МИНОБРНАУКИ РОССИИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №6

по дисциплине «Методы оптимизации» Тема: задача коммивояжера

Студент гр. 1384		Усачева Д.В.
Студент гр. 1384	-	Бобков В. Д.
Студент гр. 1384		Пчелинцева К.Р.
Преподаватель		Балтрашевич В.Э.

Санкт-Петербург

2023

Цели работы.

Решение задачи коммивояжера с помощью метода ветвей и границ

Задача.

Есть п городов. Надо объехать все города с минимальной стоимостью (расстоянием) и вернуться в исходный город. При этом каждый город посещается ровно один раз (т. е. требуется найти Гамильтонов цикл с минимальной стоимостью).

Основные теоретические сведения.

Матрица стоимостей путей

где a_{ij} — стоимость пути от i до j, причём a_{ij} может быть $\neq a_{ji}$, $a_{ij} \geq 0 \ \forall \ i,j$.

Допустимый маршрут содержит по одному элементу в каждой строке и столбце. Обратное неверно, так как возможны подциклы. Количество возможных вариантов n!.

Составим математическую модель.

Обозначим
$$x_{ij} = \begin{cases} 1 - \text{если дуга входит в маршрут,} \\ 0 - \text{если дуга не входит в маршрут;} \end{cases}$$

$$\min \sum_i \sum_j a_{ij} x_{ij} -? , \text{ причем } \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \ j = \overline{1, n} \ , \ x_{ij} \in \{0, \, 1\}; \ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \ i = \overline{1, n} \, .$$

Приведённые ограничения разрешают циклы, поэтому они являются необходимыми, но не достаточными.

Используем МВГ. Предположим, что выбран некоторый путь S, его длина $\ell_S = \sum_{ij} a_{ij}$, причем каждый из индексов используется один и только один раз.

Так как в путь S входит только один элемент из каждой строки и столбца, то можно проделать операцию нормализации матрицы A. Выберем произвольную строку i. Пусть λ_i — наименьший элемент i-й строки и построим матрицу A' с элементами $a'_{ij} = a_{ij} - \lambda_i$ (изменена каждая строка).

Матрица ${\bf A}'$ определяет новую задачу коммивояжера, которая в качестве оптимальной будет иметь ту же последовательность городов: $\ell_S = \ell_S' + \sum_{i=1}^n \lambda_i \ .$

Теперь в каждой строке \mathbf{A}' будет по крайней мере один нулевой элемент. Обозначим g_j — минимальный элемент j-го столбца \mathbf{A}' . Построим матрицу \mathbf{A}'' с элементами $a_{ij}'' = a_{ij}' - g_j$.

Оптимальный путь тот же, а длина $\ell_S = \ell_S'' + d_0$, где $d_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n g_i$.

Обозначим ℓ^* — решение задачи коммивояжера (3К): $\ell^* = \min_{s \in S} \, \ell_S$. Тогда значение d_0 — простейшая нижняя оценка решения ℓ^* :

$$d_0 \le \ell^*, \tag{4.1}$$

где d_0 — это α_0 для МВГ.

Рассмотрим ЗК с матрицей ${\bf A}''$. Пусть путь S содержит переход $i{ o}j$. Тогда нижняя оценка пути: $\ell_S {\geq} d_0 + a_{ij}''$.

Следовательно, для тех переходов, у которых $a_{ij}^{\prime\prime}=0$, снова получим оценку (4.1). Естественно ожидать, что кратчайший путь содержит один из таких переходов.

Рассмотрим один из переходов $i \rightarrow j$, для которого $a_{ij}'' = 0$.

Обозначим (i op j) — множество всех тех путей, которые не содержат переход i op j.

Так как из города i надо куда-то идти, то множество $(i \rightarrow j)$ содержит один из переходов $i \rightarrow k$, $k \neq j$.

Так как в город j надо прийти, то множество (i op j) содержит переход m op j, где $m \neq i$.

Следовательно, некоторый путь ℓ_S из множества $(i \not\rightarrow j)$, содержащего переходы $i \rightarrow k$, $m \rightarrow j$, будет иметь следующую нижнюю оценку: $\ell_S \ge d_0 + a_{ik}'' + a_{mj}''$.

Обозначим:
$$\Theta_{ij} = \min_{k \neq j} a''_{ik} + \min_{m \neq i} a''_{mj}$$
.

Для любого из множества путей $(i \rightarrow j)$ имеем оценку:

$$\ell_{S} \ge d_{0} + \Theta_{ij}. \tag{4.2}$$

Чтобы исключить некоторое множество вариантов (i
ightarrow j), надо выбрать такой переход i
ightarrow j, для которого оценка (4.2) была бы максимальной: $\Theta^* = \max_{\left\{a_{ij}'': a_{ij}''=0\right\}} (\min_{k \neq j} a_{ik}'' + \min_{m \neq i} a_{mj}'').$

Таким образом, все множество возможных вариантов мы разбили на 2 множества: I_1 , I_2 . Для путей из множества I_1 — оценка (4.1). Для путей из множества I_2 — оценка $\ell_S \ge d_0 + \Theta^*$.

Для I_2 матрица \mathbf{A}_2 будет отличаться от матрицы \mathbf{A}'' тем, что $a_{ij} \coloneqq \infty$ (переход $i \mapsto j$ запрещен).

Рассмотрим множество I_1 и матрицу \mathbf{A}'' .

Так как все пути, принадлежащие этому множеству, содержат переход $i \rightarrow j$, то для его исследования достаточно рассмотреть ЗК, в которой города i и j совпадают (из \mathbf{A}'' вычеркивается i-я строка и j-й столбец).

Размерность этой задачи n-1.

Так как переход $j \to i$ невозможен, то элемент матрицы \mathbf{A}_1 : $a_{ji} := \infty$. Точнее, так как элемента a_{ji} может не быть, маршрут, определяемый дугой (i, j), содержит сколько-то (может быть, ни одного) из ранее выбранных ребер помимо ребра (i, j).

Ребро (i, j) будет или изолировано от этих других ребер, или будет частью пути, включающего некоторые или все эти ребра.

Пусть p и q — начальный и конечный города этого пути. Возможно, что p=i или q=j. Положим $a_{ap}:=\infty$.

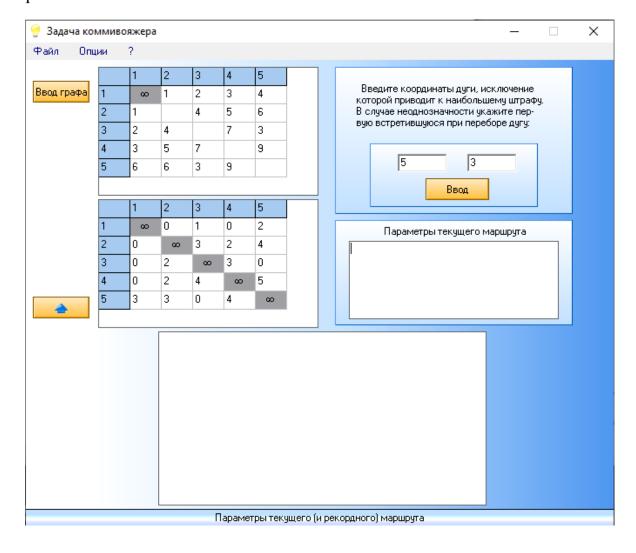
Эта мера предохраняет от выбора ребра (q, p) в качестве последующего, а тем самым предохраняет от формирования замкнутого цикла длины < n.

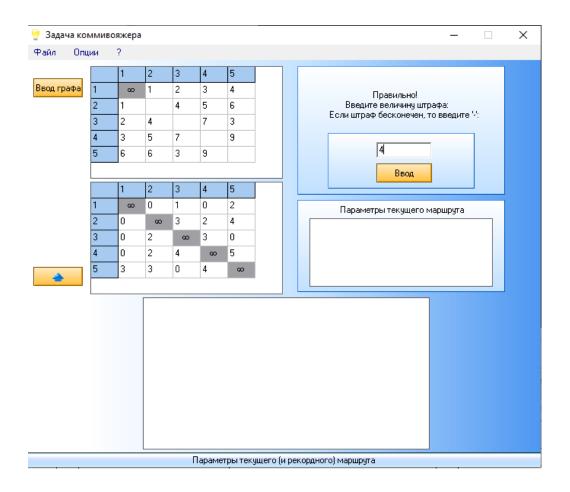
В общем случае среди всех полученных множеств вариантов выбираем то, для которого оценка минимальна.

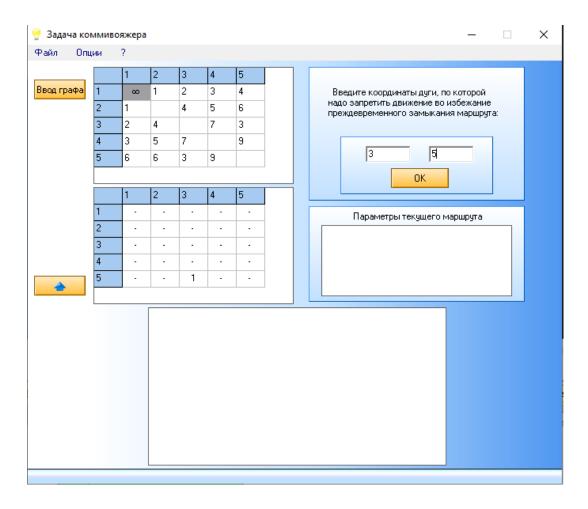
Выполнение работы.

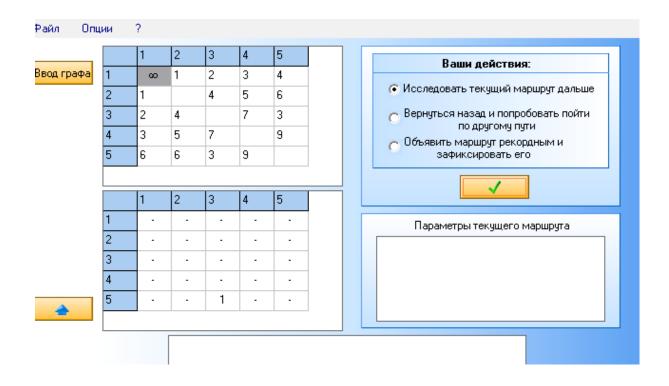
Условие задачи:

Первый шаг:



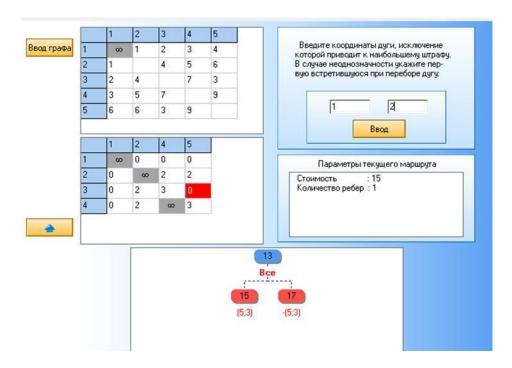


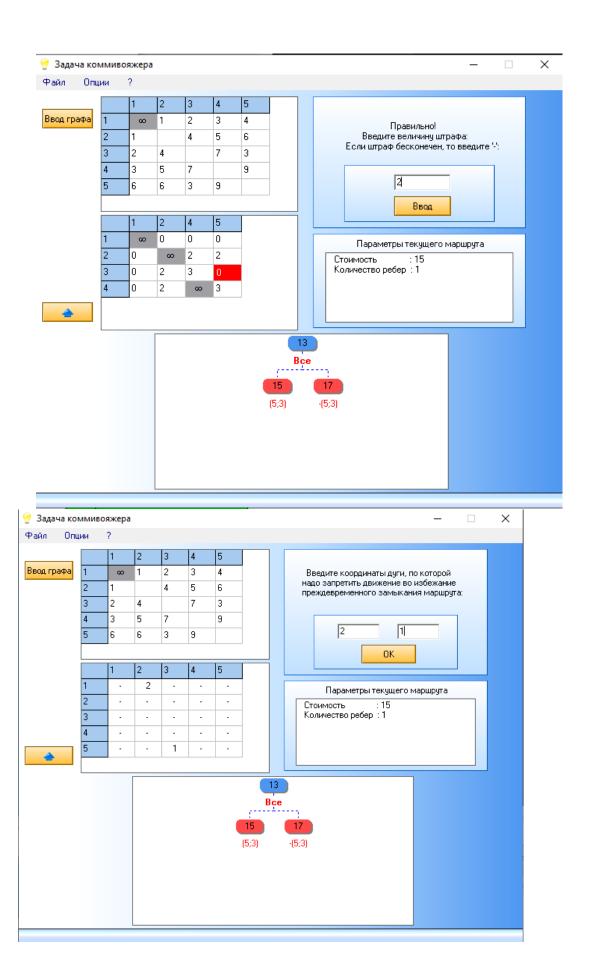


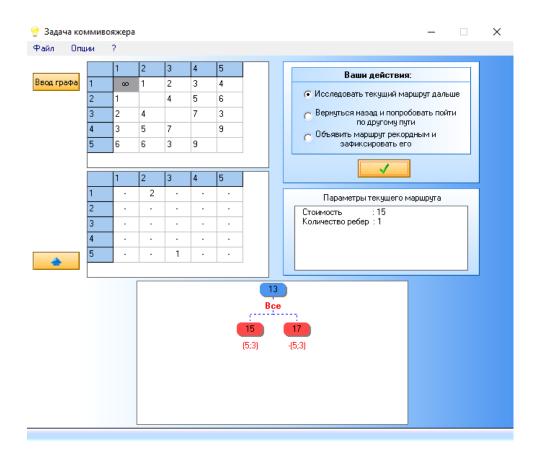


Таким образом, выбор 5->3, штраф 4, запрет 3->5, стоимость 15.

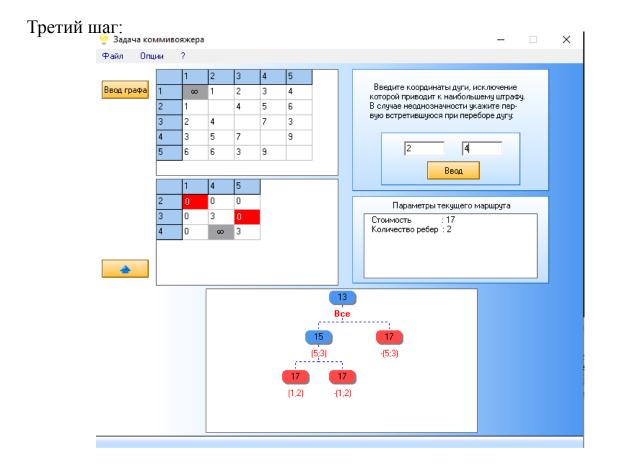
Второй шаг:

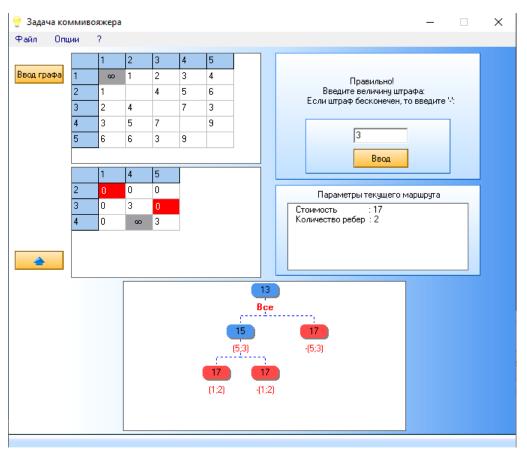


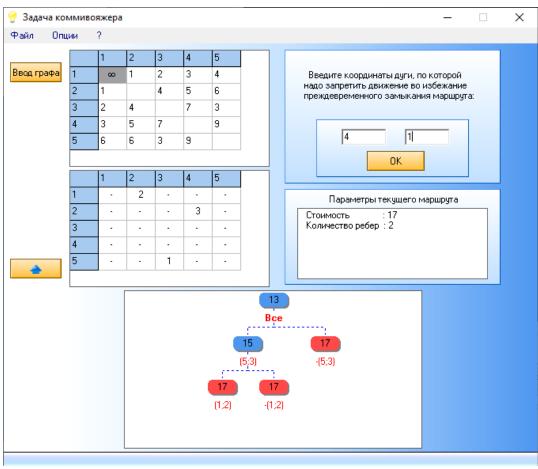


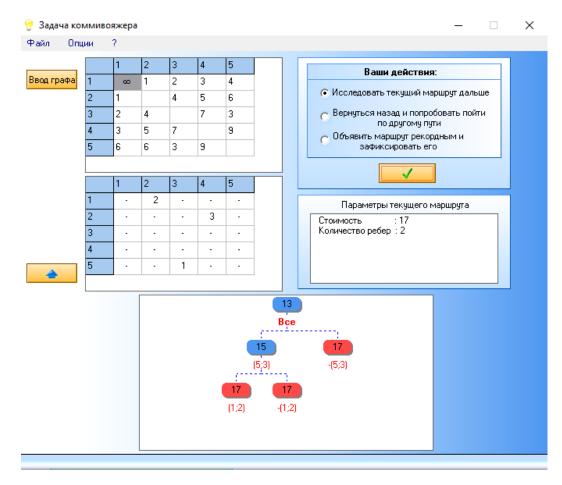


Таким образом, выбор 1->2, штраф 2, запрет 2->1, стоимость 17,



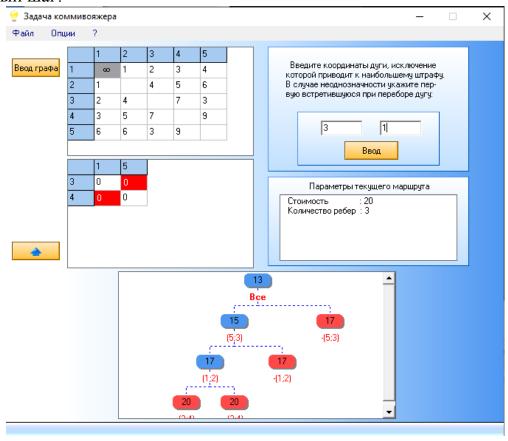


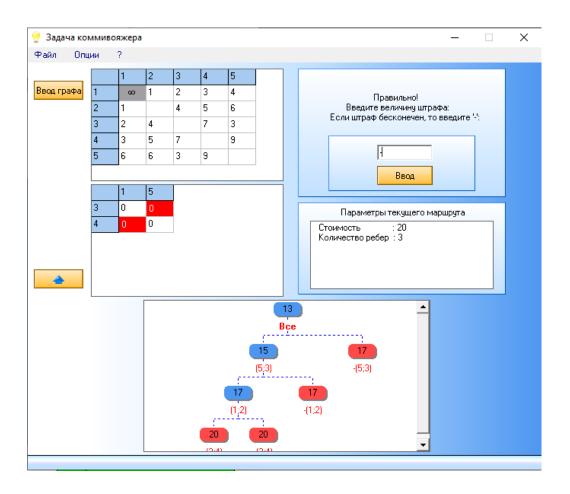


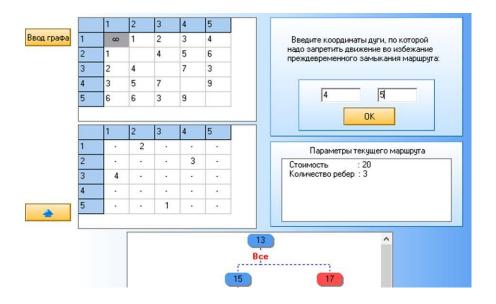


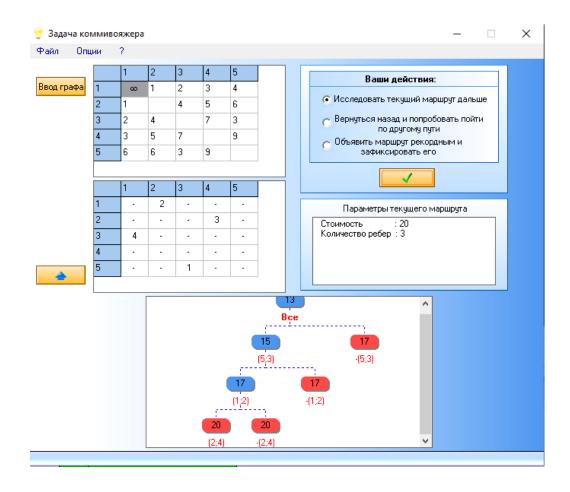
Таким образом, выбор 2->4, штраф 3, запрет 4->1, стоимость 20.

Четвертый шаг:

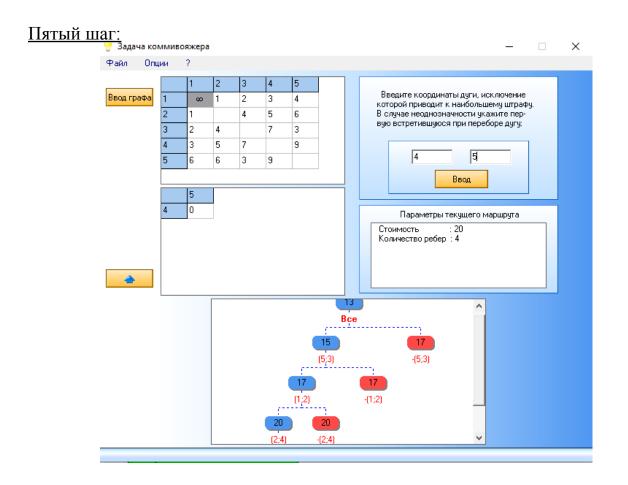


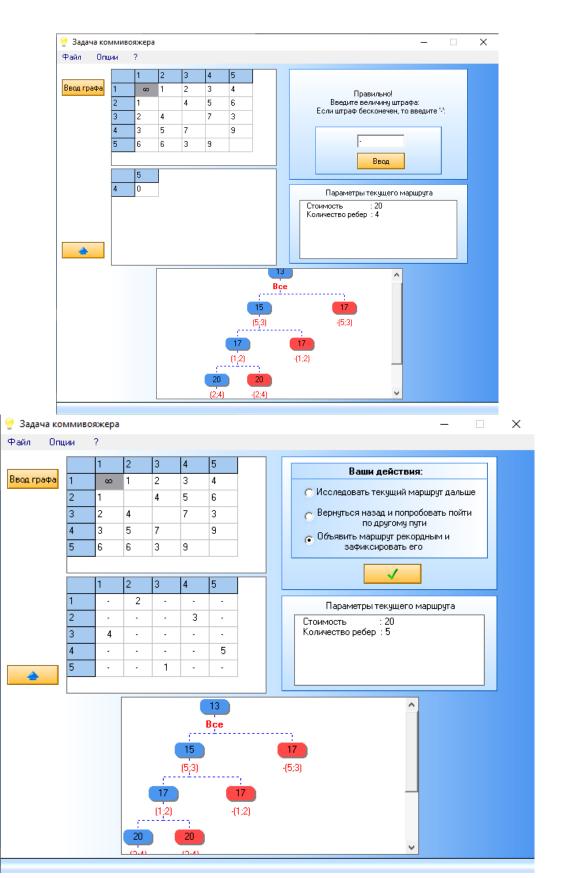


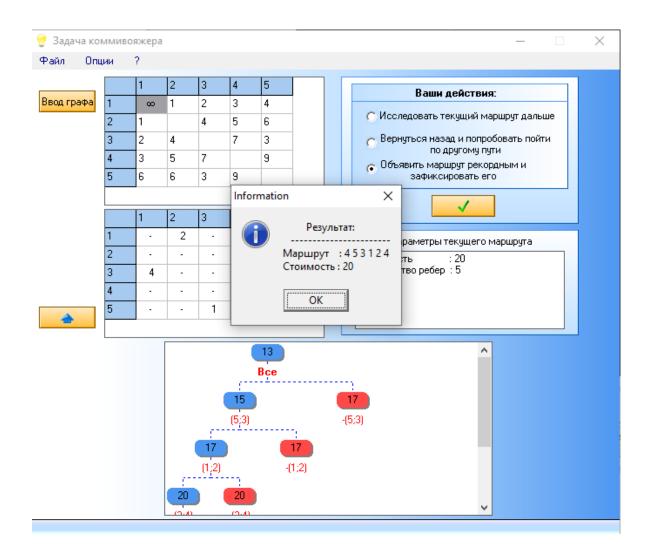




Таким образом, выбор 3->1, штраф "inf", запрет 4->5.

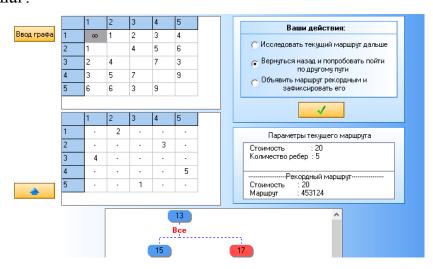


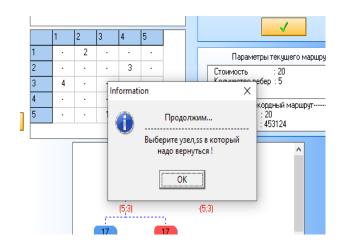


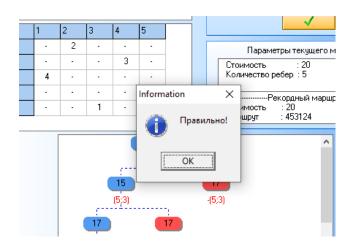


Итог: выбор 4->5, штраф "inf", нашли путь за 20, объявляем рекордным, однако надо посмотреть другие варианты в дереве, т.к. есть листья по 17.

Шестой шаг:

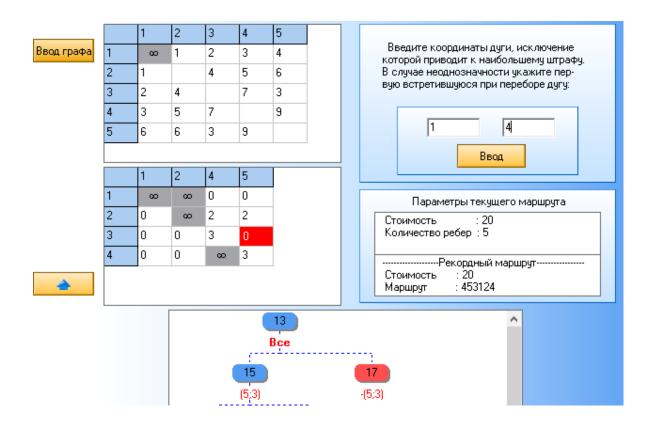


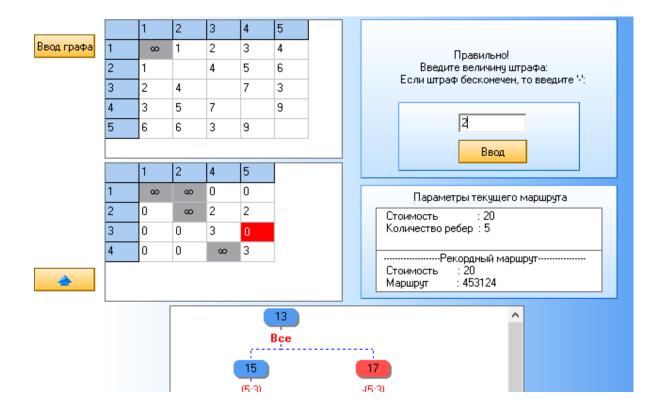


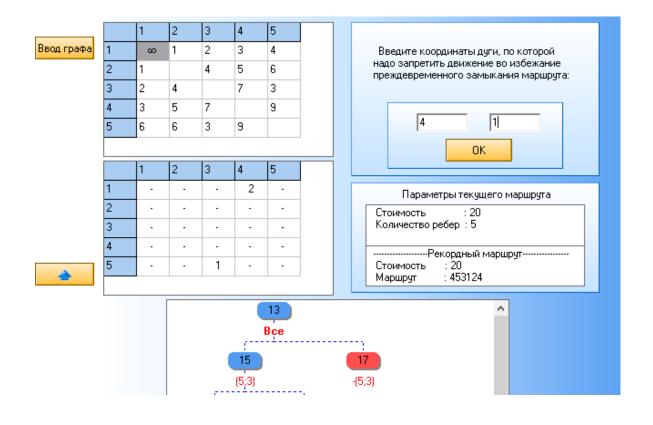


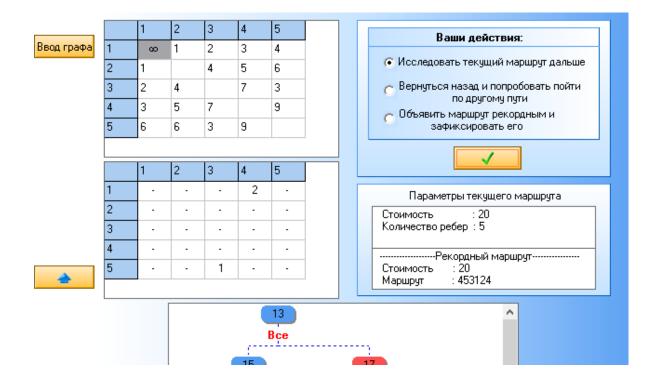
. 17 -(1;2)

ĸ.



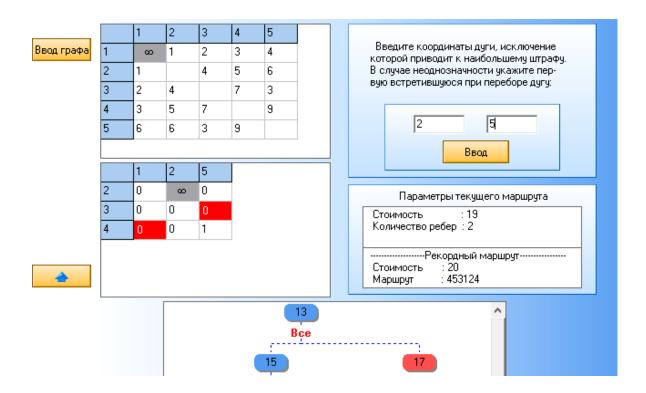


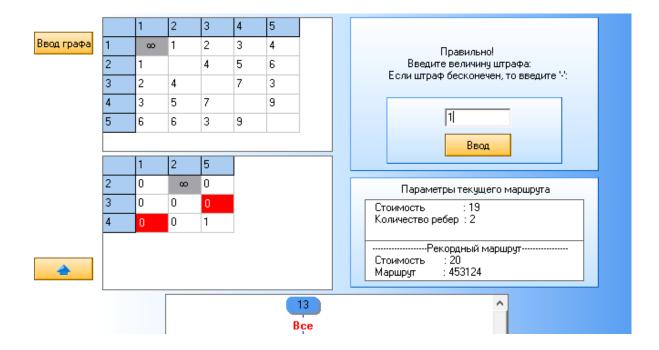


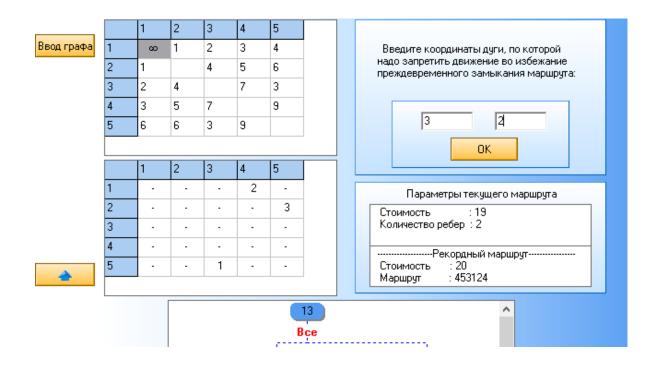


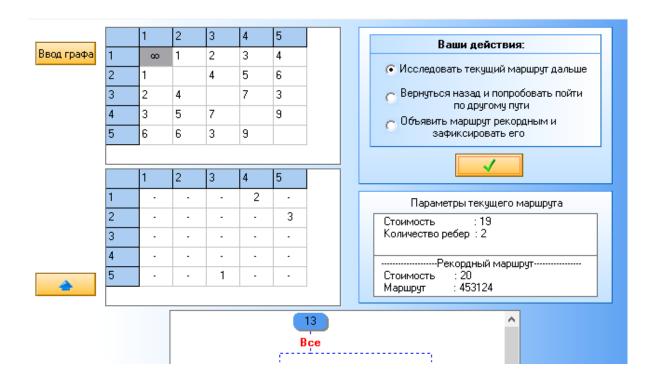
Таким образом, вернулись на уровень выше, на лист с 17. На не запрещен 1->2. Выбор 1->4 (штраф 2), запрет 4->1, продолжаем дальше.

Седьмой шаг:



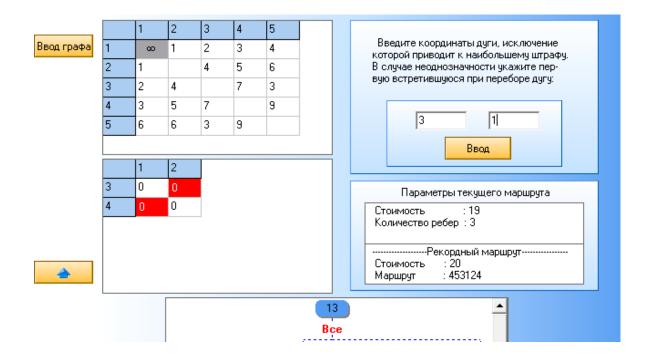


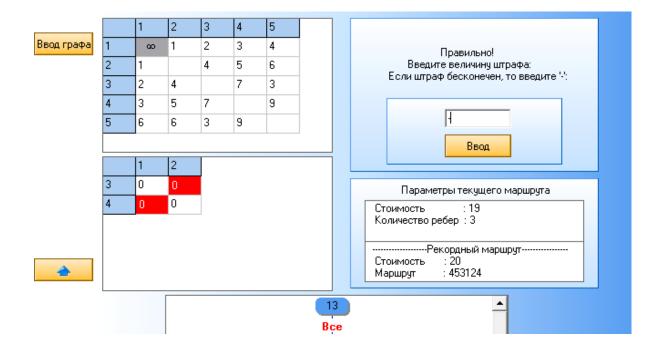


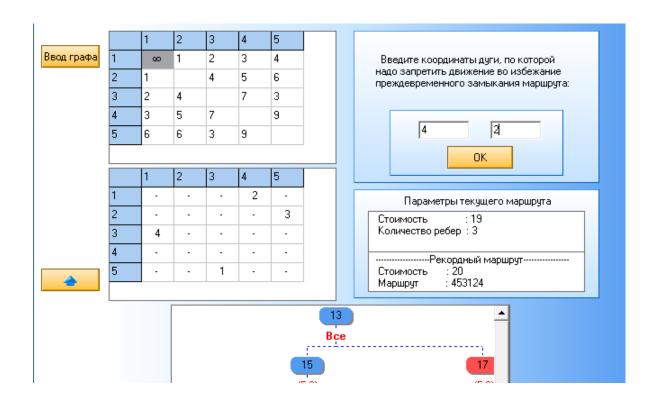


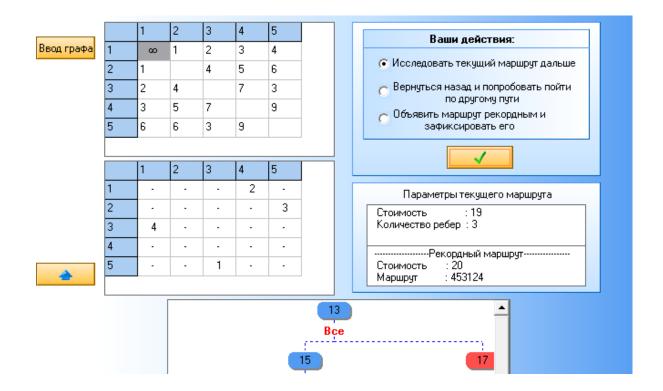
Таким образом, выбор 2->5 (штраф 1), запрет 3->2, продолжаем дальше.

Восьмой шаг:



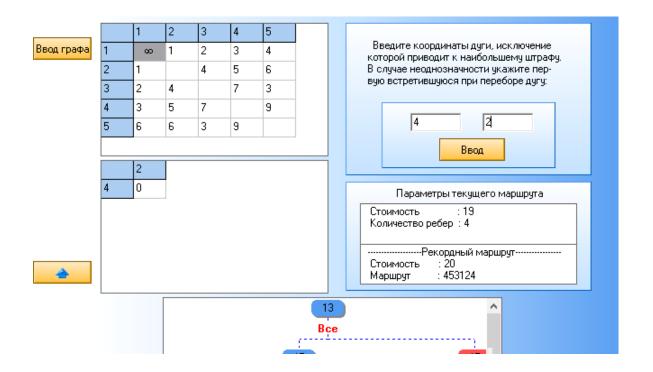


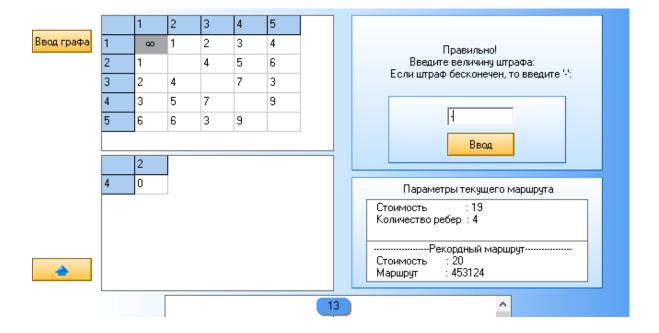


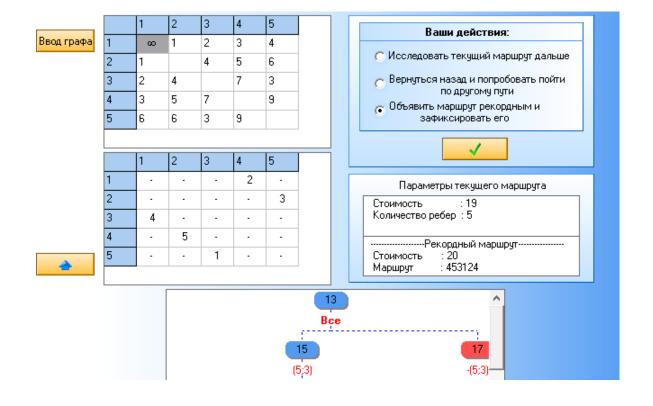


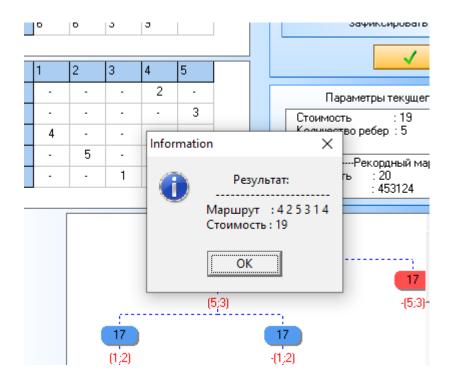
Таким образом, выбор 3->1 (штраф "inf"), запрет 4->2, продолжаем дальше.

Девятый шаг:



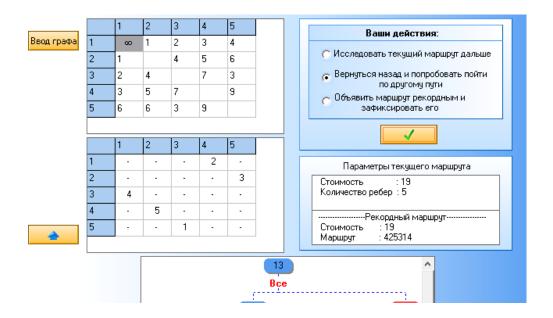


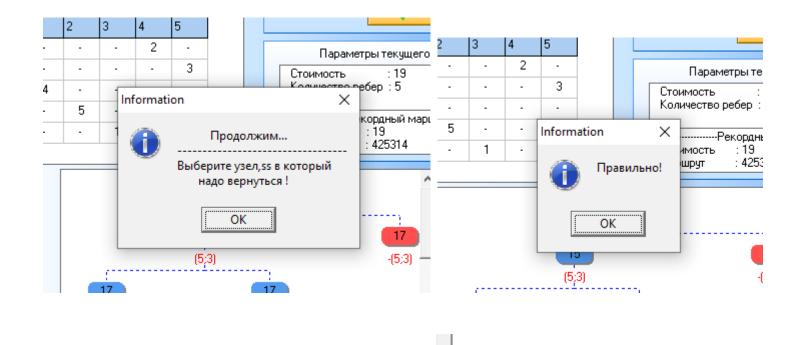




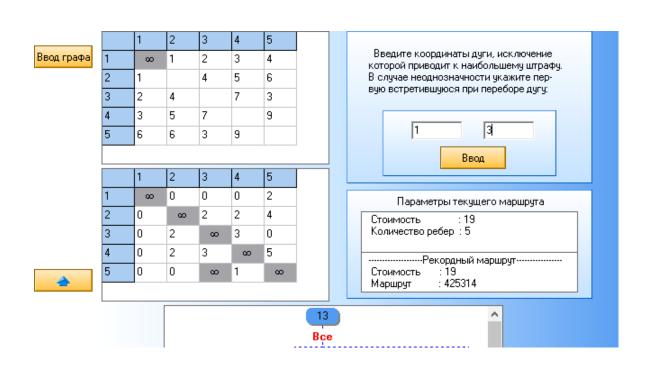
Итог: выбор 4->2, штраф "inf", нашли путь за 19, объявляем рекордным, однако надо посмотреть другие варианты в дереве, т.к. есть листья по 17.

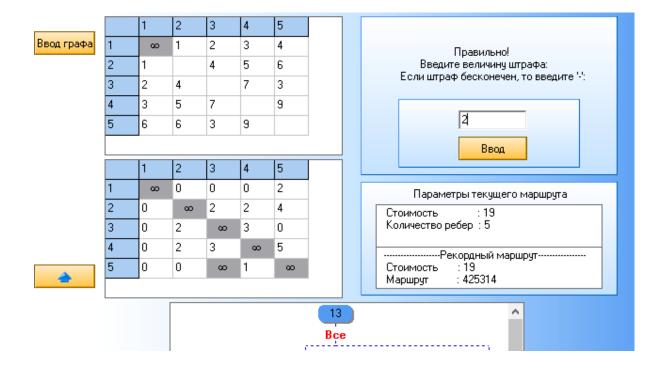
Десятая итерация:



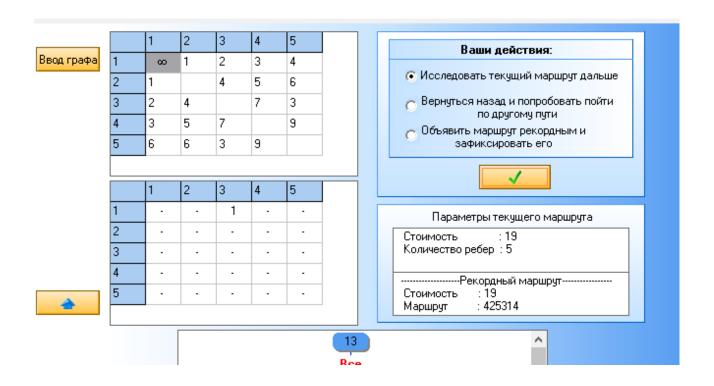


-(5;3)



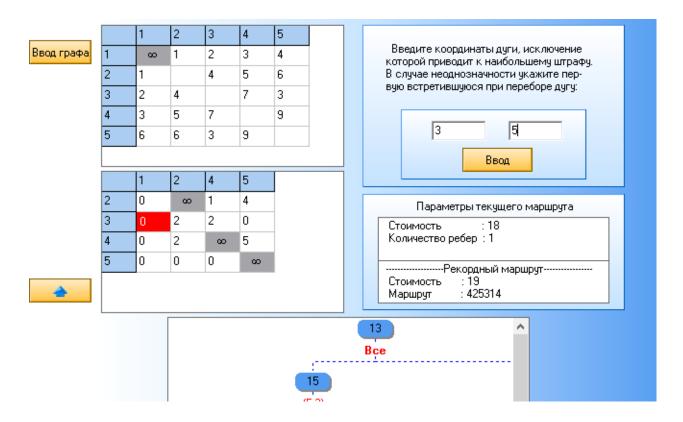


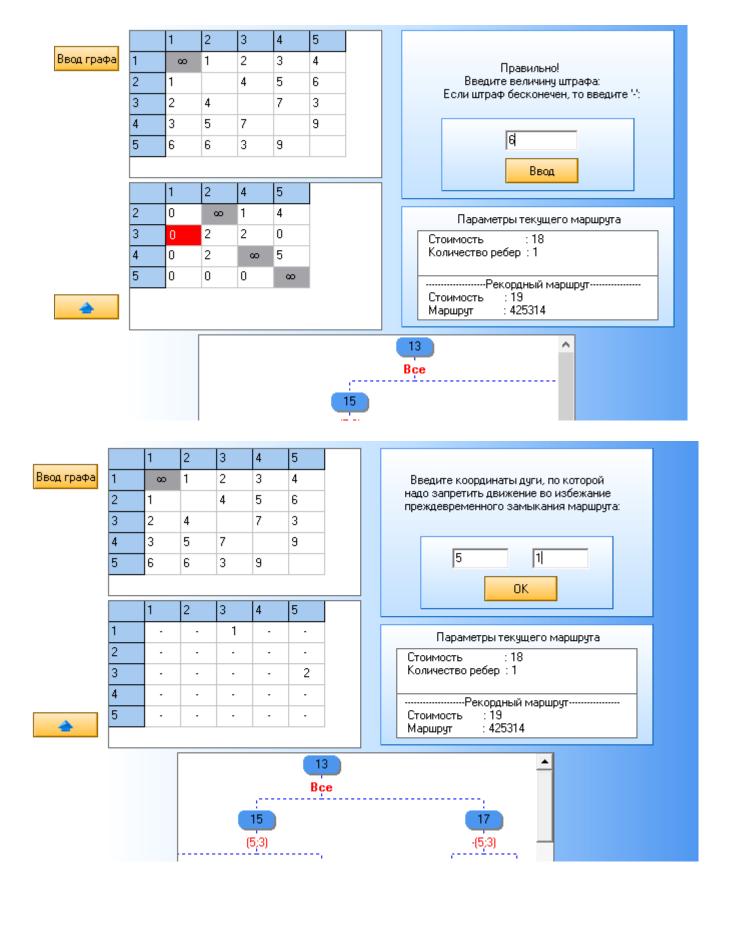


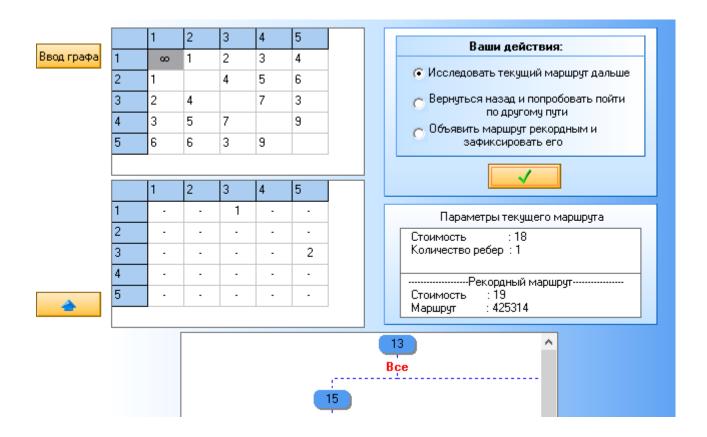


Таким образом, вернулись на уровень выше, на лист с 17. На нем запрещен 5->3. Выбор 1->3 (штраф 2), запрет 3->1, продолжаем дальше.

Одиннадцатый шаг:

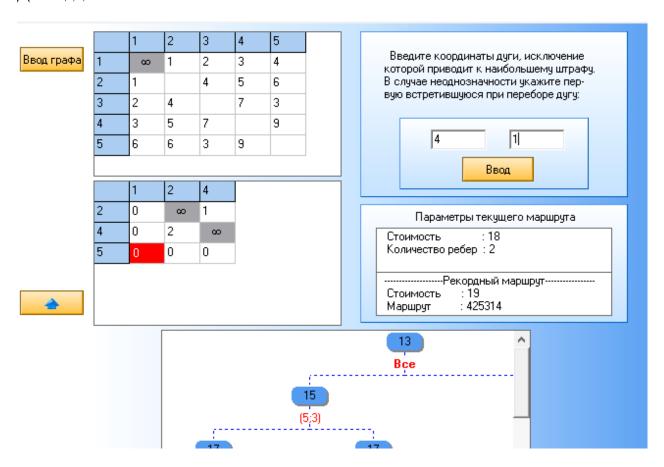


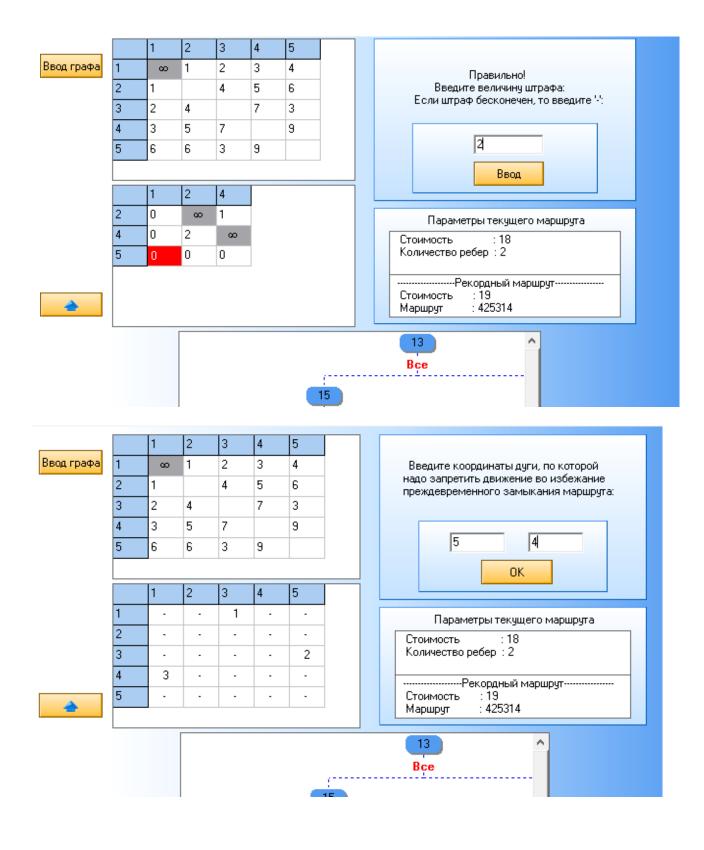




Таким образом, выбор 3->5 (штраф 6), запрет 5->1.

Двенадцатый шаг:

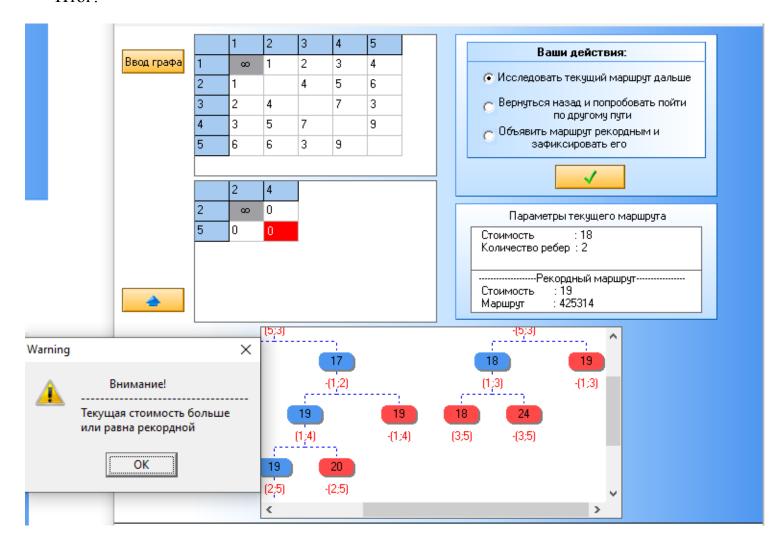


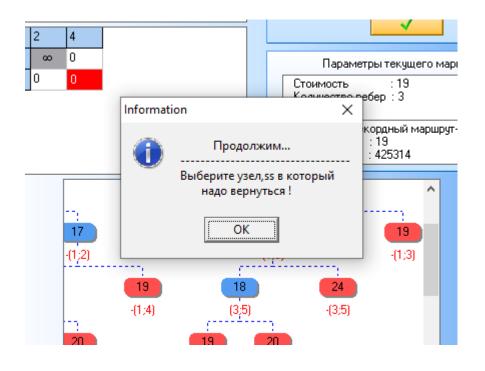


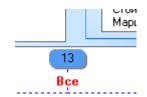


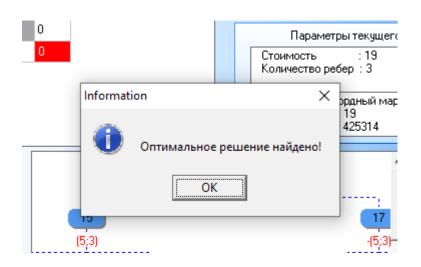
Таким образом, выбор 4->1 (штраф 2), запрет 5->4, продолжаем дальше.

Итог:









Найден оптимальный путь за 19

DOS-версия

• Условие и первая итерация:

```
введите номер варианта
гекущая матрица расстояний:
                     40
                            31
          10000
                                   25
                     17
                            30
 2345
                                    1
       19
              15 10000
                             6
              50
                        10000
                                    6
                     24
                            10 10000
сокращенная матрица расстояний:
    10000
                      16
                              8
2
3
4
5
        0 10000
                      10
                             24
                                    24
                7
                  10000
                             0
                                     0
        14
        0
                      13 10000
               38
                                10000
        17
                0
                       0
                              4
Введите координаты дуги, исключение которой
приводит к наибольшему штрафу.
В случае неоднозначночти укажите первую
встретившуюся при переборе дугу
(номер строки – медленный индекс).
```

```
Ответ верен.Введите величину штрафа
 (если штраф бесконечен, введите 10000)
10
Матрица дуг, включенных в текущий маршрут.
ненулевые элементы равны номерам уровней,
на которых происходило включение в маршрут
соответствующих дуг)
   0
      0
         0
            0
   0
      0
         0 0
 1
0
   0
      0
         0
            0
 0
   0
      0
         0
             0
   0
      0
         0
             0
Введите координаты дуги, по которой надо запретить
движение во избежание преждевременного
замыкания маршрута.
1 2
```

```
Вы угадали. Работа продолжается...
Длина рекордного маршрута=10000
Оценка снизу длины рекордного маршрута= 57
Количество дуг в текущем маршруте= 1
Введите 1,2 или 3 в зависимости от того,
что надо делать:
1. Исследовать текущий маршрут дальше.
2. Предать текущий маршрут забвению и попытаться,
вернувшись по дереву маршрутов назад,
пойти по отвергнутому когда-то пути
3. Объявить текущий маршрут рекордным,
зафиксировать его и сменить величину рекорда
```

Итог первой итерации: выбираем путь 2->1 (запрещаем 1->2), штра $\phi = 10$

• Вторая итерация

```
Двигаемся дальше...
сокращенная матрица расстояний:
        2
              3
                    4
                          5
    10000
              8
                    0
                           1
 3
        7 10000
                    0
                          0
       37
             12 10000
                          0
 5
        0
              0
                    4 10000
Введите координаты дуги, исключение которой
приводит к наибольшему штрафу.
В случае неоднозначночти укажите первую
встретившуюся при переборе дугу
 (номер строки - медленный индекс).
4 5
```

```
Ответ верен.Введите величину штрафа
 (если штраф бесконечен, введите 10000)
12
Матрица дуг, включенных в текущий маршрут.
ненулевые элементы равны номерам уровней,
на которых происходило включение в маршрут
соответствующих дуг)
   0
      0 0 0
   0
      0
         0 0
   0
      0
         0 0
 0
   0
      0
         0
            2
      0
         0 0
Введите координаты дуги, по которой надо запретить
движение во избежание преждевременного
замыкания маршрута.
5 4
```

```
Вы угадали. Работа продолжается...
Длина рекордного маршрута=10000
Оценка снизу длины рекордного маршрута= 57
Количество дуг в текущем маршруте= 2
Введите 1,2 или 3 в зависимости от того,
что надо делать:
1. Исследовать текущий маршрут дальше.
2. Предать текущий маршрут забвению и попытаться,
вернувшись по дереву маршрутов назад,
пойти по отвергнутому когда-то пути
3. Объявить текущий маршрут рекордным,
зафиксировать его и сменить величину рекорда
1_
```

Итог второй итерации: выбираем путь 4->5 (запрещаем 5->4), штра $\phi = 12$

• Третья итерация

```
Двигаемся дальше...
сокращенная матрица расстояний:
                 3
     10000
                 8
                        0
 1
 3
         7 10000
 5
                 0 10000
Введите координаты дуги, исключение которой
приводит к наибольшему штрафу.
В случае неоднозначночти укажите первую
встретившуюся при переборе дугу
(номер строки - медленный индекс).
Ответ верен. Введите величину штрафа
 (если штраф бесконечен, введите 10000)
Матрица дуг, включенных в текущий маршрут.
ненулевые элементы равны номерам уровней,
на которых происходило включение в маршрут
соответствующих дуг)
   0 0 3 0
  0 0 0 0
0
  0 0 0 0
   0 0 0 2
```

```
Введите координаты дуги, по которой надо запретить
движение во избежание преждевременного
замыкания маршрута.
52
Вы угадали. Работа продолжается...
Длина рекордного маршрута=10000
Оценка снизу длины рекордного маршрута=
                                          64
Количество дуг в текущем маршруте= 3
Введите 1,2 или 3 в зависимости от того,
что надо делать:
1. Исследовать текущий маршрут дальше.
2. Предать текущий маршрут забвению и попытаться,
   вернувшись по дереву маршрутов назад,
  пойти по отвергнутому когда-то пути
3. Объявить текущий маршрут рекордным,
   зафиксировать его и сменить величину рекорда
```

Итог третьей итерации: выбираем путь 1->4 (запрещаем 5->2), штра $\phi = 8$

• Четвертая итерация

```
Двигаемся дальше...
Длина рекордного маршрута=10000
Оценка снизу длины рекордного маршрута= 64
Количество дуг в текущем маршруте= 5
Введите 1,2 или 3 в зависимости от того,
что надо делать:
1. Исследовать текущий маршрут дальше.
2. Предать текущий маршрут забвению и попытаться,
вернувшись по дереву маршрутов назад,
пойти по отвергнутому когда-то пути
3. Объявить текущий маршрут рекордным,
зафиксировать его и сменить величину рекорда
```

```
Двигаемся дальше...
                                            64
        Получен допустимый маршрут длины
               4
                      5
                             3
                                     2
                                            1
Перед Вами матрица нижних оценок
маршрутов, связанных с текущим:
в правом столбце - оценки длины техщуго маршрута,
       возрастающие сверху вниз
       по мере включения в маршрут конкретных дуг;
в левом столбце - оценки длин маршрутов,
       альтернативных текущему
           57
           57
    69
    65
           64
 10000
           64
 10000
           64
Введите:
   номер уровня ветвления,
    к которому надо вернуться, чтобы выбрать
    альтернативный к текущему вариант ветвления,
или
    0, если техущий маршрут оптимален
```

По итогам сравнения необходимо вернуться на 1 уровень дерева.

```
текущая матрица
             2
                    3
                          4
                                 5
                                27
   10000
            25
                   40
                         31
   10000 10000
                   17
                                25
                         30
3
            15
               10000
      19
                          6
                                 1
       9
                   24
7
                      10000
            50
                                 6
      22
             8
                         10 10000
сокращенная матрица расстояний:
                                  5
              2
              0
                                  9
    10000
                    16
                           8
2
3
    10000
          10000
                     0
                          14
                                 14
              7
                           0
       10
                 10000
                                  0
        0
              42
                    17
                       10000
                                  5
       13
                           4 10000
                     0
Введите координаты дуги, исключение которой
приводит к наибольшему штрафу.
В случае неоднозначночти укажите первую
встретившуюся при переборе дугу
(номер строки - медленный индекс).
Ответ верен.Введите величину штрафа
 (если штраф бесконечен, введите 10000)
```

```
Матрица дуг, включенных в текущий маршрут.
ненулевые элементы равны номерам уровней,
на которых происходило включение в маршрут
соответствующих дуг)
   0 0 0 0
0
   0 0
         0
            0
0
   0 0
         0
            0
1
   0 0 0
            0
   0
      0
            0
0
         0
Введите координаты дуги, по которой надо запретить
движение во избежание преждевременного
замыкания маршрута.
1 4
```

```
Вы угадали. Работа продолжается...
Длина рекордного маршрута= 64
Оценка снизу длины рекордного маршрута= 58
Количество дуг в текущем маршруте= 1
Введите 1,2 или 3 в зависимости от того,
что надо делать:
1. Исследовать текущий маршрут дальше.
2. Предать текущий маршрут забвению и попытаться,
вернувшись по дереву маршрутов назад,
пойти по отвергнутому когда-то пути
3. Объявить текущий маршрут рекордным,
зафиксировать его и сменить величину рекорда
```

Итоги четвертой итерации: : выбираем путь 1->4 (запрещаем 4->1), штраф = 15

• Пятая итерация

```
Двигаемся дальше...
сокращенная матрица расстояний:
        2
              3
                    4
        0
             16 10000
                          9
    10000
              0
                   14
                         14
 3
        7 10000
                    0
                          0
                    4 10000
Введите координаты дуги, исключение которой
приводит к наибольшему штрафу.
В случае неоднозначночти укажите первую
встретившуюся при переборе дугу
(номер строки - медленный индекс).
23
Ответ верен. Введите величину штрафа
 (если штраф бесконечен, введите 10000)
```

```
Ответ верен.Введите величину штрафа
(если штраф бесконечен, введите 10000)
Матрица дуг, включенных в техущий маршрут.
ненулевые элементы равны номерам уровней,
на которых происходило включение в маршрут
соответствующих дуг)
0 0 0 0 0
0 0 2 0 0
  0 0 0 0
   0 0 0 0
   0
      0
            0
         0
Введите координаты дуги, по которой надо запретить
движение во избежание преждевременного
замыкания маршрута.
32
```

```
Введите координаты дуги, по которой надо запретить
движение во избежание преждевременного
замыкания маршрута.
32
Вы угадали.
             Работа продолжается...
Длина рекордного маршрута=
                             64
                                          58
Оценка снизу длины рекордного маршрута=
Количество дуг в текущем маршруте= 2
Введите 1,2 или 3 в зависимости от того,
что надо делать:
1. Исследовать текущий маршрут дальше.
2. Предать текущий маршрут забвению и попытаться,
   вернувшись по дереву маршрутов назад,
  пойти по отвергнутому когда-то пути
3. Объявить текущий маршрут рекордным,
   зафиксировать его и сменить величину рекорда
```

Итоги пятой итерации: : выбираем путь 2->3 (запрещаем 3->2), штра $\phi = 14$

• Шестая итерация

```
Двигаемся дальше...
сокращенная матрица расстояний:
                    5
        2
             4
        0 10000
                    9
3
   10000
              4 10000
Введите координаты дуги, исключение которой
приводит к наибольшему штрафу.
В случае неоднозначночти укажите первую
встретившуюся при переборе дугу
(номер строки – медленный индекс).
1 2
Ответ верен. Введите величину штрафа
(если штраф бесконечен, введите 10000)
```

```
Матрица дуг, включенных в текущий маршрут.

ненулевые элементы равны номерам уровней,

на которых происходило включение в маршрут

соответствующих дуг)

0 3 0 0 0

0 0 2 0 0

0 0 0 0 0

1 0 0 0 0

0 0 0 0 0

Введите координаты дуги, по которой надо запретить

движение во избежание преждевременного

замыкания маршрута.

3 4_
```

```
Введите 1,2 или 3 в зависимости от того, что надо делать:

1. Исследовать текущий маршрут дальше.

2. Предать текущий маршрут забвению и попытаться, вернувшись по дереву маршрутов назад, пойти по отвергнутому когда-то пути

3. Объявить текущий маршрут рекордным, зафиксировать его и сменить величину рекорда

1 Двигаемся дальше...

Длина рекордного маршрута= 64

Оценка снизу длины рекордного маршрута= 62

Количество дуг в текущем маршруте= 4
```

Итоги шестой итерации: : выбираем путь 1->2 (запрещаем 3->4), штра $\phi = 9$

• Седьмая итерация

```
Введите 1,2 или 3 в зависимости от того,
что надо делать:
1. Исследовать текущий маршрут дальше.
2. Предать техущий маршрут забвению и попытаться,
  вернувшись по дереву маршрутов назад,
  пойти по отвергнутому когда-то пути
3. Объявить текущий маршрут рекордным,
  зафиксировать его и сменить величину рекорда
Двигаемся дальше...
Длина рекордного маршрута=
Оценка снизу длины рекордного маршрута=
                                          62
Количество дуг в текущем маршруте= 4
Введите 1,2 или 3 в зависимости от того,
что надо делать:
1. Исследовать техущий маршрут дальше.
2. Предать текущий маршрут забвению и попытаться,
  вернувшись по дереву маршрутов назад,
  пойти по отвергнутому когда-то пути
3. Объявить текущий маршрут рекордным,
  зафиксировать его и сменить величину рекорда
```

```
его и сменить величину рекорда
 Двигаемся дальше...
        Получен допустимый маршрут длины
                                            62
                      3
                                            1
Перед Вами матрица нижних оценок
маршрутов, связанных с текущим:
 в правом столбце - оценки длины техщуго маршрута,
       возрастающие сверху вниз
       по мере включения в маршрут конкретных дуг;
 в левом столбце - оценки длин маршрутов,
       альтернативных текущему
    73
           58
    72
           58
    67
           62
 10000
           62
 10000
           62
Введите:
   номер уровня ветвления,
    к которому надо вернуться, чтобы выбрать
    альтернативный к текущему вариант ветвления,
 или
    0, если техущий маршрут оптимален
```

```
Получено оптимальное решение длины
                                           62
       Идите:
из города
          1 в город
                       2 длина пути=
       Идите:
          2 в город
                       3 длина пути=
                                      17
из города
       Идите:
                       5 длина пути=
                                       1
из города
           3 в город
       Идите:
           5 в город
                       4 длина пути=
                                      10
из города
       Идите:
                       1 длина пути=
                                       9
           4 в город
из города
```

Алгоритм завершен

Вывод

Был изучен метод ветвей и границ для решения задачи коммивояжера.