ДЗ 2. Норма оператора.

Вариант 19.

Выполнил: Шаганов Вячеслав Андреевич, студент группы 1384

Теоретические положения

1. Норма оператора

   $||A|| = \sup\{||Ax||, ||x|| \leq 1\}$

   Можно показать, что норма оператора в l^1 будет равна максимуму среди сумм модулей в столбце, а в l^∞ - в строке

2. Число обусловленности

   Число обусловленности определяет то, насколько чувствительна система ЛУ к изменению правой части.
   $\text{cond}(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$

   Для систем $Ax = b; A(x + \Delta x) = b + \Delta b$
   Справедливо неравенство $\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq cond(A)\frac{||\Delta b||}{||b||}$

Задана матрица A = $\begin{bmatrix} \frac{6789}{107} & \frac{3360}{107} & -\frac{2490}{107} & -\frac{4062}{107} \\ \frac{732}{107} & \frac{2127}{107} & -\frac{1860}{107} & \frac{168}{107} \\ \frac{1296}{107} & \frac{198}{107} & \frac{1143}{107} & -\frac{1818}{107} \\ -\frac{5148}{107} & -\frac{4050}{107} & \frac{3672}{107} & \frac{2781}{107} \end{bmatrix}$

Задана матрица $A = \begin{bmatrix} \frac{6789}{107} & \frac{3360}{107} & -\frac{2490}{107} & -\frac{4062}{107} \\ \frac{732}{107} & \frac{2127}{107} & -\frac{1860}{107} & \frac{168}{107} \\ \frac{1296}{107} & \frac{198}{107} & \frac{1143}{107} & -\frac{1818}{107} \\ -\frac{5148}{107} & -\frac{4050}{107} & \frac{3672}{107} & \frac{2781}{107} \end{bmatrix}$

Задание 1

Необходимо посчитать её норму в l_4^1 и l_4^∞

Для l_4^1 норму можно посчитать как максимум столбцовых сумм. Она будет равна $\frac{13965}{107}$ и достигается на векторе $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Для l_4^∞ норму можно посчитать как максимум строковых сумм. Она будет равна $\frac{16701}{107}$ и достигается на векторе $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

+ Code + Markdown

Задание 2

```
A_inv = A.inv() ···
```

Необходимо посчитать норму A^{-1} в l_4^1 и l_4^∞

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{367}{2889} & \frac{224}{2889} & -\frac{166}{2889} & \frac{46}{321} \\ \frac{68}{2889} & \frac{373}{2889} & \frac{164}{2889} & \frac{184}{2889} \\ \frac{784}{8667} & \frac{1166}{8667} & \frac{311}{8667} & \frac{142}{963} \\ \frac{1300}{8667} & \frac{1334}{8667} & -\frac{616}{8667} & \frac{583}{2889} \end{bmatrix}$$

Необходимо посчитать норму A^{-1} в l_4^1 и l_4^∞

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{367}{2889} & \frac{224}{2889} & -\frac{166}{2889} & \frac{46}{321} \\ \frac{68}{2889} & \frac{373}{2889} & \frac{164}{2889} & \frac{184}{2889} \\ \frac{784}{8667} & \frac{1166}{8667} & \frac{311}{8667} & \frac{142}{963} \\ \frac{1300}{8667} & \frac{1334}{8667} & -\frac{616}{8667} & \frac{583}{2889} \end{bmatrix}$$

Для l_4^1 норму можно посчитать как максимум столбцовых сумм. Она будет равна $\frac{1607}{2889}$ и достигается на векторе $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Для l_4^∞ норму можно посчитать как максимум строковых сумм. Она будет равна $\frac{4999}{8667}$ И достигается на векторе $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Задание 3

Необходимо посчитать число обусловленности матрицы A в рассмотренных ранее пространствах.

$$\mathrm{cond}(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$$

1. l_4^1: $\mathrm{cond}(A) = \frac{13965}{107} \cdot \frac{1607}{2889} = \frac{7480585}{103041} \approx 72.56$
2. l_4^∞: $\mathrm{cond}(A) = \frac{16701}{107} \cdot \frac{4999}{8667} = \frac{27829433}{309123} \approx 90.03$

Задание 4

```
A_star = sol.find_conj_matrix(A) ...
```

Получим матрицу $G = A^* A$

Задание 4

```python
A_star = sol.find_conj_matrix(A) ···
```

Получим матрицу $G = A^* A$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{18749419456}{297685449} & \frac{1980234268}{297685449} & \frac{10413443050}{893056347} & -\frac{43503273542}{893056347} \\ \frac{9504801124}{297685449} & \frac{5942204152}{297685449} & \frac{1950726250}{893056347} & -\frac{33162128306}{893056347} \\ -\frac{7295324390}{297685449} & -\frac{5344744934}{297685449} & \frac{8517160084}{893056347} & \frac{29072772598}{893056347} \\ -\frac{11077817542}{297685449} & \frac{576275342}{297685449} & -\frac{14506061158}{893056347} & \frac{24133715252}{893056347} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 62.98 & 6.652 & 11.66 & -48.71 \\ 31.93 & 19.96 & 2.184 & -37.13 \\ -24.51 & -17.95 & 9.537 & 32.55 \\ -37.21 & 1.936 & -16.24 & 27.02 \end{bmatrix}$$

И найдём её собственные числа и вектора:

```python
eigenvals = [re(item[0].evalf()) for item in G.eigenvects()] ···
```

$$\lambda_1 = 2.4037, \lambda_2 = 8.7820, \lambda_2 = 27.3635, \lambda_2 = 80.9569$$

$$d_1 = \begin{bmatrix} 0.7264 \\ 0.8005 \\ -0.0531 \\ 1.0 \end{bmatrix}, d_2 = \begin{bmatrix} 1.3128 \\ -0.0583 \\ -1.8916 \\ 1.0 \end{bmatrix}, d_2 = \begin{bmatrix} 2.3154 \\ 3.5234 \\ -4.9057 \\ 1.0 \end{bmatrix}, d_2 = \begin{bmatrix} -2.269 \\ -1.7367 \\ 1.671 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$ 1

Заметим, что все собственные числа положительны, откуда можно судить о положительной определённости матрицы G.

Матрица G позволяет определить норму матрицы A в l_4^2 в случае, когда $A \neq A^{-1}$.

$||G|| = \max \lambda_i$

$||A|| = \sqrt{\max \lambda_i}$ следует из того, что $||Ax||^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (Gx, x) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i x_i^2 \leq \max \lambda_i ||x|| = \max \lambda_i$

Задание 5

Необходимо вычислить число обусловленности матрицы A в пространстве l_4^2

Норма A в этом пространстве выражается как корень из максимального из собственных чисел матрицы AA^*, т.е. G.

Таким образом, $||A|| = \sqrt{\lambda_4} = \sqrt{80.9569} \approx 9$

Норму A^{-1} можно получить из того факта, что, если матрица A имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то матрица A^{-1} будет иметь собственные числа $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$. Отсюда получаем, что норма A^{-1} будет равна корню из обратного к минимальному собственному числу матрицы G.

$$||A^{-1}|| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{\sqrt{2.4037}} \approx 0.645$$

Тогда $\mathrm{cond}(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \approx 9 \cdot 0.645 = 5.805$

Задание на пятёрку

Методом итераций решить систему уравнений $Ax = b$. Начальное приближение $x_0 = (1, 1, 1, 1)$.
$A = I - B, \quad B = G^{-1}, \quad b = (1/2, 1/3, 1/4, 1/5)$

```
B = G.inv() ···
```

Матрица $B \approx \begin{bmatrix} 0.144 & 0.036 & 0.112 & 0.174 \\ 0.0865 & 0.138 & 0.148 & 0.168 \\ -0.0405 & 0.0711 & 0.059 & -0.0464 \\ 0.168 & 0.0824 & 0.18 & 0.237 \end{bmatrix}$, её норма: $\frac{1270289345747l5}{190280490920136}$ ≈ 0.6676

Можно воспользоваться методом итерации для поиска решения: $x_{i+1} = Bx_i + b$

Заметим, что норма B меньше единицы, поэтому сходимость будет иметь место.

Точное решение выглядит следующим образом: $x_* = \begin{bmatrix} 0.7564 \\ 0.6137 \\ 0.2521 \end{bmatrix}$

Задание на пятёрку

Методом итераций решить систему уравнений $Ax = b$. Начальное приближение $x_0 = (1, 1, 1, 1)$.
$A = I - B, \quad B = G^{-1}, \quad b = (1/2, 1/3, 1/4, 1/5)$

```
B = G.inv() ···
```

Матрица $B \approx \begin{bmatrix} 0.144 & 0.036 & 0.112 & 0.174 \\ 0.0865 & 0.138 & 0.148 & 0.168 \\ -0.0405 & 0.0711 & 0.059 & -0.0464 \\ 0.168 & 0.0824 & 0.18 & 0.237 \end{bmatrix}$, её норма: $\frac{127028934574715}{190280490920136} \approx 0.6676$

Можно воспользоваться методом итерации для поиска решения: $x_{i+1} = Bx_i + b$

Заметим, что норма B меньше единицы, поэтому сходимость будет иметь место.

Точное решение выглядит следующим образом: $x_* = \begin{bmatrix} 0.7564 \\ 0.6137 \\ 0.2521 \\ 0.5548 \end{bmatrix}$

Теперь проведём 10 итераций и посмотрим на x_5, x_{10}.

$x_5 = \begin{bmatrix} 0.7638 \\ 0.6219 \\ 0.2516 \\ 0.565 \end{bmatrix}$, $x_{10} = \begin{bmatrix} 0.7565 \\ 0.6138 \\ 0.2521 \\ 0.555 \end{bmatrix}$

Как можно видеть, метод пришёл очень близко к точному решению.

Конец.