



DIE
TI.

UNI
NA

VERSITA' DEGLI STUDI DI
NAPOLI FEDERICO II

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA
E TECNOLOGIE DELL'INFORMAZIONE

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE

**Elaborato del corso di
Dinamica e Controllo Non Lineare**

Studio della dinamica e del controllo di un Laser

Professore

Mario Di Bernardo

Candidato

Dario Di Francesco

P38000171

INTRODUZIONE

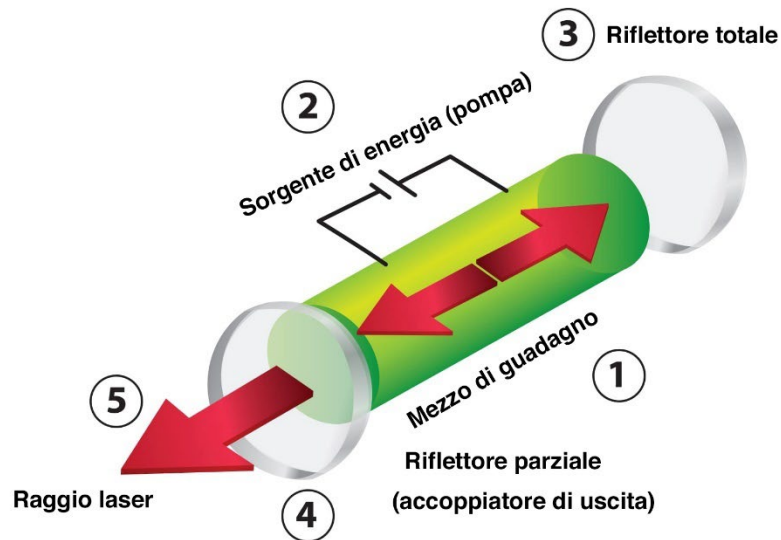
Nel seguente elenco puntato sarà riportato un breve riassunto sugli argomenti trattati nei seguenti capitoli:

- **Capitolo 1**: descrizione del sistema non lineare studiato
- **Capitolo 2**: verrà analizzato il sistema a ciclo aperto del sistema, tramite un'analisi nel piano delle fasi del sistema e uno studio della stabilità strutturale
- **Capitolo 3**: linearizzazione del sistema intorno ad un punto di equilibrio e applicazione di un controllore lineare
- **Capitolo 4**: applicazione di uno o più controllori non lineari
- **Capitolo 5**: Script Matlab

1 Capitolo

1.1 Introduzione al modello

In questo elaborato verrà trattato un modello semplificato di un laser. Il laser è un dispositivo che emette un raggio di luce uniforme attraverso un processo di amplificazione ottica. Esistono molti tipi di laser, compreso i laser a gas, i laser a fibra, i laser allo stato solido, i laser a coloranti, i laser a diodi e i laser a eccimeri. Tutti questi tipi di laser condividono un set di componenti di base.



Componenti laser

- **Mezzo di guadagno** (materiale attivo), cioè un materiale (gas, cristallo, liquido) che se stimolato in modo opportuno è in grado di emettere la luce
- **Fonte di energia o sistema di pompaggio** che permette di fornire energia al mezzo di guadagno in modo tale da permettere l'emissione di luce o laser
- **Riflettore totale** per riflettere l'energia
- **Riflettore parziale**
- **Uscita del sistema laser**

Il **mezzo di guadagno** e il **risonatore**, ovvero la cavità all'interno del riflettore parziale, determinano la lunghezza d'onda del raggio laser e la potenza del laser

1.2 Definizione del problema da modellare

Il modello del laser [1] è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{n} = GnN - kn \\ \dot{N} = -GnN - fN + p \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Dove:

- **n** : rappresenta il numero di fotoni emessi dal mezzo di guadagno, per **$n = 0$** il sistema si comporta in modo molto simile ad una lampadina al crescere di **n** abbiamo l'emissione di un raggio laser. Il valore di **n** non può essere negativo perché non avrebbe senso un numero di **fotoni** negativo.
- **N** : rappresenta il numero di atomi eccitati che se opportunamente eccitati rilasciano un fotone. A differenza di **n** , il numero di fotoni, gli atomi eccitati possono assumere valori negativi in quanto più che rappresentare il **numero di atomi eccitati** rappresenta la differenza tra il numero di **atomi eccitati** e il **numero di atomi** nello **stato energetico di base**. Infatti, secondo l'**analisi di Einstein** se l'energia degli **atomi eccitati** **E_2** è maggiore di quella degli **atomi di base** **E_1** allora il mezzo di guadagno guadagnerà potenza invece che perderla e questo permetterà l'eccitazione di nuovi atomi che porterà al rilascio di fotoni che produrranno il raggio laser. Qualora **N** fosse **negativo** vorrebbe dire che il **numero di atomi eccitati** è inferiore a quelli nello **stato energetico di base**.
- **G** : è il **coefficiente di emissione stimolata** che definisce la capacità del mezzo di guadagno tramite radiazione elettromagnetica di emettere **fotoni**, ed è un valore definito positivo.
- **k** **f** : sono dei tassi di decrescita della popolazione di fotoni, ed è un valore definito positivo.
- **p** : definisce la forza di iniezione dell'energia nel mezzo di guadagno tramite pompaggio, questo valore potrà essere sia positivo che negativo.

1.3 Adimensionalizzazione

Il modello verrà adimensionalizzato [2] come segue:

$$\begin{cases} n = \frac{f}{G}x \\ N = \frac{f}{G}y \\ \tau = ft \end{cases} \quad (1.3.1)$$

$$\begin{cases} \dot{n} = GnN - kn \\ \dot{N} = -GnN - fN + p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \frac{\partial f}{\partial t} \frac{f}{G}x = \frac{f^2}{G}xy - \frac{kf}{G}x \\ f \frac{\partial f}{\partial t} \frac{f}{G}y = -\frac{f^2}{G}xy - \frac{f^2}{G}y + p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = xy - \frac{k}{f}x \\ \dot{y} = -xy - y + \frac{pG}{f^2} \end{cases} \Rightarrow \quad (1.3.2)$$

Ponendo:

$$\begin{cases} \delta = \frac{k}{f} \\ \rho = \frac{pG}{f^2} \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Dove:

- δ : rappresenta il **tasso di decrescita** dei **fotoni**, potrà assumere solo valori positivi
- ρ : la forza di iniezione dell'energia all'interno del **mezzo di guadagno**, questo valore potrà essere sia positivo che negativo.

Si ottiene così il modello:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - \delta x \\ \dot{y} = -xy - y + \rho \end{cases} \quad (1.3.2)$$

In questo caso verrà scelto come valore del **tasso** decrescita il valore $\delta = 1$

2 Capitolo

2.1 Analisi a ciclo aperto

Per il seguente modello:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x \\ \dot{y} = -xy - x + \rho \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Il punto di partenza dell'analisi a ciclo aperto di un sistema è la ricerca degli eventuali punti di equilibrio del sistema, ovvero quei punti \mathbf{x}^* in cui si annulla il campo vettoriale $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, che soddisfano la condizione $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ o equivalentemente $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

Ponendo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ si otterrà il seguente sistema:

$$\begin{cases} xy - x = 0 \\ -xy - x + \rho = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Da cui si ottengono i seguenti punti di equilibrio:

$$\begin{cases} (x_A, y_A) = (0, 0) \\ (x_B, y_B) = (\rho - 1, 1) \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Individuati i punti di equilibrio si potrà passare alla successiva fase di classificazione dei punti di equilibrio, che verrà svolta calcolando lo Jacobiano:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 1 & x \\ -y & -x - 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

E valutando il valore dello Jacobiano in quei punti:

$$J|_{(x,y)=(x_A,y_A)} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(x,y)=(x_A,y_A)} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{(x,y)=(x_A,y_A)} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{(x,y)=(x_A,y_A)} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{(x,y)=(x_A,y_A)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho - 1 & 0 \\ -\rho & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

$$J|_{(x,y)=(x_B,y_B)} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(x,y)=(x_B,y_B)} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{(x,y)=(x_B,y_B)} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{(x,y)=(x_B,y_B)} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{(x,y)=(x_B,y_B)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho - 1 \\ -1 & -\rho \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

Da cui si otterranno i seguenti autovalori:

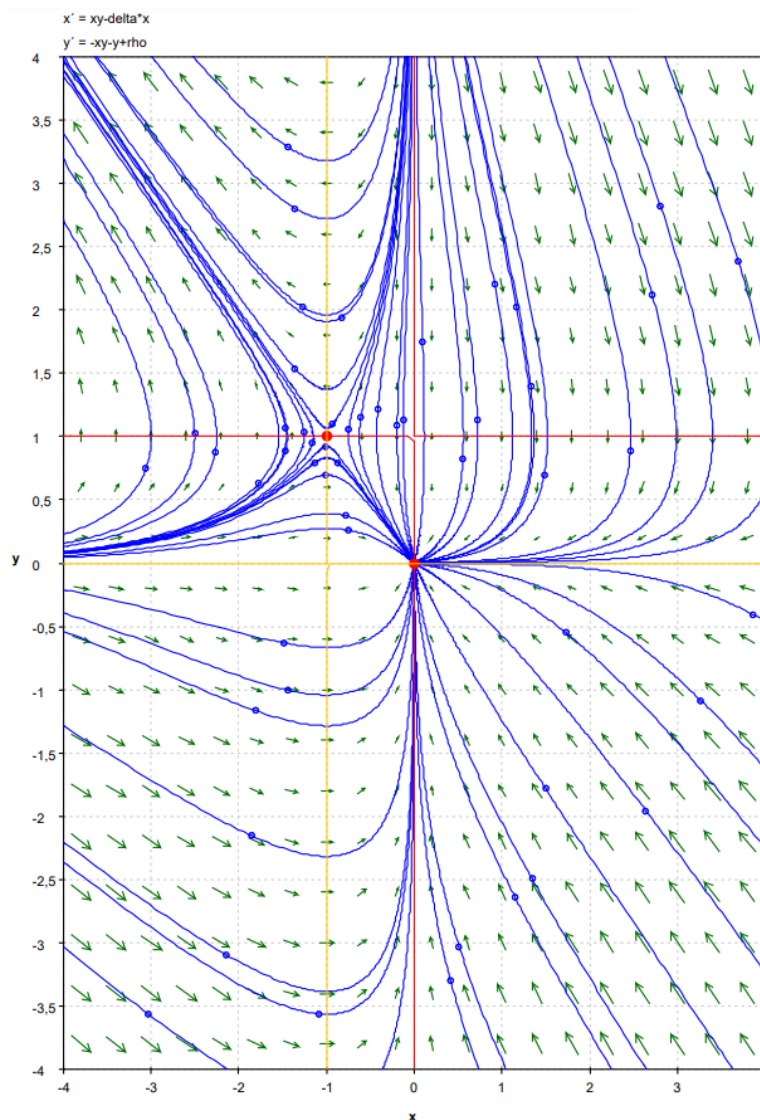
$$\begin{cases} \lambda_{1A} = -1 \\ \lambda_{2A} = \rho - 1 \\ \lambda_{1B} = -\rho + 1 \\ \lambda_{2B} = -1 \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Punti di Equilibrio	$\rho < 1$	$\rho = 1$	$\rho > 1$
$(0, \rho)$	Nodo	Equilibilibrum Set	Sella
$(\rho - 1, 1)$	Sella	Equilibilibrum Set	Nodo

Utilizzando pplane8 è possibile mostrare al variare di ρ come variano la natura di questi punti di equilibrio, verranno scelti i seguenti valori a campione:

- $\rho = 0$: Scegliendo questo valore è possibile ottenere i seguenti punti di equilibrio:
 - $(0, 0)$ è una **soluzione ammissibile** per il sistema in cui nessun **atomo eccitato** e nessun **fotone**
 - $(-1, 1)$ è una **soluzione non ammissibile** per il sistema in quanto si ha un solo **atomo eccitato** ma un numero negativo di **fotoni** che non ha alcun senso fisico. Questa soluzione verrà lo stesso analizzata solo a scopo illustrativo per mostrare la validità dell'analisi svolta sopra, ma verrà tralasciata successivamente nel elaborato.

Nella seguente figura è possibile visualizzare il valore degli autovalori dei corrispettivi punti e la loro tipologia:



Equilibrium Point:
There is a sink at $(0, 0)$
Its specific type has not been determined.
Jacobian:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
The eigenvalues and eigenvectors are:

$$\begin{matrix} -1 & (1, 0) \\ -1 & (0, 1) \end{matrix}$$

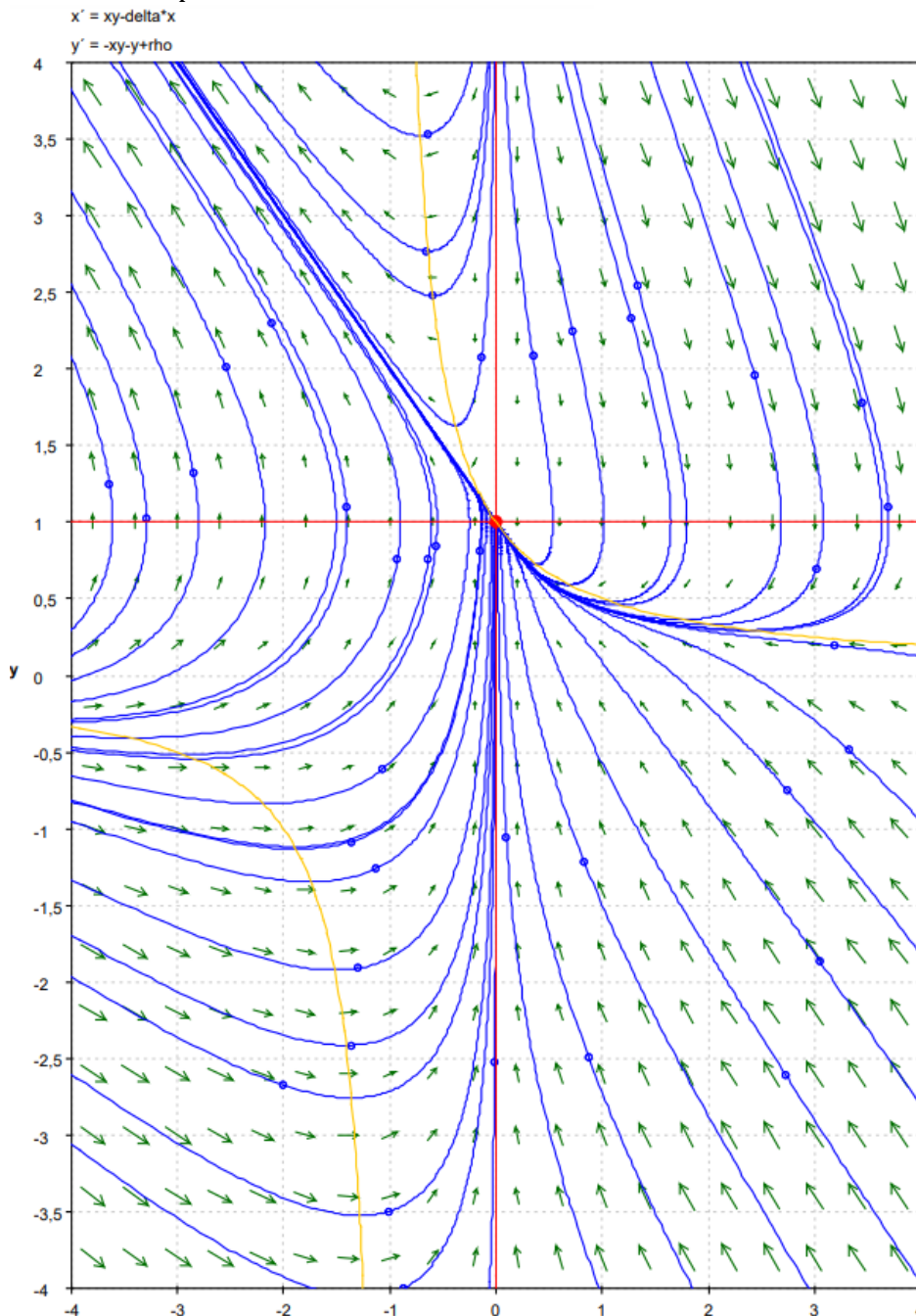
Equilibrium Point:
There is a saddle point at $(-1, 1)$
Jacobian:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
The eigenvalues and eigenvectors are:

$$\begin{matrix} 1 & (0.70711, -0.70711) \\ -1 & (0.70711, 0.70711) \end{matrix}$$

- $\rho = 1$: Scegliendo questo valore è possibile ottenere i seguenti punti di equilibrio:
 - $(0, 1)$ è una **soluzione ammissibile** per il sistema in cui nessun **atomo eccitato** e nessun **fotone**, in questo caso notiamo che i due punti di equilibrio sono collassati in un unico punto.

In questo caso è possibile notare che lo Jacobiano è non determinato ed uno dei due autovalori è nullo per cui questo è un punto di equilibrio non iperbolico successivamente si dimostrerà, tramite analisi numerica, che esso è un punto di biforcazione del sistema.



Equilibrium Point:

There is an equilibrium point at (3,08466E-9, 3,08466E-9). Its specific type has not been determined.

Jacobian:

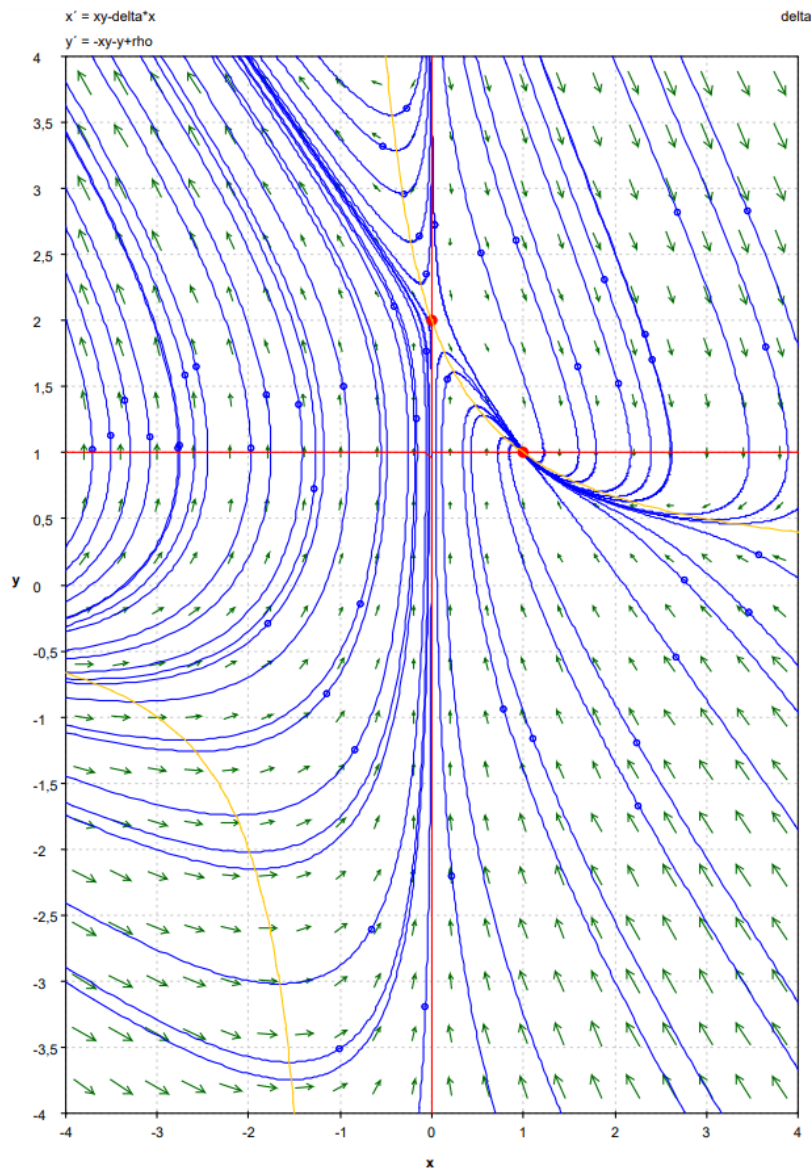
-3,08466E-9	3,08466E-9
-1	-1

The eigenvalues and eigenvectors are:

-6,16932E-9	(0,70711, -0,70711)
-1	(-3,08466E-9, 1)

- $\rho = 2$: Scegliendo questo valore è possibile ottenere i seguenti punti di equilibrio:
 - $(0, 2)$ è una **soluzione ammissibile** per il sistema in cui nessun **atomo eccitato** e nessun **fotone**
 - $(1, 2)$ è una **soluzione ammissibile** per il sistema in quanto si hanno due **atomi eccitati** d un **fotone**.

Nella seguente figura è possibile visualizzare il valore degli autovalori dei corrispettivi punti e la loro tipologia:



Equilibrium Point:

There is a saddle point at $(-4,12429E-25, 2)$

Jacobian:

1	-4,12429E-25
-2	-1

The eigenvalues and eigenvectors are:

1	$(1, 0)$
-1	$(1,11022E-16, 1)$

Equilibrium Point:

There is a sink at $(1, 1)$

Its specific type has not been determined.

Jacobian:

-6,1211E-9	1
-1	-2

The eigenvalues and eigenvectors are:

-1+0,00011064i	$(0,000078237-0,70711i, 0+0,70711i)$
-1-0,00011064i	$(-0,000078237-0,70711i, 0+0,70711i)$

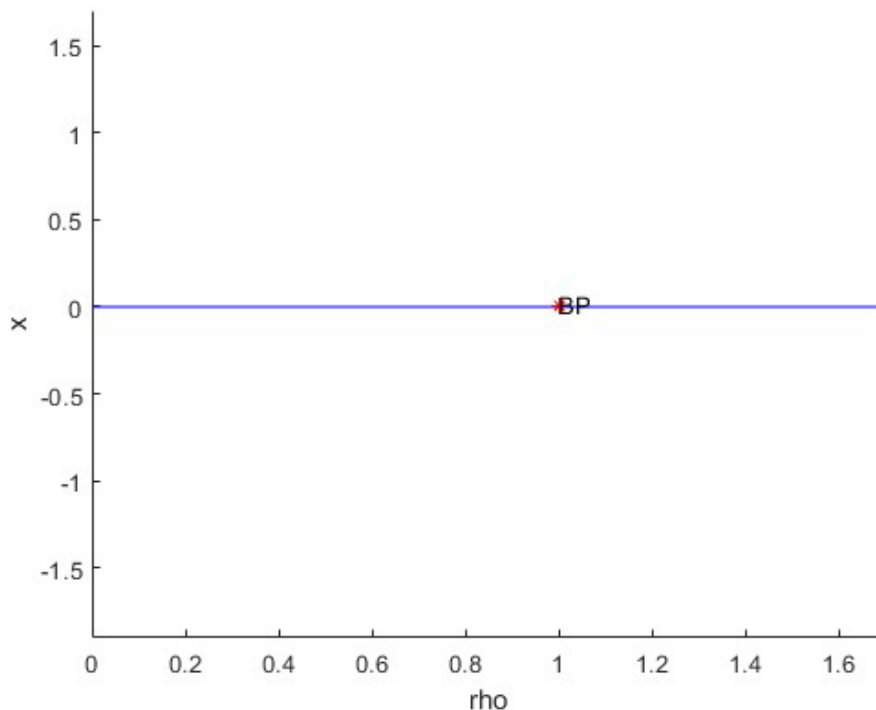
2.2 Analisi della stabilità strutturale del sistema

Come già si è potuto constatare nel paragrafo precedente di questo capitolo è possibile notare che, fissando $\delta = 1$, il sistema varia il suo numero di punto di equilibri al variare del parametro ρ . In particolare, è possibile notare che al variare del parametro ρ abbiamo il passaggio da un punto di equilibrio per $\rho = 1$ a due **punti di equilibrio**, questo implicherà che **le due soluzioni** del sistema non sono **topologicamente equivalenti** in quanto non esisterà alcun **omomorfismo** in grado di mappare due **punti di equilibrio** su un solo **punto di equilibrio**. Quindi è possibile definire che $\rho = 1$ è il **punto di biforcazione** del sistema in cui si perde la topologica equivalenza. Se si considerano anche i **punti di equilibrio non ammissibili** è possibile notare che al variare di ρ si passa da avere due punti di equilibrio ad un solo punto di equilibrio a due punti di equilibrio.

Questo comportamento è tipico delle biforcazioni di tipo **transcritiche** che sono definite la seguente **forma normale**:

$$\dot{x} = \mu x \pm x^2 \quad (2.2.1)$$

Utilizzando Matcont è possibile verificare la veridicità delle analisi fatte:



3 Capitolo

3.1 Linearizzazione

Per la linearizzazione del modello lineare si è considerato di linearizzarlo intorno al **punto di equilibrio** $(x_A, y_A) = (0, 0)$, e come variabile di controllo $u = \rho$, ottenendo il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (3.1.1)$$

È possibile notare che calcolando la **matrice di controllabilità**, ovvero $C = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{N-1}B]$, si ottiene:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

E valutandone il rango si ottiene $rank(C) = 1$ quindi non è di rango pieno per cui il sistema non è **completamente controllabile** tramite la **decomposizione di Kallman** è possibile valutare se essa sia **stabilizzabile**, ovvero se gli autovalori della parte non controllabile sia a **parte reale strettamente negativa**, in tal caso sarà possibile controllare solo una parte del sistema, in particolare sarà possibile allocare solo a piacimento gli autovalori della parte controllabile del sistema mentre rimarranno invariati quelli non controllabili.

Applicando la decomposizione in forma di **Kallman** è possibile ottenere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} A_c & 0 \\ A_{12} & A_{nc} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ B_c \end{pmatrix} u \\ y = [C_{nc} \ C_c] x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (3.1.1)$$

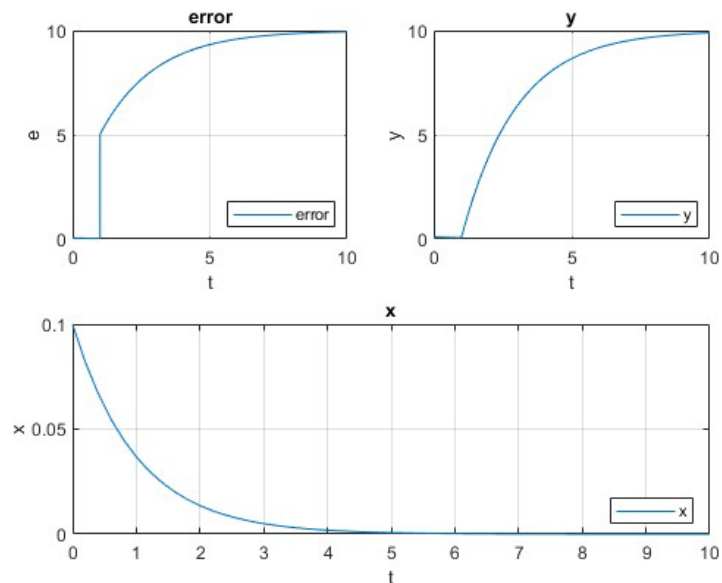
In questo caso abbiamo che gli autovalori della parte **non controllabile** A_{nc} sono **negativi**, in particolare $\lambda_{nc} = -1$, per cui è stabilizzabile per cui sarà possibile allocare gli autovalori a piacimento della parte **controllabile**.

Per la disposizione delle matrici è stata utilizzata la convenzione utilizzata da matlab.

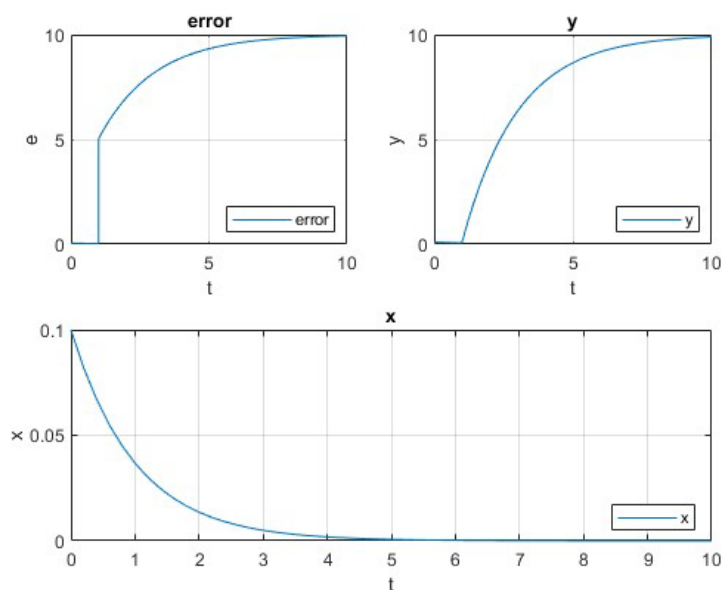
Analizzando il sistema a ciclo aperto è facendo evolvere il sistema a partire dalla condizione iniziale **(0. 1, 0. 1)**

3.2 Assegnamento Autovalori

Ho scelto questa tipologia di controllo lineare per controllare la parte controllabile del mio sistema. E' possibile notare che essendo la prima variabile di stato non controllabile qualunque possa essere la mia scelta degli autovalori non riuscirei in alcun modo a controllare questo stato. Risulta quindi inefficace per questa tipologia di sistema l'utilizzo della linearizzazione e di controllori lineari.



Ho applicando lo stesso controllo sul sistema non lineare ottenendo i seguenti risultati:



4 Capitolo

4.1 Sistema non lineare in Forma affine

Prima di applicare I vari controlli non lineari che ho scelto va riscritto il sistema in forma affine, in maniera esplicita in modo da evidenziare i vari campi vettoriali, legati all'ingresso e allo stato e come essi saranno influenzati utilizzando i vari controlli che ho scelto.

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x \\ \dot{y} = -xy - x + \rho \end{cases} \quad (1.3.2)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Dove:

$$f(x) = \begin{pmatrix} xy - x \\ -xy - x \end{pmatrix} \quad (4.1.2)$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

$$h(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.4)$$

4.2 Input-Output Linearization

Ho utilizzato questa tecnica di controllo per controllare il mio sistema in modo tale che esso porti il $\mathbf{x}(t) = \mathbf{1}$ partendo dalle condizioni iniziali $(\mathbf{x}_A, \mathbf{y}_A) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, questo ci permetterà di capire quanti atomi eccitati e occorrono per ottenere un **fotone**

Nella IO/FL si utilizza la seguente legge di controllo:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f^{r-1}(\mathbf{h}))} [\mathbf{v} - \mathcal{L}_f^r(\mathbf{h})] \quad (4.2.1)$$

Dove:

- $\frac{-\mathcal{L}_f^r(\mathbf{h})}{\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f^{r-1}(\mathbf{h}))}$ permette di eliminare i termini non lineari all'interno del sistema rendendolo de facto lineare
- $\frac{\mathbf{v}}{\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f^{r-1}(\mathbf{h}))}$ è un termine che una volta linearizzato il sistema con il termine precedente di poter scegliere il controllo da applicare al nuovo sistema de facto linearizzato.

In definitiva il sistema ottenuto sarà nella forma

$$\mathbf{y}^r = \mathbf{v} \quad (4.2.2)$$

Dove il grado r dipenderà da quante volte si annulleranno le **derivate di Lie** del campo vettoriale $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ prima di poter ottenere una legge di controllo ammissibile.

In questo caso si è ottenuto un sistema dell'ordine $r = 2$ in quanto la derivata di Lie del campo vettoriale $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ si annulla:

$$\mathcal{L}_g(\mathbf{h}) = \mathbf{h}_x \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow r \neq 1 \quad (4.2.3)$$

Per cui dovrò calcolare $\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f(\mathbf{h}))$, innanzitutto calcolo la $\mathcal{L}_f(\mathbf{h})$:

$$\mathcal{L}_g(\mathbf{h}) = \mathbf{h}_x \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy - x \\ -xy - x \end{pmatrix} = xy - x \quad (4.2.4)$$

Per cui la $\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f(\mathbf{h}))$ sarà pari a:

$$\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f(\mathbf{h})) = \frac{\partial \mathcal{L}_f(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = (y - 1 \quad x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \Rightarrow r = 2 \Leftrightarrow x \neq 0 \quad (4.2.5)$$

Partendo dalle condizioni iniziali $(\mathbf{x}_A, \mathbf{y}_A) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ il sistema si troverà lontano a sufficienza dalla condizione $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ per cui non è applicabile il controllo. In questo caso $r = n$ non avremo **dinamiche interne**, successivamente verificheremo che scegliendo $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ opportunamente sarà possibile verificare che la **IO/FL** coincide con la **IS/FL**.

ordine ottenendo la seguente legge di controllo:

$$u = \frac{1}{\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f(h))} [v - \mathcal{L}_f^2(h)] = \frac{v}{\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f(h))} - \frac{\mathcal{L}_f^2(h)}{\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f(h))} = \beta(x) - \alpha(x) \quad (4.2.6)$$

Dove:

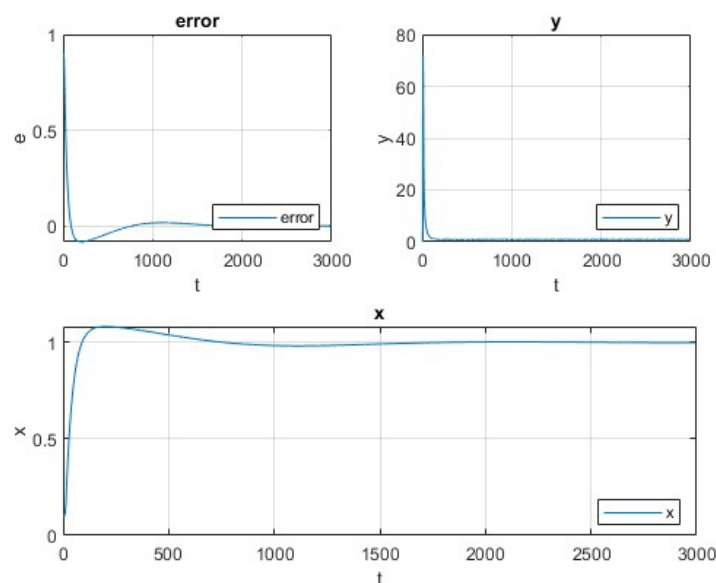
- $\alpha(x)$: è l'azione di controllo che permette di eliminare le non linearità del sistema in particolare in questo caso sarà pari a:

$$\alpha(x) = -\frac{\mathcal{L}_f^2(h)}{\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f(h))} = \frac{(1-y)(x-xy) - x(y+xy)}{x} \quad (4.2.7)$$

- $\beta(x)$: è l'azione di controllo che permette di controllare il sistema linearizzato tramite l'azione di controllo $\alpha(x)$ in questo caso è stata scelta un'azione proporzionale, integrale e derivativa:

$$\beta(x) = -\frac{v}{\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f(h))} = \frac{k_p e + k_i \int e + k_d \dot{e}}{x} \quad (4.2.8)$$

Ottenendo i seguenti risultati:



4.3 Input-State Linearization

Ho utilizzato questa tecnica di controllo per controllare il mio sistema in modo tale che esso porti il $\mathbf{x}(t) = \mathbf{1}$ partendo dalle condizioni iniziali $(\mathbf{x}_A, \mathbf{y}_A) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, questo ci permetterà di capire quanti atomi eccitati e occorrono per ottenere un **fotone**.

Per poter applicare questa scelta di controllo bisogna verificare che:

- $\{\mathbf{g} \quad \mathbf{ad}_f(\mathbf{g}) \quad \dots \quad \mathbf{ad}_f^{n-1}(\mathbf{g})\}$ siano **linearmente indipendenti**, nel caso preso in esame bisogna verificare che $\{\mathbf{g} \quad \mathbf{ad}_f(\mathbf{g})\}$ siano linearmente indipendenti.

Innanzitutto, calcolo la $\mathbf{ad}_f(\mathbf{g})$ per cui ottengo:

$$\mathbf{ad}_f(\mathbf{g}) = \mathbf{g}_x \mathbf{f} - \mathbf{f}_x \mathbf{g} = \mathbf{0} - \begin{pmatrix} y-1 & x \\ -y & -x-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x-1 \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

Successivamente verifico se la matrice definita da $\{\mathbf{g} \quad \mathbf{ad}_f(\mathbf{g})\}$ sia di rango pieno in modo da verificare la **lineare indipendenza**:

$$\{\mathbf{g} \quad \mathbf{ad}_f(\mathbf{g})\} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & -x-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & -x-1 \end{pmatrix} = x \Leftrightarrow x \neq 0 \quad (4.3.2)$$

- $\{\mathbf{g} \quad \mathbf{ad}_f(\mathbf{g}) \quad \dots \quad \mathbf{ad}_f^{n-2}(\mathbf{g})\}$ siano **involutivi**, nel caso preso in esame bisogna verificare che \mathbf{g} sia involutivo ed banale che lo sia

Essendosi verificate entrambe le condizioni per cui è possibile applicare la **IS/FL**, bisogna trovare una trasformazione $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ tale per cui:

$$\mathcal{L}_g(\mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (4.3.3)$$

Per cui si ottiene che:

$$\mathcal{L}_g(\mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (4.3.4)$$

Ottenendo il sistema in forma canonica di controllo.

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1 = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}_2 = \mathcal{L}_f(\mathbf{T}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{z}_1 = \mathcal{L}_f(\mathbf{T}) = \mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{x} \\ \mathbf{z}_2 = \mathcal{L}_f^2(\mathbf{T}) = (\mathbf{1} - \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{x}\mathbf{y}) - \mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{x}\mathbf{y}) \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Ottenendo la seguente legge di controllo:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\mathcal{L}_g(\mathcal{L}_f(\mathbf{T}))} [\mathbf{v} - \mathcal{L}_f^2(\mathbf{T})] = \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{x}\mathbf{y}) - \mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{x}\mathbf{y})}{\mathbf{x}} - \frac{k_p \mathbf{e} + k_i \int \mathbf{e} + k_d \dot{\mathbf{e}}}{\mathbf{x}} \quad (4.3.7)$$

Ottenendo lo stesso risultato del **controllo IO/FL**

4.4 Sliding mode control

Ho utilizzato questa tecnica di controllo per controllare il mio sistema in modo tale che esso porti il $y(t) = 1$ partendo dalle condizioni iniziali $(x_A, y_A) = (0, 1, 0, 1)$.

Nella IO/FL si utilizza la seguente legge di controllo:

$$u = -\frac{\mathcal{L}_f(\sigma)}{\mathcal{L}_g(\sigma)} - \frac{1}{\mathcal{L}_g(\sigma)} k \text{sing}(\sigma) \quad (4.4.1)$$

Dove:

- $\frac{\mathcal{L}_f(h)}{\mathcal{L}_g(h)}$ permette di eliminare i termini non lineari all'interno del sistema rendendolo de facto lineare come nella IO/FL
- $-\frac{1}{\mathcal{L}_g(h)} k \text{sing}(\sigma)$ è un termine che permette al sistema di commutare su una superficie $\sigma(x)$ in cui intrappolare il sistema e trasformare il campo vettoriale del sistema \dot{x} in un nuovo campo vettoriale chiamato di sliding $f_s(x)$ e modificare le dinamiche in modo che il sistema si porti verso il punto di equilibrio desiderato.

Per poter applicare questo controllo bisogna trovare una superficie $\sigma(x)$ in modo tale che sia:

- **Trasversalità:** ovvero che il campo vettoriale $g(x)$ non sia **ortogonale** al **gradiente** di $\sigma(x)$ e che quindi possa effettivamente influenzare le linee del **campo** $f(x)$, altrimenti anche analiticamente che bisognerebbe spendere un **controllo** infinito per portare le traiettorie del sistema verso la superficie di sliding, il che è impossibile.
- **Attrattività:** bisogna garantire non solo che si raggiungerà la superficie $\sigma(x)$ ma che la si raggiunga in un tempo finito.

Ho compiuto diverse scelte per la superficie di sliding:

1. Prima scelta:

$$\sigma(x) = p_1(x - x_d) \quad (4.4.2)$$

Dove:

- p_1 : è un peso che permette di influenzare le dinamiche del primo stato del sistema controllato, successivamente nel corso del paragrafo verranno mostrate come al variare del peso p_1 possano essere influenzate le risposte del sistema.
- x_d : è il valore a cui voglio far tendere il mio sistema $t \rightarrow \infty$, ovvero voglio che i fotoni tendano ad uno, cioè $x \rightarrow x_d \Rightarrow x \rightarrow 1$

Per verificare se è possibile utilizzare questa superficie di sliding bisogna verificare se la superficie sia trasversale o meno al campo $g(x)$, per cui:

$$\mathcal{L}_g(\sigma) = \sigma_x g = (p_1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.4.3)$$

Essendo trasversale non è possibile utilizzare questa tipologia di superficie di sliding:

2. Seconda scelta:

$$\sigma(x) = p_1(x - x_d) + p_2 y \quad (4.4.4)$$

Dove l'unica differenza con la scelta precedente sarà:

- p_2 : è un peso che permette di influenzare le dinamiche del secondo stato del sistema controllato, successivamente nel corso del paragrafo verranno mostrare come al variare del peso p_2 possano essere influenzate le risposte del sistema.

Per verificare se è possibile utilizzare questa superficie di sliding bisogna verificare se la superficie sia trasversale o meno al campo $g(x)$, per cui:

$$\mathcal{L}_g(\sigma) = \sigma_x g = (p_1 \ p_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_2 \quad (4.4.5)$$

Avendo verificato la trasversalità del campo dovrò verificare che esso sia attrattivo, innanzitutto calcolo la $\mathcal{L}_f(\sigma)$:

$$\mathcal{L}_f(\sigma) = \sigma_x f = (p_1 \ p_2) \begin{pmatrix} xy - x \\ -xy - x \end{pmatrix} = p_1(xy - x) - p_2(xy + y) \quad (4.4.6)$$

Per verificare che sia attrattivo devo verificare che la funzione di **Lyapunov** $V(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)$ la sua derivata sia definita negativa, ovvero:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sigma \dot{\sigma} = \sigma \left(\mathcal{L}_f(\sigma) + \mathcal{L}_g(\sigma)(u_{eq} + u_{switch}) \right) \leq 0 \Rightarrow \\ &\sigma \left(\mathcal{L}_f(\sigma) + \mathcal{L}_g(\sigma) \left(-\frac{\mathcal{L}_f(\sigma)}{\mathcal{L}_g(\sigma)} - \frac{1}{\mathcal{L}_g(\sigma)} k \text{sign}(\sigma) \right) \right) \Rightarrow \\ &\sigma \left(p_1(xy - x) - p_2(xy + y) + p_2 \left(-\frac{p_1(xy - x) - p_2(xy + y)}{p_2} - \frac{1}{p_2} k \text{sign}(\sigma) \right) \right) \Rightarrow \\ &\dot{V}(x) = -k|\sigma| \leq 0 \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Avendo verificato che la superficie di sliding è attrattiva vado a verificare come si comporti il mio sistema sul campo di sliding:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f_s = f(x) + g(x)u_{eq} \\ \sigma(x) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = xy - x \\ \dot{y} = -xy - y + xy + y - \frac{p_1}{p_2}(xy - x) \\ y = -\frac{p_1}{p_2}(x - x_d) \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\frac{p_1}{p_2}x(x - x_d) - x \\ \dot{y} = \frac{p_1}{p_2} \left[\frac{p_1}{p_2}x(x - x_d) + x \right] \\ y = -\frac{p_1}{p_2}(x - x_d) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Analizzando la prima equazione che c'è un offset ovvero:

$$\dot{x} = -\frac{p_1}{p_2}x \left(x - x_d + \frac{p_2}{p_1} \right) \quad (4.4.6)$$

Per cui va considerato all'interno della superficie di sliding di questo termine ed eliminarlo per cui anche questa scelta verrà scartata.

3. Terza scelta:

$$\sigma(x) = p_1 \left(x - x_d - \frac{p_2}{p_1} \right) + p_2 y \quad (4.4.4)$$

Dove l'unica differenza con la scelta precedente sarà:

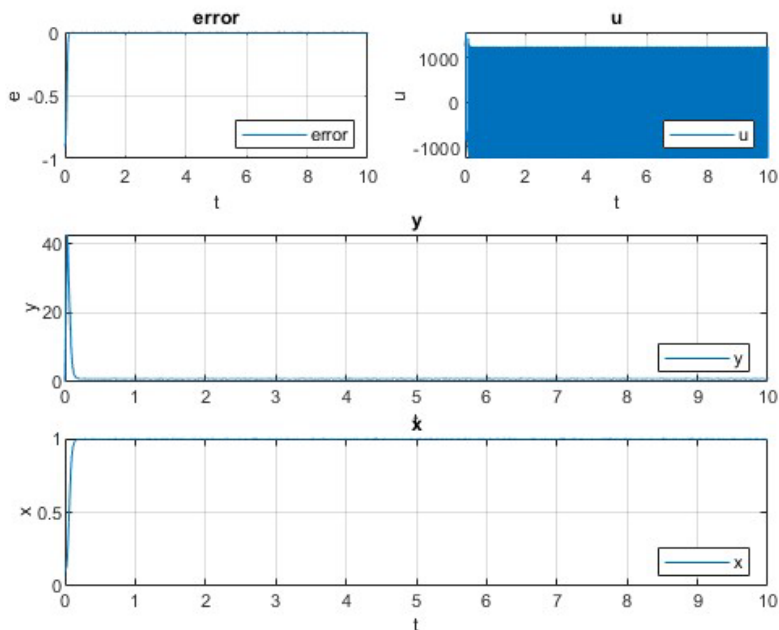
$$\mathcal{L}_g(\sigma) = \sigma_x g = (p_1 \quad p_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_2 \quad (4.4.5)$$

Per cui si otterranno i stessi risultati per quanto riguarda le proprietà di trasversalità e attrattività, per cui è possibile verificare con questa scelta della superficie di sliding è possibile eliminare l'offset

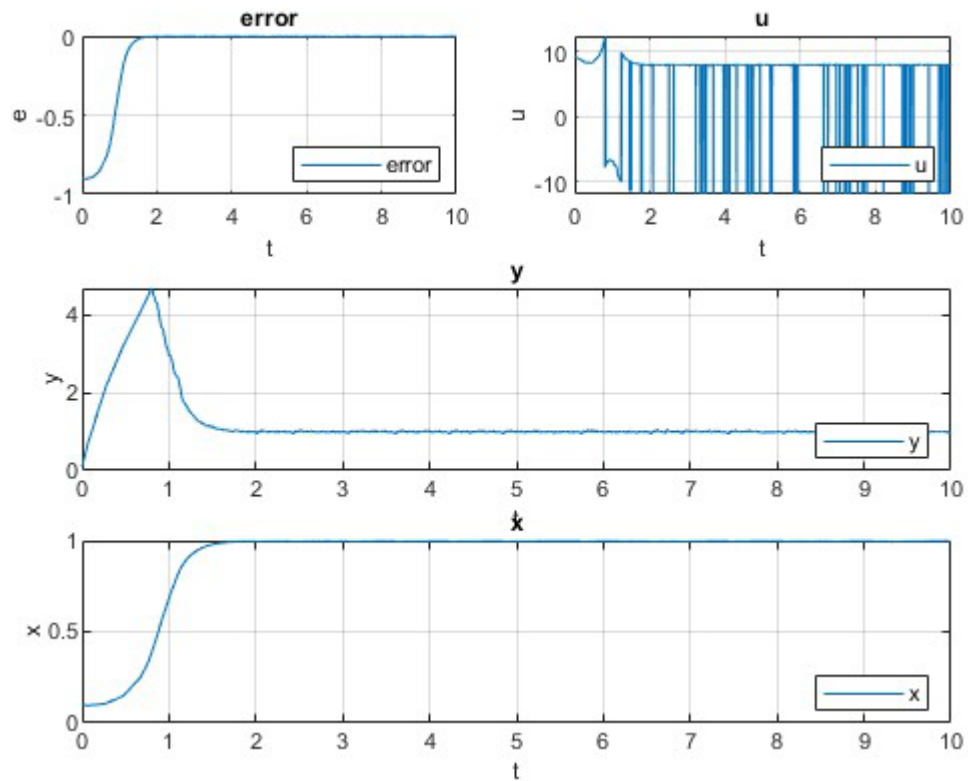
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\frac{p_1}{p_2}x \left(x - x_d - \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_2}{p_1} \right) \\ \dot{y} = -\dot{y} = \frac{p_1}{p_2} \left[\frac{p_1}{p_2}x \left(x - x_d - \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_2}{p_1} \right) \right] \\ y = -\frac{p_1}{p_2}(x - x_d) \end{cases} \quad (4.4.5)$$

Ottenendo i seguenti risultati:

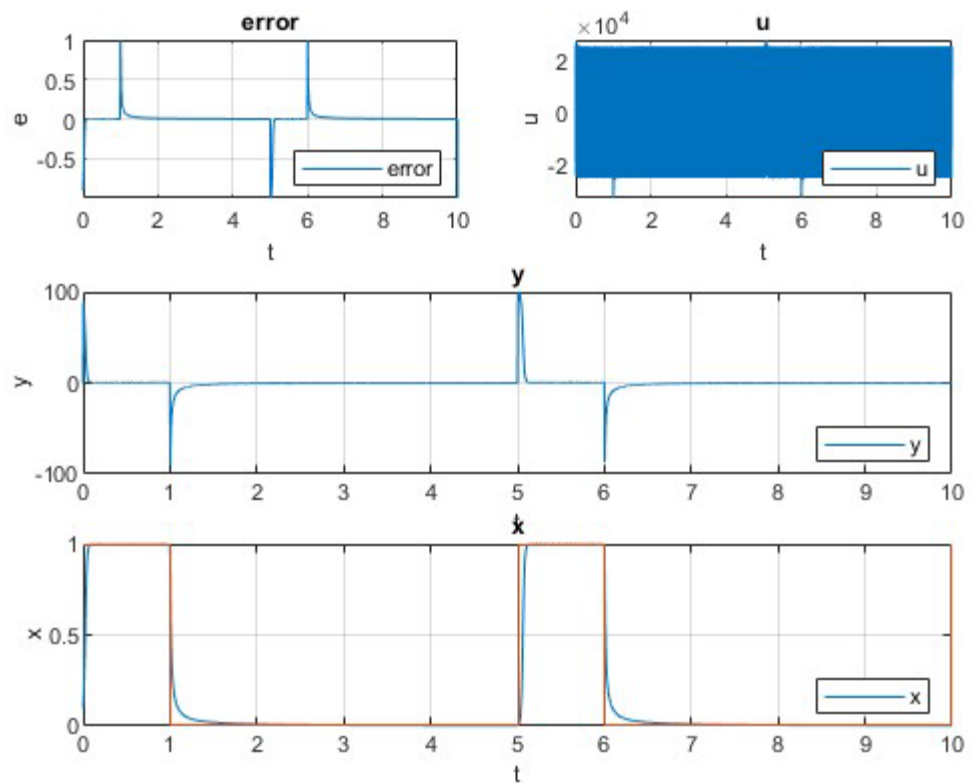
- Ingresso costante: al variare dei parametri e è possibile notare come lo sforzo di controllo diminuisca a fronte però di transitori più lenti
 - $p_1 = 50, k = 1250$



- $p_1 = 3, p_2 = 0.5, k = 5$



- **Onda Quadra**: al variare del segnale posto come riferimento ovviamente cambieranno anche gli sforzi di controllo che in questo caso sono più pronunciati



4.4 Sliding mode control con saturazione

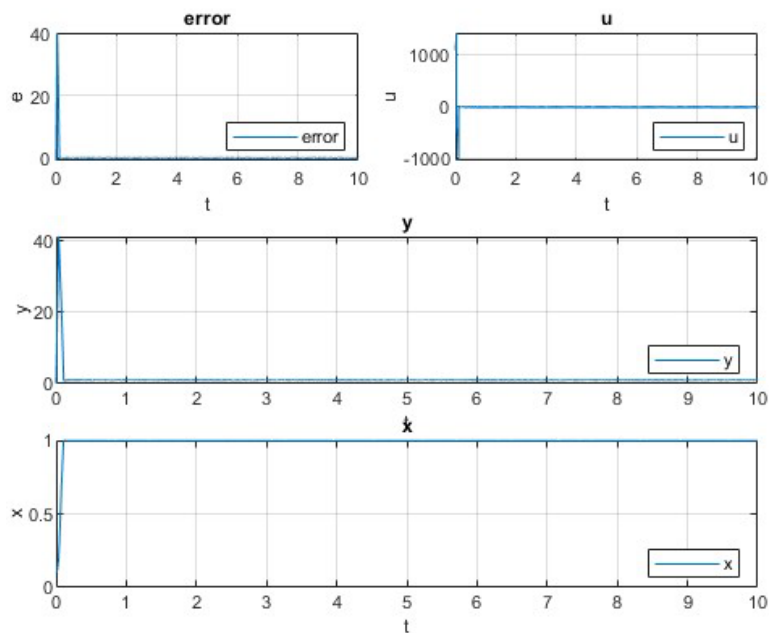
È possibile notare che il sistema presenta una legge di controllo u in cui c'è chattering questo in funzione della scelta degli attuatori potrebbe portare ad l'impossibile di applicare un controllo realizzabile a meno che non si abbiano dei sistemi di controllo con capacità di commutazione sufficientemente alta.

Inserendo un banda di isteresi o **Boundary Layer** intorno alla superficie di sliding $\sigma(x)$ sarà possibile ridurre la frequenza di commutazione agli attuatori dove ε definisce l'ampiezza della banda.

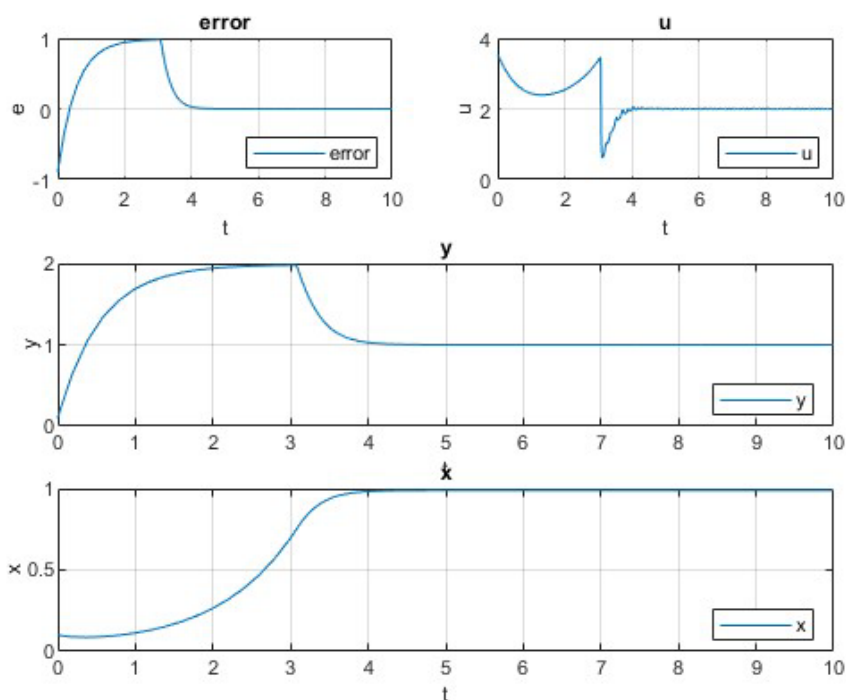
Ottenendo i seguenti risultati:

- **Ingresso costante:** al variare dei parametri è possibile notare come lo sforzo di controllo diminuisca a fronte però di transitori più lenti

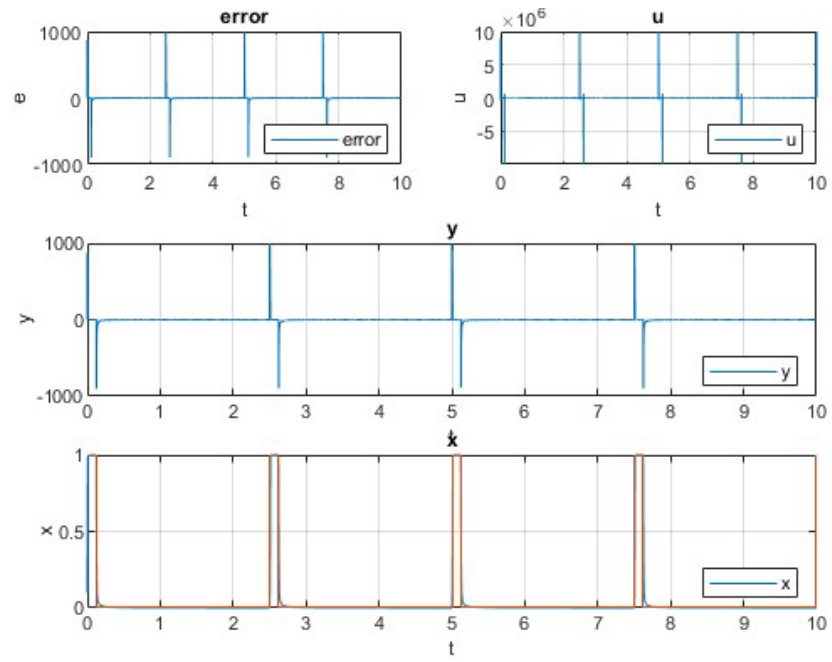
- $p_1 = 50, k = 1950, \varepsilon = 0.001$



- $p_1 = 4, k = 4, \varepsilon = 0.01$



- **Onda Quadra:** al variare del segnale posto come riferimento ovviamente cambieranno anche gli sforzi di controllo che in questo caso sono più pronunciati



5 Capitolo

5.1 Introduzione

Di seguito sarà riportato lo script principale del progetto e tutti gli schemi simlink utilizzati in modo in ordine di numero di capitolo.

5.2 Script utilizzato

```
close all
clear all
clc

%% parameters
syms x y rho
[xAns yAns] = solve([x*y-x, -x*y-y+rho],[x y])
sol_1=[xAns(1),yAns(1)]
sol_2=[xAns(2),yAns(2)]
A=jacobian([x*y-x, -x*y-y+rho],[x,y])
Jacobian_1=subs(A,[x,y],sol_1)
Jacobian_2=subs(A,[x,y],sol_2)
[Autovettori_1,Autovalori_1]=eig(Jacobian_1)
[Autovettori_2,Autovalori_2]=eig(Jacobian_2)

%% RHO=0 DELTA=1

sol_r_1_d_1=1
P1_r_1_d_1=subs(sol_1,[rho],sol_r_1_d_1)
P2_r_1_d_1=subs(sol_2,[rho],sol_r_1_d_1)
Jacobian_1_r_1_d_1=subs(Jacobian_1,[rho],sol_r_1_d_1)
Jacobian_2_r_1_d_1=subs(Jacobian_2,[rho],sol_r_1_d_1)
[vect_P1_r_1_d_1,lambda_P1_r_1_d_1]=eig(Jacobian_1_r_1_d_1)
[vect_P2_r_1_d_1,lambda_P2_r_1_d_1]=eig(Jacobian_2_r_1_d_1)

%% RHO=1 DELTA=1

sol_r_1_d_1=[1,1]
P1_r_1_d_1=subs(sol_1,[rho],sol_r_1_d_1)
P2_r_1_d_1=subs(sol_2,[rho],sol_r_1_d_1)
Jacobian_1_r_1_d_1=subs(Jacobian_1,[rho],sol_r_1_d_1)
Jacobian_2_r_1_d_1=subs(Jacobian_2,[rho],sol_r_1_d_1)
[vect_P1_r_1_d_1,lambda_P1_r_1_d_1]=eig(Jacobian_1_r_1_d_1)
[vect_P2_r_1_d_1,lambda_P2_r_1_d_1]=eig(Jacobian_2_r_1_d_1)

%% RHO=2 DELTA=1

sol_r_1_d_2=[2]
P1_r_1_d_2=subs(sol_1,[rho],sol_r_1_d_2)
P2_r_1_d_2=subs(sol_2,[rho],sol_r_1_d_2)
Jacobian_1_r_1_d_2=subs(Jacobian_1,[rho],sol_r_1_d_2)
Jacobian_2_r_1_d_2=subs(Jacobian_2,[rho],sol_r_1_d_2)
[vect_P1_r_1_d_2,lambda_P1_r_1_d_2]=eig(Jacobian_1_r_1_d_2)
[vect_P2_r_1_d_2,lambda_P2_r_1_d_2]=eig(Jacobian_2_r_1_d_2)

%% linearizzato

clear all
close all
clc
```

```

syms x1 x2
delta=1
[sol_x_1 sol_x_2]= solve ([x1*x2-delta*x1==0,-x1*x2-x2==0,x1>=0,x2>=0],[x1,x2])
J=jacobian([x1*x2-delta*x1,-x1*x2-x2],[x1,x2])
Jacobian1=subs (J,[x1,x2],[sol_x_1(1) sol_x_2(1)])
[lambda, v]=eig(Jacobian1)

x0=[0,0]
u0=0
[A,B,C,D]=linmod('linearization',x0,u0)

C00=ctrb(A,B)
rank(C00)
[Abar,Bbar,Cbar,T,K]=ctrbf(A,B,C)
Ac=Abar(2,2)
Bc=Bbar(2)
Cc=Cbar(2)

K=place(Ac,Bc,-0.5)
KK=[0 K]
eig(Abar-Bbar*KK)
Kf2=KK*T
eig(A-B*Kf2)
sys_alloc=ss(A-B*Kf2,B,C-D*Kf2,D)
sort(eig(A-B*Kf2))
Kfb=dcgain(sys_alloc)
Kff=pinv(Kfb)

%% Stampa risultati
figure
subplot(2,2,1);
plot(out.error)
grid on
title(['error'])
legend('error', 'Location','southeast')
xlabel('t')
ylabel('e')
subplot(2,2,2);
plot(out.x2)
grid on
title(['y'])
legend('y', 'Location','southeast')
xlabel('t')
ylabel('y')
subplot(2,2,[3,4]);
plot(out.x1)
grid on
title(['x'])
legend('x', 'Location','southeast')
xlabel('t')
ylabel('x')

%% IO-FL
clear all
close all
clc
syms delta x1 x2 v

f =[x1*x2-delta*x1; -x1*x2-x2];

```



```

g =[0; 1];
h=[x1 0];
grad_h=[diff(h(1,1),x1) diff(h(1,2),x2)]
L_fh=grad_h*f
L_gh=grad_h*g

grad_L_fh=[diff(L_fh,x1) diff(L_fh,x2)]
L_g_L_fh=grad_L_fh*g
L_f_L_fh=grad_L_fh*f

u_io=(1/L_g_L_fh)*(v-L_f_L_fh)

u_io_cl=subs (u_io,v,(k*(err))+L_f_L_fh+L_fh)

%% Stampa

figure
subplot(2,2,1);
plot(out.err_IOFL)
grid on
title(['error'])
legend('error', 'Location','southeast')
xlabel('t')
ylabel('e')
subplot(2,2,2);
plot(out.y_IOFL)
grid on
title(['y'])
legend('y', 'Location','southeast')
xlabel('t')
ylabel('y')
subplot(2,2,[3,4]);
plot(out.x_IOFL)
grid on
title(['x'])
legend('x', 'Location','southeast')
xlabel('t')
ylabel('x')

%% SWITCHING

clear all
close all
clc

syms delta x1 x2 p1 p2 k x1_d
f =[x1*x2-delta*x1; -x1*x2-x2];
g =[0; 1];

sigma_x=p1*(x1-x1_d-(p2/p1)*delta)+p2*x2
grad_sigma_x=[diff(sigma_x, x1) diff(sigma_x, x2)]
L_gsigma = grad_sigma_x*g
L_fsigma = grad_sigma_x*f
U_eq_smc = -(L_fsigma/L_gsigma)
U_SMC1 = -U_eq_smc-(1/L_gsigma)*k*sign(sigma_x)

fsx = f + g * U_eq_smc

%% STAMPA SWITCH NORMALE

```

```

figure
subplot(3,2,1);
plot(out.errorsw)
grid on
title(['error'])
legend('error', 'Location','southeast')
xlabel('t')
ylabel('e')
subplot(3,2,2);
plot(out.usw)
grid on
title(['u'])
legend('u', 'Location','southeast')
xlabel('t')
ylabel('u')
subplot(3,2,[3,4]);
plot(out.ysw)
grid on
title(['y'])
legend('y', 'Location','southeast')
xlabel('t')
ylabel('y')
subplot(3,2,[5,6]);
plot(out.xsw)
hold on
plot(out.riferimento)
grid on
title(['x'])
legend('x', 'Location','southeast')
xlabel('t')
ylabel('x')

```

%% STAMPA SWITCH SATURATO

```

figure
subplot(3,2,1);
plot(out.errorsw_sat)
grid on
title(['error'])
legend('error', 'Location','southeast')
xlabel('t')
ylabel('e')
subplot(3,2,2);
plot(out.u_sat)
grid on
title(['u'])
legend('u', 'Location','southeast')
xlabel('t')
ylabel('u')
subplot(3,2,[3,4]);
plot(out.ysw_sat)
grid on
title(['y'])
legend('y', 'Location','southeast')
xlabel('t')
ylabel('y')
subplot(3,2,[5,6]);
plot(out.xsw_sat)
hold on
plot(out.riferimento_sat)

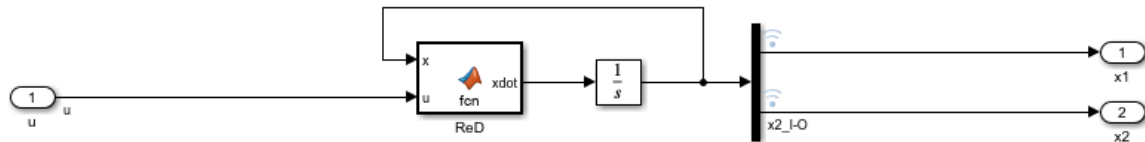
```

```

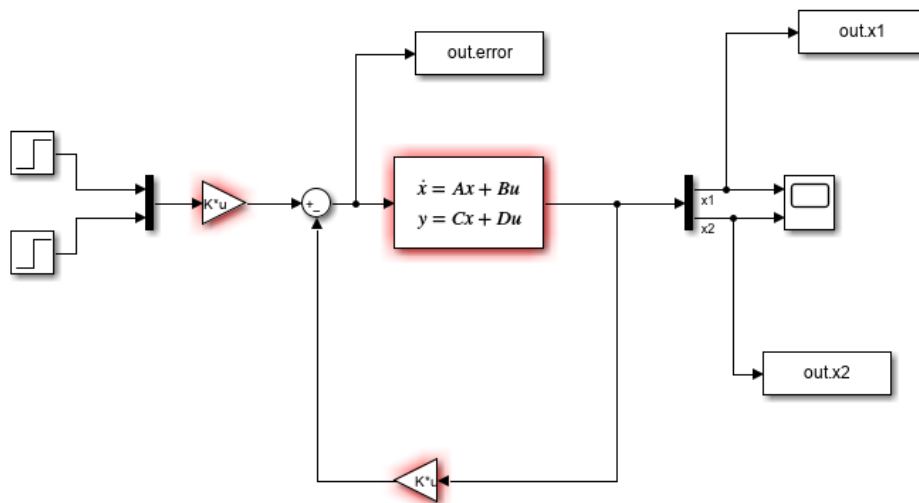
grid on
title(['x'])
legend('x', 'Location', 'southeast')
xlabel('t')
ylabel('x')

```

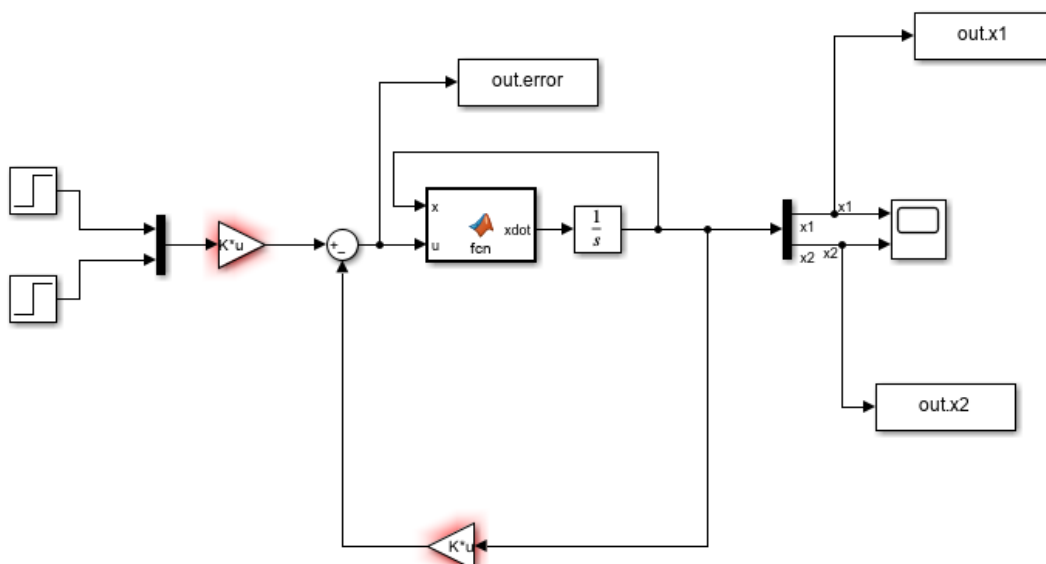
5.3 Modello usato per la linerizzazione



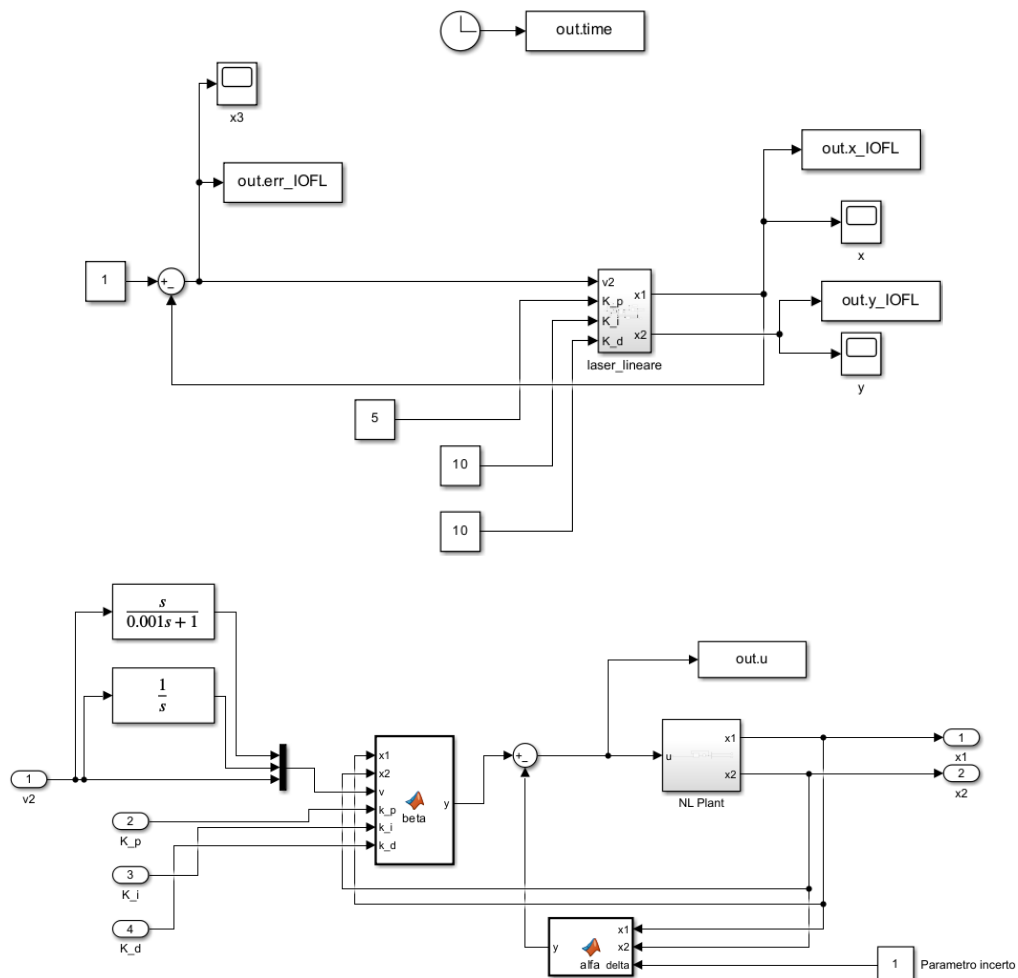
5.4 Allocazione autovalori



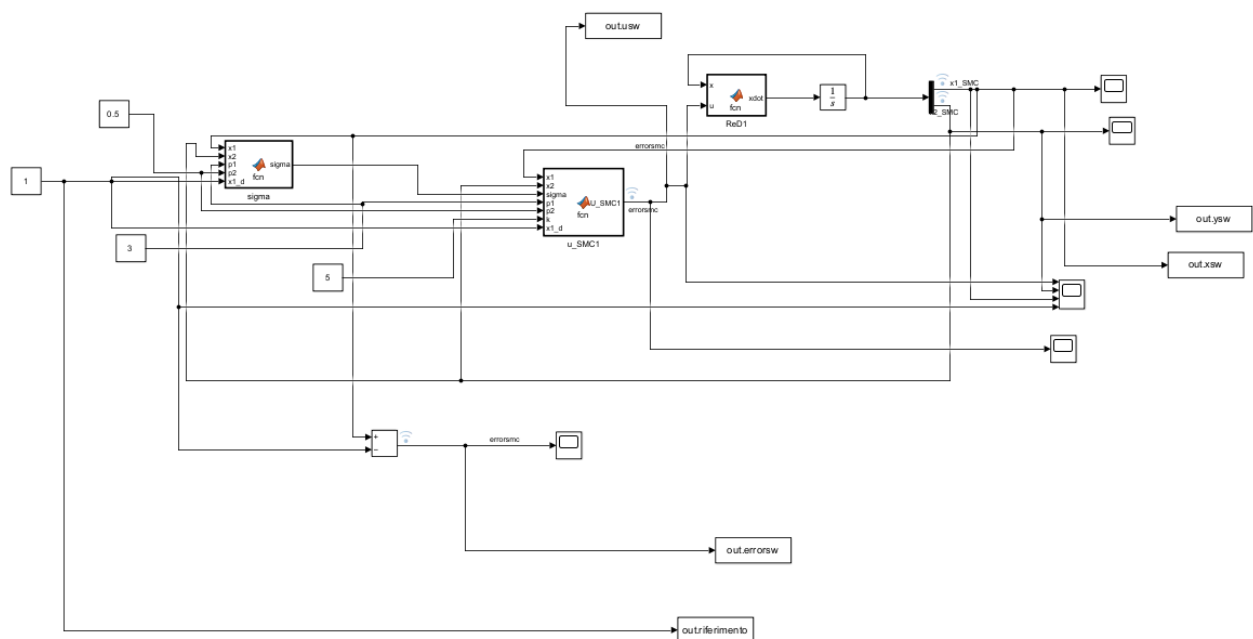
5.4 Allocazione autovalori su non lineare



5.5 IO/FL



5.6 Sliding mode control



5.6 Sliding mode control con saturazione

