МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра АМ

ОТЧЕТ

по домашней работе №3
по дисциплине «Элементы функционального анализа»
Тема: Мера и интеграл.

Студент гр. 1384	________________	Шаганов В.А.
Преподаватель	________________	Коточигов А.М.

Санкт-Петербург
2024

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Счётно-аддитивная мера на отрезке [0,1] порождена неубывающей функцией f(x) т. ч. $\lim_{\delta\to 0^+} f(x+\delta) = f(x)$

Для интервала и отрезка, где f непрерывна:

$$m\big((a,b)\big) = f(b-0) - f(a+0) = f(b-0) - f(a)$$

$$m([a,b]) = f(b+0) - f(a-0) = f(b) - f(a-0)$$

Для точки разрыва f:

$$m(\{x_k\}) = \lim_{\delta\to 0^+}(m[x_k-\delta, x_k+\delta])$$

Мера также может быть вычислена как интеграл:

$$m\big((u_1,x_1)\big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} m\left(\left[u_1 + \frac{k(x_1-u_1)}{n}, u_1 + \frac{(k+1)(x_1-u_1)}{n}\right]\right)$$

Так как $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\gamma)(\beta - \alpha), \alpha < \gamma < \beta$, предел является интегральной суммой, откуда

$$m\big((u_1,x_1)\big) = \int_{u_1}^{x_1} f'(x)\,dx$$

Мера аддитивна: $m(A\cup B) = m(A) + m(B), A\cap B = \emptyset$

ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

Перед выполнением работы выпишем значения, заданные в работе.

$$x_0 = 0;\ x_1 = \frac{8}{15};\ x_2 = \frac{11}{15};\ x_3 = 1$$

$$v_0 = 0;\ v_1 = \frac{16}{21}; v_2 = \frac{26}{21}; v_3 = \frac{26}{21}; v_4 = \frac{12}{7}; v_5 = 2$$

$$u_0 = 0;\ u_1 = \frac{4}{15};\ u_2 = \frac{19}{30};\ u_3 = \frac{13}{15};\ u_4 = 1$$

$$y_0 = 2;\ y_1 = 5;\ y_2 = 2;\ y_3 = 2;\ y_4 = 0$$

<u>Задание 1</u>. Вычислить k_1, k_2, k_3, k_4. Нарисовать график.

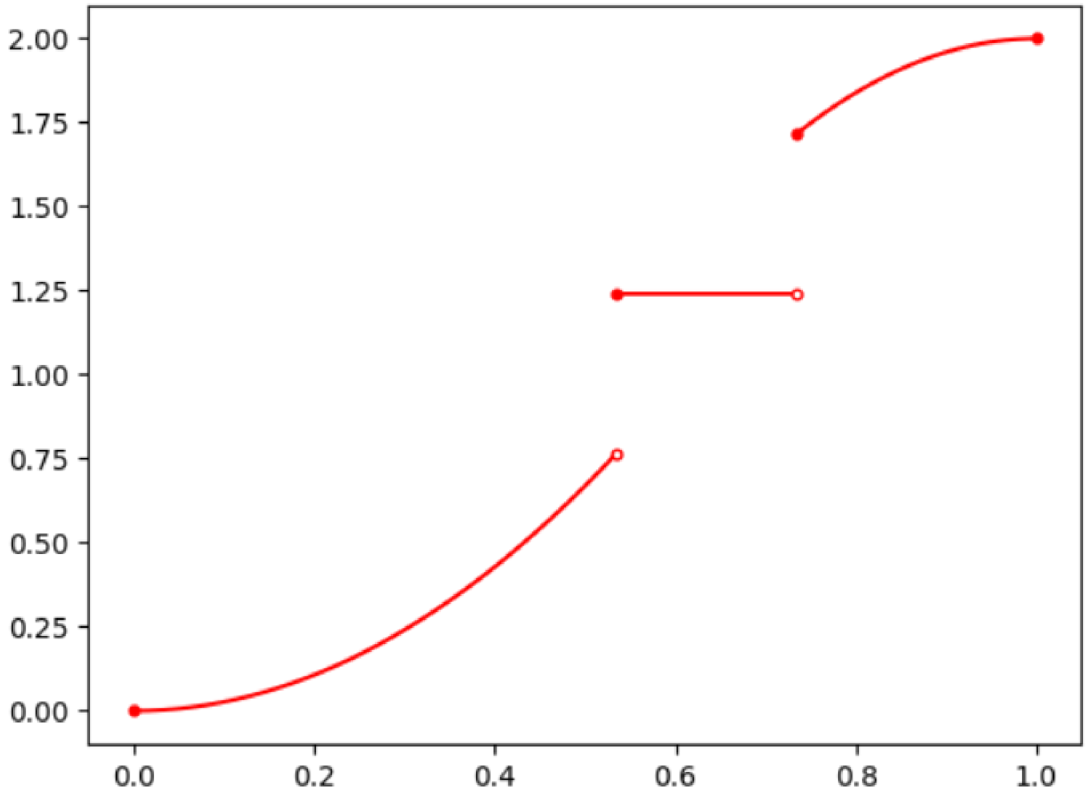
Из вида функции имеем: $k_1 x_1^2 = v_1$. Отсюда $k_1 = \frac{v_1}{x_1^2} = \frac{75}{28}$

На интервале $[x_1, x_2)$ функция постоянна: $k_2 = v_2$

На интервале $[x_2, x_3]$ функция задаётся как $k_4 - k_3(1-x)^2$, в крайних точках она равна v_4 и v_5. Отсюда находим $k_4 = 2, k_3 = \frac{225}{56}$.

Функция f задаётся как $k_1 x^2$ при $x_0 \leq x < x_1$. Как k_2 при $x_1 \leq x < x_2$. Как $k_4 - k_3(1-x)^2$ при $x_2 \leq x \leq x_3$.

Теперь можно нарисовать график.



Выпишем значения функции во всех точках, задействованных в работе:

x	$f(x)$
$x_0 = 0$	0
$u_1 = 4/15$	$4/21$
$x_1 - 0$	$16/21$
$x_1 + 0$	$26/21$
$u_2 = 19/30$	$26/21$
$x_2 - 0$	$26/21$
$x_2 + 0$	$12/7$

$u_3 = 13/15$	$27/14$
$x_3 = 1$	2

<u>Задание 2</u>. Положим $A = (u_1, u_2)$, $B = (u_2, u_3)$. Показать, что $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Для начала вычислим $m(A)$ = $m(u_1, x_1) + m(\{x_1\}) + m(x_1, u_2)$

$$m(u_1, x_1) = \int_{u_1}^{x_1} f'(x)\,dx = \int_{u_1}^{x_1} 2k_1 x\,dx = k_1(x_1^2 - u_1^2) = \frac{4}{7}$$

$$m(\{x_1\}) = lim_{\delta \to 0^+}(f(x_1 + \delta) - f(x_1 - \delta)) = f(x_1) - f(x_1 - 0) = \frac{10}{21}$$

$$m(x_1, u_2) = \int_{x_1}^{u_2} f'(x)\,dx = f(u_2) - f(x_1) = v_3 - v_3 = 0$$

Тогда $m(A) = \frac{4}{7} + \frac{10}{21} + 0 = \frac{22}{21}$

Проводя аналогичные вычисления, получим $m(B) = 0 + \frac{10}{21} + \frac{3}{14} = \frac{29}{42}$

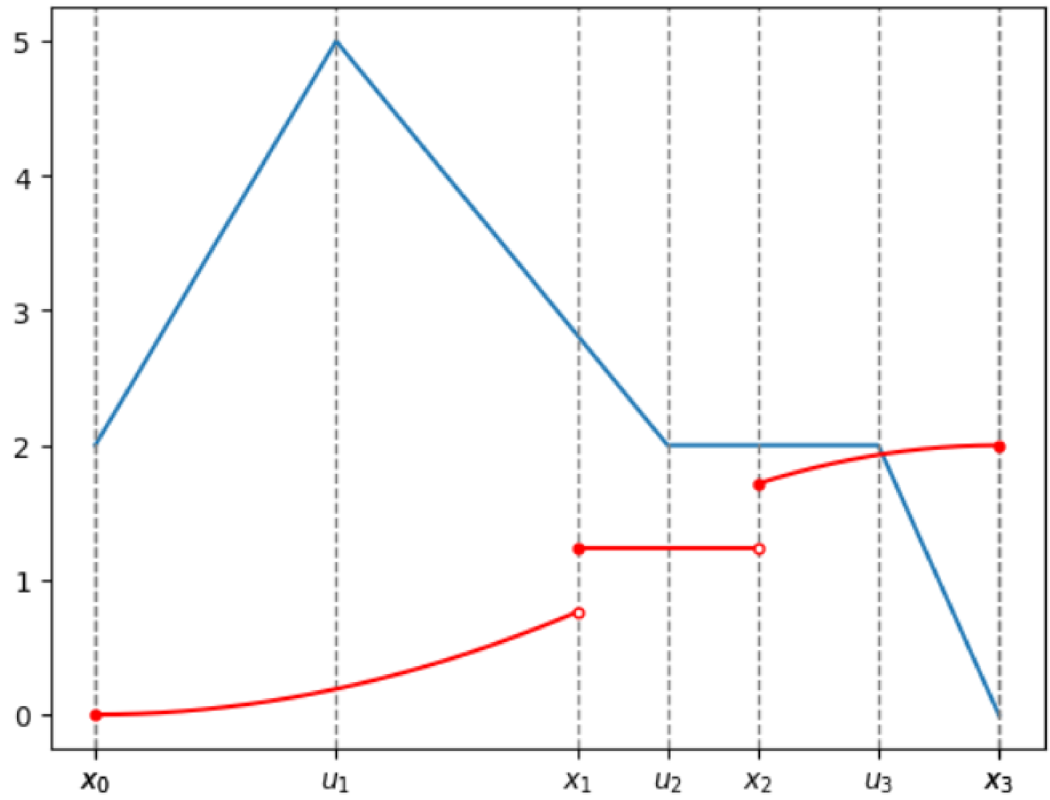
Теперь вычислим $m(A \cup B) = m((u_1, u_3) \backslash \{u_2\}) = f(u_3) - f(u_1) - m(\{u_2\}) = \frac{27}{14} - \frac{4}{21} - lim_{\delta \to 0^+}\big(f(u_2) - f(u_2 - \delta)\big) = \frac{73}{42} - (f(u_2) - f(u_2)) = \frac{73}{42}$.

Теперь вычислим $m(A) + m(B) = \frac{22}{21} + \frac{29}{42} = \frac{73}{42}$.

Получили $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

<u>Задание 3</u>. Вычислить $\int_0^1 g(x)\,dm$, где $g(x)$ непрерывная на [0; 1] функция, линейная на отрезках $(u_i, u_{i+1}), i \in \{0,1,2,3\}$ и заданная в точках излома $g(u_k) = y_k,\, k = 0, 1, 2, 3, 4$.

График двух функций:



Искомый интеграл удобно разбить по участкам, для которых обе функции g(x) и f(x) дифференцируемы.

$$\int_0^1 g(x)\,dm = \int_0^{u_1} g(x)\,dm + \int_{u_1}^{x_1} g(x)\,dm + \int_{\{x_1\}} g(x)\,dm + \int_{x_1}^{u_2} g(x)\,dm$$
$$+ \int_{u_2}^{x_2} g(x)\,dm + \int_{\{x_2\}} g(x)\,dm + \int_{x_2}^{u_3} g(x)\,dm + \int_{u_3}^{1} g(x)\,dm$$

Для участков, где обе функции дифференцируемы, с учётом того, что g – линейная функция, можно записать:

$$\int_a^b g(x)\,dm = \int_a^b g(x) f'(x)\,dx = \int_a^b (mx+k)\,f'(x)\,dx$$
$$= m\int_a^b x\,f'(x)\,dx + k\int_a^b f'(x)\,dx$$
$$= m\left(bf(b-0) - af(a) - \int_a^b f(x)\,dx\right) + k\big(f(b-0) - f(a)\big)$$

Для интеграла в точке имеем:

$$\int_{\{x_k\}} g(x)\,dm = g(x_k)\lim_{\delta\to 0^+}\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} dm = g(x_k)\lim_{\delta\to 0^+}\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} f'(x)dx$$

$$= g(x_k)\lim_{\delta\to 0^+}\big(f(x_k+\delta\,) - f(x_k-\delta\,)\big)$$

$$= g(x_k)\big(f(x_k+0) - f(x_k-0)\big)$$

Будем пользоваться данными формулами. Для каждого участка найдём коэффициенты m и k функции g.

(u_i, u_{i+1})	m	k
(u_0, u_1)	$45/4$	2
(u_1, u_2)	$-90/11$	$79/11$
(u_2, u_3)	0	2
(u_3, u_4)	-15	15

$$\int_0^{u_1} g(x)\,dm = \frac{45}{4}\left(u_1 f(u_1-0) - \int_0^{u_1} k_1 x^2\,dx\right) + 2\big(f(u_1-0) - f(0)\big)$$

$$= \frac{45}{4}\left(\frac{4}{15}\cdot\frac{4}{21} - \frac{16}{945}\right) + 2\left(\frac{4}{21}\right) = \frac{16}{21}$$

$$\int_{u_1}^{x_1} g(x)\,dm = \frac{500}{231}$$

$$\int_{\{x_1\}} g(x)\,dm = g(x_1)\big(f(x_1) - f(x_1-0)\big) = \frac{31}{11}\left(\frac{26}{11} - \frac{16}{11}\right) = \frac{310}{121}$$

$$\int_{x_1}^{u_2} g(x)\,dm = 0 \qquad \int_{u_2}^{x_2} g(x)\,dm = 0$$

$$\int_{\{x_2\}} g(x)\,dm = 2\left(\frac{12}{7} - \frac{26}{21}\right) = \frac{20}{21}$$

$$\int_{x_2}^{u_3} g(x)\,dm = \frac{3}{7} \qquad \int_{u_3}^{1} g(x)\,dm = \frac{2}{21}$$

Теперь, сложив все интегралы выше, получим значение исходного интеграла:

$$\int_0^1 g(x)\,dm = \frac{16}{21} + \frac{500}{231} + \frac{310}{121} + 0 + 0 + \frac{20}{21} + \frac{3}{7} + \frac{2}{21} = \frac{5899}{847} \approx 6.965$$

<u>Задание 4</u>. Вычислить норму $g(x)$ в пространстве $L^2((0,1),m)$ $\left(||g||^2 = \int_0^1 g^2(x)\,dm\right)$

Будем вычислять $\int_0^1 g^2(x)\,dm = \int_0^1 g^2(x)\,f'(x)dx$, из чего далее возьмём корень. Точки разбиения интеграла, очевидно, будут теми же, что и в прошлом задании.

$$\int_0^{u_1} g^2(x)\,f'(x)\,dx = \int_0^{u_1} \left(\frac{45}{4}x + 2\right)^2 2k_1 x\,dx = \frac{22}{7}$$

$$\int_{u_1}^{x_1} g^2(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{21388}{2541}$$

$$\int_{\{x_1\}} g^2(x)\,dm = g^2(x_1)\big(f(x_1) - f(x_1 - 0)\big) = \frac{31^2}{11^2}\left(\frac{26}{11} - \frac{16}{11}\right) = \frac{31^2 \cdot 10}{11^3}$$

$$\int_{x_1}^{u_2} g^2(x)\,dm = 0 \qquad \int_{u_2}^{x_2} g^2(x)\,dm = 0$$

$$\int_{\{x_2\}} g^2(x)\,dm = 4\left(\frac{12}{7} - \frac{26}{21}\right) = \frac{40}{21}$$

$$\int_{x_2}^{u_3} g^2(x)\,dm = \frac{6}{7} \qquad \int_{u_3}^{1} g^2(x)\,dm = \frac{1}{7}$$

Сложим интегралы выше:

$$\int_0^1 g^2(x)\,dm = \frac{22}{7} + \frac{21388}{2541} + \frac{31^2 \cdot 10}{11^3} + 0 + 0 + \frac{40}{21} + \frac{6}{7} + \frac{1}{7} = \frac{606115}{27951} \approx 21.685$$

<u>Задание 5</u>. Существует ли линейная функция $h(x) = ax + b$ ортогональная функции $g(x)$ в пространстве $L^2((0,1),m)$? $\left((g,h) = \int_0^1 g(x)h(x)\,dm\right)$.

$$\int_0^1 g(x)h(x)\,dm = a\int_0^1 xg(x)\,dm + b\int_0^1 g(x)\,dm = a\int_0^1 xg(x)\,dm + b\,\frac{5899}{847}$$

Вычисление $\int_0^1 xg(x)\,dm = \int_0^1 xg(x)f'(x)\,dx$ будет производиться тем же методом, разбивая отрезок интегрирования на те же участки, что были ранее.

$$\int_0^{u_1} xg(x)\,dm = \int_0^{u_1} x\left(\frac{45}{4}x + 2\right) \quad 2k_1 x\,dx = \frac{136}{945}$$

$$\int_{u_1}^{x_1} xg(x)\,dm = \frac{9056}{10395}$$

$$\int_{\{x_1\}} xg(x)\,dm = x_1 g(x_1)\big(f(x_1) - f(x_1 - 0)\big) = \frac{8}{15}\,\frac{31}{11}\left(\frac{26}{11} - \frac{16}{11}\right) = \frac{310}{11}\frac{8}{15}$$
$$= \frac{496}{33}$$

$$\int_{x_1}^{u_2} xg(x)\,dm = 0 \qquad\qquad \int_{u_2}^{x_2} xg(x)\,dm = 0$$

$$\int_{\{x_2\}} xg(x)\,dm = x_2 2\left(\frac{12}{7} - \frac{26}{21}\right) = \frac{11}{15}\cdot\frac{20}{21} = \frac{44}{63}$$

$$\int_{x_2}^{u_3} xg(x)\,dm = \frac{107}{315} \qquad\qquad \int_{u_3}^{1} xg(x)\,dm = \frac{3}{35}$$

Просуммировав значения данных интегралов, получим значение $\int_0^1 xg(x)\,dm$.

Таким образом, $\int_0^1 xg(x)\,dm = \frac{178474}{10395}$.

Имеем $a\frac{178474}{10395} + b\frac{5899}{847} = 0 \;\Rightarrow\; a = -\frac{796365}{1963214}b$

Так, линейная функция $h(x) = -\frac{796365}{1963214}bx + b$ ортогональна функции $g(x)$ в $L^2\big((0,1), m\big)$ при любом b.

Конец.