

$$A_{ij} = \frac{\sum_k (x_{ik} - \bar{x}_k)(x_{jk} - \bar{x}_k)}{\sum_k s_k^2}$$

A is $n \times n$ matrix.

~~diag(A)~~ A_{ii} is an individual is identical to itself

So, $\text{trace}(A) = n$.

$$E(A) = \frac{\sum_{i,j} A_{ij}}{n^2} = 0.$$

$$E(A) = \frac{\sum_{i,j} A_{ij} + \sum_{i,j} A_{ji}}{n^2} = \frac{n + \sum_{i,j} A_{ji}}{n^2} = 0.$$

$$\sum_{i,j} A_{ij} = -n$$



$$\text{upper-diagonal} \quad \text{upper-diagonal} = -n.$$

$$\frac{n(n-1)}{2} E(A_{ij}) + \frac{n(n-1)}{2} E(A_{ji}) = -n.$$

down-diagonal.

$$n(n-1) E(A_{ij}) = -n.$$

$$E(A_{ij}) = \frac{-1}{n-1}.$$

以上结论仅限 n 个无关联样本。若有关联样本， $E(A_{ij})$ 中的 n 就不是 n 。则可定义 n_e , $n_e = \frac{1}{\sum_{i,j} A_{ij}} + 1$ 。由于样本量有限， $n_e \approx \frac{1}{E(A_{ij})}$ 。