Примеры линейных нормированных пространств функции

1)$L^p(a,b), 1 \le p < \infty$ – так обозначается пространство функций, для которых сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|^p dx$, норма в этом пространстве определяется

$$||f|| = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

при $p = \infty$

$$||f|| = \sup_{x \in (a,b)} |f(x)|$$

как и для пространств последовательностей наиболее употребительным здесь является $L^2(a,b)$, реже бывают востребованы пространства $L^1(a,b)$ и $L^\infty(a,b)$, остальные пространства шкалы обычно играют вспомогательную роль.

Проверка свойств нормы требуется только для неравенства треугольника Так же как для пространств l^p для $p = 1$, $p = \infty$ –неравенства очевидны, для $p = 2$ оно следует из неравенства Коши-Буняковскогою

Для остальных показателей (для пространств l^p и $L^p(a,b)$) нужно усилить неравенство Коши-Буняковского – доказать неравенство Гельдера. В основе доказательства лежит арифметическое неравенство

Пусть p и q вещественные числа, большие единицы и такие, что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда для любых чисел a и b справедливо неравенство

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\phi(x) = x^m - mx$, $x > 0$, $0 < m < 1$.

Так как $\phi'(x) = m(x^{m-1} - 1)$, то $\phi(1) \ge \phi(x)$ при всех положительных x.

Последнее неравенство можно переписать в виде $x^m - 1 \le m(x - 1)$.

Положим теперь $m = \frac{1}{p}$, $x = \frac{|a|^p}{|b|^q}$.

Тогда $|a| \cdot |b|^{-q/p} - 1 \le \frac{|a|^p|b|^{-q}-1}{p}$.

Если домножить неравенство на $|b|^q$ и учесть, что $q - \frac{q}{p} = 1$, то получится требуемое неравенство.

Следствие (дискретное неравенство Гельдера)

$$\sum_n |x_n y_n| \le \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_n |y_n|^q\right)^{1/q}$$

Следствие (неравенство Гельдера для функций)

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q},$$

здесь $f \in L^p(a,b)$ и $g \in L^q(a,b)$.
Доказательство обоих неравенств приведено в методичке. Оно легко сводится к доказанному арифметическому неравенству.

Еще один важный пример – **пространство непрерывных функций на отрезке**.

$$C[a,b] = \{f(x) \text{ непрерывные функции на } [a,b], \quad ||f|| = \max\{|f(x)| : a \le x \le b\}\}$$

Проверьте, что это равенство задает норму.

Вернемся к обсуждению фундаментальных последовательностей. Крайне неудобно работать с пространствами, у которых фундаментальная последовательность может не иметь предела в том же пространстве.

Рассмотрим пример. В пространстве $C[a,b]$ можно ввести норму порожденную скалярным произведением из $L^2(a,b)$, при этом возникнут фундаментальные последовательности не сходящиеся в исходной метрике, но из свойств интеграла Римана нетрудно получить, что пределами в метрике скалярного произведения окажутся функции из $L^2(a,b)$. Не всегда так легко описать пространство фундаментальных последовательностей, но можно показать, что оно всегда образует линейное нормированное пространство, в котором любая фундаментальная последовательность сходится к элементу того же пространства.

Определение

Линейное нормированное пространство называется **полным**, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к элементу того же пространства.

Всякое линейное нормированное пространство можно пополнить. Эта технически сложная процедура состоит в объяснении того, что после пополнения снова получится линейное пространство.

Определение

Линейное нормированное пространство называется **банаховым пространством**, если оно полно

Среди линейных нормированных пространств особенно важны те, норма которых похожа не евклидову, точнее там должна быть определена ортогональность элементов. Это пространства, где задано скалярное произведение, порождающее норму. В общей ситуации скалярное произведение, как и норма, должно определяться аксиоматически.

Определение

Говорят, что в линейном пространстве X задано скалярное произведение, если для любых двух элементов пространства $x, y \in X$ определено комплексное число (x, y), которое называется их **скалярным произведением**, и при этом выполнены следующие условия:

1) $(kx, y) = k(x, y)$;
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
4) $(x, x) \geq 0$, причем равенство $(x, x) = 0$ влечет $x = 0$.

В любом пространстве со скалярным произведением выполнено неравенство Коши-Буняковского $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$.

Легко проверить, что скалярное произведение в пространстве l^2 можно задать соотношением

$(x, y) = \sum\limits_n x_n \overline{y_n}$

Аналогичным образом можно задать скалярное произведение в $L^2(a, b)$:

$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$

Скалярное произведение всегда порождает норму по следующему правилу

$||x||^2 = (x, x).$

Пространства со скалярным произведением сохраняют еще одно важное свойство евклидовых пространств – равенство параллелограмма

$$2(||x||^2 + ||y||^2) = ||x + y||^2 + ||x - y||^2.$$

Задача
Проверьте, что норма в пространствах l^1, l^∞, $L^1(a, b)$, $L^\infty(a, b)$, $C[a, b]$ не может быть задана с помощью скалярного произведения (приведите примеры нарушения равенства параллелограмма).

Определение

Линейное пространство со скалярным произведением называется **гильбертовым про-**

странством, если оно является полным в метрике порожденной скалярным произведением.

Всюду в дальнейшем мы рассматриваем только полные нормированные пространства.

Возвращаясь к описанию линейных нормированных пространств в целом, следует заметить, что после введения нормы и проверки ее свойств всегда остается вопрос о полноте пространства.
Множества с конечным числом элементов могут образовывать линейное пространство, например, поле вычетов по модулю простого числа, но аппарат функционального анализа ориентирован на бесконечные объекты. При этом невозможно ограничиться грубой градацией, в которой множество может быть либо конечным, либо бесконечным. Необходимость сравнения бесконечных множеств требует дополнительных определений.

Определение

Два множества называются **равномощными**, если существует функция, взаимно однозначно отображающая одно множество на другое.

Это естественное определение часто приводит к неожиданным, на первый взгляд, результатам.

Примеры

1)Множество натуральных чисел N равномощно множеству четных чисел $2N$.

2) Множество натуральных чисел N равномощно множеству целых чисел Z.

3) Множество натуральных чисел N равномощно множеству рациональных чисел Q.

Однако, предположение о том, что всякое множество можно перенумеровать неверно

4) Множество точек отрезка $[0, 1]$ имеет большую мощность, чем множество натуральных чисел.
Доказательство имеется в методичке

Несложно показать, что для бесконечного множества множество всех его подмножеств имеет большую мощность, чем исходное множество. Тем самым шкала мощностей не ограничена. Немецкий математик Кантор в конце XIX века впервые обнаружил, что множество натуральных чисел «меньше» множества точек на отрезке. После этого он поставил вопрос о существовании множеств промежуточной мощности между натуральными числами и отрезком.

В прикладных вопросах, связанных с вычислениями, важную роль играет понятие ϵ-сети, позволяющее заменить работу с бесконечным множеством точек рассмотрением специальным образом построенного конечного множества. Однако в бесконечномерном пространстве не может быть конечной ϵ-сети. Некоторой заменой этому понятию для банаховых пространств является понятие всюду плотного множества.

Определение

Подмножество банахова пространства X называется **всюду плотным** в X, если для любого элемента x из X найдется последовательность элементов $\{a_n\}$ из A такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. В этом случае говорят, что множество X является **замыканием** множества A.

Пример

Множество рациональных чисел Q всюду плотно в банаховом пространстве вещественных чисел R.

Для решения многих задач важно гарантировать, что в банаховом пространстве есть счетное всюду плотное подмножество

Определение

Банахово пространство, обладающее счетным всюду плотным подмножеством, называется **сепарабельным.**

Почти все приведенные примеры – это сепарабельные банаховы пространства.
Для доказательства достаточно знать, что

Предложение

Счетное объединение счетных множеств счетно.

Это, противоречащее интуиции утверждение, доказывается по той же схеме, что и доказательство счетности множества рациональных чисел.

Но даже простое, на первый взгляд, пространство может оказаться несепарабельным.
Например, L^∞, l^∞

Доказательство этого утверждения имеется в методичке.