

Qual'è il modo migliore di fare una misurazione?

Confronto tra interazione ordinata e disordinata
in un sistema un qubit - tanti qubit

Nicola Pranzini

13/02/2019

Lo scopo della seguente discussione è quello di evidenziare vantaggi e svantaggi di diverse interazioni sistema-ambiente per una particolare scelta di sistema; queste caratteristiche sono analizzate ai fini della costruzione di un processo di misura. Nella prima parte analizzeremo come sia possibile costruire una premisura di von Neumann a partire da un'evoluzione unitaria (in accordo con i postulati della meccanica quantistica): questa evoluzione sarà descritta da un processo dinamico di decoerenza per il sistema misurato. Successivamente applicheremo questa costruzione al sistema di interesse e ne evidenzieremo le caratteristiche principali.

Introduzione

Consideriamo un sistema isolato ψ , bipartito in due sottosistemi:

$$\psi = \Gamma \cup \Xi \quad (1)$$

dove Γ è detto sistema principale e Ξ è detto ambiente. Seguendo il primo ed il quarto postulato ai due sottosistemi sono associati due spazi di Hilbert \mathcal{H}_Γ e \mathcal{H}_Ξ ed al sistema complessivo uno spazio di Hilbert ottenuto tramite il prodotto tensore dei due $\mathcal{H}_\psi = \mathcal{H}_\Gamma \otimes \mathcal{H}_\Xi$. Per i nostri scopi è utile imporre che per le dimensioni dei due spazi di Hilbert valga

$$\dim(\mathcal{H}_\Gamma) = d \ll N = \dim(\mathcal{H}_\Xi) \quad (2)$$

Lo stato del sistema complessivo può essere descritto equivalentemente tramite vettori normalizzati nello spazio di Hilbert \mathcal{H}_ψ o tramite proiettori nello spazio di Hilbert $op(\mathcal{H}_\psi)$:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |v_i\rangle \quad , \quad \rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \sum_{i,j=1}^N c_i c_j^* \mathbb{P}_{v_i, v_j} \quad (3)$$

L'evoluzione temporale da un istante t_0 ad uno t è descritta da un operatore unitario \mathcal{U}_{t,t_0} che agisce sui vettori di stato come

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}_{t,t_0} |\psi(t_0)\rangle \quad (4)$$

e sugli operatori densità come

$$\rho(t) = \hat{\mathcal{U}}_{t,t_0} \rho(t_0) \hat{\mathcal{U}}_{t,t_0}^\dagger \quad (5)$$

Se \hat{H} è l'Hamiltoniana del sistema isolato (indipendente dal tempo per definizione), allora

$$\hat{\mathcal{U}}_{t,t_0} = e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (6)$$

Sottosistemi

La descrizione in termini dell'operatore densità è conveniente perché ci permette una facile trattazione dei due sottosistemi. Dato l'operatore densità ρ di $\psi = \Gamma \cup \Xi$ si ha che gli operatori densità dei sottosistemi sono

$$\rho_\Gamma = \text{Tr}_\Xi(\rho_\psi) \quad , \quad \rho_\Xi = \text{Tr}_\Gamma(\rho_\psi) \quad (7)$$

da cui segue che la **legge di evoluzione temporale** per il sistema principale (l'unica a cui siamo interessati) è

$$\rho_\Gamma(t) = \text{Tr}_\Xi(\rho_\psi(t)) = \text{Tr}_\Xi(\hat{\mathcal{U}}_{t,t_0} \rho(t_0) \hat{\mathcal{U}}_{t,t_0}^\dagger) \quad (8)$$

*Si definisce **decoerenza** rispetto alla base $\mathcal{B} = \{|\gamma\rangle\}$ un'evoluzione dinamica del sistema principale Γ che lascia invariate le popolazioni*

$$\langle \gamma | \rho_\Gamma | \gamma \rangle = \text{cost.} \quad \forall |\gamma\rangle \in \mathcal{B} \quad (9)$$

facendo variare le fasi relative

$$\langle \gamma | \rho_\Gamma | \gamma' \rangle \neq \text{cost.} \quad |\gamma\rangle \neq |\gamma'\rangle, \quad |\gamma\rangle, |\gamma'\rangle \in \mathcal{B} \quad (10)$$

Misura

Il processo di misura può essere suddiviso in due parti: **la premisura** e la **produzione dell'output**

- La premisura, che è un processo (dinamico) che **genera entanglement tra il sistema misurato ed il sistema misuratore** (apparato, osservatore, ambiente, etc...)
- La produzione dell'output, che è ancora molto discussa ed è il punto su cui le varie interpretazioni della MQ differiscono, descrive **come da una sovrapposizione quantistica si ottenga un risultato ben definito**.

Nel seguito saremo interessati solo alla premisura e ci riferiremo ad essa anche con il nome misurazione.

Von Neumann's Premeasurement

Per descrivere dinamicamente l'interazione tra un sistema Γ misurato ed un apparato misuratore Ξ , von Neumann ideò uno schema in grado di generare entanglement da tra questi due sistemi, inizialmente in uno stato separabile. Definita una base $\{|\gamma\rangle\}$ di \mathcal{H}_Γ ed uno stato iniziale dell'apparato $|\Xi_R\rangle$, la premisura è un'evoluzione del tipo

$$|\Gamma\rangle \otimes |\Xi_R\rangle = \sum_{\gamma} (c_{\gamma} |\gamma\rangle) \otimes |\Xi_R\rangle \rightarrow \sum_{\gamma} c_{\gamma} |\gamma\rangle \otimes |\Xi^{\gamma}\rangle, \quad (11)$$

dove possiamo richiedere che valga la *Condizione di Riproducibilità delle Probabilità (CRP)*, cioè, nel nostro contesto, che per gli stati dell'ambiente valga

$$\langle \Xi^{\gamma} | \Xi^{\gamma'} \rangle = \delta_{\gamma, \gamma'} \quad (12)$$

(La derivazione di questa forma della CRP a partire da quella usuale si trova in appendice A). Questa condizione è necessaria per far sì che ad ogni risultato di una misurazione effettuata sull'ambiente, dopo la Premisura, corrisponda uno ed un solo risultato di una ipotetica misurazione sul sistema principale. Non richiedere che valga la CRP equivale a lasciare un certo grado di incertezza alla fine della misura, e quindi a non massimizzare l'informazione ottenuta tramite il processo (come mostrato in appendice B).

Questa descrizione della misura presenta due problemi, uno legato alla premisura ed uno legato alla produzione dell'output:

- *Problema della base preferita:* lo stato finale, come ogni altro stato, è descrivibile su diverse basi dello spazio di Hilbert, tutte equivalenti. Siccome la base $\{|\gamma\rangle\}$ scelta determina la quantità che stiamo misurando (un operatore di misura su Γ ed i vettori $|\Xi^{\gamma}\rangle$), solo tramite la premisura alla von Neumann non abbiamo indicazioni sulle quantità che stiamo misurando.
- *Problema della definitezza degli outcome:* Alla fine del processo il sistema ψ è in una sovrapposizione di stati e, se non aggiungiamo un qualche meccanismo supplementare di produzione dell'outcome, non è chiaro come da questa situazione si possa ottenere un risultato univocamente definito a livello classico.

Modello dinamico di Ozawa

La premisura di von Neumann può essere costruita tramite un modello dinamico, detto *Modello di Ozawa*.

Consideriamo il sistema $\psi = \Gamma \cup \Xi$ e lasciamolo evolvere tramite un'Hamiltoniana di Interazione

$$\hat{H} = \hat{O}_\Gamma \otimes \hat{O}_\Xi \quad (13)$$

dove \hat{O}_Γ e \hat{O}_Ξ sono operatori hermitiani e la base di autovettori dell'operatore che agisce su \mathcal{H}_Γ è $\{|\gamma\rangle\}$:

$$\hat{O}_\Gamma = \sum_{\gamma} \omega_{\gamma} |\gamma\rangle \langle \gamma| . \quad (14)$$

Questa scelta seleziona la base del processo di von Neumann rimuovendo l'arbitrarietà nella scelta della decomposizione (11) e risolvendo così il problema della base preferita.

Scelto uno stato iniziale separabile si ha che

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} \left(\sum_{\gamma} c_{\gamma} |\gamma\rangle \right) \otimes |\Xi_R\rangle = \sum_{\gamma} c_{\gamma} |\gamma\rangle \otimes \left(e^{-i\omega_{\gamma}\hat{O}_{\Xi}t} |\Xi_R\rangle \right) \quad (15)$$

che, definendo $|\Xi^{\gamma}(t)\rangle \equiv e^{-i\omega_{\gamma}\hat{O}_{\Xi}t} |\Xi_R\rangle$, descrive uno stato entangled come richiesto dalla premisura di von Neumann:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\gamma} c_{\gamma} |\gamma\rangle \otimes |\Xi^{\gamma}(t)\rangle . \quad (16)$$

È importante osservare che questo stato non è entangled a tutti i tempi, ma presenta una ricorrenza (quasi-)periodica nello stato separabile.

L'operatore densità relativo al sistema principale nella dinamica di Ozawa è dato da

$$\rho_{\Gamma} = \text{Tr}_{\Xi}(|\psi\rangle \langle \psi|) = \text{Tr}_{\Xi} \left(\sum_{\gamma, \gamma'} c_{\gamma} c_{\gamma'}^* |\gamma\rangle \langle \gamma'| \otimes |\Xi^{\gamma}(t)\rangle \langle \Xi^{\gamma'}(t)| \right) . \quad (17)$$

Separando gli elementi della somma dove $\gamma = \gamma'$ dagli altri si ottiene

$$\rho_{\Gamma} = \sum_{\gamma} |c_{\gamma}|^2 |\gamma\rangle \langle \gamma| + \sum_{\gamma, \gamma'} c_{\gamma} c_{\gamma'}^* |\gamma\rangle \langle \gamma'| \langle \Xi^{\gamma'}(t) | \Xi^{\gamma}(t) \rangle . \quad (18)$$

Il prodotto scalare a secondo membro descrive una dipendenza temporale degli elementi fuori diagonale, mentre gli elementi sulla diagonale sono costanti: il modello di Ozawa descrive una dinamica di decoerenza per il sistema principale nella base preferita, selezionata dall'interazione. Gli elementi *off-diagonal* saranno nulli solo se vale CRP, che non sarà soddisfatta a tutti i tempi ma solo in un insieme \mathbb{T}_{CRP} .

$$t \in \mathbb{T}_{CRP} \Rightarrow \langle \Xi^{\gamma}(t) | \Xi^{\gamma'}(t) \rangle = \delta_{\gamma, \gamma'} \quad (19)$$

In generale l'insieme \mathbb{T}_{CRP} non conterrà intervalli. Questo causa dei problemi in quanto, per fare una misurazione, siamo interessati ad avere intervalli di tempo (sufficientemente lunghi) nei quali operare sull'ambiente ed ottenere l'informazione relativa al sistema. Fissato un $\epsilon > 0$, possiamo allora definire l'insieme $\mathbb{T}_{CRPD}^{\epsilon}$ (CRP Debole) per cui vale

$$t \in \mathbb{T}_{CRPD}^{\epsilon} \Rightarrow \langle \Xi^{\gamma}(t) | \Xi^{\gamma'}(t) \rangle < \epsilon \quad \forall \gamma \neq \gamma' \quad (20)$$

Con questa definizione possiamo descrivere una buona dinamica di premisura se è possibile scegliere ϵ abbastanza piccolo tale che $\mathbb{T}_{DCRP}^\epsilon$ contenga intervalli (sufficientemente lunghi). I vettori $\{|\Xi^\pm(t)\rangle\}_{t \in \mathbb{T}_{DCRP}}$ sono detti *pointer basis* e formano la base di autovettori (in un sottospazio di \mathcal{H}_Ξ) per l'operatore di misura che dobbiamo usare per estrarre informazione su Γ .

Informazione mutua

Dobbiamo infine chiederci se questa dinamica sia in effetti in grado di aumentare l'informazione che l'ambiente ha a proposito del sistema, cioè se siamo in effetti in grado di estrarre informazione riguardo Γ da Ξ in maniera più efficiente rispetto a quanto si potesse fare nello stato iniziale.

La quantità chiave per capire quanta informazione si possa estrarre da un sistema riguardo ad un altro è detta *informazione mutua*

$$\mathcal{I}(\Gamma : \Xi) = H(\Gamma) + H(\Xi) - H(\psi = \Gamma \cup \Xi) \quad (21)$$

dove $H(A)$ è l'entropia di von Neumann del sistema A

$$H(A) = -\text{Tr}(\rho_A \log \rho_A) \quad (22)$$

Nel momento iniziale il sistema si trova in uno stato separabile: ogni operatore densità è un singolo proiettore sul vettore di stato del singolo sottosistema e, scelta una base con la procedura di Gram-Schmidt, le matrici sono tutte diagonali e con un solo autovalore non nullo e pari ad 1. Questo significa che

$$H(\Gamma) = H(\Xi) = H(\psi) = 0 \Rightarrow \mathcal{I}(\Gamma : \Xi)_{t=0} = 0 \quad (23)$$

Scelto un tempo nell'intervallo \mathbb{T}_{DCRP} si ha invece che, sebbene l'operatore densità di ψ sia ancora un proiettore, le ρ dei sottosistemi non descrivono stati puri e sono date da

$$\rho_\Gamma = \sum_\gamma |c_\gamma|^2 |\gamma\rangle \langle \gamma| \quad , \quad \rho_\Xi = \sum_\gamma |c_\gamma|^2 |\Xi^\gamma\rangle \langle \Xi^\gamma| \quad (24)$$

Le relative entropie sono

$$H(\Gamma) = H(\Xi) = -\sum_\gamma |c_\gamma|^2 \log |c_\gamma|^2 \quad , \quad H(\psi) = 0 \quad (25)$$

da cui si ottiene

$$\mathcal{I}(\Gamma : \Xi)_{t \in \mathbb{T}_{DCRP}} = -2 \sum_\gamma |c_\gamma|^2 \log |c_\gamma|^2 \quad (26)$$

L'informazione condivisa tra i due sistemi nel processo di premisura è quindi aumentata di una quantità pari a

$$\Delta \mathcal{I}(\Gamma : \Xi) = \mathcal{I}(\Gamma : \Xi)_{t \in \mathbb{T}_{DCRP}} - \mathcal{I}(\Gamma : \Xi)_{t=0} = -2 \sum_\gamma |c_\gamma|^2 \log |c_\gamma|^2 \geq 0 \quad (27)$$

Misura di un qubit mediante interazione uno-tanti

Al fine di illustrare quanto detto fino ad adesso consideriamo un sistema principale Γ composto da un qubit, $\dim(\mathcal{H}_\Gamma) = 2$, ed un ambiente Ξ composto da N qubit, $\dim(\mathcal{H}_\Xi) = 2^N$.

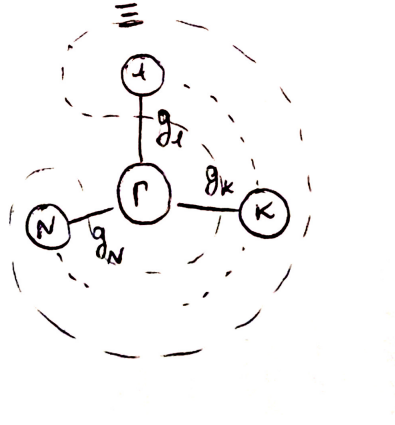
I due sottosistemi interagiscono tramite un'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \sigma_z \otimes \left(\sum_k g_k \hat{S}_k \right) \quad (28)$$

con

$$\hat{S}_k = \underbrace{\mathbb{I}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{I}_2}_{k-1} \otimes \sigma_z \otimes \underbrace{\mathbb{I}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{I}_2}_{N-k} \quad (29)$$

rappresentata schematicamente in figura.



Il sistema si trova inizialmente nello stato separabile

$$|\psi\rangle = (a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) \bigotimes_{k=1}^N (\alpha_k|\uparrow_k\rangle + \beta_k|\downarrow_k\rangle) \quad (30)$$

ed al tempo t si troverà nello stato

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \\ a|\uparrow\rangle \bigotimes_{k=1}^N \left(\alpha_k e^{-ig_k t} |\uparrow_k\rangle + \beta_k e^{ig_k t} |\downarrow_k\rangle \right) &+ b|\downarrow\rangle \bigotimes_{k=1}^N \left(\alpha_k e^{ig_k t} |\uparrow_k\rangle + \beta_k e^{-ig_k t} |\downarrow_k\rangle \right) \\ &= a|\uparrow\rangle \otimes |\Xi^+(t)\rangle + b|\downarrow\rangle \otimes |\Xi^-(t)\rangle \end{aligned} \quad (31)$$

Tramite un facile calcolo si dimostra che l'operatore densità del sistema principale è dato da

$$\rho_\Gamma = |a|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + |b|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| + ab^* c(t) |\uparrow\rangle \langle \downarrow| + a^* b c^*(t) |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \quad (32)$$

con

$$c(t) = \langle \Xi^-(t) | \Xi^+(t) \rangle = \prod_{k=1}^N \left(|\alpha_k|^2 e^{-2ig_k t} + |\beta_k|^2 e^{2ig_k t} \right) . \quad (33)$$

Per alcuni scopi può essere utile notare che (33) può essere espressa come somma di numeri complessi

$$c(t) = \sum_{k=1}^{2^N} A_k e^{iE_k t} \quad (34)$$

per l'insieme di coppie $\{(A_1, E_1), \dots, (A_{2^N}, E_{2^N})\}$.

Gli elementi fuori diagonale hanno un andamento oscillante (quasi-)periodico attorno a zero infatti, usando la (34), si ha

$$\begin{aligned} \langle c(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} c(s) ds = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^N} \int_t^{t+T} \frac{1}{T} A_k e^{iE_k t} ds = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^N} A_k \frac{e^{iE_k(t+T)} - e^{iE_k t}}{iE_k T} = 0 . \end{aligned} \quad (35)$$

L'oscillazione avviene, in media, in un intorno dello zero pari alla varianza della funzione $c(t)$, cioè

$$\begin{aligned} \text{Var}(c(t)) &= \langle |c(t)|^2 \rangle - |\langle c(t) \rangle|^2 = \langle |c(t)|^2 \rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |c(s)|^2 ds = \dots = \prod_{k=1}^N \left(|\alpha_k|^4 + |\beta_k|^4 \right) . \end{aligned} \quad (36)$$

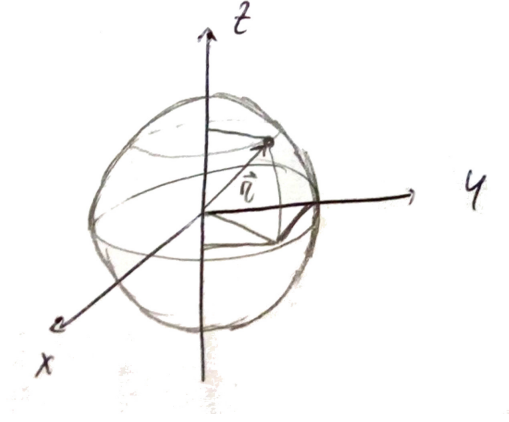
È interessante osservare come, supponendo che gli α_k ed i β_k non siano tutti 0 od 1 (ipotesi che si può assumere valida nel caso in cui l'ambiente non è sia stato preparato *ad hoc*), valga

$$|\alpha_k|^4 + |\beta_k|^4 \leq x < 1 \Rightarrow \text{Var}(c(t)) = \prod_{k=1}^N \left(|\alpha_k|^4 + |\beta_k|^4 \right) \leq x^N \quad (37)$$

e quindi, per ambienti molto grandi

$$\text{Var}(c(t)) \simeq 0 . \quad (38)$$

In quest'ultimo caso si può dire che $c(t) = 0$ quasi certamente (cioè a meno di un insieme discreto di valori di t).



Moto sulla sfera di Bloch-Majorana

In questo paragrafo analizziamo il moto del vettore di stato espresso sulla sfera di Bloch-Majorana. Un generico operatore densità di un qubit può essere espresso tramite

$$\rho_{\Gamma} = \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) ; \quad (39)$$

In questa descrizione gli stati puri corrispondono alla superficie della sfera unitaria e quelli misti al suo interno. Esprimendo il nostro operatore densità sulla base preferita $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ si ha

$$\rho_{\Gamma} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^*c(t) \\ a^*bc^*(t) & |b|^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a^*bc^*(t) + ab^*c(t) \\ -i(a^*bc^*(t) - ab^*c(t)) \\ |a|^2 - |b|^2 \end{pmatrix} . \quad (40)$$

Sulla sfera di Bloch-Majorana il vettore di stato si muove a z costante ed attorno al punto $(0, 0, |a|^2 - |b|^2)$; quanto più l'ambiente è grande tanto più la regione in cui il vettore di stato si trova (per gran parte del tempo), sarà localizzata attorno a zero.

Scegliamo (W.L.O.G) lo stato iniziale del sistema principale come $|\Gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ e quello del k -esimo qubit dell'ambiente come $|\Gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_k\rangle + |\downarrow_k\rangle)$. Allora

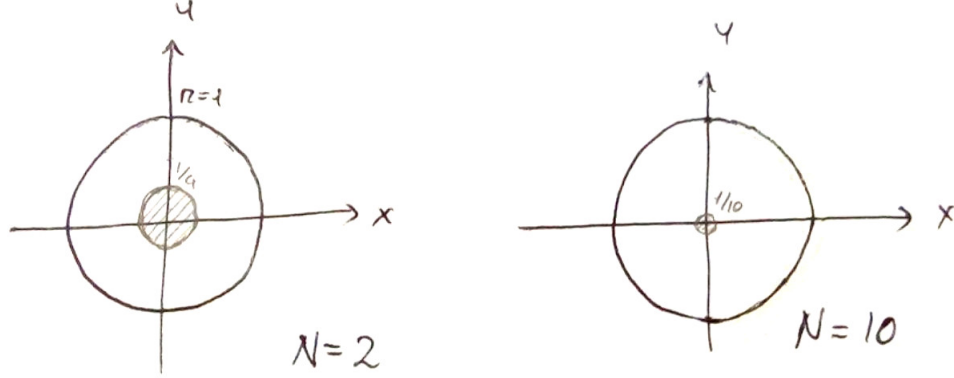
$$\vec{r}(t) = (\text{Re}(c(t)), \text{Im}(c(t)), 0) \Rightarrow |\vec{r}(t)|^2 = \text{Re}(c(t))^2 + \text{Im}(c(t))^2 = |c(t)|^2 ; \quad (41)$$

il moto inizia dal bordo della sezione a $z = 0$ della sfera di Bloch-Majorana per evolvere verso regioni più vicine allo zero infatti, siccome

$$\langle |\vec{r}(t)|^2 \rangle = \langle |c(t)|^2 \rangle = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} \right) = 2^{-N} , \quad (42)$$

il vettore rappresentativo dello stato del sistema si trova, per gran parte del tempo, nel disco

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 2^{-N}, z = 0\} \quad (43)$$



I due estremi: Ordine vs. Disordine

In questa sezione vogliamo analizzare le caratteristiche della funzione

$$|c(t)|^2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] , \quad (44)$$

al variare della scelta dei coupling g_k e del numero di gradi di libertà dell'ambiente, per determinare quale sia il modo migliore di costruire un apparato di misura. I due casi che tratteremo sono:

- $g_k = g \quad \forall k = 1, \dots, N$, detto caso ordinato.
- $g_k \neq g_{k'}$ (in particolare consideriamo una distribuzione casuale uniforme dei coupling in un certo intervallo), detto caso disordinato.

Caso ordinato

Nel caso ordinato la funzione $|c(t)|^2$ è periodica di periodo π/g e presenta un minimo in ogni intervallo di periodicità (il primo in $\pi/2g$). Se per almeno 1 dei qubit del sistema vale $\alpha_k = \beta_k = 1/\sqrt{2}$, allora il suddetto minimo è t.c. $|c(\pi/2g)|^2 = 0$. Supponendo di metterci nella condizione in cui esista tale qubit nel sistema, allora

$$\mathbb{T}_{CRP} = \{t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{\pi + 2n\pi}{2g}, n \in \mathbb{Z}\} , \quad (45)$$

altrimenti

$$\mathbb{T}_{CRP} = \emptyset . \quad (46)$$

In entrambi i casi non ho a disposizione un intervallo di tempo per fare misurazioni. E devo quindi ricorrere alla CRP debole.

Come mostrato nelle tabelle 2 e 3 all'aumentare di N l'andamento della funzione $|c(t)|^2$ è sempre più schiacciato e per $N \gg 1$ all'incirca ogni intervallo di periodicità corrisponde ad un intervallo in $\mathbb{T}_{CRPD}^\epsilon$.

$$\mathbb{T}_{CRPD}^\epsilon \simeq \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t \in \left(\frac{i\pi}{2}, \frac{(i+1)\pi}{2} \right) \right\} \quad (47)$$

dove la definizione esatta dipende dal numero N e dalla scelta di ϵ e dove abbiamo usato il fatto che $|c(t)|^2 = 0$ quasi certamente.

Caso disordinato

Nel caso disordinato la funzione $|c(t)|^2$ è periodica o quasiperiodica, al variare dei g_k , e presenta più minimi all'interno di ogni (quasi-)periodo. Ad N finito l'insieme \mathbb{T}_{CRP} è una collezione discreta di punti (difficilmente identificabili) ed l'insieme $\mathbb{T}_{CRPD}^\epsilon$ è una collezione di intervalli diversi (ancora, difficilmente identificabili). Per N grande, in un intervallo di tempo I (sufficientemente lungo) l'insieme $I \cap \mathbb{T}_{CRP}$ probabilmente conterrà più punti dell'analogo ordinato.

Come mostrato nelle tabelle 2 e 3 all'aumentare di N l'andamento della funzione $|c(t)|^2$ è sempre più schiacciato e per $N \gg 1$ gli intervalli di $\mathbb{T}_{CRPD}^\epsilon$ diventano molto lunghi, con interruzioni rare ed imprevedibili.

$$\mathbb{T}_{CRPD}^\epsilon \simeq \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \{ t \in \mathbb{R} \mid t \in (t_i, t_{i+1}) \} \quad , \quad \text{con } t_i \mid |c(t_i)|^2 > \epsilon \quad (48)$$

dove la definizione esatta dipende dal numero N e dalla scelta di ϵ e dove abbiamo usato il fatto che $|c(t)|^2 = 0$ quasi certamente.

Quale scelta è la migliore?

La domanda cui vogliamo rispondere è: quale scelta dei coefficienti g_k è la migliore per riprodurre una dinamica tipo premisura sul nostro sistema? Dalle considerazioni di questo paragrafo e le simulazioni numeriche sembra che la migliore scelta sia il caso disordinato:

- per N sufficientemente grande, l'insieme \mathbb{T}_{CRP} è molto fitto sull'asse dei tempi, mentre nel caso ordinato esso contiene al più un punto ogni periodo.
- per N sufficientemente grande, l'insieme $\mathbb{T}_{CRPD}^\epsilon$ diventa un insieme di intervalli molto lunghi, mentre nel caso ordinato esso contiene sempre intervalli più corti di un periodo.

Nonostante queste considerazioni, **la scelta migliore è quella del caso ordinato**: per avere un comportamento affidabile nel caso disordinato bisogna necessariamente scegliere N molto grande, scelta di cui abbiamo, fino ad adesso, trascurato il costo: per effettuare il processo di premisura bisogna essere in grado di selezionare gli stati della base pointer $\{|\Xi^\pm(t)\rangle\}$, richiesta che, nella pratica, diventa tanto più difficile quanto più numerosi sono i gradi di libertà del sistema Ξ . Viceversa, nel caso ordinato il comportamento è prevedibile ed abbiamo intervalli noti di $\mathbb{T}_{CRPD}^\epsilon$ per cui, al costo di avere intervalli brevi nei quali fare misure, possiamo scegliere N senza la restrizione $N \gg 1$ e non perdere la capacità di individuare la pointer basis (inoltre al crescere di N la difficoltà del compito di trovare la pointer basis scala più lentamente nel caso ordinato).

Appendice A: Definizione formale di misura

Sia $\{E_l\}$ la collezione dei possibili risultati di una misura. Sia $R = \cup_l E_l$, detto range, l'insieme dei risultati. Si definisce \mathcal{M} una famiglia di parti di R tale che

- $R, \emptyset \in \mathcal{M}$
- $E_l \in \mathcal{M} \rightarrow R \setminus E_l \in \mathcal{M}$
- $\{E_l\} \subseteq \mathcal{M} \rightarrow \cup_l E_l \in \mathcal{M}$

Con questa definizione \mathcal{M} è detta una σ -algebra su R .

Si definisce *misura* un'applicazione

$$O : \mathcal{M} \longrightarrow op(\mathcal{H}) \quad (49)$$

- $\hat{O}(E_l) \geq 0$
- $\hat{O}(\cup_l E_l) = \sum_l \hat{O}(E_l)$
- $\hat{O}(R) = \mathbb{I}$

Una misura così definita è detta *positive operator valued measure* o POVM.

Se vale che

$$\hat{O}(E_l \cap E_k) = \hat{O}(E_l) \hat{O}(E_k) \quad (50)$$

la misura è detta *projector-valued measure* o PVM, in quanto

$$\hat{O}(E_l) = \hat{O}(E_l \cap E_l) = \hat{O}(E_l) \hat{O}(E_l) = \hat{O}(E_l)^2 . \quad (51)$$

Interpretazione minimale e CRP

Definita un'applicazione

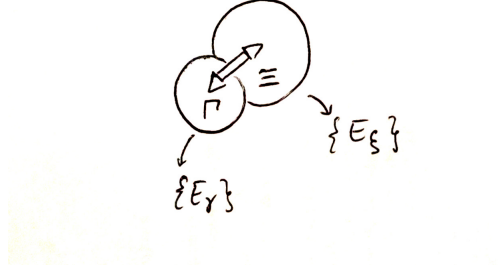
$$p_\rho^O : \mathcal{M} \longrightarrow [0, 1] \quad , \quad E_l \mapsto \text{Tr}[\hat{O}(E_l)\rho] \quad (52)$$

Si chiama *interpretazione minimale* l'affermazione

Detto \mathcal{E} un elemento di \mathcal{M} , il numero $p_\rho^O(\mathcal{E})$ è la probabilità che un'osservazione sperimentale del sistema ρ associata alla misura O dia un risultato in \mathcal{E} .

Se usiamo un apparato per fare misurazioni, allora avremo un sistema bipartito $\psi = \Gamma \cup \Xi$, come descritto precedentemente, con due diverse collezioni di possibili risultati $\{E_\gamma\}$ e $\{E_\xi\}$ con cui possiamo costruire le σ -algebre \mathcal{M}_Γ e \mathcal{M}_Ξ . Le misure sono definite allora dalle due applicazioni

$$O_\Gamma : \mathcal{M}_\Gamma \rightarrow op(\mathcal{H}_\Gamma) \quad \text{e} \quad O_\Xi : \mathcal{M}_\Xi \rightarrow op(\mathcal{H}_\Xi) \quad (53)$$



Definendo una funzione *invertibile* che ad ogni elemento della σ -algebra \mathcal{M}_Ξ ne associa uno di \mathcal{M}_Γ

$$f : \mathcal{M}_\Xi \rightarrow \mathcal{M}_\Gamma \quad , \quad f^{-1} : \mathcal{M}_\Gamma \rightarrow \mathcal{M}_\Xi \quad (54)$$

Si chiama *condizione di riproducibilità delle probabilità* CRP la richiesta che valga

$$p_{\rho_\Gamma}^{O_\Gamma}(E_\gamma) = p_{\rho_\Xi}^{O_\Xi}(f^{-1}(E_\gamma)) \quad (55)$$

cioè la condizione che le probabilità associate agli outcome relativi ad esperimenti effettuati sul sistema Γ , corrispondano alle probabilità associate a quelli effettuati sul sistema Ξ . La misura O_Ξ è detta *pointer*.

Appendice B: L'informazione mutua è massima se vale CRP

CRP è soddisfatta $\Rightarrow \Delta\mathcal{I}(\Gamma : \Xi)$ è massima.

Per provare l'enunciato indeboliamo CRP:

$$\langle \Xi^\gamma | \Xi^{\gamma'} \rangle = \delta_{\gamma, \gamma'} \quad \forall \gamma, \gamma' \neq 1, 2 \quad (56)$$

$$\langle \Xi^1 | \Xi^2 \rangle = \epsilon, \quad \langle \Xi^\gamma | \Xi^\gamma \rangle = 1 \quad \gamma = 1, 2 \quad (57)$$

allora l'operatore densità nella base in cui è diagonale è

$$\rho_\gamma = \begin{pmatrix} \Delta_+ & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \Delta_- & 0 & \dots \\ 0 & 0 & |c_3|^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (58)$$

dove

$$\begin{aligned} \Delta_\pm &= \frac{|c_1|^2 + |c_2|^2}{2} \pm \frac{\sqrt{(|c_1|^2 - |c_2|^2)^2 + 4\epsilon^2}}{2} \\ &\simeq \frac{|c_1|^2 + |c_2|^2}{2} \pm \left(\frac{|c_1|^2 - |c_2|^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{|c_1|^2 - |c_2|^2} \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Da cui, per $\epsilon \ll 1$, si ha

$$\Delta_+ \simeq |c_1|^2 + \frac{\epsilon^2}{|c_1|^2 - |c_2|^2}, \quad \Delta_- \simeq |c_2|^2 - \frac{\epsilon^2}{|c_1|^2 - |c_2|^2} \quad (60)$$

L'entropia in questo caso sarà data da

$$H^{\epsilon \neq 0}(\Gamma) = - \sum_{\gamma \geq 3} |c_\gamma|^2 \ln |c_\gamma|^2 - \Delta_+ \ln \Delta_+ - \Delta_- \ln \Delta_- . \quad (61)$$

Confrontando con l'entropia nel caso in cui la CRP è verificata si ottiene

$$H^{\epsilon \neq 0}(\Gamma) \simeq H^{\epsilon=0}(\Gamma) - \epsilon^2 \frac{\ln |c_1|^2 - \ln |c_2|^2}{|c_1|^2 - |c_2|^2} = H^{\epsilon=0}(\Gamma) - A \quad (62)$$

con $A > 0$. Da questa uguaglianza possiamo ricavare che

$$\Delta\mathcal{I}^{\epsilon \neq 0} = \Delta\mathcal{I}^{\epsilon=0} - 2A \Rightarrow \Delta\mathcal{I}^{\epsilon=0} > \Delta\mathcal{I}^{\epsilon \neq 0} \quad (63)$$

Cioè l'informazione che possiamo ottenere dal processo di premisura è massima se vale CRP.

□

Appendice C: (Quasi-)Periodicità in MQ

Consideriamo uno spazio di Hilbert finito dimensionale \mathcal{H} ed un operatore Hermitiano (Hamiltoniana) non degenere scrivibile sulla sua base di autovettori come

$$\hat{H} = \sum \omega_\gamma |\gamma\rangle \langle \gamma| . \quad (64)$$

L'evoluzione temporale di un generico vettore in \mathcal{H} è data da

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}_{t,t_0} \sum_\gamma |\gamma\rangle \langle \gamma | \psi_0 \rangle = e^{-i\hat{H}t} \sum_\gamma |\gamma\rangle \langle \gamma | \psi_0 \rangle = \sum_\gamma e^{-i\omega_\gamma t} |\gamma\rangle \langle \gamma | \psi_0 \rangle \quad (65)$$

Definiamo la *funzione di autocorrelazione* $\mathcal{A}(t)$ come

$$\mathcal{A}(t) = \langle \psi_0 | \psi(t) \rangle = \langle \psi_0 | \mathcal{U}_{t,t_0} | \psi_0 \rangle \quad (66)$$

da cui segue

$$\mathcal{A}(t) = \sum_\gamma |\langle \gamma | \psi_0 \rangle|^2 e^{-i\omega_\gamma t} \quad (67)$$

Il sistema torna in sè stesso se $\exists \tilde{t} \mid \mathcal{A}(\tilde{t}) = 1$. Ogni componente di $\psi(t)$ è periodica di periodo $T_\gamma = 2\pi/\omega_\gamma$, da cui segue che, se ogni ω_γ è proporzionale ad ogni altra con costante di proporzionalità razionale,

$$\frac{\omega_\gamma}{\omega_{\gamma'}} = q \in \mathbb{Q} \quad \forall \gamma, \gamma' \quad (68)$$

(gli ω_γ sono detti *commensurabili*), allora $\exists \tilde{t} \mid \mathcal{A}(\tilde{t}) = 1$.

In caso contrario, cioè se

$$\exists \gamma, \gamma' \mid \frac{\omega_\gamma}{\omega_{\gamma'}} = r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} , \quad (69)$$

(gli ω_γ sono detti *incommensurabili*), allora $\nexists \tilde{t} \mid \mathcal{A}(\tilde{t}) = 1$ e la funzione non è periodica.

Ad esempio, nel caso $\dim(\mathcal{H}) = 2$, se vale

$$\omega_1 = r\omega_0 \quad r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (70)$$

e, per assurdo, richiediamo che esista un tempo per cui $\mathcal{A}(t) = 1$, si ottiene

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1 = |c_0|^2 e^{-i\omega_0 t} + |c_1|^2 e^{-i\omega_1 t} = |c_0|^2 e^{-i\omega_0 t} + |c_1|^2 e^{-ir\omega_0 t} , \quad (71)$$

che implica

$$t = \frac{2\pi k_0}{\omega_0} = \frac{2\pi k_1}{r\omega_0} \quad \text{con } k_0, k_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow r = \frac{k_1}{k_0} \in \mathbb{Q} , \quad (72)$$

cioè un assurdo.

Quasi periodicità

In tutti i casi in cui gli autostati dell'hamiltoniana siano incommensurabili e la dimensione dello spazio di Hilbert sia finita possiamo recuperare una nozione di ricorrenza quantistica pur non avendo a disposizione il concetto di periodicità.

Si definisce *funzione quasiperiodica* una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ per cui, fissato $\epsilon > 0$, esiste T^ϵ tale che $\forall t$ si può definire un intervallo $[t, t + T^\epsilon)$, il quale contiene almeno un τ tale che

$$|f(t) - f(t + \tau)| < \epsilon , \quad (73)$$

cioè una funzione quasiperiodica torna sempre arbitrariamente vicina a se stessa. Ovviamente ogni funzione periodica è quasiperiodica.

$\mathcal{A}(t)$ è una funzione quasiperiodica, infatti, ricordando che

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{\gamma} r_{\gamma} e^{-i\omega_{\gamma} t} , \quad \text{con } r_{\gamma} = |\langle \gamma | \psi_0 \rangle|^2 \geq 0 , \quad (74)$$

si ha

$$|\mathcal{A}(t+T) - \mathcal{A}(t)| = \left| \sum_{\gamma} r_{\gamma} (e^{-i\omega_{\gamma}(t+T)} - e^{-i\omega_{\gamma}t}) \right| \leq \sum_{\gamma} r_{\gamma} |e^{-i\omega_{\gamma}T} - 1| . \quad (75)$$

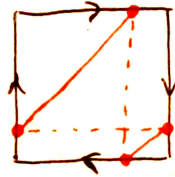
quindi, scelto $\epsilon > 0$ seleziono T^ϵ tale che il T che soddisfa

$$\sum_{\gamma} r_{\gamma} |e^{-i\omega_{\gamma}T} - 1| = 2 \sum_{\gamma} r_{\gamma} \left| \sin \left(\frac{\omega_{\gamma}T}{2} \right) \right| = \epsilon \quad (76)$$

(la cui esistenza è garantita da un teorema della teoria delle funzioni quasiperiodiche) sia $T < T^\epsilon$.

Ogni evoluzione di uno stato puro di un sistema isolato a cui è associato uno spazio di Hilbert finito dimensionale è periodica o quasiperiodica.

L'evoluzione del sistema può essere rappresentata come il moto di un punto su un $\dim(\mathcal{H})$ coordinate periodiche di periodo $T = 2\pi/\omega_{\gamma}$, dunque su un $\dim(\mathcal{H})$ -toro. Ad esempio nel caso 2-dimensionale si ottiene



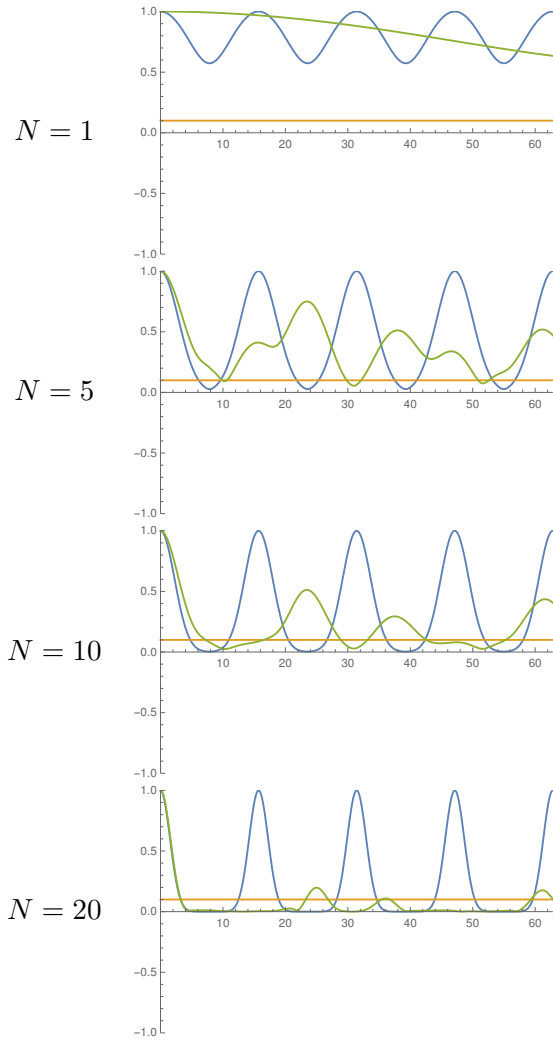
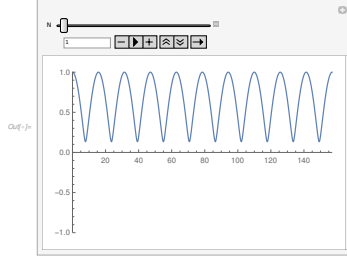
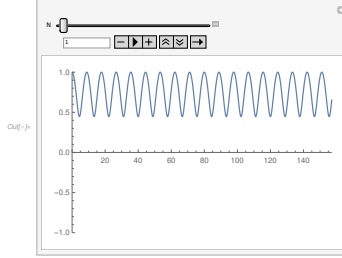


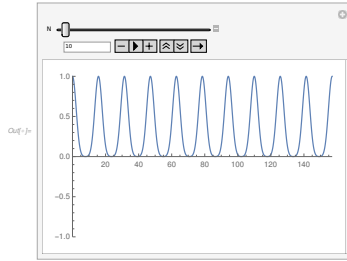
Tabella 1: Confronto tra il caso ordinato ed il caso disordinato degli andamenti di $|c(t)|^2$



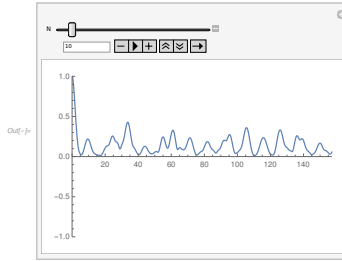
(a) Ordinato N=1



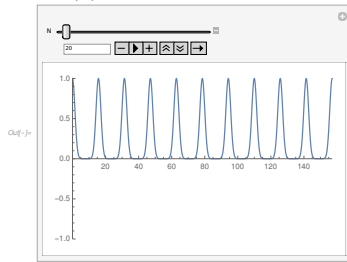
(b) Disordinato N=1



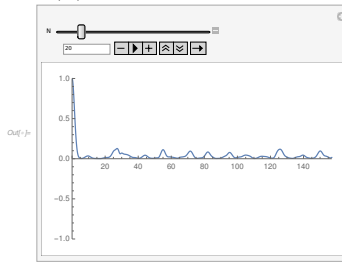
(c) Ordinato N=10



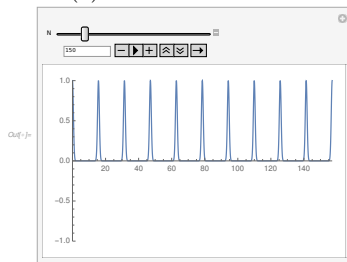
(d) Disordinato N=10



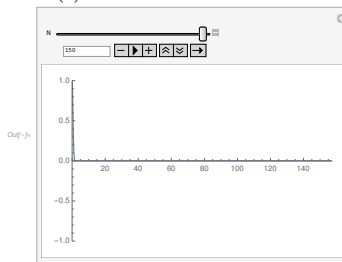
(e) Ordinato N=20



(f) Disordinato N=20

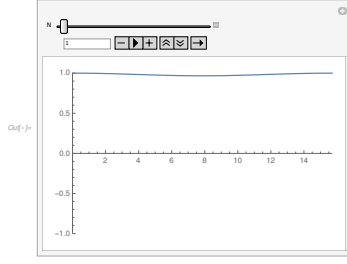


(g) Ordinato N=150

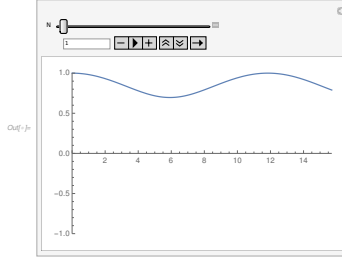


(h) Disordinato N=150

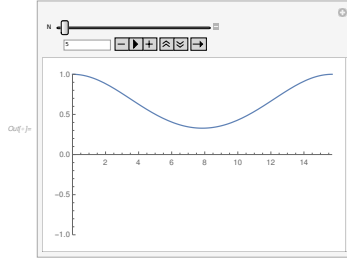
Tabella 2: Andamenti di $|c(t)|^2$ nel caso Disordinato $g_k \in (0, 0.2)$ (a sinistra) ed Ordinato $g_k = 0.1$ (a destra) al variare di N , nell'intervallo $t \in (0, 150\pi)$



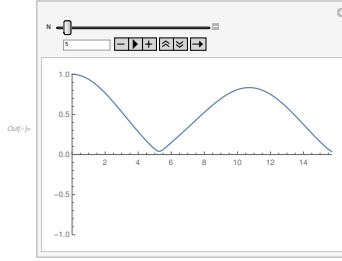
(a) Ordinato N=1



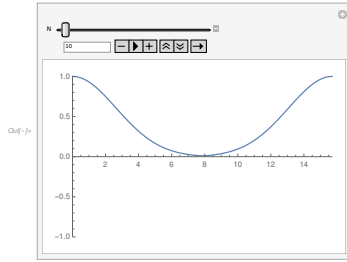
(b) Disordinato N=1



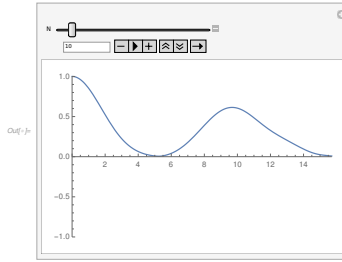
(c) Ordinato N=5



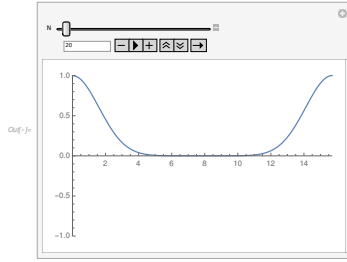
(d) Disordinato N=5



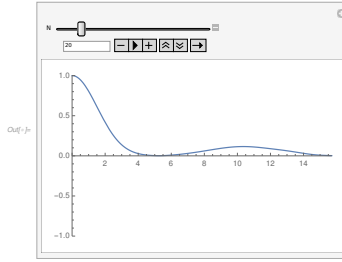
(e) Ordinato N=10



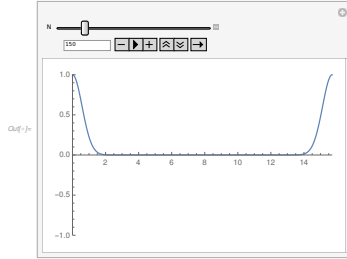
(f) Disordinato N=10



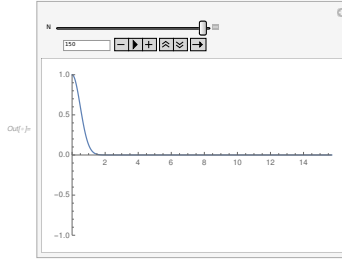
(g) Ordinato N=20



(h) Disordinato N=20

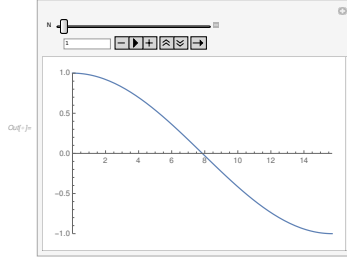


(i) Ordinato N=150

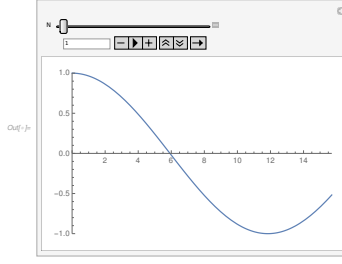


(j) Disordinato N=150

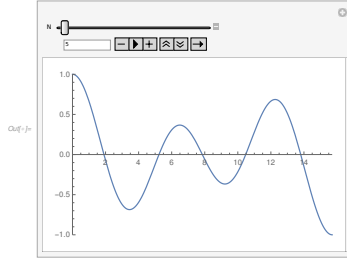
Tabella 3: Andamenti di $|c(t)|^2$ nel caso Disordinato $g_k \in (0, 0.2)$ (a sinistra) ed Ordinato $g_k = 0.1$ (a destra) al variare di N , nell'intervallo $t \in (0, 5\pi)$.



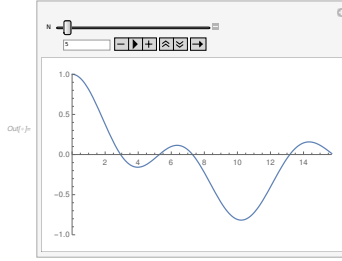
(a) Ordinato N=1



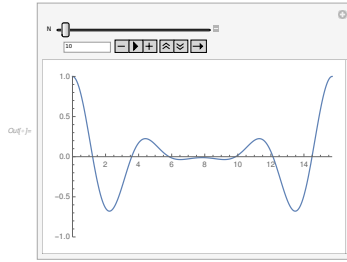
(b) Disordinato N=1



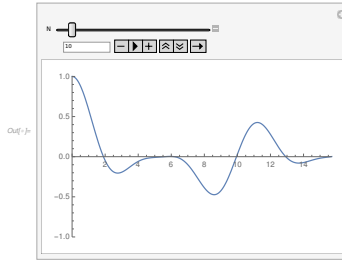
(c) Ordinato N=5



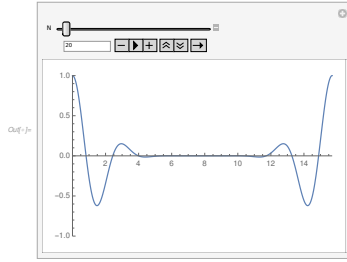
(d) Disordinato N=5



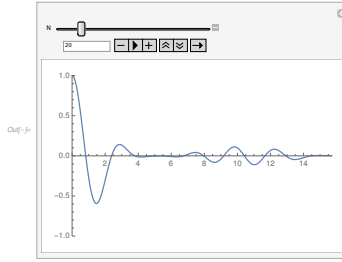
(e) Ordinato N=10



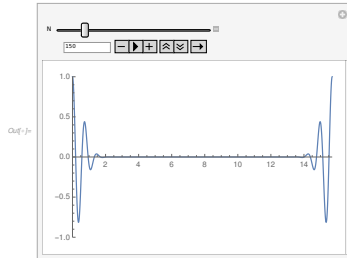
(f) Disordinato N=10



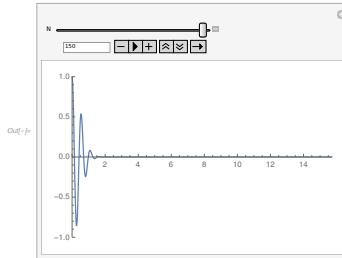
(g) Ordinato N=20



(h) Disordinato N=20

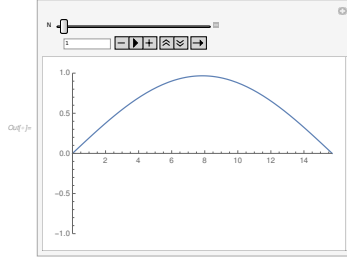


(i) Ordinato N=150

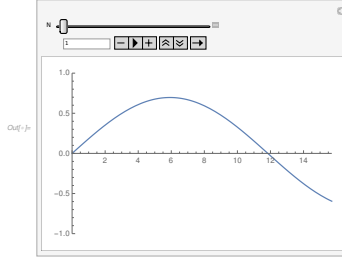


(j) Disordinato N=150

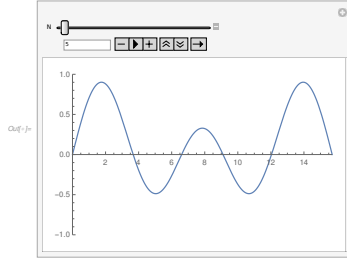
Tabella 4: Andamenti di $\text{Re}(c(t))$ nel caso Disordinato $g_k \in (0, 0.2)$ (a sinistra) ed Ordinato $g_k = 0.1$ (a destra) al variare di N .



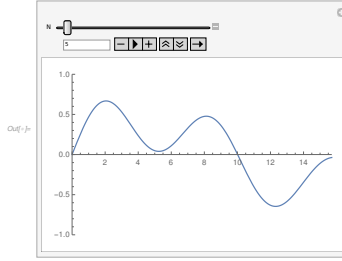
(a) Ordinato $N=1$



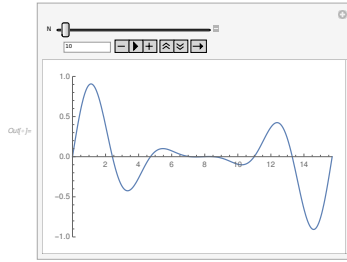
(b) Disordinato $N=1$



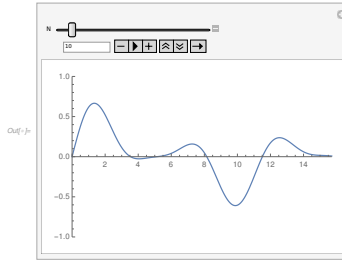
(c) Ordinato $N=5$



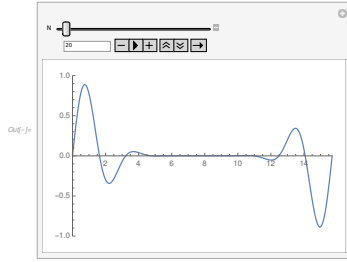
(d) Disordinato $N=5$



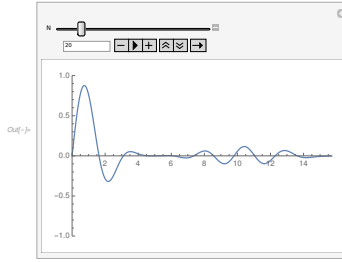
(e) Ordinato $N=10$



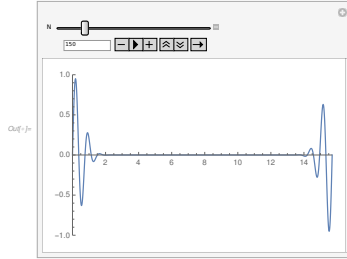
(f) Disordinato $N=10$



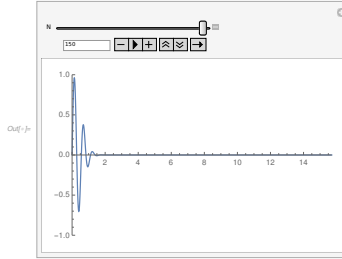
(g) Ordinato $N=20$



(h) Disordinato $N=20$



(i) Ordinato $N=150$



(j) Disordinato $N=150$

Tabella 5: Andamenti di $\text{Im}(c(t))$ nel caso Disordinato $g_k \in (0, 0.2)$ (a sinistra) ed Ordinato $g_k = 0.1$ (a destra) al variare di N .