Autovalori di una matrice 6x6

Cafasso Dario
De Maria Giuseppe
De Rosa Carmine
Pellecchia Pietro

June 21, 2018

Vogliamo cercare gli autovalori e gli autovettori della seguente matrice nxn con n=6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & -39 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -25 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 30 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & 3 & 0 & 110 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 190 \end{pmatrix}$$

Il fatto che la matrice sia reale, simmetrica e con determinanto non nullo ci garantisce l'invertibilità e la diagonalizzabilità. Procediamo quindi con la verifica di queste condizioni.

Abbiamo scritto un programma che è in grado di calcolare gli autovalori di una matrice nxn reale, simmetrica e con determinante non nullo, in cui almeno n-4 cerchi di Gershgorin sono disgiunti (esclusi quello col centro più grande e più piccolo in modulo). Eseguendolo inserendo in input la matrice A, le prime operazioni svolte sono rispettivamente: calcolo di determinante, traccia, inversa e check dell'inversa, ossia $A * A^{-1} = I_d$. I risultati ottenuti sono i seguenti:

$Det(A) = -1,88632E - 8$

$Traccia(A) = 267$

Successivamente, il programma prosegue calcolando raggi e centri dei cerchi di Gershgorin, informando l'utilizzatore nel caso in cui più cerchi si intersecano e creando un vettore $u(1 : n - 2)$ che ha come elementi i centri dei cerchi compresi in modulo tra quello maggiore e quello minore. Nel caso in cui 2 cerchi si intersecano è possibile spostarne manualmente i centri nelle ultime due posizioni del vettore u, mantenendo invariata la procedura da seguire per il calcolo degli n autovettori.

I centri e i raggi dei cerchi della matrice A sono:

	Centri	Raggi
L	190	9
J	110	14
H	30	11
A	1	16
C	-25	8
E	-39	4

Table 1: Cerchi di Gershgorin

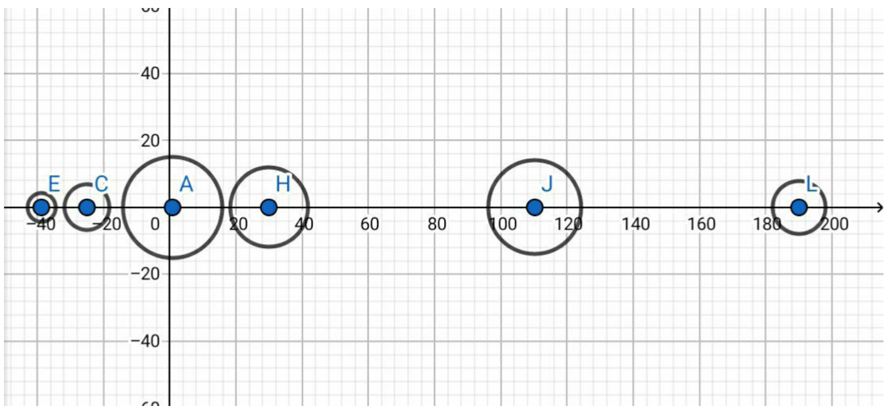

Figure 1: Cerchi di Gershgorin

Come si evince dalla figura e dai dati in tabella, i cerchi sono tutti disgiunti, per cui tutti gli n autovalori avranno valori distinti, facilitando notevolmente la ricerca.

Calcolo di autovalori ed autovettori

Primi due autovalori ed autovettori

Procediamo ora alla ricerca dei primi 2 autovalori. Questi sono il più grande ed il più piccolo in modulo, ossia quelli localizzati nel cerchio L e nel cerchio A rispettivamente. Il calcolo per questi due avviene con il metodo iterativo delle potenze che mi permette di determinare l'autovettore relativo all'autovalore massimo della matrice usando ricorsivamente la seguente:

$$v^{(j)} = \frac{A \cdot v^{(j-1)}}{\left\| A \cdot v^{(j-1)} \right\|} \tag{1}$$

dove v inizialmente è un vettore random, j è il passo; per j che tende a $+\infty$ v=x_1 che è l'autovettore che vogliamo trovare; non potendo far correre il codice all'infinito, arrestiamo il calcolo quando

$$\left| v^{(j)} - v^{(j-1)} \right| \leq \epsilon_x \tag{2}$$

dove ϵ_x è l'errore entro cui vogliamo conoscere l'autovettore. Trovato questo, possiamo trovare l'autovalore utilizzando la seguente formula:

$$\lambda_1 = \frac{x_1^T \cdot A \cdot x_1}{\|x_1\|} \tag{3}$$

Per quanto riguarda il secondo autovettore e relativo autovalore, si utilizza lo stesso metodo, ma questa volta applicato ad A^{-1} sapendo che che a questa corrisponde il reciproco dell'autovalore che corrisponde ad A. Quindi utilizzando il metodo sopra descritto, trovo l'autovettore corrispondente all'autovalore massimo $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$, di conseguenza trovo l'autovettore x_2 corrispondente all'autovalore λ_2 minimo. Una volta trovato questo, utilizzo la (3) per trovare λ_2.

I risultati ottenuti sono:

- 1° lambda= 0.190231E+03 cerchio L
  1° x= (0.230610E-02 0.872920E-02 0.818774E-03 0.250197E-01 0.376141E-01 0.998938E+00)
  steps= 27
- 2° lambda= -0.295597E+00 cerchio A
  2° x= (-0.981259E+00 -0.270822E-01 -0.582180E-01 0.166367E+00 0.728752E-01 -0.436126E-02)
  steps= 5

Seguenti n-4 autovalori ed autovettori (Metodo dei cerchi)

Utilizzando i coefficienti $u(i)$ visti in precedenza, si procede alla ricerca dei restanti autovalori in maniera analoga a quanto visto per i primi due. Si utilizza lo stesso metodo precente, applicato però alla matrice $(A - uI_d)^{-1}$; di conseguenza troverò come risultato del calcolo l'autovettore relativo all'autovalore massimo $\lambda' = \frac{1}{\lambda - u}$; con questo calcolo, utilizzando il vettore u caricato in precedenza, posso ottenere gli alti due autovettori x_3 e x_4. Gli autovalori corrispondenti saranno $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda'_3} + u_3$ e $\lambda_4 = \frac{1}{\lambda'_4} + u_4$.

I risultati ottenuti sono:

- 3 ° lambda = 0.110545E+03 cerchio J
  3 ° x = (0.733334E-01 0.140060E-03 0.231824E-01 0.325149E-02 0.996316E+00 -0.377853E-01)
  steps= 4
- 4 ° lambda = -0.391091E+02 cerchio E
  4 ° x = (-0.225075E-01 0.997334E+00 -0.686699E-01 0.412587E-02 0.276652E-02 -0.881445E-02)
  steps= 4

Ultimi due autovalori ed autovettori (Traccia e determinante)

Nel caso di un'intersezione tra due cerchi, facendo l'operazione di shift dei centri nel vettore u come detto in precedenza, avremmo ora il problema di calcolarne i relativi autovalori ed autovettori una volta trovati tutti gli altri. Nel caso in cui gli ultimi due cerchi non si intersecano, il procedimento è lo stesso a meno dello shift suddetto. Ciò è possibile e molto semplice graze alle proprietà di determinante e traccia. Questi, per una trasformazione che consiste nel diagonalizzare la matrice, si conservano; si ha quindi il sistema:

$$\begin{cases} detA = det\bar{A} = p \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ T_A = T_{\bar{A}} = n + \lambda_5 + \lambda_6 \end{cases}$$

dove $\bar{A}$ è la matrice diagonalizzata, p è il prodotto degli autovalori trovati in precedenza, mentre n è loro la somma; questo è un sistema di due equazioni a due incognite, il chè ci permette di determinare i restanti autovalori λ_5 e λ_6. Per trovare i relativi autovettori restanti, mi basta spostare di un ϵ gli autovalori appena trovati: $u = \lambda + \epsilon$; utilizziamo poi il metodo precente.

I risultati ottenuti sono:

- 5 ° lambda = -0.251826E+02 cerchio C
  5 ° x = (-0.673046E-01 0.671561E-01 0.994854E+00 -0.299719E-01 -0.180991E-01 0.185296E-03)
  steps= 3

- 6 ° lambda = 0.308118E+02 cerchio H
  6 ° x = (0.163435E+00 0.221728E-02 0.402837E-01 0.985277E+00 -0.171104E-01 -0.244629E-01)
  steps= 3