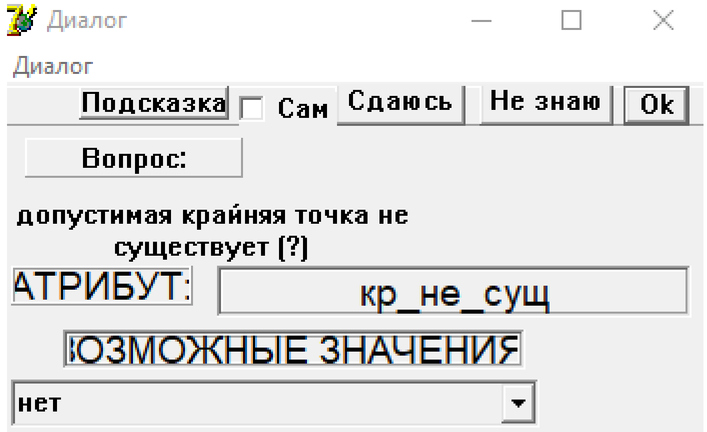
Для того, чтоб получить значение a[2][2], нужно его поделить на разрешающий элемент без знака минус, так как у них совпадает столбец.

В таблице поменялись местами y1 и x2, и теперь таблица имеет вид:

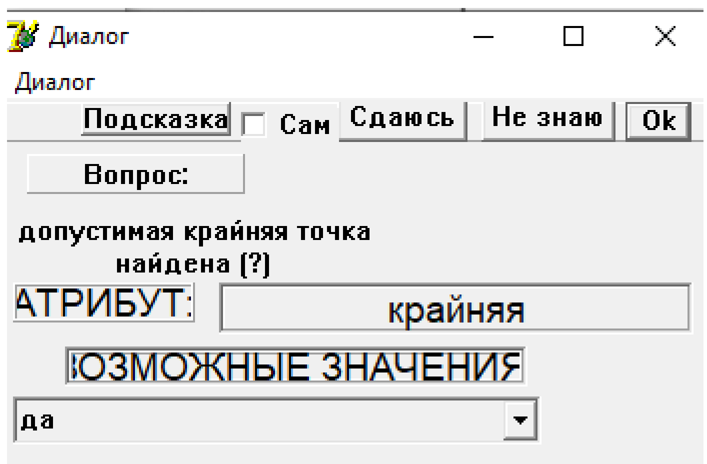


	x1	y1	- B
x2	2	-1	1
y2	-3	2	3
y3	-3	1	6
y4	1	-1	4
C	-2	1	-1

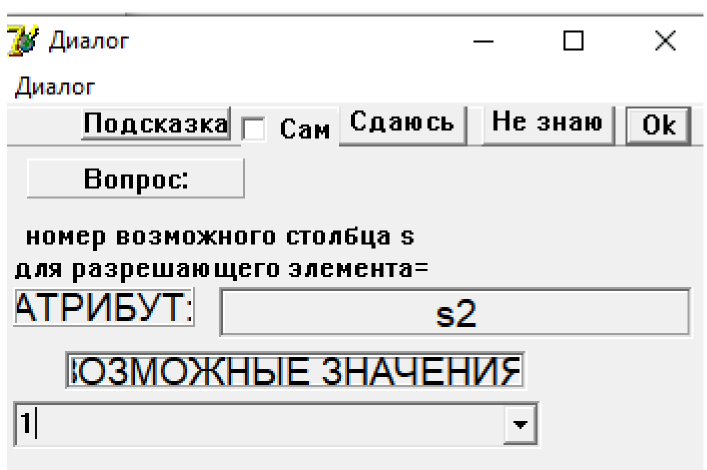
Теперь следующий шаг. Крайняя точка существует, так как нет строки, в которой все элементы неположительные, а последний отрицательный.



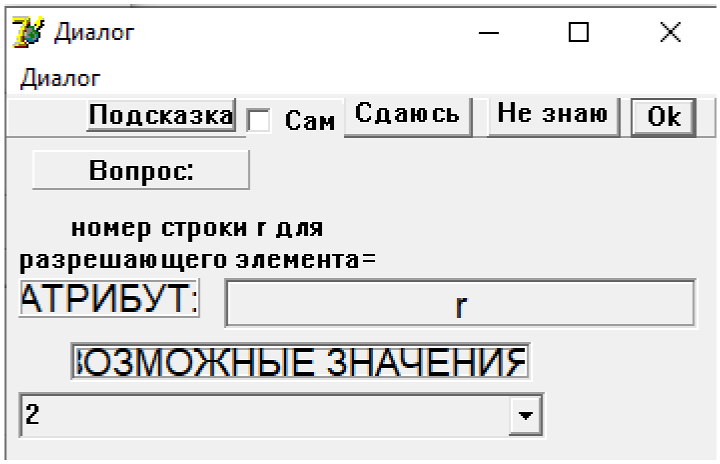
На данный момент находимся в крайней точке, так как все элементы столбца -B положительные.



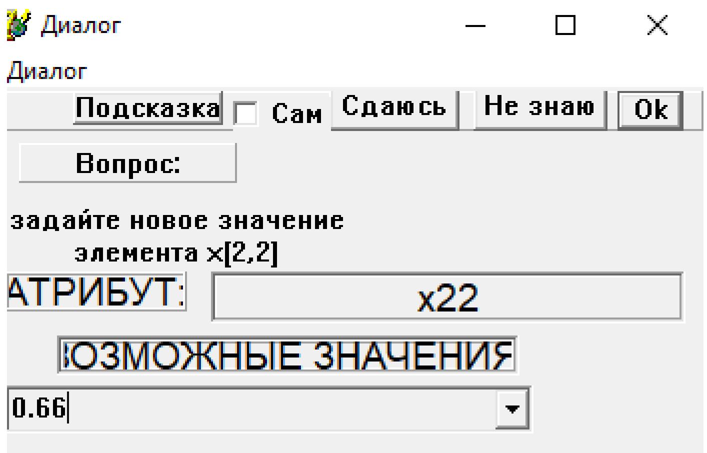
Про оптимальность точки вводимые результаты совпадают с результатами прошлого шага по тем же причинам. Перейдем к выбору разрешающего столбца.



Следует выбрать 1 столбец, так как c[1] < 0.

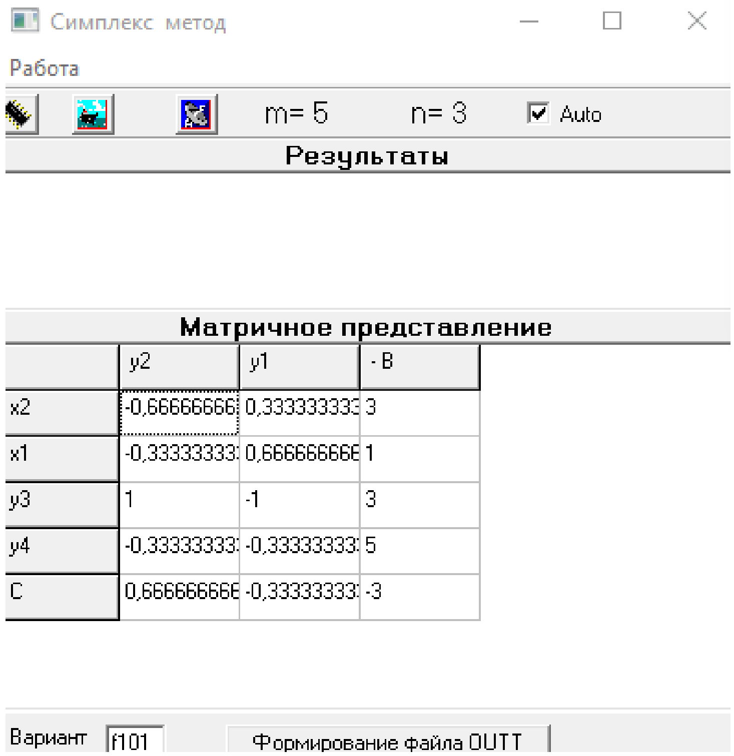


В качестве разрешающего элемента следует выбрать элемент a[2][1], так как при делении b[2] на данный элемент получается максимальный отрицательный элемент среди других.

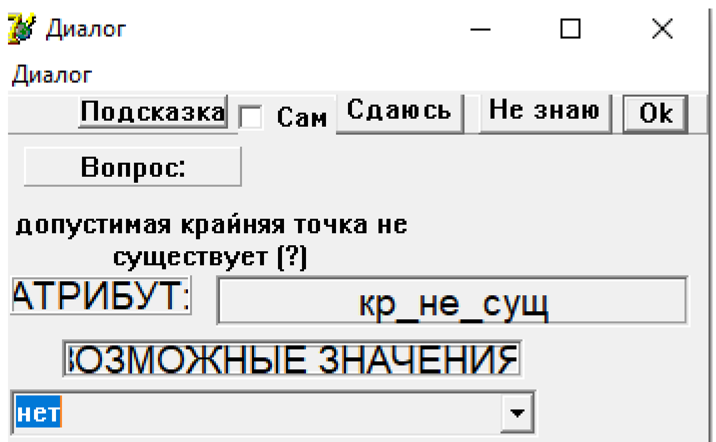


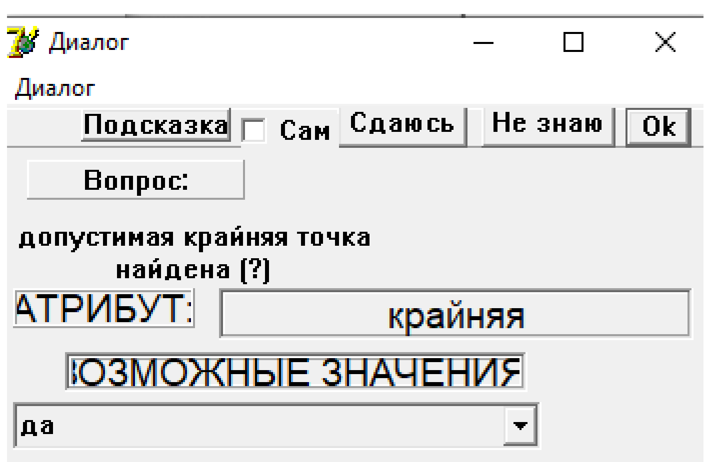
Новое значение a[2][2] будет равным частному a[2][2] и a[1][2] со знаком минус, так как эти элементы находятся на одной строке.

Теперь данная таблица имеет следующий вид:

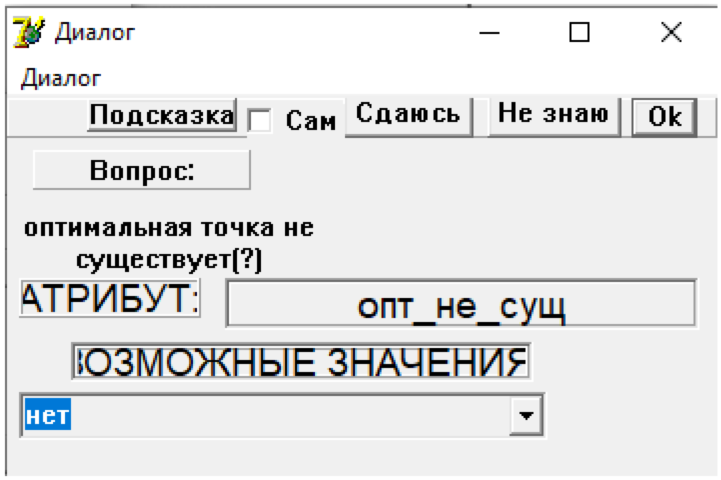


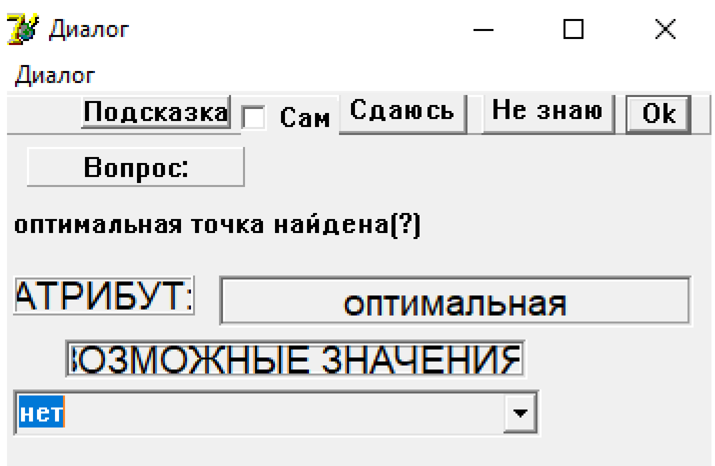
Теперь нужно возвращаться к предыдущим шагам: крайняя точка существует, мы находимся все так же в крайней точке.



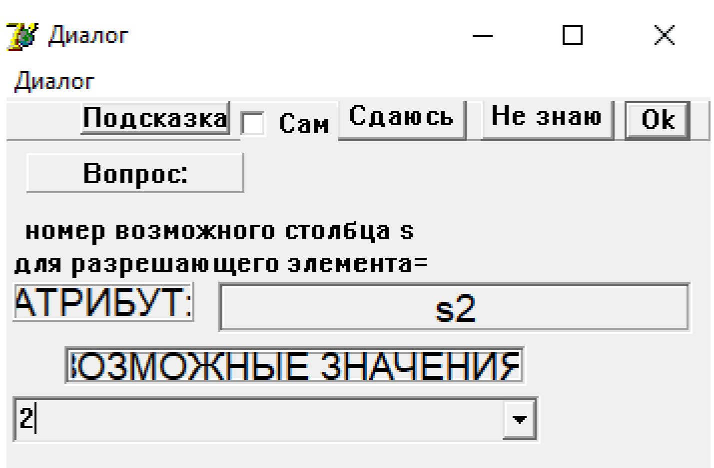


Оптимальная точка существует, но мы сейчас в ней не находимся.

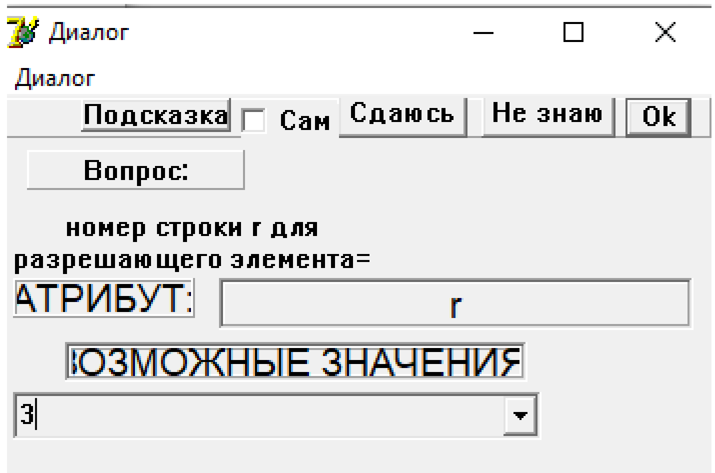




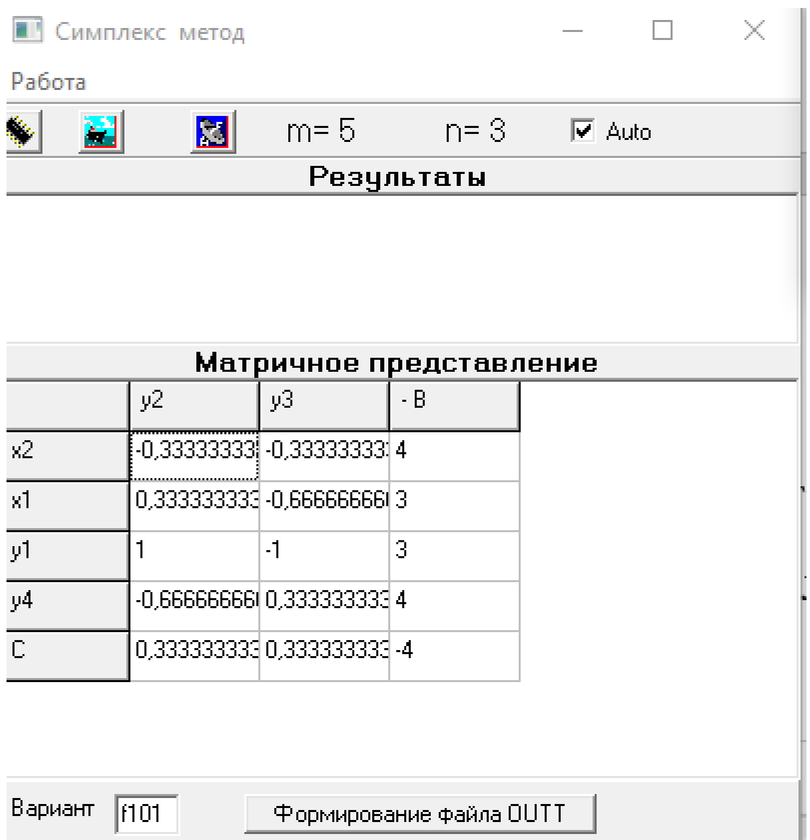
В качестве разрешающего столбца нужно взять второй столбец, так как c[2] <0.



В качестве номера строки разрешающего столбца берем 3 строку по причинам, описанным ранее.



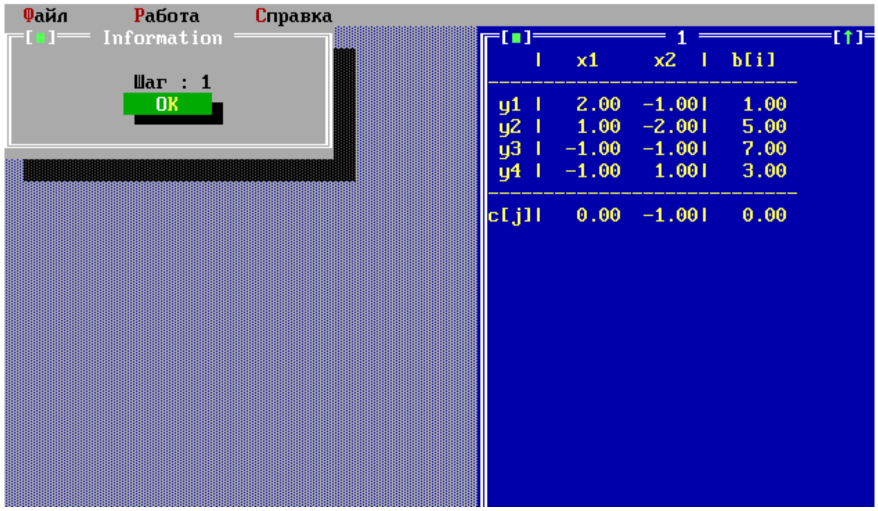
В качестве нового значения a[2][2] нужно взять частное a[2][2] и a[3][2] со знаком плюс, так как у них совпадают столбцы. , теперь таблица имеет вид:



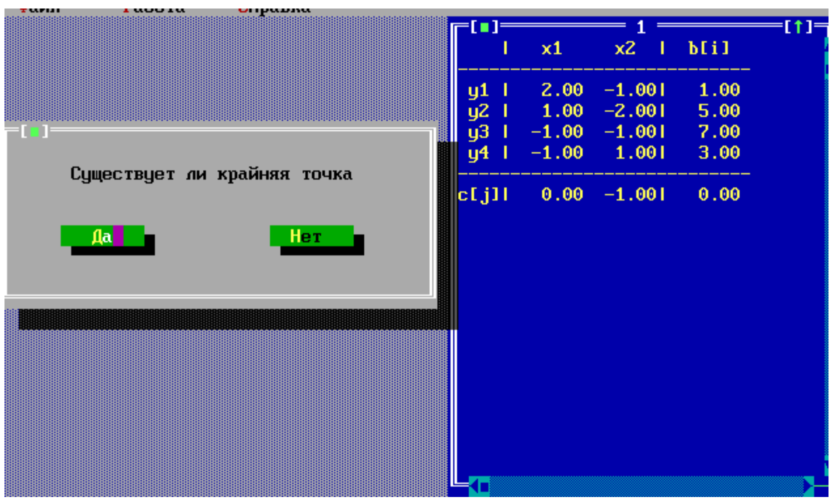
Как можно заметить, все элементы -B и C положительные, значит данная точка является крайней и оптимальной. В строке x1 в столбце -B значение 3, x2 — 4. Что совпадает с построенным графиком.

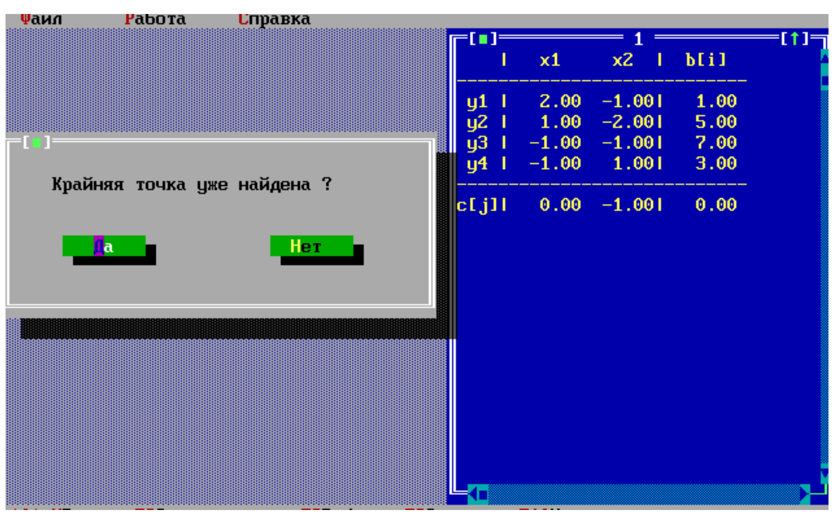
Второя программа

Занесём начальные параметры

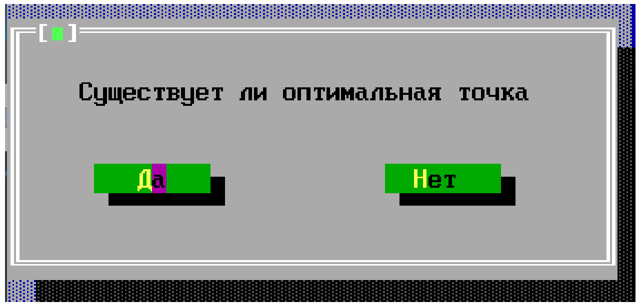


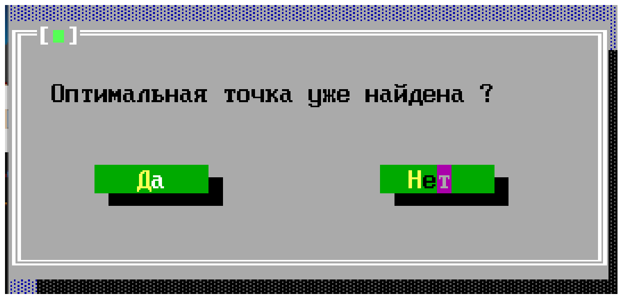
Крайняя точка существует, т.к. отсутствует строка, в которой последний элемент отрицательный, а остальные - неположительные. Уже находимся в крайней точке, т.к. все элементы столбца В положительны.



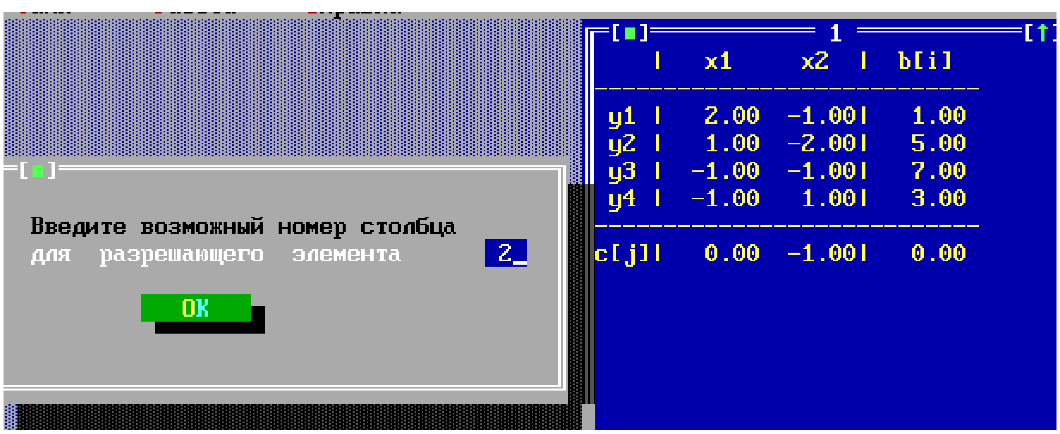


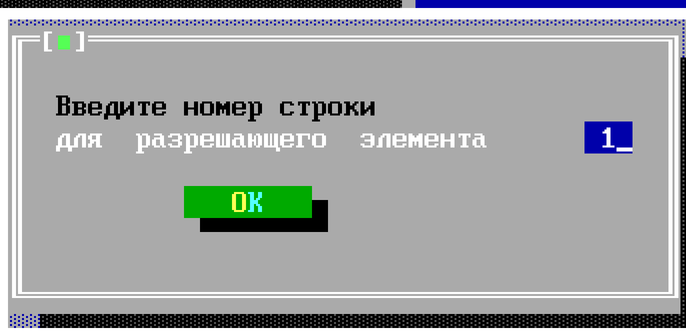
Рассмотрим ситуацию оптимальной точки. Мы не находимся в точки оптимума, потому что строка C имеет отрицательный элемент. Но такая точка существует, ведь в столбце с отрицательным C существуют отрицательные элементы матрица. Найдём оптимальную точку:

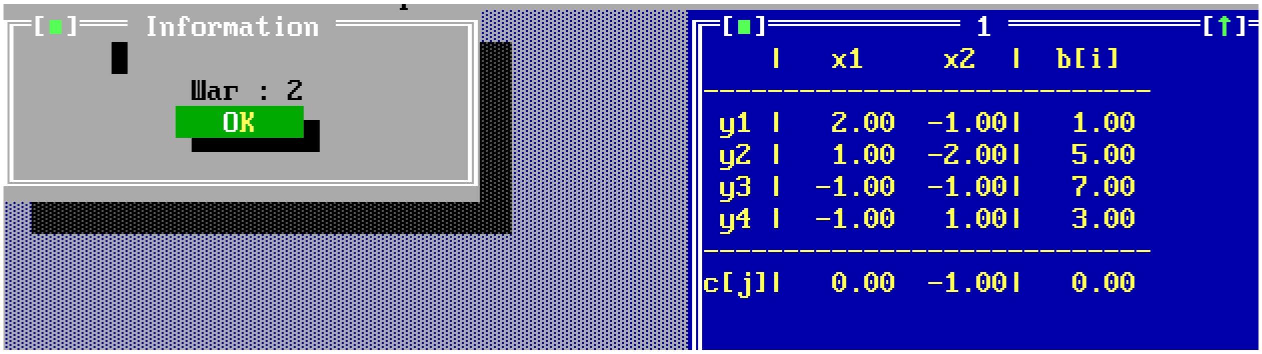




Выбираем второй столбец (c < 0). Выбираем разрешающий элемент выбранного столбца так, чтобы при делении на него соответствующей b отрицательное частное было максимальным. Тогда разрешающим элементом будет элемент (1, 2).



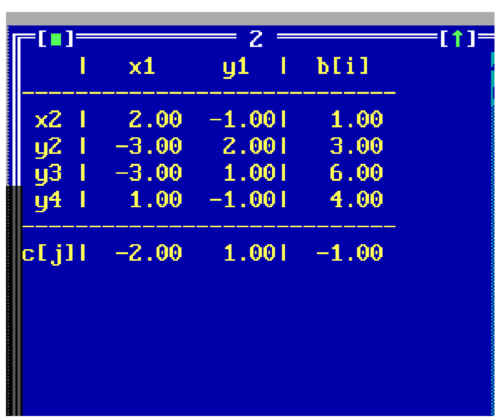




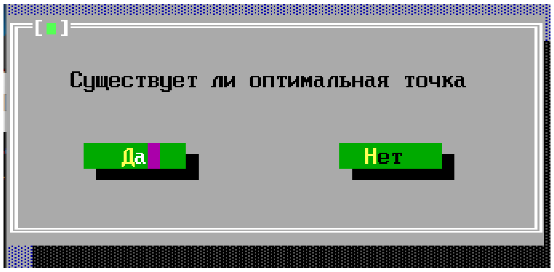
Меняем название координат.

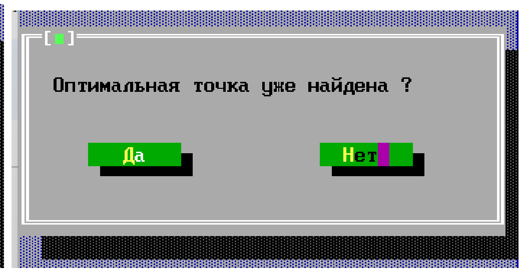
	x1	y1	-b
x2	2	-1	1
y2	1	-2	5
y3	-1	-1	7
y4	-1	1	3
C	0	-1	0

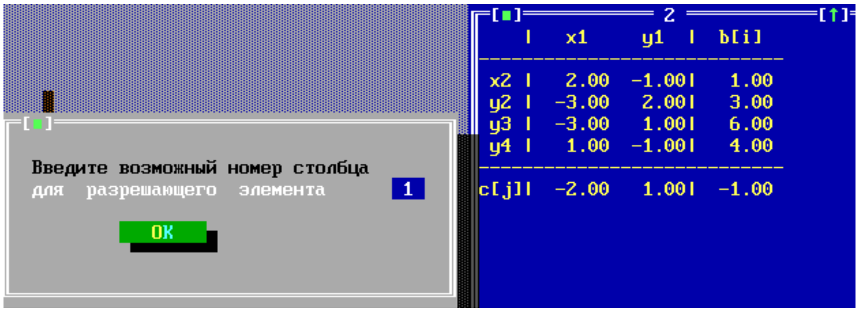
Пересчитаем таблицу по формулам из теоретического положения. Новым значение a_{22} является 2.

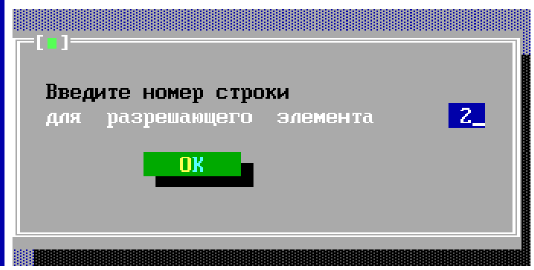


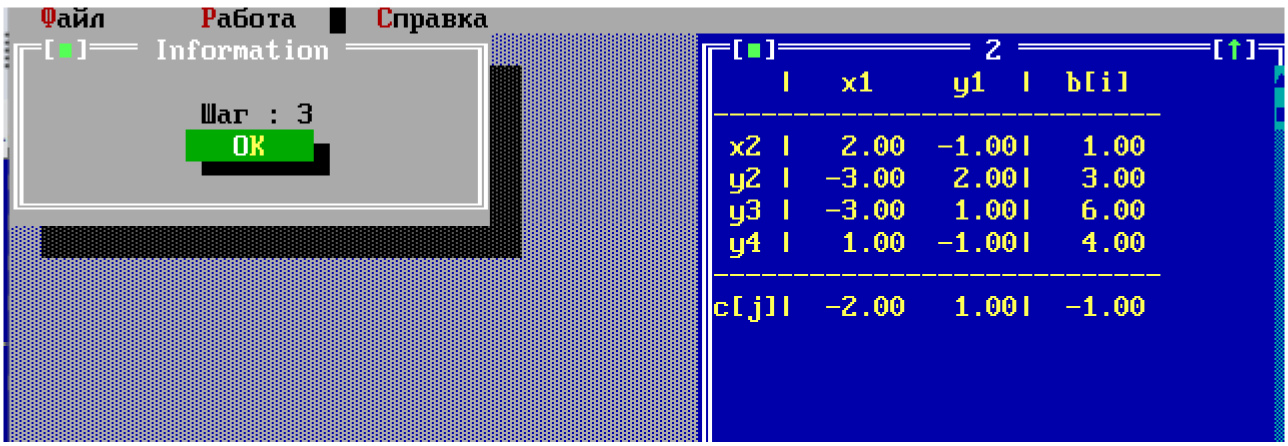
Повторяем алгоритм. Крайняя точка существует и найдена. Оптимальная точка существует, но не найдена. Разрешающим элементом выбираем .





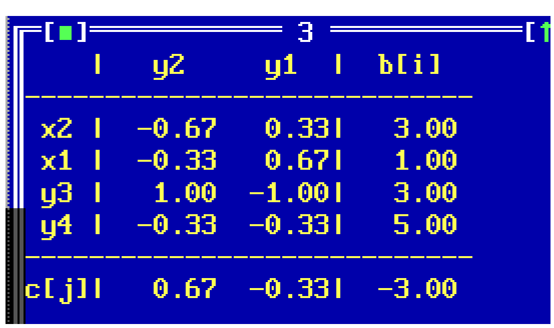


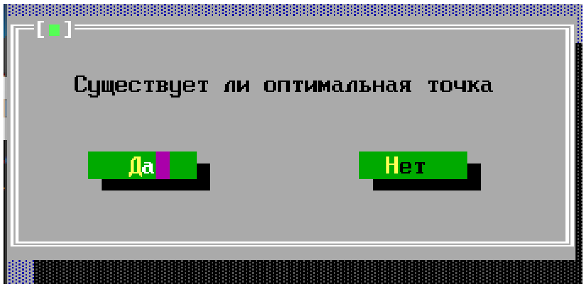


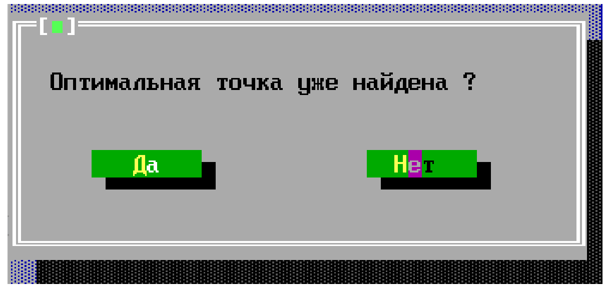


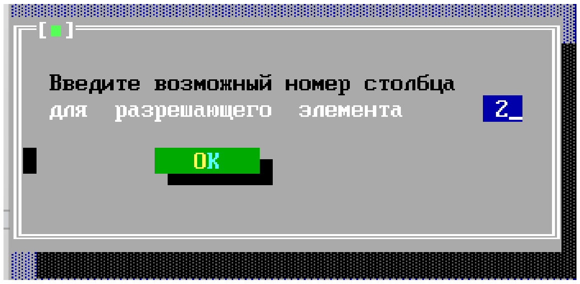
Меняем местами название координат

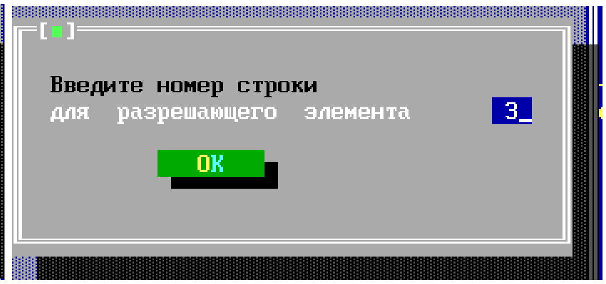
	y2	**y1**	**-b**
x2	2	-1	1
x1	-3	2	3
y3	-3	1	6
y4	1	-1	4
C	0	1	-1

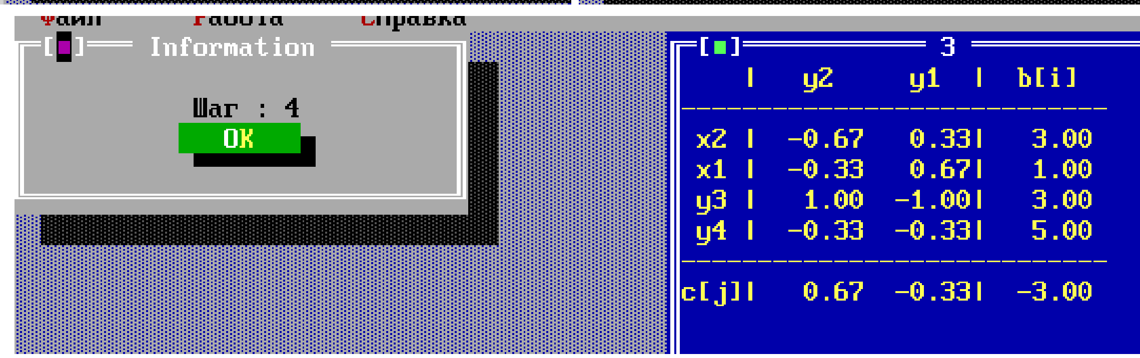






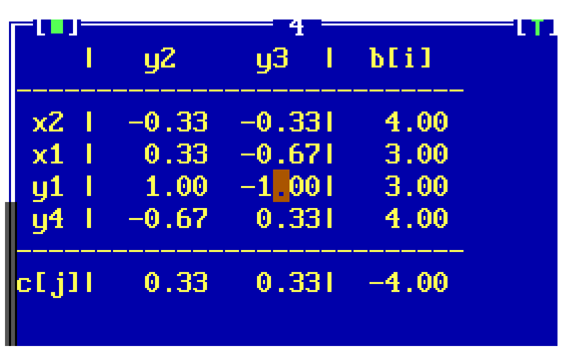


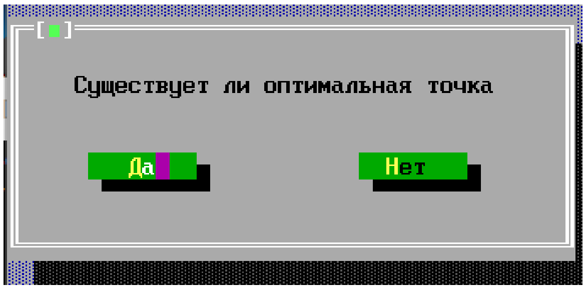


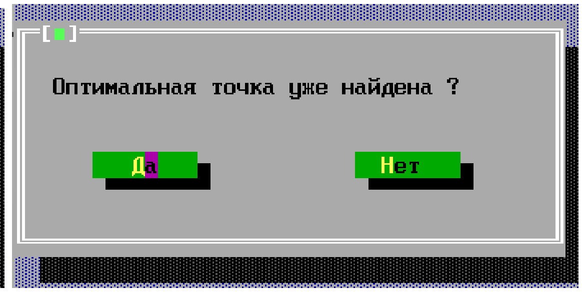


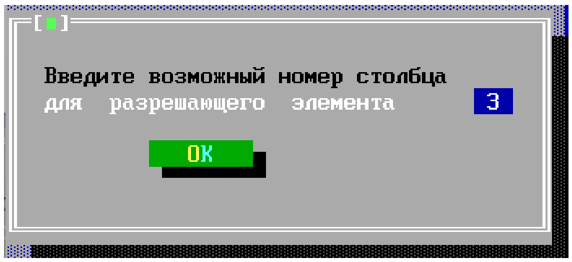
Меняем местами название координат

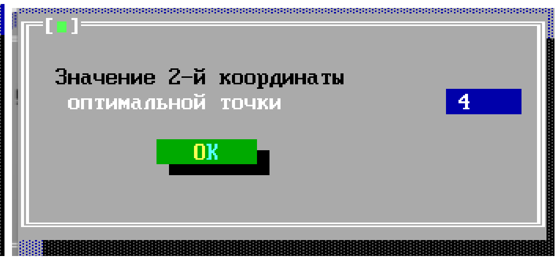
	y2	y1	-b
x2	-0.67	-0.331	3
x1	-0.33	0.671	1
y3	1	-1	3
y4	-0.33	–.331	5
C	0.67	-0.331	-3

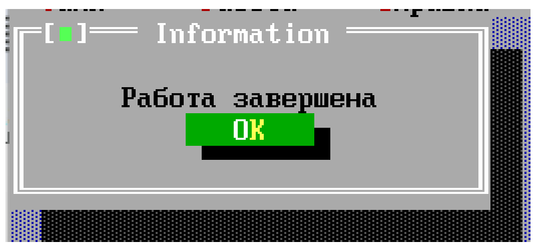












По полученным данным делаем вывод, что крайняя точка существует и достигнута. Оптимальная точка точно также существует и достигнута.

Координаты оптимальной точки определяются следующим образом :

1) если x[j] находится на i-м месте левого столбца , то его значение равно b[i];

2) если x[i] находится на j-м месте верхней строки , то его значение равно 0.

Ответ: (3, 4)

Выводы.

В результате выполнения лабораторной работы был изучен симплексный метод решения задачи линейного программирования.