

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МОЭВМ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №1
по дисциплине «Элементы функционального анализа»
Тема: Норма элемента

Студент гр. 1381

Сагидуллин Э.Р.

Преподаватель

Коточигов А.М.

Санкт-Петербург

2024

Задание.

Вариант 15.

В R^3 задан многогранник W и две точки x и y . Требуется вычислить норму Минковского для $\|x\|$, $\|y\|$ и $\|x+y\|$. Способ задания W : в условии даны шесть точек (вершины в первом октанте) $\{\{12, 7, 0\}, \{8, 0, 11\}, \{0, 10, 9\}, \{14, 0, 0\}, \{0, 15, 0\}, \{0, 0, 22\}\}$

Основные теоретические положения.

Выпуклость. Выпуклым телом называется выпуклое множество W , в котором существует такая точка w , что для любого $x \in X$ найдется число $\varepsilon(x) > 0$ такое, что множество W содержит отрезок $w + tx$, при всех $t \in (-\varepsilon(x); \varepsilon(x))$.

Норма Минковского. Пусть W – выпуклое множество и 0 является его внутренней точкой. Нормой Минковского, порожденной множеством W , называется $\|x\| = \inf \{ \lambda : x/\lambda \in W, \lambda > 0 \}$, $x \in W \Rightarrow -x \in W$.

Теорема Минковского. Если W – выпуклое ограниченное тело и 0 является его внутренней точкой, то выражение $\|x\| = \inf \{ \lambda : x/\lambda \in W, \lambda > 0 \}$ задает норму в пространстве X .

Биортогональный базис. Это набор векторов в линейном пространстве, для которого каждый вектор ортогонален всем остальным векторам в этом наборе, за исключением самого себя, и все они нормированы (имеют единичную длину).

Экспериментальные результаты.

Для построения многогранника нужно трижды отразить координаты относительно координатных плоскостей.

Полученный многогранник представлен на рисунке 1.

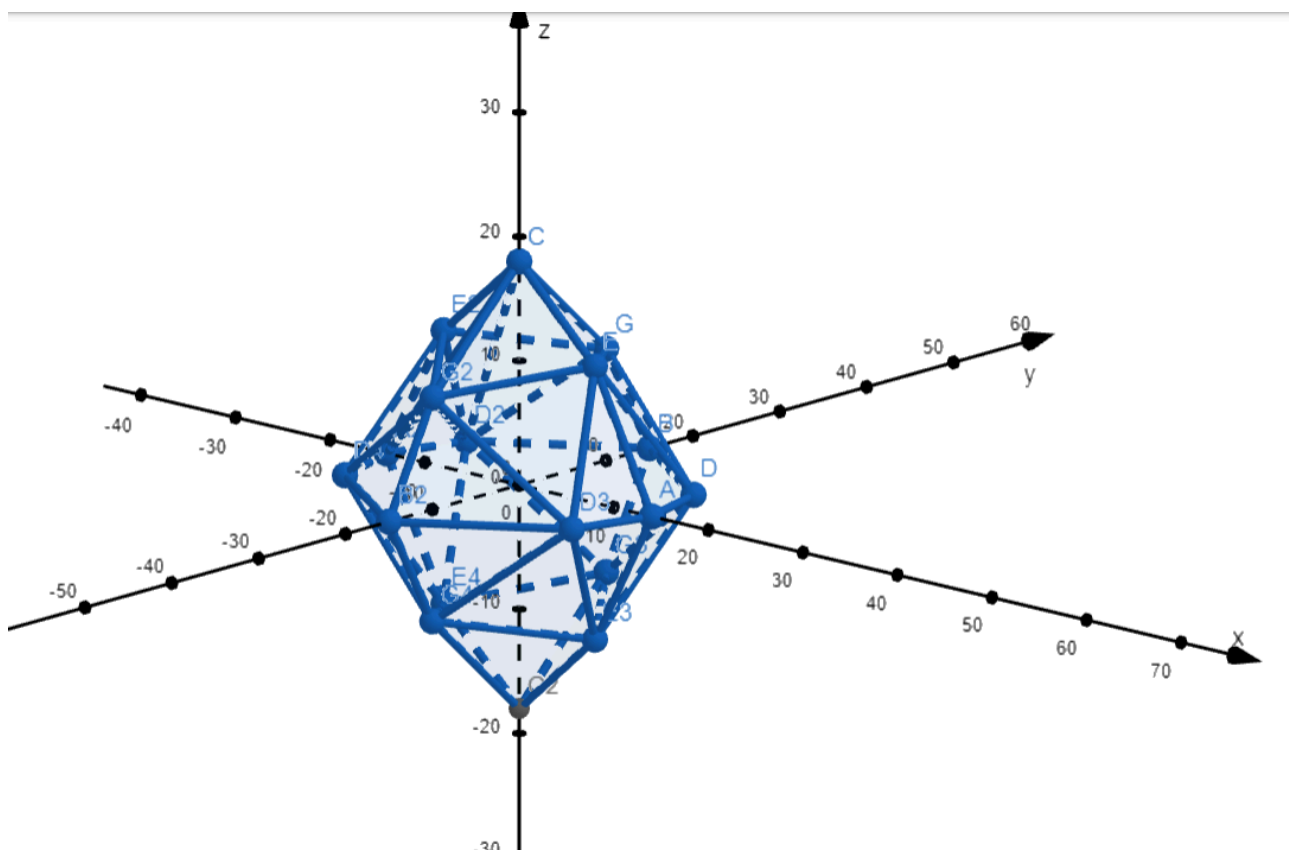


Рис. 1. Полученный многогранник.

Заданы следующие точки многогранника в первом октанте.

	X	Y	Z
D	12	7	0
E	8	0	11
G	0	10	9
A	14	0	0
B	0	15	0
C	0	0	22

Для выполнения Теоремы Минковского требуется выполнение трех свойств:

1) Нулевой элемент является внутренней точкой множества многогранника (выполнено по условию задания)

2) $x \in W \Rightarrow -x \in W$ (выполнено благодаря симметричности многогранника)

3) Выпуклость многогранника (выполнено, для достижения выпуклости координаты точки C были изменены (0, 0, 22) --> (0, 0, 18))

Проверим свойство выпуклости для заданного многогранника, для этого составим уравнения плоскостей со значением свободного коэффициента $d=1$ для всех граней в первом октанте и проверим положение всех 18 точек многогранника относительно них:

Нормализованные уравнения плоскостей для граней в первом октанте:

$$AED: F1(x, y, z) = -\frac{1}{14}x - \frac{1}{49}y - \frac{3}{77}z + 1 = 0$$

$$EGD: F2(x, y, z) = -\frac{1}{19}x - \frac{1}{19}y - \frac{1}{19}z + 1 = 0$$

$$BGD: F3(x, y, z) = -\frac{2}{45}x - \frac{1}{15}y - \frac{1}{27}z + 1 = 0$$

$$CEG: F4(x, y, z) = -\frac{7}{144}x - \frac{1}{20}y - \frac{1}{18}z + 1 = 0$$

Значения коэффициентов для всех 18 точек:

Точка	Координаты	F1	F2	F3	F4
D	(12, 7, 0)	0	0	0	1/15
E	(8, 0, 11)	0	0	32/135	0
G	(0, 10, 9)	240/539	0	0	0
A	(14, 0, 0)	0	5/19	17/45	23/72
B	(0, 15, 0)	34/49	4/19	0	1/4
C	(0, 0, 18)	23/77	1/19	1/3	0
D1	(-12, -7, 0)	2	2	2	29/15
E1	(-8, 0, -11)	2	2	238/135	2
G1	(0, -10, -9)	838/539	2	2	2

A1	(-14, 0, 0)	2	33/19	73/45	121/72
B1	(0, -15, 0)	64/49	34/19	2	7/4
C1	(0, 0, -18)	131/77	37/19	5/3	2
D2	(12, -7, 0)	2/7	14/19	14/15	23/30
E2	(-8, 0, 11)	8/7	16/19	128/135	7/9
G2	(0, -10, 9)	460/539	20/19	4/3	1
D3	(-12, 7, 0)	12/7	24/19	16/15	37/30
E3	(8, 0, -11)	6/7	22/19	142/135	11/9
G3	(0, 10, -9)	618/539	18/19	2/3	1

Найдем биортогональный базис для каждой из граней в первом октанте:

1) Рассмотрим конус OAED, в котором построим биортогональный базис для OA, OE, OD:

$$OA' = \frac{1}{(OA_1, OA)} OA_1, OA_1 = OE \times OD$$

$$OE' = \frac{1}{(OE_1, OE)} OE_1, OE_1 = OA \times OD$$

$$OD' = \frac{1}{(OD_1, OD)} OD_1, OD_1 = OA \times OE$$

	OA'	OE'	OD'
AED	(0.07142857, -0.12244898, -0.05194805)	(0.0, 0.0, 0.09090909)	(0.0, 0.14285714, 0.0)

2) Рассмотрим конус OEGD, в котором построим биортогональный базис для OE, OG, OD:

$$OE' = \frac{1}{(OE_1, OE)} OE_1, OE_1 = OG \times OD$$

$$OG' = \frac{1}{(OG_1, OG)} OG_1, OG_1 = OE \times OD$$

$$OD' = \frac{1}{(OD_1, OD)} OD_1, OD_1 = OE \times OG$$

	OE'	OG'	OD'
EGD	(0.03453947, -0.05921053, 0.06578947)	(-0.04221491, 0.07236842, 0.03070175)	(0.06030702, 0.03947368, -0.04385965)

3) Рассмотрим конус OBGD, в котором построим биортогональный базис для OB , OG , OD :

$$OB' = \frac{1}{(OB_1, OB)} OB_1, OB_1 = OG \times OD$$

$$OG' = \frac{1}{(OG_1, OG)} OG_1, OG_1 = OB \times OD$$

$$OD' = \frac{1}{(OD_1, OD)} OD_1, OD_1 = OB \times OG$$

	OB'	OG'	OD'
BGD	(-0.03888889, 0.06666667, -0.07407407)	(0.0, 0.0, 0.11111111)	(0.08333333, 0.0, 0.0)

4) Рассмотрим конус OCEG, в котором построим биортогональный базис для OC , OE , OG :

$$OC' = \frac{1}{(OC_1, OC)} OC_1, OC_1 = OE \times OG$$

$$OE' = \frac{1}{(OE_1, OE)} OE_1, OE_1 = OC \times OG$$

$$OG' = \frac{1}{(OG_1, OG)} OG_1, OG_1 = OC \times OE$$

	OC'	OE'	OG'
CED	(-0.07638889, -0.05, 0.05555556)	(0.125, 0.0, 0.0)	(0.0, 0.1, 0.0)

Найдем коэффициенты разложения и норму для каждой точки по каждому базису:

1) Следовательно, раскладываем векторы по базису OA, OE, OD

$$OX = k_1 OA + k_2 OE + k_3 OD, \text{ где}$$

$$k_1 = (OX, OA'), k_2 = (OX, OE'), k_3 = (OX, OD')$$

$$OY = k_1 OA + k_2 OE + k_3 OD, \text{ где}$$

$$k_1 = (OY, OA'), k_2 = (OY, OE'), k_3 = (OY, OD')$$

$$OZ = k_1 OA + k_2 OE + k_3 OD, \text{ где}$$

$$k_1 = (OZ, OA'), k_2 = (OZ, OE'), k_3 = (OZ, OD')$$

Норма в данном случае, считается как:

$$\|W\| = k_1 + k_2 + k_3$$

Точка	Координаты	k1	k2	k3	$\ W\ $
X	(108, 0, 121)	1.428571428571427	11.0	0.0	12.428571428571427
Y	(84, 49, 484)	-25.142857142857146	44.0	7.0	25.857142857142854
Z=X+Y	(192, 49, 605)	-23.714285714285715	55.0	7.0	38.285714285714285

2) Следовательно, раскладываем векторы по базису OE, OG, OD

$$OX = k_1 OE + k_2 OG + k_3 OD, \text{ где}$$

$$k_1 = (OX, OE'), k_2 = (OX, OG'), k_3 = (OX, OD')$$

$$OY = k_1 OE + k_2 OG + k_3 OD, \text{ где}$$

$$k_1 = (OY, OE'), k_2 = (OY, OG'), k_3 = (OY, OD')$$

$$OZ = k_1 OE + k_2 OG + k_3 OD, \text{ где}$$

$$k_1 = (OZ, OE'), k_2 = (OZ, OG'), k_3 = (OZ, OD')$$

Норма в данном случае, считается как:

$$\|W\| = k_1 + k_2 + k_3$$

Точка	Координаты	k1	k2	k3	$\ W\ $
X	(108, 0, 121)	11.69078947368421	-0.8442982456140351	1.2061403508771935	12.052631578947368
Y	(84, 49, 484)	31.842105263157894	14.859649122807017	-14.228070175438596	32.473684210526315
Z=X+Y	(192, 49, 605)	43.5328947368421	14.015350877192981	-13.0219298245614	44.526315789473685

3) Следовательно, раскладываем векторы по базису OB, OG, OD

$$OX = k_1 OB + k_2 OG + k_3 OD, \text{ где}$$

$$k_1 = (OX, OB'), k_2 = (OX, OG'), k_3 = (OX, OD')$$

$$OY = k_1 OB + k_2 OG + k_3 OD, \text{ где}$$

$$k_1 = (OY, OB'), k_2 = (OY, OG'), k_3 = (OY, OD')$$

$$OZ = k_1 OB + k_2 OG + k_3 OD, \text{ где}$$

$$k_1 = (OZ, OB'), k_2 = (OZ, OG'), k_3 = (OZ, OD')$$

Норма в данном случае, считается как:

$$\|W\| = k_1 + k_2 + k_3$$

Точка	Координаты	k1	k2	k3	$\ W\ $
X	(108, 0, 121)	-13.1629629629 62961	13.4444444444 444443	9.0	9.2814814814 81482
Y	(84, 49, 484)	-35.8518518518 5185	53.7777777777 77777	7.0	24.925925925 925924
Z=X+Y	(192, 49, 605)	-49.0148148148 1481	67.2222222222 22221	16.0	34.207407407 4074

4) Следовательно, раскладываем векторы по базису OC, OE, OG

$$OX = k_1 OC + k_2 OE + k_3 OG, \text{ где}$$

$$k_1 = (OX, OC'), k_2 = (OX, OE'), k_3 = (OX, OG')$$

$$OY = k_1 OC + k_2 OE + k_3 OG, \text{ где}$$

$$k_1 = (OY, OC'), k_2 = (OY, OE'), k_3 = (OY, OG')$$

$$OZ = k_1 OC + k_2 OE + k_3 OG, \text{ где}$$

$$k_1 = (OZ, OC'), k_2 = (OZ, OE'), k_3 = (OZ, OG')$$

Норма в данном случае, считается как:

$$\|W\| = k_1 + k_2 + k_3$$

Точка	Координаты	k1	k2	k3	$ w $
X	(108, 0, 121)	-1.5277777777777786	13.5	0.0	11.972222222222221
Y	(84 , 49, 484)	18.022222222222222	10.5	4.9	33.422222222222222
Z =X+Y	(192 , 49, 605)	16.494444444444444	24.0	4.9	45.394444444444444