Линейные операторы

Главным достижение линейной алгебры является исчерпывающая и достаточно простая теория операторов (!! матриц). Эта теория легко переносится на любое конечномерное банахово пространство.

Функциональный анализ возник как попытка перенести эти алгоритмы на пространства бесконечной размерности. В бесконечномерной ситуации не существует аппарата, позволяющего эффективно описывать все линейные операторы. Исключением являются линейные самсопряженные операторы. Этот вполне законченный раздел функционального анализа называется спектральная теория операторов.
Позже мы рассмотри класс операторов, допускающих такое описание на сравнительно простом языке.

Тем не менее начальный этап определений и простейших свойств не вызывает никаких сложностей.
Определение

Оператор $A : X \to Y$ действующий из линейного пространства X в линейное пространство Y называется **линейным**, если

$$A(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1Ax_1 + k_2Ax_2 \ \ \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{C}, \ \forall\, x_1, x_2 \in X.$$

Если оба пространства X и Y являются нормированными, то для оператора можно ввести определения ограниченности и непрерывности.

Определение

Оператор $A : X \to Y$ называется **ограниченным**, если

существует число M такое, что для любого $x \in X,\ ||x|| < 1$,

выполнено неравенство $||Ax|| < M$.
Определение

Оператор $A : X \to Y$ называется **непрерывным**, если для любой последовательности элементов $x_n \in X$ такой, что $||x_n - x_0|| \to 0$, выполнено

$$||Ax_n - Ax_0|| \to 0$$

. В силу линейности оператора определение непрерывности достаточно проверять для последовательностей, стремящихся к нулевому элементу.

Определение

Нормой оператора $A : X \to Y$ называется называется число

$||A|| = \sup\{||Ax|| : ||x|| \le 1\}$.
Замечание

Очевидно, что множество линейных операторов, действующих из линейного пространства X в линейное пространство Y само образует линейное пространство. Легко проверить, что введенная выше норма удовлетворяет всем свойствам, предъявляемым к норме. Тем самым появляется линейное нормированное пространство линейных операторов, действующих из линейного пространства X в линейное пространство Y. Более того, это пространство операторов образует алгебру, т. е. такие операторы можно перемножать ($ABx = A(Bx)$). Легко проверить, что $||AB|| \le ||A|| \cdot ||B||$.

Вычисление нормы оператора в пространстве бесконечной размерности удается провести редко. Обычно, ограничиваются оценкой нормы, этого зачастую бывает достаточно. В пространствах конечной размерности это проще, но и здесь надо преодолевать технические трудности.

Пример

Пусть оператор A действует в конечномерном гильбертовом пространстве H и его собственные вектора $\{e_n\}$, $Ae_n = \lambda_n e_n$, образуют ортогональный базис.

Тогда $||A|| = \max\limits_n |\lambda_n|$.

Доказательство

Заметим, что любой x элемент пространства H можно разложить по базису

$x = \sum\limits_n x_n e_n$ и при этом $Ax = \sum\limits_n Ax_n = = \sum\limits_n x_n \lambda_n e_n$.

По условию базис ортогональный, не умоляя общности, можно считать его нормированным и тогда
$||x||^2 = \sum\limits_n |x_n|^2$.

Обозначим $M = \max\limits_n |\lambda_n|$.

Ясно, что $||Ax||^2 = \sum\limits_n |x_n|^2 |\lambda_n|^2 \le M^2 \sum\limits_n |x_n|^2 = M^2 ||x||^2$.

Значит, $||A|| \le M$. Покажем, что эта оценка точная, то есть найдется x такой, что $||Ax|| = M||x||$.

Положим для определенности $|\lambda_1| = M$. Возьмем в качестве $x = e_1$, тогда

$||Ax|| = ||\lambda_1 e_1|| = M||x||$.

Следовательно, $||A|| = \max\limits_n |\lambda_n|$.

Рассмотрим вычисление нормы в пространствах l_n^p, $p = 1, 2, \infty$. Все эти пространства получаются за счет введения различных норм в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. Фиксируем какой-нибудь базис $\{e_n\}$ в $\mathbb{R}^n$, тогда любой линейный оператор A из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ описывается матрицей $A = (a_{m,k})$, здесь $Ae_m = (a_{m,1}, \dots, a_{m,n})^T$.

Пример

Пусть $p = \infty$, $A : l_n^\infty \to l_n^\infty$

$||x|| = \sup_m |x_m|, \;\; Ax = \left(\sum_k a_{m,k}x_k\right)_{m=1,\dots,n}$

Тогда $||A|| = \sup_m \sum_k |a_{m,k}|$ – максимум **строковых** сумм

Доказательство

$||Ax|| = \sup_m |\sum_k a_{m,k}x_k| \leq \sup_m ||x|| \sum_k |a_{m,k}|$.

Обозначим $M = \sup_m \sum_k |a_{m,k}|$ и заметим, что $||Ax|| \leq M||x||$.

Чтобы показать точность оценки предположим, что супремум достигается на первой строчке, то есть

$M = \sum\limits_k |a_{1,k}|$

и построим подходящий элемент x по следующему правилу: $x_k = sign(a_{1,k})$

Тогда $||Ax|| = \sup\limits_m |\sum\limits_k a_{m,k}x_k| = M = M||x||$. Следовательно, $||A|| = M$

Пример

Пусть $p = 1$, $A : l_n^1 \to l_n^1$

$||x|| = \sum_m |x_m|, \;\; Ax = \left(\sum_k a_{m,k}x_k\right)_{m=1,\dots,n}$

Тогда $||A|| = \sup_k \sum_m |a_{m,k}|$ – максимум **столбцовых** сумм

Доказательство

$||Ax|| = \sum_m |\sum_k a_{m,k}x_k| \leq \sum_m \sum_k |x_k||a_{m,k}| \leq \sum_k |x_k| \sum_m |a_{m,k}| \leq$

$\sum_k |x_k| \left(\sup_k \sum_m |a_{m,k}|\right) \leq ||x|| \sup_k \sum_m |a_{m,k}|$

Таким образом $||A|| \leq M, \;\; M = \sup_k \sum_m |a_{m,k}|$.

Докажем, что оценка точная. Будем считать, что $M = \sum\limits_m |a_{m,1}|$ (супремум достигается на первом столбце).

Построим подходящий элемент x. Положим $x_1 = 1$, $x_m = 0$, если $m > 1$. Тогда $||Ax|| = \sum_m |a_{m,1}| = M||x||$

Пример

Пусть $p = 2$, в этом случае речь идет о гильбертовом пространстве и, если у оператора имеется базис ортогональных векторов, то вопрос решен в примере 1. Известно, что это условие выполняется, если матрица оператора симметрична.

Чтобы вычислить норму оператора с несимметричной матрицей нужно использовать определение сопряженного оператора.

Определение

Пусть A линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H,

сопряженным к нему называется оператор A^*, определенный соотношением:

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \text{ для любых } x, y \in H.$$

Нетрудно проверить, что это условие однозначно определяет линейный непрерывный оператор A^*.

В конечномерном пространстве матрица оператора A^* получается комплексным сопряжением и транспонированием элементов матрицы оператора A.

Отметим простые свойства сопряженного оператора:

$$(A^*)^* = A, \quad (AB)^* = B^*A^*.$$

Из этих свойств следует, что оператор A^*A совпадает со своим сопряженным (то есть имеет симметричную матрицу) и его собственные вектора ($A^*Ae_k = \Lambda_k e_k$) образуют ортонормированный базис. Легко видеть, что собственные числа Λ_k неотрицательны:

$$\Lambda_k = (A^*Ae_k, e_k) = (Ae_k, Ae_k) \geq 0.$$

Будем считать, что нумерация проведена так, что

$\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \cdots \geq \Lambda_n \geq 0$

Перейдем к вычислению нормы оператора. Фиксируем $x = \sum\limits_k x_k e_k$ и оценим $||Ax||^2$:

$$||Ax||^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (\sum_k x_k \Lambda_k e_k, \sum_m x_m e_m) =$$

$$= \sum_k \Lambda_k x_k^2 \leq \Lambda_1 ||x||^2.$$

Значит, $||A|| \leq \Lambda_1$.

Проверим точность оценки. Положим $x = e_1$, тогда

$||Ax|| = ||\Lambda_1 e_1|| = \Lambda_1$ и, следовательно, $||A|| = \Lambda_1$.

Задача

Пусть H – пространство дважды дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ таких, что $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$ и $||f|| = \left(\int_a^b |f^{(2)}(x)|^2 dx\right)^{1/2}$

покажите, что норма определена правильно ($||f|| = 0 \to f = 0$)

найдите сопряженный для оператора $Af = f'' + \alpha f' + \beta f$

когда оператор является самосопряженным.

Рассмотрим далее несколько простых, но важных свойств линейных операторов.
Предложение

Линейный оператор $A : X \to Y$ ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен.

Доказательство

(1) Пусть оператор A непрерывен. Предположим, что он не ограничен. В этом случае найдется последовательность

$\{x_n\}, \ ||x_n|| = 1, \ \alpha_n = ||Ax_n|| \to \infty.$

Положим $y_n = \frac{x_n}{\alpha_n}$, тогда $||y_n|| = \frac{1}{\alpha_n} \to 0$

и по условию непрерывности $||Ay_n||$ должна стремиться к 0,
но по построению $||Ay_n|| = 1$.

Следовательно, непрерывный оператор обязательно ограничен.

(2) Пусть оператор A ограничен, но не является непрерывным.

Тогда найдется последовательность $\{x_n\}$, стремящаяся к 0, для которой $\alpha_n = ||Ax_n||$ не стремится к 0.

Это означает, что существует $\delta > 0$ такое, что для любого N найдется число $n > N$,

для которого $||Ax_n|| > \delta$.

Рассмотрим ограниченную последовательность $y_n = \frac{x_n}{||x_n||}$,

тогда по определению последовательность $||Ay_n||$ тоже должна быть ограничена, но по построению

$$||Ay_n|| = \frac{||Ax_n||}{||x_n||} > \frac{\delta}{||x_n||} \to \infty\,.$$

Полученное противоречие показывает, что любой линейный ограниченный оператор непрерывен.

Самая типичная и распространенная задача, связанная с линейными операторами – решение уравнений $Ax = b$. Исчерпывающим решением такой задачи является построение оператора B такого, что $Bb = x$.

Определение

Линейный оператор A, отображающий пространство X на себя
называется **обратимым**, если существует

$B : X \to X$ такой, что $AB = BA = I$,

здесь I – единичный (тождественный) оператор.

Нетрудно доказать, что если линейный и непрерывный оператор A имеет обратный оператор B, то оператор B тоже линейный и непрерывный.

Предложение (условие обратимости линейного оператора)

Линейный непрерывный оператор A, заданный на линейном нормированном пространстве X, обратим тогда и только тогда,

когда существует положительное число m такое, что для любого элемента пространства выполнено неравенство $||Ax|| > m||x||$.

Доказательство

(1) Предположим, что неравенство выполнено. Покажем, что в этом случае оператор является взаимно однозначным, то есть переводит различные элементы в различные и, следовательно, имеет обратный. Фиксируем два различных элемента $x_1, x_2 \in X$. Заметим, что $||x_1 - x_2|| = \delta > 0$, откуда $||Ax_1 - Ax_2|| = ||A(x_1 - x_2)|| > m||x_1 - x_2|| = m\delta$, следовательно, образы элементов x_1 и x_2 тоже различны.

(2) Предположим, что оператор A имеет обратный оператор B, но неравенство из предложения не выполнено.

Тогда найдется последовательность $\{x_n\}$ такая, что

$||x_n|| = 1$, $\alpha_n = ||Ax_n|| \to 0$.

Как было отмечено, оператор B линейный и непрерывный. Ясно, что $y_n = Ax_n \to 0$, но последовательность $By_n = x_n$ не стремится к 0, что противоречит непрерывности оператора B.

Доказанное утверждение дает полезный критерий отсутствия у оператора обратного, но доказательство неравенства, как правило, очень трудная задача.

В конечномерных пространствах критерий обратимости можно значительно упростить: оператор обратим тогда и только тогда, когда **ядро** оператора содержит только нулевой элемент.
Определение

Пусть $A : X \to X$ – линейный оператор
Ядром оператора называется множество элементов, которые он переводи в ноль

$kerA = \{x : Ax = 0\}$

Действительно, выберем какой-нибудь базис и дадим матричное описание оператора. Нетривиальное ядро появляется тогда и только тогда, когда ноль является собственным числом оператора (матрицы оператора в выбранном базисе), а это равносильно тому, что матрица необратима.

В бесконечномерных пространствах нулевое ядро не гарантирует обратимости оператора.

Пример

Очевидно, что диагональный оператор $Ax = y, \quad y_n = \frac{x_n}{n}$, отображает пространство l^2 в себя. Для него легко выписать формальный обратный оператор $By = x, \; x_n = ny_n$, однако совершенно очевидно, что этот оператор неограничен.

Рассмотрим далее **устойчивость обратимости** – еще одно важное свойство линейных операторов, утверждающее, что если оператор обратим, то обратимы и «близкие» к нему операторы. Сначала докажем это для тождественного оператора.

Теорема

Если B – линейный, непрерывный оператор, причем $||B|| = q < 1$,

то оператор $A = I - B$ имеет обратный, при этом норма обратного оператора A не превосходит $\frac{1}{1-q}$.

Доказательство

Рассмотрим вспомогательные операторы

$$D_n = I + B + B^2 + \ldots + B^n$$

и вычислим произведение

$$AD_n = (I - B)(I + B + B^2 + \ldots + B^n) =$$

$$= I + B + B^2 + \ldots + B^n - B - B^2 - \ldots - B^n - B^{n+1} = I - B^{n+1}.$$

Заметим, что $||B^k|| \leq ||B||^k = q^k$ (супремум произведения не больше произведения супремумов).

Рассмотрим ряд, составленный из операторов

$$D = I + B + B^2 + \ldots + B^n + \ldots,$$

проверим, что последовательность частичных сумм D_n фундаментальная, т. е.

$$||D_n - D_m|| \leq q^{n+1} + \ldots + q^m \leq \frac{q^{n+1}}{1-q},$$

Следовательно ряд сходится.
Легко поверить, что $AD_n = D_n A = I - B^{n+1}$
значит, $AD = I$.
Таким образом, оператор D является обратным для оператора A.

Доказанное утверждение, говорит, что всякий оператор, «мало отличающийся» от тождественного, обратим. Это утверждение справедливо для любого обратимого оператора.

Теорема
– достаточное условие обратимости

Пусть X – банахово пространство. Если линейный, непрерывный оператор $A : X \to X$ имеет обратный A^{-1} и для оператора $B : X \to X$ справедлива оценка $||B|| < \frac{1}{||A^{-1}||}$,

то оператор $C = A + B$ тоже обратим.

Доказательство

Рассмотрим вспомогательный оператор $D = A^{-1}C = = I + A^{-1}B$.

По условию $||A^{-1}B|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||B|| < 1$,

следовательно, по предшествующей теореме оператор D имеет обратный оператор D^{-1}.

Обозначим $F = D^{-1}A^{-1}$, тогда

$$FC = F(A + B) = D^{-1}A^{-1}(A + B) = D^{-1}D = I,$$

$$CF = (A + B)F = AA^{-1}(A + B)D^{-1}A^{-1} = ADD^{-1}A^{-1} = I.$$

Следовательно, $F = (A + B)^{-1}$.

Эта внешне простое и формальное утверждение имеет огромный круг приложений. Оно лежит в основе процедуры итераций при решении уравнений методом последовательных приближений.

Следствие

Пусть линейный, непрерывный оператор A отображает банахово пространство X в себя.

Если уравнение $Ax = b$ после перезаписи $(I - B)x = b$ допускает оценку $||B|| = q < 1$,

то последовательность $x_{n+1} = b + Bx_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$; x_0 – произвольный элемент пространства X) сходится к решению уравнения.

Доказательство

Заметим, что $x_1 = b + Bx_0$, $x_2 = b + Bb + B^2x_0, \ldots$, $x_n = b + Bb + \ldots + B^n x_0$, следовательно, для $n > k$

$$||x_n - x_k|| = ||B^k b + \ldots + B^{n-1}b + B^n x_0 - B^k x_0|| \leq$$
$$\leq ||B^k b|| + \ldots + ||B^{n-1}b|| + ||B^k x_0|| + ||B^n x_0|| \leq$$
$$\leq q^k \frac{1 - q^{n-k}}{1 - q} ||b|| + (q^k + q^n)||x_0||.$$

По условию $q < 1$ и, значит, последовательность фундаментальная, следовательно, существует предел $x_* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Переходя к пределу в рекуррентном уравнении, определяющем последовательность, получим $x_* = b + Bx_*$ или $Ax_* = b$.

Еще одно важное приложение оценок норм линейных операторов возникает в связи с оценками погрешностей решения. Допустим, решается уравнение $Ax = b$ и известно, что в определении правых частей присутствуют неконтролируемые ошибки Δb. То есть фактически решается система $Ax = b + \Delta b$. Требуется оценить ошибку в решении через погрешность в определении правой части уравнения. Будем считать, что x – решение исходного уравнения, иными словами, считаем, что выполнено тождество $Ax = b$, и аналогично для второго уравнения $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Такая постановка задачи обычно предполагает, что ошибка, имеющаяся в правой части уравнения невелика в сравнении с самой правой частью, и оценку желательно получить для относительных погрешностей, то есть оценить $\frac{||\Delta x||}{||x||}$ через $\frac{||\Delta b||}{||b||}$. Такую оценку легко получить для обратимых операторов.

Неравенство для оценки относительной погрешности

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot \frac{||\Delta b||}{||b||}.$$

Доказательство

По условию $Ax = b$ и $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Оператор линейный, следовательно,

$A\Delta x = \Delta b$.

Обратимость оператора позволяет написать

$\Delta x = A^{-1}\Delta b$, откуда $||\Delta x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta b||$. Воспользуемся непрерывностью оператора

и получим из равенства $Ax = b$ оценку $||b|| \leq ||A|| \cdot ||x||$.

Перепишем это неравенство в удобном для доказательства виде

$\frac{1}{||x||} \leq ||A|| \cdot \frac{1}{||b||}$.

Перемножая два полученных неравенства, получим требуемую оценку.

Доказанное неравенство играет важную роль в организации вычислений.

Если у оператора A величина $||A|| \cdot ||A^{-1}||$ очень велика, то надо быть готовым к тому, что небольшие погрешности в определении правой части приведут к такой потере точности, которая лишит вычисление всякого смысла.

Определение

Числом обусловленности линейного оператора A называется

$$cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||.$$

Пример

Покажем, что оператор, заданный в l_2^2 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta \end{pmatrix}$$

при малых δ плохо обусловлен. Вычислим собственные числа матрицы

$$\lambda^2 - (2+\delta)\lambda + \delta = 0, \;\; \lambda_{1,2} = (1 + \frac{\delta}{2}) \pm \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}}\,,$$

и заменим их на приближенные значения так, чтобы для малых δ потеря точности была незначительной. Используем формулу Тейлора $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 \ldots$, она дает такие оценки: $\lambda_1 \approx 2$, $\lambda_2 \approx \frac{\delta}{2}$. Связь между собственными числами и нормой оператора, отмеченная в примере 3.1, позволяет утверждает, что число обусловленности обратно пропорционально δ

$$cond(A) \approx \frac{4}{\delta}.$$

Важно понимать, что число обусловленности характеризует не только оператор, но и нормированное пространство, в котором он действует. Если на одном линейном пространстве введено две нормы, то оператор действующий в этом пространстве будет иметь два числа обусловленности, отвечающих каждое своей норме.

Приведенные примеры позволяют вычислить число обусловленности в пространствах l_n^p, $\;p = 1, 2, \infty$.

В методичке показано, что оценка погрешности точная, и предъявлен элемент, на котором она реализуется. Из конструкции видно, что реализация оценки явление очень редкое

Второе домашнее задание

Норма линейного оператора

Условие задания - матрица $A(4 \times 4)$ – $A : R^4 \to R^4$
условия размещены на мудле

Требуется вычислить:

1) норму оператора A в пространствах l_4^1 l_4^∞ и предъявить векторы, на которых достигается норма

2)норму оператора A^{-1} в пространствах l_4^1 l_4^∞

3) число обусловленности оператора A в пространствах l_4^1 l_4^∞

4)сформировать матрицу $G = A^*A$, показать что она положительно определена. Найти ее собственные числа и векторы

5)число обусловленности оператора A в пространстве l_4^2

Задание на пятерку

Метод итераций для решения системы $Ax = b$, начальное приближение $x_0 = (1, 1, 1, 1)$

$A = I - B,\ B = G^{-1},\ b = (1/2, 1/3, 1/4, 1/5)$

найдите точное решение x_* сравните его с с 5-й (x_5)и 10-й итерациями (x_{10})

Оформление работы

на странице курса в мудле оформлен раздел для присылки ваших работ

прошу присылать *pdf* файлы с маркировкой "фамилия(КИРИЛИЦЕЙ)группа"

выполнение работы предполагает использование компьютерных вычислительных пакетов

не надо показывать хода вычислений (ответы – десятичная запись числа с 4-я знаками после запятой)

но в работе должны быть представлены описания важных для ее выполнения объектов.