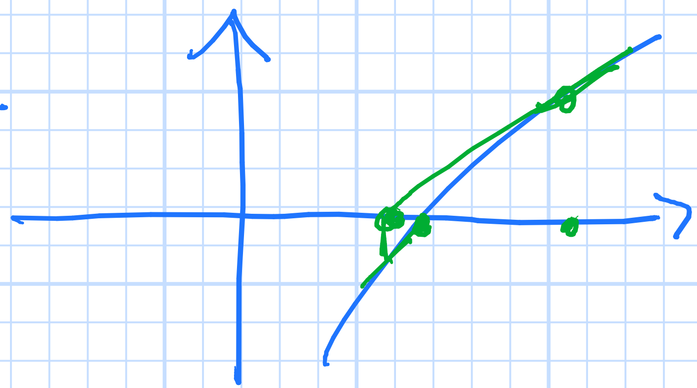
Calcolo radici: forse meglio cercare un minimo?

NR



$$f(x_1) = f(x_0) + f'_0 (x_1 - x_0)$$

x_1 = radice

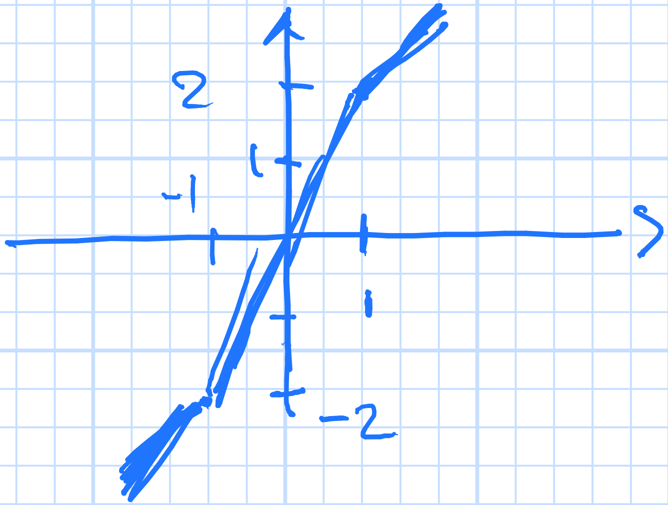
$$x_R = x_0 - \frac{f_0}{f'_0}$$

Esempio $\quad f(x) = x^\alpha \quad$ (radice $x=0$)

$$x_R = x_0 - \frac{x_0^\alpha}{\alpha x_0^{\alpha-1}} = x_0 - \frac{x_0}{\alpha} = x_0\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

se $\alpha > 1 \quad 1 - \frac{1}{\alpha} < 1 \quad \Rightarrow x_R = 0$

$$f(x) \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 2x & -1 < x < 1 \\ x-1 & x \leq -1 \end{cases}$$



Se $x \geq 1$ $\quad f' = 1$

$$x_R = x - \frac{(x+1)}{1} =$$

$$= x - x - 1 = -1$$

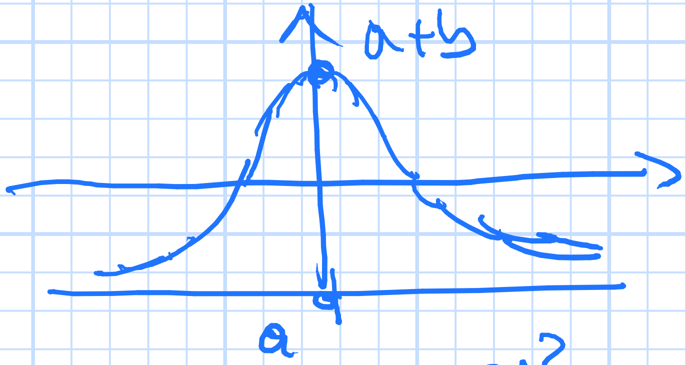
Se $x \leq -1$

$$x_R = x - \frac{(x-1)}{1} = +1$$

Non converge se $|x| > 1$

Se $|x| < 1$ $\quad x_R = x - \frac{2x}{2} = x - x = 0$ converge in 1 step!

$$f(x) = a + b e^{-x^2} \qquad a<0 \qquad b>0$$



$$f' = -2bx e^{-x^2}$$

$$x_R = x - \frac{a + b e^{-x^2}}{-2bx\, e^{-x^2}} = x + \frac{a e^{x^2} + b}{2bx}$$ come è fatta?

$$x \to \infty \qquad x + \frac{a e^{x^2}}{2bx} \to -\infty \quad (a<0)$$

importante

$$\frac{x + a e^{+x^2}}{2bx} \cdot \frac{1}{x} \quad \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$$

$\Rightarrow$ la soluzione non si trova!!!

$$f^2 = (a + be^{-x^2})$$ minimo?

$$f'f = \text{zero}$$

$$f' = -2xbe^{-x^2} \qquad -2xbe^{-x^2}(a+be^{-x^2}) = f''$$

$$f = -2bx\left(ae^{-x^2} + be^{-2x^2}\right) \qquad f' = -2b(\;) + 4bx^2e^{-x^2}(a+2be^{-x^2})$$

grandi x?

$$\frac{f}{f'} \qquad \frac{-2bx\,ae^{-x^2}}{4bx^2ae^{-x^2}} \simeq -\frac{1}{2x}$$

$$x_R = x - \frac{1}{2\cancel{x}}$$ x diminuisce

Meglio cercare un minimo piuttosto che (a volte!) trovare le radici!!!

Gradiente coniugato: un nome per metodi generali

$$A \cdot x = b$$ A matrice "sparsa" (tanti zeri)

$\Rightarrow$ $f(x) = \frac{1}{2} x^t \cdot A \cdot x - x^t b$ $\Rightarrow$ trovare il minimo

$\hookrightarrow$ $\nabla f = A \cdot x - b = 0$

Caso particolare di una $f(\underline{x})$ di cui cerchiamo il minimo

Vicino al minimo $f(x) \sim c - x^t b + \frac{1}{2} x^t \cdot A \cdot x$

Come procediamo in pratica?

La struttura $x^t A x \Rightarrow$ prodotto scalare con misura $\underline{\underline{A}}$ $(N \times N)$

- Troviamo la soluzione come

$$x_s = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_i \qquad P_i \perp P_j \quad i \neq j$$

rispetto ad A!

$P_i^t A P_j = 0$!

La soluzione la costruiamo iterativamente

Ad ogni step, ci muoviamo (minimo) lungo la direzione lungo la quale f decrese di più $\Rightarrow$ $\underline{-\nabla f = b - A x}$

- Siamo allo step K: quanto siamo lontani?

r_K (residuo) $\equiv b - A x_K$ $\qquad x_K$ soluzione stimata step K

$\underline{\underline{\text{Però}}}$ $r_K = -\nabla f(x_K)$! Quindi

$\Rightarrow$ legata alla direzione in cui ci vogliamo muovere

$r_k = b - Ax_k$

chiamiamo p_k la "vera" direzione

($x_s = \sum \alpha_k p_k$)

p_k è legata a r_k, ma vogliamo $\perp$ p_i $i<k$!

$$p_k = r_k + \gamma_{ki} p_i \quad (i<k)$$

Imponiamo $\perp$

$$p_i^t A p_k = 0 = p_i^t r_k + \gamma_{ki} p_i^t A p_i$$

$$\gamma_{ki} = -\frac{p_i^t r_k}{p_i^t A p_i}$$

$$p_k = r_k - \sum_{i<k} \frac{p_i^t r_k}{p_i^t A p_i} p_i$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

calcolato minimizzando! $\nearrow$ $\nwarrow$ direzione

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left\{\frac{1}{2}(x_k+\alpha_k p_k)^t A (x_k+\alpha_k p_k) - (x_k+\alpha p_k)^t b\right\} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left\{p_k^t A (x_k+\alpha_k p_k) + (x_k+\alpha_k p_k)^t A p_k\right\} - p_k^t b = 0$$

$A = A^t$

$$\Rightarrow \quad p_k^t (A x_k - b) + \alpha_k p_k^t A p_k = 0$$

$$\alpha_k = \frac{p_k^t (b - A x_k)}{p_k^t A p_k} = \frac{p_k^t r_k}{p_k^t A p_k} = \frac{r_k^t r_k}{p_k^t A p_k}$$

$(p_k = r_k + \gamma_{ki} p_i)$

Algo

$$x_1 \to r_1 = b - Ax_1 \qquad r_k = b - Ax_k$$

$$\downarrow$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

$$\alpha_k = \frac{r_k^t r_k}{p_k^t A p_k} \qquad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k \quad \left(\begin{aligned} &= r_{k-1} - \alpha_{k-1} A p_{k-1} - \alpha_k A p_k \\ &= b - A \sum_i^k \alpha_i p_i = b - Ax_k \end{aligned} \right)$$

$$p_{k+1} = r_k + \beta_k p_k$$

$$\beta_k = \frac{r_{k+1}^t r_{k+1}}{r_k^t r_k}$$

Nel caso lineare, max N iterazioni

Caso generale: controllare r_{k+1} in modulo

Problema A?

$\left(f \simeq c - x^t b + \frac{1}{2} x^t A x\right)$

supponiamo nota $r_k = -\nabla f(x_k)$

Da x_k, muoviamo lungo p_k

$\hookrightarrow x_{k+1} \rightarrow r_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1})$

È chiaro che r_{k+1} è quello che soddisfa $r_{k+1} = b - A x_{k+1}$

$\Rightarrow$ Trovato senza sapere $\underline{\underline{A}}$

$r_k = b - A x_k$

$r_{k+1} = b - A(x_k + \lambda p_k) = r_k - \lambda A p_k$

deve minimizzare

al minimo $\quad p_k^t \cdot \nabla f_{k+1} = -p_k^t \cdot r_{k+1} = 0$

$$\lambda = \frac{r_k^t r_k}{p_k^t A p_k} = \frac{p_k^t r_k}{p_k^t A p_k} = \underline{\alpha_k}$$

$\Rightarrow$ quindi non serve realmente A!