Мера множества

Необходимость сравнения множеств «по размеру» очень важна при работе с функциями. Определение пространств L^p остается не завершенным, пока не будет дано точного описания классов ограниченных функций, интеграл от разности которых равен нулю. Наивный ответ на этот вопрос: функции должны совпадать вне «маленького» множества, требует определения «маленького» множества. В свое время формирование ответа на это вопрос потребовало разработки новых конструкций, получивших название теории меры, созданной французским математиком Лебегом в начале XX века.

Толчком к построению теории меры послужил, построенный Кантором пример маленького множества, в котором содержится очень много точек. Конструкция множества очень проста: из отрезка $[0,1]$ удаляется средний отрезок $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, эта процедура применяется к двум оставшимся отрезкам и так далее. Легко понять, что общая длина удаленных отрезков в пределе даст 1, но удалены не все точки. Остались, например, точки $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Более тщательный анализ показывает, что останутся все точки вида $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{3^n}$, $\epsilon_n \in \{0,2\}$ (заметим, что $\frac{1}{3} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n}$). Но равномощное множество $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{2^n}$, $\delta_n \in \{0,1\}$, представляет собой двоичную запись координат всех точек отрезка $[0,1]$, то есть множество этих точек несчетно. Значит, мощность множества не связана с его «размером».

Теория меры, построенная Лебегом дает алгоритм, хотя и очень сложный, вычисления меры множеств. Но она не гарантирует, что измеримыми будут все множества. Имеется очень сложный пример конструкции пары непересекающихся множеств на поверхности сферы (в размерности два), таких что любая мера, обладающая естественными свойствами площади, припишет объединению этих множеств число, отличное от суммы мер этих множеств. Такие множества приходится считать неизмеримыми. Решая задачи, связанные с функциями, невозможно уклониться от предельных переходов, и здесь очень важно, чтобы мера обладала свойством счетной аддитивности, то есть мера счетного объединения непересекающихся измеримых множеств равнялась бы сумме мер этих множеств. Если принять это требование, то окажется, что даже на отрезке (в размерности один) не существует меры, заданной на всех подмножествах отрезка $[0,1]$.

Чтобы понять, насколько хорошо работает построенная Лебегом теория, полезно оценить сложность конструкции неизмеримого множества. Для построения такого множества необходимо использовать аксиому выбора.(Описание конструкции приведено в методичке)

Переходя к изложению основных идей, позволяющих построить меру Лебега, еще раз сформулируем цель конструкции: на максимально широком классе подмножеств множества отрезка надо определить размер (меру) множеств, обладающую естественными геометрическими свойствами:

1)положительность, 2)счетная аддитивность, 3) инвариантность по сдвигам.

Для краткости здесь будет описано построение меры на отрезке $[0, 1]$. Построение меры на прямой и в евклидовых пространствах более высоких размерностей отличается только техническими деталями.

Первый этап — построение меры на отрезках и их конечных объединениях – носит чисто терминологический характер. Для отрезков все очевидно:

$$m([a, b]) = b - a.$$

Заметим, что для меры Лебега граничные точки несущественны, так как мера любой точки равна нулю (иначе невозможно сохранить инвариантность меры по сдвигу).

Второй этап — определение меры на множествах, полученных из отрезков с использованием стандартных операций над множествами: объединения $A \cup B$, пересечения $A \cap B$ и дополнения $[0, 1] \setminus A$.

Если эти операции применяются конечное число раз (такие множества называют *элементарными*), то в результате всегда будет получаться множество, состоящее из конечного числа непересекающихся отрезков и определение меры не вызывает затруднений. Все требуемые свойства меры, очевидно, выполняются.

Данное выше определение меры требует проверки корректности, то есть доказательства независимости меры от способа разбиения множества на непересекающиеся отрезки. Это верно, поскольку для любых двух таких разбиений можно составить третье, такое что каждый отрезок первого или второго разбиения является объединением нескольких отрезков третьего разбиения, легко видеть, что корректность определения следует из того, что сумма не зависит от порядка слагаемых.

Третий этап— расширение совокупности элементарных множеств за счет рассмотрения бесконечных объединений и пересечений элементарных множеств. Существенным моментом конструкции становится проверка счетной аддитивности. Доказательство этого факта использует важное топологическое понятие компактного множества (в рассматриваемом случае отрезка — это любое замкнутое множество).

Центральную роль в доказательстве играет следующее свойство компактных множеств.
Предложение
Если компактное множество покрыто системой открытых интервалов, то из них всегда можно выбрать конечное число интервалов так, что выбранные интервалы по-прежнему покрывают множество.

Счетную аддитивность можно получить из следующего утверждения.
Теорема о монотонности

Если множество B и множества A_n, $n = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ являются элементарными и $B \subset \bigcup\limits_n A_n$, то

$$m(B) \leq \sum_n m(A_n).$$

Доказательство приведено в методичке

Следствие счетная аддитивность меры
Пусть множество B и множества A_n, $n = 1, 2, \ldots$, **являются элементарными,** $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и множества A_n попарно не пересекаются. Тогда

$$m(B) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

Доказательство
Обозначим $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Множества B, B_n удовлетворяют условиям теоремы 6.1 и, следовательно, $m(B) \leq \sum\limits_n m(A_n)$. С другой стороны, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset B$ для любого n и из аддитивности меры следует, что $m(B) \geq \sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k)$. Суммы в правой части неравенства образуют монотонно возрастающую ограниченную (длиной промежутка) последовательность. Следовательно, эта последовательность имеет предел и $m(B) \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. Объединяя неравенства получим $m(B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

Проведенные конструкции позволяют вычислить меру для очень большой совокупности множеств.

Пример 1
Всякое конечное множество A измеримо. Действительно, пусть A состоит из k точек. Построив окрестности каждой точки длиной $\frac{\epsilon}{k}$, получаем совокупность интервалов, покрывающих множество A, общей длиной ϵ, где ϵ сколь угодно мало. Следовательно, мера A меньше ϵ, и поскольку ϵ — произвольное положительное число, то $m(A) = 0$.

Пример 2
Всякое счетное множество A измеримо. Чтобы в этом убедиться, пронумеруем точки множества A и выберем число ϵ. Построим окрестность длиной $\frac{\epsilon}{2}$ для первой точки, длиной $\frac{\epsilon}{4}$ – для второй точки, длиной $\frac{\epsilon}{2^n}$ — для n-й и т. д. Счетная аддитивность меры гарантирует, что мера покрытия равна ϵ, следовательно, $m(A) < \epsilon$, а поскольку ϵ — произвольное положительное число, то $m(A) = 0$. В частности, множество рациональных точек отрезка $[0, 1]$ имеет меру, равную нулю. Множество иррациональных точек отрезка $[0, 1]$, являющееся дополнением множества рациональных чисел, имеет меру, равную 1.

Пример 3
Всякое открытое множество измеримо. Из определения отрытого множества следует,

что оно всегда содержит внутри себя интервал. В свою очередь, всякий интервал содержит рациональное число. Следовательно, открытое множество можно представить в виде объединения конечного или счетного числа непересекающихся открытых интервалов. Чтобы вычислить меру такого множества, достаточно воспользоваться счетной аддитивностью меры. Переходя к дополнениям, получим, что всякое замкнутое множество измеримо. В частности, измеримо канторово множество, определенное в начале этого параграфа.

Однако, как было существуют примеры множества, для которых нельзя определить счетноаддитивную меру. Для того, чтобы разделить множества на измеримые и неизмеримые с сохранением стандартных свойств меры, требуется еще один шаг.

Четвертый этап — определение измеримых множеств. Временно пожертвуем условием счетной аддитивности и введем суррогат меры, заданный на всех множествах.

Определение
Внешней мерой множества A называется

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} m(B_k) : B_k - \text{открытые множества},\ A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k\right\}.$$

Замечание
Внешняя мера элементарного множества совпадает с мерой, определенной выше. Для внешней меры можно доказать аналог теоремы о монотонности, но счетной аддитивности гарантировать не удастся (поскольку бывают неизмеримые множества).

Измеримыми будут названы множества «близкие» к элементарным. Для этого потребуется еще один термин.

Определение
Внутренняя мера множества A — это внешняя мера его дополнения — $m^*\big([0,1] \setminus A\big)$.

Определение
Измеримыми называются те множества, для которых внешняя мера равна внутренней. Совокупность всех измеримых множеств будет обозначаться через $\mathfrak{M}$.

К сожалению, процедура вычисления инфимума не обладает никаким универсальным алгоритмом и не допускает никакого явного способа различить измеримые и неизмеримые множества. Часто бывает полезным другое эквивалентное определение измеримости.

Предложение
Множество A **измеримо тогда и только тогда**, когда для любого положительного ϵ существует элементарное множество B, такое что $m^*(A \triangle B) < \epsilon$.

Здесь был использован символ симметрической разности двух множеств

$$A \triangle B = \big(([0,1] \setminus A) \cap B\big) \cup \big(([0,1] \setminus B) \cap A\big).$$

Следствие
Всякое подмножество измеримого множества меры ноль измеримо.

Проверка того, что так определенная на $\mathfrak{M}$ мера является положительной, счетноаддитивной и инвариантной по сдвигам, требует только тщательной работы с уже имеющимися определениями. Познакомиться с доказательством можно по книге Колмогорова.

Замечание
Теория меры переносится на случай двух и более измерений. Все, что требуется изменить — это перейти от отрезков к параллелепипедам, соответствующей размерности. Более того, все эти конструкции, можно проводить в произвольном банаховом пространстве. Но там возникнут большие трудности, связанные со сложностью описания компактных множеств в этих пространствах. Несложно показать, что шар в бесконечномерном банаховом пространстве не является компактом.

Отметим еще одно важное обстоятельство — в приложениях часто возникает необходимость рассматривать меры, не являющиеся инвариантными по сдвигу. Типичным примером являются задачи теории вероятностей; легко понять, что вероятность попадания случайной величины в фиксированное множество фактически задает меру, и если эта случайная величина не является равномерно распределенной, то соответствующая мера не будет инвариантной по сдвигу.