# DINAMICA FUORI EQUILIBRIO

28/10/2020

stati eccitati? $\to$ dinamica quantistica

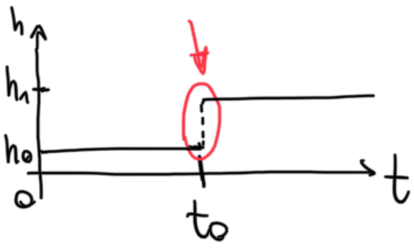
$$i\frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle \qquad \text{sistema isolato}$$

Domanda: cambio improvvisamente uno dei parametri di $\hat{H}$ (es. campo magnetico trasversale)

$\hat{H} = \hat{H}(h_1, h_2, \dots h_n)$ cambio uno degli $h_j$

come evolve lo stato di partenza, che corrisponde al ground state di $\hat{H}$ prima di cambiare il parametro $h_j$?

QUANTUM QUENCH: $\hat{H} = \hat{H}(h)$




$$h(t) = \begin{cases} h_0 & \text{se } t < t_0 \\ h_1 & \text{se } t > t_0 \end{cases}$$

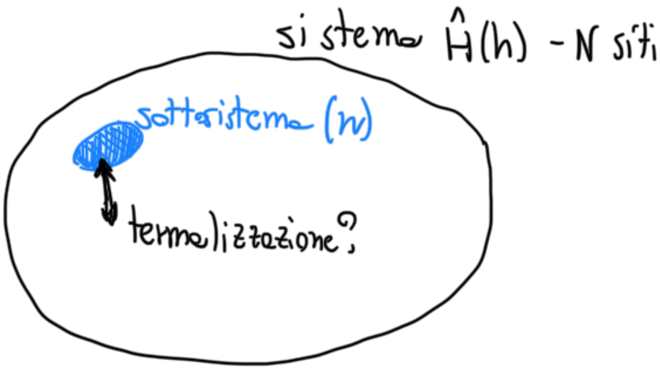
se $t < t_0$ assumo che $|\psi(t<t_0)\rangle = |\psi_{\text{ground state di } \hat{H}(h_0)}\rangle \equiv |\psi_0\rangle$

se $t > t_0 \Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(h_1)(t-t_0)}|\psi_0\rangle}$ può essere NON BANALE

gli autostati di $\hat{H}(h_1)$ a priori NON hanno niente a che vedere con quelli di $\hat{H}(h_0)$

Termalizzazione: nonostante sia isolato, può il sistema assomigliare a uno stato termico, dopo il quench?

in realtà sarà una piccola SOTTOPARTE a comportarsi termicamente




$$\rho_n = Tr_{N-n}\left(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\right)$$

stato al tempo t del sottosistema

è possibile che $\rho_n(t) \sim e^{-\beta_{eff}\hat{H}(h_1)}$?

temperatura efficace

$$\rho_n(t) \overset{?}{\sim} Tr_{N-n}\left[\rho_N^{(canonica)}\right]$$

$\beta_{eff}$ può essere stimata dall'energia inserita nel sistema dal quench:

$$E_0 = \langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ground state di } \hat{H}(h_0)}}{\psi_0} | \hat{H}(h_1) | \psi_0 \rangle \underset{\substack{\downarrow \\ \text{eq. per } \beta_{eff}}}{=} \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}\left[ e^{-\beta_{eff} \hat{H}(h_1)} \cdot \hat{H}(h_1) \right]$$

## Formalmente

- $|\psi_0\rangle$ ground state di $\hat{H}(h_0)$ scriviamolo sulla base di autovettori di $\hat{H}(h_1)$

$\hat{H}(h_1) |\varphi_\alpha(h_1)\rangle = E_\alpha(h_1) |\varphi_\alpha(h_1)\rangle$

supponiamo assenza di degenerazioni

$$|\psi_0\rangle = \sum_\alpha c_\alpha |\varphi_\alpha(h_1)\rangle$$

$$c_\alpha = \langle \varphi_\alpha(h_1) | \psi_0 \rangle \quad ; \quad \sum_\alpha |c_\alpha|^2 = 1$$

- scriviamo l'evoluzione temporale sulla base $\{ |\varphi_\alpha(h_1)\rangle \}$:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(h_1)t} |\psi_0\rangle$$

$$= \sum_\alpha c_\alpha e^{-iE_\alpha(h_1)t} |\varphi_\alpha(h_1)\rangle$$

- prendo un'osservabile $\hat{A}$ e vedo come varia nel tempo

$$\langle \hat{A}(t) \rangle \equiv \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \sum_{\alpha,\beta} c_\alpha^* c_\beta \, e^{i[E_\alpha(h_1) - E_\beta(h_1)]t} \underbrace{\langle \varphi_\alpha(h_1) | \hat{A} | \varphi_\beta(h_1) \rangle}_{A_{\alpha\beta}(h_1)}$$

media temporale a tempi lunghi:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \langle \hat{A}(t') \rangle dt' \equiv \bar{A} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i termini fuori diagonale si mediano a zero}}}{=} \sum_\alpha |c_\alpha|^2 \cdot A_{\alpha\alpha}(h_1)$$

[ensemble diagonale]

- media su ensemble diagonale è equiparabile ad una media su ensemble di equilibrio termico? (microcanonico/canonico...)

EIGENSTATE THERMALIZATION HYPOTHESIS (ETH)

$$\boxed{\sum_\alpha |c_\alpha|^2 A_{\alpha\alpha} \sim \sum_{\substack{\beta \\ |E_\beta - E_0| < \Delta E}}^{*} A_{\beta\beta}}$$

$\Delta E$ è una finestra di energia molto piccola (a priori infinitesima)

A sia un operatore locale
(agisce su pochi siti vicini) | per $N \to \infty$

costruzione microcanonica
di uno stato termico, con energia $E_0$

- A. Polkovnikov et al.. Rev. Mod. Phys. 83, 863 (2011)

  → problema che nasce da von Neumann (1929)

4/11/2020

Ⓐ
- media "diagonale" $\sum_\alpha |c_\alpha|^2 A_{\alpha\alpha}$

  tiene conto delle "condizioni iniziali" $|\psi(0)\rangle$ in modo importante

  ↳ $c_\alpha = \langle \varphi_\alpha | \psi(0) \rangle$ $\quad |\varphi_\alpha\rangle$ autostati di $\hat{H}$ dopo il quench

  $2^N$ parametri

Ⓑ
- media microcanonica $\sum_\beta^{*} A_{\beta\beta}$ per stati: $|E_\beta - E_0| \to 0$

  tiene conto di $|\psi(0)\rangle$ solamente tramite $E_0 = \langle \psi(0) | \hat{H}_{t>t_0} | \psi(0) \rangle$

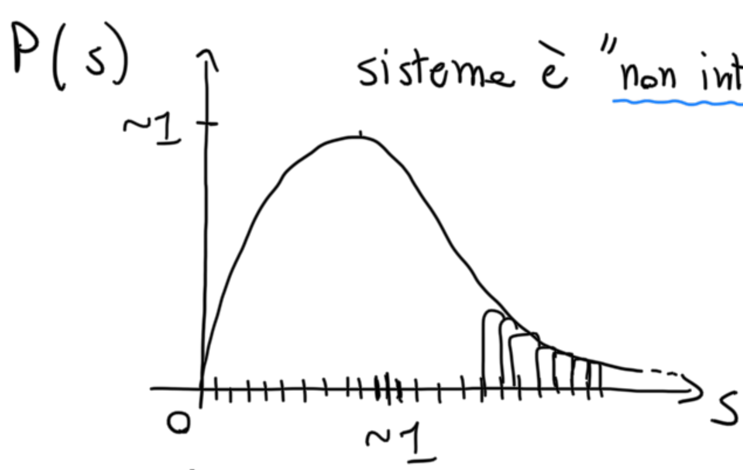
- ETH vale in situazioni "tipiche"
  dove l'unica costante del moto (operatore che commuta con $\hat{H}$)
  "rilevante" è l'energia stessa $[\hat{H}, \hat{H}] = 0$

  - il sistema è NON INTEGRABILE
    cioè presenta level repulsion

$E_n$ livelli energetici di $\hat{H}$ $\quad \dots > E_{n+1} > E_n > E_{n-1} > \dots$

statistica delle spaziature tra livelli adiacenti: $\Delta E_j = (E_{j+1} - E_j) / \langle \Delta E \rangle$

→ Level spacing statistics (LSS) $\quad \{\Delta E_j\}$ istogramma → $P(s)$

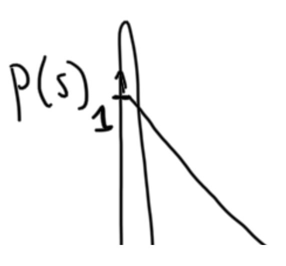



sistema è "non integrabile"

Wigner-Dyson

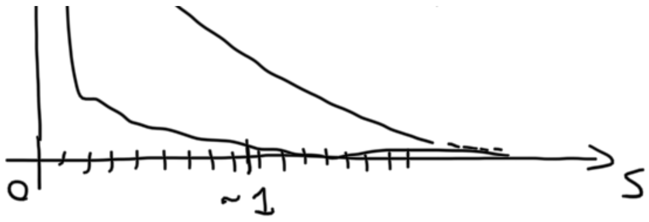
$P(s) \to 0$ per $s \to 0$

level repulsion




sistema "integrabile"

$P(s) \sim e^{-s}$ statistica di Poisson




(livelli non correlati)

("Quantum Signatures of Chaos", Haake)

Sistemi quantistici non integrabili $\Leftrightarrow$ matrici random (LSS)

ETH vale quando il sistema ha LSS di tipo Wigner-Dyson

---

ETH $\Leftrightarrow$ $\sum_\alpha |c_\alpha|^2 A_{\alpha\alpha} \sim \langle \varphi_n | \hat{A} | \varphi_n \rangle$

con $|\varphi_n\rangle$ autostato di $\hat{H}$ corrispondente a energia $|E_n - E_0| < \Delta E$

ci basta calcolare il valore di aspettazione su un singolo autostato

- Canonical Typicality (S. Popescu, A. Short, A. Winter, Nature Phys. 2, 754 (2006))

Universo in uno stato puro in una "shell" microcanonica $[E_0, E_0 + \Delta E]$
$\Leftrightarrow$ tutte le matrici densità ridotte $\rho_R$ di un piccolo sottosistema sono "canoniche"

(U) Universo = Sistema (S) + Ambiente (A)

Supponiamo che in U ci sia un vincolo R (es. conservazione dell'energia)

$$\mathcal{H}_R \subseteq \underbrace{\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A}_{\mathcal{H}_U}$$

$d_R, d_A, d_S$ dimensioni spazi di Hilbert $\Rightarrow d_A \gg d_S$

$\mathcal{E}_R = \frac{1}{d_R} \mathbb{1}_R$ matrice densità degli stati equiprobabili in $\mathcal{H}_R$

$\Omega_S = \mathrm{Tr}_A(\mathcal{E}_R)$ questo è lo stato del sistema S

$\Rightarrow$ Immaginiamo che l'universo sia in uno stato puro qualsiasi $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_R$ (e non in $\mathcal{E}_R$)

$$\boxed{\Omega_S \sim \mathrm{Tr}_A(|\phi\rangle\langle\phi|)}$$

---

Domanda: se abbiamo altre costanti del moto "rilevanti"

Come si generalizza la termalizzazione?

Generalized Gibbs Ensemble (GGE) [M. Rigol et. al. Phys. Rev. Lett. 98, 050405 (2007)]

$$\rho_{GGE} = \frac{1}{Z} e^{-\sum_\alpha \lambda_\alpha \hat{I}_\alpha} \qquad Z = \mathrm{Tr}\left[e^{-\sum_\alpha \lambda_\alpha \hat{I}_\alpha}\right]$$

$\hat{I}_\alpha$ costanti del moto "rilevanti"

$\lambda_\alpha$ moltiplicatori di Lagrange

$\lambda_\alpha$ sono determinati dalle condizioni iniziali:

$$\langle\psi(0)|\hat{I}_\alpha|\psi(0)\rangle = \mathrm{Tr}[\hat{I}_\alpha \rho_{GGE}]$$

costante del moto $[\hat{I}_\alpha, \hat{H}] = 0 \Rightarrow$ dopo il quench non cambia

Per sistemi integrabili ETH viene sostituita da:

$$\sum_\alpha |c_\alpha|^2 A_{\alpha\alpha} \sim \mathrm{Tr}[\hat{A}\rho_{GGE}]$$

- media microcanonica sostituita da
- media su GGE

- Esempio: per Ising in campo trasverso (diag. esatta)

$$\hat{H}_f = 2\sum_k \left(\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k - 1/2\right)$$

$\hat{b}_k^{(\dagger)}$ modi normali (quasiparticelle)

$$[\hat{H}_f, \hat{n}_k] = 0 \qquad \hat{n}_k = \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$$

$$\Rightarrow \rho_{GGE}(\text{Ising}) = \frac{1}{Z} e^{-\sum_k \lambda_k \hat{n}_k}$$

"temperature efficaci"

[P. Calabrese et al. Phys. Rev. Lett. 106, 227203 (2011)]