МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №4
по дисциплине «Методы оптимизации»
Тема: РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧ

Студент гр. 1384		Бобков В. Д.
Студентка гр. 1384		Усачева Д.В.
Студентка гр. 1384		Пчелинцева К. Р.
Преподаватель		Балтрашевич В.Э.

Санкт-Петербург
2023

Цели работы:

а. Постановка задачи линейного программирования и ее решение с помощью стандартной программы.

б. Исследование прямой и двойственной задачи.

Основные теоретические положения.

Если исходная задача линейного программирования представлена в виде:

Найти минимум функции f = (c, x) на множестве

$$X = \{x \in R^n : Ax \geq B, x \geq 0\} , \qquad (4.1).$$

то двойственная задача может быть сформулирована следующим образом:

Найти максимум функции (B, λ) на множестве

$$\lambda = \{\lambda \in R^m : A^T \lambda \leq c, \lambda \geq 0\},$$

где AT — матрица транспонированная к A.

Двойственная к двойственной задаче есть исходная задача.

Известно, что если существует решение исходной задачи, то существует решение и двойственной задачи, причем значения экстремумов совпадают. При этом координаты экстремальной точки для двойственной задачи являются коэффициентами чувствительности результата в исходной задаче по коэффициентам вектора B.

Рассмотрим видоизмененную исходную задачу:

Найти min(C, X) на множестве { x: X ≥ O, Ax ≥ B + ε * ei }, где ε>0,

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot\cdot \\ 1 \\ \cdot\cdot \\ 0 \end{pmatrix} i$$

Если исходная задача имеет единственное решение, то при малых ε>0 и видоизмененная задача имеет решение; причем если -значение минимума, то существует . Оказывается, что β есть i -я координата оптимальной точки для двойственной задачи.

Для проведения лабораторной работы составлена программа, обеспечивающая решение задачи линейного программирования при задании с терминала исходных значений параметров.

Исходный текст задачи.

При откорме каждое животное ежедневно должно получить не менее 9 единиц питательного вещества S_1, не менее 8 единиц вещества S_2 и не менее 12 единиц вещества S_3. Для составления рациона используют два вида корма. Содержимое количества единиц питательных веществ в I кг каждого корма и стоимость I кг корма, приведены в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Питательные вещества	Количество питательных веществ в 1 кг корма	
	Корм 1	*Корм 2*
$S1$	3	1
$S2$	1	2
$S3$	1	6

Стоимость 1 кг корма первого вида составляет 4 р., второго вида - 6р.

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем затраты на него должны быть минимальными.

Выполнение работы.

Формализация прямой задачи и ее решение

Целевая функция: (C,X), C=(4,6), X=(x1,x2). Требуется ее минимизировать.

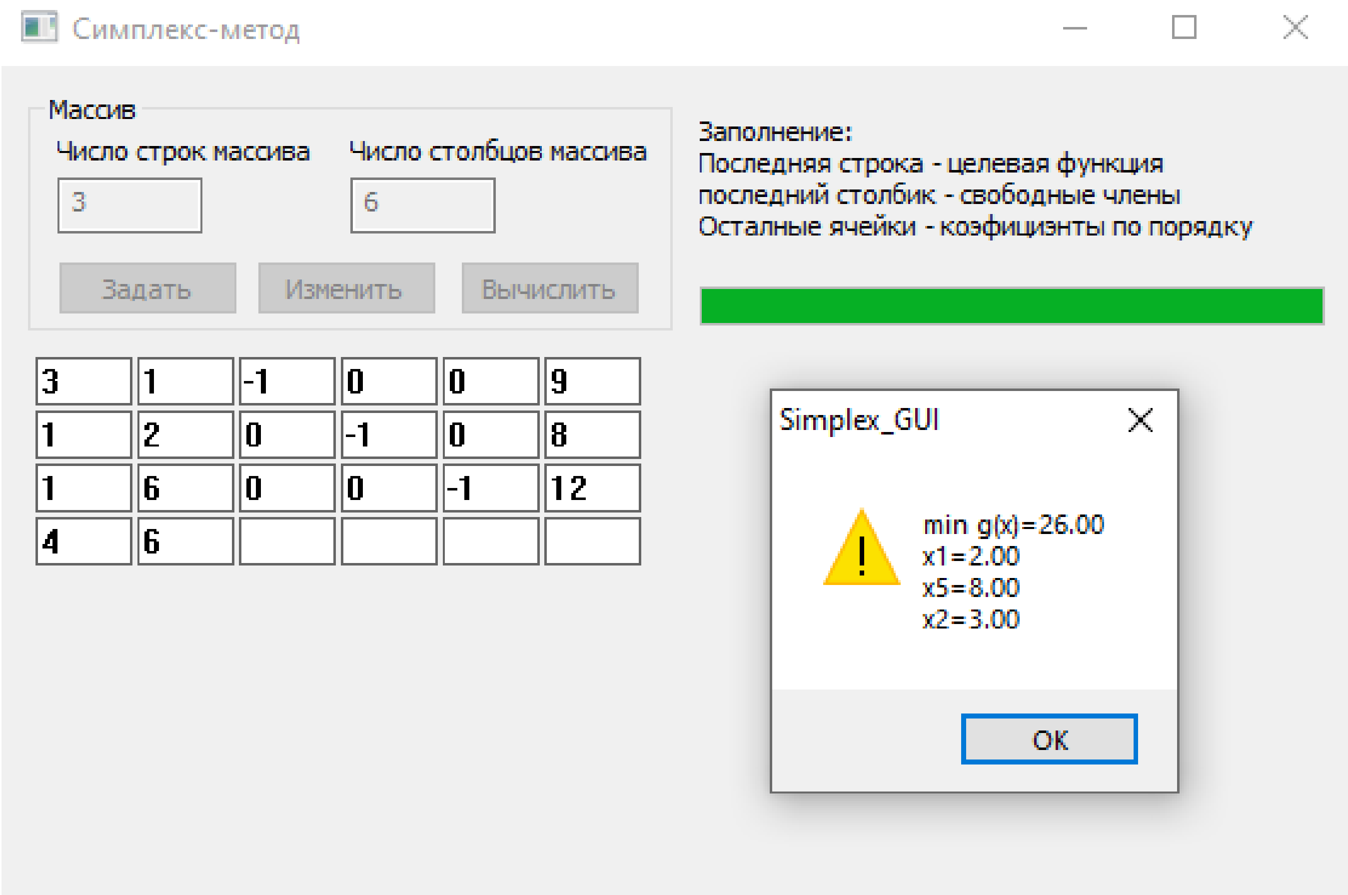
Ограничения: AX>=B, 3x1+x2>=9, x1+2x2>=8, x1 + 6x2 >=12.

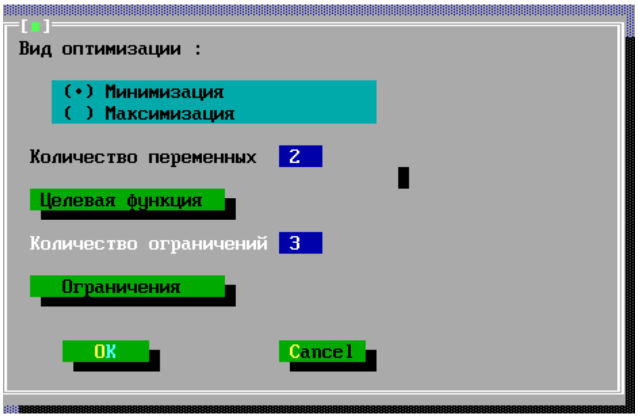
То есть A = [3 1], B = [9 8 12]

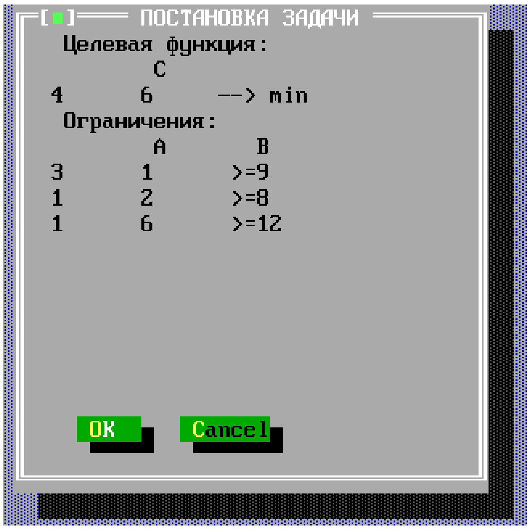
[1 2]

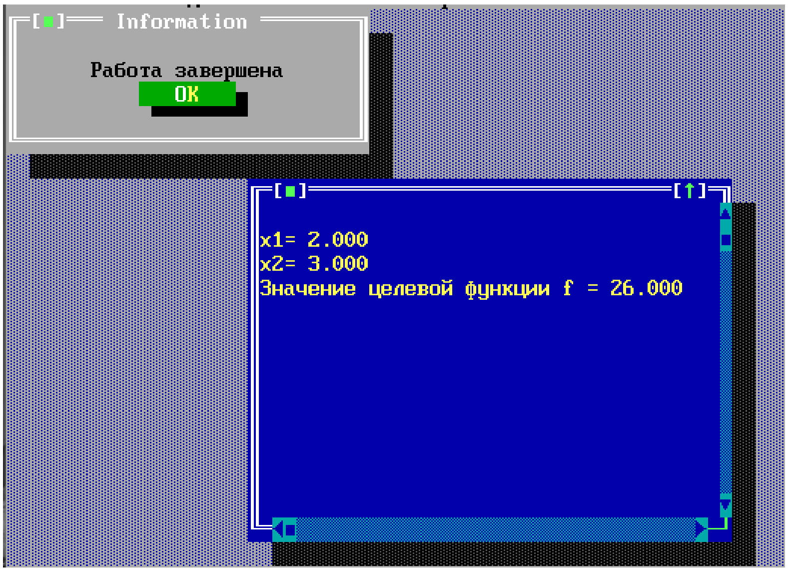
[1 6]

Решение прямой задачи:









x1 = 2

x2 = 3

При этом f(x) = 26 – минимизированная стоимость

Формализация двойственной задачи и ее решение

Целевая функция: (B, λ), $B=[9\ 8\ 12]$, $\lambda=(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$

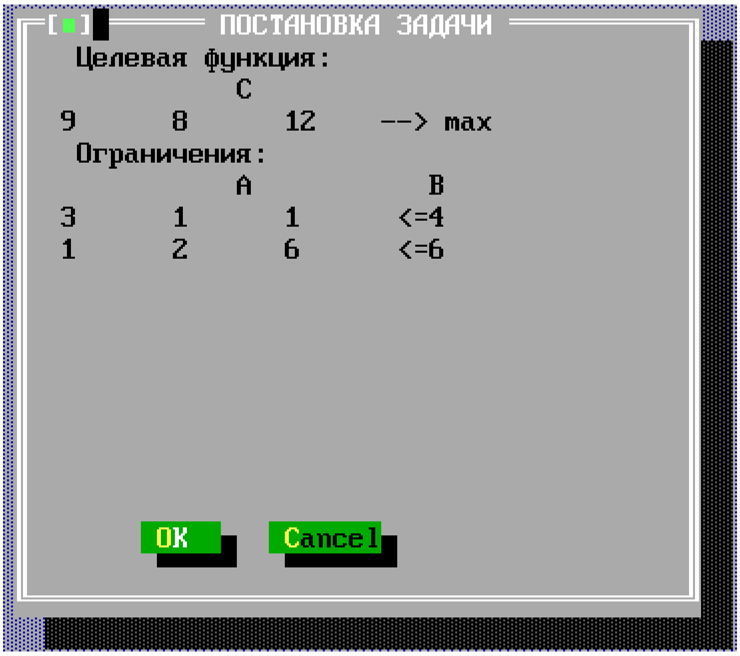
Требуется ее максимизировать.

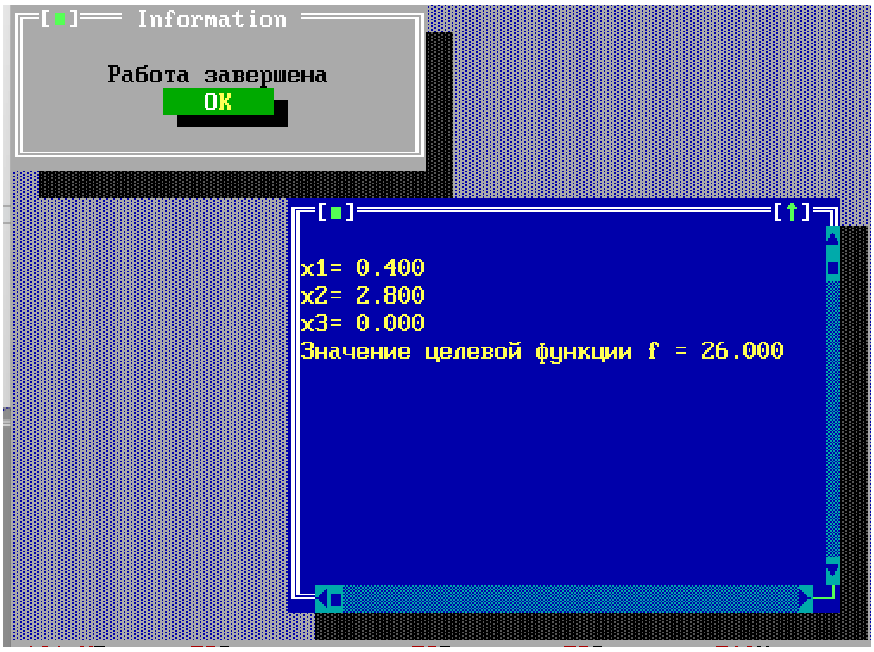
Ограничения: $A^T \lambda <= C$,

$3\lambda_1 + 1\lambda_2 + 1\lambda_3 <= 4$

$1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 <= 6$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \text{ то есть } C = [4\ 6]$$





Решение двойственной задачи:

$\lambda_1 = 0.4$, $\lambda_2 = 2.8$, $\lambda_3 = 0$, при этом f=26.

Видоизмененная исходная задача

Найти min(C,X) на множестве {x: X≥O, Ax≥B+ε*e_i}, где ε>0,

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ .. \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} i$$

$\varepsilon = 10^{-3}$ B = [9 8 12]

Решение задачи:

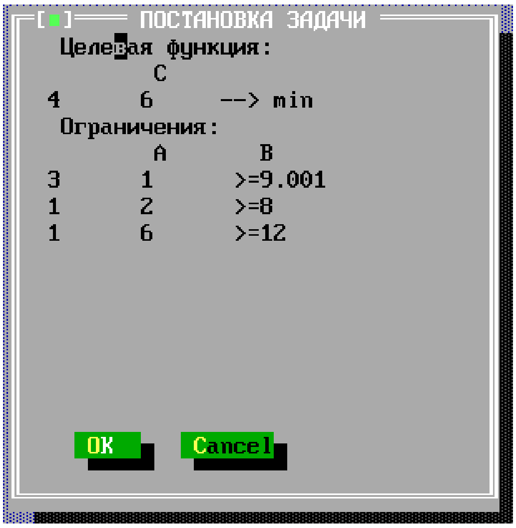
Для x1:

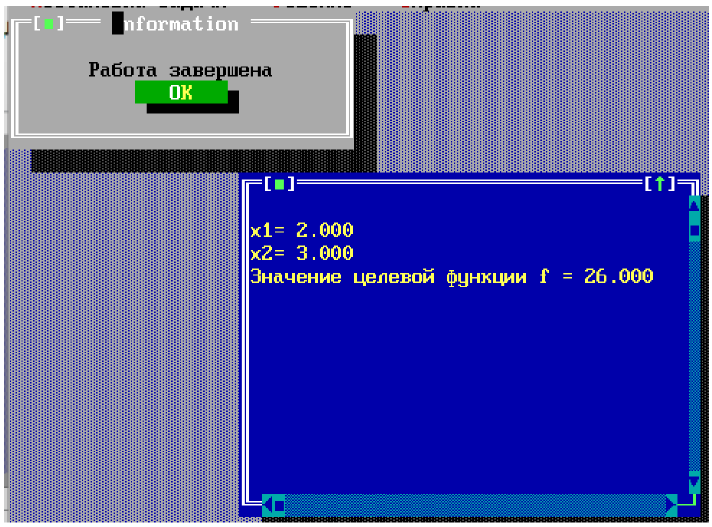
$$\widetilde{x}_i = (\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0)) / \varepsilon;$$

При B [9.001 8 12] φ(ε) = 26.000 φ(0) = 26.000

–

x_1 = (26.000 − 26. 000)/0. 001 = 0



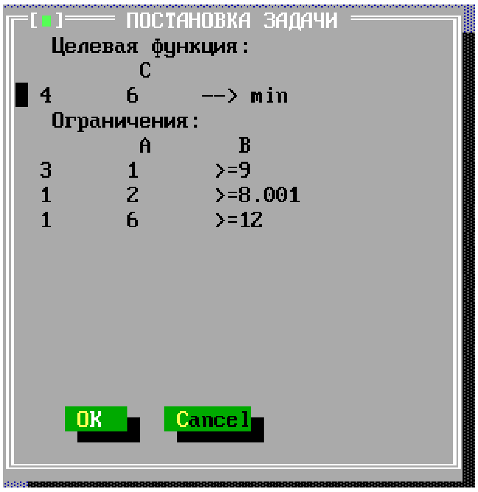


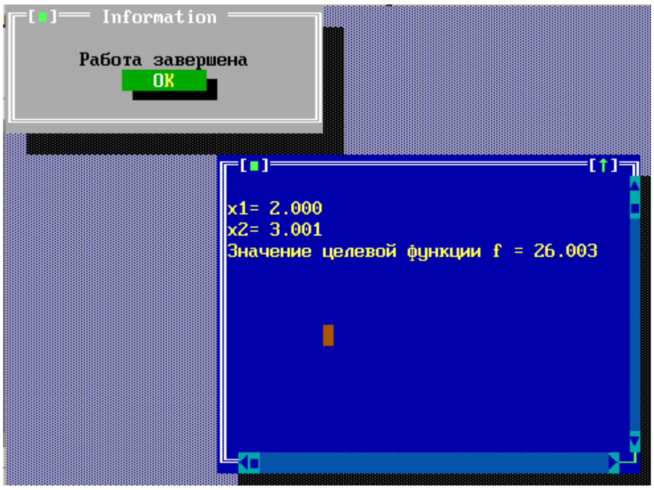
Для x2:

При При B [9 8.001 12] φ(ε) = 26.003 φ(0) = 26.000

—

x_2 = (26. 003 − 26. 000)/0. 001 = 3



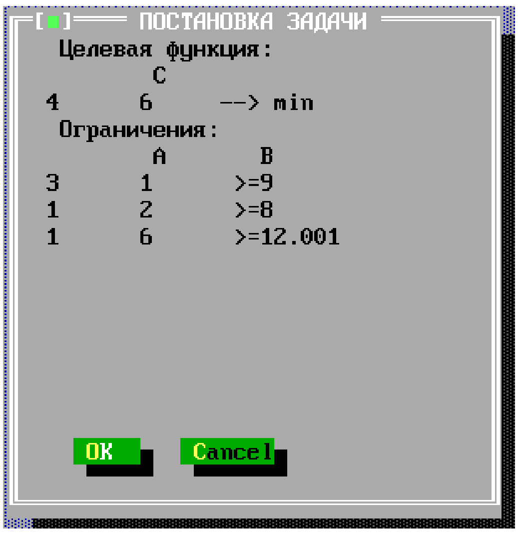


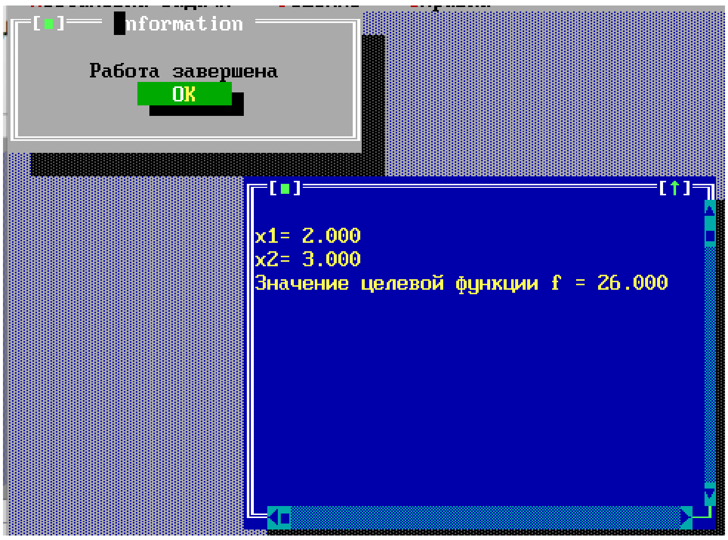
Для x3:

При При B [9 8 12.001] φ(ε) = 26.000 φ(0) = 26.000

—

x_2 = (26. 000 − 26. 000)/0. 001 = 0

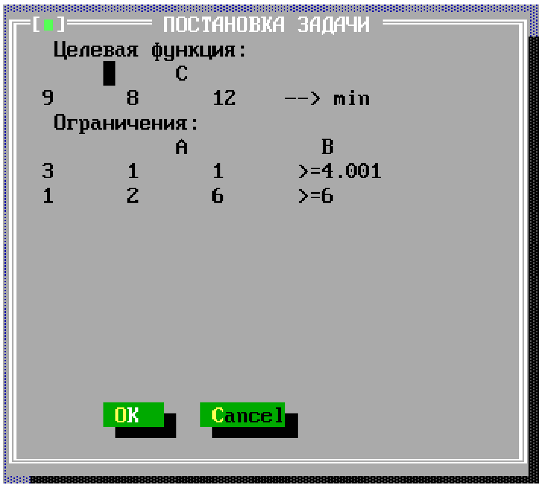


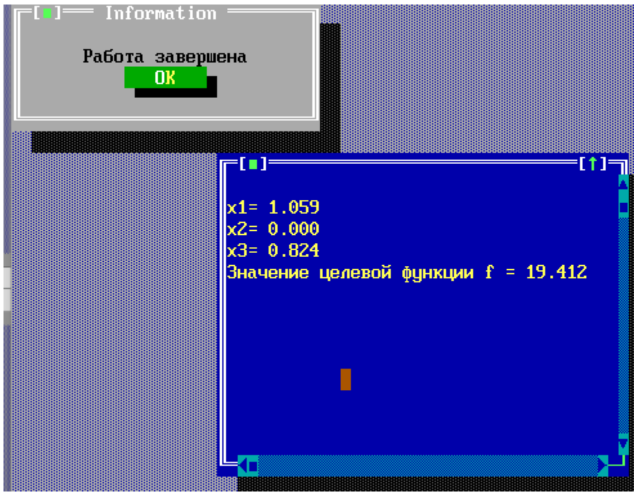


Сравнивая $\lambda_1 = 0.4$, $\lambda_2 = 2.8$, $\lambda_3 = 0$, и полученные в этом пункте коэффициенты 0, 3 и 0, получаем подтверждение теоретического предположения.

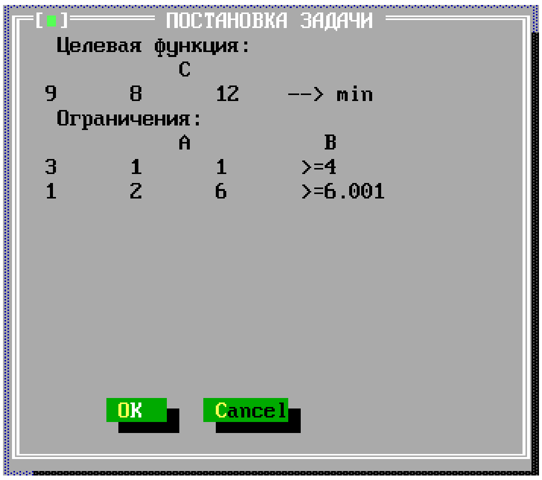
Проведём такие же манипуляции для C:

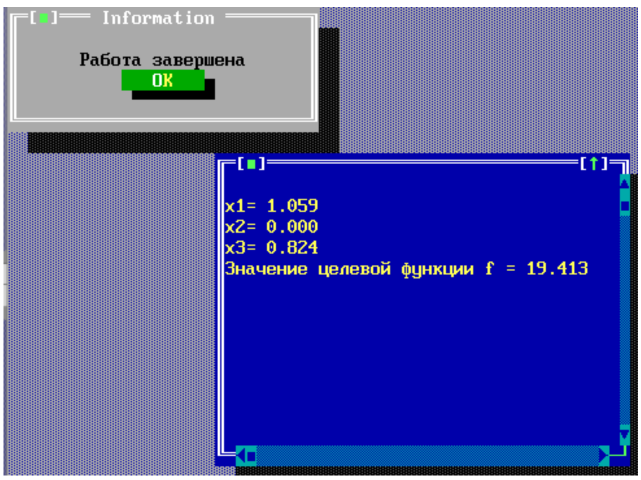
C1: $\varphi(\varepsilon)$ =19.412 C = [4.001 6]





C2: $\varphi(\varepsilon)$ = 19.413 C = [4 6.001]





Выводы

Выполнена цель лабораторной работы, а именно:

а) осуществлена постановка задачи линейного программирования и ее решение с помощью стандартной программы,

б) произведено исследование прямой и двойственной задачи, а также их изменения в i-ой компоненте векторов B и C соответственно,

в) подтверждены теоретические выкладки.