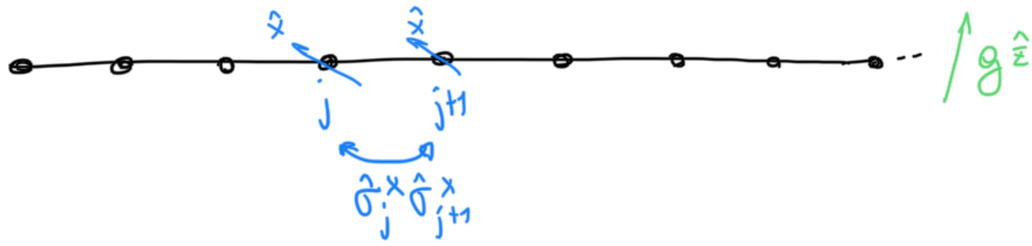
21/10/2021

Ising quantistico 1D, in campo trasverso

$$\hat{H}_{Is} = -J \sum_j \hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_{j+1}^x - g \sum_j \hat{\sigma}_j^z$$

ortogonale alla direzione dell'accoppiamento tra spin



$J>0$ accoppiamento ferromagnetico

$g>0$ senza perdita di generalità

→ trasformato in modello fermionico (Jordan Wigner)$^{-1}$

$$\hat{H}_f = -J \sum_j \left[\left(\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j \right) + \left(\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1}^\dagger + \hat{c}_{j+1} \hat{c}_j \right) \right] - 2g \sum_j \left(\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j - \frac{1}{2} \right)$$

- NON conserva la magnetizzazione lungo $\hat{z}$: $[\hat{H}_{Is}, \hat{S}^z] \neq 0$

$$\hat{S}^z = \sum_j \hat{\sigma}_j^z$$

(in linguaggio fermionico: $\hat{S}^z \to \hat{N}_f = \sum_j \hat{n}_j$ $\quad [\hat{H}_f, \hat{N}_f] \neq 0$)

$$\hat{n}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_j^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- MA conserva la parità fermionica / degli spin lungo $\hat{z}$

$$\hat{P} = \prod_j \hat{\sigma}_j^z \qquad [\hat{H}_{Is}, \hat{P}] = 0$$

$\hat{H}_f$ è quadratica negli op. fermionici

⇒ ci permette di diagonalizzarla in modo "analitico" facendo un cambiamento della base su cui si scrivono gli op. fermionici (trasformazione di Bogoliubov)

$$\vec{\Psi}^T = \left(\hat{c}_1^\dagger, \hat{c}_2^\dagger, \dots, \hat{c}_n^\dagger, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots \hat{c}_n \right) \quad \text{vettore } 2n\text{-dimensionale}$$

$$\hat{H}_f = \hat{\vec{\Psi}}^T \, \mathbb{H} \, \hat{\vec{\Psi}}$$

$\mathbb{H}$ matrice $2n \times 2n$ (la cui dimensione scala linearmente in n)

→ diagonalizzo $\mathbb{H}$

$$\Rightarrow \tilde{\hat{H}}_f = 2 \sum_k \varepsilon_k \left(\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k - \frac{1}{2} \right)$$

operatori di Bogoliubov che diagonalizzano $\hat{H}_f$ fermionici

$$\varepsilon_k = J \sqrt{1 + \frac{g^2}{J^2} + \frac{2g}{J} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}$$

$k: -\frac{n}{2}+1, -\frac{n}{2}+2, \dots, \frac{n}{2}$ (dipende dalla parità di n e da quella del modo di ...)

relazione di dispersione

(dei n° di fermioni N_f)

- Lo stato fondamentale di $\hat{\tilde{H}}_f$ è il vuoto rispetto agli operatori $\hat{b}, \hat{b}^\dagger$ $\rightarrow |\Omega_{\hat{b}}\rangle$: $b_k|\Omega_k\rangle = 0 \ \forall k$

$$E_{g.s.} = -\sum_k \varepsilon_k$$

- gli operatori $\hat{b}_k^\dagger / \hat{b}_k$ creano/distruggono delle "quasi-particelle" (ne ho n, pari al numero di siti)
- gli stati eccitati sono costruiti a partire dal vuoto $|\Omega_{\hat{b}}\rangle$ e creando quasi-particelle: $\ldots \hat{b}_s^\dagger \hat{b}_1^\dagger |\Omega_{\hat{b}}\rangle$

  l'energia associata a quell'autostato è data dalla legge di dispersione ε_k

---

$\Rightarrow$ "integrabilità" del modello di Ising 1D

$\exists$ costanti del moto NON banali

$$\hat{n}_k = \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \ : \quad [\hat{H}, \hat{n}_k] = 0 \ \forall k$$

- in sistemi arbitrari NON integrabili, posso sempre trovare delle costanti del moto, ne sono "ovvie" $\hat{P}_j = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$

  proiettori sui vari autostati (in numero pari a 2^n)

  ($|\psi_j\rangle$ è autostato di $\hat{H}$

  $[\hat{P}_j, \hat{H}] = 0 \quad \Leftarrow \quad \hat{H}|\psi_j\rangle = \varepsilon_j|\psi_j\rangle$)

$\rightarrow$ distinguere numericamente tra un sistema "integrabile" e un sistema "non integrabile" è fattibile guardando le LEVEL SPACINGS STATISTICS (LSS)

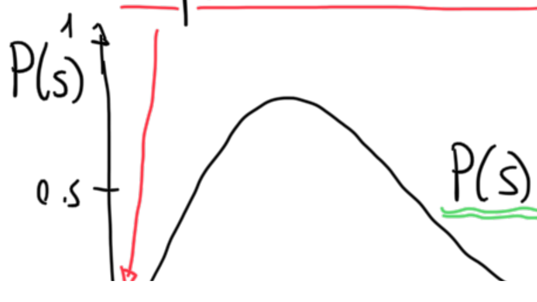
$\hat{H} \rightarrow \{E_j\}_{j=1\ldots2^n}$ spettro energetico $\quad E_1 \leq E_2 \leq E_3 \leq \ldots \leq E_{2^n}$

$\delta E_j \equiv E_{j+1} - E_j \quad (j = 1\ldots2^n-1)$ [spaziature tra livelli adiacenti]

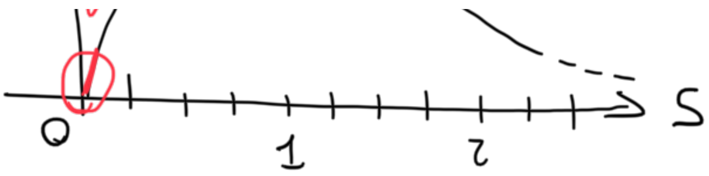
istogramma dei $\delta E_j / \langle\delta E_j\rangle$ (normalizzati sul valor medio delle spaziature)

Ⓐ se il sistema $\boxed{\text{NON è integrabile}}$ $\Rightarrow$ repulsione tra i livelli

$\left\{ \dfrac{\delta E_j}{\langle\delta E_j\rangle} \right\}_{j=1\ldots2^n-1}$ non sono mai nulli

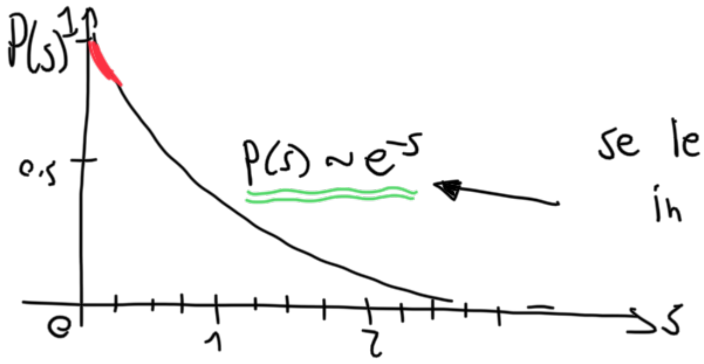


$P(s) \sim s^\gamma e^{-s^2}$ ($\gamma > 0$ dipende da alcune proprietà di $\hat{H}$)



statistica di Wigner-Dyson

(B) se il sistema $\boxed{\text{è integrabile}}$ $\Rightarrow$ $p(s)$ in $s=0$ è diversa da zero ed è grande



se le spaziature sono distribuite in modo random $\Rightarrow$ statistica poissoniana

$\Rightarrow$ level crossing

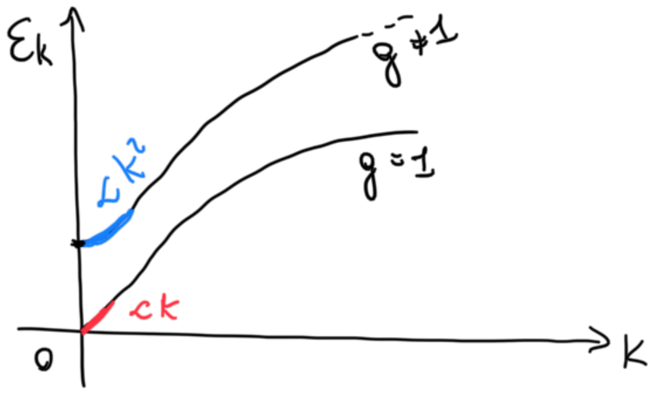
(moltissime degenerazioni)

Torniamo a Ising $\quad \hat{\tilde{H}}_f = 2\sum_k \varepsilon_k \left(\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k - \frac{1}{2}\right)$

$$\varepsilon_k = \sqrt{1+g^2-2g\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}$$

il segno - è ininfluente

($J=1$ fissa la scala di energia)

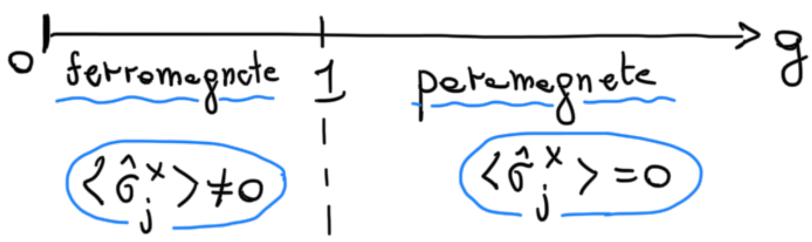


$$\varepsilon_k \xrightarrow{k\to 0} \begin{cases} \varepsilon_0 \neq 0 & \text{se } g\neq 1 \\ 0 & \text{se } g=1 \end{cases}$$

- gap tra ground state e 1° eccitato è nullo se $g=1$, >0 se $g\neq 1$ (nel limite $n\to+\infty$)

- $g=1$ punto critico di Ising 1D

$\exists$ transizione di fase quantistica sul ground state (temperatura zero) al variare del parametro g



$$\hat{H}_{Is} = -\sum_j \hat{\sigma}_j^x\hat{\sigma}_{j+1}^x - g\sum_j \hat{\sigma}_j^z$$

$$\langle\psi_{gs}|\hat{\sigma}_j^x|\psi_{gs}\rangle = M_j^x$$

- Analiticamente: $\hat{\sigma}_j^x \xrightarrow{J.W.} \hat{c}_j, \hat{c}_j^\dagger \xrightarrow{Bog.} \hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_k$

è più semplice fare $\lim_{r\to+\infty}\langle\hat{\sigma}_j^x\hat{\sigma}_{j+r}^x\rangle$

$|g.s.\rangle \equiv |\Omega_{\hat{b}}\rangle$ tale che: $\hat{b}_k|g.s.\rangle = 0$

$\langle\hat{b}_k\hat{b}_k\rangle_0 = 0$

$\langle\hat{b}_k^\dagger\hat{b}_k\rangle_0 = 0$

($\hat{\tilde{H}}_f$ è un sistema

teoreme di Wick (... di FERMIONI LIBERI) $\left(\begin{array}{l} \langle b_k^\dagger b_k \rangle_0 = 0 \\ \langle b_k b_k^\dagger \rangle_0 = 1 \end{array} \right)$

$\Downarrow$

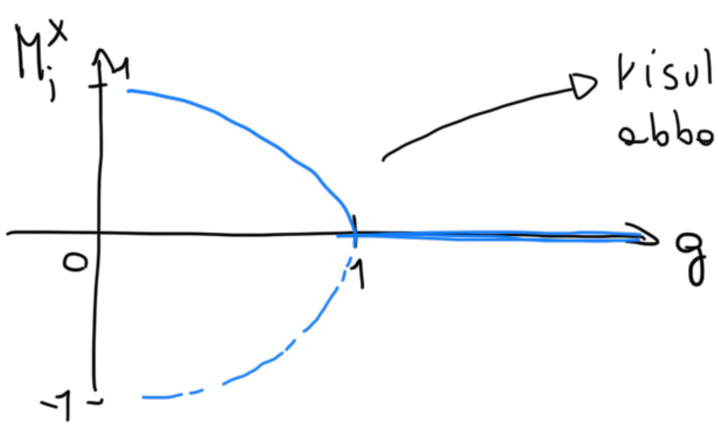
determinante di matrice antisimmetrica

$M_{je} = \langle \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_e \rangle$ e altri blocchi simili, del tipo $\langle \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_e^\dagger \rangle$; $\langle \hat{c}_j \hat{c}_e^\dagger \rangle$; $\langle \hat{c}_j \hat{c}_e \rangle$ $\forall j, e = 1 \dots n$

Ulteriori dettagli in:

→ Sachdev, "Quantum Phase Transitions" (Cambridge, 1998)

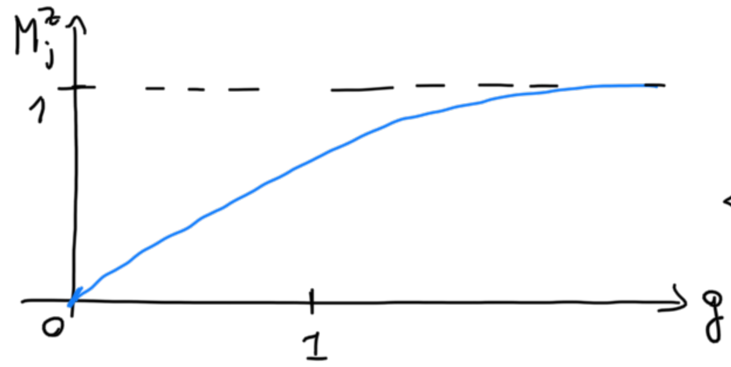
→ Benenti, Casati, Rossini, Strini, "Principles of quantum computation and information: a comprehensive review", Chap. 11 (World Scientific)



risultato della procedura sopra abbozzata, nel limite $n \to +\infty$

$$M_j^x = \pm \sqrt{\lim_{r \to +\infty} \langle \hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_{i+r}^x \rangle_0}$$

26/10/2021



magnetizzazione trasverse: non presenta particolari caratteristiche

➡ Riprendiamo Ising 1D in campo trasverso:

$$\boxed{\hat{H}_{Is} = -J \sum_j \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z - g \sum_j \hat{\sigma}_j^x}$$

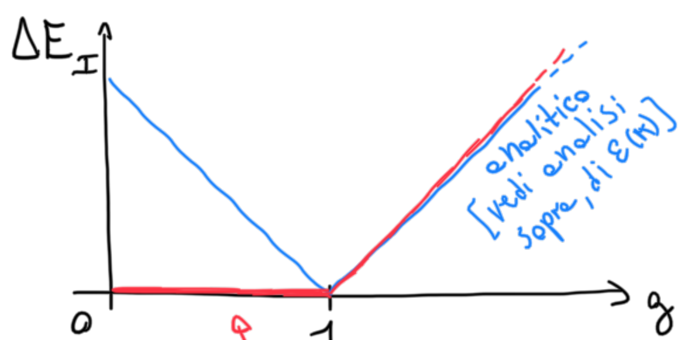
• Nota: scambio X con Z

Z: coupling

X: campo trasverso

● ENERGIE del g.s. e primo stato eccitato

analitico : $\Delta E_I = E_I - E_0 = 2|g-1|$ (cond. al contorno aperte)

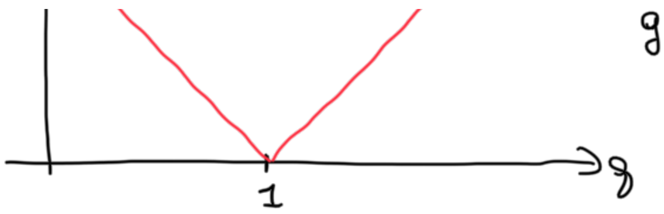


limite termodinamico ($N \to +\infty$)

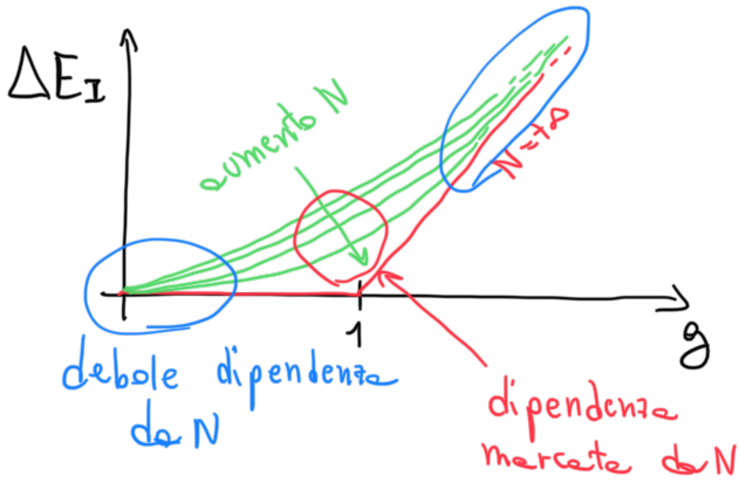
→ per $g<1$ il ground state è degenere (2 stati degeneri)

$\Delta E_{II} = E_{II} - E_0$

gap col II stato eccitato



A taglia N finita si osserva:



se $g\neq 1$ ci aspettiamo dipendenza ESPONENZIALE da N

- $g<1 \Rightarrow \Delta E_I \sim e^{-\alpha(g)\cdot N}$

  $\alpha(g)$ cresce allontanandosi da $g=1$

- $g>1 \Rightarrow \Delta E_I \sim 2|g-1| + e^{-\tilde{\alpha}(g)\cdot N}$

- se $g=1$ ci aspettiamo dipendenza POLINOMIALE da N

  $\Delta E_I \sim N^{-z}$ ($z=1$ per Ising 1D - esponente critico dinamico)

Simmetria di Ising:

$$\boxed{\hat{P}_z = \prod_{j=1}^{N} \hat{\sigma}_j^x}$$

inversione di tutti gli spin $|\uparrow\rangle \to |\downarrow\rangle$, $|\downarrow\rangle \to |\uparrow\rangle$

$$[\hat{H}_{Is}, \underbrace{\hat{P}_z}_{\prod_j \hat{\sigma}_j^x}] = 0$$

$$\hat{H}_{Is} = \underbrace{-J\sum_j \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z}_{(*)} \underbrace{- g\sum_j \hat{\sigma}_j^x}_{\text{ovvio}}$$

$(*)$ $[\hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z, \hat{\sigma}_1^x \hat{\sigma}_2^x \dots \hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_{j+1}^x \dots] = 0$

$\iff [\hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z, \hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_{j+1}^x] = 0$

$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$

$\hat{A} \equiv \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z$, $\hat{B} \equiv \hat{\sigma}_j^x$, $\hat{C} = \hat{\sigma}_{j+1}^x$

$$\hat{\sigma}_j^x [\hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z, \hat{\sigma}_{j+1}^x] + [\hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z, \hat{\sigma}_j^x]\hat{\sigma}_{j+1}^x =$$

$$= \hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_j^z \underbrace{[\hat{\sigma}_{j+1}^z, \hat{\sigma}_{j+1}^x]}_{2i\hat{\sigma}_{j+1}^y} + \underbrace{[\hat{\sigma}_j^z, \hat{\sigma}_j^x]}_{2i\hat{\sigma}_j^y} \hat{\sigma}_{j+1}^z \hat{\sigma}_{j+1}^x = -i\hat{\sigma}_j^y (2i\hat{\sigma}_{j+1}^y) + (2i\hat{\sigma}_j^y)(i\hat{\sigma}_{j+1}^y) = 0$$

$$\hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_j^z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\hat{\sigma}_j^y$$

$$\hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_j^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\hat{\sigma}_j^y$$

stati a magnetizzazione massima e minima

→ supponiamo che $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ siano i due autostati del sottospazio a energia minima (fondamentale) → vero per $N\to+\infty$ e $g<1$

$$|\psi_1\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = \sum_n c_n |\bar{n}\rangle$$

$|\bar{n}\rangle$ si ottiene da $|n\rangle$ invertendo gli spin lungo z

$|n\rangle = |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\dots\rangle \Rightarrow |\bar{n}\rangle = |\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\dots\rangle$

$(*)$

$\langle\psi|\hat{M}^z|\psi\rangle$ dove $|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle$

$$\hookrightarrow = \left(\langle\psi_1|\alpha^* + \langle\psi_2|\beta^*\right)\left(\sum_j \hat{\sigma}_j^z\right)\left(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle\right) =$$

$$= |\alpha|^2 \sum_n |c_n|^2 \sum_j \langle n|\hat{\sigma}_j^z|n\rangle + |\beta|^2 \sum_n |c_n|^2 \sum_j \langle\bar{n}|\hat{\sigma}_j^z|\bar{n}\rangle$$

$$+ \alpha^*\beta \sum_n \cancel{|c_n|^2 \sum_j} \underbrace{\langle n|\hat{\sigma}_j^z|\bar{n}\rangle}_{=0} + \cancel{\ldots} \underbrace{\langle\bar{n}|\hat{\sigma}_j^z|n\rangle}_{=0} \ldots$$

$$\sum_j \langle n|\hat{\sigma}_j^z|n\rangle = -\sum_j \langle\bar{n}|\hat{\sigma}_j^z|\bar{n}\rangle \qquad \text{perché vale } \circledast$$

$$\Rightarrow \langle\psi|\hat{M}^z|\psi\rangle = \sum_n |c_n|^2 \sum_j \langle n|\hat{\sigma}_j^z|n\rangle \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right)$$

se $\alpha = \pm\beta \Rightarrow \langle\hat{M}^z\rangle = 0$

- se $\alpha = +\beta \Rightarrow |\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n |c_n|^2 \left(|n\rangle + |\bar{n}\rangle\right)$

  stato simmetrico rispetto a $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$

  $\hat{P}_z|\psi_S\rangle = |\psi_S\rangle$ perché $\hat{P}_z|n\rangle = |\bar{n}\rangle$; $\hat{P}_z|\bar{n}\rangle = |n\rangle$

- se $\alpha = -\beta \Rightarrow |\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle\right)$ $\qquad \hat{P}_z|\psi_A\rangle = -|\psi_A\rangle$

  stato antisimmetrico

- Numericamente, a N finito, si trova sempre che $|\psi_A\rangle$ e $|\psi_S\rangle$ sono i due autostati quasi-degeneri di energia più bassa (autostati comuni ad $\hat{H}_{Is}$ e $\hat{P}_z$)

  $\hookrightarrow M^z = 0$ su questi autostati

→ Per "rompere" la simmetria $\hat{P}_z$ si può

1) • romperla fisicamente

   → aggiungo un termine in $\hat{H}$ che fa in modo da non commutare più con $\hat{P}_z$

   • es: $-h\sum_j \hat{\sigma}_j^z$

Modello di Ising in campo trasverso + longitudinale:

$$\hat{H}_{Is,\,s.b.} = -J\sum_j \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z \underbrace{- g\sum_j \hat{\sigma}_j^x}_{\text{fluttuazioni quantistiche}} \underbrace{- h\sum_j \hat{\sigma}_j^z}_{\text{rotture di simmetria}} \qquad [\hat{H}_{Is,\,s.b.}, \hat{P}_z] \neq 0$$

2) • calcolare una quantità che è insensibile al verso degli spin lungo z

$$\tilde{M}_z = \sum_n |d_n|^2 \left| \sum_j \langle n|\hat{\sigma}_j^z|n\rangle \right| =$$

prendo il modulo

$$\left(|\psi\rangle = \sum_n d_n |n\rangle \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} |n\rangle = |\uparrow\downarrow\uparrow\ldots\rangle \; ; \; |\bar{n}\rangle = |\downarrow\uparrow\downarrow\ldots\rangle \\ \sum_j \langle n|\hat{\sigma}_j^z|n\rangle = -\sum_j \langle \bar{n}|\hat{\sigma}_j^z|\bar{n}\rangle \end{array} \right)$$

$$= \sum_n |d_n|^2 \left[|\alpha|^2 \left| \sum_j \langle n|\hat{\sigma}_j^z|n\rangle \right| + |\beta|^2 \left| \sum_j \langle \bar{n}|\hat{\sigma}_j^z|\bar{n}\rangle \right| \right] =$$

sono uguali

$$= \sum_n |d_n|^2 \cdot \underbrace{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}_{1} \cdot \left| \sum_j \langle n|\hat{\sigma}_j^z|n\rangle \right| \neq 0$$

esempio banale, per $g=0$

se $g=0$ $\quad \hat{H}_{Is} = -J \sum_j \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z \Rightarrow$ $\quad |\psi_1\rangle = |\uparrow\uparrow\ldots\uparrow\rangle$, $|\psi_2\rangle = |\downarrow\downarrow\ldots\downarrow\rangle$

$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\ldots\uparrow\rangle - |\downarrow\ldots\downarrow\rangle)$; $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\ldots\uparrow\rangle + |\downarrow\ldots\downarrow\rangle)$

$\langle\psi_A|\hat{M}^z|\psi_A\rangle = 0$

$\langle\psi_S|\hat{M}^z|\psi_S\rangle = 0$

MA $\langle\psi_1|\hat{M}^z|\psi_1\rangle = +1$

$\langle\psi_2|\hat{M}^z|\psi_2\rangle = -1$

$$\tilde{M}^z = \sum_n |d_n|^2 \cdot \left| \sum_j \langle n|\hat{\sigma}_j^z|n\rangle \right| =$$

$$= |d_{\uparrow\ldots\uparrow}|^2 \cdot \left| \sum_j \langle \uparrow\ldots\uparrow|\hat{\sigma}_j^z|\uparrow\ldots\uparrow\rangle \right| +$$

$$+ |d_{\downarrow\ldots\downarrow}|^2 \cdot \left| \sum_j \langle \downarrow\ldots\downarrow|\hat{\sigma}_j^z|\downarrow\ldots\downarrow\rangle \right| = 1$$

← sovrapposizione generica

$|\psi\rangle = d_{\uparrow\ldots\uparrow}|\uparrow\ldots\uparrow\rangle + d_{\downarrow\ldots\downarrow}|\downarrow\ldots\downarrow\rangle$

3) • Calcolare le f. di correlazione $C^{zz}(r) = \langle\psi|\hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+r}^z|\psi\rangle$

$$\lim_{r\to+\infty} C^{zz}(r) = (\langle\psi|\hat{\sigma}_j^z|\psi\rangle)^2 = (M^z)^2$$

Approfondimenti
- Cabrera, Jullien, Phys. Rev. B 35, 7062 (1987)
- Kitaev, cond-mat/0010440

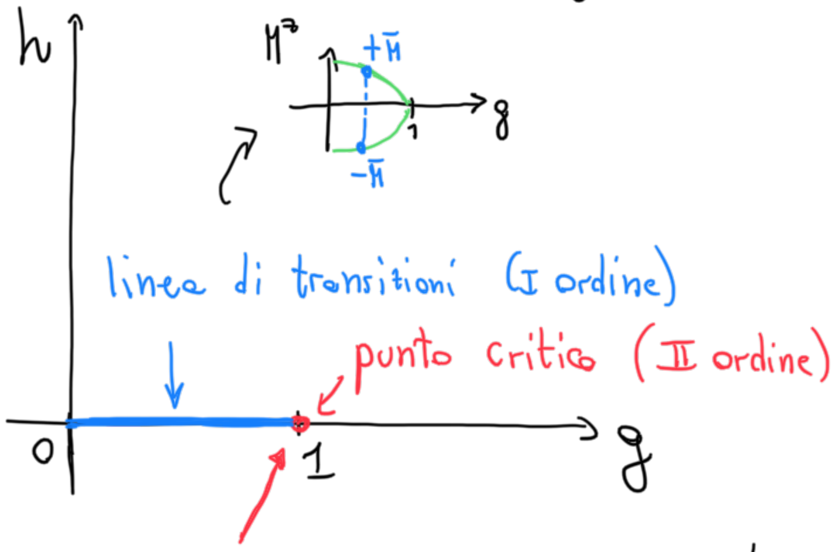
$$\rightarrow \boxed{\hat{H}_{Is,\,s.b.} = -J \sum_j \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z - g \sum_j \hat{\sigma}_j^x - h \sum_j \hat{\sigma}_j^z}$$

il modello NON è più integrabile!

⇒ interessante dal punto di vista numerico

Diagramma di fase nel piano g-h (Temperatura nulla)

$g, h > 0$



associato a esponenti critici uguali al modello classico 2D

(quantum-to-classical mapping
d quantum $\leftrightarrow$ (d+1) classico)

Valgono le stesse considerazioni di Ising classico 2D (fenomeni critici)

Temperatura (classica) $\leftrightarrow$ campo trasverso g (quantistico)

→ Finite-size scaling

- es: suscettività magnetica: $\chi = \left.\dfrac{\partial M^z}{\partial h}\right|_{h\to 0}$

numericamente si fa il rapporto incrementale con Δh piccolo

$$\chi \sim |t|^{-\gamma} \sim \xi^{\gamma/\nu} \quad (\xi \sim |t|^{-\nu})$$

$t = g - 1$

a taglia finita $\xi \sim N \Rightarrow \chi_{MAX} \sim N^{\gamma/\nu}$ (al punto critico efficace - N finito)

→ vicino a N: $\chi(g,N) = N^{\gamma/\nu} \cdot \phi(N,\xi)$

andamento di χ intorno al picco χ_{MAX}

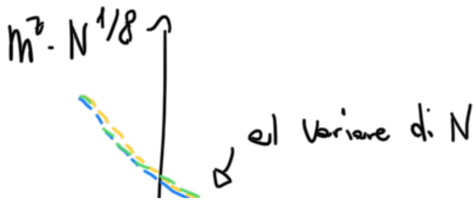
intorno al punto critico conta solo il rapporto N/ξ

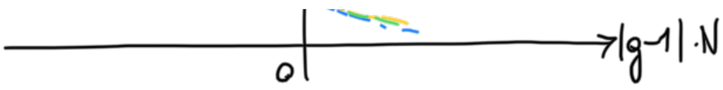
$$\chi(g,N) = N^{\gamma/\nu}\phi(N/\xi) \underset{\boxed{\xi\sim|t|^{-\nu}}}{=} N^{\gamma/\nu}\tilde{\phi}(|t|\cdot N^{1/\nu}) \underset{\text{al suono di variare } g}{=} N^{\gamma/\nu}\phi(|g-1|N^{1/\nu})$$

Ising 2D classico: (classe di universalità a cui appartiene Ising 1D quantistico) $\gamma = 7/4$; $\nu = 1$ $\Rightarrow$ $\chi(g,N) \sim N^{7/4}\phi(|g-1|\cdot N)$

analogamente: $m^z(g,N) \sim N^{-\beta/\nu}\cdot \mathcal{M}(|g-1|N^{1/\nu}) \sim N^{-1/8}\mathcal{M}(|g-1|\cdot N)$

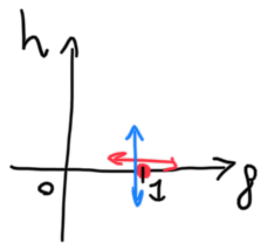
Ising 2D classico: $\beta = 1/8$





Qui abbiamo variato g (equivalente di T)

ma potremmo variare anche h



punto critico: $(g,h) = (1,0)$

fisso $g=1$ e prendo $\tau \equiv h - 0 = h$

(prima avevo $t = g-1$)

campo longitudinale - symmetry breaking

$$m^2(h,N) \sim N^{-\beta/\nu} \cdot \mathcal{M}\left(\tau \cdot N^{y_\tau}\right) \qquad y_\tau = \frac{15}{8} \qquad (RG)$$

$$m^2(g,N) \sim N^{-\beta/\nu} \cdot \mathcal{M}\left(t\, N^{y_t}\right) \qquad y_t = 1$$

campo trasverso - fluttuazioni quantistiche

- Oltre alla suscettività magnetica ordinaria $\left(\chi = \left.\frac{\partial M^z}{\partial h}\right|_{h\to 0}\right)$

si può analizzare la suscettività rispetto al campo trasverso della magnetizzazione trasversa: $\chi^x = \frac{\partial M^x}{\partial g}$

$$H = -\sum_j \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z - g\sum_j \hat{\sigma}_j^x - h\sum_j \hat{\sigma}_j^z$$

classicamente $g \to T$

(fluttuazioni quantistiche $\downarrow$ fluttuazioni termiche)

$$C_V = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad \text{classicamente}$$

$$\updownarrow$$

$$C_V = g\,\chi^x \quad \text{quantisticamente}$$

- Cioè χ^x è strettamente connessa col calore specifico, che per $g\to 1$, $h \to 0$ presenta un picco e diverge logaritmicamente in N

(analogia col modello di Ising 2D classico
$\alpha = 0$ - esponente critico)

4/11/2021

→ Scaling attorno a una transizione del I ordine (quantistica)

(Campostrini, Nespolo, Pelissetto, Vicari, PRL 113, 070402 (2013))

h campo longitudinale $\rightarrow$ $k = h N^{\cdots}$ (II ordine)
g " trasverso

$$\boxed{k_I = \frac{E_h(N)}{\Delta_0(N)}} \quad \text{(I ordine)}$$

$E_h(N)$: variazione di energia associata alla presenza di un campo longitudinale piccolo

$$E_h(N) \sim 2 m_0 h N^d$$

d: dimensione fisica del sistema ($d=1$)
$m_0 = (1-g^2)^{1/8}$ parametro d'ordine ad $h=0$

$$\hat{H} = -\sum_j \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z - g \sum_j \hat{\sigma}_j^x - h \sum_j \hat{\sigma}_j^z$$

dove $0 < g < 1$
$|h| \ll 1$

$\Delta_0(N)$: gap tra E_{eccitato} e $E_{g.s.}$ per $h=0$

se $g<1$ chiude esponenzialmente in N

$$m^z(|g|<1, h) \sim m_0 \cdot \mathcal{M}(k_I)$$

- Per studiare la dinamica, introduco un tempo riscalato

$$\vartheta = t \cdot \Delta_0(N)$$

$$m^z(|g|<1, h_i, h_f, t) \sim m_0\, \mathcal{M}(k_{I,i}, k_{I,f}, \vartheta)$$

h_i: prima del quench
h_f: dopo il quench