

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

---

Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ»

---

## **МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА**

Методические указания  
к лабораторным работам 1-го семестра  
по дисциплине «Общая физика»

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

2019

УДК 531+537 (079)

Механика и термодинамика: методические указания к лабораторным работам 1-го семестра по дисциплине «Общая физика» / И. Л. Шейнман СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2019. 111 с.

Содержат основы теории и методики экспериментального исследования к лабораторным работам по курсу механики. Описания к работам, в свою очередь, включают задание для подготовки и перечень контрольных вопросов.

Предназначены для студентов 1-го курса всех технических факультетов СПбГЭТУ.

Утверждено  
редакционно-издательским советом университета  
в качестве методических указаний

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2019

## Содержание

|   |     |
|---|-----|
| Общие рекомендации по подготовке и выполнению работ .....                                       | 4   |
| Работа 1. Изучение методов обработки результатов эксперимента на простейших экспериментах.....  | 5   |
| Работа 2. Исследование растяжения резины .....  | 7   |
| Работа 3. (1н) Измерение скорости пули с помощью баллистического маятника .....                 | 11  |
| Работа 4. (2н, 3н) Соударение шаров .....   | 14  |
| Работа 5. (4н, 5н) Трение покоя и скольжения.....   | 18  |
| Работа 6. (6н) Проверка законов динамики поступательного движения .....                         | 24  |
| Работа 7. (1) Исследование движения тел в диссипативной среде .....                             | 28  |
| Работа 8. (7н) Скатывание тела с наклонной плоскости.....                                       | 37  |
| Работа 9. (5) Определение момента инерции в машине Атвуда .....                                 | 42  |
| Работа 10. (6) Исследование динамики поступательно-вращательного движения твердого тела.....    | 47  |
| Работа 11. (7) Маятник Обербека .....   | 52  |
| Работа 12. (4) Проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера методом вращательных колебаний .....          | 57  |
| Работа 13. (3) Исследование динамики колебательного и вращательного движения .....              | 62  |
| Работа 14. (2) Исследование динамики свободных и вынужденных колебаний в поле силы тяжести..... | 69  |
| Работа 15. (8) Определение скорости распространения звука в воздухе .....                       | 80  |
| Работа 16. (9) Исследование термодинамических циклов.....                                       | 89  |
| Работа 17. (10) Исследование процессов переноса в газах.....                                    | 98  |
| Работа 18. (11) Исследование нестационарной теплопроводности в диэлектрической среде .....      | 103 |
| Справочные материалы .....  | 109 |

## **ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ И ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТ**

1. При подготовке к выполнению работы изучите введение, содержащее теоретические сведения, описание лабораторной установки и методы измерений. Прочтите разделы учебников [1, 2], посвященные теме лабораторной работы.
2. Подготовка к лабораторной работе должна содержать оформленные на листах формата А4:
  - титульный лист;
  - цель работы, схему и краткое описание лабораторной установки и метода измерения, а так же исследуемых закономерностей.
  - бланк протокола наблюдений. Вносите в бланк протокола таблицы для записи результатов наблюдений и для записи постоянных и однократно измеряемых в опыте величин. После окончания работы протокол обязательно должен быть подписан преподавателем.
3. При допуске к лабораторной работе преподаватель имеет право задать вопросы по теме лабораторной работы. Контрольные вопросы, приведенные в конце каждой работы, облегчают подготовку к допуску и защите работы.
4. При проведении экспериментов строго выполняйте все установленные в лаборатории правила техники безопасности.
5. Отчет о работе должен содержать:
  - подготовку к лабораторной работе, выполненную согласно пункту 2;
  - расчетную часть, включающую основные формулы с примерами подстановки в них численных величин с указанием единиц измерения, таблицы обработки измерений, графики, расчет искомых величин и их погрешностей и вывод.
6. Проводите обработку результатов измерений и представляйте расчеты в табличном виде согласно учебному пособию [3].
7. В выводах кратко излагаются результаты работы: полученные экспериментально или теоретически значения физических величин, их зависимости от условий эксперимента или выбранной расчетной модели, указывается их соответствие или несоответствие физическим законам и теоретическим моделям, возможные причины несоответствия. Они могут содержать сопоставление экспериментального и теоретического результатов,

экспериментальных результатов, полученных различными способами, сопоставление полученных результатов с известными справочными или табличными данными, физическое объяснение полученной в опыте графической закономерности. В выводе принята безличностная форма построения предложений.

8. Исправление работы в соответствии с замечаниями преподавателя должно проводиться на тех же листах или на чистой оборотной стороне соседнего листа отчета. Замазывание замечаний преподавателя в работе или устранение их путем полной перепечатки или переписки текста недопустимо.
9. В конце указаний приведены справочные материалы и список литературы, рекомендуемой для самостоятельной подготовки к выполнению лабораторных работ [1–5].

## **Работа 1. ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА НА ПРОСТЕЙШИХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ**

*Цель работы:* изучение методов обработки результатов эксперимента на простейших экспериментах

Корректная обработка экспериментальных данных является одной из существенных частей физического исследования. В учебном пособии [3] приведены методика и алгоритмы статистической обработки результатов измерений. Для практического освоения обработки прямых и косвенных измерений вам потребуется поставить следующие опыты.

### ***1.3. Указания по проведению наблюдений и обработке результатов***

#### **1. Определение времени реакции экспериментатора**

1. При помощи секундомера в вашем мобильном телефоне замерьте интервал времени, задаваемый преподавателем с помощью таймера. Запускайте свой секундомер по команде преподавателя, останавливайте, когда услышите сигнал таймера. Желательно использовать секундомер с точностью 0.01 с. Повторите измерения 5 раз. Запишите приборную погрешность использованного вами секундомера. Запишите значение интервала времени, использованное преподавателем.

2. Определите время реакции с помощью линейки (длиной не менее 30 см). Для этого проведите опыт в парах: один студент держит линейку вертикально нулевой отметкой вниз. Другой – готовится ее схватить, держа паль-

цы на некотором расстоянии друг от друга на уровне нулевой отметки линейки. Без предупреждения первый студент отпускает линейку, задача второго быстрее сжать пальцы, поймав её. Чем медленнее он прореагирует, тем ниже упадёт линейка и большее расстояние пролетит. Время реакции может быть найдено по пройденному ей расстоянию. Повторите опыт 5 раз.

3. Обработайте полученные измеренные значения по правилам, описанным в [3] для прямых измерений в первом опыте и косвенных методом переноса погрешности во втором опыте. Запишите результаты в стандартной форме. В выводе сопоставьте результаты первого и второго опытов, согласно разделу [3] Статистический анализ результатов.

## **2. Определение плотности кольца**

1. Измерьте геометрические размеры плексигласового кольца лабораторной установки по исследованию крутильного маятника с помощью штангенциркуля и линейки. Определите, по возможности максимально точно, плотность материала кольца. Масса кольца указана на установке.

2. Оцените приборную погрешность результата измерения. Запишите результат в стандартной форме [3].

## **3. Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника**

1. Изготовьте математический маятник из нити и гайки.

2. Измерьте длину нити с помощью линейки. Не меняя длины нити, замерьте время, за которое маятник совершает 5 или 10 полных колебаний. Наиболее точно моменты времени отсчитываются при прохождении гайкой положения равновесия.

Рассчитайте период колебаний. Вычислите ускорение свободного падения по формуле  $g = 4\pi^2 l / T^2$ .

Проведите обработку методом переноса погрешностей при косвенных измерениях. Запишите результат в стандартной форме [3].

3. Прodelайте измерения периода колебаний маятника для 5 различных длин нитей, записывая каждый раз пары значений длина – время пяти полных колебаний. Вычислите ускорение свободного падения методом образования выборки для косвенных измерений.

4. Сопоставьте результаты измерений, полученные в опытах.

## Работа 2. ИССЛЕДОВАНИЕ РАСТЯЖЕНИЯ РЕЗИНЫ

*Цель работы:* изучение обобщенного закона Гука, определение модуля Юнга и коэффициента Пуассона резины.

### 2.1. Исследуемые закономерности

Резина является легко деформируемым материалом и обнаруживает ряд интересных особенностей с точки зрения экспериментального изучения.

Растяжение и сжатие стержней и нитей, как правило, описывают линейным обобщенным законом Гука, который в терминах механического напряжения  $\sigma = F/S$  и относительного удлинения  $\varepsilon = \Delta l/l$  имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.1)$$

где  $E$  – модуль Юнга резины. При растяжении тела наряду с изменениями продольных размеров происходит также изменение его поперечных размеров, которые характеризуются коэффициентом Пуассона. Коэффициент Пуассона  $\nu$  представляет собой отношение относительного уменьшения поперечных размеров тела к относительному увеличению его продольных размеров:

$$\nu = -\frac{\Delta d/d_0}{\Delta l/l_0}. \quad (2.2)$$

Учтем изменение толщины резинки при ее удлинении. Из (2.2) следует выражение для изменения размера поперечного сечения резинки

$$\Delta d = -\frac{\nu d_0 \Delta l}{l_0}.$$

В экспериментах использовалась резинка квадратного сечения, поэтому площадь поперечного сечения резинки будет

$$S = (d_0 + \Delta d)^2 = \left(d_0 - \frac{\nu \Delta l d_0}{l_0}\right)^2 = d_0^2 \left(1 - \frac{\nu \Delta l}{l_0}\right)^2. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1), получим

$$F = E d_0^2 \frac{\Delta l}{l_0} \left(1 - \nu \frac{\Delta l}{l_0}\right)^2. \quad (2.4)$$

На основе экспериментальной зависимости силы  $F$  от  $\Delta l$  можно определить модуль Юнга резины  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ . Для определения

модуля Юнга необходимо брать область малых значений  $\Delta l$ , в которой поправка за счет коэффициента Пуассона сказывается слабее.

Для определения коэффициента Пуассона уравнение (2.4) можно преобразовать к виду

$$\sqrt{\frac{Fl_0}{Ed_0^2 \Delta l}} = 1 - \nu \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.5)$$

Определение углового коэффициента в полученной линеаризованной зависимости (2.5), имеющей вид

$$y = 1 - \nu \varepsilon, \quad (2.6)$$

позволяет найти коэффициент Пуассона. Нелинейность в экспериментальной зависимости также позволяет сделать вывод о наличии нарастания жесткости при больших удлинениях.

Приложение усилия в поперечном направлении используется для определения коэффициента жесткости в случае, если жесткость очень велика и не удастся создать заметного удлинения при продольном растяжении. Также этот метод используется для определения жесткости, если оба конца резинки или пружины закреплены и нет возможности приложить продольное усилие.

При приложении к середине резинки силы  $F_1$  в поперечном направлении заметим, что она может быть найдена через силу упругости при продольном растяжении резинки  $F$  как

$$F_1 = 2F(\Delta l) \cos \alpha, \quad (2.7)$$

где  $\Delta l = 2\left(\sqrt{x^2 + (l_0/2)^2} - (l_0/2)\right)$ ,  $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (l_0/2)^2}}$ .

Подставляя в (2.7) выражение для силы упругости вида  $F = a(\Delta l)^b$ , получим

$$F_1 = \frac{2ax}{\sqrt{x^2 + (l_0/2)^2}} \left( \left( \sqrt{(2x)^2 + l_0^2} - l_0 \right) \right)^b. \quad (2.8)$$

Взамен аппроксимированной степенной зависимости вида  $F = a(\Delta l)^b$  может быть использован график экспериментальной зависимости, снятой при измерениях продольного удлинения резины.



## 2.2. Приборы и принадлежности

Для проведения исследований используются электронные весы с точностью 0.01 г и с пределом измерения 200 г; груз, по массе не превышающий предела измерений весов; тонкая банковская резинка квадратного сечения; деревянная дощечка; две силовые кнопки.

Схемы эксперимента по изучению продольного и поперечного растяжения приведены на рис. 2.1.

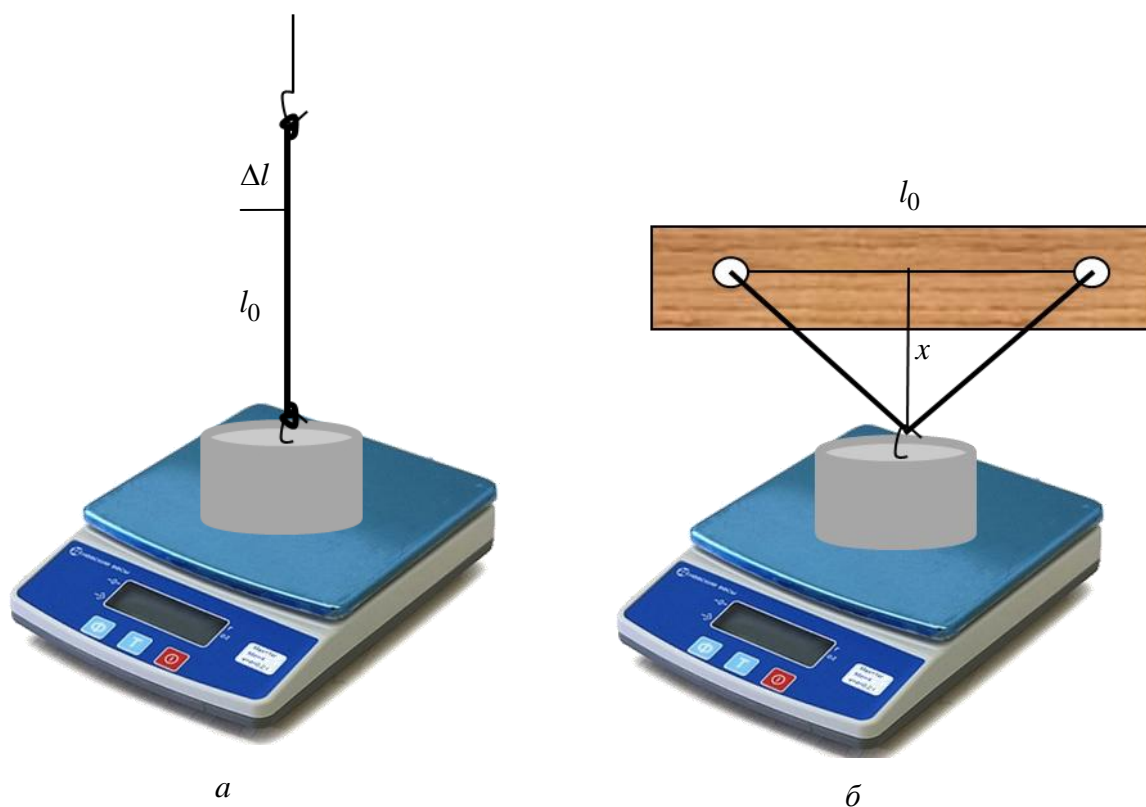


Рис. 2.1

## 2.3. Указания по подготовке к работе

В протоколе создайте заготовку таблицы для занесения параметров установки и результатов наблюдений (табл. 2.1).

Таблица 2.1

| №               | 1 | 2 | ... | 10 |                 | 1 | 2 | 3 | №              | 1 | 2 | ... | 10 |
|-----------------|---|---|-----|----|-----------------|---|---|---|----------------|---|---|-----|----|
| $\Delta l$ , см |   |   |     |    | $\Delta l$ , см |   |   |   | $x$ , см       |   |   |     |    |
| $\Delta m$ , г  |   |   |     |    | $d$ , мм        |   |   |   | $\Delta m$ , г |   |   |     |    |

$m =$  , г;  $l_0 =$  , см;  $d_0 =$  , мм;  $\theta_m =$  ;  $\theta_l =$  ;  $\theta_d =$  .

## **2.4. Указания по проведению наблюдений**

1. Прикрепите к грузу резинку. Включите весы. Поставьте груз на весы. Нажмите кнопку TARE, чтобы обнулить показания весов. Поднимая верхний конец резинки, проведите исследование удлинения резинки в продольном направлении от приложенной силы (рис. 2.1, а). Сделайте не менее 10 измерений для разных сил.
2. Измерьте толщину резинки штангенциркулем или микрометром в нерастяннутом состоянии и для трех различных значений ее удлинений.
3. Проведите исследование удлинения резинки в поперечном направлении (рис. 2.1, б). Сделайте не менее 10 измерений.
4. Результаты измерений запишите в таблицы в протокол.

## **2.5. Задание по обработке результатов эксперимента**

1. Зависимость силы от смещения имеет вид  $F = a(\Delta l)^b$ . Определите параметры  $a$  и  $b$  этой зависимости графическим методом или методом наименьших квадратов [3].
2. Постройте график зависимости силы упругости от продольного удлинения.
3. Определите модуль Юнга на основе (2.4).
4. Определите коэффициент Пуассона резинки на основе (2.6). Постройте график этой зависимости.
5. Определите коэффициент Пуассона на основе выражения (2.2). Сопоставьте результаты с п. 4.
6. Постройте на одном поле графика полученную экспериментальную зависимость  $F_1$  (точками) и вычисленную на основе (2.8) (сплошной линией).

## **2.6. Контрольные вопросы**

1. Какие виды деформаций вы знаете? Сформулируйте закон Гука и условия его справедливости.
2. Что такое модуль Юнга и каков его физический смысл? Укажите размерность модуль Юнга в системе СИ.
3. Как влияет природа материала на модуль Юнга?
4. Дайте определение коэффициента Пуассона.
5. Как влияет изменение площади сечения стержня на его жесткость?

6. Напишите формулу для определения нормальных напряжений при центральном растяжении.
7. Какова связь между модулем Юнга и коэффициентом жесткости?

### **Работа 3. (1н) ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

**Цель работы:** экспериментальная проверка закона сохранения импульса при абсолютно неупругом ударе и определение с помощью баллистического маятника скоростей пуль с различными массами.

#### ***Приборы и принадлежности***

Лабораторная установка (рис. 3.1) включает: баллистический маятник, представляющий собой массивный цилиндр массой  $M$ , подвешенный на невесомых и нерастяжимых нитях так, что он может двигаться только поступательно. Торцевая стенка цилиндра изготовлена из мягкого и легко деформируемого материала (в данной работе это пластилин); набор трех пуль с разными массами  $m$ ; пружинный пистолет  $P$ ; проградуированную шкалу  $N$  для измерения горизонтального смещения маятника при попадании в него пули. Установка имеет два режима работы, регулируемых тумблером «плоскость»/«удар», находящимся в ее нижней части слева.

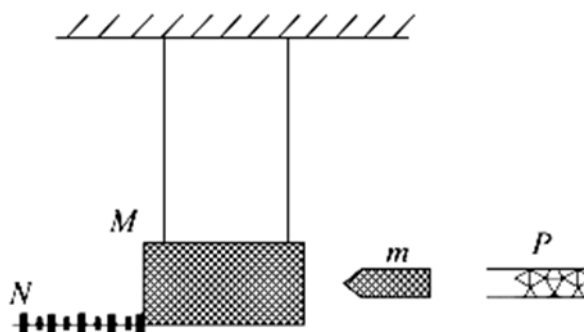


Рис. 3.1.

#### ***Исследуемые закономерности***

Абсолютно неупругим называют удар, при котором после столкновения тела движутся с одинаковыми скоростями в одном направлении (слипаются). В процессе неупругого удара механическая энергия не сохраняется, превращаясь частично во внутреннюю энергию столкнувшихся тел (тела нагреваются). Неупругое взаимодействие можно наблюдать, например, при столкновении пластилиновых тел. В данном опыте исследуется абсолютно неупругий удар пуль массой  $m$ , попадающих в торцевую пластилиновую стенку массивного баллистического маятника массой  $M$ . При соударении тел их

взаимодействие происходит в течение очень короткого времени  $\Delta t \approx 0$ , поэтому

$$\Delta \mathbf{p} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F} dt \approx \mathbf{F} \Delta t \approx 0,$$

где  $\mathbf{p}$  – импульс системы взаимодействующих тел,  $\mathbf{F}$  – действующая на систему внешняя результирующая сила. Полученное равенство означает, что систему в процессе соударения можно рассматривать как замкнутую, и выполнен закон сохранения импульса.

Наряду с сохранением импульса должен выполняться закон сохранения полной энергии, поскольку

$$\Delta E = A = \int_0^{\Delta \mathbf{r}} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \approx \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \Delta t \approx 0.$$

Пуля выпускается заряженным пружинным пистолетом. При сжатии пружины с жесткостью  $k$  на величину длины пули  $x$  (длина части пули с большим диаметром) в ней будет запасена потенциальная энергия  $W_p = kx^2/2$ , которая при выстреле пистолета перейдет в кинетическую энергию пули  $W_k = mv^2/2$ . Отсюда скорость пули после выстрела

$$v = x\sqrt{k/m}. \quad (3.1)$$

Если маятник с массой  $M$  до столкновения покоился, то из сохранения импульса следует, что скорость маятника с пулей после соударения будет

$$u = \frac{mv}{m + M}. \quad (3.2)$$

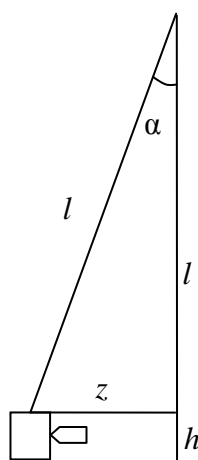


Рис. 3.2.

После попадания пули в маятник он поднимается на нитях на высоту  $h$  (рис. 1.3). Эту высоту можно найти из закона сохранения энергии, который с учетом (1.3) имеет вид:

$$(M + m) gh = \frac{(M + m) u^2}{2}. \quad (3.3)$$

Практическое измерение высоты  $h$  подъема маятника затруднительно, но ее можно выразить через горизонтальное смещение маятника  $z$ . Учитывая, что  $h = l(1 - \cos \alpha)$ ,  $z = l \sin \alpha$ , где  $l$  – длина нитей подвеса

маятника, получим

$$h = l - \sqrt{l^2 - z^2}. \quad (3.4)$$

Используя (3.1)–(3.4), получим жесткость пружины

$$k = \frac{(m + M)^2}{m} \frac{2g}{x^2} (l - \sqrt{l^2 - z^2}).$$

При малых углах отклонения маятника  $z \ll l$

$$h = l - \sqrt{l^2 - z^2} = \frac{(l - \sqrt{l^2 - z^2})(l + \sqrt{l^2 - z^2})}{l + \sqrt{l^2 - z^2}} \approx \frac{z^2}{2l},$$
$$k \approx \frac{g(m + M)^2}{mx^2 l} z^2.$$

Жесткость является физической константой, характеризующей материал пружины. Поэтому если опыт дает правильные значения скоростей пуль, то мы должны получить близкие расчетные значения жесткости  $k$ . Это также может служить проверкой соответствия между теорией и экспериментом.

#### ***Указания по проведению наблюдений***

1. Включите установку, нажав кнопку «Сеть».
2. Переведите установку в режим «Удар», переключив тумблер в нижней части установки слева в положение на себя.
3. Зарядите пистолет пуль с наибольшей массой. Измерьте и запишите в протокол массу пули. Массы имеющихся пуль  $21.1 \pm 0.2$  г,  $14.2 \pm 0.2$  г,  $6.7 \pm 0.1$  г, однако во избежание ошибок в случае замен пуль рекомендуется провести измерения масс самостоятельно в процессе выполнения лабораторной работы.
4. Подготовьте устройство  $N$  (рис. 1.1) к измерению горизонтального смещения маятника. Запишите в протокол численное значение начальной координаты  $z_1$  маятника по линейке отсчетного устройства  $N$ .
5. Осуществите первый выстрел, нажав пусковой рычаг пружинного пистолета. Запишите численное значение конечной координаты  $z_2$  смещения маятника, определив его по линейке отсчетного устройства  $N$ . Опыт повторите три раза.
6. Проведите измерения (п. 3–5) смещения маятника для пуль с другой массой в порядке ее убывания и занесите их в таблицу протокола.

7. Выключите установку, нажав кнопку «Сеть», и уберите принадлежности к работе в пластмассовый контейнер для нее.

### ***Задания по обработке результатов эксперимента***

1. Определите жесткость пружины пистолета  $k$  и ее погрешность выборочным методом.
2. Рассчитайте кинетическую энергию пули после вылета ее из пистолета и ее погрешность.
3. Вычислите количество теплоты  $Q$ , выделившееся при неупругом столкновении тел в данной работе, для пули с наибольшей массой.

### ***Контрольные вопросы***

1. Какой маятник называют баллистическим? Можно ли его рассматривать как математический маятник и почему?
2. Дайте определения импульса тела, его кинетической и потенциальной энергии. Каков их физический смысл?
4. Сформулируйте второй закон Ньютона в дифференциальной и интегральной форме.
5. Какая система тел называется замкнутой?
6. Когда выполняется закон сохранения импульса в системе тел?
7. Дайте определение центра масс системы тел.
8. Покажите, что импульс системы тел совпадает с импульсом ее центра масс.
9. Какие виды соударений тел существуют? Какой удар называют абсолютно неупругим?
10. Какой системой уравнений описывается абсолютно неупругий удар?

## **Работа 4. (2н, 3н) СОУДАРЕНИЕ ШАРОВ**

*Цель работы:* изучение основных закономерностей центрального удара, определение нормального коэффициента восстановления скорости.

### ***4.1. Исследуемые закономерности***

Модели абсолютно упругого и абсолютно неупругого соударений являются крайними случаями частично упругого соударения, при котором часть энергии переходит в тепловую форму. Для описания общего случая *не вполне упругого удара* Ньютоном был введен коэффициент восстановления скорости

шара. *Нормальный коэффициент восстановления скорости* определяют как отношение нормальной составляющей скорости касающейся поверхности шара после отскока от неподвижной абсолютно жесткой стенки к составляющей скорости шара до удара, взятому с обратным знаком

$$k_n = -\frac{u_n}{v_n}.$$

Если после соударения форма шара полностью восстанавливается, то  $k_n = 1$ , потери энергии отсутствуют и удар абсолютно упругий. Если после соударения шар остается сплюснутым и прилипает к стене, то удар абсолютно неупругий.

В системе отсчета, связанной с центром масс соударяющихся шаров, можно считать, что каждый шар налетает на неподвижную абсолютно жесткую стенку, и можно ввести нормальные коэффициенты восстановления

$$k_{n1} = -\frac{u_{n1}}{v_{n1}}, \quad k_{n2} = -\frac{u_{n2}}{v_{n2}}.$$

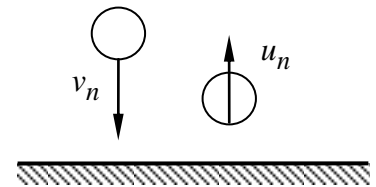


Рис. 4.1

Рассмотрим удар в системе отсчета, связанной с центром масс соударяющихся тел. Скорость центра масс

$$v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Переходя в систему отсчета, связанную с центром масс, вычисляя скорости после соударения, а затем, возвращаясь в исходную неподвижную систему отсчета, имеем

$$u_1 = \frac{k_{n1} m_2 (v_2 - v_1) + m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (4.1)$$

$$u_2 = \frac{k_{n2} m_1 (v_1 - v_2) + m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.2)$$

При  $k_{n1} = k_{n2} = 0$  получаем  $u_1 = u_2 = v_c$  – абсолютно неупругий удар. При  $k_{n1} = k_{n2} = 1$  получаем

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2},$$

совпадающие с выражениями для абсолютно упругого удара.

При отклонении привязанного к нити первого шара от положения равновесия на угол  $\alpha_0$  его потенциальная энергия переходит в кинетическую

$$m_1 gl(1 - \cos \alpha_0) = \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

После соударения кинетическая энергия каждого из шаров переходит в потенциальную энергию.

Учитывая, что скорость второго шара до соударения  $v_2 = 0$ , можем найти коэффициенты восстановления для каждого из шаров

$$k_{n1} = \frac{m_1}{m_2} - \frac{m_1 + m_2}{m_2} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha_1}{1 - \cos \alpha_0}}, \quad (4.3)$$

$$k_{n2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha_2}{1 - \cos \alpha_0}} - 1. \quad (4.4)$$

#### 4.2. Приборы и принадлежности

Лабораторная установка для изучения упругого удара (рис. 4.2) представляет собой два стальных шара с массами  $m_1$  и  $m_2$ , закрепленных на бифилярных подвесах 3. Длины бифилярных подвесов от оси их подвеса до

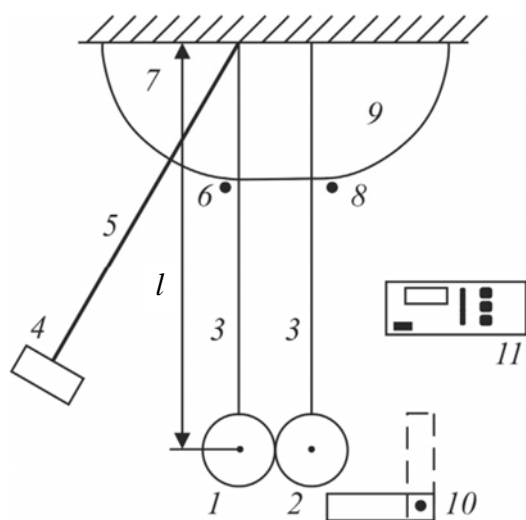


Рис. 4.2

центров масс шаров одинаковы и равны  $l$ . Шар  $m_1$  может удерживаться в отклоненном положении электромагнитом 4. Положение электромагнита может изменяться за счет поворота штанги 5. Начальный угол отклонения подвеса шара  $m_1$  от вертикального положения определяется с помощью поворотного индикатора 6 и шкалы 7. Этот же индикатор позволяет определить максимальный угол отклонения шара  $m_1$  после удара. Максимальный угол отклонения шара  $m_2$

измеряется с помощью второго поворотного индикатора 8 со шкалой 9. Устройство 10 позволяет предотвратить отклонение шара  $m_2$  после столкновения с шаром  $m_1$ , если это необходимо. Управление электромагнитом осуществляется с помощью блока 11 СЭ-1.



### 4.3. Указания по подготовке к работе

В протоколе создайте заготовку таблицы (табл. 4.1).

Таблица 4.1

| №          | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\theta$ |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----------|
| $\alpha_0$ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |          |
| $\alpha_1$ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |          |
| $\alpha_2$ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |          |

для занесения параметров установки и результатов наблюдений.

### 4.4. Указания по проведению наблюдений

1. Включите установку, нажав на СЭ-1 кнопку «Сеть».
2. Переведите установку в режим «Удар», переключив тумблер в нижней части установки слева в положение на себя.
3. Убедитесь, что в качестве шара  $m_1$  (на левом подвесе) используется шар меньшей массы.
4. Подведите к электромагниту 4 шар  $m_1$  и убедитесь, что он удерживается им. Для этого на СЭ-1 должна быть нажата кнопка «Стоп». Установите поворотом штанги 5 начальный угол  $\alpha_0$  отклонения подвеса шара  $m_1$ . Пользуясь поворотным индикатором 6 и шкалой 7 (рис. 4.2), измерьте этот угол и занесите в таблицу протокола.
5. Подготовьте поворотный индикатор 8 к измерению угла отклонения  $\alpha_2$  подвеса шара  $m_2$ . Для этого установите его в положение, близкое к  $0^\circ$ .
6. Нажатием кнопки «Пуск» на электронном блоке СЭ-1 отключите питание электромагнита и освободите шар  $m_1$ .
7. Заметьте угол максимального отклонения после удара первого шара  $\alpha_1$ . Снимите показания со шкалы 9 значение угла отклонения  $\alpha_2$  подвеса шара  $m_2$  после удара. Запишите оба значения в протокол измерений.
8. Нажатием кнопки «Стоп» включите питание электромагнита и вновь подведите к нему шар  $m_1$ . Повторите опыт (п. 6–7) пять раз.
9. Повторите эксперимент пп. 4-8 при двух других выбранных значениях начального угла  $\alpha_0$ .
9. Выключите установку, нажав кнопку «Сеть».

#### **4.5. Задание по обработке результатов эксперимента**

1. Выведите формулы (4.1), (4.2), (4.3), (4.4). Приведите их вывод в отчете.
2. Определите средние значения и погрешности нормальных коэффициентов восстановления первого и второго шаров. При расчетах учтите, что  $m_2/m_1 = 3$ .
2. Сделайте вывод по работе.

#### **4.6. Контрольные вопросы**

1. Какие виды соударений тел существуют? Какой удар называют абсолютно упругим, абсолютно неупругим, не вполне упругим?
2. Какой системой уравнений описывается абсолютно упругий удар?
3. Дайте определение центра масс системы тел.
4. Как определяется нормальный коэффициент восстановления скорости?
5. Через какое время после столкновения шары поднимутся до своей максимальной высоты и вернуться в исходную точку их столкновения?

### **Работа 5. (4н, 5н) ТРЕНИЕ ПОКОЯ И СКОЛЬЖЕНИЯ**

*Цель работы:* Изучение основных закономерностей сухого трения, определение коэффициентов трения покоя и скольжения, определение коэффициентов инерции скатывающихся тел.

#### **5.1. Исследуемые закономерности**

Трение подразделяют на *внешнее* и *внутреннее*. Внешнее трение возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел (трение скольжения) или при попытке вызвать такое перемещение (трение покоя). Внутреннее трение наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела (например, жидкости или газа).

Различают также *сухое* и *жидкое (или вязкое)* трение. Сухое трение возникает между поверхностями твердых тел в отсутствии смазки между ними. Жидким трением называется трение между твердым телом и жидкой средой, а также между слоями такой среды.

В зависимости от характера движения тела различают несколько видов сухого трения: *трение покоя, трение скольжения, трение качения*.

Если под действием внешних сил и силы трения тело остается неподвижным или тело движется, но отсутствует проскальзывание между поверхностью и касающейся ее части тела, то такая сила трения носит название си-

лы трения покоя. В случае неподвижного тела сила трения покоя уравнивает приложенную к телу параллельно поверхности силу.

$$\mathbf{F}_{\text{тр.п.}} = -\mathbf{F}.$$

Максимальное трение покоя в соответствии с экспериментом пропорционально нормальной реакции опоры

$$F_{\text{тр.п. max}} = \mu_0 N,$$

где безразмерный множитель  $\mu_0$  называется *коэффициентом трения покоя*. Он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей.

Если тело начало двигаться, трение представляет собой трение скольжения. В отсутствие прилипания тела к поверхности величина силы трения зависит только от величины нормальной реакции опоры и не зависит от площади соприкосновения тела с опорой.

$$F_{\text{тр с}} = \mu N.$$

Коэффициент  $\mu$  носит название коэффициента трения скольжения. Зависимость силы трения от скорости проявляется слабо и заметна лишь при очень малых и при очень больших скоростях движения. При очень малых скоростях движения наблюдается явление застоя, при котором тело продавливает под собой ямку в поверхности и застревает. Из-за этого при очень малых скоростях сила трения несколько возрастает, что приводит к тому, что коэффициент трения покоя  $\mu_0 > \mu$ .

$$F_{\text{тр.п.}} \leq \mu_0 N.$$

При больших скоростях движения начинается нагрев, плавление и разрушение соприкасающихся поверхностей. В результате сила трения изменяется сложным образом.

Сумма нормальной реакции опоры  $\mathbf{N}$  и силы трения  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$  образует полную силу реакции опоры  $\mathbf{R}$ . Коэффициент трения покоя  $\mu$  представляет собой тангенс угла  $\gamma$  между силой нормальной реакцией опоры  $\mathbf{N}$  и полной силой реакции опоры  $\mathbf{R}$ .

$$\mu = \operatorname{tg} \gamma.$$

Для определения коэффициента трения покоя удобно использовать наклонную плоскость. При медленном увеличении угла наклона плоскости можно найти такой угол  $\alpha_0$ , при превышении которого брусок начинает

скользить по плоскости. Коэффициент трения покоя в этом эксперименте может быть найден как

$$\mu_0 = \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (5.1)$$

Заметим, что поскольку  $\alpha_0 = \gamma$ , полная сила реакции опоры **R** направлена при этом вертикально, противоположно силе тяжести.

Для соскальзывающего тела из уравнения динамики несложно получить

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha = \frac{2l}{gt_c^2}. \quad (5.2)$$

Здесь  $l$  – длина наклонной плоскости,  $t_c$  – время скольжения. Из-за задержки в срабатывании электромагнита и системы регистрации измеренное время  $t$  отличается от времени скольжения на некоторую величину  $\tau$ :  $t = t_c + \tau$ . С учетом задержки

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha = \frac{2l}{g(t - \tau)^2}. \quad (5.3)$$

При малых углах наклона время соскальзывания велико и влияние задержки  $\tau$  сказывается слабо. Определим сначала приближенное значение коэффициента трения  $\mu_1$  при некотором малом угле  $\alpha_1$ , при котором наблюдается соскальзывание, пренебрегая временем задержки  $\tau$

$$\mu_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{2l}{gt_1^2 \cos \alpha_1}. \quad (5.4)$$

При углах  $\alpha_2$ , близких к  $90^\circ$ , напротив,  $\sin \alpha_2$  близок к единице, а  $\cos \alpha_2$  мал, поэтому неточность определения коэффициента трения сказывается слабо, откуда найдем время задержки

$$\tau = t_2 - \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha_2 - \mu_1 \cos \alpha_2)}}. \quad (5.5)$$

Линеаризовать полученное уравнение можно двумя способами. Первый способ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2l}{g} \frac{1}{(t - \tau)^2 \cos \alpha} + \mu. \quad (5.6)$$

Обозначая

$$y_1 = \operatorname{tg} \alpha, \quad x_1 = \frac{1}{(t - \tau)^2 \cos \alpha},$$

$$A_1 = 2l/g,$$

получим уравнение линейной зависимости  $y_1 = A_1 x + \mu$ . При этом коэффициент трения представляет собой смещение построенной прямой вверх вдоль оси ординат.

Второй способ линеаризации:

$$\frac{2l}{g(t-\tau)^2 \sin \alpha} = -\mu \operatorname{ctg} \alpha + 1. \quad (5.7)$$

Обозначая

$$y_2 = 1 - \frac{2l}{g(t-\tau)^2 \sin \alpha}, \quad x_2 = \operatorname{ctg} \alpha,$$

получим уравнение линейной зависимости  $y_2 = \mu x_2$ . При этом коэффициент трения представляет собой угловой коэффициент построенной прямой. Линеаризованная прямая должна проходить через точку (0; 0).

Первый способ линеаризации приводит к большим ошибкам в нахождении  $\mu$ , поскольку диапазоны изменения  $x_1$  и  $y_1$  очень велики, а  $0 < \mu < 1$ . Второй способ дает хорошие результаты и рекомендуется для проведения вычислений.

Находя угловой коэффициент линеаризованной зависимости  $y_2 = \mu x_2$  графическим методом или методом наименьших квадратов (линейная регрессия), можем легко найти коэффициент трения  $\mu$ . Подробное описание метода нахождения параметров линейной зависимости графическим методом и методом наименьших квадратов приведено в [3].

Для проверки правильности нахождения времени задержки  $\tau$  целесообразно сопоставить найденное значение коэффициента трения  $\mu$  с оценочным приближенным значением  $\mu_1$ , найденным согласно (5.4). В случае существенного расхождения значений необходимо повторить расчет времени задержки  $\tau$  на основе выражения (5.5), подставив в него  $\mu$  взамен  $\mu_1$ . После этого потребуется вновь определить новое уточненное значение коэффициента трения согласно (5.7) по угловому коэффициенту прямой.

## 5.2. Приборы и принадлежности

Установка представляет собой наклонную плоскость 1, которую с помощью винта 2 можно устанавливать под разными углами  $\alpha$  к горизонту

(рис. 5.1). Угол  $\alpha$  измеряется с помощью шкалы 3. На плоскость может быть помещен брусок 4 массой  $m$ . Брусок состоит из двух частей, изготовленных из разных материалов: дерево и дюралюминий. Он закрепляется в верхней части наклонной плоскости с помощью электромагнита 5, управление которым осуществляется с помощью электронного секундомера СЭ-1 (при нажатии кнопки «Пуск» на СЭ-1 магнит отключается и включается секундомер, при нажатии кнопки «Стоп» магнит включается).

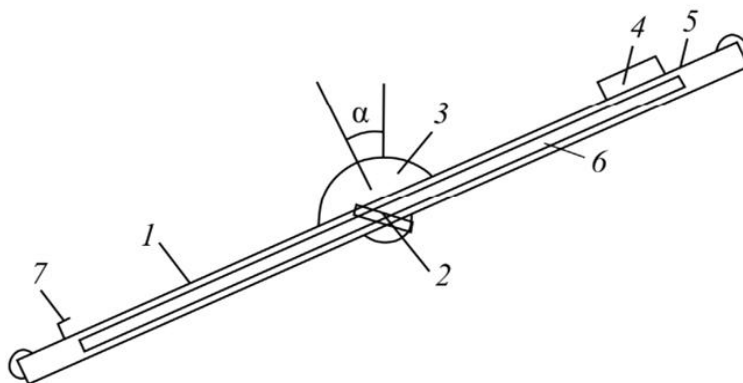


Рис. 5.1

Пройденное бруском расстояние измеряется линейкой 6, закрепленной вдоль плоскости. Время соскальзывания бруска измеряется автоматически с помощью датчика 7, выключающего секундомер в момент касания бруском финишной точки. Установка имеет два режима работы, регулируемых тумблером «плоскость»/«удар», находящимся в ее нижней части слева.

### 5.3. Указания по подготовке к работе

В протоколе создайте заготовку таблиц (табл. 5.1, 5.2).

Таблица 5.1

|            | Дерево |   |   |   |   | Дюраль |   |   |   |   |                 |
|------------|--------|---|---|---|---|--------|---|---|---|---|-----------------|
| №          | 1      | 2 | 3 | 4 | 5 | 1      | 2 | 3 | 4 | 5 | $\theta_\alpha$ |
| $\alpha_0$ |        |   |   |   |   |        |   |   |   |   |                 |

Таблица 5.2

| №              | 1      | 2 | 3 | 4 | 5 | 1      | 2 | 3 | 4 | 5 | $\theta_t$ |              |
|----------------|--------|---|---|---|---|--------|---|---|---|---|------------|--------------|
| $t_1$          |        |   |   |   |   |        |   |   |   |   |            | $\alpha_1 =$ |
| $t_2$          |        |   |   |   |   |        |   |   |   |   |            | $\alpha_2 =$ |
|                | Дерево |   |   |   |   | Дюраль |   |   |   |   |            |              |
| $t_{25^\circ}$ |        |   |   |   |   |        |   |   |   |   |            |              |

|                |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| ...            |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $t_{45^\circ}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

для занесения параметров установки и результатов наблюдений.

#### 5.4. Указания по проведению наблюдений

1. Ослабив винт, удерживающий направляющую для скольжения тел, установите направляющую горизонтально. Поместите брусок дерево–дюралюминий деревянной стороной вниз на левую часть наклонной плоскости, где нет удерживающего брусок магнита.
2. Медленно изменяя угол наклона направляющей, найдите такой угол, при превышении которого брусок начинает скользить по плоскости. Запишите значение этого угла наклона для случая дерево–дерево. Повторите определение угла пять раз.
3. Прodelайте тот же опыт, повернув брусок дюралюминиевой поверхностью вниз. Результаты измерений занесите в таблицу в протоколе.
4. Включите установку, нажав кнопку «Сеть». Переведите установку в режим «Плоскость», переключив тумблер в нижней части установки слева в положение от себя. Включите секундомер СЭ-1 в режим 1. Электромагнит при измерениях должен находиться в верхней правой части плоскости. При нажатии кнопки «Стоп» магнит включается, при нажатии кнопки «Пуск» на СЭ-1 магнит отключается и включается секундомер.
5. Проведите пятикратное измерение времени соскальзывания бруска при контакте с плоскостью деревянной и дюралевой сторонами при минимальном угле, при котором соскальзывание происходит без задержек и застреваний. Запишите значения времен  $t_1$  и угла  $\alpha_1$ .
6. Измерьте времена падения бруска при максимальном достижимом на установке угле пять раз. Запишите значения времен  $t_2$  и угла  $\alpha_2$ .
7. Проведите измерения времени соскальзывания, когда вниз обращена деревянная сторона бруска, в интервале углов от  $25^\circ$  до  $45^\circ$  с шагом в  $5^\circ$ . Каждое из измерений повторите по пять раз. Результаты измерений времени и соответствующие им углы наклонной плоскости запишите в протокол.
8. Повторите серии измерений, когда вниз обращена дюралюминиевая сторона бруска. Результаты измерений занесите в таблицу в протоколе.

### **5.5. Задание по обработке результатов эксперимента**

1. Определите средние значения и погрешности коэффициента трения покоя  $\mu_0$  для соприкасающихся поверхностей дерево–дерево и дерево– дюралюминий.
2. Определите среднее значение и погрешность времени срабатывания системы регистрации  $\tau$ .
3. Определите средние значения и погрешности коэффициента трения скольжения  $\mu$  для соприкасающихся поверхностей дерево–дерево и дерево–дюралюминий. Постройте на миллиметровой бумаге графики линеаризованных зависимостей для нахождения  $\mu$  согласно (5.7).
4. Сделайте выводы по полученным результатам.

### **5.6. Контрольные вопросы**

1. Дайте классификацию видов трения и объясните его физическую природу в каждом из случаев.
2. Что такое трение покоя, как коэффициент трения покоя можно определить экспериментально?
3. Что такое трение скольжения, как экспериментально определить коэффициент трения скольжения?
4. Как определить время задержки регистрирующей системы?
5. Какие возможны способы линеаризации уравнения движения в этой работе? Какой из них предпочтителен и почему?

## **Работа 6. (6н) ПРОВЕРКА ЗАКОНОВ ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ**

**Цель работы:** экспериментальная проверка справедливости основного закона динамики поступательного движения (второго закона Ньютона) путем сопоставления ускорений соскальзывания тела с наклонной плоскости, рассчитанных по кинематической и динамической формулам.

### **6.1. Приборы и принадлежности.**

Установка представляет собой наклонную плоскость 1, которую с помощью винта 2 можно устанавливать под разными углами  $\alpha$  к горизонту (рис. 6.1). Угол  $\alpha$  измеряется с помощью шкалы 3. На плоскость может быть помещен брусок 4. Для его удержания используется электромагнит 5, управ-



ление которым осуществляется с помощью электронного секундомера СЭ-1 (при нажатии на СЭ-1 кнопки «Пуск» магнит отключается и включается секундомер, а при нажатии кнопки «Стоп» магнит включается).

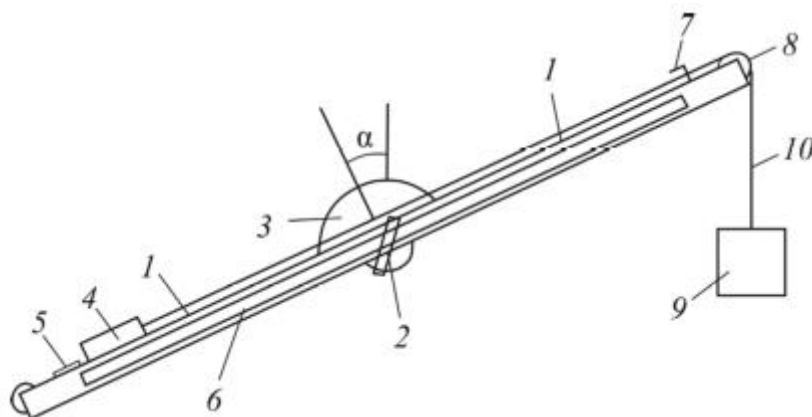


Рис. 6.1.

Пройденное бруском расстояние измеряется по линейке 6, закрепленной вдоль плоскости. На нить 10, перекинутую через блок 8, подвешивается груз 9. Время движения бруска и груза, скрепленных нитью, измеряется автоматически с помощью датчика 7, выключающего секундомер в момент касания бруском финишной точки. Установка имеет два режима работы, регулируемых тумблером «плоскость»/«удар», находящимся в ее нижней части слева.

В комплект работы входят брусок, изготовленный из разных материалов (дерево–дюралюминий), и дополнительный груз. Груз и брусок имеют различные массы. Масса бруска  $m_1 = 23 \pm 1$  г, груза  $m_2 = 29 \pm 1$  г, путь, проходимый брусками по наклонной плоскости  $s = 0.522$  м.

## 6.2. Исследуемые закономерности

Из уравнений динамики поступательного движения, записанных для каждого из тел, пренебрегая массой блока, можно получить:

$$a = \frac{m_2 g - m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha}{m_1 + m_2}. \quad (6.1)$$

Экспериментальное значение ускорения бруска может быть найдено как

$$a = \frac{2s}{t^2}, \quad (6.2)$$

где  $s$  – путь, проходимый бруском вдоль наклонной плоскости за время  $t$ .

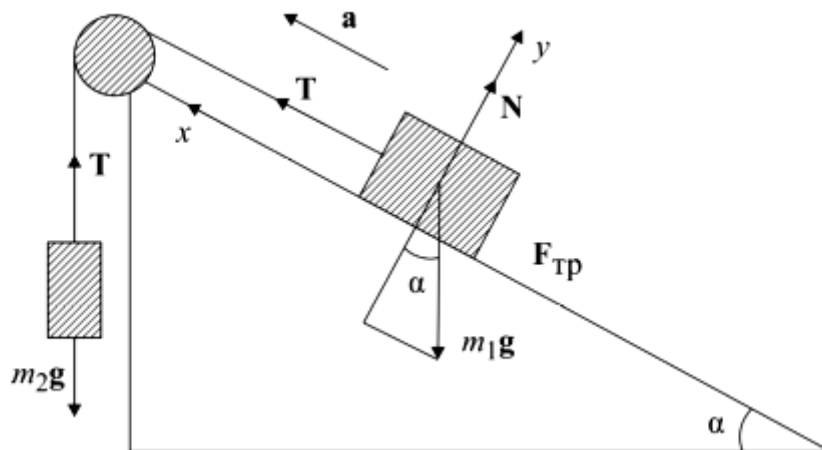


Рис. 6.2.

Коэффициент трения  $\mu$  можно определить экспериментально по известному ускорению движения бруска, расположив, например, наклонную плоскость горизонтально ( $\alpha = 0$ ). Решив уравнение (6.1) относительно параметра  $\mu$ , получим при  $\alpha = 0$ :

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} \left( 1 - \frac{a}{g} \right) - \frac{a}{g}. \quad (6.3)$$

Если коэффициент трения  $\mu$  бруска о плоскость известен, то, сопоставив ускорение тела  $a$ , рассчитанное по (6.1), с определенным экспериментально по (6.2), можно сделать заключение о выполнимости второго закона Ньютона.

### 6.3. Указания по проведению наблюдений

1. Включите установку, нажав кнопку «Сеть».
2. Переведите установку в режим «Плоскость», переключив тумблер в нижней части установки слева в положение от себя.
3. Переведите секундомер СЭ-1 в режим 1.
4. Прикрепите нить с грузом к бруску со стороны его деревянного торца.
5. Ослабив винт 2 (рис. 6.1), установите плоскость под углом  $\alpha = 0^\circ$  к горизонту. Перекиньте нить со вторым грузом через блок. Брусок 4 (дерево–дюралюминий) поместите на наклонную плоскость деревянной частью вниз, прикрепив его металлическим торцом к электромагниту, находящемуся в правой части наклонной плоскости. Система «брусок–груз» должна находиться в покое.

6. Нажмите на СЭ-1 кнопку «Пуск» секундомера. При этом одновременно происходит отключение электромагнита и включение секундомера. Выключение секундомера происходит автоматически в момент удара бруска по финишному датчику. Запишите время опускания груза в табл. 6.1, а затем нажмите кнопку «Сброс».
7. Повторите опыт (п. 5, 6) пять раз.
8. Переверните брусок дюралюминиевой поверхностью вниз и повторите п. 5–7, занося результаты измерений в таблицу протокола.
9. Установите угол наклона плоскости  $10^\circ$ , наклонив ее со стороны электромагнита. Поместите брусок на наклонную плоскость деревянной стороной вниз, прикрепив его металлическим торцом к электромагниту. Нажимая кнопку «Пуск», измерьте время опускания груза пять раз.
10. Переверните брусок дюралюминиевой поверхностью вниз и повторите измерения п. 9.
11. Меняя угол наклона плоскости от  $10^\circ$  до  $40^\circ$  с шагом  $10^\circ$ , повторите п. 9, 10 для каждого угла наклонной плоскости, занося измерения в таблицы протокола.
12. Выключите установку, нажав кнопку «Сеть», и уберите принадлежности к работе в контейнер для нее.

#### ***6.4. Задания по обработке результатов эксперимента***

1. Выведите формулу (6.1). Приведите ее вывод в отчете.
2. Выведите формулу (6.3). Приведите ее вывод в отчете. Определите коэффициенты трения скольжения бруска о плоскость  $\mu = \bar{\mu} \pm \Delta\bar{\mu}$  для случаев дерево–дерево и дерево–дюралюминий.
3. Рассчитайте ускорения соскальзывания тел  $a = \bar{a} \pm \Delta\bar{a}$  согласно (6.2) для каждого из углов, при которых проводилось измерение.
4. Рассчитайте и постройте на миллиметровой бумаге графики теоретических зависимостей ускорения скатывания тела (6.1) в зависимости от угла наклона плоскости  $\alpha$ . При расчетах используйте значение  $\mu$ , определенное в п. 1.
5. Нанесите на графики экспериментальные точки, и укажите для каждой из них доверительные интервалы в виде вертикальных отрезков.
6. Сопоставляя на графиках теоретические и экспериментальные значения ускорений соскальзывания тел, сделайте заключение о выполнимости второго закона Ньютона.

### 6.5. Контрольные вопросы

1. Дайте определение (напишите формулы) скорости и ускорения тела. Как они направлены по отношению друг к другу при движении тела по криволинейной и прямолинейной траектории? Сделайте поясняющие рисунки.
2. Что такое сила и каков ее физический смысл?
3. Приведите различные формулировки второго закона Ньютона и объясните смысл входящих в них параметров.
4. Докажите формулы (6.1) и (6.2), показав на рисунке все силы, действующие на брусок и груз в данном опыте.
5. Спланируйте эксперимент по определению результирующей силы, действующей на тело массой  $m$ , скользящее по наклонной плоскости длиной  $s$  при фиксированном угле ее наклона. Нужно ли в этом случае знать коэффициент трения между телом и плоскостью и угол ее наклона?

### Работа 7. (1) ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

*Цель работы:* определение вязкости диссипативной среды (жидкости) по установившейся скорости движения в ней шарика, а также исследование процессов рассеяния энергии в диссипативной среде.

#### 7.1. Исследуемые закономерности

Вязкость (внутреннее трение) жидкостей и газов выражается в свойстве оказывать сопротивление перемещению их слоев друг относительно друга и в возникновении сил трения между слоями жидкости или газа, перемещающимися с различной скоростью. При достаточно высокой вязкости жидкости и малых скоростях движения слоев они движутся практически параллельно друг другу (ламинарное течение) в направлении оси  $Ox$  с разной скоростью

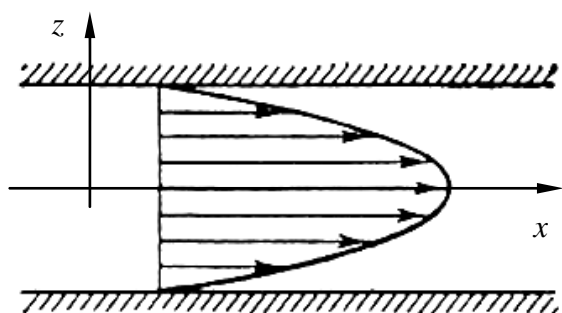


Рис. 7.1

$v_x(z)$  (рис. 7.1).

Сила трения направлена по касательной к поверхности соприкосновения слоев и описывается законом Ньютона  $F_{тр} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} S$ , где  $\eta$  – коэффициент внутреннего трения (динамиче-

ская вязкость);  $\frac{\partial v_x}{\partial z}$  – производная скорости по нормали к слоям;  $S$  – площадь соприкосновения слоев. Величина обратная вязкости  $1/\eta$  называется текучестью. Наряду с динамической вязкостью часто используется кинематическая вязкость  $\nu = \eta/\rho$ , где  $\rho$  – плотность жидкости.

Внутреннее трение в газах определяется переносом импульса при переходе молекул из одного слоя газа в другой. На движение молекул в жидкости в отличие от газа сильно влияет межмолекулярное взаимодействие, ограничивающее их подвижность. Молекула жидкости большую часть времени совершает колебания около положения равновесия внутри небольшого объема. Поэтому во внутреннее трение в жидкости дополнительный вклад дает взаимодействие между молекулами слоев жидкости. Как следствие, вязкость жидкостей в очень сильной степени зависит от температуры. С ростом температуры подвижность молекул жидкости возрастает, а вязкость падает, так как с увеличением температуры тепловое движение молекул усиливается, а среднее время «оседлой жизни» молекулы (время релаксации) уменьшается. При невысоких температурах коэффициент динамической вязкости изменяется по закону  $\eta = C \exp(E/kT)$ , где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура,  $E$  – энергия, которую должна приобрести молекула, чтобы перейти от одного положения к другому (энергия активации). Характерный вид температурной зависимости вязкости изображен на рис. 7.2.

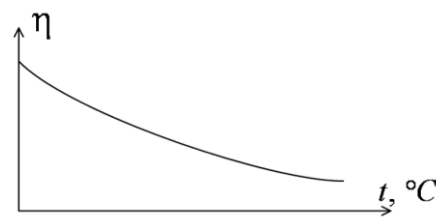


Рис. 7.2

*Сила сопротивления движению тела в вязкой среде.*

При движении тела в вязкой среде происходит рассеяние (диссипация) его кинетической энергии. Слои жидкости, находящиеся на разном расстоянии от движущегося тела, имеют различную скорость. Слой жидкости, находящийся в непосредственной близости от поверхности движущегося тела, имеет скорость, равную скорости тела, по мере удаления от него скорость слоев жидкости плавно уменьшается (рис. 7.3). В этом состоит явление вязкого трения, в результате которого движения тела передается слоям окружающей среды в направлении, перпендикулярном движению тела. Если ско-

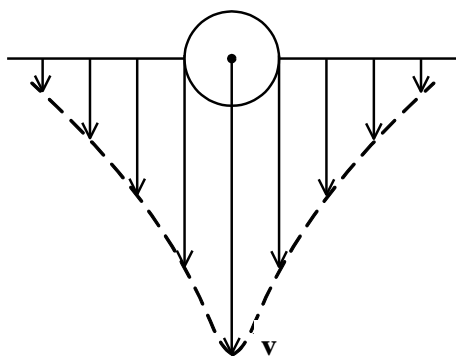


Рис. 7.3

рость тела велика или тело имеет большие размеры, за ним возникают вихри и обтекание становится турбулентным.

Критерием характера движения слоев жидкости (ламинарного или турбулентного) при падении в ней шарика радиуса  $R$  со скоростью  $v$  является число Рейнольдса  $Re = 2\rho_{\text{ж}}vR / \eta$ . Число Рейнольдса существенно зависит от формы обтекаемой поверхности.

При обтекании шара переход от ламинарного движения к турбулентному происходит при  $Re > 150$ . При движении жидкости по гладким трубам критическое число Рейнольдса составляет 2300.

В вязкой среде на движущееся тело действует сила сопротивления, направленная противоположно скорости тела. При малых скоростях и малых размерах тела эта сила обусловлена вязким трением между слоями среды и пропорциональна скорости тела. Для жесткого шара радиуса  $R$  при  $Re < 0.5$  сила сопротивления определяется формулой Стокса:

$$F_r = -rv,$$

где  $v$  – скорость движения тела,  $r = 6\pi\eta R$  – коэффициент сопротивления при обтекании жидкостью жесткого шара.

Формулу Стокса для коэффициента сопротивления движению шара можно применять только при очень малых значениях числа Рейнольдса  $Re < 0,5$ . Более точная теория Озеена–Голдштейна дает разложение силы в виде ряда и применима при  $Re < 2$ . При сохранении первых двух членов ряда получаем формулу Озеена:

$$F_r = -6\pi\eta Rv \left( 1 + \frac{3}{16}Re - \frac{19}{1280}Re^2 + \dots \right) \approx - \left( 6\pi\eta Rv + \frac{9}{4}\rho_{\text{ж}}v^2\pi R^2 \right).$$

В случае турбулентного обтекания при  $Re > 150$  сила сопротивления становится пропорциональной квадрату скорости:

$$F_r = -C_x S \rho_{\text{ж}} v^2 / 2,$$

где  $C_x$  – коэффициент пропорциональности;  $S$  – площадь поперечного сечения тела, а  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность жидкости. Коэффициент сопротивления  $C_x$  для шара меняется в диапазоне от  $C_x = 1,2$  при  $Re = 10^2$  до  $C_x = 0,47$  при

$Re = 10^5$ . Сила сопротивления при турбулентном обтекании определяется не столько трением одних слоев жидкости о другие, сколько увеличением кинетической энергии жидкости, вынужденной двигаться, чтобы расступиться и пропустить тело.

Таким образом, сила сопротивления  $F_c$ , действующая со стороны жидкости на движущийся в ней со скоростью  $v$  шарик радиусом  $R$ , может при определенных условиях выражаться формулой

$$F_r = -6\pi\eta Rv, \quad (7.1)$$

а при других – формулой

$$F_r = -\frac{C_x\pi}{2}\rho_{\text{ж}}R^2v^2, \quad (7.2)$$

где  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность жидкости;  $\eta$  – ее вязкость.

При установившемся падении шарика в жидкости сила сопротивления уравновешивается силой тяжести и архимедовой силой:

$$mg = F_c + F_A,$$

где  $m = 4/3 \rho_{\text{т}}\pi R^3$  – масса шарика. Если сила сопротивления задается формулой (7.1), то:

$$\frac{4\pi(\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{ж}})g}{3}R^3 = 6\pi\eta Rv,$$

отсюда

$$v = \frac{2(\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{ж}})gR^2}{9\eta}.$$

Радиус шарика может быть выражен через его массу. Установившаяся скорость может быть найдена как  $v = l/t$ , где  $l$  – расстояние пройденное шариком. Тогда

$$t = \frac{6\pi\eta\rho_{\text{т}}l}{g(\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{ж}})}\left(\frac{4\pi\rho_{\text{т}}}{3}\right)^{-1/3}m^{-2/3} = C_1m^{-2/3}, \quad (7.3)$$

где  $C_1$  – некоторая константа. Из уравнения (7.3) может быть найдена вязкость

$$\eta = \frac{g(\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{ж}})}{6l\pi\rho_{\text{т}}}\left(\frac{4\pi\rho_{\text{т}}}{3}\right)^{1/3}tm^{2/3} = Atm^{2/3}, \quad (7.4)$$

где  $A = \frac{g(\rho_T - \rho_{\text{ж}})}{6l\pi\rho_T} \left( \frac{4\pi\rho_T}{3} \right)^{1/3}$ .

Аналогично для случая, когда выполняется зависимость (7.2):

$$v^2 = \frac{8(\rho_T - \rho_{\text{ж}})gR}{3C_x\rho_{\text{ж}}},$$

$$t = \sqrt{\frac{3C_x\rho_{\text{ж}}l^2}{8(\rho_T - \rho_{\text{ж}})g}} \left( \frac{4\pi\rho_T}{3} \right)^{1/6} m^{-1/6} = C_2 m^{-1/6}. \quad (7.5)$$

где  $C_2$  – некоторая константа.

Строя график зависимости  $\ln t$  от  $\ln m$ , по угловому коэффициенту прямой можно сделать вывод о характере зависимости силы сопротивления и выбрать, какой из вариантов реализуется: линейный (7.1) или квадратичный (7.2). По смещению прямой относительно оси  $\ln t$  можно найти константу  $k$  при массе.

*Движение тела в диссипативной среде.* Дальнейшее изложение теории основывается на формуле Стокса (7.1). Ее применимость необходимо будет проверить экспериментально с помощью оценки числа Рейнольдса и исследования зависимости установившейся скорости падения от размеров шариков.

Рассмотрим падение шарика в жидкости. В исследуемом в лабораторной работе случае скорость падения шарика невелика, и можно считать, что сила сопротивления пропорциональна первой степени его скорости. Пусть начальная скорость шарика у поверхности жидкости  $v_0$ , его радиус  $R$ , а  $\rho_{\text{ж}}$  и  $\rho_T$  – плотности жидкости и шарика соответственно. Согласно второму закону Ньютона:

$$(m + m')\dot{v} = mg - F_A - F_r = F - r v.$$

Здесь  $F_A$  – сила Архимеда,  $F_r$  – сила Стокса,  $F = mg - F_A = m(1 - \rho_{\text{ж}}/\rho_T)g$  – движущая сила,  $m'$  – присоединенная масса жидкости, увлекаемая телом за собой. Присоединенной массой называется такая фиктивная масса жидкости, кинетическая энергия которой при ее движении со скоростью тела равна кинетической энергии окружающей тело жидкости. Присоединенная масса зависит от размеров и формы погруженной в жидкость



части тела. Для шарика присоединенная масса равна половине массы вытесненной жидкости:

$$m' = \rho_{\text{ж}} V / 2 = 2\pi\rho_{\text{ж}} R^3 / 3 = m\rho_{\text{ж}} / 2\rho_{\text{т}},$$

откуда

$$m + m' = m(2\rho_{\text{т}} + \rho_{\text{ж}}) / 2\rho_{\text{т}}, \quad m' / m = \rho_{\text{ж}} / 2\rho_{\text{т}}.$$

Если ввести обозначения:

$$\beta = \frac{r}{m + m'} = \frac{9\eta}{R^2(2\rho_{\text{т}} + \rho_{\text{ж}})}, \quad \alpha = \frac{F}{m + m'} = 2g \frac{\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{ж}}}{2\rho_{\text{т}} + \rho_{\text{ж}}},$$

то задача сведется к решению неоднородного дифференциального уравнения вида  $\dot{v} + \beta v = \alpha$ .

Данное уравнение имеет решение

$$v(t) = v_{\infty} - (v_{\infty} - v_0)e^{-\beta t}, \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = a_0 e^{-\beta t},$$

где  $v_{\infty} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2gR^2(\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{ж}})}{9\eta}$  – устано-

вившаяся скорость движения шарика;  $v_0$  – скорость падения шарика на поверхность жидкости или его начальная скорость;

$a_0 = \beta(v_{\infty} - v_0) = 2g \frac{\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{ж}}}{2\rho_{\text{т}} + \rho_{\text{ж}}} \left(1 - \frac{v_0}{v_{\infty}}\right)$  –

его начальное ускорение.

Зависимость скорости движения тела в диссипативной среде от времени представлена на рис. 7.4. Видно, что скорость шарика в зависимости от значения начальной скорости может либо убывать при  $v_0 \geq \alpha/\beta$ , либо возрастать при  $0 \leq v_0 < \alpha/\beta$ , но в любом случае асимптотически стремится к постоянному значению  $v_{\infty}$ .

Время, за которое значение ускорения  $a$  по отношению к своему начальному значению  $a_0$  изменится в  $e$  раз или отклонение скорости тела от равновесной скорости  $v - v_{\infty}$  по отношению к своему начальному значению  $v_0 - v_{\infty}$  изменится в  $e$  раз, называется временем релаксации процесса пере-

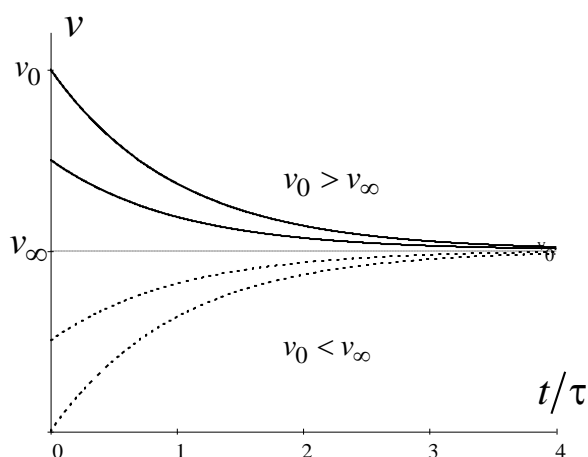


Рис. 7.4

хода движения тела от нестационарного режима к стационарному. Его также можно найти, как  $\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{v_{\infty} - v_0}{a_0}$ . В исследуемом случае характерное значение  $\tau$  составит доли секунды. Поскольку время движения шарика до первой метки многократно превышает  $\tau$ , и движение шарика между метками можно считать равномерным, а значение его установившейся скорости находить как  $v_{\infty} = l/t$ , где  $l$  – расстояние между метками.

В лабораторной работе в качестве жидкости используется глицериновое масло (его плотность  $\rho_{\text{ж}} = 1.25 \text{ г/см}^3$ ), материал шарика – свинец ( $\rho_{\text{св}} = 11.3 \text{ г/см}^3$ ) или сталь ( $\rho_{\text{ст}} = 7.8 \text{ г/см}^3$ ).

## 7.2. Указания по подготовке к работе

Занесите в протокол таблицу (табл. 7.1) для записи результатов наблюдений

Таблица 7.1

| №        | 1 | 2 | 3 | ... |  | $\theta$ |
|----------|---|---|---|-----|--|----------|
| $m$ , мг |   |   |   |     |  |          |
| $t$ , с  |   |   |   |     |  |          |

Таблица 7.2

| $\rho_{\text{ж}}$ , г/см <sup>3</sup> | $\rho_{\text{т}}$ , г/см <sup>3</sup> | $l$ , см | $h_0$ , см | $t$ , °С |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------|------------|----------|
|                                       |                                       |          |            |          |

и в таблицу (табл. 7.2) для записи постоянных и однократно измеряемых в опыте величин.

## 7.3. Приборы и принадлежности

Цилиндрический сосуд с жидкостью, металлические шарики, аналитические весы, масштабная линейка, секундомер.

В работе используется цилиндрический сосуд (рис. 5.5), на боковой поверхности которого нанесены метки. Измеряя расстояние между метками и время движения шарика в жидкости между ними, можно определить скорость его падения. Шарик опускается в жидкость через впускной патрубков, расположенный в крышке цилиндра.

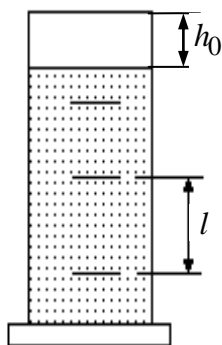


Рис. 7.5

## 7.4. Указания по проведению наблюдений

1. На аналитических весах взвесьте поочередно 5-10 шариков различных диаметров, подбирая их так, чтобы равномерно перекрыть весь диапазон размеров от минимального до максимального. После взвешивания каждый

шарик заверните в лист бумаги и напишите на ней его массу. Массы шариков  $m$  и приборную погрешность весов  $\theta_m$  занесите в таблицу (табл. 7.1) протокола наблюдений.

2. Поочередно опуская шарики в жидкость через впускной патрубок, измерьте секундомером время  $t$  прохождения каждым шариком расстояния между двумя метками на боковой поверхности сосуда. Результаты измерений и приборную погрешность секундомера занесите в таблицу (табл. 7.1) протокола.
3. Измерьте миллиметровой линейкой и занесите в таблицу (табл. 7.2) протокола расстояние  $l$  между метками на сосуда и расстояние  $h_0$  от верхней поверхности патрубка до поверхности жидкости, а также температуру  $t$ , °С воздуха в лаборатории и значения плотностей жидкости  $\rho_{\text{ж}}$  и материала шариков  $\rho_{\text{Т}}$ .

### **7.5. Задание по обработке результатов эксперимента**

1. Выведите формулы (7.3) и (7.4). Приведите в отчете подробные выкладки.
2. Постройте график зависимости  $\ln t$  от  $\ln m$  на миллиметровой бумаге. По угловому коэффициенту аппроксимирующей прямой сделайте вывод о том, какая из формул (7.1) и (7.2) лучше описывает зависимость силы сопротивления от скорости выданных вам шариков.
3. По смещению прямой графика относительно оси  $\ln t$  определите константу  $C_1$  при массе. По найденной константе  $C_1$  определите значения вязкости жидкости  $\eta$ .
4. Для каждого из диаметров шариков рассчитайте число Рейнольдса и сделайте вывод о характере обтекания при падении шарика в жидкости. Сопоставьте полученные результаты значение с выводами пункта 2.
5. Рассчитайте константу  $A$  в выражении (7.4). Определите значения вязкости жидкости  $\eta = \bar{\eta} \pm \Delta\bar{\eta}$  с  $P = 95\%$  выборочным методом. Сопоставьте полученное значение с найденным в предыдущем пункте.
6. Для одного из опытов рассчитайте начальную скорость  $v_0 = \sqrt{2gh_0}$ , ускорение  $a_0$  и время релаксации  $\tau = (v_\infty - v_0) / a_0$ . Постройте графики зависимостей  $v = v(t)$  и  $a = a(t)$  на миллиметровой бумаге.
7. Вычислите количество теплоты, выделяющееся за счет трения шарика о жидкость, при его прохождении между двумя метками.

8. Сравните экспериментальное значение вязкости с табличным (см. раздел Справочные материалы).

### **7.6. Контрольные вопросы**

1. Какие параметры характеризуют исследуемую систему как диссипативную? От каких величин зависит коэффициент сопротивления движению тела в диссипативной среде?
2. Дайте определения динамической, кинематической вязкостей и текучести жидкости.
3. Объясните характер температурной зависимости вязкости жидкостей и газов.
4. В чем отличие ламинарного течения от турбулентного? Как значение числа Рейнольдса характеризует вид течения жидкости при падении в ней шарика.
5. Объясните методику измерения вязкости, использованную в лабораторной работе.
6. Как зависит сила сопротивления движению шарика в жидкости от скорости при малых и при больших скоростях его движения?
7. Чем обусловлена необходимость учета присоединенной массы?
8. Как вычислить количество теплоты, выделяющееся за счет трения шарика о жидкость, при его прохождении между двумя метками.
9. Сделайте рисунок и укажите на нем все силы, действующие на шарик, падающий в жидкости. Используя обозначения сил, указанных на рисунке, напишите уравнение движения шарика (второй закон Ньютона) в диссипативной среде в нестационарном и в стационарном режимах его движения.
10. Получите выражение для коэффициента  $A$  в формуле вязкости жидкости.
11. Используя метод логарифмирования функции, выведите формулу приборной погрешности вязкости жидкости  $\theta_\eta$ .
12. Обоснуйте, почему в данной работе для обработки данных косвенных измерений для нахождения вязкости нельзя применять метод переноса погрешностей, но возможно применение выборочного метода.
13. Как называются величины  $a_0$ ,  $v_0$ ,  $v_\infty$ ,  $\tau$ , и как они взаимосвязаны друг с другом?

14. Докажите, что функция  $v(t) = v_{\infty} - (v_{\infty} - v_0)e^{-\beta t}$  ( $a(t) = \dot{v}(t) = a_0 e^{-\beta t}$ ) является решением дифференциального уравнения  $\dot{v} + \beta v = \alpha$ , где  $\alpha / \beta = v_{\infty}$ ,  $a_0 = \beta(v_{\infty} - v_0)$ .

## Работа 8. (7н) СКАТЫВАНИЕ ТЕЛА С НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

*Цель работы:* изучение основного закона динамики вращательного движения, изучение трения качения, определение коэффициентов инерции скатывающихся тел.

### 8.1. Исследуемые закономерности

Трение качения играет огромную роль в современной технике. Оно возникает при вращении колёс и других вращающихся деталей, которые есть почти во всех станках и транспортных машинах. Замена трения скольжения на трение качения путём изобретения колеса было величайшим событием в истории цивилизации.

Трение качения является частным случаем трения покоя, поскольку соприкасающиеся поверхности не смещаются друг относительно друга. При качении область, где нижняя часть катящегося тела соприкасается с прилегающей к ней поверхностью, по которой катится тело, называется пятном контакта. Перекат тела происходит вокруг точки  $O$  (рис. 8.1). Сила, прижимающая тело к поверхности, порождает при перекате через точку  $O$  момент трения качения

$$M_{\text{тр к}} = Nb .$$

Величина  $b$ , представляющая собой плечо силы реакции опоры, носит название коэффициента трения качения. В отличие от безразмерного коэффициента  $\mu$  коэффициент трения качения  $b$  имеет размерность длины. В случае достаточно большой жесткости круглого тела и поверхности длина пятна контакта, равная  $2b$ , определяется шероховатостями соприкасающихся

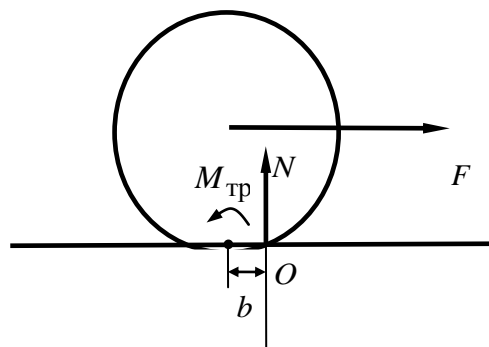


Рис. 8.1

поверхностей и мало зависит от степени прижатия тела (нормальной реакции опоры). Этот вариант реализуется в лабораторной работе при соприкоснове-

нии стального цилиндра с деревянной направляющей. В случае если тело или поверхность легко деформируются, длина пятна контакта возрастает с ростом нормальной реакции опоры.

Можно представить, что момент силы трения качения создается некой эффективной силой трения, приложенной к оси катящегося тела. Считая, что зона деформации колеса мала, получим

$$F_{\text{эфф.тр.к.}} = \frac{M_{\text{тр.к.}}}{R} = \frac{b}{R} N = \mu_{\text{эфф}} N ,$$

где  $\mu_{\text{эфф}} = b/R$ .

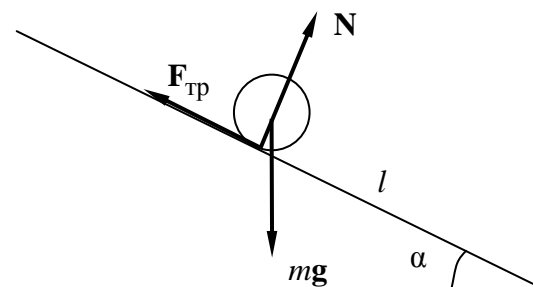


Рис. 8.2

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения для скатывающегося с наклонной плоскости тела относительно мгновенной оси вращения.

$$mgR \sin \alpha - M_{mp} = I_O \beta .$$

Момент трения может быть найден как

$$M_{mp} = bN = bmg \cos \alpha ,$$

где  $b$  – длина сплющенной части катящегося тела. Момент инерции относительно мгновенной оси вращения, согласно теореме Гюйгенса–Штейнера, имеет вид

$$I_O = I_C + mR^2 = kmR^2 + mR^2 = mR^2 (k + 1) ,$$

где  $k$  – коэффициент инерции тела,  $R$  – его радиус.

$$\beta = \frac{a}{R} = \frac{2l}{t_c^2 R} ,$$

где  $l$  – длина наклонной плоскости,  $t_c = t - \tau$  – время скатывания тела с наклонной плоскости,  $t$  – измеренное время,  $\tau$  – время задержки срабатывания системы регистрации.

Тогда уравнение динамики будет иметь вид:

$$mgR \sin \alpha - bmg \cos \alpha = mR^2 (k + 1) \frac{2l}{(t - \tau)^2 R},$$

Линеаризовать полученное уравнение, как и в случае скольжения, можно двумя способами. Первый способ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2l(k + 1)}{g} \frac{1}{(t - \tau)^2 \cos \alpha} + \frac{b}{R}.$$

Обозначая

$$y_1 = \operatorname{tg} \alpha, \quad x_1 = \frac{1}{(t - \tau)^2 \cos \alpha},$$

$$A_1 = \frac{2l(k + 1)}{g}, \quad B_1 = \frac{b}{R} = \mu_{\text{эфф}},$$

получим уравнение линейной зависимости  $y_1 = A_1 x + B_1$ . Находя параметры  $A_1$  и  $B_1$  этой зависимости графическим методом или методом наименьших квадратов (линейная регрессия), можем найти коэффициент инерции тела  $k$  и коэффициент трения качения  $b$ . Однако если коэффициент инерции тела  $k$  при этом способе линеаризации находится с высокой точностью, то погрешность нахождения  $b$  будет очень велика.

Второй способ линеаризации дает

$$1 - \frac{2l(k + 1)}{g(t - \tau)^2 \sin \alpha} = \frac{b}{R} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Обозначая

$$y_2 = 1 - \frac{2l(k + 1)}{g(t - \tau)^2 \sin \alpha}, \quad x_2 = \operatorname{ctg} \alpha, \quad A_2 = \frac{b}{R} = \mu_{\text{эфф}},$$

получим уравнение линейной зависимости  $y_2 = A_2 x_2$ . В нем используется коэффициент инерции тела  $k$ , найденный на основе первого способа. Находя параметр  $A_2$  по графику зависимости, можем найти коэффициент трения качения  $b$ .

## 8.2. Приборы и принадлежности

Установка представляет собой наклонную плоскость 1, которую с помощью винта 2 можно устанавливать под разными углами  $\alpha$  к горизонту (рис. 8.3). Угол  $\alpha$  измеряется с помощью шкалы 3. На плоскость может быть

помещен брусок 4 массой  $m$ . Брусок состоит из двух частей, изготовленных из разных материалов: дерево и дюралюминий. Он закрепляется в верхней части наклонной плоскости с помощью электромагнита 5, управление которым осуществляется с помощью электронного секундомера СЭ-1 (при нажатии кнопки «Пуск» на СЭ-1 магнит отключается и включается секундомер, при нажатии кнопки «Стоп» магнит включается).

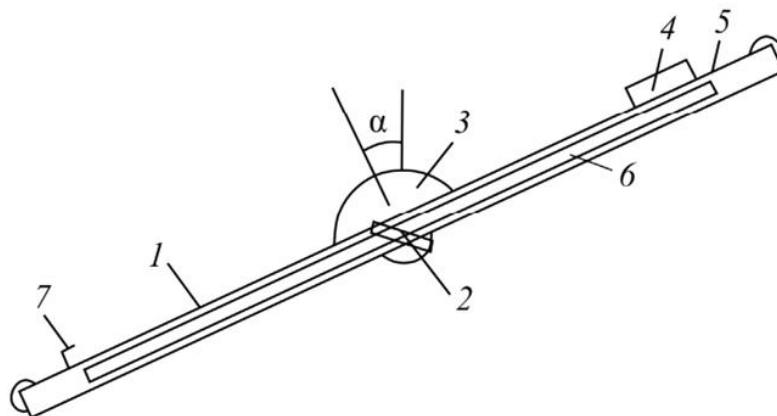


Рис. 8.3

Пройденное бруском расстояние измеряется линейкой 6, закрепленной вдоль плоскости. Время соскальзывания бруска измеряется автоматически с помощью датчика 7, выключающего секундомер в момент касания бруском финишной точки. Установка имеет два режима работы, регулируемых тумблером «плоскость»/«удар», находящимся в ее нижней части слева.

### **8.3. Указания по подготовке к работе**

Изучив раздел 8.3. Указания по проведению наблюдений, разработайте и занесите в протокол таблицу для записи результатов наблюдений.

### **8.4. Указания по проведению наблюдений**

1. Поместите полый цилиндр на наклонную плоскость, прикрепив его к магниту. Проведите измерения времени скатывания цилиндра, в интервале углов от  $5^\circ$  до  $25^\circ$  с шагом в  $5^\circ$ . Для каждого значения угла проводите по 5 измерений времени. Результаты измерений занесите в таблицу в протоколе.
2. Повторите серию измерений для сплошного цилиндра.
3. Измерьте с помощью штангенциркуля внутренний и внешний диаметры полого цилиндра и внешний диаметр сплошного цилиндра.



### 8.5. Задание по обработке результатов эксперимента

1. Определите средние значения и погрешности коэффициентов инерции  $k$  для полого и сплошного цилиндров. Постройте графики линеаризованных зависимостей для нахождения  $k$ .
2. Определите средние значения и погрешности коэффициентов трения качения  $b$  для полого и сплошного цилиндров. Постройте графики линеаризованных зависимостей для нахождения коэффициента трения качения.
3. Выведите формулу для момента инерции полого цилиндра массой  $m$  и внутренним и внешним радиусами его цилиндрической полости, равными  $R_0$  и  $R$  относительно оси вращения, проходящей через его центр масс. Найдите числовое значение коэффициента инерции  $k$  для полого цилиндра с толстой стенкой на основе измеренных диаметров.
4. Сопоставьте коэффициенты инерции  $k$  для полого и сплошного цилиндров, вычисленные на основе времени скатывания, с коэффициентами инерции, вычисленными на основе их геометрических размеров. Сделайте выводы по полученным результатам.

### 8.6. Контрольные вопросы

1. Дайте определения угловой скорости и углового ускорения вращающегося тела. Одинаковы ли они для разных точек твердого тела относительно параллельных осей вращения?
2. Как определяется направление вектора угловой скорости  $\omega$  вращающегося тела? Сделайте поясняющий рисунок.
3. Как направлены по отношению друг к другу векторы угловой скорости  $\omega$  и углового ускорения  $\varepsilon$  в случаях подвижной (волчок) и неподвижной осей вращения?
4. Как связаны между собой линейная скорость  $v$  и ускорение  $a$  (касательное) точки твердого тела с ее угловой скоростью  $\omega$  и угловым ускорением  $\beta$ ?
5. Дайте формульные определения момента силы и момента импульса тела относительно точки (полюса) и оси вращения. Как вычисляются длины этих векторов? Сделайте поясняющие рисунки и укажите на них направления векторов.
6. Дайте определение момента инерции твердого тела. Каков его физический смысл? Как он вычисляется для круглых симметричных тел?

7. Сформулируйте теорему Штейнера. Сделайте поясняющий рисунок.
8. Объясните методы линеаризации зависимостей, предложенные в описании работы.

## **Работа 9. (5) ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ В МАШИНЕ АТВУДА**

*Цель работы:* изучение вращательного и поступательного движений на машине Атвуда; определение момента инерции блока и момента сил трения в оси блока.

### **9.1. Приборы и принадлежности**

*Приборы и принадлежности:* машина Атвуда, набор грузов, секундомер, масштабная линейка.

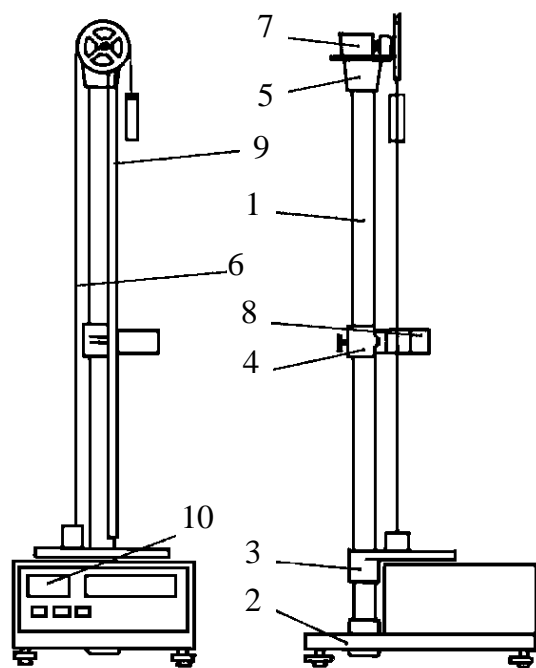


Рис. 9.1

Машина Атвуда является настольным прибором, ее изображение приведено на рис. 9.1. На вертикальной стойке 1 основания 2 расположены три кронштейна: нижний 3, средний 4 и верхний 5. На верхнем кронштейне 5 крепится блок с узлом подшипников качения, через который переброшена нить с грузом 6. На верхнем кронштейне 5 находится электромагнит 7, который при подаче на него напряжения с помощью фрикциона удерживает систему с грузами в неподвижном состоянии.

На среднем кронштейне 4 крепится фотодатчик 8, выдающий электрический сигнал по окончании счета времени равноускоренного движения грузов. На среднем кронштейне имеется риска, совпадающая с оптической осью фотодатчика. Нижний кронштейн представляет собой площадку с резиновым амортизатором, о который ударяется груз при остановке. На вертикальной стойке 1 укреплен миллиметровая линейка 9, по которой определяют начальное и конечное положения грузов, т. е. пройденный путь.

Начальное положение определяют визуально по нижнему краю торца груза, конечное положение – по риску среднего кронштейна. Секундомер 10 выполнен как самостоятельный прибор с цифровой индикацией времени.

## 9.2. Исследуемые закономерности

Машина Атвуда предназначена для изучения законов поступательного и вращательного движений. Принцип работы установки основан на том, что когда на концах перекинутой через блок нити подвешены грузы различной массы, система грузов начинает двигаться равноускоренно. В комплект грузов входит несколько перегрузов, что позволяет исследовать движения с различными ускорениями.

На каждый груз действуют две силы – сила тяжести и сила реакции нити, под действием которых грузы движутся. Полагая нить невесомой и нерастяжимой, получим, что ускорения обоих грузов будут постоянны, одинаковы по значению и противоположны по направлению.

На основании второго закона Ньютона для первого груза с перегрузом и второго груза можно записать:

$$(m_1 + \Delta m_i)g - T_1 = (m_1 + \Delta m_i)a; \quad (9.1)$$

$$T_2 - m_2g = m_2a, \quad (9.2)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы 1-го и 2-го грузов;  $\Delta m_i$  – масса перегруза, находящегося на 1-м грузе;  $T_1$  и  $T_2$  – силы, равные силам натяжения нитей, действующие на 1-й и 2-й грузы и на блок;  $a$  – ускорение грузов. Вращение блока описывается уравнением

$$(T_1 - T_2)r - M_{\text{тр}} = I\beta, \quad (9.3)$$

где  $r$  – радиус блока;  $M_{\text{тр}}$  – момент сил трения в оси блока;  $I$  – момент инерции блока;  $\beta = a/r$  – угловое ускорение. Из уравнений (9.1)–(9.3) можно получить:

$$M = I\beta + M_{\text{тр}}; \quad (9.4)$$

$$M = (T_1 - T_2)r = r((m_1 + \Delta m_i)(g - a) - m_2(g + a)); \quad (9.5)$$

$$a = 2S/t^2; \quad (9.6)$$

$$\beta = a/r = 2S/(rt^2), \quad (9.7)$$

где  $S$  – путь, пройденный грузом за время  $t$ . Из выражения (9.4) видно, что зависимость момента силы от углового ускорения является линейной ( $Y=aX+b$ ).

Целью работы является определение момента инерции блока  $I$  и момента сил трения в блоке  $M_{\text{тр}}$ . Для этого экспериментально исследуется зависимость (9.4)  $M$  от  $\beta$ . Различные значения  $M$  реализуются с помощью набора перегрузов массой  $\Delta m_i$  и определяются по формуле (9.5). Значения  $\beta$  рассчитываются с учетом формулы (9.6) по формуле (9.7). Величины  $I$  и  $M_{\text{тр}}$  определяются по формулам линейной регрессии (методом наименьших квадратов).

### 9.3. Указания по подготовке к работе

1. Занесите в протокол таблицу (табл. 9.1) для записи результатов наблюдений и таблицу (табл. 9.2) для записи параметров установки и однократно измеряемых в опыте величин.

Таблица 9.1

| параметры       | $\Delta m_1$ | $\Delta m_2$ | $\Delta m_3$ | $\Delta m_4$ | $\Delta m_1 + \Delta m_3$ | $\Delta m_2 + \Delta m_3$ | $\Delta m_3 + \Delta m_4$ |
|-----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $t_1, \text{с}$ |              |              |              |              |                           |                           |                           |
| $t_2, \text{с}$ |              |              |              |              |                           |                           |                           |
| $t_3, \text{с}$ |              |              |              |              |                           |                           |                           |

Таблица 9.2

| $r, \text{см}$ | $h_0, \text{см}$ | $h_1, \text{см}$ | $m_1, \text{г}$ | $m_2, \text{г}$ | $\Delta m_1, \text{г}$ | $\Delta m_2, \text{г}$ | $\Delta m_3, \text{г}$ | $\Delta m_4, \text{г}$ |
|----------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|                |                  |                  |                 |                 |                        |                        |                        |                        |

2. Изучите и сформулируйте алгоритм нахождения коэффициентов  $a$  и  $b$  в линейной зависимости  $Y = aX + b$  по методу наименьших квадратов (см. [3], а также конец данного пособия).

### 9.4. Указания по проведению наблюдений

1. Перекиньте через блок нить с двумя грузами. Запишите радиус блока  $r$ , указанный на панели прибора, в таблицу (табл. 9.2).

2. Отрегулируйте положение основания установки при помощи регулировочных опор, используя для визуального наблюдения нить с грузами в качестве отвесов, чтобы она была параллельна стойке 1.
3. Установите кронштейн с фотодатчиком в нижней части шкалы таким образом, чтобы правый груз при движении проходил посередине оптической оси фотодатчика. По риске на среднем кронштейне определите  $h_0$  – положение оптической оси фотодатчика на измерительной шкале вертикальной стойки и занесите его в таблицу (табл. 9.2) протокола.
4. Нажмите кнопку «СЕТЬ» на лицевой панели секундомера, при этом должны загореться лампочки с цифровой индикацией.
5. Нажмите на кнопку «СБРОС» секундомера и убедитесь, что на цифровых индикаторах загорелись нули.
6. Переместите правый груз в верхнее положение, положите на него перегруз № 1.
7. Запишите в таблицу (табл. 9.2) протокола значение шкалы  $h_1$ , соответствующее нижнему краю груза в его верхнем положении. Пройденный путь определяется как разность:  $s = h_0 - h_1$ .
8. Поместив ладонь руки под кронштейном с фотодатчиком, нажмите кнопку «ПУСК». При нажатии кнопки отключится фрикцион магнита, удерживающего грузы в неподвижном состоянии, а секундомер начнет счет времени. При пересечении грузом оптической оси фотодатчика счет времени прекратится, после чего отпустите кнопку «ПУСК». Запишите время  $t$  равноускоренного движения грузов в таблицу (табл. 9.1).
9. Проведите измерения по пп. 7 и 8 три раза.
10. Проведите измерения по пп. 7–9 для следующих перегрузов и их комбинаций: а) № 2; б) № 3; в) № 3 + № 1; г) № 3 + № 2; д) № 3 + № 4. Значения масс перегрузов выгравированы на их поверхности и должны быть занесены в таблицу (табл. 9.2).

#### ***9.5. Задание по обработке результатов эксперимента***

1. Определите момент инерции блока  $I = \bar{I} \pm \Delta \bar{I}$  и момент сил трения в блоке  $M_{\text{тр}} = \bar{M}_{\text{тр}} \pm \Delta \bar{M}_{\text{тр}}$  методом наименьших квадратов (МНК). Из сопос-

тавления линейной зависимости  $Y = aX + b$  и уравнения (9.4) получим:  $X = \beta$ ;  $Y = M$ ;  $a = I$ ;  $b = M_{\text{тр}}$ . Для расчетов используются  $N = 6$  пар значений параметров  $X_i$  и  $Y_i$ . Результат запишите в виде  $M = I\varepsilon + M_{\text{тр}}$ , где  $I = \bar{I} \pm \Delta\bar{I}$ ,  $M_{\text{тр}} = \bar{M}_{\text{тр}} \pm \Delta\bar{M}_{\text{тр}}$  при  $P = 95\%$ .

- По найденным методом наименьших квадратов параметрам линейной зависимости (9.4), постройте график зависимости  $M$  от  $\beta$ . Для этого на осях  $Y = M$  и  $X = \beta$  в соответствии с табл. 5.2 выберите масштаб (он выбирается так, чтобы график шел примерно под углом  $45^\circ$  к оси  $X$ ) и нанесите в выбранном масштабе на координатную плоскость экспериментальные точки  $(X_i, Y_i) = (\beta_i, M_i)$  ( $i = 1 \dots 6$ ). Аппроксимирующая эти точки теоретическая прямая должна проходить через точки  $(\bar{X}, \bar{Y})$  и  $(0, \bar{b})$ .

### **9.6. Контрольные вопросы**

1. Дайте определение момента инерции точечного, составного и сплошного тел. Объясните его физический смысл.
2. Сделайте рисунок машины Атвуда и укажите на нем все силы, действующие на грузы и на блок.
3. Дайте определение момента силы. Укажите на рисунке направления моментов сил, действующих на блок.
4. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
5. Используя рисунок, напишите уравнения движения грузов и блока.
6. Используя эту систему уравнений, найдите ускорение движения грузов. Считая все величины, входящие в полученную формулу, известными из опыта, рассчитайте это ускорение для одного из перегрузов и сопоставьте с его экспериментально определенным значением.

## Работа 10. (6) ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Цель работы:* изучение законов поступательно-вращательного движения твердого тела, сохранения энергии; определение момента инерции маятника.

### 10.1. Исследуемые закономерности

Маятник Максвелла массой  $m$ , поднятый на высоту  $\Delta h$  намоткой нитей подвеса на стержень маятника, имеет потенциальную энергию  $mg\Delta h$ . После отключения электромагнита маятник начинает раскручиваться, совершая поступательно-вращательное движение. Потенциальная энергия маятника переходит в кинетическую энергию поступательного движения  $mv^2/2$  его центра масс и энергию вращательного движения  $I\omega^2/2$  вокруг него. На участках опускания и подъема маятника потери энергии на трение пренебрежимо малы по сравнению с изменением механической энергии. В момент полного разматывания нити происходит рывок маятника и частичный переход механической энергии в тепло. На основании закона сохранения механической энергии на участке пути, равном длине нити, можно написать

$$mg\Delta h = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{I}{mr^2} \right), \quad (10.1)$$

где  $v = \omega r$  – скорость маятника в момент пересечения оптической оси фотодатчика ( $\omega$  – его угловая скорость вращения в тот же момент времени,  $r$  – радиус стержня, на который намотана нить бифилярного подвеса маятника);  $I$  – момент инерции маятника. Из уравнения (8.1) получим для экспериментального значения момента инерции маятника

$$I = mr^2 \left( \frac{2g\Delta h}{v^2} - 1 \right) = mr^2 \left( \frac{g - a}{a} \right), \quad (10.2)$$

где учтено, что  $v^2 = 2a\Delta h$  ( $a$  – ускорение, с которым опускается маятник). Учитывая, что  $a = 2\Delta h / t^2$ , получим

$$I = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2\Delta h} - 1 \right). \quad (10.3)$$

Теоретическое значение момента инерции маятника относительно его оси рассчитывается по формуле

$$I_T = (m_{\text{ст}} r^2 + M(r^2 + R^2) + m_k(R^2 + R_0^2)) / 2, \quad (10.4)$$

где  $m_{\text{ст}}$  – масса стержня;  $r$  – радиус стержня;  $M$  – масса диска, укрепленного на стержне;  $m_k$  – масса кольца;  $R$  – внешний радиус диска;  $R_0$  – внешний радиус кольца.

Если учитывать теплоту  $Q$ , выделяющуюся маятником в момент рывка нити, то закон сохранения энергии после рывка нити к моменту наибольшего подъема маятника будет иметь вид

$$-mgh_{01} = -mgh_{02} + Q,$$

где учтено, что изменение высоты отсчитывается по шкале измерительной линейки на вертикальной стойке установки, положительное направление оси высот которой направлено вниз.

Из этого уравнения следует, что количество теплоты, выделяющееся при рывке, можно оценить по изменению высоты первого подъема маятника:  $Q = mg\Delta h_{12}$ , где  $\Delta h_{12} = h_{02} - h_{01}$  – изменение высоты наивысшего положения маятника в первом цикле «спуск – подъем».

## 10.2. Приборы и принадлежности

*Приборы и принадлежности:* маятник Максвелла, секундомер, масштабная линейка, штангенциркуль.

Маятник Максвелла (рис. 10.1) представляет собой диск 6, закрепленный на стержне 7, подвешенном на бифилярном подвесе 5 к верхнему кронштейну 2. На диск крепится кольцо 8. Верхний кронштейн 2, установленный на вертикальной стойке 1, имеет электромагнит и устройство 4 для регулировки длины

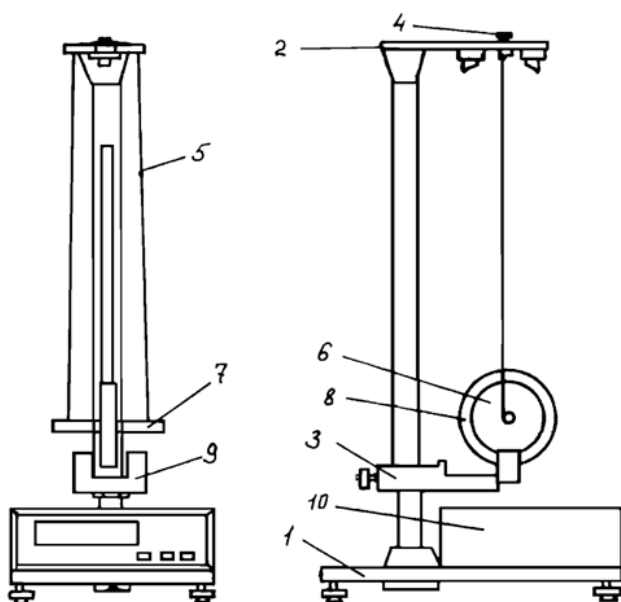


Рис. 10.1



бифилярного подвеса. Маятник с кольцом фиксируется в верхнем исходном положении с помощью электромагнита.

На вертикальной стойке 1 нанесена миллиметровая шкала, по которой определяется ход маятника. На нижнем кронштейне 3 находится фотоэлектрический датчик 9. Кронштейн обеспечивает возможность перемещения фотодатчика вдоль вертикальной стойки и его фиксирования в любом положении в пределах шкалы 0...420 мм. Фотодатчик предназначен для выдачи электрических сигналов на секундомер 10 в момент пересечения светового луча оси фотодатчика диском маятника.

### 10.3. Указания по подготовке к работе

Создайте таблицы (табл. 10.1 и 10.2)

Таблица 10.1

| $m_{\text{ст}},$<br>г | $M,$<br>г | $m_{\text{к}},$<br>г | $r,$<br>мм | $R,$<br>мм | $R_0,$<br>мм | $h_0,$<br>см | $h_{01},$<br>см | $h_{02},$<br>см |
|-----------------------|-----------|----------------------|------------|------------|--------------|--------------|-----------------|-----------------|
| 29                    | 131       |                      |            |            |              |              |                 |                 |

Таблица 10.2

| $i$ | $h_i, \text{см}$ | $t_1, \text{с}$ | ... | $t_5, \text{с}$ |
|-----|------------------|-----------------|-----|-----------------|
| 1   |                  |                 |     |                 |
| ... |                  |                 |     |                 |
| 4   |                  |                 |     |                 |

для занесения параметров установки и результатов наблюдений.

### 10.4. Указания по проведению наблюдений

1. Измерьте штангенциркулем диаметры стержня  $d$ , диска  $D$  и кольца  $D_0$  и рассчитайте их радиусы  $r = d/2$ ,  $R = D/2$ ,  $R_0 = D_0/2$ . Занесите их, а также массу кольца  $m_{\text{к}}$  (указана на его боковой поверхности) в таблицу (табл. 10.1) протокола. Некоторые из этих параметров могут быть указаны на панели установки.
2. Опустите вниз диск маятника. Произведите регулировку положения основания установки при помощи регулировочных опор так, чтобы бифилярный подвес маятника шел параллельно вертикальной стойке установки, а диск находился посередине оси фотодатчика. Установите с помощью устройства 4 максимальную длину бифилярного подвеса, меньшую его полной длины, таким образом, чтобы нижний край кольца маятника находился на 4...5 мм ниже оптической оси фотодатчика; при этом ось маятника должна занять горизонтальное положение. Запишите положение  $h_i$  оптической оси фотодатчика по шкале миллиметровой линейки в таблицу (табл. 10.2).

3. Нажмите кнопку «СЕТЬ», расположенную на лицевой панели секундомера; при этом должны загореться лампочки фотодатчика и цифровые индикаторы секундомера. Вращая маятник, зафиксируйте его в верхнем положении при помощи электромагнита; при этом необходимо следить за тем, чтобы нить наматывалась на стержень виток к витку. Запишите положение  $h_0$  нижнего края кольца маятника по миллиметровой шкале на вертикальной стойке установки в таблицу (табл. 10.1).
4. Нажмите кнопку «СБРОС», затем кнопку «ПУСК». При этом электромагнит обесточивается, маятник раскручивается, секундомер начинает производить отсчет времени, прекращающийся в момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика. Запишите значение времени  $t_i$  в таблицу (табл. 10.2). Вращая маятник, вновь зафиксируйте его в верхнем положении. Нажав последовательно кнопки «СБРОС» и «ПУСК», повторите наблюдения еще четыре раза для данной высоты свободного хода маятника. Результаты наблюдений занесите в таблицу (табл. 10.2).
5. Установите новую длину свободного хода маятника. Для этого поднимите нижний кронштейн с фотодатчиком на 5...6 см и зафиксируйте его на стойке. С помощью винта 4 вновь установите необходимую длину бифилярного подвеса и запишите новое положение  $h_i$  оси фотодатчика в таблицу (табл. 10.2). Проведите пять наблюдений по определению времени  $t_i$  свободного хода маятника для новой высоты.
6. Указанную в п. 3 процедуру сделайте еще для двух высот, уменьшая каждый раз длину свободного хода на 5 – 6 см. Таким образом, для четырех высот свободного хода маятника будет получено 20 значений времени и четыре средних значений времен движения маятника для этих высот.
7. Опустите кронштейн с фотодатчиком в крайнее нижнее положение. Отрегулируйте бифилярный подвес для свободного хода маятника в соответствии с п. 2. Запишите уточненное положение  $h_{01}$  нижнего края кольца маятника по миллиметровой шкале на вертикальной стойке установки в таблицу (табл. 10.1). Поднимите маятник в верхнее положение и нажмите кнопку «ПУСК». Определите высоту  $h_{02}$ , на которую поднимется нижний край маятника после рывка нити, и запишите ее в таблицу (табл. 10.1) протокола.

### **10.5. Задание по обработке результатов эксперимента**

1. Рассчитайте среднее значение ускорения падения маятника и его полную погрешность  $a = \bar{a} \pm \Delta a$  с  $P = 95 \%$ .
2. Постройте график зависимости длины свободного хода маятника от времени падения. Для этого на графике приведите теоретическую зависимость  $\Delta h = at^2/2$  с учетом найденного в п. 1 ускорения, и нанесите экспериментальные значения  $h$  и  $t$ .
3. Рассчитайте по формуле (10.2) момент инерции маятника  $I = \bar{I} \pm \Delta I$  с  $P = 95 \%$ . Формулу погрешности  $\Delta I$  выведите методом логарифмирования функции.
4. Для одного из опытов рассчитайте по формуле (10.3) значение момента инерции  $I$  маятника.
5. Рассчитайте по формуле (10.4) теоретическое значение момента инерции маятника  $I_T$  и сопоставьте его со средним экспериментальным значением  $\bar{I}$  в п. 2 и рассчитанным в п. 3. Сделайте заключение о причинах расхождения значений моментов инерции, если таковое имеется.
6. Рассчитайте количество теплоты  $Q$ , выделяющейся при рывке нити маятника в нижней точке его движения.
7. На основе второго закона Ньютона определите среднюю силу натяжения нити, действующую при рывке маятника в нижней точке его движения.

### **10.6. Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
2. Объясните, на каком участке движения и почему возможно применение закона сохранения механической энергии для описания движения маятника.
3. Докажите уравнения связи между линейными и угловыми величинами при вращательном движении тела  $s = \varphi r$ ,  $v = \omega r$ ,  $a_\tau = \beta r$ ,  $a_n = \omega^2 r$ . Каков смысл входящих в эти выражения параметров? Одинаковы ли значения величин  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\beta$  относительно параллельных осей вращения в фиксированный момент времени?

4. Используя одну из высот и время падения с нее маятника в данной работе, рассчитайте:
  - а) линейное  $a$  и угловое  $\varepsilon$  ускорение маятника;
  - б) линейную  $v$  и угловую  $\omega$  скорости маятника, а также частоту  $n$  его вращения в этот момент времени;
  - г) угол поворота  $\varphi$  и число оборотов  $N$ , которое сделает маятник за это время.
5. Сделайте упрощенный рисунок маятника, используемого в данной работе, и укажите на нем все силы, действующие на него. Используя рисунок, напишите второй закон Ньютона для центра масс маятника и уравнение вращательного движения маятника вокруг него. Из этой системы уравнений найдите выражение для ускорения падения маятника.
6. Рассчитайте силу натяжения нити маятника.
7. Напишите закон сохранения механической энергии для маятника в данной лабораторной работе и выведите из него выражение для ускорения падения маятника.
8. Используя теоретическое значение момента инерции маятника  $I_T$ ; рассчитайте ускорение  $a$  падения маятника и сопоставьте его с экспериментальным средним значением, полученным в данной работе.
9. Каким образом можно оценить количество теплоты, выделяющееся при рывке нити маятника в данной работе?

### **Работа 11. (7) МАЯТНИК ОБЕРБЕКА**

*Цель работы:* экспериментальное исследование законов динамики вращательного движения твердого тела на примере маятника Обербека; определение постоянной части момента инерции маятника Обербека.

#### ***11.2. Приборы и принадлежности***

Маятник Обербека (рис. 11.1), представляет собой крестовину 1 с грузами 2 на вращающейся оси 3. На шкив на оси намотана нить с грузиком 5, которая, разматываясь, вызывает вращательное движение крестовины. На четырех взаимно перпендикулярных стержнях крестовины располагаются четыре подвижных груза 2 массой  $m$  каждый, положение которых относительно оси вращения маятника определяется по измерительной линейке 6.

В опыте положения грузов на крестовине меняют с помощью их перемещения по резьбовым спицам крестовины. Фиксация грузов в каждой серии измерений осуществляется законтриванием двух резьбовых половин каждого груза в выбранном положении. На оси крестовины располагается датчик 4 угловой скорости вращения маятника, подключенный через концентратор к измерительному блоку.

### 11.2. Исследуемые закономерности

Вращение маятника описывается основным уравнением динамики вращательного движения

$$M = I\beta, \quad (11.1)$$

где  $M$  – момент сил, действующих на маятник;  $I$  – его момент инерции;  $\beta$  – угловое ускорение.

Вращательный момент  $M$  сил, действующих на маятник, определяется выражением

$$M = TR - M_{\text{тр}}, \quad (11.2)$$

где  $T$  – сила, действующая на шкив маятника со стороны нити;  $R$  – радиус шкива, на который намотана нить с прикрепленным к ней грузом  $m_0$ ;  $M_{\text{тр}}$  – момент сил трения в оси маятника.

Движение груза  $m_0$  на нити описывается вторым законом Ньютона

$$m_0 a = m_0 g - T. \quad (11.3)$$

С учетом уравнения (9.3) момент сил, действующих на маятник, можно записать в виде

$$M = m_0(g - a)R - M_{\text{тр}}. \quad (11.4)$$

Если подставить (11.4) в (11.1), то уравнение вращательного движения маятника примет вид

$$I\beta = m_0(g - a)R - M_{\text{тр}}.$$

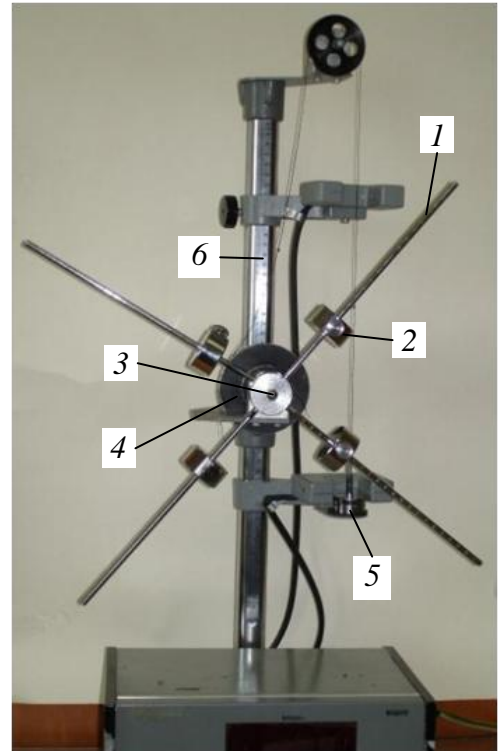


Рис. 11.1

С учетом, что угловое ускорение  $\beta$  вращения маятника связано с ускорением  $a$  движения груза  $m_0$  соотношением

$$a = \beta R, \quad (11.5)$$

это уравнение можно привести к виду

$$(I + m_0 R^2) \beta = m_0 g R - M_{\text{тр}}. \quad (11.6)$$

В этой формуле правая часть равенства есть постоянная величина. Отсюда следует, что вращение маятника для выбранного в опыте положения грузов является равноускоренным. Кроме того, из формулы (11.6) следует, что увеличение момента инерции  $I$  системы должно приводить в данной работе к уменьшению углового ускорения  $\beta$  ее вращения, и наоборот.

Если  $m$  – масса одного из грузов на крестовине,  $r$  – его расстояние до оси вращения маятника, то момент инерции крестовины с четырьмя грузами в формуле (11.6)

$$I = I_0 + 4(I_m + m r^2) = I_C + 4m r^2, \quad (11.7)$$

где  $I_0$  – суммарный момент инерции крестовины без грузов,  $I_m + m r^2$  – момент инерции одного из подвижных грузов, рассчитанный по теореме Гюйгенса–Штейнера (здесь  $I_m$  – его собственный момент инерции,  $I_C = I_0 + 4I_m$  – постоянная часть момента инерции маятника Обербека).

Угловое ускорение вращения маятника определяется по формуле

$$\beta = 2\varphi / t^2 = 2h / R t^2, \quad (11.8)$$

где  $\varphi = h / R$  – угол поворота шкива при прохождении грузом на нити расстояния  $h$  между двумя метками на установке за время  $t$ .

С учетом (11.7) и (11.8), уравнение (11.6) можно линеаризовать:

$$t^2 = \frac{8hm}{R(m_0 g R - M_{\text{тр}})} r^2 + \frac{2h(m_0 R^2 + I_C)}{R(m_0 g R - M_{\text{тр}})}. \quad (11.9)$$

Обозначая  $y = t^2$ ,  $x = r^2$ , получим линейную зависимость вида  $y = Ax + B$ , находя параметры которой методом линейной регрессии, можем определить величину  $I_C$ :

$$I_C = \frac{4mB}{A} - m_0 R^2.$$

Операцию определения времени  $t$  и вычисления  $\varepsilon$  в работе выполняет измерительный блок установки. При этом средние значения  $t$  и  $\varepsilon$  по четырем измерениям в одном опыте высвечиваются на ЖК-дисплее установки.

Для выполнения работы необходимо выполнить пять серии измерений угловых ускорений маятника при пяти различных удаленностях грузов на крестовине от оси ее вращения.

### 11.3. Указания по подготовке к работе

Занесите в протокол таблицу (табл. 11.1) для записи параметров установки и таблицу (табл. 11.2) для записи результатов наблюдений.

Таблица 11.1

| $m$ , г | $m_0$ , г | $R$ , см | $l$ , см | $h$ , см |
|---------|-----------|----------|----------|----------|
|         |           |          |          |          |

Таблица 11.2

| №   | $r$ , см | $t$ , с | $\beta$ , с <sup>-2</sup> |
|-----|----------|---------|---------------------------|
| 1.  |          |         |                           |
| ... |          |         |                           |

### 11.4. Указания по проведению наблюдений

1. Запишите в таблицу (табл. 11.1) массы грузов  $m = 53$  г на крестовине маятника и на нити шкива  $m_0 = 119$  г, радиус шкива  $R = 16.5$  мм, высоту (длину) грузов на крестовине  $l = 24$  мм, расстояние между метками на установке  $h = 430$  мм и удаленности грузов на крестовине от ее оси вращения на расстояния  $r_1 = 8$  см,  $r_2 = 12$  см,  $r_3 = 16$  см. Приборные погрешности масс 2 г,  $\theta_R = 0.5$  мм,  $\theta_l = \theta_h = \theta_r = 1$  мм.
2. Соберите лабораторную установку, зафиксировав подвижные грузы на выбранном расстоянии  $r_1$  от оси вращения маятника. **ВНИМАНИЕ!** При установке грузов на крестовине отметка на линейке, соответствующая их выбранному положению, должна быть видна сквозь зазор между грузами, т. е. совпадать с положением их общего центра масс.

**Замечание.** Эксперимент включает в себя пять серий измерений, соответствующих различному положению грузов относительно оси вращения маятника, а каждая серия включает четыре измерения угловых ускорений  $\beta$  относительно оси вращения маятника и времен  $t$  движения груза на нити между двумя метками на боковой панели установки. Средние по четырем измерениям значения  $\beta$  и  $t$  высвечиваются на ЖК-дисплее установки. Если при выполнении серии в одном из четырех измерений произошли сбой или

ошибка, то, не записывая средние значения  $\beta$  и  $t$  в таблицу эксперимента, серию с четырьмя измерениями надо повторить без изменения геометрии эксперимента. При этом измерение, следующее за ошибочным, надо считать первым в новой серии. Полученные в каждой серии измерений значения  $\beta$  и  $t$  записать в таблицу (табл. 11.2).

1. Тумблером «СЕТЬ» включите измерительный блок.
2. Нажмите кнопку «ПУСК». При этом на ЖК-дисплее отобразится краткая инструкция по использованию измерительной установки.
3. Для начала измерений поднимите груз, прикрепленный к нити, пока его основание (плоскость его нижнего торца) не займет положение верхней метки на вертикальном щите прибора (рис. 11.1). Для этого вращайте маятник за один из стержней по часовой стрелке, придерживая груз рукой. При этом нить с грузом будет наматываться на шкив маятника. Придерживая маятник за один из стержней одной рукой, другой остановите колебания груза на нити в его верхнем положении.
4. Не отпуская стержень маятника, снова нажмите кнопку «ПУСК», при этом на панели установки загорится красный светодиод. Не более чем через 9 с (см. Примечание) отпустите груз. После прохождения грузом нижнего указателя на стенке макета (см. рис. 11.1) на ЖК-дисплее отобразится измерительная информация: время  $t$  движения груза на нити между двумя метками и угловое ускорение  $\beta$  вращения маятника, высвечиваемых в виде отдельных чисел на дисплее. Запишите средние по четырем входящим в серию измерениям значения  $t$  и  $\beta$  с ЖК-дисплея в таблицу (табл. 11.2).

**Примечание:** При отпуске груза после нажатия кнопки «ПУСК» через время, большее 9 с, на ЖК-дисплее появится сообщение об ошибке. В этом случае не заносите информацию с дисплея в протокол и, полностью завершив опыт с четырьмя измерениями, проведите эксперимент с четырьмя измерениями (пп. 5 и 6) повторно.

5. Установите новые положения грузов (п. 2) относительно оси вращения маятника и повторите измерения на пп. 5 и 6, занося измеренные значения времени и углового ускорения в таблицу (табл. 11.2).



### **11.5. Задание по обработке результатов эксперимента**

1. Используя линеаризацию (11.9), определите параметры  $A$  и  $B$  линейной зависимости и их погрешности. Постройте на миллиметровой бумаге график  $y = t^2$  от  $x = r^2$ .
2. Рассчитайте постоянную часть момента инерции маятника Обербека  $I_C = \bar{I}_C \pm \Delta \bar{I}_C$  с  $P = 95\%$ .
3. Рассчитайте момент  $M_{\text{тр}}$  сил трения, действующих в оси маятника.
4. Рассмотрев грузы на крестовине маятника как стержни длиной  $l$  и массой  $m$  (см. табл. 11.1) с собственным моментом инерции  $I_m = ml^2/12$ , рассчитайте момент инерции  $I_0$  крестовины маятника Обербека.

### **11.6. Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения.
2. Что называется моментом инерции твердого тела? В каких единицах он измеряется?
3. Что называется моментом силы, и в каких единицах он измеряется?
4. Сформулируйте теорему Штейнера.
5. Почему в данной работе увеличение момента инерции  $I$  системы должно приводить к уменьшению углового ускорения  $\varepsilon$  ее вращения, и наоборот?
6. Вычислите натяжения нити  $T_1$  и  $T_2$  при двух положениях  $r_1$  и  $r_2$  грузов относительно оси вращения маятника.

## **Работа 12. (4) ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ГЮЙГЕНСА-ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

*Цель работы.* Определение момента инерции эталонного диска методом вращательных колебаний и экспериментальная проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера.

### **12.1. Приборы и принадлежности**

Лабораторная установка (рис. 12.1) представляет собой колебательную систему, вращающуюся в горизонтальной плоскости, которая включает закрепленный на вертикальной оси диск (шкив) 1, его ремень 2 связан с упру-

гими пружинами 3, зацепленными за штыри стойки. К шкиву жестко прикреплен металлический профиль 4 с рядом отверстий 5, в которых фиксируются грузы 6.

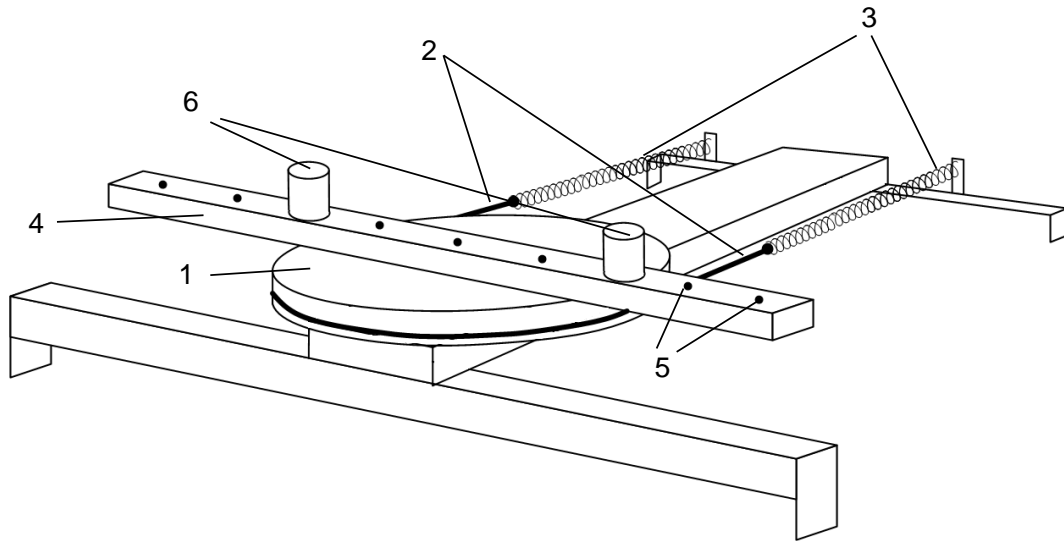


Рис. 12.1

### 12.2. Исследуемые закономерности

Период колебаний  $T$  подвижной части колебательной системы, представленной на рис. 12.1, связан с ее моментом инерции  $I$ . В положении равновесия силы упругости пружин, а, следовательно, и силы натяжения нити с разных сторон диска (шкива) одинаковы. Обозначим эти силы  $F_0$ . Для вывода шкива из положения равновесия повернем его на угол  $\varphi$ . По закону Гука силы упругости изменятся на  $k\varphi R$  (здесь  $k$  – коэффициент жесткости каждой пружины,  $R$  – радиус шкива). Тогда на шкив будет действовать возвращающий момент сил

$$M = R(F_0 - k\varphi R) - R(F_0 + k\varphi R) = -2k\varphi R^2. \quad (12.1)$$

Подставив (12.1) в основное уравнение динамики вращательного движения

$$M = I\beta = I\varphi'', \quad (12.2)$$

получим дифференциальное уравнение для  $\varphi$ :

$$I\ddot{\varphi} + 2kR\varphi = 0, \quad \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0,$$

которое является каноническим дифференциальным уравнением гармонического осциллятора. Его решение имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Здесь  $\varphi_0$  и  $\alpha$  – константы, определяемые начальными условиями, а

$$\omega = \sqrt{\frac{2kR^2}{I}} \quad (12.3)$$

– собственная частота колебаний рассматриваемого маятника.

Если радиус цилиндров  $r$ , их масса  $m$ , то при установке цилиндров на расстоянии  $l$  от оси вращения колебательной системы ее момент инерции

$$I = I_{\text{д}} + 2\left(\frac{1}{2}mr^2 + ml^2\right) + 2\frac{1}{2}m_{\text{п}}R^2 = I_0 + 2ml^2, \quad (12.4)$$

где  $I_{\text{д}}$  – момент инерции диска 1 с металлическим профилем 4,  $\frac{1}{2}mr^2 + ml^2$  – момент инерции одного цилиндра, рассчитанный согласно теореме Гюйгенса–Штейнера,  $m_{\text{п}}$  – масса пружины, каждая из которых входит в выражение (12.7) с коэффициентом  $1/2$ , поскольку один конец пружины остается неподвижным. Величина  $I_0 = I_{\text{д}} + mr^2 + m_{\text{п}}R^2$  – постоянная часть момента инерции колебательной системы, который соответствует состоянию, когда оба груза 6 (см. рис. 12.1) помещены на металлическом профиле 4 в центр шкива 1. Согласно (12.3) период колебательной системы может быть найден как

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 2ml^2}{2kR}} \quad (12.5)$$

Преобразуя (10.5), получим

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{kR} l^2 + \frac{2\pi^2 I_0}{kR}. \quad (12.6)$$

Обозначая  $y = T^2$ ,  $x = l^2$ ,  $A = \frac{4\pi^2 m}{kR}$ ,  $B = \frac{2\pi^2 I_0}{kR}$ , получим зависимость вида

$$y = Ax + B. \quad (12.7)$$

Формула (12.6) получена с использованием теоремы Гюйгенса – Штейнера, и может быть использована для проверки правильности данной теоремы. Для этого достаточно убедиться, что экспериментальные точки в уравнении (12.7) хорошо ложатся на прямую линию.

Находя параметры  $A$  и  $B$  этой зависимости графическим методом или методом линейной регрессии, найдем жесткость пружин и постоянную часть момента инерции

$$k = \frac{4\pi^2 m}{AR}, \quad I_0 = \frac{kRB}{2\pi^2}. \quad (12.9)$$

### 12.3. Указания по подготовке к работе

Создайте таблицы (табл. 12.1 и 12.2)

Таблица 12.1

| №<br>п/п | 0 | 1   | 2    | 3    | 4    | $\theta$ |
|----------|---|-----|------|------|------|----------|
| $r$ , см | 0 | 6.0 | 10.0 | 14.0 | 18.0 | 0.2      |
| $t$ , с  |   |     |      |      |      |          |

Таблица 12.2

| $m$ , г     | $d$ , мм    | $R$ , мм   |
|-------------|-------------|------------|
| $200 \pm 2$ | $138 \pm 2$ | $16 \pm 2$ |

для занесения параметров установки и результатов наблюдений.

### 12.4. Указания по проведению наблюдений

1. Осторожно обращайтесь с подвижной системой. Не допускайте чрезмерного растяжения пружин – это может привести к потере их упругих свойств.
2. Установите цилиндры в центре диска (позиция (0 - 0)). Отклоните указатель диска на угол примерно  $30^\circ$  и измерьте время  $n = 5$  его колебаний с помощью любого датчика времени, имеющего точность  $\theta_t = 0,01$  с. Результат наблюдения занесите в таблицу (табл. 12.1). Опыт повторите  $N = 5$  раз.
3. Устанавливая цилиндры симметрично относительно оси вращения системы в положениях (1–1), (2–2), (3–3), (4–4) на металлическом профиле диска, повторите опыт по п. 2 для этих положений цилиндров. Результаты измерений занесите в таблицу (табл. 12.1).

### 12.5. Задание по обработке результатов эксперимента

1. Рассчитайте параметры  $\bar{t}_i$ ,  $T_i = \bar{t}_i / n$ ,  $I_{0i}$ . Сопоставьте значения моментов инерции колебательной системы  $I_{0i}$  и сделайте заключение о справедливости теоремы Гюйгенса–Штейнера.
2. Рассчитайте постоянную часть момента инерции колебательной системы  $I_0 = \bar{I}_0 \pm \Delta \bar{I}_0$  с  $P = 95\%$ .

3. Используя значения моментов инерции  $\bar{I}_0$  и двух цилиндров  $mR^2$ , рассчитайте момент инерции  $I_D$  диска (шкива).
4. Используя формулу (12.9), рассчитайте жесткость колебательной системы  $k = \bar{k} \pm \Delta \bar{k}$  с  $P = 95\%$ . Погрешность  $\Delta \bar{k}$  рассчитайте по формуле, выведенной в подготовке к работе.

### **12.6. Контрольные вопросы**

1. Что такое жесткость колебательной системы, и каков ее физический смысл? Как экспериментально ее можно определить?
2. Дайте определение момента силы, момента импульса и момента инерции абсолютно твердого тела относительно некоторой оси.
3. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера, которая используется для вычисления момента инерции тела относительно произвольной оси вращения.
4. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения. Каков физический смысл входящих в него параметров?
5. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
6. Напишите дифференциальные уравнения гармонических колебаний с затуханием и без затухания и их решения. Каков смысл входящих в них параметров?
7. Докажите, что функция  $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$  является решением дифференциального уравнения  $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$ .
8. Выведите формулу (12.8) для расчета постоянной части момента инерции колебательной системы в данной работе.
9. Выведите формулу расчета приборной погрешности  $\theta_{I0i}$  постоянной части момента инерции колебательной системы.
10. Выведите формулу (12.9) для расчета жесткости колебательной системы в данной работе.
11. Рассчитайте момент инерции тела по указанию преподавателя.

### Работа 13. (3) ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

*Цель работы:* исследование динамики колебательного движения на примере крутильного маятника; определение момента инерции маятника, модуля сдвига материала его подвеса и характеристик колебательной системы с затуханием (логарифмического декремента затухания и добротности колебательной системы).

#### 13.1. Исследуемые закономерности

*Момент инерции крутильного маятника.* Момент инерции (аналог инертной массы тела при его поступательном движении) – физическая величина, характеризующая инертные свойства твердого тела при его вращении. В соответствии с одной из формулировок основного уравнения динамики вращательного движения

$$\mathbf{M} = I \boldsymbol{\varepsilon},$$

где момент инерции  $I$  связывает угловое ускорение тела  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и момент сил  $\mathbf{M}$ , действующих на него.

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, то момент инерции относительно этой оси вычисляется как сумма произведений элементарных масс  $\Delta m_i$ , составляющих тело, на квадраты их расстояний  $r_i$  до оси вращения, т. е.

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i \rho \Delta V_i r_i^2,$$

где  $\rho$  – плотность тела;  $\Delta V_i$  – элементы объема. Таким образом, момент инерции является аддитивной величиной.

В случае сплошного тела сумма в определении момента инерции переходит в интеграл:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV.$$

Крутильный маятник совершает вращательное колебательное движение вокруг оси, совпадающей с направлением стальной проволоки. Используя основное уравнение динамики вращательного движения, можно определить момент инерции маятника, а также физические величины, описывающие вращательное движение.

*Уравнение движения крутильного маятника.* При повороте тела, закрепленного на упругом подвесе, в результате деформации сдвига возникает вращающий момент упругих сил  $M = -k\varphi$ , где  $k$  – коэффициент кручения, зависящий от упругих свойств материала подвеса, его размеров и формы,  $\varphi$  – угол поворота диска маятника. Без учета сил трения в подвесе уравнения движения тела имеют вид

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k\varphi, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

которые являются уравнением гармонического осциллятора с частотой собственных колебаний  $\omega_0 = \sqrt{k/I}$  ( $I$  – момент инерции диска крутильного маятника).

Трение в подвесе создает тормозящий момент, пропорциональный скорости движения маятника,  $M_R = -R d\varphi/dt = -R\dot{\varphi}$ , где  $R$  – коэффициент сопротивления. С учетом сил трения уравнение движения маятника примет вид

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -R \frac{d\varphi}{dt} - k\varphi, \quad \text{или} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

в последнем уравнении коэффициент  $\beta = R/2I$  называют коэффициентом затухания. Оно является уравнением гармонического осциллятора с затуханием. Решение этого уравнения при  $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$  описывает затухающие колебания маятника и имеет вид (при условии, что диск повернут относительно положения равновесия и отпущен без толчка)

$$\varphi(t) = A(t) \cos \omega t = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega t, \quad (13.1)$$

где  $A_0$  – начальная амплитуда колебаний маятника, измеряемая в радианах;  $\tau = 1/\beta$  – время затухания колебаний, определяющее скорость убывания амплитуды  $A(t)$  колебаний маятника, численно равное времени, за которое амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз:  $A(\tau) = A_0/e$  (рис. 13.1);  $\omega$  – частота колебаний осциллятора с затуханием, связанная с собственной частотой соотношением  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$ . Время затухания колебаний  $\tau$  выражается через момент инерции  $I$  и коэффициент сопротивления  $R$  материала подвеса маятника  $\tau = 1/\beta = 2I/R$ .

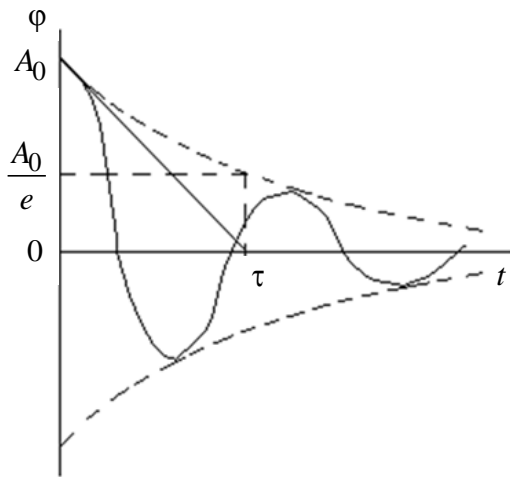


Рис. 13.1

Исследуемый в работе крутильный маятник представляет собой сложную систему (диск с различными креплениями, прикрепленный к проволочному подвесу) с неизвестным моментом инерции  $I_d$ , который представляет собой постоянную часть исследуемой системы. Если на диск маятника положить тело с известным моментом инерции – кольцо с моментом инерции  $I_k$ , то момент инерции маятника станет равным  $I_d + I_k$ . Коэффициент кру-

чения материала подвеса маятника при этом не изменяется:

$$k = \omega_{0d}^2 I_d = \omega_{0k}^2 (I_d + I_k) = \text{const},$$

где  $\omega_{0d}$  и  $\omega_{0k}$  – собственные частоты крутильных колебаний диска маятника без кольца и с кольцом. Отсюда можно найти неизвестный момент инерции диска маятника:

$$I_d = \frac{I_k}{\left(\frac{\omega_{0d}}{\omega_{0k}}\right)^2 - 1}, \quad (13.2)$$

где  $I_k = \frac{m}{8}(D_{ex}^2 + D_{in}^2)$  – момент инерции кольца, ( $D_{ex}$ ,  $D_{in}$  – внешний и внутренний диаметры кольца,  $m$  – его масса).

*Крутильный маятник как диссипативная система.* Полная энергия колебаний маятника убывает со временем по закону

$$W(t) = W_0 e^{-\frac{2t}{\tau}}, \quad (13.3)$$

где  $W_0 = kA_0^2/2$  – начальная энергия колебаний. Убывание энергии происходит за счет совершения работы против сил трения. Энергия при этом превращается в тепло. Скорость диссипации энергии (мощность потерь) может быть найдена как:



$$P_d = -\frac{dW}{dt} = \frac{2W(t)}{\tau}. \quad (13.4)$$

Помимо коэффициента затухания  $\beta$  (или времени затухания  $\tau$ ) и мощности потерь  $P_d$  колебательная диссипативная система характеризуется также добротностью  $Q$ , позволяющей судить о способности системы сохранять энергию. Добротность определяется отношением запасенной системой энергии к потерям энергии за время  $T/2\pi = 1/\omega$ , что соответствует изменению фазы колебания на 1 рад. Из этого определения следует, что

$$Q = 2\pi \frac{W}{P_d T} = \frac{\omega \tau}{2} = \pi \frac{\tau}{T} = \pi N_e, \quad (13.5)$$

т. е. добротность численно равна числу колебаний за время  $t = \pi\tau$ . За это время амплитуда колебаний уменьшится в  $e^\pi \cong 23$  раза, а энергия колебаний в  $e^{2\pi} \cong 535$  раз, иными словами, за это время колебания практически затухают. Часто также используется параметр  $N_e = \tau/T$  – число колебаний, за которое амплитуда колебаний уменьшится в  $e$  раз.

В технике для характеристики колебательных систем с затуханием вводят декремент затухания  $\Delta$ , равный отношению амплитуд колебаний, отличающихся на период колебаний, и его логарифм – логарифмический декремент затухания  $\delta = \ln \Delta$ .

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T},$$

откуда

$$\delta = \beta T = \frac{1}{N_e} = \frac{\pi}{Q}.$$

*Определение модуля сдвига.* Методом крутильных колебаний пользуются для косвенного измерения модуля сдвига  $G$  материала подвеса. Модуль сдвига характеризует упругие свойства материала и в случае малых деформаций равен силе, действующей на единицу площади  $S$  при единичном угле сдвига  $\gamma$  (рис. 13.2) касательно сдвигу слоев вещества в месте определения модуля  $G$ .

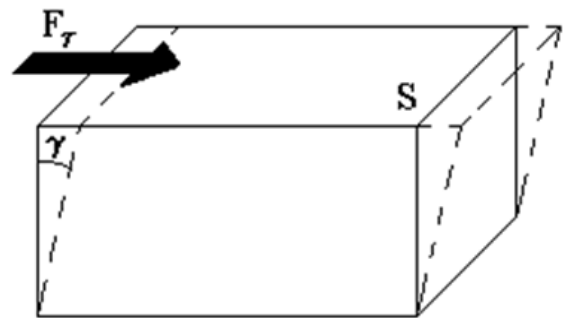


Рис. 13.2

Для подвеса из стальной проволоки модуль сдвига определяется из соотношения

$$G = \frac{32kl}{\pi d^4}, \quad (13.6)$$

где  $l$  – длина подвеса,  $d$  – его диаметр,  $k$  – его коэффициент кручения.

Модуль сдвига  $G$  связан с модулем Юнга, характеризующим сопротивление материала сжатию или растяжению, соотношением  $E = 2G(1 + \nu)$ . Коэффициент Пуассона  $\nu = \varepsilon_{\perp} / \varepsilon_{\parallel}$  – отношение поперечной и продольной относительных деформаций образца материала и для стали равен 0.25.

### 13.2. Приборы и принадлежности

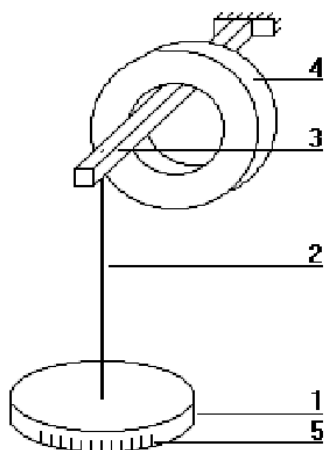


Рис. 13.3

В работе используются крутильный маятник, секундомер, масштабная линейка, микрометр.

Применяемый в работе крутильный маятник (рис. 13.3) представляет собой диск 1, закрепленный на упругой стальной проволоке 2, свободный конец которой зажат в неподвижном кронштейне 3. На кронштейне расположено кольцо 4, масса которого известна. Кольцо 4 можно положить сверху на диск 1, изменив тем самым момент инерции маятника. Для отсчета значений угла поворота маятника служит градуированная шкала 5, помещенная на панели прибора снизу от диска 1.

### 13.2. Указания по подготовке к работе

Занесите в протокол таблицу (табл. 13.1) для записи результатов наблюдений времени десяти полных колебаний диска без кольца и с кольцом и времен уменьшения амплитуды колебаний маятника в два раза,

Таблица 13.1

| № п/п | $t_d, \text{с}$ | $t_{0d}, \text{с}$ | $t_k, \text{с}$ | $t_{0k}, \text{с}$ | $a_0$ | $a_1$ | $a_t$ |
|-------|-----------------|--------------------|-----------------|--------------------|-------|-------|-------|
| 1     |                 |                    |                 |                    |       |       |       |
| ...   |                 |                    |                 |                    |       |       |       |

Таблица 13.2

| $l$ | $d$ | $D_{\text{ex}}$ | $D_{\text{in}}$ | $D_0$ | $h_0$ | $m$ | $\rho$ |
|-----|-----|-----------------|-----------------|-------|-------|-----|--------|
|     |     |                 |                 |       |       |     |        |

а также таблицу (табл. 13.2) для записи параметров установки и однократно измеряемых в опыте величин.

### **13.3. Указания по выполнению наблюдений**

1. Измерьте или запишите с панели установки в таблицу (табл. 13.2) протокола наблюдений длину подвеса  $l$ , с помощью штангенциркуля диаметр проволоки подвеса  $d$ , а также внешний  $D_{\text{ex}}$  и внутренний  $D_{\text{in}}$  диаметры кольца, диаметр  $D_0$  и толщину  $h_0$  диска маятника, а также значения массы  $m$  кольца.
2. Снимите, если это необходимо, кольцо с диска и укрепите его на кронштейне. Измерьте время  $t_d$   $n=10$  полных колебаний маятника без кольца, для чего поверните диск на некоторый угол (примерно  $30^\circ$ ) и отпустите его, включив одновременно секундомер с точностью измерения времени  $\theta_t = 0.01\text{с}$ . Отсчитайте  $n = 10$  полных колебаний, отключите секундомер. Измерения повторите пять раз, заноса результаты измерений  $t_d$  в таблицу (табл. 13.1) протокола наблюдений.
3. Запишите под таблицей отсчет  $a_0$ , соответствующий равновесному положению указателя диска. Поверните диск, отклонив указатель диска маятника на  $a_1 = 8$  или 6 делений от положения равновесия; отпустив диск и одновременно включив секундомер, измерьте время  $t_{0d}$  уменьшения амплитуды колебаний маятника в два раза (до  $a_t = 4$  или 3 делений). Измерения повторите пять раз, заноса результаты измерений  $t_{0d}$  в таблицу (табл. 13.1) протокола наблюдений.
4. Положите кольцо на диск и повторите пять раз измерения времен  $t_k$  и  $t_{0k}$  для диска с кольцом, аналогичные измерениям по пп. 2 и 3. Результаты измерений занесите в таблицу (табл. 13.1) протокола наблюдений.

### **13.4. Задание по обработке результатов эксперимента**

1. Определите по данным таблицы (табл. 13.1) значения времен  $t_d = \bar{t}_d \pm \Delta\bar{t}_d$ ,  $t_k = \bar{t}_k \pm \Delta\bar{t}_k$ ,  $t_{0d} = \bar{t}_{0d} \pm \Delta\bar{t}_{0d}$ ,  $t_{0k} = \bar{t}_{0k} \pm \Delta\bar{t}_{0k}$  с  $P=95\%$ .
2. Рассчитайте периоды ( $T = t/n$ ) колебаний диска без кольца и с кольцом  $T_d = \bar{T}_d \pm \Delta\bar{T}_d$ ,  $T_k = \bar{T}_k \pm \Delta\bar{T}_k$  с  $P=95\%$ .

3. Рассчитайте времена затухания ( $\tau = t_0 / \ln 2$ ) колебаний диска без кольца и с кольцом  $\tau_d = \bar{\tau}_d \pm \Delta \bar{\tau}_d$ ,  $\tau_k = \bar{\tau}_k \pm \Delta \bar{\tau}_k$  с  $P = 95\%$ . Время затухания колебаний вычисляется по формуле (если установка настроена, то  $a_0 = 0$  и  $a_1 / a_t = 2$ ):

$$\tau = t_0 \left( \ln \frac{a_1 - a_0}{a_t - a_0} \right)^{-1}.$$

4. Рассчитайте собственные частоты колебаний маятника без кольца и с кольцом  $\omega_{0d} = \bar{\omega}_{0d} \pm \Delta \bar{\omega}_{0d}$ ,  $\omega_{0k} = \bar{\omega}_{0k} \pm \Delta \bar{\omega}_{0k}$  с  $P = 95\%$ .
5. Используя данные таблицы (табл. 13.2) протокола наблюдений, рассчитайте момент инерции кольца  $I_k$  в формуле (13.2).
6. Рассчитайте момент инерции диска  $I_d = \bar{I}_d \pm \Delta \bar{I}_d$  с  $P = 95\%$ . Для вывода формулы погрешности  $\Delta \bar{I}_d$  формулу (13.2) удобно записать в виде

$$I_d = \frac{I_k \omega_{0k}^2}{\omega_{0d}^2 - \omega_{0k}^2} \text{ и прологарифмировать это выражение.}$$

7. Используя данные таблицы (табл. 13.2), рассчитайте плотность  $\rho$  материала кольца и диска. Рассчитайте значение момента инерции диска маятника  $I_d$  исходя из его размеров и плотности материала. Сравните результат с его экспериментальным значением, полученным в п. 6.
8. Найдите коэффициент кручения  $k = \omega_{0d}^2 I_d$  и  $k = \omega_{0k}^2 (I_d + I_k)$ , сравните их. Используя данные таблицы (табл. 13.2), по формуле (13.6) определите значение модуля сдвига  $G$  и модуля Юнга  $E$  материала подвеса маятника.
9. Пользуясь формулами (13.3)–(13.5), определите начальное значение полной энергии  $W_0$ , мощности потерь  $P_d$  и добротности маятника  $Q$ .
10. В соответствии с уравнением затухающих колебаний (13.1) постройте для маятника без кольца графики зависимости угла поворота маятника  $\varphi = \varphi(t)$  и амплитуды  $A = A(t)$  его колебаний от времени  $t$ .

### 13.5. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основное уравнение динамики вращательного движения.
2. Дайте определение момента инерции. В чем состоит его физический смысл?

3. Какие параметры характеризуют исследуемую систему как диссипативную?
4. Дайте определение времени затухания колебаний.
5. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
6. Дайте определение модуля сдвига. В чем состоит физический смысл этой величины?
7. Напишите дифференциальные уравнения движения гармонического осциллятора без затухания и с затуханием, а также решения этих уравнений. Объясните физический смысл величин, входящих в эти уравнения.
8. Выведите формулы для моментов инерции кольца  $I_K$  и маятника без кольца  $I_D$  в пп. 5 и 6 из (13.4).
9. Дайте определение времени затухания колебаний. Как определить время затухания, пользуясь графиком переходного процесса (зависимости амплитуды колебаний маятника от времени) в диссипативной системе?
10. Дайте определения добротности колебательной системы и логарифмического декремента затухания. Как они взаимосвязаны друг с другом? Каков физический смысл этих параметров? Исходя из определений этих параметров, выведите формулы для их расчета.

## **Работа 14. (2) ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ**

*Цель работы:* изучение закономерностей колебательного движения тела в условии гармонической вынуждающей силы; определение характеристик колебаний: собственной частоты, постоянной затухания и добротности.

### **14.1. Исследуемые закономерности**

Физический маятник – это тело с распределенной массой (или система тел), ось вращения которого расположена выше центра масс маятника. Относительно данной оси в отсутствие затухания и вынуждающего воздействия маятник колеблется с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{mgl_c/I}, \quad (14.1)$$

где для составного маятника  $m = \sum m_i$  – масса маятника;  $l_c = \frac{1}{m} \sum m_i l_{ci}$  – положение его центра масс относительно оси вращения ( $m_i$  и  $l_{ci}$  – масса  $i$ -го тела и положение его центра масс относительно оси вращения),  $I = \sum I_i$  – полный момент инерции маятника,  $I_i = I_{0i} + m_i l_{ci}^2$  – момент инерции  $i$ -го тела, рассчитанный относительно оси вращения по теореме Штейнера ( $I_{0i}$  – момент инерции этого тела относительно его центра масс).

Вынужденными колебаниями называются колебания, совершаемые под действием периодической внешней силы. Внешняя сила совершает работу над колебательной системой и обеспечивает приток энергии к ней. Периодическая внешняя сила может изменяться во времени по различным законам. Особый интерес представляет случай, когда внешняя сила изменяется по гармоническому закону с частотой  $\omega$ .

Если свободные колебания колебательной системы происходят на частоте  $\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , которая определяется собственной частотой и коэффициентом затухания  $\beta$  системы, то установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на частоте  $\omega$  внешней силы.

В начальный момент действия силы в колебательной системе возбуждаются два процесса – вынужденные колебания на частоте  $\omega$  и свободные колебания на частоте  $\omega_{св}$ . Но свободные колебания затухают из-за неизбежного наличия сил трения. Поэтому через некоторое время в колебательной системе остаются только стационарные колебания на частоте  $\omega$  внешней вынуждающей силы. Время установления вынужденных колебаний по порядку величины равно времени затухания  $\tau$  свободных колебаний в колебательной системе.

На исследуемый в работе физический маятник действуют моменты силы тяжести и силы упругости резинки (рис. 14.1), а также момент силы трения, который мы будем полагать пропорциональным угловой скорости движения маятника. Пренебрегая отклонением линии действия силы упругости от горизонтали (радиус шатуна  $R$  мал по сравнению с длиной резинки), получим:

$$M = -mgl_c \sin \alpha + F_y b \cos \alpha - r\alpha',$$

где  $m$  – масса маятника,  $l_c$  – расстояние от точки подвеса до центра тяжести маятника,  $b$  – расстояние от точки подвеса до места прикрепления резинки,  $r$  – коэффициент сопротивления.

Сила упругости резинки подчиняется закону Гука и пропорциональна ее удлинению. Будем считать, что в положении равновесия маятник и штифт шкива электромотора расположены вертикально и в начальный момент времени штифт находится в крайнем левом положении.

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta F_y &= k(x_1 - x) = \\ &= k(-R \cos(\omega t) - b \sin \alpha),\end{aligned}$$

где  $R$  – радиус шатуна.

Запишем уравнение движения исследуемого в работе маятника:

$$M = I\alpha''.$$

Подставляя в него выражение для моментов сил тяжести, трения и упругости, получим уравнение вынужденных колебаний:

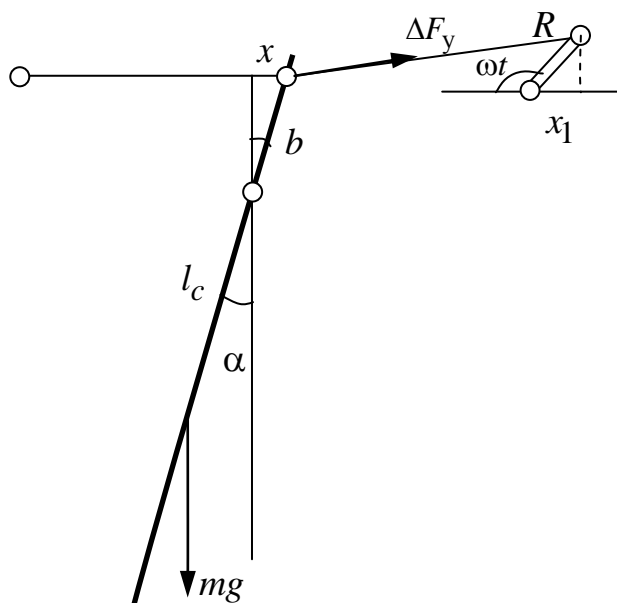


Рис. 14.1

$$\alpha'' + \frac{r}{I}\alpha' + \frac{mgl_c + kb^2 \cos \alpha}{I} \sin \alpha = -\frac{kbR \cos \alpha}{I} \cos \omega t.$$

Если отклонение маятника от положения равновесия невелико, можно считать, что  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ . Тогда дифференциальное уравнение вынужденных колебаний будет иметь вид:

$$\alpha'' + 2\beta\alpha' + \omega_0^2\alpha = -f_0 \cos \omega t, \quad (14.2)$$

где  $\beta = r/(2I)$  – коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{(mgl_c + kb^2)/I}$  – собственная круговая частота колебаний системы без затухания,  $f_0 = kbR/I$ .

Решением уравнения вынужденных колебаний является суперпозиция свободных затухающих колебаний физического маятника и вынужденного движения под действием вынуждающей силы

$$\alpha = A \cos(\omega t + \varphi_1) + B e^{-\beta t} \cos(\omega_{св} t + \varphi_2), \quad (14.3)$$

где  $\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – круговая частота свободных затухающих колебаний системы в отсутствие вынуждающей силы,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – начальные фазы вынужденной и свободной составляющих колебания.

### Вынужденная составляющая колебания

Рассмотрим сначала вынужденную составляющую колебания. Для нахождения его амплитуды  $A$  и начальной фазы  $\varphi_1$  подставим решение

$$\alpha = A \cos(\omega t + \varphi_1)$$

в дифференциальное уравнение вынужденных колебаний маятника (14.2).

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \varphi_1) - 2A\beta\omega \sin(\omega t + \varphi_1) = -f_0 \cos(\omega t)$$

Преобразуем правую часть уравнения:

$$-f_0 \cos(\omega t) = -f_0 \cos(\omega t + \varphi_1 - \varphi_1) = -f_0 (\cos(\omega t + \varphi_1) \cos \varphi_1 + \sin(\omega t + \varphi_1) \sin \varphi_1).$$

Учитывая, что функции синуса и косинуса линейно независимы и уравнение справедливо при любом  $t$ , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A(\omega^2 - \omega_0^2) = f_0 \cos \varphi_1, \\ 2A\beta\omega = f_0 \sin \varphi_1. \end{cases}$$

Тогда амплитуда и начальная фаза вынужденного движения могут быть найдены как:

$$A = \frac{\text{sign}(\omega - \omega_0) f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (14.4)$$

$$\text{tg } \varphi_1 = \frac{2\beta\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (14.5)$$

На очень низких частотах, когда  $\omega \ll \omega_0$ , движение верхнего конца маятника повторяет движение штифта шкива электромотора ( $\varphi_1 \approx 0$ ). При этом  $x_1 = x$ , и резинка остается практически недеформированной. Внешняя сила, приложенная к резинке, работы практически не совершает, т. к. модуль этой силы при  $\omega \ll \omega_0$  стремится к нулю. При очень большой частоте вращения электромотора инерционные свойства маятника не дают ему возможности следовать за вынуждающей силой ( $\varphi_1 \approx -\pi$ ), и амплитуда колебаний становится малой.



Если частота  $\omega$  внешней силы приближается к собственной частоте  $\omega_0$ , возникает резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний. Это явление называется резонансом. Зависимость амплитуды  $A$  вынужденных колебаний от частоты  $\omega$  вынуждающей силы называется резонансной характеристикой или резонансной кривой (рис. 14.4).

Частота резонанса определяется выражением

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (14.6)$$

Резонансная амплитуда находится путем подстановки резонансной частоты в выражение для амплитуды вынужденных колебаний:

$$A_p = f_0 / (2\beta\omega_{св}). \quad (14.7)$$

Для характеристики способности системы сохранять энергию вводят понятие добротности  $Q$ . Добротность определяется отношением запасенной системой энергии

к потерям энергии за время  $T/2\pi = 1/\omega$ , и может быть найдена как

$$Q = \frac{\omega_p W}{P} = \frac{\omega_p}{2\beta}. \quad (14.8)$$

При малом затухании  $\omega_{св} \approx \omega_p$ , откуда получаем:

$$A_p \approx Qf_0 / \omega_{св}^2 = QA(0). \quad (14.9)$$

При резонансе амплитуда установившихся вынужденных колебаний определяется условием: работа внешней силы в течение периода колебаний должна равняться потерям механической энергии за то же время из-за трения. Чем меньше трение (т. е. чем выше добротность  $Q$  колебательной системы), тем больше амплитуда вынужденных колебаний при резонансе. Резонансные характеристики для разных величин добротности показаны на рис. 14.3, а. С увеличением номера кривой на рис. 14.3, а добротность системы убывает.

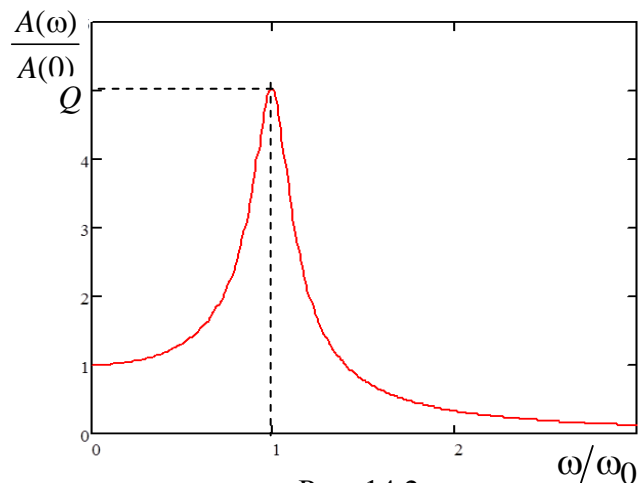


Рис. 14.2

На рис. 14.3, б представлены зависимости начальной фазы вынужденной составляющей колебаний (или фазового сдвига колебаний относительно вынуждающей силы) от частоты для различных коэффициентов затухания  $\beta$ . При резонансе  $\varphi_1 = \pi/2$ , скорость маятника и вынуждающая сила сонаправлены, то есть вынуждающая сила постоянно «подталкивает» маятник: маятник движется влево и влево направлена вынуждающая сила, маятник движется вправо и сила также направлена вправо.

Квадрат отношения амплитуды на резонансе к амплитуде вынужденного

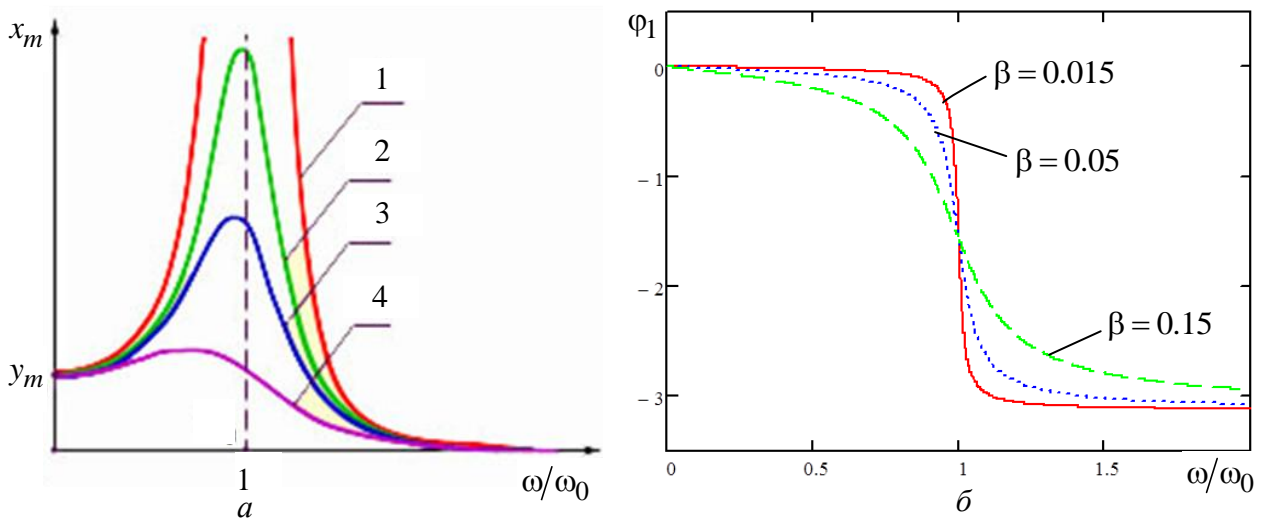


Рис. 14.3

колебания при частоте  $\omega$  может быть найден как

$$\left(\frac{A_p}{A}\right)^2 = 1 + \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)^2}{4\beta^2 \omega_{св}^2}. \quad (14.10)$$

Вблизи резонанса при малом затухании  $\beta \ll 1$ :

$$\left(\frac{A_p}{A}\right)^2 \approx 1 + \frac{(\omega - \omega_p)^2}{\beta^2}, \quad (14.11)$$

где  $\Delta\omega = \omega - \omega_p$ . При отношении амплитуд  $\frac{A_p}{A} = \sqrt{2}$  имеем  $\Delta\omega = \omega - \omega_p = \beta$ .

Отмеченный факт позволяет найти добротность также по ширине резонансной кривой. Обозначая частоты, на которых амплитуда колебаний в  $\sqrt{2}$  раз меньше резонансной амплитуды, за  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , получим, что

$$Q = \frac{\omega_p}{\Delta\omega} = \frac{\omega_p}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (14.12)$$

Для нахождения частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  на уровне  $A_0/\sqrt{2}$  проводят параллельную оси частот прямую. Затем точки пересечения прямой и резонансной кривой проецируют на ось частот.

### Свободная составляющая колебания

Наряду с вынужденной составляющей происходит возбуждение свободной составляющей колебания. Его амплитуда  $B$  и начальная фаза  $\varphi_2$  определяются начальными условиями. Рассмотрим начальный этап возбуждения, когда потери еще не успели заметно погасить свободную составляющую колебания. Для нахождения амплитуды  $B$  и начальной фазы  $\varphi_2$  подставим решение (14.3) в дифференциальное уравнение (14.2). Полагая при  $t = 0$   $\alpha = 0$ ,  $\alpha' = 0$  и считая затухание малым  $\beta \ll \omega$ ,  $\beta \ll \omega_{св}$ , получим систему:

$$\begin{cases} A \cos(\varphi_1) + B \cos(\varphi_2) = 0, \\ A\omega \sin(\varphi_1) + B\omega_{св} \sin(\varphi_2) = 0. \end{cases}$$

Ее решение имеет вид:

$$B = -A \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_{св}} \sin(\varphi_1)\right)^2 + (\cos(\varphi_1))^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega}{\omega_{св}} \operatorname{tg} \varphi_1.$$

С учетом подстановки  $A$  и  $\varphi_1$ :

$$B = -\frac{\operatorname{sign}(\omega - \omega_0) f_0}{\omega_{св}} \frac{\sqrt{\omega_{св}^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^4}}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}, \quad (14.12)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2\beta \omega^2}{\omega_{св} (\omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (14.13)$$

Со временем амплитуда затухающей составляющей колебания  $B(t) = Be^{-\beta t}$  становится малой и наблюдается только вынужденная составляющая колебаний. Величина  $\tau = 1/\beta$  – время затухания колебаний, определяющее скорость убывания амплитуды  $B(t)$  затухающей составляющей колебаний маятника. Оно численно равно времени, за которое амплитуда со-

ставляющей колебаний убывает в  $e$  раз  $B(\tau) = B_0/e$ . Время затухания колебаний вычисляется по формуле  $\tau = t_{1/2}/\ln 2$ , где  $t_{1/2}$  – время, за которое амплитуда колебаний убывает в 2 раза.

При малом затухании вдали от резонанса  $\beta \ll |\omega - \omega_0|$ , тогда  $\varphi_2 \approx \varphi_1 \approx 0$ ,

$$A = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad B = -\frac{f_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)} = -A. \quad (14.14)$$

Тогда

$$\alpha = A(\cos(\omega t) - e^{-\beta t} \cos(\omega_{\text{св}} t)). \quad (14.15)$$

На низких частотах  $\omega \ll \omega_{\text{св}}$ , и быстрая свободная составляющая модулирует вынужденную составляющую на частоте  $\omega$ , Рис. 14.4, а.

На высоких частотах  $\omega \gg \omega_{\text{св}}$ , Рис. 14.4, б.

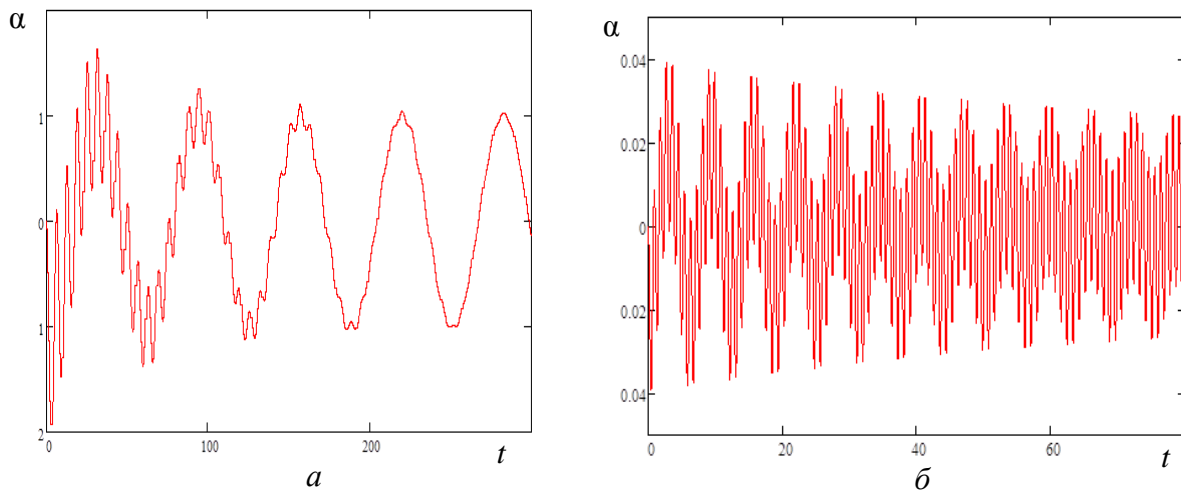


Рис. 14.4

При  $\omega = \omega_{\text{св}}$  получим  $B = -A$ ,  $\varphi_2 = \varphi_1$ ,

$$\alpha = A(1 - e^{-\beta t}) \sin(\omega_{\text{св}} t + \varphi_2). \quad (14.16)$$

Вид зависимости колебаний при возбуждении на частоте резонанса показан на рис. 14.5, а.

Вблизи резонанса происходит наложение колебаний с почти одинаковыми амплитудами и близкими частотами  $\omega$  и  $\omega_{\text{св}}$ , что приводит к возникновению биений, рис. 14.5, б.

$$\alpha(t) = -A \sin(\omega_{\text{св}} t) + A \sin(\omega t) = 2A \sin\left(\frac{\omega - \omega_{\text{св}}}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega_{\text{св}}}{2} t\right). \quad (14.17)$$

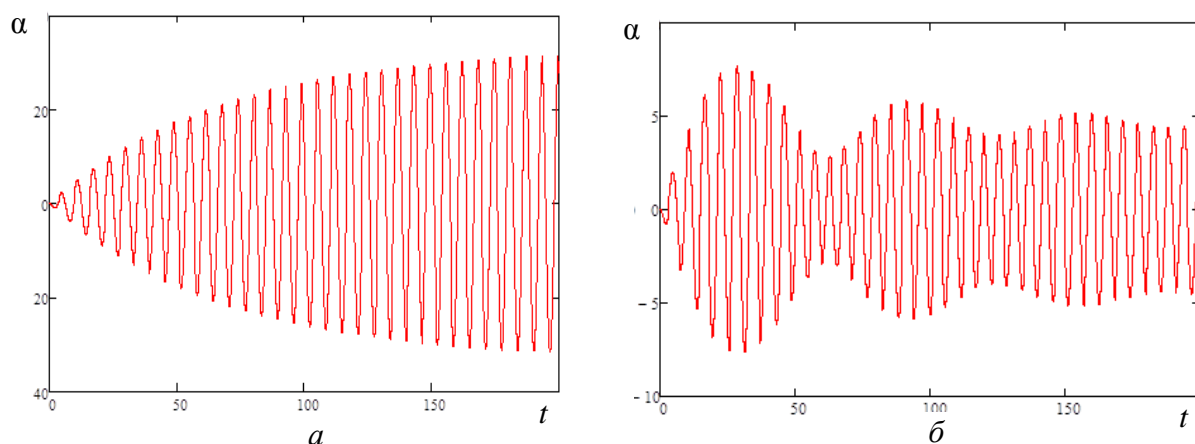


Рис. 14.5

## 14.2. Приборы и принадлежности

Схематическое изображение колебательной системы и конструкция системы передачи силового воздействия на маятник представлены на рис. 14.6 и 14.7. Физический маятник 1 представляет собой диск, закрепленный на стержне. Маятник подвешен на кронштейне с помощью легкой призмы 2, трение в которой мало. Верхний конец стержня маятника соединен с помощью эластичной резинки 3 с одной стороны с неподвижным креплением 4, с другой – с эксцентриком 5 электродвигателя 6.

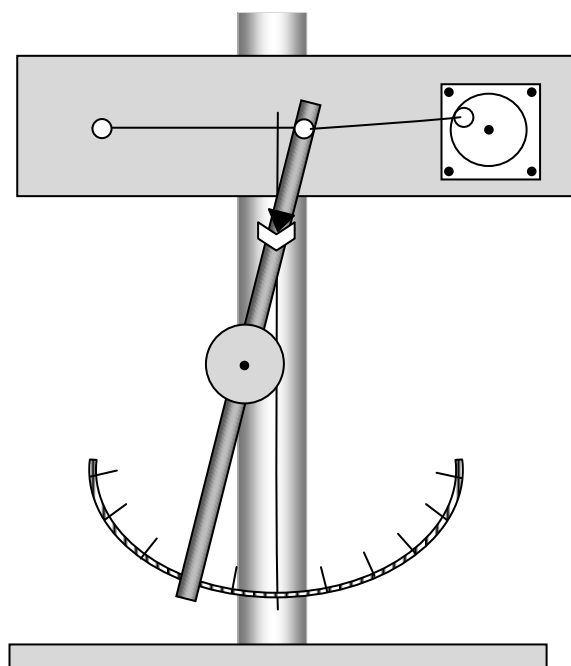


Рис. 14.6

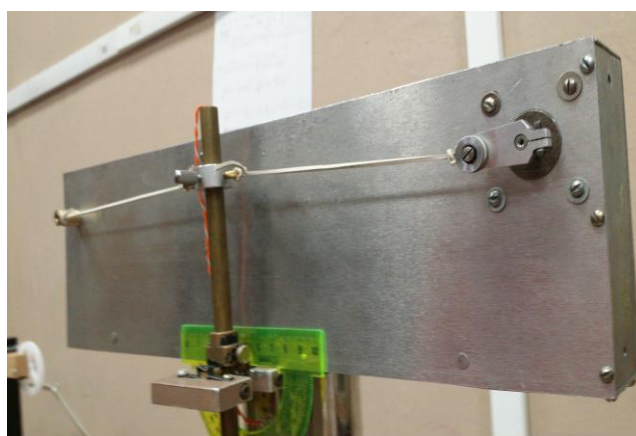


Рис. 14.7

Система управления шаговым электродвигателем позволяет регулировать частоту его вращения грубо с шагом 0.1 Гц и точно с шагом 0.02 Гц. В режим грубой настройки частоты (с шагом 0.1 Гц) система переходит при первом нажатии управляющей (красной) кнопки. При

этом двигатель останавливается. Выбор частоты производится кнопками вверх ( $\Delta$ ) и вниз ( $\nabla$ ). Повторное нажатие на управляющую кнопку переводит систему управления в режим тонкой подстройки частоты (с шагом 0.02 Гц). Третье нажатие на управляющую кнопку запускает вращение двигателя с выбранной частотой.

#### ***14.3. Указания по подготовке к работе***

На основе Указаний по выполнению наблюдений разработайте и занесите в протокол таблицу для записи результатов измерений.

#### ***14.4. Указания по проведению наблюдений***

1. Подвесьте маятник на призме (см. рис. 14.6). Отклоните маятник на угол, составляющий примерно  $10^\circ$ . Отпустите маятник и измерьте с помощью секундомера время, за которое маятник совершает  $n = 10$  полных колебаний. Запишите время колебаний  $t$  в таблицу протокола наблюдений. Повторите эти измерения 5 раз. Запишите приборную погрешность измерения времени в протокол.
2. Измерьте с помощью секундомера время, за которое амплитуда свободных колебаний маятника убывает в 2 раза. Начальное отклонение маятника не должно превышать  $20^\circ$ . Запишите время колебаний  $t_{1/2}$ . Повторите измерения 5 раз.
3. Включите электромотор. Снимите зависимость амплитуды колебаний маятника от частоты, изменяя частоту с шагом 0.1 Гц от 0.1 Гц до 1.9 Гц. Для установления стационарного режима вынужденных колебаний и затухания свободной составляющей измерение амплитуды на каждой выставленной частоте должно проводиться после прохождения не менее чем удвоенного времени затухания колебания  $t_{1/2}$ . Для сокращения времени переходного процесса можно слегка притормаживать вращение маятника пальцем. Запишите частоты и соответствующие им амплитуды колебаний.
4. Путем точной регулировки частоты (с точностью 0.02 Гц) определите и уточните резонансную частоту физического маятника.
5. Измерьте радиус шатуна  $R$ , расстояние от точки подвеса до центра тяжести маятника  $l_c$ , расстояние от точки подвеса до места прикрепления резинки  $b$ .

#### ***14.5. Задание по обработке результатов эксперимента***

1. Рассчитайте период свободных затухающих колебаний маятника и его погрешность.
2. Определите частоту свободных затухающих колебаний маятника  $\omega_{\text{св}}$ .
3. Определите коэффициент затухания колебаний  $\beta_1$  на основе времени  $t_{1/2}$  уменьшения амплитуды колебания в 2 раза.
4. Определите резонансную частоту вынужденных колебаний маятника  $\omega_p$ .
5. Постройте зависимость амплитуды колебаний маятника  $A$  от частоты вынуждающей силы  $\omega$ .
6. Определите добротность колебаний  $Q$ .
7. Определите коэффициент затухания колебаний  $\beta_2$  на основе найденных добротности  $Q$  и резонансной частоты  $\omega_p$ .
8. Определите коэффициент затухания колебаний  $\beta_3$  на основе известных резонансной частоте вынужденных колебаний маятника  $\omega_p$  и частоте свободных затухающих колебаний маятника  $\omega_{\text{св}}$ .
9. Сопоставьте полученные значения коэффициентов затухания колебаний.
10. Определите собственную частоту колебательной системы  $\omega_0$  на основе найденных в пп. 4, 7 и 8 значений коэффициентов затухания и выражений для частот  $\omega_p$  и  $\omega_{\text{св}}$ . Сопоставьте полученные значения.
11. Рассчитайте момент инерции физического маятника и коэффициент жесткости резинки.

#### ***14.6. Контрольные вопросы***

1. Дайте определение центра масс системы тел.
2. Напишите дифференциальные уравнения свободных и вынужденных колебаний исследуемого физического маятника.
3. Объясните математические предпосылки для записи решения уравнения вынужденных колебаний в виде суперпозиции свободных затухающих колебаний физического маятника и вынужденного движения.
4. Выведите выражения для амплитуды и начальной фазы вынужденной составляющей колебания (14.4) и (14.5).
5. Выведите выражения для резонансной частоты и амплитуды вынужденной составляющей колебания на резонансе (14.6) и (14.7).

6. Как определяется добротность колебаний?
7. Какие методы используются для экспериментального нахождения добротности?
8. Опишите особенности поведения вынужденной составляющей решения колебательной системы в области высоких, низких частот, и на резонансе.
9. Выведите выражение (14.10).
10. Определите амплитуду и начальную фазу затухающей составляющей колебания. Выведите выражения (14.13) и (14.14).
11. Опишите особенности поведения колебательной системы на начальной стадии колебаний в области высоких, низких частот, вблизи резонанса и на резонансе.
12. Смоделируйте с использованием математического пакета (Mathcad, Matlab, Wolfram Alpha, Scilab и др.) или табличного редактора (Calc, Excel и др.) временные зависимости угла отклонения маятника при различных соотношениях частоты вынуждающего воздействия и частоты свободных колебаний маятника. Сопоставьте полученные зависимости с наблюдениями.

## **Работа 15. (8) ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ВОЗДУХЕ**

*Цель работы:* определение скорости распространения звуковых колебаний в воздухе методом стоячих волн в резонаторе; построение амплитудно-частотной характеристики резонатора и определение его добротности.

*Приборы и принадлежности:* установка акустического резонанса, электронный осциллограф, звуковой генератор.

### ***15.1. Исследуемые закономерности***

Звуковые колебания в газе представляют собой периодическое чередование областей сжатия и разрежения, распространяющихся со скоростью, зависящей от его свойств. Газы в отличие от твёрдых тел не обладают сдвиговой жесткостью, поэтому в них возникают только продольные волны. В такой волне направление колебаний частиц среды происходит в направлении распространения волны.

Если сжатие и разрежение газа происходят быстро, то области сжатия и разрежения в газе не успевают обмениваться теплом. Такой процесс распро-



странения звука является адиабатическим; в этом случае скорость звука в газе рассчитывается по формуле

$$u = (\gamma p / \rho)^{1/2}, \quad (15.1)$$

где  $\gamma = C_p / C_V$  – показатель адиабаты, равный отношению теплоёмкостей газа в изобарном и изохорном процессах;  $p$  и  $\rho$  – давление и плотность газа.

Соотношение (15.1) может быть преобразовано при использовании уравнения состояния идеального газа  $pV = (m/\mu)RT$  к виду

$$u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (15.2)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  – температура газа;  $\mu$  – его молярная масса (для воздуха  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг / моль).

В более общем случае политропного процесса распространения звука его скорость  $u = \sqrt{nRT/\mu}$ , где  $n$  – показатель политропы (для изотермического процесса  $n = 1$ , для адиабатного  $n = \gamma$ ). Политропный процесс – процесс с постоянной теплоемкостью  $C$ , которая может быть рассчитана по известному

показателю политропы  $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$ , где  $C_V = iR / 2$  и  $C_p = C_V + R = (i + 2)R / 2$

– соответствующие молярные теплоемкости воздуха;  $i$  – число степеней свободы молекул газа. Из последнего выражения для теплоемкости политропического процесса получим  $C = C_V \left( \frac{n - \gamma}{n - 1} \right)$ , где  $\gamma = C_p / C_V = (i + 2) / i$  – показатель адиабаты. Воздух можно считать двухатомным газом, для которого  $i = 5$  и  $\gamma = 1.4$ .

Удобным методом измерения скорости звуковых волн в газе является метод, основанный на измерении длины волны  $\lambda$  бегущих звуковых волн, излучаемых источником. Если длина волны  $\lambda$ , определяемая как расстояние, проходимое волной за период колебаний, измерена экспериментально и известна частота  $\nu$  возбуждаемых источником звуковых волн, то скорость бегущей волны

$$u = \lambda \nu. \quad (15.3)$$

При интерференции двух встречных бегущих волн возникают стоячие звуковые волны, показанные на рис. 15.1 для различных моментов времени

$(t_1 < t_2 < t_3 < t_4)$ .

В данной работе суммируются прямая волна от источника звука и волна, отразившаяся от торца резонатора. Точки стоячей волны, в которых амплитуда колебаний максимальна, называются пучностями стоячей волны, а точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю, называются узлами стоячей волны. Расстояние между соседними узлами или пучностями называют длиной стоячей волны  $\lambda_{ст}$ . Она равна половине длины волны  $\lambda$  интерферирующих встречных бегущих волн:  $\lambda_{ст} = \lambda / 2$ .

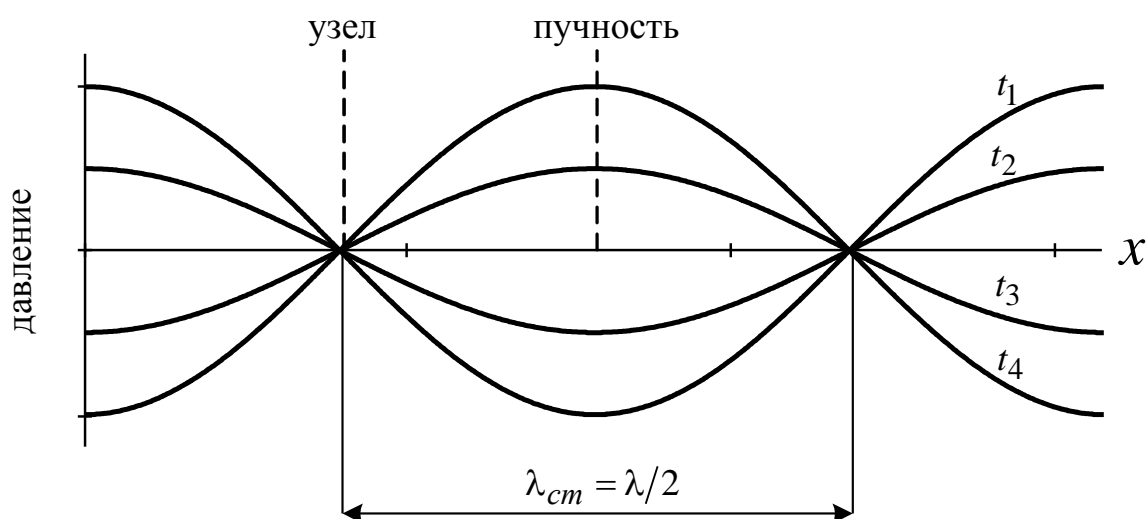


Рис. 15.1

Явление резонанса, при котором возникает стоячая волна с максимальной амплитудой, наблюдается при совпадении частоты излучения источника звуковой волны и собственной частоты колебаний резонатора. На длине резонатора при резонансе укладывается целое число полуволин

$$L_p = n \frac{\lambda_0}{2} + a, \quad (15.4)$$

где  $n$  – номер моды,  $\lambda_0$  – длина резонирующей волны. Параметр  $a = \lambda_0/4$ , если резонатор закрыт с одной стороны и полностью открыт с другой стороны;  $a = 0$ , если оба конца резонатора наглухо закрыты. Если же один конец резонатора закрыт частично, параметр  $a$  можно считать лежащим между 0 и  $\lambda_0/4$ . Подставляя (15.3) в (15.4), получим

$$L_p = \frac{nu}{2v_0} + a, \quad (15.5)$$

Для двух соседних максимумов амплитуды в зависимости от  $L_p$  имеем

$$\Delta L_p = \frac{u}{2\nu_0},$$

или

$$\nu_0 = \frac{u}{2\Delta L_p}. \quad (15.6)$$

Таким образом,

$$u = 2\nu_0\Delta L_p. \quad (15.7)$$

Явление резонанса резко выражено в том случае, если затухание колебаний в волне мало. В используемом в работе резонаторе затухание колебаний обусловлено неполным отражением звуковых волн от торца (поршня) резонатора за счет их частичного поглощения и потерями на излучение волн из резонатора в окружающую среду.

Характеристикой убыли энергии при затухании колебаний в волне служит добротность колебательной системы

$$Q = 2\pi W(t) / (W(t) - W(t+T)).$$

Знаменатель представляет убыль энергии волны за период колебаний  $T$ , отсчитываемый от момента времени  $t$ .

Можно показать, что

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0\tau}{2} = \pi\nu_0\tau, \quad (15.8)$$

где  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$  – циклическая частота;  $\tau = 1/\beta$  – время затухания колебаний в волне,  $\beta$  – коэффициент затухания.

Свойства колебательной системы можно изучать как во временной, так и в частотной областях. Во временной области исследуется зависимость уменьшения амплитуды и энергии колебаний волны во времени. В частотной области исследуется реакция (отклик) колебательной системы на внешнее (обычно гармоническое) воздействие. В этом случае исследуется зависимость амплитуды колебаний в системе (резонаторе) от частоты воздействующей на нее внешней периодической силы. Данная зависимость называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) системы.

Для многих резонансных систем, в частности и для используемого в работе резонатора, зависимость амплитуды колебаний в системе от частоты

внешнего периодического воздействия (АЧХ системы) при не слишком больших отклонениях частоты относительно резонанса может быть аппроксимирована функцией Лоренца, которая имеет вид

$$A(\omega) = A_0 / \left( 1 + ((\omega - \omega_0)/\beta)^2 \right)^{1/2},$$

где  $A_0$  – резонансная амплитуда, и представляет собой симметричную колоколообразную кривую с четко выраженным максимумом.

Если обозначить  $\Delta\nu_0$  – ширину резонансной кривой, которая определяется как разность двух частот  $\nu_2$  и  $\nu_1$  по обе стороны от резонансной частоты  $\nu_0$ , при которых амплитуда колебаний в резонаторе уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с амплитудой колебаний в максимуме кривой:  $A(\nu_{1,2}) = A_0/\sqrt{2}$ , то

$$A(\nu) = A_0 / \left( 1 + (2(\nu - \nu_0)/\Delta\nu_0)^2 \right)^{1/2}$$

Тогда коэффициент затухания может быть найден как  $\beta = \pi(\nu_2 - \nu_1)$ , а добротность резонатора по его АЧХ вычисляется по формуле

$$Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu_0} = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1}. \quad (15.9)$$

Коэффициент затухания  $\beta$  можно найти альтернативным способом. Для этого преобразуем формулу для зависимости амплитуды вблизи резонанса от частоты

$$\left( \frac{A_0}{A(\nu_p)} \right)^2 = 1 + \frac{4\pi^2}{\beta^2} (\nu - \nu_p)^2. \quad (15.10)$$

Строя зависимость  $\left( \frac{A_0}{A(\nu_p)} \right)^2$  от  $(\nu - \nu_p)^2$  и находя угловой коэффициент  $k$  полученной аппроксимирующей прямой получим

$$\beta = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}. \quad (15.11)$$

После этого добротность может быть найдена согласно (15.8).

## 15.2. Приборы и принадлежности

Работа выполняется на установке, схема которой приведена на рис. 15.2. На одном конце кварцевой трубы находится телефон Т, являющийся источником звука. Телефон соединен со звуковым генератором ЗГ. Колебания

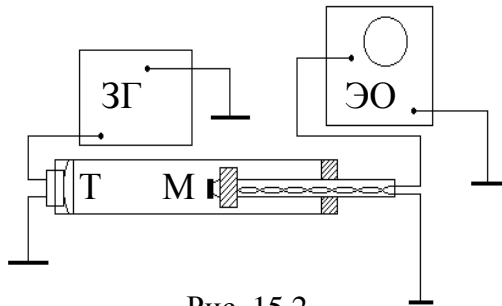


Рис. 15.2

мембраны телефона создают периодические сгущения и разрежения в прилегающем к ней слое воздуха, возбуждая акустическую волну.

Внутри трубы перемещается поршень с вмонтированным в него приемником – микрофоном М. Микрофон принимает звуковые колебания, преобразует их в электрические и передает на вход У электронного осциллографа ЭО. На экране осциллографа возникает синусоидальный сигнал, амплитуда которого зависит от частоты колебаний источника звука и длины резонатора, изменяющейся за счет перемещения отражающего торца (поршня) резонатора, прикрепленного к подвижному стержню.

При выполнении условия (15.4) наступает резонанс, при котором амплитуда наблюдаемых колебаний максимальна. Настройка на резонанс может быть осуществлена либо изменением длины воздушного столба в трубе резонатора (перемещением поршня), либо изменением частоты колебаний генератора. В работе для определения длины звуковой волны, испускаемой источником, и скорости звука в воздухе используется первый способ, а для определения добротности резонатора – первый и второй.

## 15.3. Указания по подготовке к работе

Занесите в протокол заготовки для записи однократно измеряемых в опыте величин, таблицу (табл. 15.1) для определения скорости звука в воз-  
 $v_0 =$  , Гц;  $t =$  , °С;  $T =$  , К;  $p =$  , Па

Таблица 15.1

| $i$        | 1 | ... | ... | ... | 10 |
|------------|---|-----|-----|-----|----|
| $L_1$ , см |   |     |     |     |    |
| $L_2$ , см |   |     |     |     |    |
| $L_3$ , см |   |     |     |     |    |

Таблица 15.2

| $i$      | -10 | ... | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... | 10 | $\theta$ |
|----------|-----|-----|----|----|----|---|---|---|---|-----|----|----------|
| $L$ , см |     |     |    |    |    |   |   |   |   |     |    |          |
| $A(v_0)$ |     |     |    |    |    |   |   |   |   |     |    |          |

Таблица 15.3

| $i$        | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\theta$ |
|------------|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|----------|
| $\nu$ , Гц |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |          |
| $A(\nu)$   |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |          |

духе и таблицы (табл. 15.2 и 15.3) для построения АЧХ резонатора и определения его добротности.

#### 15.4. Указания по проведению наблюдений

1. Включите генератор звуковых колебаний и установите на нем частоту, указанную на панели установки ( $\nu_0 \sim 1000$  Гц). Запишите установленное значение частоты и ее приборную погрешность  $\theta_\nu$ .
2. Включите осциллограф, и после появления на экране сигнала (синусоиды) установите удобный для наблюдения размер изображения (амплитуды сигнала). Для этого, перемещая поршень в резонаторе, убедитесь, что максимальная амплитуда синусоиды, высвечиваемой на экране осциллографа, не выходит за пределы экрана и не слишком мала.
3. Поршень с микрофоном придвиньте к телефону. Медленно удаляя микрофон от телефона, найдите положение, при котором на экране осциллографа наблюдается первый максимум амплитуды колебаний в стоячей волне. По измерительной линейке определите длину  $L_1$  резонатора (расстояние от телефона до микрофона). Продолжая перемещать поршень, найдите длины  $L_2$  и  $L_3$  резонатора для двух последующих резонансов. Полученные данные запишите в таблицу (табл. 15.1). Запишите в протокол приборную погрешность  $\theta_L$  определения положений максимумов.
4. Не меняя частоту генератора, установите микрофон в положение  $L_2$ . Сместив на небольшое расстояние в сторону уменьшения и в сторону увеличения микрофон, проведите измерения зависимости амплитуды звукового сигнала, генерируемого излучателем, помещенным в трубу, от его расстояния до приемника вблизи резонанса. Максимальное изменение как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения расстояния выбирайте таким образом, чтобы амплитуда уменьшилась по сравнению с резонансной амплитудой не ме-

нее чем в два раза. Количество замеренных точек должно быть достаточно для построения резонансной кривой, желательно не менее 10 в каждую сторону.

5. Не меняя частоту генератора, установите микрофон в положение  $L_2$ . Затем плавным изменением частоты уточните положение резонанса, добиваясь максимального значения амплитуды сигнала на экране осциллографа. Запишите значение резонансной частоты  $\nu_0$  и амплитуды колебаний  $A_0$  (в делениях сетки экрана осциллографа, условно в миллиметрах) в таблицу (табл. 15.3). Изменяя частоту генератора относительно  $\nu_0$  в сторону увеличения, а затем – уменьшения частоты, запишите соответствующие значения частот  $\nu_i$  и амплитуд колебаний  $A_{\nu}$  в таблицу (табл. 15.3). Максимальное изменение как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения частоты, выбирайте таким образом, чтобы амплитуда уменьшилась по сравнению с резонансной амплитудой не менее чем в два раза. Шаг изменения частоты выберите в соответствии с градуировкой прибора (частотомера). Запишите в протокол приборную погрешность определения частоты  $\theta_{\nu}$ .

6. Запишите в протокол определенную по термометру температуру  $T$ , а по барометру – давление  $p$  воздуха в лаборатории.

### **15.5. Задание по обработке результатов эксперимента**

1. Вычислите для каждого из трех резонансов ( $n = 1, 2, 3$ ) среднее значение положений  $\bar{L}_n$  каждого резонанса, скорости звука  $u_n = \lambda_n \nu_0 = 2\bar{L}_n \nu_0 / n$  и ее приборных погрешностей  $\theta_{u_n}$ .
2. По выборке  $u_n$  объема  $n = 3$  и приборным погрешностям  $\theta_{u_n}$  вычислите скорость звука  $u = \bar{u} \pm \Delta \bar{u}$  с  $P = 95\%$ .
3. По экспериментально полученному значению скорости звука  $\bar{u}$  определите показатель политропного процесса  $n$  и его теплоемкость  $c$ . Сопоставьте показатель политропы  $n$  с показателем адиабаты для двухатомного газа  $\gamma = 1.4$  и дайте характеристику процесса распространения звука в воздухе.
4. Используя данные таблицы (табл. 15.1) и экспериментально определенное значение показателя политропы  $n$ , рассчитайте по формуле скорости звука в газах, а также по уравнению Клапейрона  $p = (\rho / \mu) RT$  плотность возду-

ха в лаборатории и сопоставьте эти значения друг с другом и с табличным значением плотности воздуха (при нормальных условиях  $\rho = 1.29 \text{ кг/м}^3$ ).

5. Постройте, используя таблицу (табл. 15.3), экспериментальную резонансную кривую (АЧХ резонатора)  $A(\nu_0)$ , где  $\nu_0$  определяется согласно (15.6). Определите ее ширину  $\Delta\nu_0$  на уровне  $A_0/\sqrt{2}$ .
6. Постройте, используя таблицу (табл. 15.4), экспериментальную резонансную кривую (АЧХ резонатора)  $A(\nu)$ . Определите ее ширину  $\Delta\nu_0$  на уровне  $A_0/\sqrt{2}$ . Сопоставьте полученные результаты.
7. Рассчитайте добротность резонатора по формуле (15.9).
8. Постройте на миллиметровой бумаге зависимость  $\left(\frac{A_0}{A(\nu_0)}\right)^2$  от  $(\nu - \nu_p)^2$  и найдите угловой коэффициент  $k$  полученной аппроксимирующей прямой.
9. Рассчитайте коэффициент затухания по формуле (15.11) и добротность резонатора по формуле (15.7).

### ***15.6. Контрольные вопросы***

1. Как направлена колебательная скорость молекул воздуха в акустической волне по отношению к направлению ее распространения?
2. Какие волны называются стоячими? Как образуются стоячие волны?
3. Дайте определение длины бегущей и стоячей волн. Как они взаимосвязаны друг с другом?
4. Свободными или вынужденными являются колебания, возникающие в резонаторе при условиях, заданных в работе? В чем заключается явление резонанса? При каких условиях (длинах резонатора) оно наблюдается?
5. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
6. Какие колебания называются затухающими? Назовите физические величины, характеризующие затухание колебаний. Каков их физический смысл?
7. Дайте определение добротности колебательной системы. Как она вычисляется по резонансной кривой (АЧХ), описываемой функцией Лоренца?



8. Изобразите качественно график зависимости скорости звука от температуры.
9. Что такое степени свободы молекул газа? Как вычисляются полные степени свободы молекул газа с учетом поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы молекулы? Рассчитайте полное число степеней свободы для молекул  $O_2$  и  $CO_2$  с учетом и без учета их колебательных степеней свободы.
10. Какие процессы называют политропными? Как вычисляется теплоемкость политропного процесса?
11. Какой процесс называют адиабатным? Что такое показатель адиабаты, и чему он равен для двухатомного газа?
12. Как связаны между собой молярные и удельные теплоемкости идеального газа в изобарном и в изохорном процессах (формула Майера)? Каковы размерности молярной и удельной теплоемкостей?

## Работа 16. (9) ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ

*Цель работы:* исследование политропно-изохорно-политропно-изобарического ( $nVnp$ ) цикла.

### 16.1. Приборы и принадлежности

Используемая в работе установка изображена на рис. 16.1. Баллон А объёмом  $V_1$  может сообщаться либо с насосом Н, либо с атмосферой. Атмосферное давление и температура могут быть измерены с помощью лабораторных барометра и термометра. Внутри баллона помещён манометр М, измеряющий избыточное давление. Одно деление шкалы равно 4 мм вод. ст., что составляет 40 Па. Рабочим газом является воздух. Микрокомпрессор позволяет осуществить нагнетание воздуха в баллон.

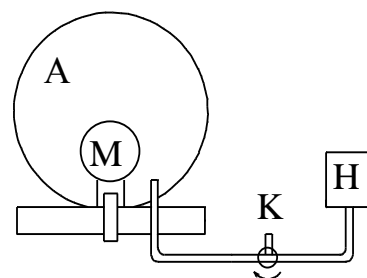


Рис. 16.1

### 16.2. Исследуемые закономерности

Диаграмма исследуемого цикла в координатах  $(p, V)$  для постоянного количества вещества  $\nu$ , содержащегося в баллоне после накачивания, показана на рис. 16.2. В исходном состоянии параметры состояния воздуха следующие:

щие: внешнее давление  $p_0$ , объем  $V_0$  и комнатная температура  $T_0$  (на рис. 16.2 точка 0). Вначале насосом в баллон накачивают воздух до давления

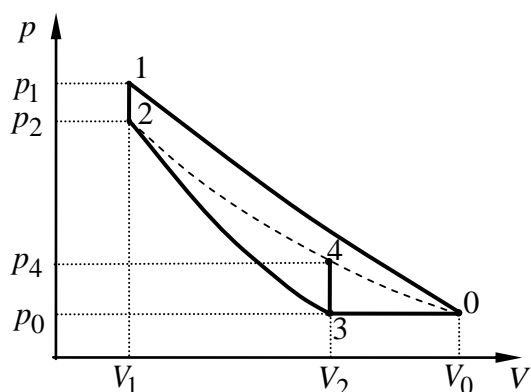


Рис. 16.2

$p_1 = p_0 + \Delta p_1$  (на рис. 16.2 точка 1 ( $p_1; V_1$ )). При сжатии воздух нагревается, поэтому после закрытия крана по прошествии некоторого времени температура воздуха в баллоне сравнивается с температурой окружающей среды (при этом прекращается движение стрелки манометра) и давление воздуха в баллоне становится  $p_2 = p_0 + \Delta p_2$ .

Затем воздух выпускают через кран К в атмосферу в течение нескольких секунд. Когда стрелка манометра приблизится к нулю, кран закрывают. В этот момент давление воздуха в баллоне становится  $p_0$  (на рис. 16.2 точка 3 ( $p_0; V_2$ )). Изменение параметров состояния воздуха в процессе расширения отражает линия 2–3 на рис. 16.2, которая является политропой.

После закрытия крана охлажденный при расширении воздух изохорически нагревается до температуры окружающей среды в результате теплообмена с ней. Изменение параметров состояния воздуха отражает линия 3–4 на рис. 16.2, которая является изохорой. Температура воздуха в баллоне становится равной температуре в точке 2 ( $T_4 = T_2 = T_0$ ), следовательно, точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

После выравнивания температур давление в баллоне изменится на  $\Delta p_4$  и станет  $p_4 = p_0 + \Delta p_4$  (на рис. 16.2 ( $p_4; V_2$ )). Таким образом,  $\Delta p_2$  и  $\Delta p_4$  – это изменения давления на участках 0–2 и 3–4.

Повторное накачивание воздуха из точки 4 на рис. 16.2 до давления  $p_1$  не возвращает рабочее вещество в состояние точки 1, поскольку температура воздуха в баллоне после накачивания будет отличаться от температуры  $T_1$  в точке 1 и, следовательно, изменится количество вещества  $\nu$ . Для точного повторения цикла необходимо открыть кран К на атмосферу и дождаться выравнивания температуры в баллоне с температурой окружающей среды. При этом

произойдет возврат системы в точку 0 на рис. 16.2. После этого цикл измерений можно повторять.

По измеренным давлениям  $p_0, p_1, p_2, p_4$ , температуре  $T_0$  и объему баллона  $V_1$ , записывая уравнения Менделеева–Клапейрона для точек 0, 1, 2, 3, 4 на рис. 16.2 можно найти количество вещества  $\nu$ , объемы  $V_0$  и  $V_2$ , и температуры  $T_1$  и  $T_3$ .

### Определение показателя политропы

Первое начало термодинамики формулируется следующим образом: сообщенное системе количество теплоты  $\delta Q$  расходуется на увеличение внутренней энергии  $dU$  системы и совершение системой работы  $\delta A$ :

$$dQ = dU + dA = C_V dT + p dV,$$

где  $C_V$  – теплоёмкость газа в изохорном процессе.

Процесс расширения воздуха на участке 2–3 (см. рис. 16.2) является политропным, в котором теплоёмкость газа  $C$  остаётся постоянной. Первое начало термодинамики для политропного процесса имеет вид

$$C dT = C_V dT + p dV \quad \text{или} \quad C'_V dT + p dV = 0,$$

где  $C$  – теплоемкость воздуха в политропном процессе;  $C'_V = C_V - C$ . Из этого соотношения с помощью уравнения состояния идеального газа можно получить уравнение Пуассона для политропного процесса  $TV^{n-1} = \text{const}$  или  $pV^n = \text{const}$ , где  $n$  – показатель политропы:

$$n = (C_p - C) / (C_V - C).$$

Здесь  $C_p$  и  $C_V$  – теплоемкости газа в изобарном и в изохорном процессах.

Показатель политропы  $n$  может быть определен экспериментально. Из уравнения Пуассона на участке 2–3 и полученной ранее связи между объемами  $V_2$  и  $V_1$  можно получить

$$n_{23} = \frac{\ln(p_2/p_0)}{\ln(p_2/p_4)}, \quad (16.1)$$

или, учитывая малость изменений давления по сравнению с атмосферным давлением  $p_0$ ,

$$n_{23} \approx \frac{\Delta p_2}{\Delta p_2 - \Delta p_4}. \quad (16.2)$$

Зная  $n$ , можно определить теплоемкость газа в политропном процессе

$$C = C_V \left( \frac{n - \gamma}{n - 1} \right), \quad (16.3)$$

где  $\gamma = C_p / C_V$  показатель адиабаты, равный отношению теплоемкостей газа в изобарном и в изохорном процессах, ( $C_p = C_V + \nu R = (i + 2)\nu R/2$ ,  $C_V = i\nu R/2$ ,  $i$  число степеней свободы молекул газа,  $R = 8.31$  Дж/(К·моль,  $\nu$  – количество вещества) – универсальная газовая постоянная). Воздух можно считать двухатомным газом, для которого при небольших температурах  $i = 5$  и  $\gamma = (i + 2) / i = 1.4$ .

На участке 2–3 воздух охлаждается, а тепло через стеклянную колбу поступает в систему ( $dQ > 0, dT < 0$ ), поэтому теплоемкость газа в политропном процессе  $C = dQ/dT$  – отрицательна. Это означает согласно формуле (16.3), что на участке 2–3 показатель политропы  $1 < n < \gamma$ .

Аналогично аппроксимируя участок 0–1 политропным процессом, можно найти

$$n_{01} = \frac{\ln(p_1/p_0)}{\ln(p_2/p_0)} \approx \frac{\Delta p_1}{\Delta p_2}. \quad (16.4)$$

### Цикл с изменяющимся количеством вещества в объеме баллона

Представленный на рис. 16.2 цикл реализуется с фиксированным количеством вещества воздуха  $\nu$ . Вместе с тем, если рассмотреть баллон с неизменным объемом  $V_1$ , количество вещества в нем будет переменным. Выведем уравнение политропического процесса для изменяющегося количества вещества. Для этого запишем уравнение Пуассона для политропического процесса расширения газа при фиксированном количестве вещества  $\nu$  и два уравнения Менделеева–Клапейрона для полного объема после расширения  $V$  и для объема  $V_1$  и количества вещества  $\nu_1$  газа оставшегося в сосуде.

$$p_1 V_1^n = p V^n, \quad (16.5)$$

$$pV = \nu RT, \quad pV_1 = \nu_1 RT_1. \quad (16.6)$$

Подставляя (16.6) в (16.5), получим

$$\frac{p_1}{\nu_1^n} = \frac{p}{\nu^n}. \quad (16.7)$$

Полученное соотношение (16.7) позволяет по измеренным давлениям найти количества вещества в каждой из точек цикла и построить цикл в координатах  $p(v)$ .

### Расчет внутренней энергии, работы и энтропии

Так как в цикле и в изотермическом процессе  $\Delta U = \Delta U_{23} + \Delta U_{34} + \Delta U_{42} = 0$  и  $\Delta U_{42} = 0$ , то изменения внутренней энергии газа в политропном процессе  $\Delta U_{23}$  и в изохорном процессе  $\Delta U_{34}$  одинаковы по значению и противоположны по знаку. Тогда

$$\Delta U_{23} = C_V(T_3 - T_0).$$

Работа расширения (сжатия) газа в политропическом  $A_{23}$  и в изотермическом  $A_{24}$  процессах может быть рассчитана по формулам:

$$A_{23} = \frac{p_2 V_1 - p_0 V_2}{n - 1}, \quad (16.5)$$

$$A_{24} = \nu R T_0 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (16.6)$$

Количество теплоты в каждом из входящих в цикл процессов может быть найдено как

$$\Delta Q = C \Delta T, \quad (16.7)$$

где  $C$  – теплоемкость соответствующего процесса.

*Расчет холодильного коэффициента.* Цикл, изучаемый в данной работе, является холодильным (ориентирован против часовой стрелки). Его эффективность принято характеризовать холодильным коэффициентом  $\varepsilon$ , который определяется как отношение теплоты, отнятой от охлаждаемого газа  $\Delta Q_-$ , к затраченной в цикле работе  $A$ .

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q_-}{A} = \frac{\Delta Q_-}{\sum_i \Delta Q_i}. \quad (16.8)$$

*Расчет изменения энтропии.* Функция состояния, дифференциалом которой является отношение  $\delta Q / T$ , называется энтропией:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Для политропического процесса

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = C \int_1^2 \frac{dT}{T} = C \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad (16.9)$$

где  $C$  – теплоемкость газа, зависящая от типа политропного процесса (адиабатный, изохорный, изобарный и т. п.). Отметим, что данное выражение справедливо лишь для обратимых процессов, процессов, которые могут быть проведены в обратном направлении через те же промежуточные состояния, что и при прямом процессе; при этом тепловое состояние окружающей среды не изменяется (процесс без теплотерь).

Для изотермического процесса (на участке 4–2) выражение (16.8) приводит к неопределенности и целесообразно находить изменение энтропии как

$$\Delta S_{24} = \int_2^4 \frac{pdV}{T} = \nu R \ln \frac{V_1}{V_2}. \quad (16.10)$$

### 16.3. Указания по подготовке к работе

Занесите в бланк протокола заготовку для записи однократно измеряемых в опыте величин и таблицу (табл. 16.1) для определения показателей политропы.

$p_0 =$  , Па

$V_1 =$  , л

$t_0 =$  , °C

$T_0 =$  , К

Таблица 14.1

|              | 1 | 2 | ... | 5 |
|--------------|---|---|-----|---|
| $\Delta p_1$ |   |   |     |   |
| $\Delta p_2$ |   |   |     |   |
| $\Delta p_4$ |   |   |     |   |

### 16.4. Указания по проведению наблюдений

1. Откройте кран на атмосферу и, когда стрелка манометра установится на нуле, закройте его.
2. Откройте кран и, закрыв отверстие патрубка пальцем, нажмите кнопку насоса и накачайте в баллон воздух до давления 0.8 ... 0.9 предельного по шкале манометра, после чего закройте кран. Запишите избыточное давление  $\Delta p_1$ . Когда воздух в баллоне охладится до комнатной температуры (стрелка манометра остановится), запишите в таблицу установившееся избыточное давление  $\Delta p_2$ .

3. Откройте кран на атмосферу и, как только избыточное давление в баллоне упадёт до нуля, закройте кран. Когда воздух в баллоне нагреется до комнатной температуры (перестанет увеличиваться давление в баллоне), запишите значение установившегося избыточного давления  $\Delta p_4$  в таблицу протокола.
4. Действия, описанные в пп. 1, 2, выполните 5 раз.
5. По барометру и по термометру, имеющимся в лаборатории, измерьте атмосферное давление  $p_0$  и температуру воздуха  $T_0$ . Объём баллона  $V_1$  указан на панели установки. Все измеренные величины запишите в протокол.

### ***16.5. Задание по обработке результатов эксперимента***

1. Используя данные табл. 16.2, рассчитайте в делениях шкалы манометра избыточные давления  $\Delta p_1 = \Delta \bar{p}_1 \pm \Delta(\Delta \bar{p}_1)$ ,  $\Delta p_2 = \Delta \bar{p}_2 \pm \Delta(\Delta \bar{p}_2)$ , и  $\Delta p_4 = \Delta \bar{p}_4 \pm \Delta(\Delta \bar{p}_4)$  с  $P = 95\%$ .
2. Выразите избыточные давления  $\Delta \bar{p}_1$ ,  $\Delta \bar{p}_2$  и  $\Delta \bar{p}_4$  в Паскалях, а комнатную температуру  $T_0$  в Кельвинах (одно деление шкалы манометра равно 40 Па). Рассчитайте давления  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_4$ , выразив их в Паскалях.
3. По измеренным давлениям  $p_0, p_1, p_2, p_4$ , температуре  $T_0$  и объёму баллона  $V_1$  рассчитайте количество вещества  $\nu$ , объёмы  $V_0$  и  $V_2$ , и температуры  $T_1$  и  $T_3$  в точках 0, 1, 2, 3, 4 на рис. 16.2, используя уравнения Менделеева–Клапейрона и политропического процессов.
4. Выведите выражения (16.1), (16.2) и (16.4), приведите вывод в отчете.
5. Рассчитайте показатель политропы  $n_{23} = \bar{n}_{23} \pm \Delta \bar{n}_{23}$  с  $P = 95\%$  на участке 2–3 цикла по формулам (16.1) и (16.2). Найдите относительную погрешность при применении упрощенной формулы.
6. Рассчитайте показатель политропы  $n_{01} = \bar{n}_{01} \pm \Delta \bar{n}_{01}$  с  $P = 95\%$  на участке 0–1 цикла по формулам (16.4). Найдите относительную погрешность при применении упрощенной формулы.
7. Постройте исследуемый цикл 0-1-2-3-4-0 в координатах  $(p, V)$  на миллиметровой бумаге.

8. Рассчитайте изменения внутренней энергии, величину работы газа и поглощаемое (отдаваемое) им количество теплоты для всех процессов цикла.
9. Рассчитайте холодильный коэффициент для цикла  $0-1-2-3-0$ . Сравните значения холодильных коэффициентов, полученные расчетным путем, с холодильным коэффициентом обратимого цикла Карно, построенного в пределах тех же максимальных и минимальных температур цикла, т. е.  $T_1$  и  $T_3$  соответственно.
10. Используя соотношение (16.7), по измеренным давлениям найдите количества вещества в каждой из точек цикла и постройте цикл на миллиметровой бумаге в координатах  $p(v)$ .
11. Рассчитайте мольную теплоемкость  $C_{\mu V}$  воздуха при постоянном объеме, а по формуле (16.3) – его мольную теплоёмкость  $C_{\mu}$  в политропных процессах.
12. Рассчитайте изменение энтропии всех процессов в цикле.
13. Сделайте выводы по проделанной работе.

### ***16.6. Контрольные вопросы***

1. Какой газ называют идеальным?
2. Дайте определение степеней свободы молекул газа (поступательных, вращательных и колебательных). Как рассчитываются полные степени свободы молекул газа и чему они равны при невысоких температурах для одноатомного, двухатомного и многоатомного газов? Рассчитайте (с учетом колебательных степеней свободы) полное число степеней свободы молекул  $O_2$  и  $CO_2$ .
3. Какие циклы называют тепловыми, а какие – холодильными? Какими параметрами принято характеризовать эффективность этих циклов?
4. Что такое состояние вещества? Какие величины называют параметрами состояния? Напишите уравнение состояния идеального газа.
5. Дайте определение термодинамических функций: работы газа  $A$ , его внутренней энергии  $U$ , количества теплоты  $Q$ , отдаваемой (получаемой) газом, энтропии  $S$ . Какие из этих функций являются функциями состояния, а какие – функциями процесса? Чему равно изменение функций состояния в цикле?



6. Какие процессы называют политропными? Дайте определение показателя политропы. Чему равны показатели политропы для изохорного, изобарного, изотермического и адиабатного процессов?
7. Как экспериментально определяется показатель политропы в данной работе? Докажите формулу, по которой он рассчитывается.
8. Сформулируйте объединенный газовый закон и, исходя из него, напишите уравнения изохоры, изобары и изотермы.
9. Сформулируйте первое начало термодинамики. Какой вид оно имеет для каждой из ветвей цикла, а также всего цикла? Напишите первое начало для изобарного, изохорного, изотермического и адиабатного процессов.
10. Дайте определение удельной и мольной теплоемкостей вещества. Как они взаимосвязаны друг с другом? В каких единицах измеряются?
11. Как можно вычислить теплоемкость идеального газа в произвольном политропном процессе через показатель политропы? Докажите эту формулу.
12. Объясните, почему теплоемкость воздуха в политропном процессе в данной работе отрицательна?
13. Напишите уравнение Пуассона в переменных  $(p, V)$ ,  $(p, T)$  и  $(V, T)$ .
14. Дайте определение холодильного коэффициента. Как он вычисляется в цикле, изучаемом в данной работе?
15. Как соотносятся холодильные коэффициенты  $nVT$ - и  $SVT$ - циклов? Какой из них больше, и почему?
16. Покажите, что холодильный коэффициент (ХК)  $\varepsilon$  холодильника и КПД  $\eta$  тепловой машины, работающих по взаимно обратным циклам, связаны соотношением  $\varepsilon = 1/\eta - 1$ .
17. В каких интервалах изменяются ХК  $\varepsilon$  и КПД  $\eta$ ? Может ли тепловая машина с высоким КПД, если ее цикл обратить, работать как хороший холодильник, и наоборот?
18. Дайте термодинамическое и статистическое (формула Больцмана) определения энтропии. Как можно вычислить ее изменение в произвольном политропном процессе?
19. Какие формулировки второго начала термодинамики вам известны? Дайте энтропийную формулировку второго начала.

## Работа 17. (10) ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

*Цель работы:* изучение явлений переноса в газе; определение коэффициентов диффузии и вязкости воздуха, длины свободного пробега и эффективного диаметра его молекул.

*Приборы и принадлежности:* прибор для измерения объемной скорости истечения газа из трубки.

### 17.1. Исследуемые закономерности

*Явления переноса.* Хаотическое движение молекул в газе приводит к тому, что в объеме газа поддерживается равновесное состояние, которое характеризуется постоянством его параметров состояния и концентрации молекул во всем объеме.

При нарушении равновесия в газе хаотическое движение молекул приводит к возникновению макроскопических потоков, стремящихся восстановить нарушенное равновесное состояние. Явления, возникающие при протекании этих процессов, называются явлениями переноса.

К явлениям переноса относят диффузию, внутреннее трение (вязкость), теплопроводность. В данной работе исследуются первые два явления.

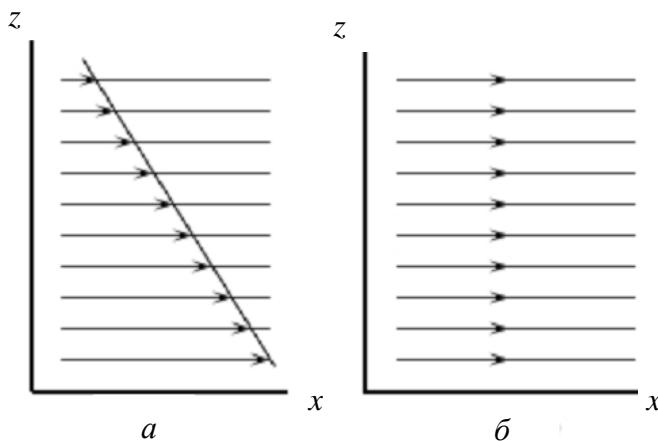


Рис. 17.1

*Внутреннее трение* – это явление, обусловленное переносом импульса молекул. Пусть при течении газа его слои движутся параллельно друг другу в направлении оси  $x$  с различной скоростью  $v_x(z)$  (рис. 17.1, а). Тогда в направлении, перпендикулярном скорости течения газа, будет происходить перенос импульса от молекул, находящихся в слоях,

движущихся с большей скоростью, к молекулам, находящимся в слоях, движущихся с меньшей скоростью. Это проявляется как трение, возникающее между слоями газа. В результате скорости движения слоев газа выравниваются (рис. 17.1, б). Сила трения, возникающая между слоями газа, определяется как

$$F_{\text{тр}} = -\eta \frac{dv}{dz} S,$$

где  $\eta$  – коэффициент внутреннего трения (вязкости);  $v$  – скорость отдельных слоев газа;  $dv/dz$  – градиент скорости слоев газа в направлении, перпендикулярном к поверхности, разделяющей слои (в направлении оси  $z$  перпендикулярной скорости слоев  $v$ );  $S$  – площадь соприкасающихся слоев.

*Течение газа в узкой цилиндрической трубке.* Пусть газ течет в трубке с радиусом  $a$  и длиной  $l$  ( $l \gg a$ ) под действием разности давлений  $\Delta p$  на концах трубки (рис. 17.2).

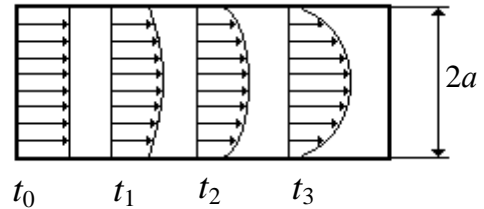


Рис. 17.2

В установившемся режиме ( $t > t_3$ ) изменение скорости течения газа по сечению трубки описывается параболической зависимостью

$$v_x(r) = 2\bar{v}_x \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right),$$

где  $r$  – расстояние, отсчитываемое от оси трубки;  $\bar{v}_x$  – средняя по сечению скорость течения газа (ось  $x$  направлена по направлению скорости слоев газа). Вблизи стенок трубки при  $r = a$  градиент скорости равен  $\frac{dv_x}{dr} = \frac{4\bar{v}_x}{a}$ .

Учитывая, что сила трения газа о стенки цилиндрической трубки  $F_{\text{тр}} = -\eta \frac{4\bar{v}_x}{a} 2\pi a l$  (где  $S_{\text{б}} = 2\pi a l$  – площадь боковой поверхности трубки),

уравновешивает внешнюю силу, действующую на газ в трубке,  $F = \Delta p \pi a^2$ , (здесь  $S_{\text{с}} = \pi a^2$  – площадь сечения трубки), получим выражение для средней скорости слоев газа:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta p a^2}{8\eta l}.$$

Это выражение называется формулой Пуазейля. В данной работе измеряется расход газа  $Q = \Delta V / \Delta t$ , определяемый как объем  $\Delta V$  газа, вытекающий из трубки за некоторый промежуток времени  $\Delta t$ . Расход газа связан со

средней скоростью  $\bar{v}_x$  соотношением  $Q = \rho a^2 \bar{v}_x$ , так что средняя скорость слоев газа по сечению трубы

$$\bar{v}_x = \Delta V / (\Delta t \pi a^2).$$

Приравняв полученные выражения для  $\bar{v}_x$ , получим формулу для расчета коэффициента вязкости газа

$$\eta = \frac{\pi a^4}{8l} \frac{\Delta p \Delta t}{\Delta V}.$$

Диффузия – это явление, обусловленное переносом массы молекул. Если различные области занимаемого газом объема различаются концентрацией молекул, то в газе возникают макроскопические потоки молекул, стремящиеся выровнять их концентрацию. Процесс диффузии описывается законом Фика

$$m = -DS \, dp/dz,$$

где  $m$  – масса газа, переносимая через площадь поверхности  $S$  в единицу времени;  $D$  – коэффициент диффузии;  $dp/dz$  – градиент плотности газа в направлении переноса массы газа.

*Молекулярно-кинетические соотношения.* Кинетические коэффициенты  $D$  и  $\eta$  зависят от средней скорости теплового движения  $\bar{u} = (8RT/\pi\mu)^{1/2}$  и средней длины свободного пробега  $\lambda = (\sqrt{2}\pi d^2 n)^{-1}$  молекул:

$$D = \frac{1}{3} \bar{u} \lambda; \quad \eta = \frac{1}{3} \rho \bar{u} \lambda; \quad \eta = D\rho.$$

В формулах используются следующие обозначения:  $T$  – температура газа;  $R = 8.31$  Дж/(К·моль) – универсальная газовая постоянная;  $\rho$  – плотность газа;  $\mu$  – его молярная масса;  $d$  – газокINETический, или эффективный диаметр молекул;  $n$  – концентрация молекул газа ( $n = \rho N_A / \mu$ ,  $N_A$  – число Авогадро).

## 17.2. Приборы и принадлежности

Прибор для измерения объемной скорости течения газа  $Q = \Delta V / \Delta t$  (рис. 17.3) состоит из сосуда 1 с исследуемым газом и сосуда 2, заполненного водой и присоединенного к сосуду 1 гибкой трубкой. Давление в сосуде 1 регу-

лируется перемещением по вертикали открытого сосуда 2 и измеряется U-образным манометром 3 (1 мм вод. ст.  $\approx 10$  Па). Сосуд 1 сообщается с атмосферой через кран 4 и узкую трубку 5. Положение уровня жидкости и изменение объема газа в сосуде 1 определяются по шкале 6.

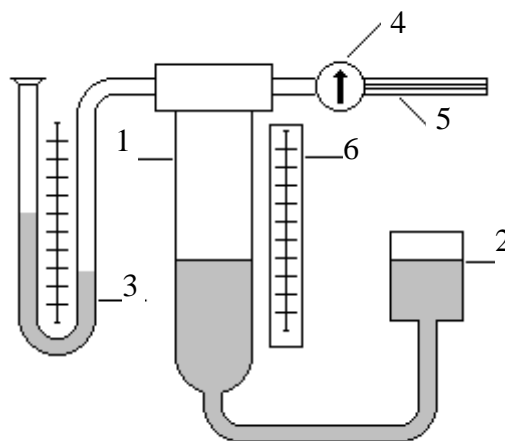


Рис. 17.3

### 17.3. Указания по подготовке к работе

Занесите в бланк протокола таблицу 17.1 для записи однократно измеряемых в опыте величин и таблицу 17.2 по определению вязкости  $\eta$  воздуха.

### 17.4. Указания по проведению наблюдений

1. Запишите в таблицу (табл. 17.1) протокола наблюдений с панели установки диаметр  $2a$  и длину  $l$  капилляра, а по термометру и барометру, температуру  $T$  и давление  $p$  воздуха в лаборатории.
2. Соедините измерительную установку с атмосферой, открыв кран 4 (см. рис. 17.3). Опустите сосуд 2 в нижнее положение. Когда жидкость в обоих коленях манометра 3 установится на одном уровне, закройте кран.

Таблица 17.1

| $2a$ , мм | $l$ , см | $t_1$ , °C | $T_1$ , K | $p$ , Па |
|-----------|----------|------------|-----------|----------|
|           |          |            |           |          |

3. Поднимите сосуд 2 на такую высоту, чтобы манометр 3 показывал разность давлений  $\Delta p \approx 500$  Па (1 мм вод. ст.  $\approx 10$  Па). Запишите в таблицу (табл. 17.2) значение  $\Delta p$  и положение  $n_0$  уровня жидкости в сосуде 1, определенное по шкале 6.

Таблица 17.2

| параметр     | 1 | ... | 5 |
|--------------|---|-----|---|
| $\Delta p$   |   |     |   |
| $n_{0i}$     |   |     |   |
| $n_i$        |   |     |   |
| $\Delta t_i$ |   |     |   |

4. Откройте кран 4, одновременно включив секундомер, и, поднимая сосуд 2, поддерживайте постоянное значение разности давлений  $\Delta p$  по манометру 3.
5. Когда объем жидкости в сосуде 1 увеличится на  $(5-10)$  см<sup>3</sup>, закройте кран и остановите секундомер. Запишите в таблицу (табл. 17.2) конечное положение  $n_i$  уровня жидкости в сосуде 1 и по секундомеру время  $\Delta t$  тече-

ния газа. Разность между значениями положений уровней жидкости численно равна объему  $\Delta V$ , см<sup>3</sup> протекающего газа ( $\Delta V = n_l - n_0$ ).

- Повторите измерения (пп. 2 – 5) пять раз при различных значениях разности давлений  $\Delta p$ , изменяя ее с выбранным шагом 50...100 Па (по указанию преподавателя).

### **17.5. Задание по обработке результатов эксперимента**

- Используя таблицу (табл. 17.2), найдите вязкость воздуха  $\eta = \bar{\eta} \pm \overline{\Delta\eta}$  выборочным методом с  $P = 95\%$ .
- Учитывая, что плотность воздуха при нормальных условиях  $\rho = 1.29$  кг/м<sup>3</sup>, вычислите методом переноса погрешностей значение коэффициента диффузии воздуха  $D = \bar{D} \pm \overline{\Delta D}$  с  $P = 95\%$ .
- По известному из опыта значению вязкости  $\bar{\eta}$  воздуха оцените среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  его молекул и газокинетический диаметр  $d$  молекул воздуха (молярная масса воздуха  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль).
- Рассчитайте теплопроводность воздуха  $\kappa = K c_V \eta$ , где  $c_V = iR/2\mu$  – его удельная теплоемкость ( $i = 5$ ),  $K = (9\gamma - 5)/4$ ,  $\gamma = C_p/C_V$ , и сопоставьте ее с табличным значением  $\kappa = 24$  мВт/(м·К).
- Проверьте выполнение принятых в работе допущений о стационарности течения газа и отсутствия турбулентности, т. е. завихрений при течении газа. Число Рейнольдса вычисляется по формуле  $Re = 2a\bar{v}_x/D$ . Для ламинарного (гладкого, без завихрений) течения в трубке оно должно быть менее 2300. Стационарность течения газа в трубке можно проверить, рассчитав длину  $l_{ст}$ , на которой происходит установление стационарного распределения скорости газа по сечению трубки,  $l_{ст} \approx 0.1a Re$ .

### **17.6. Контрольные вопросы**

- В чем сущность явлений переноса; при каких условиях они возникают?
- Дайте определения коэффициента вязкости, коэффициента диффузии. Как они взаимосвязаны друг с другом? Как взаимосвязаны между собой плотность вещества и концентрация частиц в нем?
- Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.

4. Дайте определения ламинарного и турбулентного течений газа.
5. Каким образом определяется тип течения газа в данной работе?
6. Дайте определение длины свободного пробега молекул газа. Как ее можно рассчитать?
7. Как вычисляются средняя, среднеквадратическая и наиболее вероятная скорости молекул газа? Каков их физический (статистический) смысл?
8. Напишите модификации уравнения Клапейрона, выражающие давление газа через его плотность и концентрацию молекул в нем.
9. Азот вытекает из сосуда через горизонтальную трубку. Длина трубки  $l$ , радиус  $a = 0.01$  мм. Определите среднюю по сечению трубки скорость течения газа, если градиент давления  $\Delta p/l = 10$  мм рт. ст./см. Вычислите скорость течения газа на расстоянии  $r = a/N$  от оси трубки. Коэффициент внутреннего трения азота  $\eta = 1.7 \cdot 10^{-5}$  Па · с.
10. Кислород вытекает из сосуда, где он находится под давлением  $p_1 = (1000$  мм рт. ст. через капилляр радиуса  $a = 0.01$  мм. Определите массу газа вытекающего за 1 с через капилляр, если наружное давление составляет  $p_0 = 760$  мм рт. ст.; температура  $t = 10$  °С; длина трубки  $l = 10$  см; коэффициент внутреннего трения кислорода  $\eta = 1.9 \cdot 10^{-5}$  Па · с.

## **Работа 18. (11) ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ**

*Цель работы:* изучение закономерностей процесса тепловой диффузии и определение значения коэффициента тепловой диффузии исследуемого материала.

### **18.1. Исследуемые закономерности**

*Уравнение теплопроводности.* Теплопроводность характеризует диффузию тепла в среде. Процесс диффузии описываются уравнением Фика

$$\mathbf{j}_m = -D \operatorname{grad} n,$$

где  $\mathbf{j}_m$  – плотность потока вещества;  $n$  – концентрация частиц;  $D$  – коэффициент диффузии. Перенос энергии теплового движения в газах осуществляется через столкновения молекул, в твердых телах – посредством передачи энергии колебаний кристаллической решетки. В обоих случаях процесс переноса теплоты описывается уравнением Фика, в котором вместо входящих в

уравнение величин  $\mathbf{j}_m$ ,  $n$  и  $D$  выступают  $\mathbf{j}$  – плотность теплового потока;  $u$  – объемная плотность внутренней энергии среды и  $D_T$  – коэффициент тепловой диффузии:

$$\mathbf{j} = -D_T \text{grad } u.$$

Учитывая, что объемная плотность внутренней энергии связана с температурой среды соотношением  $u = cT$ , где  $c$  – теплоемкость единицы объема среды, можно записать *уравнение теплопроводности Фурье*:

$$\mathbf{j} = -\lambda \text{grad } T,$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\lambda = D_T c$ .

*Температурное поле точечного источника тепла.* Рассмотрим задачу определения температурного поля  $T(x; t)$  в однородной среде. Положим, что температурное поле создается импульсным точечным источником тепла. Рассмотрим распространение тепла вдоль однородного бесконечного стержня, расположенного вдоль оси  $x$ . Начало координат совместим с положением нагревателя, который расположен перпендикулярно оси.

Пусть в тонком поперечном слое при  $x = 0$  и  $t = 0$  мгновенно выделилось количество теплоты  $Q_0$ . Выделившееся тепло диффундирует вдоль оси  $x$ . Распределение тепла вдоль стержня в любой момент времени соответствует нормальному закону Гаусса:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2},$$

где  $P(x)$  – вероятность того, что к некоторому моменту времени порция теплоты будет иметь координату  $x$ ;  $\sigma$  – среднеквадратичная ширина распределения. Тогда распределение линейной плотности тепла вдоль стержня

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{Q_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2}.$$

Разделим обе части этого равенства на произведение  $(cS)$ , где  $c$  – теплоемкость единицы объема стержня,  $S$  – площадь его поперечного сечения:



$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} \frac{1}{cS} = \frac{Q_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{cS} \exp^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Левая часть данного выражения есть приращение температуры относительно исходной. Она равна приращению температуры  $\Delta T(x; t)$  в точке с координатой  $x$  в момент времени  $t$  по отношению к температуре в момент времени  $t = 0$ :

$$\Delta T(x; t) = T(x; t) - T(x; 0).$$

Тогда искомое распределение температуры вдоль стержня имеет вид

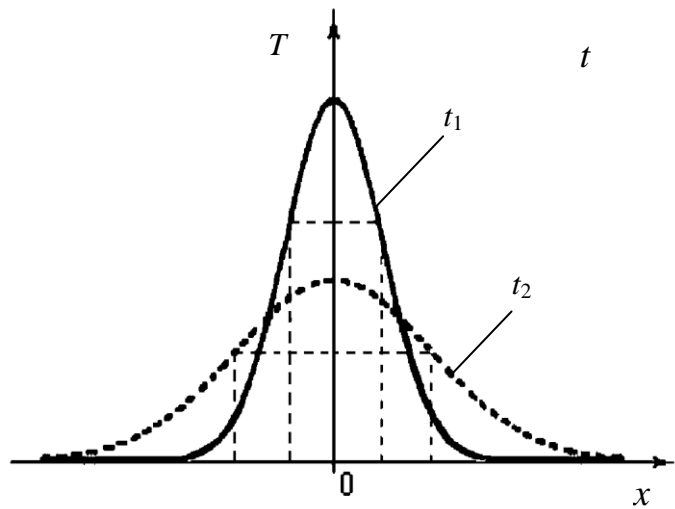


Рис. 18.1

$$\Delta T(x; t) = T(0; t) \exp^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (18.1)$$

где  $T(0; t)$  – температура стержня к моменту времени  $t$  в точке среды с координатой  $x = 0$ ;  $\sigma$  – среднеквадратичная ширина распределения температуры по координате  $x$ . Кривые распределения температуры по координате для двух моментов времени показаны на рис. 18.1.

С увеличением времени параметр  $\sigma$  увеличивается, при этом температура  $T(0; t)$ , соответствующая максимуму распределения, уменьшается. Неравновесное состояние неравномерно нагретого стержня релаксирует к равновесному состоянию с одинаковой температурой во всех точках стержня. Зависимость  $\sigma$  от времени можно представить в следующем виде:

$$\sigma(t) = \sqrt{2D_T t}. \quad (18.2)$$

Формула (18.2) аналогична соотношению Смолуховского–Эйнштейна для среднеквадратичного смещения частицы, совершающей броуновские блуждания.

Задача работы – сверить выводы теории теплопроводности в диэлектриках с экспериментом и определить значение коэффициента тепловой диффузии для исследуемого материала.

Для этой цели зависимость (16.1), используя операцию логарифмирования, можно линеаризовать и привести к виду  $Y = aX + b$ , где  $Y = \ln \Delta T(x, t)$ ,

$X = x^2$ ,  $a = -1/(2\sigma^2)$ ,  $b = \ln T(0, t)$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  в этой линейной зависимости могут быть найдены методом наименьших квадратов (МНК).

Для проверки закона  $\sigma(t) = \sqrt{2D_T t}$  запишем его в виде

$$\sigma = \sigma(t) = At^\alpha, \quad (18.3)$$

где  $A = \sqrt{2D_T}$ . Эту формулу также можно линеаризовать, используя операцию логарифмирования. В результате придем к зависимости  $\tilde{Y} = \alpha\tilde{X} + \beta$  (где  $\tilde{Y} = \ln \sigma$ ,  $\tilde{X} = \ln t$ ,  $\beta = \ln A$ ), коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  в которой также могут быть найдены по МНК.

По найденному значению коэффициента  $\bar{\beta}$  можно найти значение коэффициента  $A = e^{\bar{\beta}}$ , а затем значение коэффициента тепловой диффузии,  $\bar{D}_T = A^2/2 = e^{2\bar{\beta}}/2$ .

Если полученное значение  $\bar{\alpha}$  близко к  $1/2$ , то закон  $\sigma(t) \sim \sqrt{t}$  в данном опыте выполняется. Степень отличия  $\bar{\alpha}$  от  $1/2$  может служить мерой невыполнения теоретических допущений в данном эксперименте.

*Метод измерений.* В работе исследуется нестационарное распределение температуры в среде после кратковременного нагревания среды в некотором малом объеме. Экспериментальная установка содержит электронагревательный элемент, имеющий форму пластины, и термометры, находящиеся на различных расстояниях от нагревателя. Пространство между нагревателем и термометрами заполнено кварцевым песком. Удельная теплоемкость песка  $1.3 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К). Геометрические размеры установки подобраны таким образом, что температурное поле вблизи нагревателя можно считать изменяющимся только вдоль одной координаты  $x$ . Направление оси  $x$  перпендикулярно плоскости пластины.

## 18.2. Приборы и принадлежности

Установка для измерения температурного поля, создаваемого в среде тепловым источником, состоит из нагревателя и линейки термометров, погруженных в песок.

## 18.3. Указания по подготовке к работе

Занесите в бланк протокола таблицы (табл. 18.1 и табл. 18.2)

Таблица 18.1

|       |   |   |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $x_i$ |   |   |   |   |   |   |   |

Таблица 18.2

|           |            |            |            |            |            |            |            |
|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $t$ , мин | $T_1$ , °C | $T_2$ , °C | $T_3$ , °C | $T_4$ , °C | $T_5$ , °C | $T_6$ , °C | $T_7$ , °C |
| 0         |            |            |            |            |            |            |            |
| 5         |            |            |            |            |            |            |            |
| ...       |            |            |            |            |            |            |            |

по определению измеряемых величин.

#### 18.4. Указания по выполнению наблюдений

1. Запишите координаты  $x_i$  термометров в таблицу (табл. 18.1).
2. Запишите начальные показания термометров  $T(x; 0)$ .
3. Включите нагреватель, удерживая нажатой кнопку включения на панели установки в течение 5 минут.
4. Выключите нагреватель и регистрируйте показания термометров  $T(x; t)$  через интервалы времени  $\Delta t = 5$  мин. Количество измерений 6–8. Результаты наблюдений занесите в Таблицу (табл. 18.2).

#### 18.5. Задание по обработке результатов эксперимента

1. Вычислите приращение температуры среды относительно исходной температуры  $\Delta T(x; t) = T(x; t) - T(x; 0)$  для каждого момента времени  $t$  в точках с координатами термометров  $x$ .
2. Постройте графики распределения приращения температуры в координатах  $(x, T)$  для каждого значения времени  $t_j$ .
3. Введите обозначения  $X_i = x_i^2$  и  $Y_{ij} = \ln(\Delta T(x_i; t_j))$ . Используя МНК, найдите по наборам экспериментальных точек  $(X_i, Y_{i1}), (X_i, Y_{i2}), \dots$  коэффициенты  $(\bar{a}_1, \bar{b}_1), (\bar{a}_2, \bar{b}_2), \dots$  линейных зависимостей  $Y_1 = a_1 X + b_1$ ,  $Y_2 = a_2 X + b_2, \dots$  прологарифмированного уравнения (18.1) для каждого момента времени  $t_j$ .
4. Постройте графики распределения температуры в приведенных координатах  $(X, Y)$  для каждого значения времени  $t_j$ . Для этого нанесите на коор-

динатную плоскость точки  $(X_i, Y_{i1}), (X_i, Y_{i2}), \dots$  и проведите прямые МНК  $Y_j = a_j X + b_j$  через точки  $(\bar{X}, \bar{Y}_j)$  и  $(0, \bar{b}_j)$ .

5. Введите обозначения  $\tilde{Y}_j = \ln \sigma_j = -\frac{1}{2} \ln(-2a_j)$ ,  $\tilde{X}_j = \ln t_j$ . Используя МНК, найдите по набору  $(\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j)$  коэффициенты  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  линейной зависимости  $\tilde{Y} = \alpha \tilde{X} + \beta$  прологарифмированного уравнения (18.3).
6. Сопоставьте найденное по МНК значение  $\bar{\alpha}$  со значением  $1/2$  и сделайте заключение о соответствии теории и эксперимента.
7. Используя определенное по МНК значение коэффициента  $\bar{\beta}$ , найдите значение коэффициента диффузии  $\bar{D}_T$ .

### **18.6. Контрольные вопросы**

1. При каком условии в твердом теле возникает поток тепла?
2. Запишите уравнение теплопроводности для одномерного случая, например распространения тепла вдоль оси  $x$ .
3. Что означает знак «минус» в уравнениях теплопроводности или диффузии?
4. В каких единицах измеряются следующие величины: плотность теплового потока, поток тепла.
5. Сформулируйте методику измерений, используемую в лабораторной работе, и опишите лабораторную установку.
6. Нарисуйте распределение Гаусса и отметьте на графике среднеквадратичную ширину данного распределения.
7. Поясните, почему теплопроводность твердых тел во много раз больше, чем теплопроводность газов?
8. В каких координатах зависимость  $y = ae^x$  будет линейной?
9. Поясните способ построения линейных зависимостей согласно МНК.

## СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Значения коэффициентов Стьюдента  $t_{P,N}$  в зависимости от числа наблюдений  $N$  при доверительной вероятности  $P = 95\%$  (Табл. 1):

Таблица 1

|           |      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $N$       | 2    | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 100 |
| $t_{P,N}$ | 12.7 | 4.3 | 3.2 | 2.8 | 2.6 | 2.5 | 2.4 | 2.3 | 2.3 | 2.0 |

Коэффициенты  $\beta_{P,N}$  для расчета доверительной погрешности по размаху выборки  $\Delta x = \beta_{P,N} R$  для числа наблюдений  $N$  доверительной вероятности  $P = 95\%$  (Табл. 2):

Таблица 2

|               |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $N$           | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   |
| $\beta_{P,N}$ | 1.30 | 0.72 | 0.51 | 0.40 | 0.33 | 0.29 | 0.25 | 0.23 | 0.21 | 0.19 |

Коэффициенты  $u_{P,N}$  для проверки результатов наблюдений на наличие грубых погрешностей в зависимости от объема выборки  $N$  для доверительной вероятности  $P = 95\%$  (Табл. 3):

Таблица 3

|           |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $N$       | 3    | 4    | 5    | 7    | 10   | 15   | 20   | 30   | 100  |
| $u_{P,N}$ | 0.94 | 0.76 | 0.64 | 0.51 | 0.41 | 0.34 | 0.30 | 0.26 | 0.20 |

Коэффициенты  $v_{P,N}$  для проверки элементов выборки на наличие грубых погрешностей в зависимости от объема выборки  $N$  при доверительной вероятности  $P = 95\%$  (Табл. 4):

Таблица 4

|           |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $N$       | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   |
| $v_{P,N}$ | 1.15 | 1.46 | 1.67 | 1.82 | 1.94 | 2.03 | 2.11 | 2.18 | 2.23 | 2.29 |

Значения вязкости глицерина для разных температур (Табл. 5):

Таблица 5

|                                |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $t, ^\circ\text{C}$            | 0    | 5    | 10   | 20   | 30   | 40   | 50   |
| $\eta, \text{Па}\cdot\text{с}$ | 12.1 | 7.05 | 3.95 | 1.48 | 0.60 | 0.33 | 0.18 |

Энергия активации глицерина составляет  $1.115 \cdot 10^{-19}$  Дж,  $C = 1.574 \cdot 10^{-12}$  Па $\cdot$ с.

Значения вязкости и плотности веществ при  $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$  (Табл. 6):

Таблица 6

| Вещество                   | Воздух               | Вода  | Глицерин | Масло    |         |            |              |
|----------------------------|----------------------|-------|----------|----------|---------|------------|--------------|
|                            |                      |       |          | Машинное |         | Касторовое | Глицериновое |
|                            |                      |       |          | легкое   | тяжелое |            |              |
| $\eta$ , Па·с              | $17 \cdot 10^{-6}$   | 0.001 | 1.48     | 0.1      | 0.65    | 0.99       | 0.26         |
| $\rho$ , г/см <sup>3</sup> | $1.29 \cdot 10^{-3}$ | 1.0   | 1.26     | 0.88     | 0.94    | 0.96       | 1.1          |

Значения коэффициентов  $\lambda$  и  $D_T$  для некоторых твердых веществ (Табл. 7):

Таблица 7

| Вещество      | $D_T$ , см <sup>2</sup> /с | $\lambda$ , Вт/(м <sup>2</sup> ·К) |
|---------------|----------------------------|------------------------------------|
| Алюминий      | 1                          | 200                                |
| Лед           | 0,01                       | 2                                  |
| Песок морской | 0,003                      | 0,3                                |

**Алгоритм обработки данных по методу наименьших квадратов для линейной зависимости вида  $Y = aX + b$**

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{N} \sum Y_i, \quad \bar{a} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}, \quad \bar{b} = \bar{Y} - \bar{a}\bar{X},$$

$$S_a^2 = \frac{1}{N-2} \left( \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} - \bar{a}^2 \right), \quad S_b^2 = S_a^2 \left( \bar{X}^2 + \frac{1}{N} \sum (X_i - \bar{X})^2 \right),$$

$$S_a^- = \sqrt{S_a^2}, \quad S_b^- = \sqrt{S_b^2},$$

$$\Delta a = t_{P,N-1} S_a^-, \quad \Delta b = t_{P,N-1} S_b^-, \quad \theta_x = \frac{1}{N} \sum \theta_{xi}, \quad \theta_y = \frac{1}{N} \sum \theta_{yi}, \quad \theta_a = 0,$$

$$\theta_b = |\bar{a}| \theta_x + \theta_y, \quad \bar{\Delta a} = \Delta a, \quad \bar{\Delta b} = \Delta b + \theta_b.$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И. В. Курс общей физики: в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. СПб.: Лань, 2006.
2. Иродов И. Е. Механика. Основные законы. М.: 2010.
3. Морозов В. В., Соболевский Б. Е., Шейнман И. Л. Методы обработки результатов физического эксперимента: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2004.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. в 5 т. Т. I. Механика М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. - 560 с.
5. Сивухин Д. В. Общий курс физики: Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 544 с.