Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций.

Игра – модель конфликтной ситуации.

Градация игр по неопределенности исходов:

- комбинаторные;
- азартные;
- стратегические.

Игра с нулевой суммой, если выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Матричная игра – это игра с нулевой суммой, в которой задается выигрыш игрока 1 в виде матрицы.

Игра называется **конечной**, если у каждого игрока существует конечное число возможных стратегий.

Решить задачу по теории игр – это найти оптимальные стратегии игроков (чистые или смешанные) и выигрыш (результат игры).

Антагонистические игры

Det: Пара $(x^0, y^0) \in X \times Y$ называется **седловой точкой** функции ***F***, если

$\forall\, x \in X, y \in Y \quad F(x, y^o) \le F(x^o, y^o) \le \quad F(x^0, y)$ (1) или эквивалентно

$$\max_{x \in X} F(x, y^o) = F(x^o, y^o) = \min_{y \in Y} F(x^0, y)$$

Антагонистическая игра задается набором $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$

Det: Антагонистическая игра **имеет решение**, если $F(x, y)$ имеет седловую точку.
Если (x^0, y^0) - седловая точка, то $(x^o, y^o, v = F(x^0, y^0))$ - **решение игры**,
v - **значение игры**.

Лемма Если (x^0, y^0) (x^*, y^*) - 2 седловые точки, то $F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$

Док – во: Если $F(x^*, y^*)$ - седловая точка, то $F(x, y^*) \le F(x^*, y^*) \le F(x^*, y)$ (2)

$$F(x^*, y^*) \overset{(2)}{\le} F(x^*, y^0) \overset{(1)}{\le} F(x^0, y^0) \overset{(1)}{\le} F(x^0, y^*) \overset{(2)}{\le} F(x^*, y^*)$$

$Def:$ Антагонистическая игра называется **матричной**, если множества стратегий игроков конечны $X = \{1, \dots, m\}$ $Y = \{1, \dots, n\}$

i – стратегия первого игрока, ***j*** - стратегия второго игрока. $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Примеры

$Def:$ **Наилучший гарантированный результат** для 1 игрока $\underline{v} = \sup\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x, y)$

Стратегия x^0 называется **максиминной**, если $\underline{v} = \inf\limits_{y \in Y} F(x^0, y)$

Наилучший гарантированный результат для 2 игрока $\overline{v} = \inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(x, y)$

Стратегия y^0 называется **минимаксной**, если $\overline{v} = \sup\limits_{x \in X} F(x, y^0)$

Лемма В любой антагонистической игре Г справедливо $\underline{v} \leq \overline{v}$

Док – во: Возьмем произвольные стратегии игроков x, y.

$$\inf\limits_{y \in Y} F(x, y) \leq F(x, y) \leq \sup\limits_{x \in X} F(x, y) \qquad \inf\limits_{y \in Y} F(x, y) \leq \sup\limits_{x \in X} F(x, y)$$

$$\forall y \ \sup\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x, y) \leq \sup\limits_{x \in X} F(x, y) \qquad \sup\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x, y) \leq \inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(x, y) \qquad \underline{v} \leq \overline{v}$$

Т: 1) Для того, чтобы функция $F(x, y)$ имела седловую точку, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство:

$$\max_{x\epsilon X}\inf_{y\epsilon Y} F(x,y) = \min_{y\epsilon Y}\sup_{x\epsilon X} F(x,y)$$

2) Пусть выполнено неравенство . Пара (x^0, y^0) тогда и только тогда является седловой точкой, когда x^0 - максиминная, а y^0 минимаксная стратегии.

Док – во: **Необходимость:** пусть (x^0, y^0) - седловая точка, докажем

$$\overline{v} \le \sup_{x\epsilon X} F(x,y^0) = F(x^0,y^0) = v = \inf_{y\epsilon Y} F(x^0,y) \le \underline{v}$$

$\overline{v} \le \underline{v}$ $\underline{v} \le \overline{v}$ по лемме.

Достаточность: Пусть - выполнено. Возьмем x^0, y^0 -максиминную и минимаксную стратегии. Докажем, что они образуют седловую точку.

$$F(x^0,y^0) \ge \inf_{y\epsilon Y} F(x^0,y) = \underline{v} = \overline{v} = \sup_{x\epsilon X} F(x,y^0) \ge F(x^0,y^0)$$

Det: Антагонистическая игра $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y)\rangle$ называется **непрерывной**, если X, Y – выпуклые компакты евклидовых пространств, а функция $F(x, y)$ - непрерывна на $X \times Y$.

Т: $X \subset E^m, Y \subset E^n$ - выпуклые компакты евклидовых пространств, а функция (*)
$F(x,y)$ непрерывна на $X \times Y$. $F(x,y)$ - вогнута по x для любых y и выпукла по y для любых x.
Тогда $F(x,y)$ имеет на $X \times Y$ **седловую точку**.

Док – во: $F(x,y)$ выпукла по y. Тогда $\forall x \in X$ $F(x,y)$ достигает минимума в точке $y(x)$.

$W(x) = \min_{0 \le y \le 1} F(x,y) = F(x, y(x))$ Возьмем x^* - максимизирующую $W(x)$ на X.

Докажем, что $(x^*, y(x^*))$ - седловая точка. $\forall t \in (0,1)$ положим $\tilde{y} = y((1-t)x^* + tx)$
В силу вогнутости по x $F(x,y)$

$$W(x^*) \ge W((1-t)x^* + tx) = F((1-t)x^* + tx) \ge (1-t)F(x^*, \tilde{y}) + tF(x, \tilde{y}) \ge (1-t)W(x^*) + tF(x, \tilde{y})$$

$$W(x^*)t \ge tF(x, \tilde{y}) \qquad F(x, y(x^*)) \le W(x^*) = F(x^*, y(x^*)) \le F(x^*, y)$$

Принцип доминирования

t: Если в строке матрицы A элементы строки A_i не меньше соответствующих элементов строки $A_к$, а по крайней мере один строго больше, то строка A_i называется **доминирую**
а строка $A_к$ **доминируемой**.

При решении игры можно уменьшить размеры матрицы путем удаления из неё доминирующих столбцов и доминируемых строк.

Смешанные расширения антагонистических игр

Если игра не имеет седловой точки. То применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. Можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя (выбирая) чистые стратегии, то есть используя **смешанные стратегии**.

При решении игры:

- применяем принцип доминирования;
- ищем седловую точку;
- если седловой точки нет ищем решение в смешанных стратегиях.

Det: **Смешанной стратегией** первого игрока в игре Г называется вероятностное распределение φ X

X - множество чистых стратегий 1 игрока. Y - множество чистых стратегий 2 игрока.

$\{\varphi\}$ - множество смешанных стратегий 1 игрока. $\{\psi\}$ - множество смешанных стратегий 2 иг

При заданных стратегиях φ ψ **математическое ожидание** выигрыша 1 игрока определяется формулой:

$$F(\varphi,\psi) = \iint_{X\,Y} F(x,y)\, d\varphi(x) d\psi(y)$$

Det: $\overline{\Gamma} = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi,\psi) \rangle$ называется **смешанным расширением** игры Г.

Def: Решение $(\varphi^o, \psi^o, v = F(\varphi^0, \psi^0))$ игры $\overline{\Gamma}$ называется **решением** исходной игры Г **в смешанных стратегиях**. При этом, φ^0, ψ^0 называют **оптимальными смешанными стра** игроков, а v - значением игры Г.

Множество **смешанных стратегий** 1 игрока:

$$P = \{p = (p_1, \dots p_m) | \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$$

Множество **смешанных стратегий** 2 игрока:

$$Q = \{q = (q_1, \dots q_n) | \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$$

Математическое ожидание выигрыша первого игрока:

$$A(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$$

$\overline{\Gamma} = \langle P, Q, A(p, q) \rangle$ - **смешанное расширение** матричной игры Г.

Основная теорема матричных игр

Теорема **фон Неймана**: всякая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Док – во: Докажем, что функция $A(p,q)$ имеет седловую точку на $P \times Q$.

$A(p,q)$ - билинейна и непрерывна на $P \times Q$, вогнута по p и выпукла по q.

По Т (*) функция $A(p,q)$ имеет седловую точку на $P \times Q$.

Решение в смешанных стратегиях непрерывной игры

Рассмотрим игру на прямоугольнике $X \times Y = [a,b] \times [c,d]$.

При заданных стратегиях $\varphi \; \psi$ - функциях распределения на отрезках $X \; Y$,

ожидаемый выигрыш 1 игрока: $F(\varphi,\psi) = \iint_{ac}^{bd} F(x,y)\, d\varphi(x) d\psi(y)$

По теореме Фубини он равен повторному $F(\varphi,\psi) = \int_a^b F(x,\psi) d\varphi(x) = \int_c^d F(\varphi,y) d\psi(y)$

где $F(x,\psi) = \int_c^d F(x,y) d\psi(y)$ $\qquad F(\varphi,y) = \int_a^b F(x,y) d\varphi(x)$