

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МОЭВМ

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1

по дисциплине «Элементы функционального анализа»

Тема: Норма элемента

Студент гр. 1384

Преподаватель

Бобков В. Д,

Коточигов А.М.

Санкт-Петербург

2024

Задание.

Вариант 2.

В R^3 задан многогранник W и две точки x и y . Требуется вычислить норму Минковского для $\|x\|$, $\|y\|$ и $\|x+y\|$. Способ задания W : в условии даны шесть точек (вершины в первом октанте) $\{\{8, 10, 0\}, \{12, 0, 11\}, \{0, 7, 9\}, \{13, 0, 0\}, \{0, 19, 0\}, \{0, 0, 16\}\}$

Основные теоретические положения.

Выпуклость. Выпуклым телом называется выпуклое множество W , в котором существует такая точка w , что для любого $x \in X$ найдется число $\varepsilon(x) > 0$ такое, что множество W содержит отрезок $w + tx$, при всех $t \in (-\varepsilon(x); \varepsilon(x))$.

Норма Минковского. Пусть W – выпуклое множество и 0 является его внутренней точкой. Нормой Минковского, порожденной множеством W , называется $\|x\| = \inf \{ \lambda : x/\lambda \in W, \lambda > 0 \}$, $x \in W \Rightarrow -x \in W$.

Теорема Минковского. Если W – выпуклое ограниченное тело и 0 является его внутренней точкой, то выражение $\|x\| = \inf \{ \lambda : x/\lambda \in W, \lambda > 0 \}$ задает норму в пространстве X .

Биортогональный базис. Это набор векторов в линейном пространстве, для которого каждый вектор ортогонален всем остальным векторам в этом наборе, за исключением самого себя, и все они нормированы (имеют единичную длину).

Выполнение работы.

Так как $\|(x, y, z)\| = \|(|x|, |y|, |z|)\|$, то отрицательные составляющие вектора X и Y можно сделать положительными

Для построения многогранника нужно трижды отразить координаты относительно координатных плоскостей.

Для выполнения Теоремы Минковского требуется выполнение трех свойств:

1) Нулевой элемент является внутренней точкой множества многогранника (выполнено по условию задания)

2) $x \in W \Rightarrow -x \in W$ (выполнено благодаря симметричности многогранника)

3) Выпуклость многогранника (выполнено, для достижения выпуклости координаты точки C были изменены (0, 7, 9) --> (0, 15, 9))

Проверим свойство выпуклости для заданного многогранника, для этого составим уравнения плоскостей со значением свободного коэффициента d=1 для всех граней в первом октанте и проверим положение всех 18 точек многогранника относительно них:

Уравнения плоскостей для граней в первом октанте:

$$ADE: F1(x, y, z) = 110x + 55y + 10z - 1430 = 0$$

$$CEG: F2(x, y, z) = 75x + 84y + 180z - 2880 = 0$$

$$BDG: F3(x, y, z) = -81x - 72y - 32z + 1368 = 0$$

$$DEG: F4(x, y, z) = -145x - 124y - 60z + 2400 = 0$$

Знак коэффициента для всех 18 точек:

$$\begin{aligned} &\text{Уравнение плоскости: } 110 \cdot x + 55 \cdot y + 10 \cdot z - 1430 \\ &\text{----- } 0 - 0 0 \text{ Все знаки совпадают} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Уравнение плоскости: } 75 \cdot x + 84 \cdot y + 180 \cdot z - 2880 \\ &\text{----- } 0 \text{ ----- } 0 - \text{ Все знаки совпадают} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Уравнение плоскости: } -81 \cdot x - 72 \cdot y - 32 \cdot z + 1368 \\ &\text{+++++ } 0 + 0 + \text{ Все знаки совпадают} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Уравнение плоскости: } -145 \cdot x - 124 \cdot y - 60 \cdot z + 2400 \\ &\text{+++++ } 0 + 0 + \text{ Все знаки совпадают} \end{aligned}$$

Найдем биортогональный базис для каждой из граней в первом октанте:

1) Рассмотрим конус OADE, в котором построим биортогональный базис для OA, OE, OD:

$$OA' = (OA_1, OA)^{-1} \cdot OA_1 = (0.07692308, -0.06153846, -0.08391608), OA_1 = OE \times OD$$

$$OE' = (OE_1, OE)^{-1} \cdot OE_1 = (0, 0, 0.09090909), OE_1 = OA \times OD$$

$$OD' = (OD_1, OD)^{-1} \cdot OD_1 = (0, 0.1, 0), OD_1 = OA \times OE$$

2) Рассмотрим конус ODEG, в котором построим биортогональный базис для OE, OG, OD:

$$0D' = (0D_1, 0D)^{-1} * 0D_1 = (0.06875, 0.045, -0.075), 0D_1 = 0E \times 0G$$

$$0E' = (0E_1, 0E)^{-1} * 0E_1 = (0.0375, -0.03, 0.05), 0E_1 = 0G \times 0D$$

$$0G' = (0G_1, 0G)^{-1} * 0G_1 = (-0.04583333, 0.03666667, 0.05), 0G_1 = 0D \times 0E$$

3) Рассмотрим конус $0BDG$, в котором построим биортогональный базис для $0B, 0G, 0D$:

$$0B' = (0B_1, 0B)^{-1} * 0B_1 = (-0.06578947, 0.05263158, -0.0877193), 0B_1 = 0D \times 0G$$

$$0D' = (0D_1, 0D)^{-1} * 0D_1 = (0.125, 0, 0), 0D_1 = 0G \times 0B$$

$$0G' = (0G_1, 0G)^{-1} * 0G_1 = (0, 0, 0.11111111), 0G_1 = 0D \times 0B$$

4) Рассмотрим конус $0CEG$, в котором построим биортогональный базис для $0C, 0E, 0G$:

$$0C' = (0C_1, 0C)^{-1} * 0C_1 = (-0.05729167, -0.0375, 0.0625), 0C_1 = 0E \times 0G$$

$$0E' = (0E_1, 0E)^{-1} * 0E_1 = (0.08333333, 0, 0), 0E_1 = 0G \times 0C$$

$$0G' = (0G_1, 0G)^{-1} * 0G_1 = (0, 0.06666667, 0), 0G_1 = 0E \times 0C$$

Найдем коэффициенты разложения и норму для каждой точки по каждому базису:

1) Следовательно, раскладываем векторы по базису $0A, 0E, 0D$

$$0X = a * 0A + b * 0E + c * 0D$$

$$a = (0X, 0A'), b = (0X, 0E'), c = (0X, 0D')$$

$$||X|| = a+b+c = 3.6923076923$$

$$0Y = a * 0A + b * 0E + c * 0D$$

$$a = (0Y, 0A'), b = (0Y, 0E'), c = (0Y, 0D')$$

$$||Y|| = a+b+c = 11.790209790199999$$

$$0Z = 0X + 0Y = a * 0A + b * 0E + c * 0D$$

$$a = (0Z, 0A'), b = (0Z, 0E'), c = (0Z, 0D')$$

$$||Z|| = a+b+c = 15.482517482500004$$

Далее все считается аналогичным образом, поэтому будут приводиться лишь таблицы.

Точка	a	b	c	норма
X	-7.30769230769231	11	0	3.6923076923
Y	-21.4825174825	23.2727272727	10.0	11.790209790199999
Z	-28.7902097902	34.2727272727	10.0	15.482517482500004

2) Следовательно, раскладываем векторы по базису $0E, 0G, 0D$

Точка	a	b	c	норма
X	-6.53125	7.4375	4.3541666667	5.2604166667
Y	-9.2	12.8	12.8	16.4
Z	-15.73125	20.2375	17.1541666667	21.6604166667

3) Следовательно, раскладываем векторы по базису $0B, 0G, 0D$

Точка	a	b	c	норма
X	-13.048245614	4.625	13.4444444444	5.0211988303999995
Y	-22.4561403509	10.0	28.4444444444	15.988304093499998
Z	-35.5043859649	14.625	41.8888888888	21.009502923999996

4) Следовательно, раскладываем векторы по базису $0C, 0E, 0G$

Точка	a	b	c	норма
X	5.4427083333	3.0833333333	4.3541666667	12.8802083333
Y	7.6666666667	6.6666666667	6.6666666667	21.000000000100002
Z	13.109375	9.75	6.6666666667	29.5260416667