$\boxed{\text{PVM}}$ → Projection-valued measures

$\{|\phi_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$$

$|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\phi_i\rangle$ ← stati puri

probabilità di ignoranza di ogni stato puro - i.e. è la probabilità statistica!

$\mathrm{Tr}[\hat{\rho}] = 1$ $\quad \hat{P}_i = |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ proiettore nello stato i-esimo

$\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\hat{P}_i] = |\langle\Psi|\phi_i\rangle|^2$ per uno solo stato puro

$= \sum_j p_j |\langle\Psi_j|\phi_i\rangle|^2$ in generale

Probabilità di stare nello stato i-esimo

Nota no random phase approximation! Ma da dove vengono stati e proiettori? Identifico $|\Psi\rangle$ con $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \hat{\rho}$ come stati. Cos'è uno stato?

$\boxed{\text{Assiomi}}$ Classica → Kolmogorov

1) La struttura delle fasi è una σ-Algebra isomorfa alla σ-A di Borel dello spazio delle fasi

è una topologia "allargata"

la più piccola che contiene la topologia di $\Omega = T^*Q$

(fasi $\overset{iso}{\longleftrightarrow}$ sottinsiemi di Ω ⟷ operatori t.c. $[\cdot,\cdot]=0$.)

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ insieme parti
- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$
- $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$
- $A^c \in \mathcal{A}$ ← intersezione infinita De Morgan

2) Uno stato* è una misura di probabilità su $\mathcal{A}$ t.c.

$$\begin{cases} \mu : \mathcal{A} \to [0,1] \\ \mu(\Omega) = 1 \\ \mu(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_i \mu(A_i) \quad \text{disgiunti} \end{cases}$$

stati: sharp $\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x\in A \\ 0 & x\notin A \end{cases}$; non μ generica tipo Gibbs

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ spazio di probabilità
$\mu: \mathcal{A} \to [0,1]$ misurabile
$\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$

3) In MQ sarebbe collasso, ma qui le cose dopo la misura restano come stavano

4) Definisco un'osservabile $X: \Omega \to \mathbb{R} \mid X \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow$ è misurabile ossia manda misurabili in misurabili e posso così costruire misure indotte, da cui con Radon-Nikodym ho densità di Prob.

Data misurabilità, data σ-Algebra su $\mathbb{R}$, la loro controimmagine è una sotto σ-Algebra di $\mathcal{A}$ → sottoinsieme di frasi!

Ad esempio $I = [a, b] \in \mathbb{R} \xrightarrow{\underline{X}^{-1}} A_I$ e la mia frase è "la misura di osservabile $\underline{X}$ cade in I" e la probabilità che questa sia vera è $\mu(A_I)$. L'assioma mi fa costruire le frasi che riguardano un'osservabile e con quale probabilità sono vere.

Misura indotta $\mu_X : \beta(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ (BOREL)

$I \longmapsto \mu_{\underline{X}}(I) := \mu \circ \underline{X}^{-1}(I)$ $\quad \mu(A_I) = \mu_X(I)$

$\mu(A_I) = \int_{\omega \in A_I} d\mu(\omega) = \int_{x \in I} d\mu \circ \underline{X}^{-1}(x)$ con $x = \underline{X}(\omega)$ è abuso di notazione

$\{x \in \mathbb{R} \mid x = \underline{X}(\omega) \text{ e } \omega \in A_I\}$

teorema RN $\Rightarrow \exists\, \ell_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\int_{x \in I} \ell_x(x)\, d^N x$ dove $d^N x$ è $d\mathcal{L}^N(x)$ misura di Lebegue

Nota $\int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mathcal{L}^N = \int_{x \in \mathbb{R}^N} f(x)\, d\mathcal{L}^N(x)$ e nota non vale per $d\mu = d\delta_x$

$\delta_\omega(A_I) = \int_{A_I} d\delta_\omega = \int_{\omega' \in A_I} d\delta_\omega(\omega') = \int_{x \in I} d\delta_\omega \circ \underline{X}^{-1}(x) \equiv \int_I d\delta_{\underline{X}}$ fissato ω

Tramite teoria dell'integrazione di funzioni semplici (a gradini) $\mathcal{S}$

$f \in \mathcal{S}(\Omega) = \sum_i c_i \chi_{A_i}$ e $\int_\Omega f\, d\mu = \sum_i c_i \mu(A_i)$ $\quad \chi_A$ funzione caratteristica

Funzioni semplici sono dense in funzioni misurabili e possono essere usate per approssimare. Operatori uniformemente continui su insiemi densi in altri, garantiscono l'esistenza di un'unica estensione dell'operatore su altri.

Esempio overkill: exp su $\mathbb{Q}$ → exp su $\mathbb{R}$ || Denso ≡ ∃ successione che in $\lim_{n \to +\infty}$ converge

Teorema Ponte !!!

Esempio scemo

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

$\{\text{Testa}, \text{Croce}\}$ $\quad \emptyset, \{T\}, \{C\}, \{T, C\}$

Assiomi quantistici

1) Le frasi quantistiche sono un reticolo ($\to \mathcal{B}(H)$) ortocomplementato e σ-completo di proiettori ortogonali su uno spazio di Hilbert H.

$P : H \to H \quad P^2 = P^\dagger = P$ (frasi $\overset{\text{iso}}{\longleftrightarrow}$ P e se $[P_i, P_j] \neq 0$ non c'è $\overset{\text{or}}{\&}$)

$P \in \mathcal{B}(H) \subset B(H)$ lineari e continui operatori (unica differenza con σ-Algebra e $\Rightarrow$ Heisenberg Bell)

2) Uno stato è una funzione $\hat{\rho} := \mathcal{B}(H) \to [0,1]$

$\hat{\rho}(\mathbb{I}d) = 1$; $\hat{\rho}(\sum_i P_i) \leq \sum_i \hat{\rho}(P_i)$ (tipo misura classica)

Lo stato mi dice quanto è vera una frase! ⊛

Teorema di Gleason $\to$ dato $\hat{\rho}$ $\exists! \, \rho : H \to H$ di classe traccia e ≥ 0 con $\mathrm{Tr}[\rho] = 1$ | $\hat{\rho}(P) = \mathrm{Tr}[\rho P]$. Vale solo per $n \geq 3$ con $\dim H = n$ (complesso)

Quindi per sistemi a due livelli non vale e li includiamo a mano definendo come stato ρ e la probabilità come $\mathrm{Tr}[\rho P]$.

3) Dopo la misura lo stato diventa $P \circ \rho \circ P / \mathrm{Tr}[P \circ \rho \circ P]$ (misura sperimentale)

4) Un'osservabile quantistico è una PVM, ossia (per gradi)

Dato spazio topologico (X, τ) e spazio di Hilbert H, una X-PVM su H è $\tilde{P} : \mathcal{A} \to B(H)$ con $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\tau)$ Borel σ-Algebra su topologia τ.
Prende $A \in \mathcal{B}(\tau) \mapsto \tilde{P}(A)$ operatore. Proprietà:

$$\begin{cases} \tilde{P}(X) = \mathbb{I}d \\ \tilde{P}(A) \geq 0 \;\; \forall A \in \mathcal{A} \\ \tilde{P}(A) \circ \tilde{P}(B) = \tilde{P}(A \cap B) \\ \tilde{P}(\cup_i A_i) = \sum_i \tilde{P}(A_i) \end{cases}$$

sono proiettori

strong convergence

Ora abbiamo definito una cosa come μ ma esce un operatore. Definiamo integrale in d'operatore

$\int_X f \, dP$ f approssimata con funzioni simplici $s \in S$ e

$\int_X s \, dP = \sum_i c_i \tilde{P}(A_i)$ ora viene il vero assioma 4)

Una osservabile quantistica è un operatore autoaggiunto su uno spazio H, a cui è univocamente associata una $\mathbb{R}$-PVM grazie al teorema spettrale!

L'immagine non è più $B(H)$, ma sono proiettori!
$\tilde{P}(A \cap A) = \tilde{P}(A) = \tilde{P}(A)^2$

Il teorema spettrale:

sia $\underline{X}: D_{\underline{X}} \subset H \to H$ non necessariamente limitato ma autoaggiunto e H non necessariamente separabile e complesso.

$\Rightarrow \exists!\ \mathbb{R}$-PVM $\tilde{\underline{P}}^{(\underline{X})} \mid \underline{X} = \int_{\lambda \in \text{Spettro}(\underline{X})} \lambda \, d\tilde{\underline{P}}^{(\underline{X})}(\lambda) \left(= \int_{\mathbb{R}} x \, |x\rangle\langle x| \right)$ — es. $\underline{X}$ posizione

$\boxed{\text{Quindi la } \mathbb{R}\text{-PVM } \tilde{\underline{P}}^{(\underline{X})} \text{ si prende un intervallo e mi dà un operatore} \to \text{proiettore} \to \text{forse } \tilde{\underline{P}}^{(\underline{X})}(\underline{I}) = \underline{P} \text{ forse tipo "la misura di } \underline{X} \text{ cade in } \underline{I}\text{". Da cui } \hat{\rho}(\underline{P}) = \mathrm{Tr}[\rho \underline{P}] \to [0,1] \circledast}$

Teorema

Dato stato puro $\rho = (\psi, \cdot)\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ probabilità per sempio di stare in posizione $\in I$ è $\int_I |\psi(x)|^2 dx$. Dimostriamolo:

Operatore posizione $\underline{X}$ definito in $H = L^2(\mathbb{R})$ e $D_x = \{ f \in H \mid \int_{\mathbb{R}} |x f(x)|^2 dx < +\infty \}$ e quindi $f \mapsto \underline{X}(f)$ e $\underline{X}(f)(x) = x f(x)$. Dimostriamo che è autoaggiunto.

Per spettrale $\exists!\ \mathbb{R}$-PVM per $\underline{X} \to \tilde{\underline{P}}^{(\underline{X})}: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(H)$, $I \mapsto \underline{P}^{(\underline{X})}(I)$ e parto con (supponiamo)

$\underline{P}^{(x)}(I)(f) \equiv \chi_I \cdot f$. Verifichiamo le proprietà di PVM. Poi vedo

$\left(\int_{\mathbb{R}} s(\lambda) d\underline{P}^{(x)}(\lambda)\right)(f) = \left(\sum_j c_j \underline{P}^{(x)}(I_j)\right)(f) = \sum_j c_j \chi_{I_j} \cdot f = s \cdot f$ $\quad (s \in S)$

Prendendo $s = \mathbb{I}d$ ho $\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\underline{P}^{(x)}(\lambda)\right)(f)(x) = x f(x) = \underline{X}(f)(x)$ ritrovo $\underline{X}$

$$\boxed{\begin{aligned} \Pr_{\underline{X}}(I) &= \mathrm{Tr}[\rho \underline{P}^{(x)}(I)] = (\psi | \underline{P}^{(\underline{X})}(I)(\psi)) = \int_{\mathbb{R}} \psi^*(x) \left(\underline{P}^{(\underline{X})}(I)(\psi)\right)(x)\, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi^*(x) \chi_I(x) \psi(x)\, dx = \int_I |\psi(x)|^2 dx \quad \circledast \text{ inoltre} \end{aligned}}$$

Ho ottenuto quindi una misura di probabilità su $\mathbb{R}$. La POVM è quella che mi dà la misura con le ipotesi minime ma perdo spettrale hp. 3 di PVM e strong diventa weak convergence in hp. 4. La Positive Operator Valued measure si ottiene uguale considerando un set di osservabili $\{F_i\}$ t.c. $\sum_i F_i = \mathbb{1}$ (Diciamo così). Infine,

$\circledast$ $\langle \underline{X} \rangle = \mathrm{Tr}[\rho \underline{X}] = (\psi, \underline{X}(\psi)) = \hat{\rho}\left(\int \lambda \, d\underline{P}^{X}(\lambda)\right) = \langle \psi | \left(\int dx \, x \, |x\rangle\langle x| \right) | \psi \rangle$

Appendix: Hermitian vs Self-adjoit

$X : \check{D}_x \to \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx) \mid D_x = \{ f \in L^2(\mathbb{R}, dx) \mid \int_{\mathbb{R}} |x f(x)|^2 dx < +\infty \}$

$(*)\ (f, Ag) = (A^* f, g) \quad g \in D_A \quad f \in D_{A^*}$

FINITO DIMENSIONALE $\to$ operatori limitati $\to$ $D_A = D_{A^*}$ e Hermitiano = Autoagg.

INFINITO DIMENSIONALE NON È SCONTATO

$A : D_A \to \mathcal{H} \mid (f, Ag)_{L^2} = (Af, g)_{L^2} \quad \forall f, g \in D_A$ m.b. $D_A \subset D_{A^*}$ [Hermitiano]

$A^* : D_{A^*} \to \mathcal{H} \mid A^* = A$ e $D_A = D_{A^*}$ [autoaggiunto]

nota $D_{A^*} = \{ f \in L^2 \mid \exists\, \eta_{f,A} \in L^2 \mid (\eta, g) = (f, Ag) \ \forall g \in D_A \}$

$A = -i\hbar \partial_x \quad \int_{\mathbb{R}} \eta g \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(-i\hbar\partial_x) g \, dx$ se η è derivabile $\in D_A$, altrimenti se non è derivabile, ma soddisfa la relazione $(*)$ e quindi ci definisco derivata distribuzionale (nello specifico debole) nell'integrale.

Ciò definisce lo spazio di Sobolev $(H^1(\mathbb{R}))$. $D_{A^*} \neq D_A$

Torniamo a $X : f \mapsto xf$

- STEP 1 dimostriamo $\overline{D_x^{\mathcal{H}}} = \mathcal{H}$ (chiuso nella topologia di $\mathcal{H}$) $\quad \overline{C^\infty_{\text{compatto}}(\mathbb{R})}^{L^2} = L^2$

se dimostro $C^\infty_c \subset D_x \subset \mathcal{H}$ allora la chiusura $\Rightarrow \overline{D}_x = \mathcal{H}$ — se non fosse così

- STEP 2 dimostriamo che è Hermitiano
- STEP 3 dimostriamo domini uguali (x autoagg)

$(\eta, g) = (f, xg) \to \int_{\mathbb{R}} (\eta - xf) g(x) \, dx = 0 \quad \forall g \in D_x \Rightarrow \forall g \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ (lo contiene)

LEMMA DI DUBOIS-RAYMOND $\Rightarrow \eta - xf = 0$ q.o.

So che $D_x \subset D_{x^*}$ e devo dimostrare che $D_{x^*} \subset D_x$ ma $\eta \in L^2 \Rightarrow$

$xf \in L^2 \Rightarrow \int |xf|^2 dx < +\infty \Rightarrow f \in D_x$