Измеримые функции. Интеграл Лебега

Измеримые множества, в основном, обслуживают внутренние потребности теории меры. В прикладных вопросах очень важен новый тип интеграла, для которого понятие меры и измеримого множества совершенно необходимы. Определение этого интеграла требует введения нескольких технических понятий.

Определение

Вещественная функция f, заданная на отрезке $[0,1]$, называется **измеримой**, если для любого вещественного числа t измеримо множество $E_t = \{x \in [0,1] : f(x) < t\}$.

Замечание

Гибкость измеримых множеств по отношению к любым операциям над множествами позволяет заменить в этом определении множество $\{x \in [0,1] : f(x) < t\}$ на любое из множеств

$\{x \in [0,1] : f(x) > t\}$, $\{x \in [0,1] : f(x) \leq t\}$, $\{x \in [0,1] : f(x) \geq t\}$

Более того, те же свойства измеримых множеств позволяют доказать, что f измерима тогда и только тогда, когда для любого $A \in \mathfrak{M}$ множество $\{x :$ существует $y \in A$ такой, что $x = f(y)\}$ измеримо.

Предложение

Если функции измеримы, то измеримы их сумма, произведение, частное (при условии, что знаменатель не обращается в ноль) и суперпозиция.

Предложение

Если функции f_n измеримы и для каждого $x \in [0,1]$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то предельная функция f тоже измерима.

Доказательства такого рода утверждений, как правило, сводятся к несложной, но громоздкой проверке определений. Они изложены, например, в книге Колмогорова. Для иллюстрации этого можно посмотреть на тождество, которое, по существу, является доказательством предложения:

$$\{x : f(x) < t\} = \bigcup_k \left(\bigcup_n \left(\bigcap_{j>n} \left\{ x : f_j(x) < t - \frac{1}{k} \right\} \right) \right).$$

Определение
Две измеримые функции f и g называются *эквивалентными*, если множество, где они не равны, имеет меру ноль:

$$m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Замечание
Это настоящее соотношение эквивалентности. Оно симметрично и транзитивно. Легко проверить, что в определении достаточно требовать измеримости одной из функций, тогда вторая тоже будет измеримой.

Возможность пренебречь значениями функции на множестве меры ноль очень существенна во всем, что касается интеграла Лебега. Это отражается в соответствующей терминологии.

Определение
Говорят, что функции f_n **сходятся** к функции f **почти всюду**, если существует множество A нулевой меры, такое что для любой точки x вне его ($x \in [0,1] \setminus A$) имеет место сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Для сокращения записи в книгах в такой ситуации обычно пишут «сходится п. в.». Это понятие позволяет усилить предшествующее предложение

Предложение
Если функции f_n измеримы и п. в. существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то предельная функция f тоже измерима.

Это утверждение является простым следствием того, что на множестве меры ноль измерима любая функция.

Теперь все готово для определения интеграла Лебега. Внешне процедура напоминает определение интеграла Римана, формально она даже проще. Возможность приписать меру любому множеству, связанному с измеримой функцией, открывает широкую перспективу. Образное представление об отличиях этих интегралов дают описания двух способов подсчет денег. «Способ Римана» предполагает последовательное суммировании купюр в том порядке, в каком они оказались. «Способ Лебега» предполагает на первом этапе сортировку купюр по достоинствам и последующее суммирование.
Как и интеграл Римана, интеграл Лебега вначале определяется на простых объектах.

Определение
Функция f называется простой, если она постоянна на измеримых множествах A_n, которые попарно не пересекаются и в объединении дают весь отрезок $[0,1]$: $f(x) = \sum\limits_n c_n \chi_n(x)$, где $c_n \in \mathbb{R}$, $\chi_n(x) = 1$ при $x \in A_n$, $\chi_n(x) = 0$ при $x \notin A_n$.

Легко проверить, что всякая простая функция измерима.

Предложение
Функция f измерима тогда и только тогда, когда существует последовательность простых функций f_n таких, что

$$\sup\big\{|f(x) - f_n(x)| : x \in [0,1]\big\} = 0.$$

Определение
Интегралом Лебега, $\int\limits_0^1 f(x)dm$ от простой функции $f(x) = \sum\limits_n c_n \chi_n(x)$ по отрезку $[0,1]$ называется $\sum\limits_n c_n m(A_n)$, если ряд сходится.

Поскольку нет никакого естественного порядка для нумерации множеств A_n, то странно видеть в определении условно сходящийся ряд (сумма которого может меняться при перестановках слагаемых). С другой стороны, любую измеримую функцию можно представить, как разность двух положительных измеримых функций $f = f_+ - f_-$, где

$$f_+(x) = f(x), \text{ когда } f(x) \geq 0, \ f_+(x) = 0, \text{ когда } f(x) < 0;$$

$$f_-(x) = -f(x), \text{ когда } f(x) < 0, \ f_-(x) = 0, \text{ когда } f(x) \geq 0$$

Чтобы избежать появления условной сходимости, вводится еще одно понятие.
Определение
Простая функция $\sum\limits_n c_n \chi_n(x)$ называется **суммируемой**, если

$$\sum_n |c_n|\, m(A_n) < \infty.$$

Замечание
Работа с суммируемыми функциями значительно упрощает исследование сходимости интеграла. Но надо понимать, что существуют простые измеримые, но не суммируемые функции, например,

$$f(x) = (-1)^n n, \ x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right].$$

Теперь можно завершить определение интеграла Лебега.

Определение
Функция f называется **интегрируемой по Лебегу**, если существуют последовательность измеримых простых функций f_n, таких что $\lim\limits_n f_n(x) = f(x)$, и предел $\lim\limits_n \int\limits_0^1 f_n(x)dm = I$; тогда число I называют *интегралом Лебега от функции* f и обозначают $\int\limits_0^1 f(x)dm$.

Интеграл по любому измеримому множеству A определяется равенством

$$\int\limits_A f(x)dm = \int\limits_0^1 f(x)\chi_A(x)dm,$$

где $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ при $x \notin A$.

Замечание
Надо доказать, что так определенный интеграл не зависит от выбора последовательности простых функций и что на простых функциях новое определение совпадает со старым. Оба эти утверждения верны и доказываются прямой проверкой (Колмогоров).

Предложение (свойства интеграла Лебега)

1) Интеграл Лебега неотрицателен, линеен, счетно аддитивен, инвариантен по сдвигу.

2) Функция и ее модуль интегрируемы или нет одновременно.

3) На множестве меры ноль интегрируема любая функция и интеграл всегда равен нулю.

4) Если измеримые функции эквивалентны (иначе говоря, *почти всюду совпадают*), то интегралы от них по любому множеству равны.

Доказательства всех этих утверждений легко следуют из соответствующих определений.

Завершив построение интеграла, можно дать правильное определение пространств $L^p(a, b)$.

Определение
Пространство $L^p(a, b)$ состоит из классов эквивалентных функций. Норма определяется как $\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\, dm\right)^{1/p}$; здесь f — любой представитель рассматриваемого класса (свойство измеримых функций гарантирует, что определение не зависит от выбора функции f).

Отметим еще несколько важных свойств интеграла Лебега.

Предложение (неравенство Чебышева)
Если f — положительная измеримая функция, A — измеримое множество, c — положительная постоянная, то

$$m\big(\{x : f(x) > c,\ x \in A\}\big) \le \frac{1}{c}\int\limits_A f(x)dm.$$

Доказательство
Обозначим через $B = \{x : f(x) > c,\ x \in A\}$. Нужная оценка получается из аддитивности и монотонности интеграла

$$\int\limits_A f(x)dm = \int\limits_B f(x)dm + \int\limits_{A\setminus B} f(x)dm \ge C \ge c \cdot m(B)$$

Предложение (абсолютная непрерывность меры Лебега)
Если f — суммируемая функция, A — измеримое множество, то для любого положительного ϵ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого $B \subset A$ из условия $m(B) < \delta$ следует $\left|\int\limits_B f(x)dm\right| \le \epsilon$.

Доказательство приведено в методичке.

Следствие
Если f — положительная измеримая функция, то формула

$$\mu(A) = \int\limits_A f(x)dm$$

задает на измеримых множествах счетно аддитивную меру, но не инвариантную по сдвигу.

Замечание
Исторически первым обобщением интеграла Римана был интеграл Стилтьеса. Он определяется через возрастающую функцию g (для каждой функции свой интеграл) по формуле

$$\int\limits_0^1 f(x)dg(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{n}{N}\right)\left(g\left(\frac{n}{N}\right) - g\left(\frac{n-1}{N}\right)\right).$$

Еще одно обстоятельство делает интеграл Лебега удобным в работе — он в отличие от интеграла Римана хорошо выдерживает предельные переходы. Нельзя сказать, что предел суммируемых функций суммируем, но имеется ряд простых условий, гарантирующих выполнение этого утверждения. Перечислим некоторые из них (доказательства этих утверждений имеются в книге Колмогорова).

Теорема (Лебега)
Если суммируемые функции f_n сходятся к функции f почти всюду и существует число M такое, что $\int\limits_0^1 f_n(x)dm \le M$, то предельная функция f тоже суммируема.

Теорема (Фату)
Если положительные суммируемые функции f_n сходятся к функции f почти всюду и существует положительная измеримая функция g такая, что $|f_n(x)| \leq g(x)$, то предельная функция f тоже суммируема.