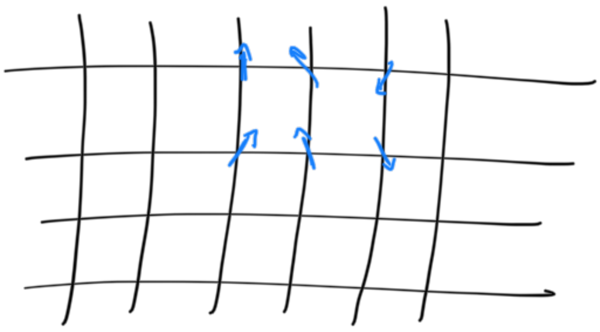
20/10/2021

Catene/reticoli di spin quantistici



Su ogni sito immagino di avere uno spin quantistico

es. $s = 1/2$ $\quad \mathcal{H}_{locale} = \mathrm{Span}\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

$|\psi\rangle_i = \alpha|\uparrow\rangle_i + \beta|\downarrow\rangle_i$

→ qubit (quantum bit)

$|\uparrow\rangle \equiv |0\rangle$
$|\downarrow\rangle \equiv |1\rangle$

sullo stesso sito

$$[\hat{\sigma}_i^\alpha, \hat{\sigma}_i^\beta] = 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_i^\gamma$$

i: indice di sito
$\alpha = x, y, z$

su siti differenti $i \neq j$

$$[\hat{\sigma}_i^\alpha, \hat{\sigma}_j^\beta] = 0$$

- sistemi in 1D quantistici possono presentare caratteristiche peculiari (sono interessanti) e si prestano meglio a trattamenti numerici di diagonalizzazione esatta
- 2D complicato sia numericamente che analiticamente
- 3D e oltre → fisica studiabile con altre tecniche (per certi versi più banale)

es. • Hubbard 1D è risolubile analiticamente (→ Bethe ansatz)
MA soluzione non è del tutto trasparente

- Hubbard 2D → problema difficile da trattare (fisica dei superconduttori ad alta temperatura...)

(1D) Catene di spin / fermioni

- Trasformazione di Jordan-Wigner

passare da fermioni a spin (e viceversa)

fermioni → anticommutano
spin → commutano

ipotesi:

fermionico	spin
$|0\rangle$ ⟷	$|\downarrow\rangle$
$|1\rangle$ ⟷	$|\uparrow\rangle$

(trascuriamo il grado di libertà dello spin nei fermioni

→ fermioni "spinless"

$\hat{c}_i^\dagger$, $\hat{c}_i$ i: indice di sito

$\hat{c}_i \sim \hat{\sigma}_i^-$ intuitivamente dovrei fare questo mapping

$$\begin{cases} \hat{c}_i |1\rangle_i = |0\rangle_i \\ \hat{c}_i |0\rangle_i = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

posso associare $\hat{c}_i$ a $\hat{\sigma}_i^-$ ← operatore di abbassamento dello spin-1/2

$$\hat{\sigma}_i^- |\uparrow\rangle_i = |\downarrow\rangle_i$$
$$\hat{\sigma}_i^- |\downarrow\rangle_i = 0$$

$$\hat{\sigma}_i^- = \frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}_i^x + i\hat{\sigma}_i^y\right)$$

$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

analogamente $\hat{c}_i^\dagger \sim \hat{\sigma}_i^+$

operatore di innalzamento dello spin-1/2

$$\hat{c}_i^\dagger |0\rangle_i = |1\rangle_i \qquad \hat{\sigma}_i^+ |\downarrow\rangle_i = |\uparrow\rangle_i \qquad \hat{\sigma}_i^+ = \frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}_i^x - i\hat{\sigma}_i^y\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{c}_i^\dagger |1\rangle_i = 0 \qquad \hat{\sigma}_i^+ |\uparrow\rangle_i = 0$$

→ se ho più di un sito, questa cosa NON va più bene! $(|\Omega\rangle \equiv |0,0\rangle)$

$$\hat{c}_2^\dagger \hat{c}_1^\dagger |\Omega\rangle \neq \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2^\dagger |\Omega\rangle \qquad \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_1^\dagger |\Omega\rangle = |1,1\rangle$$
$$\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2^\dagger |\Omega\rangle = -|1,1\rangle$$

differente

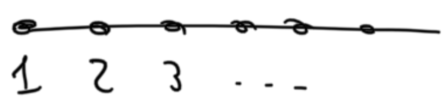
$$\hat{\sigma}_2^+ \hat{\sigma}_1^+ |\downarrow,\downarrow\rangle = \hat{\sigma}_1^+ \hat{\sigma}_2^+ |\downarrow,\downarrow\rangle = |\uparrow,\uparrow\rangle$$

ricetta di Jordan-Wigner: (*)

$$\begin{cases} \hat{c}_i = \underbrace{\left(\prod_{k<i} \hat{\sigma}_k^z\right)}_{\text{operatore di "stringa" di Jordan-Wigner}} \hat{\sigma}_i^- \\ \hat{c}_i^\dagger = \hat{\sigma}_i^+ \underbrace{\left(\prod_{k<i} \hat{\sigma}_k^z\right)} \end{cases}$$

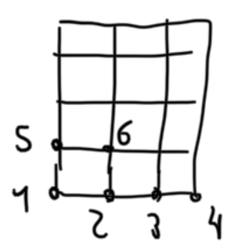
$$\left(\hat{n}_i = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i \equiv \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_i^-\right)$$

- presuppone un ordinamento tra i vari siti $(k<i)$
  - → in 1D è naturale



  - → in D>1 è meno immediato

    qui la trasf. J-W è meno utile...



(*) $\begin{cases} \{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij} \\ \{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = \{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} = 0 \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ $[\hat{\sigma}_i^\alpha, \hat{\sigma}_j^\beta] = 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_{i\gamma}\delta_{ij}$

si dimostra

es: $\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} = \left[\hat{\sigma}_i^+ \left(\prod_{k<i} \hat{\sigma}_k^z\right)\right]\left[\left(\prod_{\ell<i+1} \hat{\sigma}_\ell^z\right)\hat{\sigma}_{i+1}^-\right] =$

$= \hat{\sigma}_i^+ \left(\hat{\sigma}_1^z \hat{\sigma}_2^z \ldots \hat{\sigma}_{i-1}^z\right)\left(\hat{\sigma}_1^z \hat{\sigma}_2^z \ldots \hat{\sigma}_{i-1}^z \hat{\sigma}_i^z\right)\hat{\sigma}_{i+1}^- = \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^-$

$\hat{c}_{i+1}\hat{c}_i^\dagger = \hat{\sigma}_{i+1}^- \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_i^+$ differiscono per un segno meno

Nelle simulazioni numeriche conviene sempre implementare sistemi di spin (il problema degli anticommutatori fermionici si risolve con la trasformazione J-W)

Invece di Hubbard prendiamo un modello di fermioni SENZA spin (il grado di libertà di spin è "congelato")

$$\hat{H}_{t-V} = -t\sum_j \left(\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j\right) + \underbrace{V\sum_j \hat{n}_j \hat{n}_{j+1}}_{\text{repulsione a primi vicini}} \qquad (t, V > 0)$$

Modello t-V in 1D

risolubile analiticamente con Bethe ansatz

$$\hat{H}_{t-V} = -\frac{t}{2}\sum_j \underbrace{\left(\hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_{j+1}^x + \hat{\sigma}_j^y \hat{\sigma}_{j+1}^y\right)}_{2\cdot\left(\hat{\sigma}_j^+ \hat{\sigma}_{j+1}^- + \hat{\sigma}_j^- \hat{\sigma}_{j+1}^+\right)} + \underbrace{\frac{V}{4}\sum_j \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z - \frac{V}{2}\sum_j \hat{\sigma}_j^z}_{\text{repulsivo (*)}} + \text{cost.}$$

Modello XXZ (+ campo magnetico lungo z)

prodotto tensore

$$\hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_{j+1}^x \equiv \hat{\sigma}_j^x \otimes \hat{\sigma}_{j+1}^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_i \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_i$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot 2$$

(*) $\hat{n}_j \hat{n}_{j+1} \equiv \underbrace{\hat{\sigma}_j^+ \hat{\sigma}_j^-}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \hat{\sigma}^z)} \hat{\sigma}_{j+1}^+ \hat{\sigma}_{j+1}^- = \frac{1}{4}(1 - \hat{\sigma}_j^z)(1 - \hat{\sigma}_{j+1}^z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z - \frac{1}{4}(\hat{\sigma}_j^z + \hat{\sigma}_{j+1}^z)$

Heisenberg (XXX) $\quad \hat{H}_{XXX} \sim J\sum_j \left(\hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_{j+1}^x + \hat{\sigma}_j^y \hat{\sigma}_{j+1}^y + \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z\right)$

XXZ $\quad \hat{H}_{XXZ} \sim J_\perp \sum_j \left(\hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_{j+1}^x + \hat{\sigma}_j^y \hat{\sigma}_{j+1}^y\right) + J_z \sum_j \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z$

- ⇒ nella JWT di $\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} + \hat{c}_{i+1}^\dagger \hat{c}_i$ l'operatore $\hat{\sigma}_i^z$ nella stringa può essere riassorbito

$$\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} \equiv \underbrace{\hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_i^z} \hat{\sigma}_{i+1}^-$$

$$\hat{c}_{i+1}^\dagger \hat{c}_i = \hat{\sigma}_{i+1}^+ \underbrace{\hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_i^-}$$

$\hat{\sigma}_i^z$ agisce a destra sullo stato $|\downarrow\rangle$ in tutti e due i casi

- Il segno davanti a t nel modello t-V può essere cambiato facendo una trasformazione unitaria

$$\hat{U} = \prod_{j \text{ dispari}} \hat{R}_j(\hat{z}, \pi)$$

$$\underline{J_z \to J_z}$$
$$\underline{\underline{J_\perp \to -J_\perp}}$$
$$\begin{pmatrix} J_x \to -J_x \\ J_y \to -J_y \end{pmatrix}$$

$$\left(\hat{U} \hat{H}_{xxz} \hat{U}^\dagger = \hat{H}_{xxz} \right)$$