Universidad de La Laguna

Grado en Ingeniería Informática
Computabilidad y Algoritmia
Curso 2024-2025

Hoja de problemas

Tema 3: Lenguajes y gramáticas independientes del contexto

1. Describir los lenguajes generados por las siguientes gramáticas:

   a) $S \rightarrow XYX$
   $X \rightarrow aX|bX|\varepsilon$
   $Y \rightarrow bbb$

   b) $S \rightarrow aX$
   $X \rightarrow aX|bX|\varepsilon$

2. Obtener a partir de la gramática regular $G \equiv (\{S, B\}, \{1, 0\}, P, S)$ con las producciones $P = \{S \rightarrow 110B, B \rightarrow 1B, B \rightarrow 0B, B \rightarrow \varepsilon\}$ el DFA que reconoce el lenguaje generado por esta gramática.

3. Para el lenguaje representado por la expresión regular `(01)*0` obtener:

   a) Una gramática lineal por la derecha que genere L.

   b) Una gramática lineal por la izquierda que genere L.

   c) El DFA mínimo que reconoce L.

4. Proponer si es posible una gramática lineal por la derecha o una gramática independiente del contexto que genere el lenguaje $L \subset \{a, b, c\}^*$ tal que:

   a) $w \in L \Leftrightarrow w$ no contiene dos símbolos "a" consecutivos.

   b) $w \in L \Leftrightarrow w$ contiene dos símbolos "b" consecutivos.

5. La gramática G independiente del contexto dada por:

$$S \rightarrow aSb|aSa|bSa|bSb|\varepsilon$$

   no es una gramática regular, aunque $L(G)$ es un lenguaje regular. Obtener una gramática regular G' tal que $L(G') = L(G)$. Obtener también un autómata finito y una expresión regular para $L(G')$.

6. Construir un autómata finito para la gramática regular siguiente:
$S \to abA|B|baB|\varepsilon$
$A \to bS|b$
$B \to aS$

7. Obtener una gramática independiente del contexto para cada uno de los siguientes lenguajes independientes del contexto:

   a) $\{a^m b^n \mid m \geq n\}$
   b) $\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ tiene el doble de aes que de $bes\}$
   c) $\{a^m b^n c^p d^q \mid m+n \geq p+q\}$

8. Demostrar que los siguientes lenguajes no son independientes del contexto:

   a) $L_1 = \{a^p \mid p \text{ es primo}\}$
   b) $L_2 = \{a^{n^2} \mid n > 1\}$

9. Determinar si los siguientes lenguajes son regulares o independientes del contexto. Justificar las respuestas.

   a) $\{0^i b^j \mid i = 2j \text{ ó } 2i = j\}$
   b) $\{ww^{-1} \mid w \in \{0,1\}^*\}$
   c) $\{0^i 1^j 2^k \mid i = j \text{ ó } j = k\}$

10. Demostrar que la siguiente gramática es ambigua:
$S \to bA|aB$
$A \to a|aS|bAA$
$B \to b|bS|aBB$

11. Determinar si las cadenas $w_1 = aabaab$ y $w_2 = bbaaa$ son generadas por la siguiente gramática independiente del contexto:
$S \to aAB|aBA|\varepsilon$
$A \to aS|bAAA$
$B \to aABB|aBAB|aBBA|bS$

12. Convertir las siguientes gramáticas a forma normal de Chomsky:

    a) $S \rightarrow CBa|D$
    $A \rightarrow bbC$
    $B \rightarrow Sc|ddd$
    $C \rightarrow eA|f|C$
    $D \rightarrow E|SABC$
    $E \rightarrow gh$

    b) $S \rightarrow aAb|cHB|CH$
    $A \rightarrow dBH|eeC$
    $B \rightarrow ff|D$
    $C \rightarrow gFB|ah$
    $D \rightarrow i$
    $E \rightarrow jF$
    $F \rightarrow dcGGG|cF$
    $G \rightarrow kF$
    $H \rightarrow Hlm$

13. Sea $L = \{(ab)^n\ c^{2m-1}\}$, sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$, con $n \geq 0$ y $m \geq 1$

    a) Obtener una gramática independiente del contexto que genere el lenguaje L.

    b) Partiendo de la gramática obtenida (y no de la propia definición del lenguaje), demuestre si las cadenas $w_1 = ababccc$ y $w_2 = abcc$ pertenecen o no al lenguaje.

    c) ¿Es L un lenguaje regular? Justifique su respuesta.

14. Sea $L = \{a^n\ c^r\ b^{r+s}\ c^s\ a^n\}$ sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ tal que $n \geq 0, r \geq 0$ y $s \geq 0$

    a) Obtener una gramática independiente del contexto que genere el lenguaje L.

    b) Partiendo de la gramática obtenida (y no de la propia definición del lenguaje), demuestre si las cadenas $w_1 = accbbbbbccca$ y $w_2 = acbbc$ pertenecen o no al lenguaje.

15. Sea $L = \{yxy$ tal que $|y| = 2, |yxy|$ es par, $x, y \in \{a, b\}^*\}$

    a) Obtener una gramática independiente del contexto que genere el lenguaje L.

    b) Partiendo de la gramática obtenida (y no de la propia definición del lenguaje), demuestre si las cadenas $w_1 = abbab$ y $w_2 = abbbaaab$ pertenecen o no al lenguaje.

    c) ¿Es L un lenguaje regular? Justifique su respuesta.

16. Considere el lenguaje $L = \{a^{3n}\ b^{5m}\ c^r\}$ sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ tal que $n,\ m \geq 0$ y donde $r = n$ o bien $r = m$

    a) Definir una gramática G con no más de 5 símbolos no terminales que genere L. Indicar si la gramática diseñada es regular y/o independiente del contexto.

    b) Simplificar la gramática eliminando las producciones vacías, las producciones unitarias y también los símbolos y/o producciones inútiles.

17. Considere el lenguaje $L \subset \{0, 1\}^*$ formado por todas las cadenas de longitud impar tales que el primer símbolo, el símbolo central y el último símbolo coinciden. Si L es independiente del contexto, especificar una gramática independiente del contexto con no más de 3 símbolos no terminales que lo genere. Si no lo es, demostrarlo.

18. Sea $P_5(x)$ el prefijo de x de longitud 5 si $|x| > 5$ o x si $|x| < 5$. Se define $P_5(L) = \{P_5(x) \mid x \in L\}$. ¿Es el conjunto de los lenguajes independientes del contexto cerrado bajo la operación P_5? Justificar la respuesta.

19. Considere la expresión regular siguiente:

$$r = (0^+1)^*\ 0\ (0^+1)^*\ 0\ (0^+1)^*$$

    a) Diseñar una gramática que genere $L(r)$.

    b) A partir de la expresión regular r o de la gramática obtenida en el apartado anterior, diseñar un autómata finito que reconozca $L(r)$.