

# Doppio pendolo smorzato

Giuseppe De Maria

Dario Cafasso

Carmine De Rosa

Pietro Pellecchia

June 22, 2018

## Descrizione del sistema

Il presente lavoro di tesi tratta l'evoluzione dinamica di un sistema costituito da un pendolo doppio in presenza di attrito viscoso, analizzando i cambiamenti che subisce la dinamica dello stesso al variare dei parametri fondamentali che lo caratterizzano. Siano  $m_1$  e  $m_2$  le masse dei due punti materiali disposte come in figura:

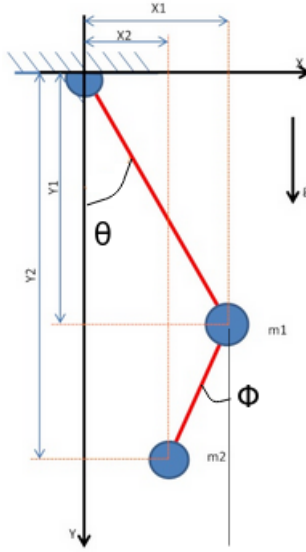


Figure 1: Rappresentazione del sistema in esame

Le grandezze fondamentali del nostro sistema sono:

- l'accelerazione gravitazionale  $g=9,81 \text{ m/s}^2$ ;
- la lunghezza delle aste  $l_1 = l_2 = l$  misurate in metri ;
- le masse  $m_1$  e  $m_2$  msurate in kg;
- il coefficiente di attrito viscoso  $\beta$  misurato in Ns/m.

Studiamo il sistema in linguaggio lagrangiano e introduciamo le coordinate generalizzate  $\theta$  e  $\phi$ , così da ottenere le seguenti equazioni di trasformazione:

$$\begin{cases} x_1 = l \sin \theta \\ y_1 = l \cos \theta \\ x_2 = l(\sin \theta + \sin \phi) \\ y_2 = l(\cos \theta + \cos \phi) \end{cases} \quad (1)$$

dove  $x_1$  e  $y_1$  sono le coordinate cartesiane relative alla massa  $m_1$ , mentre  $x_2$  e  $y_2$  sono le coordinate cartesiane relative alla massa  $m_2$ .

Otteniamo la seguente lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2l^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\cos(\theta - \phi)\dot{\theta}\dot{\phi}) + m_1gl\cos\theta + m_2gl(\cos\theta + \cos\phi) \quad (2)$$

Dal sistema di equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = Q_\phi \end{cases} \quad (3)$$

dove  $Q_\theta$  e  $Q_\phi$  sono le forze generalizzate

$$\begin{cases} Q_\theta = 2\beta l^2\dot{\theta} + \beta l^2\cos(\theta - \phi)\dot{\phi} \\ Q_\phi = \beta l^2\dot{\phi} + \beta l^2\cos(\theta - \phi)\dot{\theta} \end{cases} \quad (4)$$

si ottengono le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = D - A - C - B \left( \frac{H - E - G - F(D - A - C)}{1 - FB} \right) \\ \ddot{\phi} = \frac{H - E - G - F(D - A - C)}{1 - FB} \end{cases} \quad (5)$$

dove

$$A = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\dot{\phi}^2 - \dot{\theta}\dot{\phi})\sin(\theta - \phi)$$

$$B = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos(\theta - \phi)$$

$$C = \frac{g}{l}\sin\theta$$

$$D = -\frac{\beta}{m_1 + m_2}(2\dot{\theta} + \cos(\theta - \phi)\dot{\phi})$$

$$E = (\dot{\theta}\dot{\phi} - \dot{\theta}^2)\sin(\theta - \phi)$$

$$F = \cos(\theta - \phi)$$

$$G = \frac{g}{l}\sin\phi$$

$$H = -\frac{\beta}{m_2}[\dot{\phi} + \cos(\theta - \phi)\dot{\theta}]$$

## Analisi numerica

L'analisi numerica del sistema è svolta in una finestra di osservazione di  $T=30$  secondi, fissando i parametri:

- $l=0,5$  m;
- $\beta=0,5$  Ns/m, che è il coefficiente d'attrito viscoso;
- $m_1=2$  kg e  $m_2=3,5$  kg;
- $\theta_o = \pi/3$  rad e  $\phi_o = -\pi/2$  rad, che sono gli angoli iniziali;
- $\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_0 = 0$  rad/s, che sono le velocità angolari iniziali.

e scelto un passo di  $2 \cdot 10^{-7}$  secondi. La scelta di questo passo è dovuta ad un'analisi fatta sui valori degli angoli ottenuti al tempo finale, al variare del passo. L'analisi, in particolare, consiste nello scegliere un passo minimo  $\Delta_{min}$ , valutare gli angoli al tempo finale con quel passo e assumerli come valor vero, far variare il passo ottenendo valori diversi e graficare il valore assoluto della differenza fra questi ultimi e il valore vero

$$|\theta_i(T, \Delta) - \theta(T, \Delta_{min})| \quad (6)$$

$$|\phi_i(T, \Delta) - \phi(T, \Delta_{min})| \quad (7)$$

Infine, dall'andamento del grafico possiamo dedurre se ci stiamo muovendo sulla curva dell'errore algoritmico o sulla curva dell'errore numerico.

Inizialmente abbiamo assunto come valore vero l'angolo corrispondente a un  $\Delta_{min} = 1 \cdot 10^{-7}$ ; abbiamo fatto variare poi il passo ottenendo nuovi valori degli angoli  $\theta$  e  $\phi$ ; usando poi le formule (6) e (7), abbiamo ottenuto i seguenti dati:

Passo	$\epsilon_\theta$	$\epsilon_\phi$
$1 \cdot 10^{-7}$	0	0
$2 \cdot 10^{-7}$	$0.679356816566 \cdot 10^{-7}$	$0.163825220917 \cdot 10^{-6}$
$3 \cdot 10^{-7}$	$0.7785326561387 \cdot 10^{-7}$	$0.196745623987 \cdot 10^{-6}$
$3,8 \cdot 10^{-7}$	$0.981169974712 \cdot 10^{-7}$	$0.236633964840 \cdot 10^{-6}$
$5,1 \cdot 10^{-7}$	$0.135861782401 \cdot 10^{-6}$	$0.327649852888 \cdot 10^{-6}$
$6 \cdot 10^{-7}$	$0.158513106179 \cdot 10^{-6}$	$0.382260198939 \cdot 10^{-6}$
$8 \cdot 10^{-7}$	$0.203811021535 \cdot 10^{-6}$	$0.491480281251 \cdot 10^{-6}$

Table 1: Valori degli errori a differenti passi

Quindi, graficando l'errore in funzione del passo, i grafici ottenuti per le due coordinate sono rispettivamente:

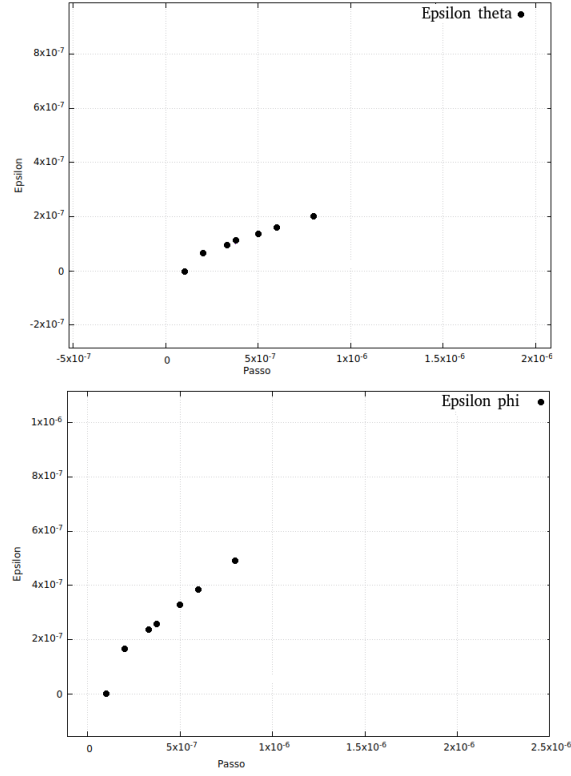


Figure 2: Grafici degli errori in funzione del passo

Come si nota, le curve sono monotone crescenti; ciò vuol dire che scegliendo come valor vero il risultato ottenuto con un passo  $\Delta_{min} = 1 \cdot 10^{-7}$ , il numero di passi  $N$  che compio non è tanto grande da far sì che questo sia completamente affetto da errore numerico, il quale mi darebbe una dinamica del sistema completamente sbagliata. A questo punto, abbiamo scelto come errore che vogliamo commettere  $\bar{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-7}$  e di conseguenza il passo scelto è  $\bar{\Delta} = 2 \cdot 10^{-7}$ .

Il grafico seguente mostra quanto appena detto :

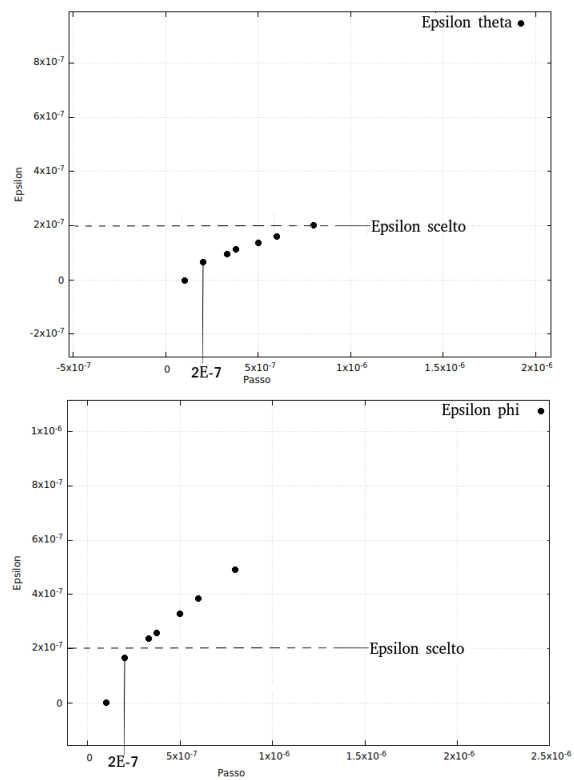


Figure 3: Errore e passo scelti

## Casistica

Fissando i parametri caratteristici del sistema con gli stessi valori con cui è stata svolta l'analisi numerica del paragrafo precedente, abbiamo graficato l'evoluzione temporale delle nostre coordinate generalizzate, ottenendo i seguenti grafici:

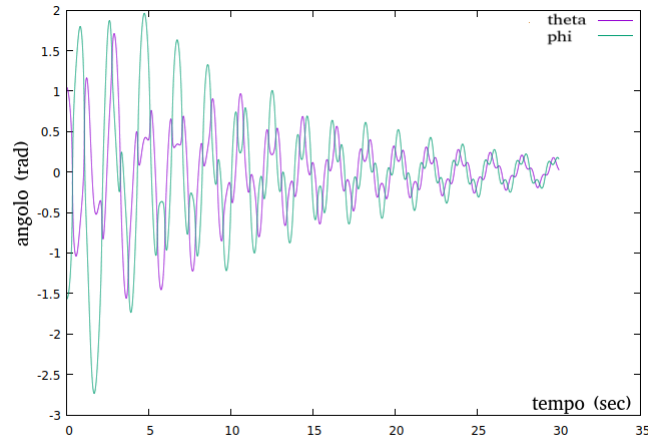


Figure 4: Dinamica delle coordinate  $\theta(t)$  (in viola) e  $\phi(t)$  (in azzurro)

Attraverso le equazioni di trasformazione (1)

$$\begin{cases} x_1 = l \sin \theta \\ y_1 = l \cos \theta \\ x_2 = l(\sin \theta + \sin \phi) \\ y_2 = l(\cos \theta + \cos \phi) \end{cases}$$

ci siamo ricondotti alle coordinate cartesiane, potendo così graficare la curva  $y(x)$  che descrive la traiettoria del moto e una rappresentazione che mette in evidenza come varia l'andamento del doppio pendolo con l'avanzare del tempo

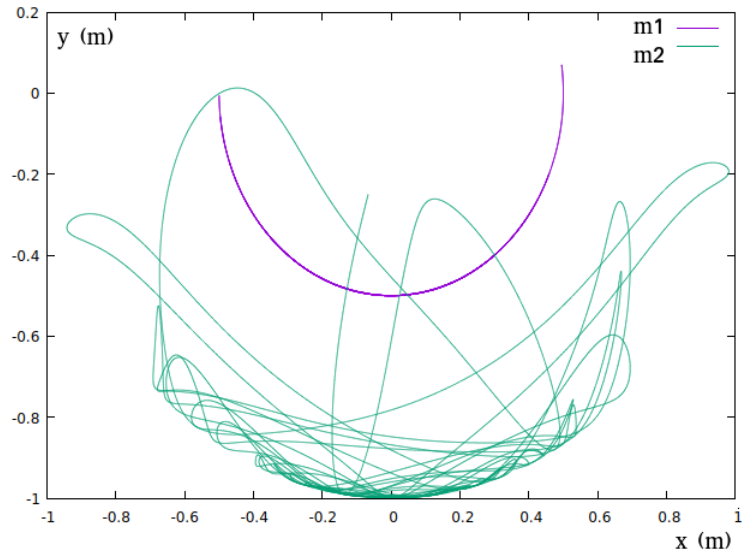


Figure 5: moto delle masse  $m_1$  (in viola) e  $m_2$ (in azzurro) in 2 dimensioni

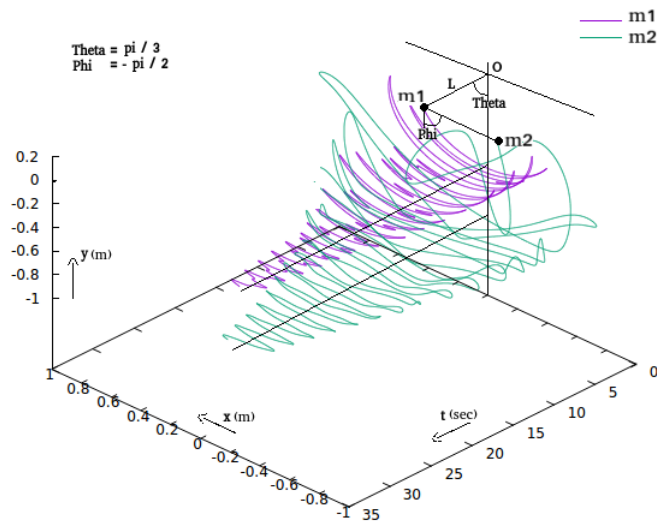


Figure 6: evoluzione temporale del moto delle masse  $m_1$  (in viola) e  $m_2$ (in azzurro)

Il sistema che abbiamo scelto di studiare rappresenta un particolare esempio di moto caotico, ossia caratterizzato da variazioni enormi nella dinamica in seguito a piccole modifiche delle condizioni iniziali. Prendendo gli stessi parametri



del grafico precedente ( $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$ ) e modificando l'angolo  $\theta_0$  facendogli assumere il valore  $\frac{\pi}{4}$  otteniamo la seguente dinamica:

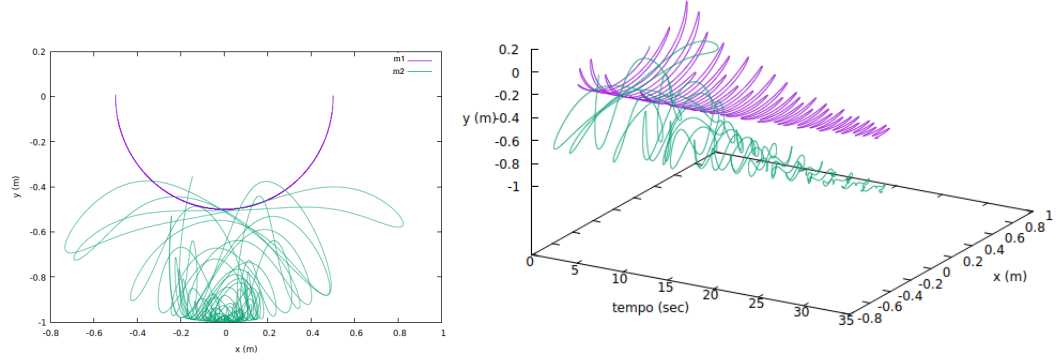


Figure 7: A sinistra moto delle masse  $m_1$  (in viola) e  $m_2$  (in azzurro) in 2 dimensioni; a destra il moto delle masse nell'avanzare del tempo.

Abbiamo modificato poi il valore di  $\phi_0$ , ponendolo a  $-\frac{\pi}{3}$ ; la dinamica che ne consegue è la seguente:

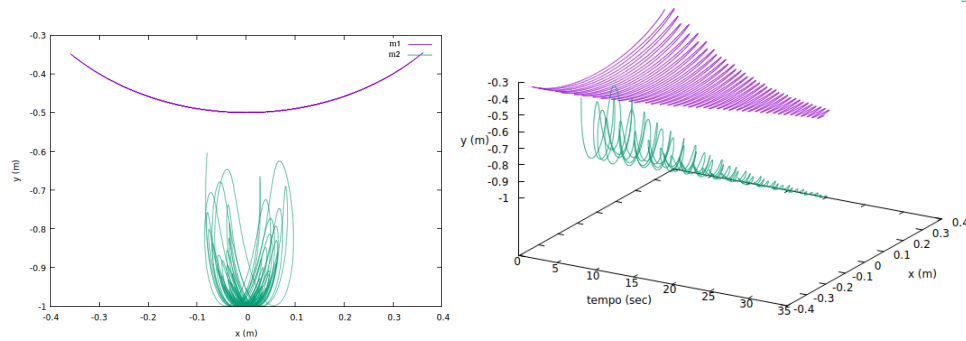


Figure 8: A sinistra moto delle masse  $m_1$  (in viola) e  $m_2$  (in azzurro) in 2 dimensioni; a destra la dinamica delle masse nel tempo.

Come si nota, le due dinamiche, in particolare quella relativa alla massa  $m_2$ , sono completamente sconnesse; questo conferma quanto detto in precedenza.

Risulta quindi evidente che modificando le grandezze fondamentali abbiamo variazioni interessanti della dinamica del nostro sistema. Osserviamo alcuni casi particolari

### Caso $m_1 \gg m_2$

Nel caso in cui la massa del primo pendolo è molto maggiore di quella del secondo, osserviamo che  $m_1$  segue una dinamica quasi indipendente da quella di  $m_2$ , mentre  $m_2$  è fortemente influenzata dalla dinamica di  $m_1$ . Fissando i parametri nel modo seguente:

- $l=0,5$  m;
- $\beta=0,5$  Ns/m;
- $m_1=200$  kg e  $m_2=3,5$  kg;
- $\theta_o = \pi/8$  rad e  $\phi_o = \pi/4$  rad;
- $\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_o = 0$  rad/s.

la dinamica che ne consegue è rappresentata nei seguenti grafici:

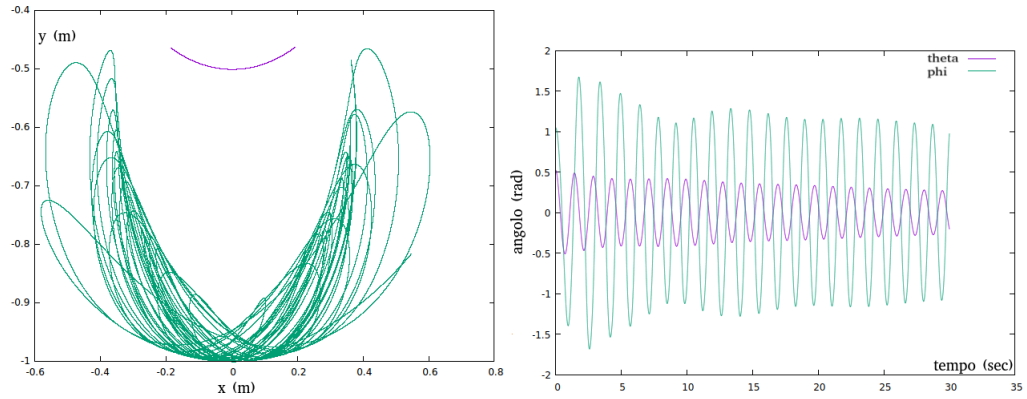


Figure 9: A sinistra moto delle masse  $m_1$  (in viola) e  $m_2$  (in azzurro) in 2 dimensioni; a destra la dinamica delle coordinate  $\theta(t)$  (in viola) e  $\phi(t)$  (in azzurro)

Come si può notare il moto della massa  $m_2$  è del tutto caotico, mentre la dinamica della massa  $m_1$  è quasi indipendente dalla dinamica della massa  $m_2$ .

Cambiamo ora gli angoli iniziali, fissandoli allo stesso valore in radianti e lasciando invariati i parametri restanti,

- $\theta_o = \pi/3$  rad e  $\phi_o = \pi/3$  rad;

La dinamica che ne consegue è rappresentata nei seguenti grafici:

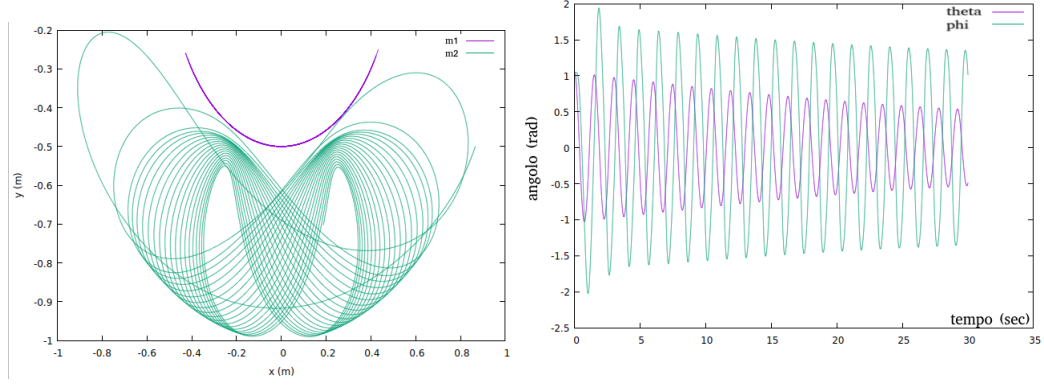


Figure 10: A sinistra moto delle masse  $m_1$  (in viola) e  $m_2$  (in azzurro) in 2 dimensioni; a destra la dinamica delle coordinate  $\theta(t)$  (in viola) e  $\phi(t)$  (in azzurro)

Come si può notare la massa  $m_2$  sembra essere soggetta al fenomeno di risonanza, come se la massa  $m_1$  svolgesse il ruolo di una forzante per la dinamica della massa  $m_2$ .

### Caso $m_2 \gg m_1$

Nel caso in cui la massa del secondo pendolo è molto maggiore di quella del primo, osserviamo che la situazione si è capovolta, ossia la dinamica è determinata principalmente dalla massa  $m_2$ , mentre la massa  $m_1$  è costretta a seguirla. Fissando i parametri nel modo seguente:

- $l=0,5$  m;
- $\beta=0,5$  Ns/m;
- $m_1=2$  kg e  $m_2=300,5$  kg;
- $\theta_o = \pi/10$  rad e  $\phi_o = \pi/6$  rad;
- $\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_o = 0$  rad/s.

la dinamica che ne consegue è rappresentata nei seguenti grafici:

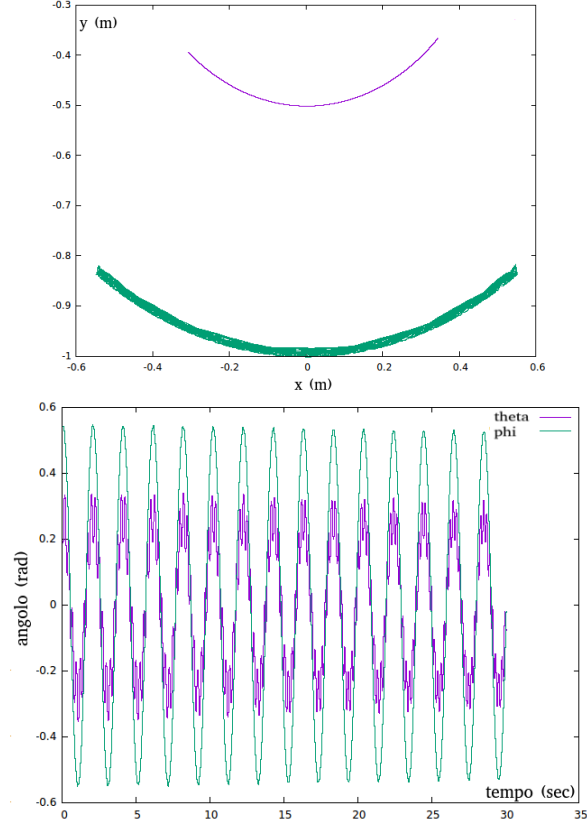


Figure 11: In alto il moto delle masse  $m_1$  (in viola) e  $m_2$  (in azzurro) in 2 dimensioni; in basso la dinamica delle coordinate  $\theta(t)$  (in viola) e  $\phi(t)$  (in azzurro)

Sotto questa condizione, la coordinata generalizzata  $\phi$  relativa alla massa  $m_2$  segue una dinamica totalmente indipendente da quella della coordinata  $\theta$  relativa alla massa  $m_1$ , la quale, essendo costretta a seguire la dinamica della massa  $m_2$ , esegue delle oscillazioni caotiche che si ripercuotono sulla coordinata  $y_2$  della massa  $m_2$ .

Cambiamo ora gli angoli iniziali, fissandoli allo stesso valore in radianti e lasciando invariati i parametri restanti

- $\theta_o = \pi/3$  rad e  $\phi_o = \pi/3$  rad;

la dinamica del sistema cambia.

Il moto è rappresentato nei seguenti grafici:

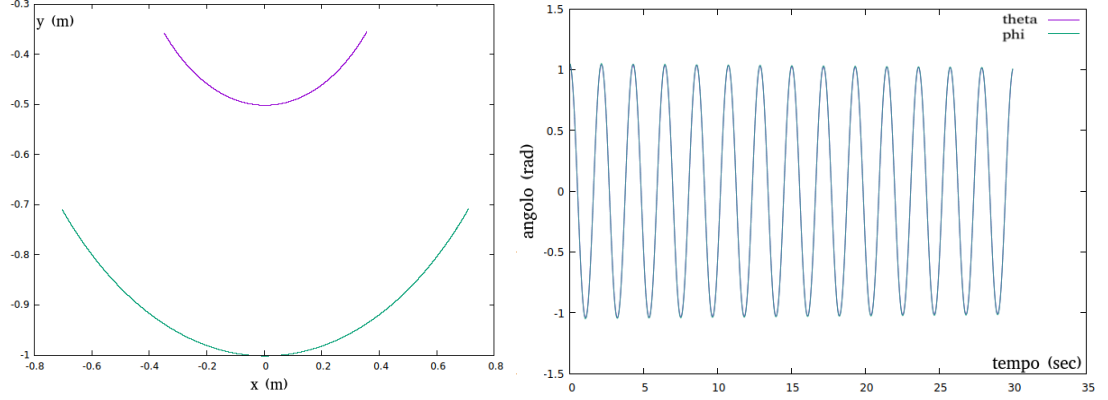


Figure 12: A sinistra moto delle masse  $m_1$  (in viola) e  $m_2$  (in azzurro) in 2 dimensioni; a destra la dinamica delle coordinate  $\theta(t)$  (in viola) e  $\phi(t)$  (in azzurro)

Come si può notare questa particolare condizione fa sì che la dinamica del doppio pendolo possa essere approssimata a quella di un singolo pendolo con asta di lunghezza  $2l$  e massa  $m_2$ ; questo comportamento è dovuto al fatto che la massa  $m_1$  non ha effetti rilevanti sulla dinamica complessiva del sistema e quindi, partendo dallo stesso angolo iniziale, segue perfettamente il moto della massa  $m_2$ .

### Caso $m_2 = m_1$

Nel caso in cui le masse hanno lo stesso valore, osserviamo due sottocasi particolari. Il primo è quello in cui gli angoli di partenza sono uguali e il secondo è quello in cui sono uguali e opposti.

Fissando i parametri nel modo seguente:

- $l=0,5$  m;
- $\beta=0,5$  Ns/m;
- $m_1=2$  kg e  $m_2=2$  kg;
- $\theta_o = \pi/3$  rad e  $\phi_o = \pi/3$  rad;
- $\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_o = 0$  rad/s.

La dinamica che ne consegue è rappresentata nei seguenti grafici:

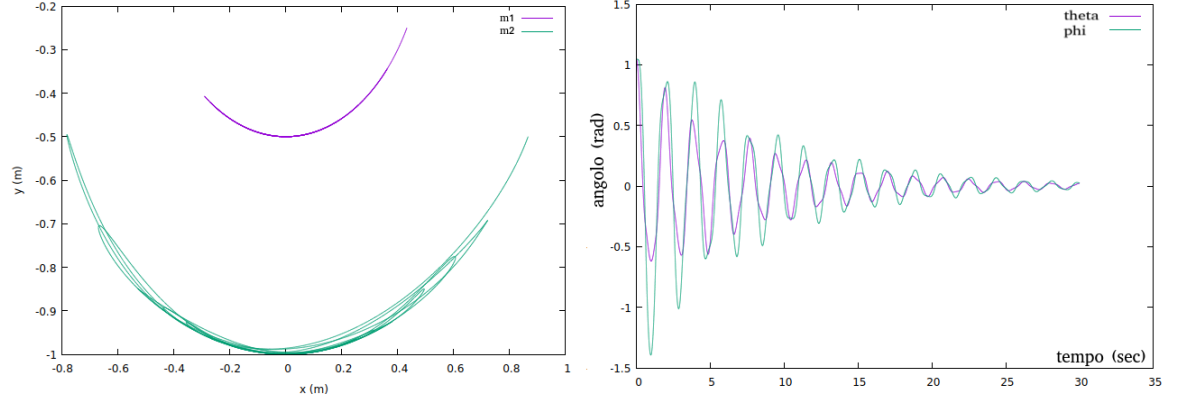


Figure 13: A sinistra moto delle masse  $m_1$  (in viola) e  $m_2$  (in azzurro) in 2 dimensioni; a destra la dinamica delle coordinate  $\theta(t)$  (in viola) e  $\phi(t)$  (in azzurro)

Il moto risente parecchio dell'effetto smorzante e la dinamica non presenta caratteristiche particolari oltre al fatto che i due pendoli oscillano con la stessa frequenza.

Cambiamo ora gli angoli iniziali ponendoli uguali ma opposti

- $\theta_o = \pi/3$  rad e  $\phi_o = -\pi/3$  rad;

la dinamica che ne consegue è rappresentata nei seguenti grafici.

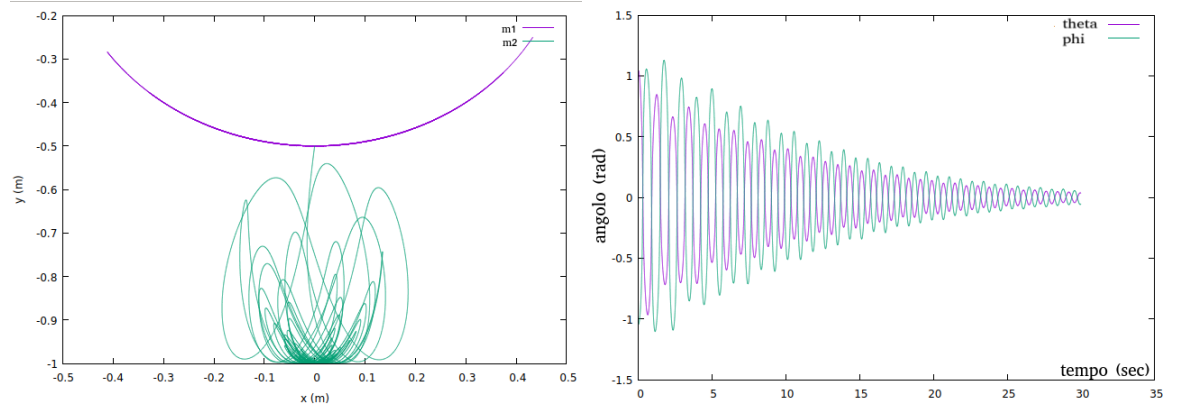


Figure 14: A sinistra moto delle masse  $m_1$  (in viola) e  $m_2$  (in azzurro) in 2 dimensioni; a destra la dinamica delle coordinate  $\theta(t)$  (in viola) e  $\phi(t)$  (in azzurro)

Risulta interessante osservare che la frequenza di oscillazione delle masse è molto più grande rispetto al caso precedente e che il moto della seconda massa sull'asse delle  $x$  è limitato in un intervallo molto più stretto dei casi precedenti a causa del fatto che si muove in opposizione ad  $m_1$ .

**Caso**  $\beta \gg 1 \text{Ns/m}$  e  $\beta = 0 \text{Ns/m}$

Concentrandoci invece sul valore del coefficiente d'attrito viscoso e fissando i parametri nel modo seguente:

- $l=0,5 \text{ m}$ ;
- $\beta=4 \text{ Ns/m}$  e ;
- $m_1=2 \text{ kg}$  e  $m_2=3,5 \text{ kg}$ ;
- $\theta_o = \pi/3 \text{ rad}$  e  $\phi_o = -\pi/4 \text{ rad}$ ;
- $\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_0 = 0 \text{ rad/s}$ .

la dinamica che ne consegue è rappresentata nei seguenti grafici.

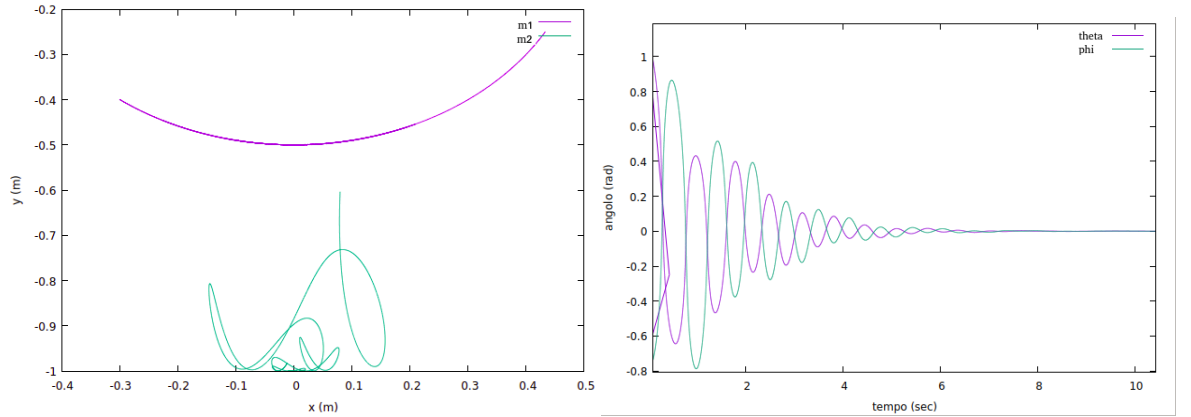


Figure 15: A sinistra moto delle masse  $m_1$  (in viola) e  $m_2$  (in azzurro) in 2 dimensioni; a destra la dinamica delle coordinate  $\theta(t)$  (in viola) e  $\phi(t)$  (in azzurro)

Si nota che la dinamica di questo caso differisce dalle altre soltanto per il tempo di smorzamento, in quanto tutte le altre caratteristiche della dinamica dipendono dalle variazioni delle altre grandezze fondamentali del sistema, già analizzate nei casi precedenti; in particolare, nel grafico a destra notiamo che, nonostante gli angoli iniziali siano ampi e opposti, il moto si smorza in pochi secondi; nel grafico a sinistra è invece evidente il regime caotico che governa il sistema, soprattutto sulla massa  $m_2$  che compie delle oscillazioni del tutto incontrollate.

Cambiamo il valore del coefficiente di attrito, fissandolo a zero e lasciando invariati gli altri parametri, i grafici della dinamica sono :

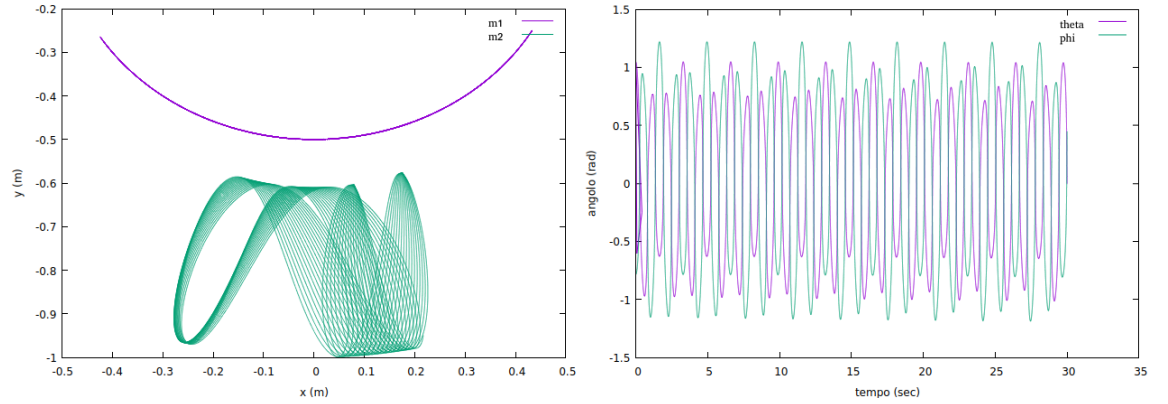


Figure 16: A sinistra moto delle masse  $m_1$  (in viola) e  $m_2$  (in azzurro) in 2 dimensioni; a destra la dinamica delle coordinate  $\theta(t)$  (in viola) e  $\phi(t)$  (in azzurro)

Il calcolo numerico, conferma le nostre aspettative: ponendo  $\beta = 0$ , il moto è in assenza di attrito viscoso e quindi in assenza di smorzamento; il moto si riduce ad una successione di oscillazioni casuali, fortemente dipendenti dalle condizioni iniziali.



## References

- [1] Meccanica classica - Herbert Goldstein, Charles Poole, John Safko
- [2] An Introduction to Computational Physics - Tao Pang
- [3] Fisica. Meccanica e termodinamica - Corrado Mencuccini, Vittorio Silvestrini
- [4] Fisica Teorica 1. Meccanica – Lev D. Landau