МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра МОЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №3

по дисциплине «Элементы функционального анализа»

Тема: Мера и интеграл

Студентка гр. 1384	________________	Усачева Д. В.
Преподаватель	________________	Коточигов А.М.

Санкт-Петербург

2024

Задание.

Вариант 41

$$x_k x_0 = 0 < x_1 < x_2 < x_3 = 1, v_j v_0 = 0 < v_1 < v_2 = v_3 < v_4 < v_5$$
$$f(x_0) = v_0, f(x_1 - 0) = v_1, f(x_1) = v_3, f(x_2 - 0) = v_4, f(x_3) = v_5$$
$$f(x) = k_1 x^2, x_0 \le x < x_1$$
$$f(x) = k_2, x_1 \le x < x_2$$
$$f(x) = k_4 - k_3(x_3 - x)^2, x_2 \le x \le x_3$$

$$x_0 = 0; x_1 = \frac{5}{13}; x_2 = \frac{9}{13}; x_3 = 1$$
$$v_0 = 0; v_1 = \frac{5}{8}; v_2 = 1; v_3 = 1; v_4 = \frac{11}{8}; v_5 = 2$$
$$u_0 = 0; u_1 = \frac{5}{26}; u_2 = \frac{7}{13}; u_3 = \frac{11}{13}; u_4 = 1$$
$$y_0 = 0; y_1 = 3; y_2 = 3; y_3 = 5; y_4 = 5$$

Основные теоретические положения.

Предположим, что на всех подмножествах E отрезка [0,1] задана мера m, обладающая следующими свойствами:

1. $m(E) \ge 0$
2. для любых непересекающихся множеств, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, выполнено $m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2)$
3. $m(E) = m(E + x) \forall x \in R$
4. *<u>Счетно-аддитивная мера</u>* на отрезке [0,1] порождена функцией f(x) :

   (a) если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) \le f(x_2)$

   (b) $\forall x \lim_{\delta \to 0, \delta > 0} f(x + \delta)$

$$m((a,b)) = f(b - 0) - f(a + 0) = f(b - 0) - f(a)$$
$$m([a,b]) = f(b + 0) - f(a - 0) = f(b) - f(a - 0)$$

Вещественная функция f, заданная на отрезке [0,1], называется *<u>измеримой</u>*, если для любого вещественного числа t измеримо множество

$$E_t = \{x \in [0,1]: f(x) < t\}$$

Интеграл Лебега. $\int_0^1 f(x)dm$ от простой функции $f(x) = \sum_n c_n \chi_n(x)$ по отрезку [0,1] называется $\sum_n c_n m(A_n)$, если ряд сходится

Поскольку нет никакого естественного порядка для нумерации множеств (A_n), любую измеримую функцию можно представить, как разность двух положительных измеримых функций $f = f_- + f_+$, где $f_+(x) = f(x)$, когда $f(x) \geq 0, f_+(x) = 0$, когда $f(x) < 0$

$f_-(x) = -f(x)$, когда $f(x) < 0, f_-(x) = 0$, когда $f(x) \geq 0$

Функция f называется интегрируемой по Лебегу, если существуют последовательность измеримых простых функций f_n таких, что $\lim_n f_n(x) = f(x)$ и предел $\lim_n \int_0^1 f_n(x)dm = I$, где число I называют интегралом Лебега

Интеграл по любому измеримому множеству A определяется равенством:

$$\int_A f(x)dm = \int_0^1 f(x)\chi_A(x)dm$$

где $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A, \chi_A(x) = 0$ при $x \notin A$

Выполнение работы.

1. Вычислить k_1, k_2, k_3, k_4. Нарисовать график.

Из функции $k_1 x_1^2 = v_1$

$k_1 = \frac{v_1}{x_1^2} = 4.225$

На интервале $[x_1, x_2\ )$, функция постоянна $k_2 = v_2$

$k_2 = 1$

На интервале $[x_2, x_3]$ функция задается как $k_4 - k_3(1-x)^2$, в крайних точках она равна v_4 и v_5.

$$k_4 = 2, k_3 = \frac{845}{128}$$

Построенный график см. рис. 1.

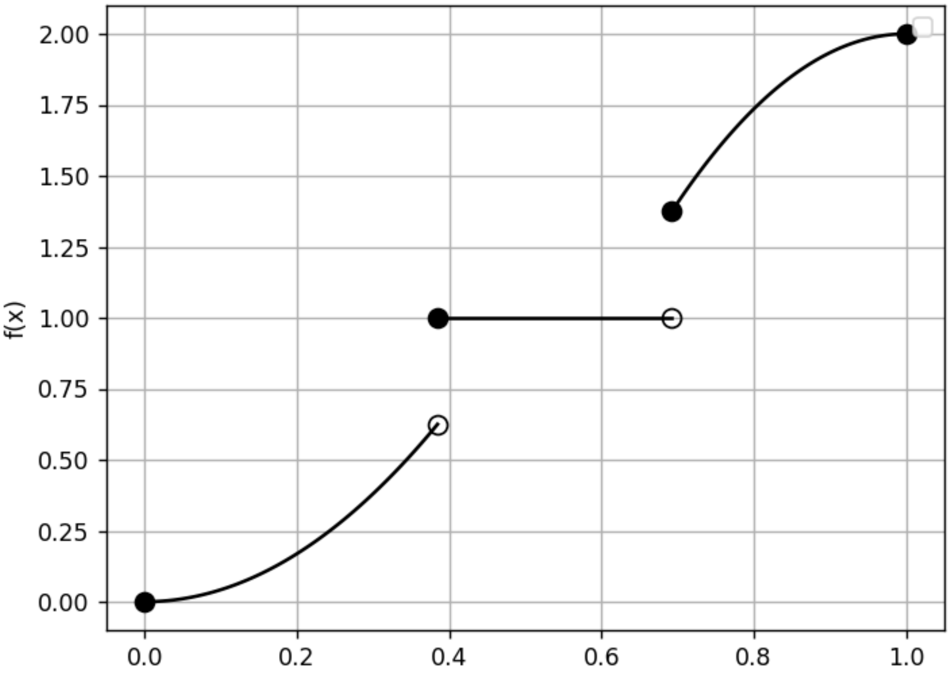

Рисунок 1 – График функции

2. <u>Положим $A = (u_1, u_2), B = (u_2, u_3)$. Показать, что $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.</u>

Для начала вычислим $m(A) = m(u_1, x_1) + m(x_1) + m(x_1, u_2)$

$$m(u_1, x_1) = \int_{u_1}^{x_1} f'(x)dx = \int_{u_1}^{x_1} 2k_1 x dx = k_1(x_1^2 - u_1^2) = \frac{15}{32}$$

$$m(x_1) = \lim_{\delta \to 0^+} \big(f(x_1 + \delta) - f(x_1 - \delta)\big) = f(x_1) - f(x_1 - 0) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$m(x_1, u_2) = \int_{x_1}^{u_2} f'(x)dx = f(u_2) - f(x_1) = v_3 - v_3 = 0$$

Тогда $m(A) = \frac{15}{32} + \frac{12}{32} + 0 = \frac{27}{32} \approx 0.844$

Проводя аналогичные вычисления, получим $m(B) = \frac{17}{32} \approx 0.531$

$m(A \cup B) = m\big((u_1, u_3)\{u_2\}\big) = f(u_3) - f(u_1) - f(\{u_2\}) = f(u_3) - f(u_1) - \lim_{\delta \to 0^+} \big(f(u_2) - f(u_2 - \delta)\big) = f(u_3) - f(u_1) - \big(f(u_2) - f(u_2)\big) = \frac{59}{32} - \frac{15}{32} = \frac{11}{8} = 1.375$

Тогда $m(A \cup B) = 0.844 + 0.531 = 1.375$

3. <u>Вычислить $\int_0^1 g(x)dm$, где g(x) непрерывная на [0; 1] функция, линейная на</u>

отрезках $(u_i, u_i + 1), i \in 0{,}1{,}2{,}3$ и заданная в точках излома $g(u_k) = y_k, k = 0{,}1{,}2{,}3{,}4.$

Чтобы вычислить интеграл достаточно разбить отрезок (0,1) точками, где либо имеет разрыв функция f(x), либо имеет излом функция g(x) и подсчитать «интеграл» в точках разрыва.

Интегралы по интервалам, где функция f(x) и g(x) дифференцируемы сводятся к интегралу Римана, как и при вычислении меры $\int_l g(x)f'(x)dx$, интеграл по точке вычисляется через предел

$$\int_{x_1} g(x)dm = \lim_{\delta\to 0, \delta>0} \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} g(x)dm = g(x) \lim_{\delta\to 0, \delta>0} \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} dm$$

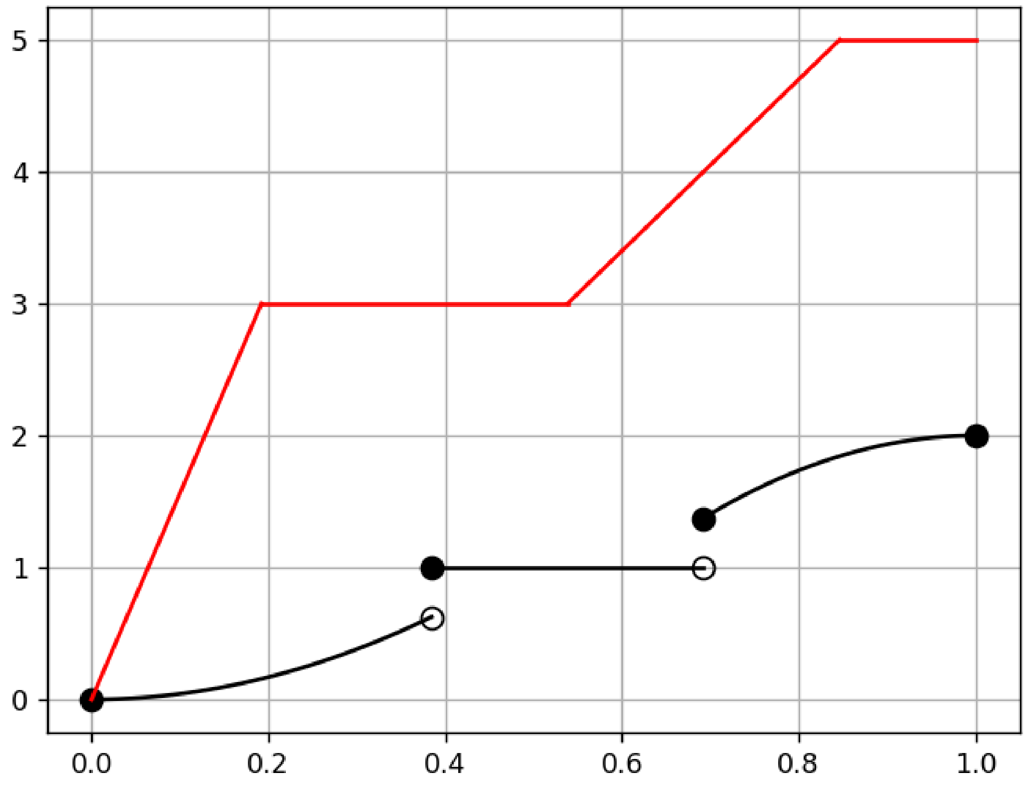

Рисунок 2 – График функций

Итог:

$$f(x): x_0 = 0 < x_1 < x_2 < x_3 = 1$$
$$g(x): u_0 = 0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4 = 1$$
$$0 < u_1 < x_1 < u_2 < x_2 < u_3 < 1$$

- Для 0 ≤ x ≤ 5/26: g(x)= 78/5 * x
- Для 5/26 <x ≤ 7/13: g(x) = 3
- Для 7/13 <x ≤ 11/13: g(x) = 26x - 23/13
- Для 11/13 <x ≤ 1: g(x) = 5

* Для 0 ≤ x ≤ 5/13: f(x) = 4.225 * x**2
* Для 5/13 <x ≤ 9/13: f(x) = 1
* Для 9/13 <x ≤ 1: f(x) = 2 - 845/128 * (1 - x)

$$\int_0^1 g(x)dm = \int_0^{u_1} g(x)f'(x)dx + \int_{\{x_1\}} g(x)dm + \int_{u_1}^{x_1} g(x)f'(x)dx +$$
$$+ \int_{x_1}^{u_2} g(x)f'(x)dx + \int_{u_2}^{x_2} g(x)f'(x)dx + \int_{\{x_2\}} g(x)dm +$$
$$+ \int_{x_2}^{u_3} g(x)f'(x)dx + \int_{u_3}^{1} g(x)f'(x)dx =$$
$$= \frac{5}{16} + \frac{15}{8} + \frac{45}{32} + 0 + 0 + \frac{11}{2} + \frac{25}{12} + \frac{25}{32} \approx 11.958$$

4. Вычислить норму $g(x)$ в пространстве $L^2((0,1), m)(\| g \|^2 = \int_0^1 g^2(x)dm)$

Будем вычислять $\int_0^1 g^2(x)dm = \int_0^1 g^2(x)f'(x)dx$, из чего далее возьмём корень. Точки разбиения интеграла, будут теми же, что и в задании 3.

$$\int_0^{u_1} g^2(x)f'(x)dx = \frac{45}{64}$$
$$\int_{u_1}^{x_1} g^2(x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{135}{32}$$
$$\int_{\{x_1\}} g^2(x)dm = g^2(x_1)\big(f(x_1) - f(x_1 - 0)\big) = 3^2\left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{27}{8}$$
$$\int_{\{x_2\}} g^2(x)dm = g^2(x_2)\big(f(x_2) - f(x_2 - 0)\big) = \frac{633}{104}$$
$$\int_{x_2}^{u_3} g^2(x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{845915}{2496}$$
$$\int_{u_3}^{1} g^2(x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1625}{64}$$

Сложим интегралы выше:

$$\int_0^1 g^2(x)dm = \int_0^{u_1} g^2(x)dm + \int_{u_1}^{x_1} g^2(x)dm + \int_{\{x_1\}} g^2(x)dm +$$

$$\int_{\{x_2\}} g^2(x)dm + \int_{u_2}^{u_3} g^2(x)dm + \int_{u_3}^{1} g^2(x)dm \approx 73.652$$

5. Существует ли линейная функция $h(x) = ax + b$ ортогональная функции $g(x)$ в пространстве $L^2((0,1), m)$ $\left((g,h) = \int_0^1 g(x)h(x)dm\right)$.

$$\int_0^1 g(x)h(x)dm = a\int_0^1 xg(x)dm + b\int_0^1 g(x)dm = a\int_0^1 xg(x)dm + b * 11.958$$

Вычисление $\int_0^1 xg(x)dm = \int_0^1 xg(x)f'(x)dx$ будет производиться тем же методом, разбивая отрезок интегрирования на те же участки, что были ранее.

$$\int_0^{u_1} xg(x)dm = \int_0^{u_1} x\left(\frac{78}{5}x\right)2 * 4.225 * x\,dx = \frac{75}{1664}$$

$$\int_{u_1}^{x_1} xg(x)dm = \frac{175}{416}$$

$$\int_{\{x_1\}} xg(x)dm = x_1 g(x_1)\big(f(x_1) - f(x_1 - 0)\big) = \frac{5}{13} * 3 * \left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{45}{104}$$

$$\int_{\{x_2\}} g^2(x)dm = x_2 g(x_2)\big(f(x_2) - f(x_2 - 0)\big) = \frac{99}{26}$$

$$\int_{x_2}^{u_3} xg(x)dm = \frac{1115}{78}$$

$$\int_{u_3}^{1} xg(x)dm = \frac{75}{16}$$

Просуммировав значения данных интегралов, получим значение $\int_0^1 xg(x)dm = \frac{118253}{4992} \approx 23.689$

Имеем $a * 23.689 + b * 11.958 = 0 \Rightarrow a = -0.505b$

Так, линейная функция $h(x) = -0.505bx + b$ ортогональна функции $g(x)$ в $L^2((0,1), m)$ при любом b.