Игры двух лиц с произвольной суммой

Ищем равновесие среди вероятностных распределений, заданных на множествах $M = \{1, \dots, m\}$ и $N = \{1, \dots, n\}$

Смешанная стратегия игрока 1 x$= (x_1, \dots, x_m)$ $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ $x \geq 0$

Смешанная стратегия игрока 2 y $= (y_1, \dots, y_n)$ $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ y≥ 0

Выигрыши игроков задаются матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

МО выигрышей

$$H_1(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j \qquad H_2(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_i y_j$$

Т1 В матричных играх существует равновесие по **Нэшу** в классе смешанных стратегий.

Т2 для того, чтобы ситуация (x^*, y^*) была равновесием по **Нэшу**, необходимо и достаточно, чтобы для любых чистых стратегий $i \in M$ и $j \in N$, выполнялись условия:

$$H_1(x_i, y^*) \leq H_1(x^*, y^*) \qquad H_2(x^*, y_j) \leq H_2(x^*, y^*)$$

Игры 2× 2

Смешанные стратегии игроков

$(x, 1-x)$ $\qquad$ $(y, 1-y)$

Выигрыши игроков

$$H_1(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j = xAy^{\mathrm{т}} = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$$

$$H_2(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_i y_j = xBy^{\mathrm{т}} = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}$$

Согласно Т2 равновесие (x, y) определяется неравенствами:

$H_1(0,y) \le H_1(x,y) \quad H_1(1,y) \le H_1(x,y)$

$H_2(x,0) \le H_2(x,y) \quad H_2(x,1) \le H_2(x,y)$

$$(a_{22} - a_{12})x \le (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy$$

(*)

$$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})y(1-x) \le (a_{22} - a_{12})(1-x)$$

Изобразим на единичном квадрате множество точек (x, y), удовлетворяющим условиям *.

Пусть $x = 0$ $\quad (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})y \leq (a_{22} - a_{12})$

Пусть $x = 1$ $\quad (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})y \geq (a_{22} - a_{12})$

Пусть $0 < x < 1$ $\quad (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})y = (a_{22} - a_{12})$

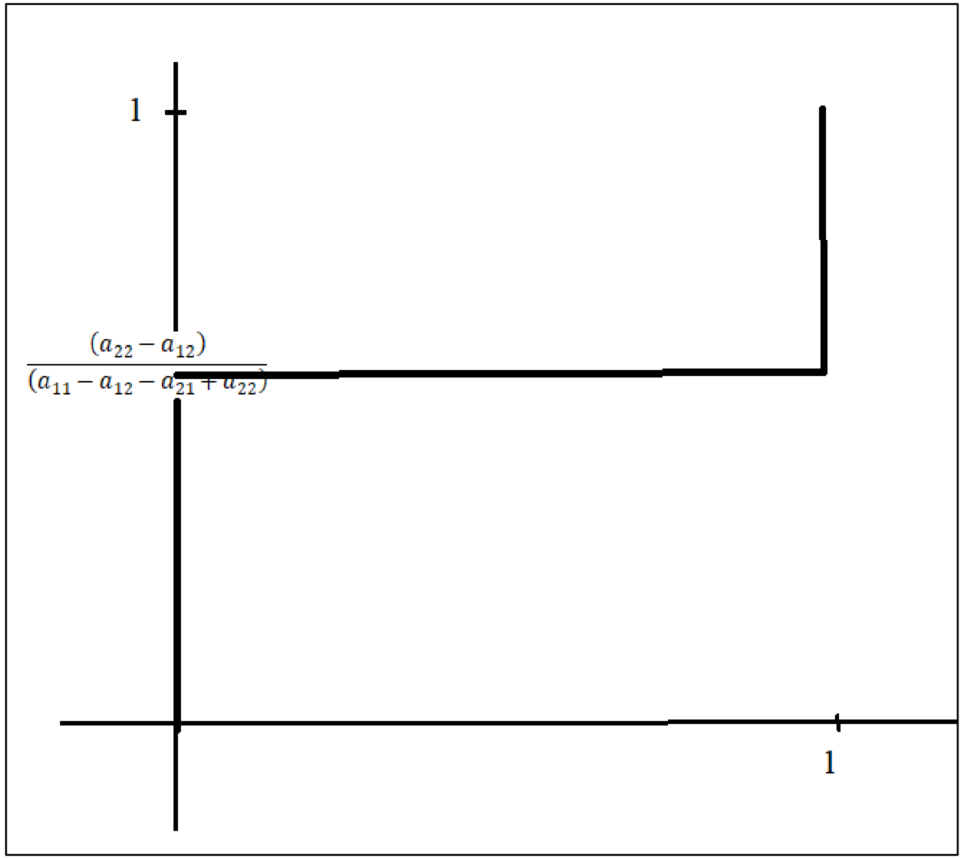

Рисунок для положительных скобок.