



Simulazione MC del modello di Ising 2D

A. Caliendo, D. Cafasso

Università di Pisa,
Corso di metodi numerici,
Modulo 1 : [Link al Repository](#)

23 luglio 2023

Sommario

Nella presente relazione è riportato lo studio del modello di Ising classico bidimensionale mediante simulazione numerica. Implementando il metodo Monte-Carlo, si ricavano le grandezze caratteristiche del sistema e se ne analizza l'andamento intorno alla transizione di fase ferromagnetica. Si determinano gli esponenti critici e si verifica l'effetto di *finite-size scaling*.

Introduzione

Il modello di Ising è un modello teorico introdotto nell'ambito della meccanica statistica per descrivere le proprietà ferromagnetiche della materia. In generale, esso consiste in un reticolo d -dimensionale di spin interagenti, in cui le variabili di spin possono assumere valori $+1$ e -1 che corrispondono, rispettivamente, agli stati up e down. Il modello deve il nome al suo ideatore, il fisico Ernst Ising, che nel 1924 fornì una soluzione analitica nel caso unidimensionale. Nel 1944 Onsager formulò la soluzione analitica nel caso di spin su reticolo bidimensionale quadrato, in assenza di campi magnetici esterni e con condizioni al contorno periodiche. Dalla trattazione di Onsager emerge che il modello, a differenza del caso unidimensionale, prevede una transizione di fase in corrispondenza di una data temperatura, detta *temperatura critica* T_c , determinando il passaggio da una configurazione disordinata, *paramagnetica*, ad una ordinata, *ferromagnetica*. Conclusioni simili sono valide anche per sistemi di dimensioni maggiori di due. Conoscendo l'andamento teorico delle grandezze fisiche caratteristiche del modello intorno al punto critico, è possibile confrontarlo con quello ottenuto da simulazioni numeriche. Nella presente relazione si analizza la simulazione del modello di Ising $2d$ su reticolo quadrato in assenza di campo magnetico esterno, effettuata con metodo Monte-Carlo. Si osserva l'andamento della magnetizzazione M , della suscettività magnetica χ e del calore specifico C_v al variare di L , lunghezza del lato del reticolo, e di β , definito come $\beta = \frac{1}{k_b T}$, intorno alla transizione di fase. Dall'analisi è possibile osservare gli effetti relativi alle dimensioni finite del sistema e verificare la validità dell'ipotesi di scaling. Inoltre, si studia l'andamento del *Cumulante di Binder* C_B al variare di L e si ricavano gli esponenti critici.

Nel primo paragrafo della relazione sono descritti gli aspetti teorici del modello di Ising, con riferimento ai risultati analitici ottenuti da Onsager; il secondo paragrafo è dedicato al metodo Monte-Carlo e agli algoritmi numerici implementati; nel terzo paragrafo vengono presentati i risultati ottenuti dalla simulazione e confrontati con i dati teorici.

1 Teoria

Il modello di Ising consiste in un reticolo di dimensione d , i cui nodi sono delle variabili di spin a due stati. L'hamiltoniana H più generale del sistema è:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} s_i s_j - \sum_j h_j s_j . \quad (1)$$

Il primo termine rappresenta l'interazione tra gli spin del reticolo, con accoppiamento $J_{i,j}$; il range di interazione tra spin è generico e tipicamente si considerano interazioni tra spin primi vicini. Il secondo termine dell'hamiltoniana determina l'accoppiamento degli spin con il campo magnetico esterno, di intensità h_j . Si assume, per semplicità, che gli accoppiamenti $J_{i,j}$ e h_j siano costanti su tutto il reticolo. In questo modo l'hamiltoniana diventa:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h \sum_j s_j . \quad (2)$$

Dal primo termine si osserva che una coppia di spin paralleli dà contributo positivo alla somma, mentre spin antiparalleli danno contributo negativo. Il segno dell'accoppiamento J determina quindi la configurazione privilegiata del sistema; per $J > 0$ l'accoppiamento è detto *ferromagnetico* e la configurazione preferita è quella con spin allineati parallelamente; invece, per $J < 0$ l'accoppiamento è detto *antiferromagnetico* e la configurazione energeticamente favorevole è quella con spin antiparalleli.

Dalla Meccanica Statistica è noto che la probabilità che il sistema si trovi in una configurazione $\sigma = \{s_i\}$ è proporzionale a $e^{-\beta H[\sigma]}$. In assenza di campo magnetico esterno e considerando $J > 0$, l'hamiltoniana di Ising è costituita dal solo termine di interazione tra spin ed esibisce una simmetria per trasformazioni di parità. Ciò significa che a seguito di una trasformazione $s_i \mapsto -s_i \forall i$, ossia $\sigma \rightarrow -\sigma$, l'energia rimane invariata, $H[\sigma] = H[-\sigma]$, e le due configurazioni sono equiprobabili, $P[\sigma] = P[-\sigma]$. Come conseguenza della simmetria della distribuzione di probabilità, la magnetizzazione media del sistema $\langle M \rangle$ è nulla:

$$\langle M \rangle = \sum_{\sigma} P[\sigma] M[\sigma] = 0 \quad \text{in cui } M = \frac{1}{V} \sum_i s_i . \quad (3)$$

Questa simmetria, chiamata simmetria Z_2 , può essere spontaneamente rotta nel limite termodinamico per sistemi di dimensione $d > 1$ con una transizione di fase continua, che porta il sistema dalla fase *paramagnetica*, o disordinata, in cui gli spin hanno orientazione casuale, a quella *ferromagnetica*, o ordinata, in cui gli spin sono allineati con stessa orientazione. Il punto in cui si verifica la transizione è detto *punto critico*, in corrispondenza della *temperatura critica* T_c . Ciò che caratterizza la rottura spontanea di simmetria è la distribuzione di probabilità della magnetizzazione. Per sistemi di dimensione finita, nella fase disordinata essa è una gaussiana centrata in zero e tende ad una delta di Dirac nel limite termodinamico. Nella fase ordinata invece, la distribuzione è ancora simmetrica, ma ha due picchi in corrispondenza dei valori $\pm \overline{M}$, dati da

$$\overline{M} := \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{\sigma} P[\sigma; h] M[\sigma] . \quad (4)$$

Questo è il valore che assume la magnetizzazione media durante la transizione aggirando il punto critico - nel diagramma di fase - dal lato positivo del campo magnetico, identificando la fase in cui si trova il sistema. Da ora in avanti si parlerà di magnetizzazione media $\langle M \rangle$ riferendosi alla quantità \overline{M} , anche detta parametro d'ordine. Questa quantità è tuttavia difficile da ricavare ed è invece più semplice studiare il comportamento del sistema tramite il *Cumulante di Binder*

$$C_B := \frac{\langle M^4 \rangle}{\langle M^2 \rangle^2} . \quad (5)$$

Nel limite termodinamico, esso assume valore 1 nella fase ferromagnetica e 3 in quella paramagnetica. Anche il cumulante di Binder permette quindi di individuare la fase in cui si trova il sistema.

Un'altra quantità che caratterizza il comportamento del sistema è la lunghezza di correlazione ξ . Questa rappresenta la distanza tra siti del reticolo oltre la quale la correlazione tra le variabili di spin viene soppressa, secondo la relazione

$$\langle s_i, s_j \rangle \sim e^{-\frac{|i-j|}{\xi}} . \quad (6)$$

Intorno al punto critico T_c , questa diverge con un andamento a potenza e, secondo l'ipotesi di scaling, è l'unica lunghezza caratteristica del sistema, ossia: tutte le grandezze esprimibili come potenze di una lunghezza sono ad essa proporzionali con un esponente opportuno. Infatti, anche altre grandezze fisiche hanno un andamento a potenza in funzione della distanza dal punto critico, i.e. della temperatura ridotta $t := \frac{T-T_c}{T_c}$, descritto dai così detti *esponenti critici*. In particolare, considerando la lunghezza di correlazione ξ , la magnetizzazione media $\langle M \rangle$, la suscettività magnetica χ e il calore specifico C_v , valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \xi &\simeq |t|^{-\nu} , \\ \langle M \rangle &\simeq |t|^\beta \text{ per } T < T_c , \\ \chi &:= \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial h} \propto V(\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2) \simeq |t|^{-\gamma} , \\ C &:= \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial T} \propto V(\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2) \simeq |t|^{-\alpha} . \end{aligned} \quad (7)$$

Considerando l'ipotesi di scaling, è utile esprimere le grandezze precedenti in funzione della lunghezza di correlazione, eliminando quindi la dipendenza dalla temperatura ridotta t come

$$\begin{aligned} |t| &\sim \xi^{-\frac{1}{\nu}} , \\ \langle |M| \rangle &\sim \xi^{-\frac{\beta}{\nu}} , \\ \chi &\sim \xi^{\frac{\gamma}{\nu}} , \\ C_v &\sim \xi^{\frac{\alpha}{\nu}} . \end{aligned} \quad (8)$$

Il valore degli esponenti critici dipende dalla dimensionalità del sistema e nel caso bidimensionale essi sono noti dalla soluzione analitica di Onsager. Nello specifico, si ha

$$\nu = 1 , \quad \beta = \frac{1}{8} , \quad \gamma = \frac{7}{4} , \quad \alpha = 0 . \quad (9)$$

2 Procedure

Si descrivono le procedure utilizzate per lo studio del modello di Ising $2d$ svolto con simulazione numerica. In particolare, si analizza l'andamento dei valori medi di energia e magnetizzazione intorno al punto critico, ottenuti con metodo Monte-Carlo [2.1]. Il campione utilizzato per il calcolo delle medie viene generato con l'algoritmo Metropolis [2.2] e l'errore associato viene stimato utilizzando il metodo del blocking [2.3]. Da queste medie vengono ricavate la suscettività e il calore specifico tramite le relazioni (7), mentre l'errore viene stimato con il metodo del bootstrap con binning [2.4]. In maniera analoga si ricava anche il cumulante di Binder nelle due fasi e l'errore associato.

2.1 Monte Carlo

Il valor medio di una grandezza f è definito dalla relazione

$$\langle f \rangle = \int Dq \rho(q) f(q) , \quad (10)$$

in cui $q := \{q^1, \dots, q^k\}$ è un set di variabili stocastiche con distribuzione di probabilità $\rho(q)$. Il metodo Monte-Carlo prevede di stimare questo valor medio con la media campionaria

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i , \quad (11)$$

dove $f_i = f(q_i)$ e $\{q_i\}_{i=1, \dots, N}$ è un campione di variabili stocastiche estratto secondo la data distribuzione di probabilità. Se le estrazioni vengono effettuate in maniera indipendente, si può approssimare l'errore commesso come

$$\sigma_f = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}} = \sqrt{\frac{\bar{f}^2 - \bar{f}^2}{N-1}} , \quad (12)$$

ottenendo che la stima del valor medio cercato può essere scritta come

$$\langle f \rangle = \bar{f} \pm \sigma_f . \quad (13)$$

2.2 Metropolis

Un modo per campionare una distribuzione di probabilità è quello di implementare un algoritmo *markoviano*. Questo, tramite un processo stocastico di Markov, descrive l'evoluzione del sistema in termini di una variabile temporale discreta. La successione delle configurazioni così ottenuta definisce una *catena di Markov*. Per un algoritmo markoviano solo il presente stato del sistema determina l'evoluzione successiva.

Un esempio di algoritmo markoviano è il Metropolis-Hasting. Nel passaggio da uno stato a a uno stato b del sistema, il passo elementare della catena di Markov è:

- uno stato \tilde{b} viene scelto secondo una probabilità di transizione di prova $A_{\tilde{b},a}$;

- viene calcolato il rapporto $r = \frac{p_{\tilde{b}} A_{a,\tilde{b}}}{p_a A_{\tilde{b},a}}$ e si sceglie $b = \tilde{b}$ con probabilità r , o 1 se $r > 1$, altrimenti $b = a$.

L'ultimo step è detto step di accettazione: se \tilde{b} viene accettato, questo diventa lo stato finale; altrimenti, il sistema rimane nello stato a e il passo del Metropolis si considera effettuato. Si richiede che la matrice di transizione A sia simmetrica, ma la caratteristica di questo algoritmo è che l'unica cosa rilevante è saper calcolare il rapporto di probabilità r .

Per il modello di Ising $2d$, lo step elementare del Metropolis si traduce in: individuare con probabilità uniforme un sito i_0 del reticolo; provare ad invertirne lo spin, i.e. $s_{i_0} \rightarrow -s_{i_0}$; sottoporre la nuova configurazione di prova al test di accettazione. Si sottolinea che l'algoritmo agisce in maniera locale, modificando la configurazione uno spin alla volta e facilitando la scrittura del rapporto di probabilità.

2.3 Blocking

La tecnica del data blocking permette di ottenere una stima dell'errore statistico nel caso in cui i dati del campione siano correlati. Tale correlazione si verifica quando le estrazioni effettuate per campionare una data distribuzione di probabilità non sono indipendenti, come avviene con il Metropolis. Ciò significa che nel calcolo del valor medio di una grandezza f come $\langle f \rangle = \bar{f} \pm \sigma_f$, il valore σ_f dato come

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2, \quad (14)$$

fornisce una sottostima dell'errore statistico. Per correggere la valutazione di σ_f si costruisce un nuovo campione con le medie delle coppie di dati consecutivi nella catena di Markov,

$$f_i^{(1)} := \frac{f_{2i-1} + f_{2i}}{2}, \quad (15)$$

e se ne calcola la varianza,

$$\sigma_f^{(1)} = \frac{1}{N/2} \frac{1}{N/2-1} \sum_{i=1}^{N/2} (f_i^{(1)} - \bar{f})^2. \quad (16)$$

La procedura appena descritta si ripete iterativamente k volte, fino ad ottenere un campione di $N/2^k$ medie $f_i^{(k)}$, non correlate tra loro. Ciò avviene per un k dell'ordine del tempo di autocorrelazione τ , ossia della distanza massima tra due configurazioni nella catena di Markov affinché queste risultino correlate. Ci si aspetta che σ_f abbia un andamento crescente all'aumentare del numero di iterazioni, finché le variabili sono correlate, raggiungendo infine un valore limite che stima l'errore statistico associato alla grandezza f .

2.4 Bootstrap con binning

Nel caso in cui si è interessati a studiare un generico stimatore $F_N(q_1, \dots, q_N)$ sul campione finito $\{q_i\}_{i=1, \dots, N}$, una corretta stima dell'errore statistico si ottiene valutandone le fluttuazioni su un insieme di M campioni.

Generare molti campioni richiede un notevole sforzo numerico, per cui si ricorre a tecniche di resampling che permettono di creare campioni fittizi da uno stesso campione di partenza. Il bootstrap è un esempio di algoritmo che esegue questa procedura: costruisce un nuovo campione attraverso estrazioni da un set finito di dati distribuiti con probabilità $\rho(q)$. Ciò consente di ottenere dei campioni fittizi in maniera più efficiente rispetto al campionare la distribuzione direttamente. In assenza di correlazioni nel campione di partenza, il j -esimo campione $\{q_i^{(j)}\}_{i=1,\dots,N}$ si ricava estraendo random N interi, uniformemente distribuiti tra 1 e N , j_1, \dots, j_N , ed assegnando $q_i^{(j)} = q_{j_i}$, dove q_{j_i} è un elemento del campione di partenza. I campioni $q^{(j)} := \{q_i^{(j)}\}_{i=1,\dots,N}$ così ottenuti permettono di studiare le fluttuazioni dello stimatore $F_N(q^{(j)})$ e ottenere così una stima più precisa dell'errore. In particolare, la sua varianza σ_{F_N} si può esprimere come

$$\sigma_{F_N} \simeq \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (F_N^{(j)})^2 - \left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M F_N^{(j)}\right)^2}. \quad (17)$$

Se i dati del campione di partenza sono correlati - come avviene con il Metropolis - è necessario modificare la procedura di resampling in modo che il campione generato conservi lo stesso livello di correlazione: invece di selezionare in modo casuale singoli elementi dal campione originale, se ne considerano blocchi di lunghezza confrontabile con il tempo di autocorrelazione. In questo caso si parla di bootstrap con binning.

3 Analisi dei risultati

Per la simulazione del modello con condizioni periodiche al bordo, vengono eseguite 150000 misure delle osservabili di interesse ogni $10 \cdot V$ step del Metropolis, in cui $V = L^2$ ed L è la lunghezza del lato del reticolo. Le misure sono state eseguite al variare di β da 0.3600 a 0.4800 con passo 0.0050 e da 0.41525 a 0.44350 con passo 0.00050. La procedura viene ripetuta per L che va da 10 a 70 con passo 10. Per ogni lato e temperatura sono stati eseguiti $1000 \cdot V$ step del Metropolis prima di iniziare la raccolta dati per permettere al sistema di termalizzare. Nel caso $L > 30$ sono state effettuate altre 50000 misure per migliorare i risultati ottenuti. Gli errori sulle misure ottenute sono stati calcolati tramite il blocking, nel caso di energia e magnetizzazione, e tramite il bootstrap con binning nei casi restanti, utilizzando 150 fake sample di dimensione 150000 e con lunghezza di correlazione pari a 512.

Di seguito viene riportato l'andamento delle grandezze fisiche che caratterizzano il sistema, insieme ai relativi errori [3.1]. Vengono ricavati i valori di β_c e degli esponenti critici, e viene verificata l'ipotesi di finite size scaling [3.2]. Infine, viene analizzato l'andamento del cumulante di Binder per due valori di beta [3.3].

3.1 Principali quantità fisiche

Il comportamento del sistema durante la transizione di fase può essere caratterizzato dall'andamento del parametro d'ordine definito in equazione (4). La simulazione viene però eseguita a $h = 0$ e, in accordo con la relazione (3), una simulazione sufficientemente lunga porterebbe ad un valore nullo della magnetizzazione media anche per $\beta < \beta_c$. Si considera quindi come parametro d'ordine del sistema la quantità $\overline{M} := \langle |M| \rangle$; le due espressioni convergono nel limite termodinamico. Di nuovo, da ora in poi si parlerà della magnetizzazione media intendendo il parametro d'ordine del sistema.

Nei grafici a seguire sono riportati gli andamenti del parametro d'ordine \overline{M} , dell'energia media $\langle \epsilon \rangle$, della suscettività χ e del calore specifico C_v in funzione di β , per ogni valore di L . Gli errori associati a \overline{M} e $\langle \epsilon \rangle$ sono stati calcolati con il blocking, mentre per χ e C_v è stato utilizzato il bootstrap con binning. Si osserva come all'aumentare di L l'andamento di queste grandezze tende a quello teorizzato nel limite termodinamico. Per $L = 10, 20$, la discrepanza tra l'andamento osservato e quello atteso è molto marcata. Per $\beta > 0.43$ si iniziano ad avvertire gli effetti della transizione di fase, osservando una maggiore lunghezza di correlazione nei dati acquisiti, una maggiore difficoltà del sistema a termalizzare e fluttuazioni di più deviazioni standard - soprattutto per $L = 70$. Nonostante ciò, la quantità di misure acquisite sembra sufficiente per una buona descrizione del comportamento del sistema.

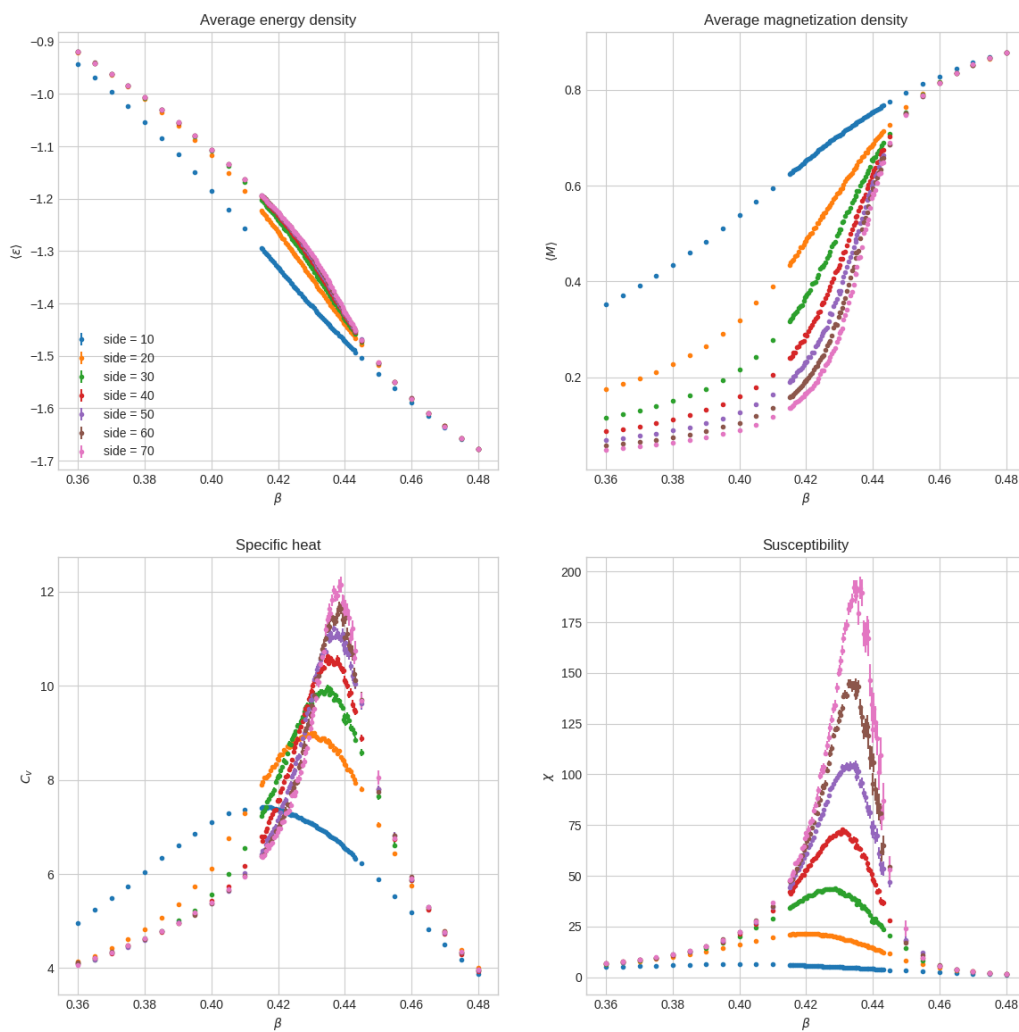


Figura 1: Da sinistra in senso orario: densità di energia media, magnetizzazione media, suscettività e calore specifico in funzione di beta.

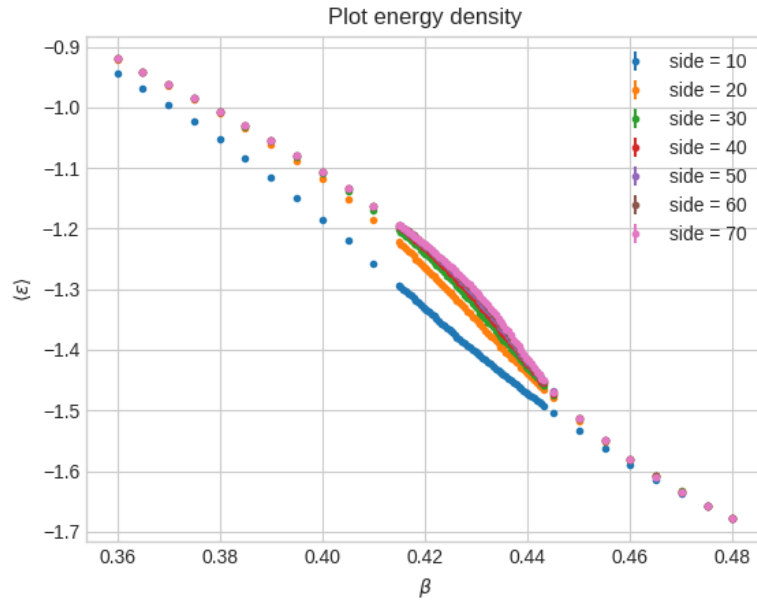


Figura 2: Densità di energia media in funzione di β .

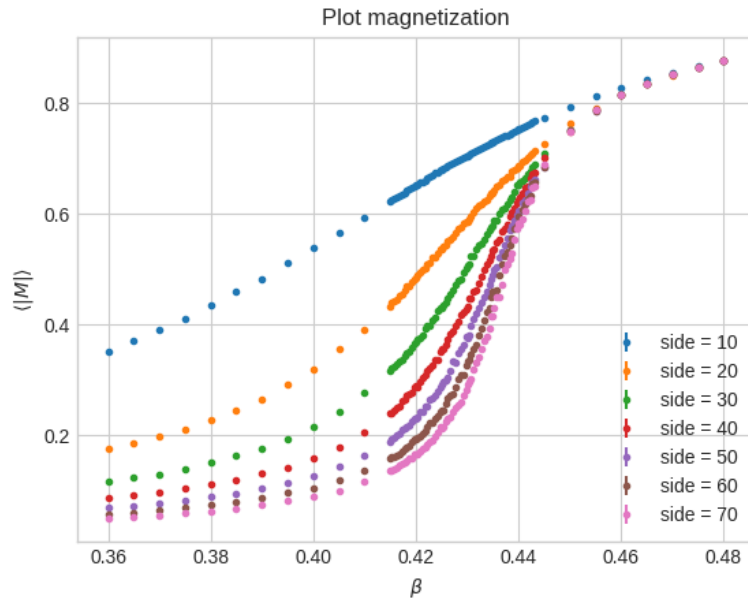


Figura 3: Magnetizzazione media in funzione di β .

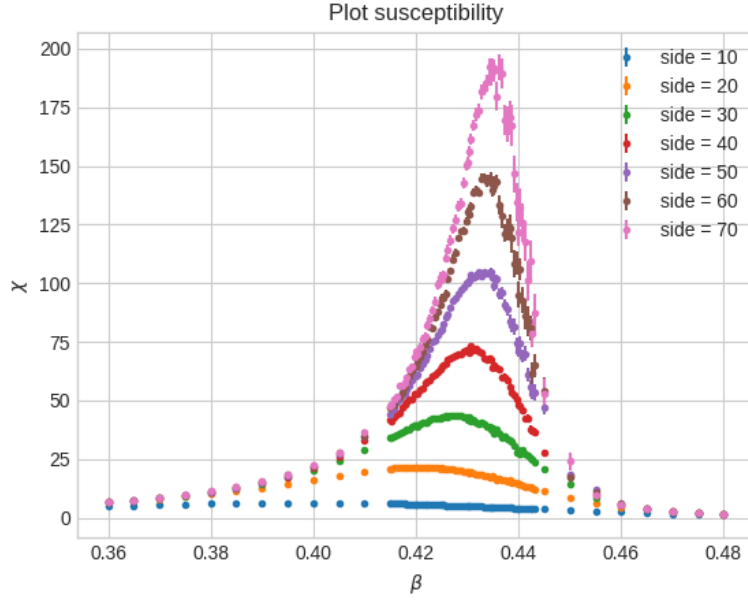


Figura 4: Suscettività in funzione di β .

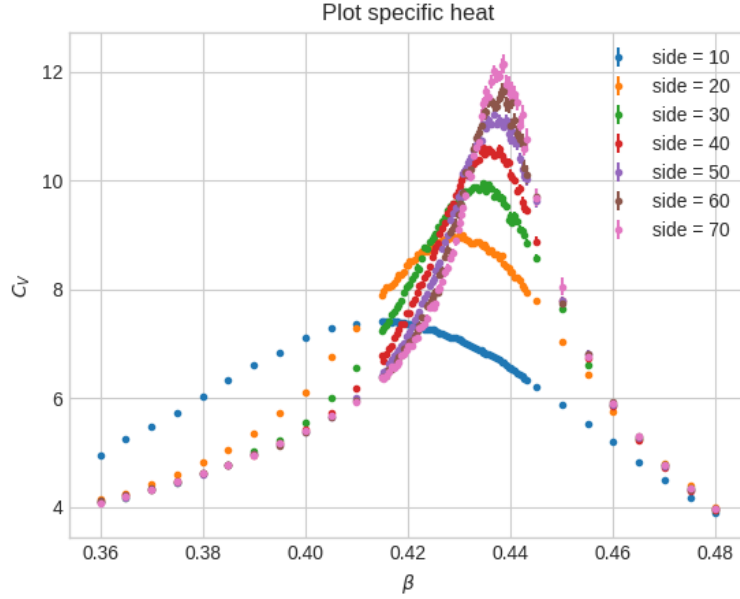


Figura 5: Calore specifico in funzione di β .

Analizzando l'andamento di χ , si nota che essa raggiunge un valore massimo χ_{max} che aumenta con le dimensioni del reticolo. Ciò si spiega considerando la prima delle relazioni in (8) insieme al fatto che la lunghezza di correlazione non diverge, ma raggiunge un valore $\xi_{eff} \sim L$. Questo effetto è detto *finite size scaling*. Un'ulteriore conseguenza della dimensione finita è lo spostamento del punto critico effettivo, definendo un punto pseudo-critico β_{pc} che all'aumentare di L tende a quello teorico.

3.2 Temperatura ed esponenti critici

Dalla prima delle relazioni in (8) si deduce che

$$(\beta - \beta_c) \sim t \sim \xi^{-\frac{1}{\nu}} . \quad (18)$$

La suscettività $\chi(L, \beta)$ può essere quindi riscritta come

$$\chi(L, \xi) = L^{\frac{\gamma}{\nu}} \tilde{\phi}(L, \xi) , \quad (19)$$

in cui $\tilde{\phi}(L, \xi)$ descrive l'andamento della suscettività intorno al valore massimo. Nel limite termodinamico, la lunghezza di correlazione ξ diverge intorno al punto critico; ciò vuol dire che il sistema perde memoria della sua struttura microscopica e l'unica quantità significativa è il rapporto L/ξ . Di conseguenza, la relazione precedente diventa

$$\chi(L, \xi) = L^{\frac{\gamma}{\nu}} \tilde{\phi}(L/\xi) = L^{\frac{\gamma}{\nu}} \tilde{\chi}((\beta - \beta_c)L^{\frac{1}{\nu}}) . \quad (20)$$

Si ricavano inoltre relazioni analoghe per la magnetizzazione e il calore specifico, come

$$\langle M \rangle = L^{-\frac{\beta}{\nu}} \tilde{M}((\beta - \beta_c)L^{\frac{1}{\nu}}) , \quad (21)$$

$$C_v = L^{\frac{\alpha}{\nu}} \tilde{C}((\beta - \beta_c)L^{\frac{1}{\nu}}) . \quad (22)$$

Da queste relazioni, dette relazioni di scaling, si possono ricavare tramite un fit i valori del punto critico e di tutti gli esponenti critici, α escluso.

Per iniziare si effettua un fit parabolico delle χ in funzione di β per ogni L , determinando i valori dei massimi χ_{max} e i β_{pc} corrispondenti. Da questi si ricavano il punto critico β_c e l'esponente critico ν . Considerando infatti l'equazione (20) valutata nel massimo, e quindi in corrispondenza di $\beta = \beta_{pc}(L)$, si ottiene la relazione

$$x_{max} = (\beta_{pc}(L) - \beta_c)L^{\frac{1}{\nu}} , \quad (23)$$

da cui

$$\beta_{pc}(L) = \beta_c + x_{max}L^{-\frac{1}{\nu}} . \quad (24)$$

Effettuando il fit di $\beta_{pc}(L)$ con la funzione $f(L) = c + aL^{-1/b}$ si ricavano dunque β_c e l'esponente critico ν . I risultati del fit sono riportati in figura 6 e nella tabella a seguire.

ν	β_c	χ_{rid}^2
0.95 ± 0.08	0.4399 ± 0.0009	2.845

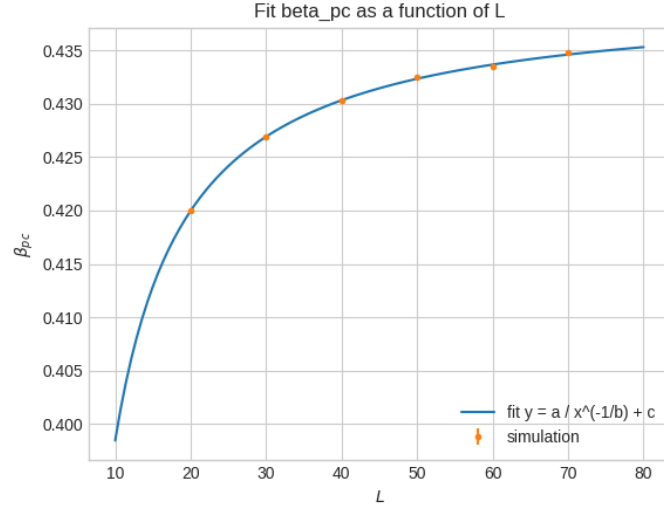


Figura 6: Fit dei valori di β_{pc} al variare di L .

Dalla relazione

$$\chi_{max} \sim \xi_{eff}^{\gamma/\nu} \sim L^{\gamma/\nu}, \quad (25)$$

il fit di $\chi_{max}(L)$ in scala logaritmica con la funzione $f(L) = a \log(L) + c$ restituisce il valore del rapporto γ/ν . I risultati del fit sono riportati in figura 7 e nella tabella a seguire.

a	c	χ^2_{rid}
1.7279 ± 0.0032	-2.110 ± 0.010	2.152

Il valore stimato per l'esponente critico γ è:

$$\gamma = 1.64 \pm 0.12$$

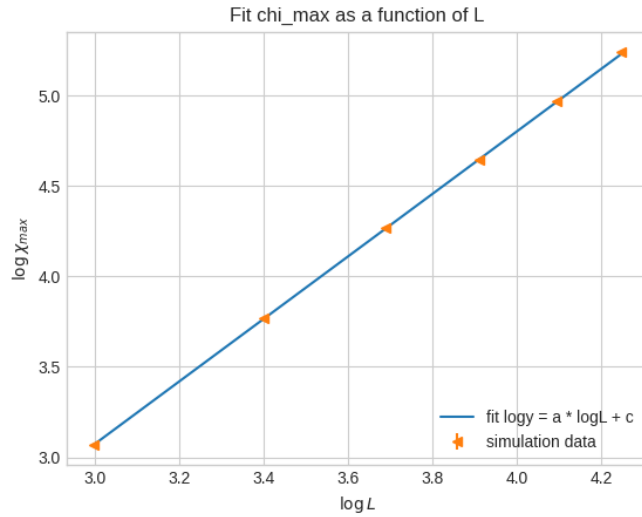


Figura 7: Fit dei valori di $\log(\chi_{max})$ in funzione di $\log(L)$.

Dalla relazione

$$\langle M \rangle|_{\beta_{pc}} \sim L^{-\beta/\nu}, \quad (26)$$

il fit di $\langle M \rangle|_{\beta_{pc}}(L)$ in scala logaritmica con la funzione $f(L) = a \log(L) + c$ restituisce il valore del rapporto β/ν . I risultati del fit sono riportati in figura 8 e nella tabella a seguire.

a	c	χ^2_{rid}
-0.1315 ± 0.0023	0.018 ± 0.008	0.56

Il valore stimato per l'esponente critico β è:

$$\beta = 0.125 \pm 0.010$$

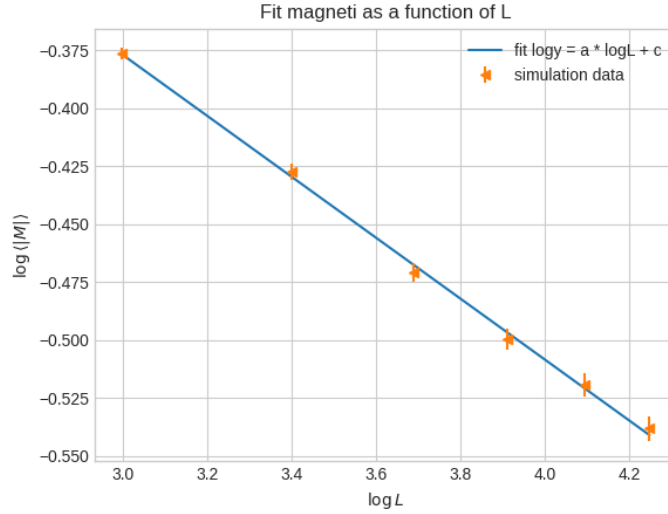


Figura 8: Fit dei valori di $\log(\langle M \rangle)|_{\beta_{pc}}$ in funzione di $\log(L)$.

Una volta determinati gli esponenti critici è possibile verificare che le grandezze soddisfano l'ipotesi di scaling, alla base delle equazioni (20), (21), (22). Nel caso del calore specifico, si osserva che $\alpha = 0$ e il contributo 'correttivo' del tipo $\log(L)$ diventa dominante. In particolare, in maniera analoga a quanto visto per la suscettività, è possibile ricavare i valori dei massimi del calore specifico C_v^{max} ed effettuare un fit con la funzione $f(L) = a \log(L) + c$, che diventa la nuova relazione di scaling. Pertanto, si considera l'andamento delle quantità

$$\chi/L^{\gamma/\nu}, \quad \langle M \rangle/L^{-\beta/\nu}, \quad C_v/(1 + \alpha \log(L)),$$

in funzione di $(\beta - \beta_c)L^{\frac{1}{\nu}}$, come illustrato nei grafici seguenti.

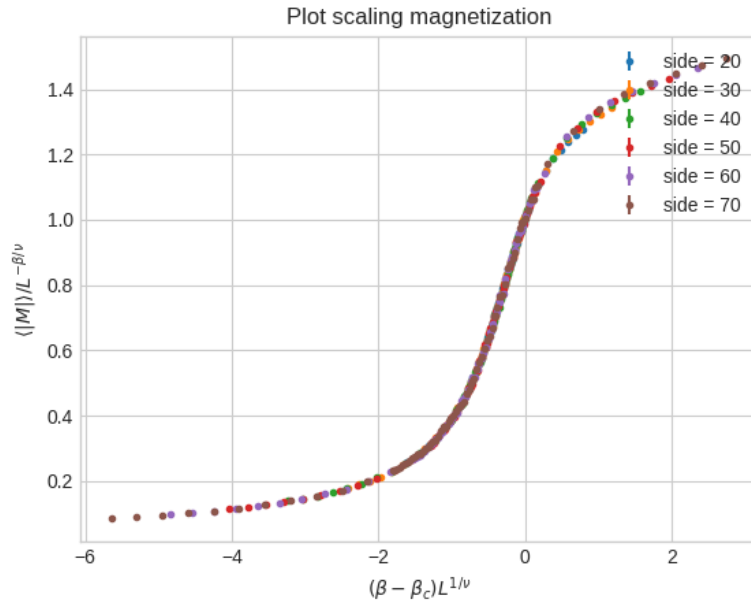


Figura 9: Grafico dell'equazione di scala della magnetizzazione.

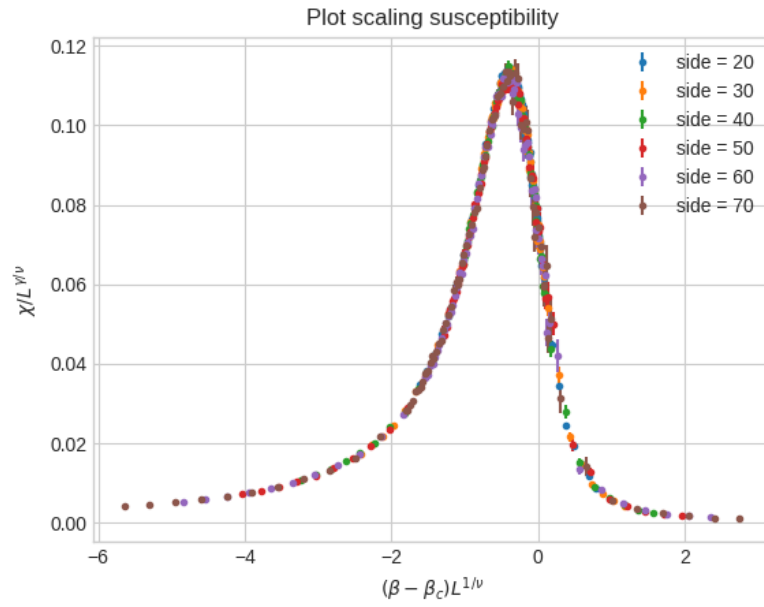


Figura 10: Grafico dell'equazione di scala della suscettività magnetica.

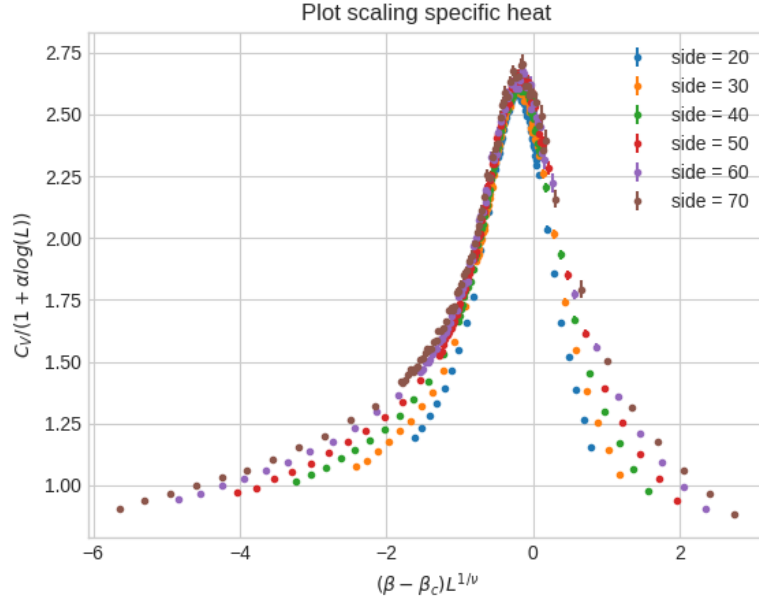


Figura 11: Grafico dell'equazione di scala del calore specifico.

I grafici ottenuti mostrano come l'andamento delle grandezze - riscalate in modo opportuno - non dipenda dalla dimensione del sistema, e confermando dunque l'universalità del comportamento al punto critico.

3.3 Cumulante di Binder

Sono stati osservati gli andamenti del cumulante di Binder per $\beta = 0.36$ e $\beta = 0.48$ al variare di L . Per $\beta = 0.48$, sono state prese ulteriori misure con $L = 80, 90, 150$. I dati sono stati fittati utilizzando la funzione $f(L) = a/L^2 + c$ e i risultati dei fit sono mostrati nelle figure 12 e 13. Osservando l'andamento del cumulante nel limite termodinamico, si nota che esso converge ai valori teorici attesi per la fase ferromagnetica e paramagnetica ed è compatibile con essi entro gli errori statistici.

I valori ricavati dal fit per $\beta = 0.36$:

a	c	χ^2_{rid}
-123 ± 12	2.9945 ± 0.0079	0.753

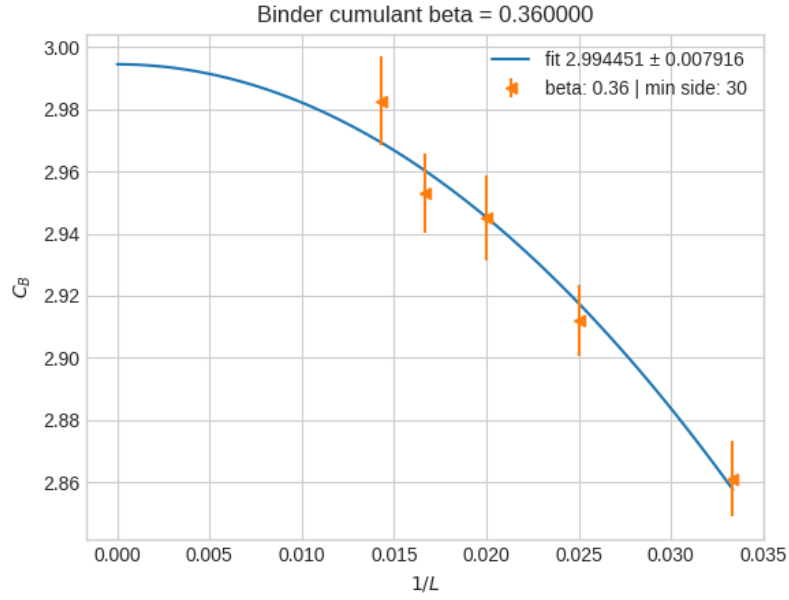


Figura 12: Andamento del cumulante di Binder per $\beta = 0.36$ in funzione di $1/L$.

I dati ottenuti dal fit per $\beta = 0.48$:

a	c	χ^2_{rid}
8.34 ± 0.08	1.000009 ± 0.000007	2.577

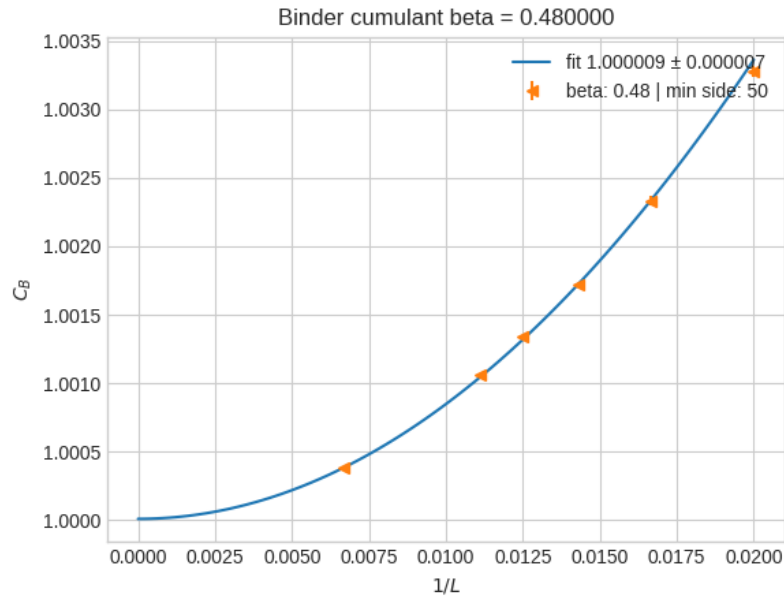


Figura 13: Andamento del cumulante di Binder per $\beta = 0.48$ in funzione di $1/L$.