ДЗ 3. Мера и интеграл. Вариант 31.

Выполнил: Лукин Евгений Юрьевич, группа 1384.

19 апреля 2024 г.

1 Теоретические сведения.

Предположим, что на всех подмножествах E отрезка [0,1] задана мера m, обладающая следующими свойствами:

1. $m(E) \geq 0$
2. для любых непересекающихся множеств, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, выполнено $m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2)$
3. $m(E) = m(E + x) \forall x \in R$
4. Счетно-аддитивная мера на отрезке [0,1] порождена функцией f (x):
   (a) если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) \leq f(x_2)$
   (b) $\forall x \lim_{\delta \to 0, \delta > 0} f(x + \delta)$

$$m((a, b)) = f(b - 0) - f(a + 0) = f(b - 0) - f(a)$$

$$m([a, b]) = f(b + 0) - f(a - 0) = f(b) - f(a - 0)$$

Вещественная функция f, заданная на отрезке [0,1], называется измеримой, если для любого вещественного числа t измеримо множество

$$E_t = \{x \in [0,1] : f(x) < t\}$$

Интеграл Лебега. $\int_0^1 f(x)dm$ от простой функции $f(x) = \sum_n c_n \chi_n(x)$ по отрезку [0, 1] называется $\sum_n c_n m(A_n)$, если ряд сходится

Поскольку нет никакого естественного порядка для нумерации множеств (A_n), любую измеримую функцию можно представить, как разность двух положительных измеримых функций $f = f_- + f_+$, где

$f_+(x) = f(x)$, когда $f(x) \geq 0, f_+(x) = 0$, когда $f(x) < 0$

$f_-(x) = -f(x)$, когда $f(x) < 0, f_-(x) = 0$, когда $f(x) \geq 0$

Функция f называется интегрируемой по Лебегу, если существуют последовательность измеримых простых функций f_n таких, что $\lim_n f_n(x) = f(x)$ и предел $\lim_n \int_0^1 f_n(x)dm = I$, где число I называют интегралом Лебега

Интеграл по любому измеримому множеству A определяется равенством:

$$\int_A f(x)dm = \int_0^1 f(x)\chi_A(x)dm,$$

где $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A, \chi_A(x) = 0$ при $x \notin A$

2 Исходные данные.

Описание функции задано в виде:
$x_k x_0 = 0 < x_1 < x_2 < x_3 = 1, v_j v_0 = 0 < v_1 < v_2 = v_3 < v_4 < v_5$
$f(x_0) = v_0, f(x_1 - 0) = v_1, f(x_1) = v_3, f(x_2 - 0) = v_4, f(x_3) = v_5$
$f(x) = k_1 x^2, x_0 \leq x < x_1$
$f(x) = k_2, x_1 \leq x < x_2$
$f(x) = k_4 - k_3(x_3 - x)^2, x_2 \leq x \leq x_3$

Дано

$$f(0) = 0,\ f\left(\frac{5}{13} - 0\right) = \frac{5}{8},\ f\left(\frac{5}{13}\right) = 1,\ f\left(\frac{9}{13} - 0\right) = 1,\ f\left(\frac{9}{13}\right) = \frac{11}{8},\ f(1) = 2.$$

$$g(0) = 0,\ g\left(\frac{5}{26}\right) = 3,\ g\left(\frac{7}{13}\right) = 3,\ g\left(\frac{11}{13}\right) = 5,\ g(1) = 5.$$

Запишем иначе

$$x_0 = 0;\ x_1 = \frac{5}{13};\ x_2 = \frac{9}{13};\ x_3 = 1$$

$$v_0 = 0;\ v_1 = \frac{5}{8};\ v_2 = 1;\ v_3 = 1;\ v_4 = \frac{11}{8};\ v_5 = 2$$

$$u_0 = 0;\ u_1 = \frac{5}{26};\ u_2 = \frac{7}{13};\ u_3 = \frac{11}{13};\ u_4 = 1$$

$$y_0 = 0;\ y_1 = 3;\ y_2 = 3;\ y_3 = 5;\ y_4 = 5$$

3 Выполнение работы.

Задание 1. Вычислить k_1, k_2, k_3, k_4. Нарисовать график.

Из функции $k_1 x_1^2 = v_1$. Отсюда $k_1 = \frac{v_1}{x_1^2} = 4.225$

На интервале $[x_1, x_2)$, функция постоянна $k_2 = v_2 = 1$

На интервале $[x_2, x_3]$ функция задается как $k_4 - k_3(1-x)^2$, в крайних точках она равна v_4 и v_5. Отсюда находим $k_4 = 2$, $k_3 = \frac{845}{128}$

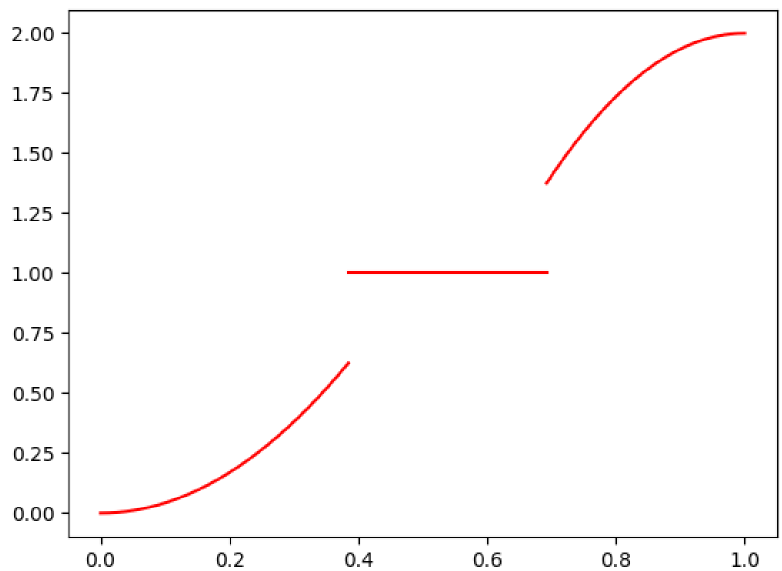

Рис. 1: График.

Задание 2. Положим $A = (u_1, u_2)$, $B = (u_2, u_3)$. Показать, что $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Для начала вычислим $m(A) = m(u_1,\, x_1) + m(x_1) + m(x_1,\, u_2)$

$$m(u_1,\ x_1) = \int_{u_1}^{x_1} f'(x)\ dx = \int_{u_1}^{x_1} 2k_1 x\ dx = k_1(x_1^2 - u_1^2) = \frac{15}{32}$$

$$m(x_1) = \lim_{\delta\to 0^+}(f(x_1+\delta) - f(x_1-\delta)) = f(x_1) - f(x_1 - 0) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$m(x_1, u_2) = \int_{x_1}^{u_2} f'(x)dx = f(u_2) - f(x_1) = v_3 - v_3 = 0$$

Тогда $m(A) = \frac{15}{32} + \frac{12}{32} + 0 = \frac{27}{32} \approx 0.844$

Проводя аналогичные вычисления, получим $m(B) = \frac{17}{32} \approx 0.531$

$m(A \cup B) = m((u_1, u_3)\{u_2\}) = f(u_3) - f(u_1) - f(\{u_2\}) = f(u_3) - f(u_1) - \lim_{\delta\to 0^+}(f(u_2) - f(u_2 - \delta)) = f(u_3) - f(u_1) - (f(u_2) - f(u_2)) = \frac{59}{32} - \frac{15}{32} = \frac{11}{8} = 1.375$

Тогда $m(A \cup B) = 0.844 + 0.531 = 1.375$

Задание 3. Вычислить $\int_0 g(x)dm$, где g(x) непрерывная на $[0;1]$ функция, линейная на отрезках (u_i, u_i+1), $i \in 0,1,2,3$ и заданная в точках излома $g(u_k) = y_k, k = 0,1,2,3,4.$

Чтобы вычислить интеграл достаточно разбить отрезок (0, 1) точками, где либо имеет разрыв функция f(x), либо имеет излом функция g(x) и подсчитать «интеграл» в точках разрыва.

Интегралы по интервалам, где функция f(x) и g(x) дифференцируемы сводятся к интегралу Римана, как и при вычислении меры $\int_l g(x)f'(x)dx$, интеграл по точке вычисляется через предел

$$\int_{x_1} g(x)dm = \lim_{\delta\to 0,\delta>0} \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} g(x)dm = g(x) \lim_{\delta\to 0,\delta>0} \int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta} dm$$

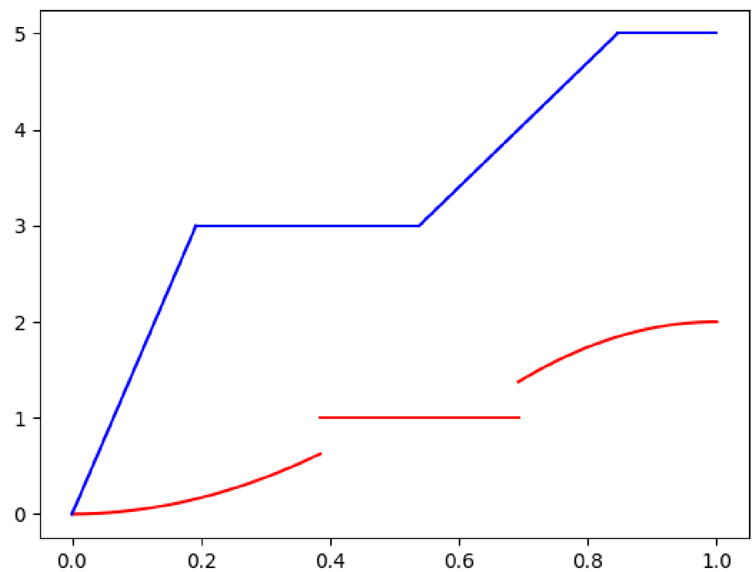

Рис. 2: График.

Итог:

$$f(x) : x_0 = 0 < x_1 < x_2 < x_3 = 1$$
$$g(x) : u_0 = 0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4 = 1$$

$$0 < u_1 < x_1 < u_2 < x_2 < u_3 < 1$$

$$\int_0^1 g(x)dm = \int_0^{u_1} g(x)f'(x)dx + \int_{\{x_1\}} g(x)dm + \int_{u_1}^{x_1} g(x)f'(x)dx+$$

$$+\int_{x_1}^{u_2} g(x)f'(x)(=0!)dx + \int_{u_2}^{x_2} g(x)f'(x)(=0!)dx+$$

$$+\int_{\{x_2\}} g(x)dm + \int_{x_2}^{u_3} g(x)f'(x)dx + \int_{u_3}^{1} g(x)f'(x)dx =$$

$$= \frac{5}{16} + \frac{15}{8} + \frac{45}{32} + 0 + 0 + \frac{11}{2} + \frac{25}{12} + \frac{25}{32} \approx 11.958.$$