

descritti mediante un modello ridotto che contenga le principali caratteristiche della turbolenza ma sia al contempo matematicamente semplice: tale modello è rappresentato dall'equazione di Burgers che verrà analizzata nella sezione successiva.

1.3 equazione di Burgers

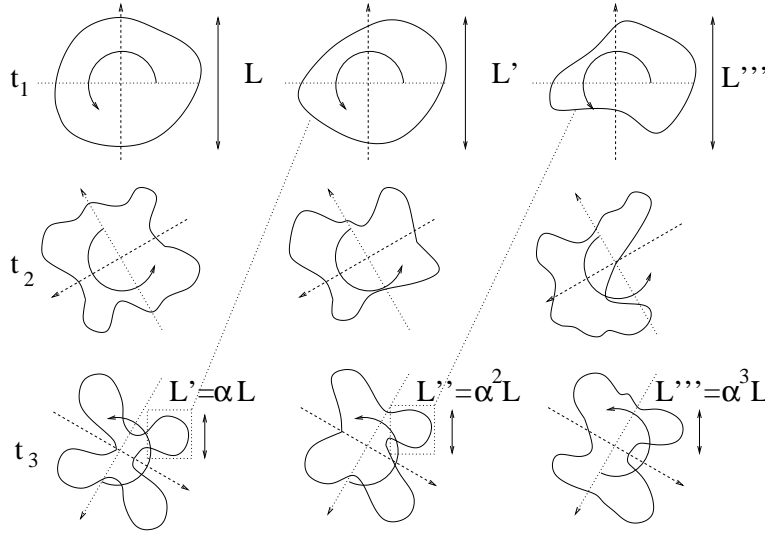


Figura 1.7: Disegno schematico dell'instabilità di un vortice che lo suddivide in strutture sempre più piccole (meccanismo di cascata).

Consideriamo l'equazione di Burgers, un'equazione monodimensionale, che ha tutte le caratteristiche principali delle equazioni di Navier–Stokes tranne il termine di pressione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.2)$$

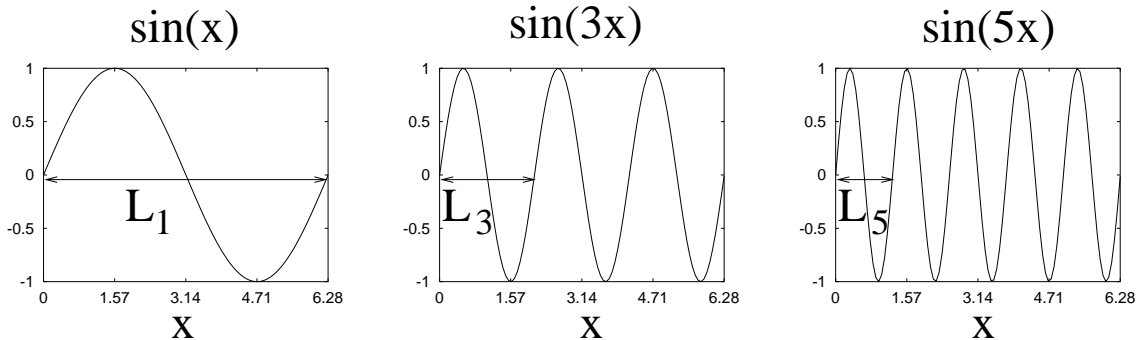


Figura 1.8: Esempio di variazione di lunghezza d'onda L_k con il numero d'onda k .

Immaginiamo ora che l'intervallo di definizione della sua soluzione sia $x \in [0, 2\pi)$ e che la soluzione sia periodica in x con media nulla; con queste ipotesi è possibile espandere la

$u(x, t)$ con una serie di seni

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(kx), \quad (1.3)$$

in cui la dinamica temporale della soluzione è tenuta in conto dai coefficienti $A_k(t)$ mentre la base di seni soddisfa automaticamente le condizioni al contorno. A titolo di esempio vengono riportate in figura 1.8 le funzioni seno per $k = 1, 3, 5$ da cui si può notare che la lunghezza della singola onda (detta appunto lunghezza d'onda) è pari ad $L_k = 2\pi/k$ e che il gradiente della curva diventa tanto più ripido quanto più aumenta k . Con questo semplice esempio abbiamo quindi imparato che l'indice k ci dà l'informazione sulla dimensione della struttura di base (ossia la singola onda) e sui gradienti spaziali che, rispettivamente, diminuiscono ed aumentano al crescere di k .

Dopo aver fatto questa precisazione, possiamo utilizzare la sommatoria (1.3) per esprimere i singoli termini della (1.2) ed ottenere

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k(t) \sin(kx), \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k \cos(kx), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(kx), \\ u \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_l(t) A_m(t) m \sin(lx) \cos(mx) = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_l(t) A_m(t) m}{2} \{ \sin[(l+m)x] + \sin[(l-m)x] \}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Questi termini possono essere risostituiti nell'equazione (1.2) che diventa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k(t) \sin(kx) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_l(t) A_m(t) m}{2} \{ \sin[(l+m)x] + \sin[(l-m)x] \} = -\nu \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(kx). \quad (1.5)$$

Osservando ora la proprietà di ortogonalità delle funzioni seno

$$\int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(qx) dx = \pi(\delta_{pq} - \delta_{-p,q}),$$

abbiamo che moltiplicando l'equazione (1.5) per $\sin(kx)$ ed integrando tra 0 e 2π si ottiene

$$\dot{A}_k(t) \pi + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi A_l(t) A_m(t) m}{2} = -\pi \nu k^2 A_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, \infty,$$

essendo la doppia sommatoria ristretta ai soli m ed l tali che $l+m = k$, $l-m = k$, $l-m = -k$ ed $l+m = -k$ (quest'ultima condizione non dà alcun contributo in quanto nel nostro esempio porta solamente ad $l < 0$) ossia

$$\dot{A}_k + \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{A_m A_{k-m}}{2} + \frac{A_m A_{k+m}}{2} - \frac{A_m A_{m-k}}{2} \right) = -\nu k^2 A_k, \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \quad (1.6)$$

L'equazione appena trovata indica che le variazioni nel tempo della quantità di moto nel modo k -esimo (\dot{A}_k) hanno due cause, una lineare ed una non lineare. Per comprendere meglio l'effetto dei due termini sorgente immaginiamo per un istante di cancellare dall'equazione di partenza (1.2) i termini non lineari, ottenendo che la (1.6) diventa

$$\dot{A}_k = -\nu k^2 A_k, \implies A_k(t) = A_k(0)e^{-\nu k^2 t}, \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \quad (1.7)$$

da cui si nota che ogni componente A_k decresce inesorabilmente nel tempo tanto più rapidamente quanto più è viscoso il fluido e quanto più è piccola la struttura (ossia quanto più grande è k). L'altro risultato notevole è che in assenza di termini non lineari l'evoluzione di ogni modo A_k è indipendente dagli altri; ciò implica che una condizione iniziale che contenesse solamente un numero finito di $A_k(0)$ (per esempio $k = 1, 3, 8$) evolverebbe unicamente con i modi 1, 3, 8 ognuno decrescendo nel tempo indipendentemente dagli altri secondo la soluzione appena ricavata. In figura 1.9 è riportata la soluzione in termini di $u(x, t)$ e di $A_k(t)$ dell'equazione (1.7) in cui si vede che effettivamente solo i coefficienti A_k presenti nella condizione iniziale determinano la dinamica del fenomeno e che questi decrescono nel tempo tanto più rapidamente quanto più è grande k .

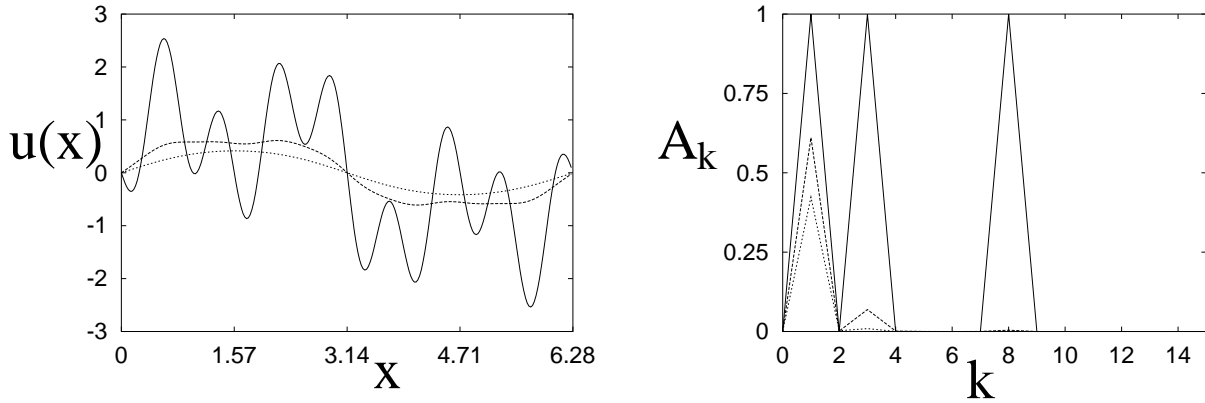


Figura 1.9: Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers (senza i termini non lineari) $\nu = 10$. A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di $u(x, t)$, rispettivamente per — $t = 0$, ---- $t = 0.5$ e $t = 1$. A destra ci sono i coefficienti A_k per gli stessi tempi.

Al contrario, la presenza dei termini non lineari modifica completamente la dinamica del fenomeno, trasferendo quantità di moto dalla componente k alle componenti $k - m$, $k + m$ ed $m - k$. Per illustrare più in dettaglio questo concetto, immaginiamo che il numero di termini della sommatoria (1.3) sia limitato a 3 invece che infinito. L'equazione (1.6) scritta per componenti risulterebbe allora:

$$\dot{A}_1 + (A_1 A_0 + A_1 A_2 - A_1 A_0) \frac{1}{2} + (A_2 A_{-1} + A_2 A_3 - A_2 A_1) \frac{2}{2} + (A_3 A_{-2} + A_3 A_4 - A_3 A_2) \frac{3}{2} = -\nu A_1, \quad (1.8)$$

$$\dot{A}_2 + (A_1 A_1 + A_1 A_3 - A_1 A_{-1}) \frac{1}{2} + (A_2 A_0 + A_2 A_4 - A_2 A_0) \frac{2}{2} + (A_3 A_{-1} + A_3 A_5 - A_3 A_1) \frac{3}{2} = -\nu 4 A_2,$$

$$\dot{A}_3 + (A_1 A_2 + A_1 A_4 - A_1 A_{-2}) \frac{1}{2} + (A_2 A_1 + A_2 A_5 - A_2 A_{-1}) \frac{2}{2} + (A_3 A_0 + A_3 A_6 - A_3 A_0) \frac{3}{2} = -\nu 9 A_3,$$

e osservando che risulta $A_p \equiv 0$ per $p \leq 0$ e $p > 3$ si riducono a

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 - \frac{A_1 A_2}{2} - \frac{A_2 A_3}{2} &= -\nu A_1, \\ \dot{A}_2 + \frac{A_1 A_1}{2} - A_1 A_3 &= -4\nu A_2 \\ \dot{A}_3 + \frac{3A_1 A_2}{2} &= -9\nu A_3. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Se ora consideriamo una condizione iniziale contenente solo A_1 (per esempio un seno come il primo pannello di figura 1.10) si vede che a causa del termine $A_1 A_1/2$ risulterà nell'istante iniziale $\dot{A}_2 \neq 0$ indicando che parte della quantità di moto viene trasferita nella componente A_2 . D'altra parte, quando risulta $A_2 \neq 0$, anche il termine $3A_1 A_2/2$ verrà attivato nell'equazione per A_3 e quindi anche la terza struttura verrà interessata dal moto del flusso. Se ricordiamo quindi che al crescere di k diminuisce la dimensione della struttura, abbiamo che i termini non lineari hanno come effetto quello di trasferire il 'moto' (e quindi l'energia) dalle strutture grandi a quelle più piccole⁵ con il meccanismo di 'cascata' dai moti a grande scala verso quelli più piccoli e locali.

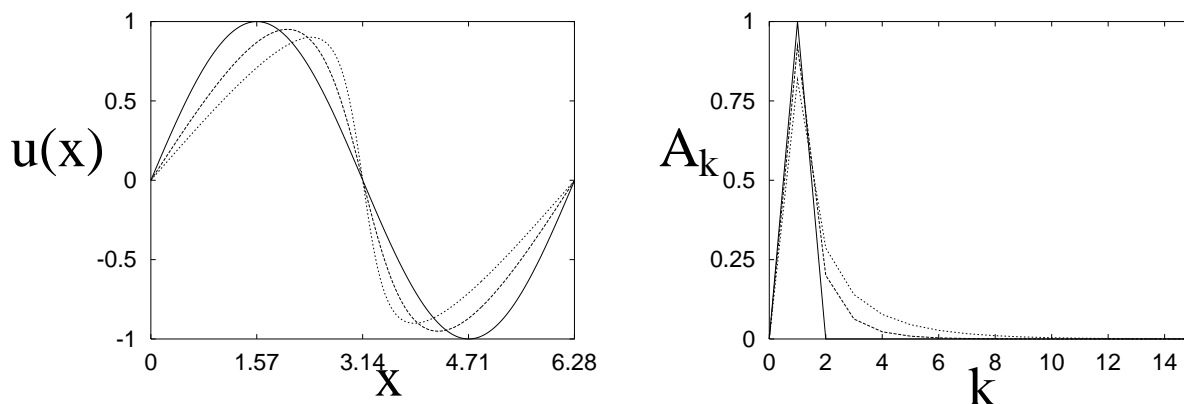


Figura 1.10: Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers $\nu = 10^{-1}$. A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di $u(x, t)$, rispettivamente per — $t = 0$, ---- $t = 0.5$ e $t = 1$. A destra ci sono i coefficienti A_k per gli stessi tempi.

In particolare se nell'esempio precedente invece di limitare a 3 il numero di termini ne avessimo infiniti, avremmo un trasferimento di energia verso strutture sempre più piccole (k grandi) in un tempo tanto più lungo quanto più distante risulterebbe k dal modo $k = 1$ contenente energia nella condizione iniziale. Questa osservazione ci pone quindi un nuovo interrogativo e cioè se il trasferimento dell'energia procede indefinitamente fino a $k = \infty$ oppure se interviene qualche meccanismo in grado di bloccare questa cascata.

La risposta è fornita dalla soluzione analitica (1.7) da cui si vede come la viscosità diminuisca rapidamente il contenuto energetico del modo k -esimo all'aumentare di k . Se

⁵Ciò non è vero nella turbolenza bidimensionale dove l'effetto combinato dei termini non lineari ed i termini viscosi crea un trasferimento medio in direzione opposta rispetto al caso monodimensionale e tridimensionale. Questo spiega la formazione di strutture di grande scala nell'atmosfera e negli oceani (grandi circolazioni e correnti).

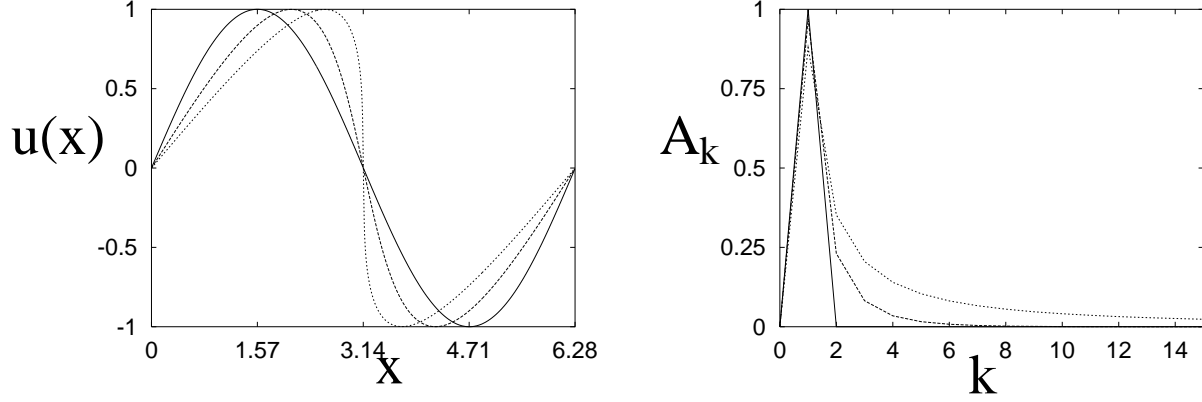


Figura 1.11: Evoluzione temporale dell'equazione di Burgers $\nu = 10^{-3}$. A sinistra è riportata l'evoluzione temporale di $u(x, t)$, rispettivamente per — $t = 0$, ---- $t = 0.5$ e $t = 1$. A destra ci sono i coefficienti A_k per gli stessi tempi.

in particolare questa diminuzione è sufficientemente rapida, si può inibire il trasferimento di energia verso numeri d'onda k elevati semplicemente perché l'energia viene dissipata prima ancora che riesca ad essere trasferita. In pratica la viscosità opera un 'taglio' sulla dimensione minima della struttura che è possibile generare (o sul k massimo) in un flusso e questo taglio dipende sia dal valore della viscosità ν sia da quanto velocemente l'energia viene trasferita da un modo all'altro; si potrebbe verificare, infatti, che il flusso di energia verso le piccole scale è così rapido che la viscosità è costretta a 'spostare' il k di taglio verso valori maggiori dove può agire più efficientemente.

Le considerazioni appena fatte sono mostrate mediante due esempi in cui si riporta la soluzione dell'equazione di Burgers, entrambe con la medesima condizione iniziale, ma con due diversi valori di viscosità. Confrontando le figure 1.10 e 1.11 si nota come nel caso a viscosità minore la curva presenti un gradiente più ripido in corrispondenza del punto $x = \pi$. Ragionando in termini di A_k abbiamo quindi che la soluzione con viscosità piccola conterrà A_k con k più elevati rispetto alla soluzione più viscosa. Ciò è confermato dai pannelli di destra delle figure 1.10 e 1.11 che riportano l'evoluzione temporale della distribuzione degli A_k , consistentemente con gli argomenti precedentemente discussi.

È ora interessante osservare che se ognuna delle equazioni (1.9) viene moltiplicata per la propria A_i , notando che risulta $A_i \dot{A}_i \equiv (\dot{A}_i^2/2)$, si ottiene

$$\frac{\dot{A}_1^2}{2} - \frac{A_1^2 A_2}{2} - \frac{A_1 A_2 A_3}{2} = -\nu A_1^2, \quad (1.10)$$

$$\frac{\dot{A}_2^2}{2} + \frac{A_1^2 A_2}{2} - A_1 A_2 A_3 = -4\nu A_2^2$$

$$\frac{\dot{A}_3^2}{2} + \frac{3A_1 A_2 A_3}{2} = -9\nu A_3^2,$$

che sommata membro a membro dà

$$\frac{\dot{A}_1^2 + \dot{A}_2^2 + \dot{A}_3^2}{2} = -\nu(A_1^2 + 4A_2^2 + 9A_3^2). \quad (1.11)$$