UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Laurea Triennale in Matematica

Frazioni continue ed equazione di Pell

Supervisore:
Prof. Willem Adriaan De Graaf

Candidato:
Dario Maddaloni

a.a. 2020/21

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Le frazioni vengono introdotte nelle scuole come una quantità di parti uguali di un intero e assumono in questo senso un significato geometrico che sembra essere perfettamente rappresentativo del numero che abbiamo di fronte, come ad esempio un semplicissimo:
$$\frac{9}{7}$$
Se abbiamo studiato bene alle scuole dell'obbligo, dovremmo ricordarci che ci è stato sempre detto che esitono tre tipi di frazioni: propria, impropria e apparente. Uno studente però potrebbe accorgersi che in fin dei conti la frazione impropria dell'esempio non è altro che una somma tra un intero e una frazione propria. In particolare,

$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7}$$

A questo punto, lo studente si potrebbe accorgere che il modo di esprimere una frazione non è sempre così immediato.
Qualche anno dopo, il nostro studente potrebbe ripensare a questa interessante proprietà e ricordarsi di aver studiato di poter "portare a denominatore" la frazione, così da invertire i termini e poter ripetere il passaggio di qualche anno prima. Si trova quindi di fronte a una tale successione di uguaglianze

$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}$$

Ma a questo punto, si rende conto di poter continuare a ripetere questi due passaggi, finché, con suo grande stupore si trova di fronte a una successione di uguaglianze un po' particolare: il procedimento non può più continuare.

$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$$

Di primo acchito, non sembra essere un procedimento che porti alcun tipo di vantaggio e inoltre diminuisce anche l'intuitività della frazione.
Nonostante tutto, lo studente è rimasto incuriosito da tale procedimento e ancora qualche anno dopo si trova a dover trovare le soluzioni della seguente equazione, che apparentemente non ha molto a che fare con le frazioni:

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

Non essendo stato molto attento in classe, non ricorda la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. Cerca così di risolvere tale equazione con le note regole delle scuole medie. Avendo cura di escludere 0 come possibile soluzione, osserva quindi che può scrivere l'equazione anche nel seguente modo:

$$x = 3 + \frac{1}{x}$$

In fin dei conti, non è altro che una definizione del valore di x attraverso x.
E' quindi possibile sostituire x con la seconda parte dell'uguaglianza, proprio nella seconda parte dell'ugualianza. Applicando una volta la sostituzione e applicandola nuovamente altre volte, il nostro studente si trova di fronte a una situazione di questo tipo:

$$x = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}}}}$$

Anche ad un occhio non molto esperto, ad un certo punto, è evidente la ripetitività del numero 3 in questa frazione.
Andando ora a sostituire ad x il valore di 3 a vari livelli, ci si accorge che effettivamente ci stiamo avvicinando sempre di più alla soluzione vera a propria dell'equazione.
Ricordando che la soluzione della precedente equazione è:

$$x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3,3027$$

Esplicitamente abbiamo:

1. $x = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \approx 3,3333$

2. $x = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}} = \frac{33}{10} \approx 3,3000$

3. $x = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{109}{33} \approx 3,3030$

4. ...

Anche questa soluzione in realtà non sembra essere molto utile se si conosce un minimo di algebra. Ma sicuramente desta stupore la regolarità di un tale approccio.

Come spesso accade quando ci stupiamo, in particolare in matematica, forse un po' nascoste, si trovano delle nozioni che possono risultare molto utili.

Inoltre, per quella che per ora può essere una curiosità del lettore, si noti che l'altra soluzione dell'equazione è data da:

$$x = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}}$$

Senza annoiare troppo il lettore e prima di cominciare la vera trattazione di queste frazioni, ricordo che storicamente le frazioni continue sono state utilizzate per calcolare esplicitamente i valori approssimati di numeri reali e quindi utilizzabili per calcoli ingegneristici. Inoltre, le frazioni continue sono molto utili per risolvere l'equazione di Pell. Un'equazione molto importante nella teoria dei numeri.

Capitolo 2

Espansione di Razionali

In questo capitolo introdurremo il concetto di frazione continua, caratterizzeremo completamente i numeri razionali in questi termini e definiremo i convergenti che, oltre a servirci per un paio di teoremi, saranno molto utili anche nel seguito.

2.1 Definizioni e Notazioni di base

Prima di cominciare a trattare nel particolare i numeri razionali, iniziamo con il dare qualche definizione fondamentale e spiegare alcune notazioni che saranno alla base di tutta la trattazione.

Definizione 2.1. Un'espressione del tipo

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \dots}}}$$

con a_i e b_i numeri interi è chiamata *frazione continua generalizzata*

Un caso particolare di frazione continua e che risulterà di maggiore interesse per noi è il seguente:

Definizione 2.2. Un'espressione del tipo

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}}$$

con $a_i \in \mathbb{Z}\ \forall i$ è chiamata *frazione continua semplice* oppure semplicemente *frazione continua*.

Osservazione 2.1. In genere vale che il termine a_1 sia un generico intero. Mentre il fatto che a_i sia un intero positivo, vale per ogni i.

Nel caso in cui, rispettando l'osservazione 2.1, ci trovassimo di fronte a un'espressione finita, abbiamo la seguente:

Definizione 2.3. Una frazione continua semplice del tipo

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

è detta *finita*

Per comodità, d'ora in poi utilizzeremo la seguente:

Notazione. La frazione nella definizione 2.3 sarà scritta come

$$a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n}$$

oppure ancora più semplicemente come

$$[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$$

Mentre, più in generale la frazione nella definizione 2.2 sarà scritta come

$$a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\dots$$

oppure ancora più semplicemente come

$$[a_1, a_2, a_3, \dots]$$

Definizione 2.4. I termini $a_1, \dots, a_n$ sono chiamati *quozienti parziali*

2.2 Caratterizzazione dei razionali

Cerchiamo ora di capire di che proprietà dispongono le frazioni continue dei numeri razionali.
Vediamo un importante risultato riguardo i numeri razionali e le loro espressioni in frazioni continue:

Teorema 2.1. Ogni frazione continua semplice rappresenta un numero razionale e ogni numero razionale è esprimibile attraverso un'unica frazione continua semplice a meno di scegliere l'ultimo termine pari o dispari

Dimostrazione. Il fatto che ogni frazione continua semplice rappresenta un numero razionale è banale. Infatti, è sufficiente ricostruire la frazione continua e ripercorrere al contrario la costruzione di un unica frazione.
Per quanto riguardo l'altra implicazione, consideriamo un numero razionale espresso sottoforma di frazione e scriviamo:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q} \qquad 0 \leq r_1 < q$$

dove $a_1 \in \mathbb{Z}$ e $r_1 \in \mathbb{Z}$ sono univocamente determinati.
A questo punto, se $r_1 = 0$, abbiamo finito perché la frazione sarebbe esprimibile come $[a_1]$. Nel caso complementare in cui $r_1 \neq 0$ scriviamo:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{r_1}} \qquad 0 < r_1 < q$$

e ripetiamo il primo passo sulla frazione di q e r_1 ottendendo:

$$\frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} \qquad 0 \leq r_2 < r_1$$

Notando, come prima, che a_2 è l'unico intero positivo che rende il resto r_2 un numero compreso tra 0 e r_1. Se $r_2 = 0$, allora ci fermiamo e abbiamo finito perché la frazione continua sarebbe esprimibile come $[a_1, a_2]$. Se invece $r_2 \neq 0$, ripetiamo il procedimento.
E' chiaro che il procedimento termini quando arriviamo ad un certo passo n t.c. $r_n = 0$. Un tale r_n però si è certi di trovarlo sempre ad un certo punto. Infatti, se continuiamo ad applicare il procedimento, otterremo una successione di interi non negativi di questa forma:

$$q > r_1 > r_2 > r_3 > \dots$$

Però non esistono catene strettamente discendenti infinite in $\mathbb{N}$ e quindi ad un certo punto troveremo sicuramente un certo n t.c. $r_n = 0$.
La quasi unicità dell'espansione del nostro numero frazionario è evidente dal modo in cui i vari quozienti parziali sono calcolati. Come appena detto però, non è una vera e propria unicità, infatti l'espansione è unica a meno dell'ultimo termine che possiamo decidere se essere pari o essere dispari. Infatti, se espandiamo il nostro numero razionale:

$$\frac{p}{q} = [a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n]$$

notiamo che se $a_n > 1$, allora possiamo scrivere:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}$$

e quindi riscrivere l'espansione come

$$\frac{p}{q} = [a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{n-1} - 1,\ 1]$$

Nel caso complementare in cui $a_n = 1$,

$$\frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{(a_n - 1) + 1}$$

e quindi riscrivere l'espansione come

$$\frac{p}{q} = [a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{n-2},\ a_{n-1} + 1]$$

E quindi essere sempre in grado di esprimere l'ultimo termine pari o dispari. □

Osservazione 2.2. Dalla dimostrazione del teorema abbiamo

1. $a_1 \in \mathbb{Z}$, mentre $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

2. Ogni a_i è univocamente determinato per ogni i a meno di n e $n - 1$

Esempio 2.1. Possiamo mostrare esplicitamente un esempio di calcolo della frazione continua del seguente numero $3,245$ che è evidentemente un numero razionale e vedere anche che il teorema vale.

$$\frac{3245}{1000} = \frac{649}{200} = 3 + \frac{49}{200} = 3 + \frac{1}{\frac{200}{49}} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{4}{49}} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{49}{4}}} =$$

$$3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{12 + \frac{1}{4}}} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{12 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}}}$$

E quindi le due possibili rappresentazioni sono $[3, 4, 12, 4]$ oppure $[3, 4, 12, 3, 1]$. Si noti inoltre come il procedimento di calcolo sia perfettamente invertibile.

2.3 I convergenti

Definiamo ora una successione fondamentale per lo studio delle frazioni continue

Definizione 2.5. Data una frazione e la sua frazione continua associata $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$, definiamo le seguenti frazioni continue semplici finite:

$$c_1 = \frac{a_1}{1},\ c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2},\ c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3},\ \dots,$$

$$c_n = a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\frac{1}{+a_n}$$

primo, secondo, terzo,..., n-esimo convergente

Esempio 2.2. Possiamo calcolare i convergenti dell'esempio 2.1:

$$c_1 = [3] = 3,\ c_2 = [3, 4] = \frac{13}{4},\ c_3 = [3, 4, 12] = \frac{159}{49},\ c_4 = [3, 4, 12, 4] = \frac{649}{200}$$

Introduciamo ora un importante teorema sui convergenti di una frazione continua

Teorema 2.2. Fissati i seguenti valori:

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1, \quad & p_2 &= a_2 a_1 + 1 \\ q_1 &= 1, & q_2 &= a_2 \end{aligned}$$

e definiti induttivamente tutti gli altri nel seguente modo:

$$\begin{aligned} p_i &= a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i &= a_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{aligned}$$

per i t.c. $i > 2$. Vale che il k-esimo convergente c_k, sia della forma:

$$c_k = \frac{p_k}{q_k}$$

per k t.c. $1 \leq k \leq$ n

Dimostrazione. Svolgiamo la dimostrazione per induzione:
Come casi base abbiamo c_1 e c_2. E' evidente che

$$c_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1}$$

E si vede altrettanto facilmente che

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}$$

Per il passo induttivo assumiamo che il teorema sia vero fino ad un certo valore k fissato.

$$c_j = [a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_j,\ a_{j-1}] = \frac{p_j}{q_j} = \frac{a_j p_{j-1} + p_{j-2}}{a_j q_{j-1} + q_{j-2}}$$

per $j = 1, 2, 3, \ldots, k$.
Scrivo ora esplicitamente c_k come da ipotesi induttiva:

$$c_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

Osservando che:

$$c_k = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \cdots + \frac{1}{a_{k-1} +} \cdots + \frac{1}{a_k}$$

e che

$$c_{k+1} = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \cdots + \frac{1}{a_{k-1} +} \cdots + \frac{1}{a_k + \frac{1}{a_{k+1}}}$$

possiamo scrivere (anche se un po' impropriamente)

$$c_{k+1} = [a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{k-1},\ a_k + \frac{1}{a_{k+1}}] =$$

$$= \frac{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} =$$

$$= \frac{(a_k a_{k+1} + 1) p_{k-1} + a_{k+1} p_{k-2}}{(a_k a_{k+1} + 1) q_{k-1} + a_{k+1} q_{k-2}} =$$

$$= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} =$$

A questo punto, utilizzando l'ipotesi induttiva, abbiamo che:

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$
$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

E semplicemente sostituendo otteniamo:

$$c_{k+1} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

□

Osservazione 2.3. Si noti che $q_i > 1$ per ogni $i > 1$. Mentre $q_1 = 1$.

Osservazione 2.4. Per l'enunciato del prossimo teorema è utile scrivere:

$$p_{-1} = 0 \quad p_0 = 1$$
$$q_{-1} = 1 \quad q_0 = 0$$

Teorema 2.3. Definiti p_i e q_i come nel teorema precendente, allora vale che:

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione.
Come passo base abbiamo $i = 0, 1$.
Se $i = 0$:

$$p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$$

Se $i = 1$

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = a_1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = (-1)^1$$

Osserviamo che dal teorema 2.2 abbiamo:

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= a_{k+1} p_k + p_{k-1} \\ q_{k+1} &= a_{k+1} q_k + q_{k-1} \end{aligned}$$

Quindi, possiamo scrivere

$$p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} = (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_k - p_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) =$$

$$\begin{aligned} &= a_{k+1} p_k q_k + p_{k-1} q_k - a_{k+1} p_k q_k - p_k q_{k-1} = \\ &= (-1)(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Per il passo induttivo assumiamo che il teorema sia vero fino ad un certo valore k fissato, dimostriamo che la tesi vale anche per $k + 1$.
Questo significa che vale

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^k$$

Sostituendo questa equazione in 2.1 otteniamo

$$p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} = (-1)(-1)^k = (-1)^{k+1}$$

E quindi abbiamo dimostrato la tesi. $\square$

Capitolo 3

Espansione di Irrazionali

In questo capitolo introdurremo il concetto di irrazionale quadratico e l'algoritmo con cui calcolarne la frazione continua. Inoltre, rivedremo alcune proprietà viste per i numeri razionali, estese ai numeri irrazionali.

3.1 Numero irrazionale quadratico

Nel capitolo 2 abbiamo caratterizzato tutti i numeri razionali attraverso le frazioni continue. Da questo punto in poi, ci concentreremo sui numeri irrazionali, in particolare quadratici.

Definizione 3.1. Un numero α è detto essere *algebrico* se è soluzione di un'equazione del seguente tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \tag{3.1}$$

dove $a_i \ \in \mathbb{Z} \ \forall i$ e non tutti gli $a_i = 0$

Definizione 3.2. Un numero α è definito *irrazionale quadratico* se è soluzione irrazionale di un'equazione del tipo 3.1 con $n = 2$ e $a_2 \neq 0$. Esplicitamente se è soluzione reale di un'equazione di questo tipo

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

con $a_0, \ a_1, \ a_2 \ \in \mathbb{Z}$ e $a_2 \neq 0$

A breve capiremo l'importanza della seguente

Proposizione 3.1. Fissati A_1, A_2, B_1, $B_2 \in \mathbb{Q}$ e $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ non un quadrato perfetto abbiamo che

$$A_1 + B_1\sqrt{D} = A_2 + B_2\sqrt{D}$$

se e solo se $A_1 = A_2$ e $B_1 = B_2$.

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Se $A_1 = A_2$ e $B_1 = B_2$, l'uguaglianza di

$$A_1 + B_1\sqrt{D} = A_2 + B_2\sqrt{D}$$

è banale.
"$\Leftarrow$" Riscriviamo l'uguaglianza come

$$A_1 - A_2 = (B_2 - B_1)\sqrt{D}$$

Se, per assurdo $B_1 \neq B_2$, allora

$$\sqrt{D} = \frac{A_1 - A_2}{B_2 - B_1}$$

sarebbe razionale. Avremmo così ottenuto un assurdo essendo un irrazionale qudratico.
A questo punto $B_1 = B_2$, cioè $B_1 - B_2 = 0$ e quindi $A_1 - A_2 = 0$, cioè anche $A_1 = A_2$. D

Osservazione 3.1. Ogni numero del tipo

$$P \pm B\sqrt{D} \tag{3.2}$$

con P, $B \in \mathbb{Q}$ e $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ non un quadrato perfetto, è un irrazionale quadratico. Infatti, fissati P, $B \in \mathbb{Q}$ e $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ non un quadrato perfetto, si può vedere che considerando la seguente equazione

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

vale che $P \pm B\sqrt{D}$ è proprio una soluzione se scelgo

$$a_2 = 1, \qquad a_1 = -2P \qquad a_0 = P^2 - B^2D.$$

A questo punto si utilizza la formula risolutiva per i polinomi di secondo frado e si ottiene la tesi.
Viceversa, ogni numero irrazionale quadratico è della forma 3.2. Questo è evidente dalla formula risolutiva delle equazioni di secondo grado.

Osservazione 3.2. Tornerà utile notare che la scrittura 3.2 è equivalente a

$$\frac{P + \sqrt{D}}{Q}$$

dove $P \in \mathbb{Z}$ e $Q, D \in \mathbb{Z}_{>0}$ con D non un quadrato perfetto.
L'idea è quella di "portare all'interno" della radice il termine B.

3.2 Algoritmo di calcolo

Introduciamo ora un algoritmo di calcolo per le frazioni continue semplici di numeri irrazionali, ma perfettamente valido anche per numeri razionali.

Algoritmo 3.1. Sia α il numero irrazionale di cui vogliamo calcolare la frazione continua.
Si calcoli il valore $a_1 \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_2} \quad 0 < \frac{1}{\alpha_2} < 1$$

cioè a_1 il più grande intero minore di α. α_2 è a sua volta un numero irrazionale (altrimenti per assurdo si avrebbe che α è razionale) e in particolare

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha - a_1} > 1$$

Ripetendo ora il procedimento abbiamo

$$\alpha_2 = a_2 + \frac{1}{\alpha_3} \quad 0 < \frac{1}{\alpha_3} < 1 \quad a_2 \geq 1$$

con

$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha - a_2} > 1$$

irrazionale.
A questo punto, iterando il procedimento, si vede come $\alpha_n \neq 0 \ \forall n$ e in particolare troveremo questa successione di α_i:

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_2} \quad \alpha_2 > 1$$

$$\alpha_2 = a_2 + \frac{1}{\alpha_3} \quad \alpha_3 > 1 \quad a_2 \geq 1$$
$$\dots$$
$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} \quad \alpha_{n+1} > 1 \quad a_n \geq 1$$
$$\dots$$

dove a_i sono tutti interi e α_i irrazionali.
Effettuando ora le opportune sostituzioni otteniamo

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_2} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\alpha_3}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\alpha_4}}} = \dots \tag{3.3}$$

Notazione. Riprendendo la notazione del capitolo 2 possiamo esprimere 3.3 come

$$\alpha = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots]$$

Osservazione 3.3. In questo caso i puntini indicano il fatto che il procedimento non termina mai

Definizione 3.3. Una frazione continua del tipo 3.3 è definita *frazione continua semplice infinita*

Esempio 3.1. Un esempio di frazione continua semplice infinita può essere l'espansione di $\alpha = \sqrt{33}$. Esplicitamente i conti saranno i seguenti:

$$\alpha = \sqrt{33} = 5 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{33}-5}} = 5 + \frac{1}{\frac{5+\sqrt{33}}{8}} = 5 + \frac{1}{\alpha_2}$$
$$\alpha_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{8} = 1 + \frac{1}{\frac{3+\sqrt{33}}{3}} = 1 + \frac{1}{\alpha_3}$$
$$\alpha_3 = \frac{3+\sqrt{33}}{3} = 2 + \frac{1}{\frac{3+\sqrt{33}}{8}} = 2 + \frac{1}{\alpha_4}$$
$$\alpha_4 = 1 + \frac{1}{5+\sqrt{33}} = \frac{1}{\alpha_5}$$
$$\alpha_5 = 10 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{33}-5}}$$

A priori potremmo andare ancora avanti nel calcolo, ma dimostreremo un teorema che ci permette di interromperci a questo punto. Indipendentemente dal teorema, avremo quindi una frazione continua di questo tipo: $[5, 1, 2, 1, 10, \dots]$ dove i puntini stanno ad indicare il fatto che i termini non finiscano mai.

3.3 I convergenti

Facciamo innanzitutto la seguente

Osservazione 3.4. I teoremi 2.3 e 2.2 valgono indipendentemente dal fatto che la frazione continua che stiamo trattando sia finita o infinita. Questa osservazione è immediata, infatti è sufficiente andare a rivedere le dimostrazioni dei teoremi per notare che effettivamente l'ipotesi di finitezza della frazione continua non è mai utilizzata.

Introduciamo ora due lemmi, prima di dimostrare un teorema fondamentale per la dimostrazione del teorema di Lagrange

Lemma 3.1.

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} \tag{3.4}$$

Dimostrazione. Dal teorema 2.3 sappiamo che vale

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$$

Dividendo entrambi i termini per $q_n q_{n-1}$ e utilizzando il teorema 2.2 otteniamo la tesi. □

Lemma 3.2.

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-2}} \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Per il teorema 2.2

$$c_n - c_{n-2} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n}{q_n q_{n-2}} \tag{3.6}$$

Ricordandoci, della notazione del teorema 2.2, sostituiamo i valori di p_n e q_n e utilizziamo infine il teorema 2.3. Otteniamo

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2})$$

$$a_n(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = a_n(-1)^{n-1}$$

Concludiamo sostituendo all'equazione 3.4 il valore di 3.6. □

Osservazione 3.5. Con il seguente teorema diamo una motivazione per la quale i c_k sono chiamati convergenti.

Teorema 3.1. I convergenti dispari c_{2n+1} di una frazione continua semplice infinita sono una sequenza crescente convergente ad α inferiormente, quelli pari c_{2n} invece formano una sequenza descrescente e convergente superiormente.

Dimostrazione. Svolgiamo la dimostrazione per induzione utilizzando i due lemmi precedenti.
Come casi base abbiamo:

$$c_2 - c_1 = \frac{1}{q_2 q_1} > 0$$

$$c_3 - c_2 = \frac{-1}{q_3 q_2} < 0$$

$$c_4 - c_2 = \frac{a_4(-1)^3}{q_1 q_2} < 0$$

$$c_3 - c_1 = \frac{a_3(-1)^2}{q_3 q_1} = \frac{a_3}{q_3 q_1} > 0$$

$$c_4 - c_3 = \frac{(-1)^4}{q_4 q_3} > 0$$

Ciò significa che

$$c_1 < c_3 < c_4 < c_2$$

A questo punto fissiamo un certo n, abbiamo che:

$$c_{2n} - c_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n} q_{2n-1}} > 0$$

$$c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{q_n q_{2n}} < 0$$

$$c_{2n+2} - c_{2n} = \frac{a_{2n+2}(-2)^{2n-1}}{q_{2n+2} q_n} < 0$$

$$c_{2n+1} - c_{2n-1} = \frac{a_n(-1)^{2n}}{q_n q_{2n-1}} > 0$$

$$c_{2n+2} - c_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n-2}}{q_{2n+2} q_n}$$

e possiamo quindi concludere che $c_{2n-1} < c_{2n+1} < c_{2n}$
Inoltre, $c_{2i+1} < \alpha < c_{2i}$. Esplicitamente ci troveremo di fronte ad una successione di questo tipo:

$$c_1 < c_3 < c_5 < \dots < c_{2n+1} < \dots \ \alpha \ \dots < c_{2n} < \dots < c_6 < c_4 < c_2$$

Per concludere la dimostrazione del teorema vediamo che

$$|c_i - c_{i-1}| = \left| \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}} \longrightarrow 0 \quad per\ n \longrightarrow \infty$$

essendo che $1 = q_1 < q_2 - 1 < q_3 - 1 < \dots$ □

3.4 Periodicità

Definizione 3.4. Definiamo una frazione continua *periodica* se la sua frazione continua è del tipo:

$$[a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n, a_{i+1}, \dots, a_n, a_{i+1}, \dots, a_n, \dots]$$

per certi i, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$

Notazione. Una tale frazione continua la scriviamo come:

$$[a_1, \dots, a_i, \overline{a_{i+1}, \dots, a_n}]$$

Definizione 3.5. Definiamo una frazione continua *puramente periodica* se vale che la frazione continua è periodica e $i = 1$

Osservazione 3.6. Se consideriamo una frazione continua puramente periodica

$$\alpha = [\overline{a_1, a_2, \dots, a_n}] = a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\frac{1}{+a_n+}\frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

è evidente che

$$\alpha_{n+1} = a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\frac{1}{+a_n+}\frac{1}{\alpha_{n+1}} = \alpha$$

e quindi, dalle equazioni precedente in questa sezione, possiamo scrivere

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}} \tag{3.7}$$

3.5 Frazioni continue puramente periodiche

Teorema 3.2. Se $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ sono interi positivi e consideriamo la seguente frazione continua periodica pura:

$$\alpha = [\overline{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n}]$$

questa è maggiore di 1 ed è la radice positiva di un'equazione quadratica a coefficienti interi. Inoltre, se

$$\beta = [\overline{a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1}]$$

è la frazione continua con il periodo di α invertito, allora

$$-\frac{1}{\beta} = \alpha'$$

è la seconda radice dell'equazione(il coniugato di α).

Dimostrazione. Sappiamo che se

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n]$$

allora

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_2,\ a_1] = \frac{p'_n}{q'_n} = c_n$$

e

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_3,\ a_2] = \frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}} = c_{n-1}$$

dove c_n e c_{n-1} sono rispettivamente l'n-esimo e l'$(n-1)$-esimo convergente di $[a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n]$. Infatti, utilizzando la notazione dell'osservazione 2.4, si prova per induzione che

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1}{a}$$

e sapendo che $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$, abbiamo

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}$$

Con lo stesso ragionamento si può ricavare il risultato per $\frac{q_n}{q_{n-1}}$.
Dal fatto che p_n, p_{n-1}, q_n, q_{n-1} sono espressi nei loro termini più piccoli, segue che

$$\begin{aligned} p'_n &= p_n \qquad & p'_{n-1} &= q_n \\ q'_n &= p_{n-1} \qquad & q'_{n-1} &= q_{n-1} \end{aligned}$$

Ora, dall'ipotesi per cui α è puramente periodica, sappiamo di poter scrivere che

$$a_1 + \frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{+a_n+}\frac{1}{\alpha}$$

Inoltre dall'equazione 3.7, possiamo anche scrivere che

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}}$$

Ora, questa condizione la possiamo riscrivere come

$$q_n \alpha^2 - (p_n - q_{n-1})\alpha - p_{n-1} = 0$$

Invertendo invece il periodo di α otteniamo

$$\beta = a_n + \frac{1}{a_{n-1}+}\cdots\frac{1}{+a_1+}\frac{1}{\beta}$$

e sempre dall'equazione 3.7 otteniamo che

$$\beta = \frac{\beta p'_n + p'_{n-1}}{\beta q'_n + q'_{n-1}}$$

con $\frac{p'_n}{q'_n}$ e $\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$ rispettivamente l'n-esimo e l'$(n-1)$-esimo convergente di

$$[\overline{a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1}]$$

Utilizzando ora le condizioni precedentemente osservate, possiamo scrivere

$$\beta = \frac{\beta p_n + q_n}{\beta p_{n-1} + q_{n-1}}$$

e riscrivere la precedente condizione come

$$p_{n-1}\beta^2 - (p_n - q_{n-1})\beta - q_n = 0$$

che è equivalente a

$$q_n \left(-\frac{1}{\beta}\right)^2 - (p_n - q_{n-1}) \left(-\frac{1}{\beta}\right) - p_{n-1} = 0$$

A questo punto se cerchiamo le radici dell'equazione

$$q_n x^2 - (p_n - q_{n-1})x - p_{n-1} = 0$$

vediamo che ha due radici. Rispettivamente α e $-\frac{1}{\beta}$.

A questo punto è sufficiente osservare che β è maggiore di uno, quindi $\frac{1}{\beta}$ è compreso tra 0 e 1, e infine quindi che $-\frac{1}{\beta}$ è contenuto tra -1 e 0. $\square$

Capitolo 4

Teorema di Lagrange

In questa sezione introduciamo la definizione di irrazionale ridotto, un paio di importanti risultati e infine il teorema di Lagrange per gli irrazionali quadratici

4.1 Preparativi per il teorema di Lagrange

Dopo la trattazione dei numeri irrazionali quadratici, possiamo cominciare a gettare le basi per dimostrare il teorema di Lagrange

Definizione 4.1. Dato un numero irrazionale quadratico

$$\frac{P+\sqrt{D}}{Q} \tag{4.1}$$

Definiamo il suo *coniugato* come:

$$\frac{P-\sqrt{D}}{Q}$$

Notazione. Dato un numero irrazionale quadratico α, il suo coniugato lo indicheremo con α'

Definizione 4.2. Definiamo un numero irrazionale quadratico, indicato con α, *ridotto* se $\alpha > 1$ e $-1 < \alpha' < 0$

Lemma 4.1. Fissato un certo valore D, esistono solo un numero finito di irrazionali quadratici ridotti della forma 4.1

Dimostrazione. Cerchiamo prima di capire che proprietà soddisfa un dato numero irrazionale quadratico ridotto α. Innanzitutto, per definizione, sappiamo che

$$\alpha = \frac{P+\sqrt{D}}{Q} > 1 \qquad -1 < \alpha' = \frac{P-\sqrt{D}}{Q} < 0$$

Queste due condizioni implicano che $\alpha + \alpha' > 0$, cioè esplicitamente:

$$\frac{P+\sqrt{D}}{Q} + \frac{P-\sqrt{D}}{Q} = \frac{2P}{Q} > 0$$

Siccome $Q > 0$, allora anche $P > 0$.
Inoltre, sapendo quindi che $Q > 0$, vale anche che $P - \sqrt{D} < 0$, cioè $0 < P < \sqrt{D}$.
Dal fatto che $\alpha > 1$, deduciamo che

$$P + \sqrt{D} > Q$$

Mentre dal fatto che $\alpha' > -1$, deduciamo che

$$P - \sqrt{D} > -Q, \; i.e. \; \sqrt{D} - P < Q$$

A questo punto abbiamo le seguenti condizioni:

$$0 < P < \sqrt{D} \qquad \sqrt{D} - P < Q < \sqrt{D} + P < 2\sqrt{D}$$

Da ciò deduciamo che esistono sono un numero finito di P e Q che soddisfino tale condizione e quindi abbiamo ottenuto la tesi □

Enunciamo ora quello che può essere visto come una sorta di inverso del teorema 3.2

Teorema 4.1. Se α è un numero irrazionale quadratico ridotto, allora la sua corrispettiva frazione continua è puramente periodica.

Dimostrazione. Effettuiamo il primo passo dell'algoritmo 3.1 su α e otteniamo:

$$\alpha = \frac{P+\sqrt{D}}{Q} = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}$$

Ripetendo il passo per α_1 otteniamo:

$$\alpha_1 = \frac{P_1+\sqrt{D}}{Q_1} = a_2 + \frac{1}{\alpha_2}$$

dove a_2 è il più grande intero più piccolo di α_1 e

$$\alpha_2 = \frac{P_2 + \sqrt{D}}{Q_2} > 1$$

è un numero irrazionale quadratico ridotto.
A questo punto possiamo continuare a applicare l'algoritmo fino ad un n qualsiasi essendo che l'espansione in frazione continua di un numero irrazionale non termina mai, ottentendo così le seguenti relazioni:

$$\alpha = \alpha_0 = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}$$

$$\alpha_1 = a_2 + \frac{1}{\alpha_2}$$

$$\dots$$

$$\alpha_{n-1} = a_n + \frac{1}{\alpha_n}$$

$$\dots$$

dove α_i è un irrazionale quadratico ridotto associato con D. Ma dal lemma 4.1 sappiamo che ci sono solo un numero finito di irrazionali quadratici ridotti associati con D.
Supponiamo, quindi che, data la sequenza calcolata sopra:

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_{k-1},\ \alpha_k,\ \dots,\ \alpha_{l-1},\ \alpha_l,\ \dots,$$

si abbia che i primi l termini siano distinti e valga che $\alpha_l = \alpha_k$, allora si possono dimostrare le due seguenti cose:

1. $\alpha_{k+1} = \alpha_{l+1},\ \alpha_{k+2} = \alpha_{l+2},\ \dots$
2. anche α è ripetuto, i.e. la sequenza $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots$ è puramente periodica

Per dimostrare 1 è sufficiente riscrivere l'ipotesi $\alpha_l = \alpha_k$ esplicitamente:

$$\alpha_k = a_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+1}} = \alpha_l = a_{l+1} + \frac{1}{\alpha_{l+1}}$$

e siccome a_{k+1} e a_{l+1} sono i più grandi interi minori di $\alpha_l = \alpha_k$, vale $a_{k+1} = a_{l+1}$. Quindi vale anche $\alpha_{k+1} = \alpha_{l+1}$. Ripetendo la stessa argomentazione si ottiene anche per $\alpha_{k+2} = \alpha_{l+2},\ \alpha_{k+3} = \alpha_{l+3},\ \dots$

Per dimostrare 2 dobbiamo far vedere che $\alpha_{k-1} = \alpha_{l-1}, \alpha_{k-2} = \alpha_{l-2}, \ldots, \alpha_0 = \alpha_{l-k}$.
Ricordandoci la notazione della definitione 4.2 e utilizzando il fatto che $\alpha_l = \alpha_k$, otteniamo che $\alpha'_l = \alpha'_k$. Segue quindi che

$$\beta_k = -\frac{1}{\alpha'_k} = -\frac{1}{\alpha'_l} = \beta_l \tag{4.2}$$

Supponendo ora $k \neq 0$, abbiamo che

$$\alpha_{k-1} = a_k + \frac{1}{\alpha_k} \qquad e \qquad \alpha_{l-1} = a_l + \frac{1}{\alpha_l}$$

Considerandone i coniugati:

$$\alpha'_{k-1} = a_k + \frac{1}{\alpha'_k} \qquad e \qquad \alpha'_{l-1} = a_l + \frac{1}{\alpha'_l}$$

Riscrivendo le relazioni:

$$-\frac{1}{\alpha'_k} = a_k - \alpha'_{k-1} \qquad e \qquad -\frac{1}{\alpha'_l} = a_l - \alpha'_{l-1}$$

Osservando la relazione 4.2, otteniamo

$$\beta_k = a_k + \frac{1}{\beta_{k-1}} \qquad e \qquad \beta_l = a_l + \frac{1}{\beta_{l-1}} \tag{4.3}$$

Ora, dal fatto che $\alpha_{k-1},\ \alpha_{l-1}$ sono ridotti, abbiamo che

$$-1 < \alpha'_{k-1} < 0 \qquad e \qquad -1 < \alpha'_{l-1} < 0$$

Quindi:

$$0 < -\alpha'_{k-1} = \frac{1}{\beta_{k-1}} < 1 \qquad e \qquad 0 < -\alpha'_{l-1} = \frac{1}{\beta_{l-1}} < 1$$

Questo mostra che a_k e a_l in sono i più grandi interi minori di β_k e β_l rispettivamente. Dal fatto che questi due β siano uguali, segue che $a_k = a_l$ e quindi che:

$$a_k + \frac{1}{\alpha_k} = a_l + \frac{1}{\alpha_l}$$

Ricordandoci la definizione che abbiamo dato ai vari α: abbiamo che la precedente uguaglianza significa $\alpha_{k-1} = \alpha_{l-1}$. A questo punto, se $k - 1 \neq 0$ possiamo ripetere l'argomentazione fino a trovare α_0, che ci dirà

$$\alpha_{k-k} = \alpha_0 = \alpha_{l-k} = \alpha_s$$

Riscrivendo il tutto in una forma più compatta, ci troveremo di fronte al seguente caso:

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}$$

$$\alpha_1 = a_2 + \frac{1}{\alpha_2}$$

$$\dots$$

$$\alpha_{s-2} = a_{s-1} + \frac{1}{\alpha_{s-1}}$$

$$\alpha_{s-1} = a_s + \frac{1}{\alpha_s} = a_s + \frac{1}{\alpha}$$

Dal fatto che ogni $\alpha_k > 1$, esiste esattamente un più grande intero a_k minore di α_k. E' chiaro quindi che la successione di tutti gli a si ripeterà:

$$\alpha_s = a_{s+1} + \frac{1}{\alpha_{s+1}} = a_0 = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}$$

Possiamo quindi concludere che la frazione continua è puramente periodica, i.e. della forma:

$$\alpha = [\overline{a_1, \ \dots \ a_s}]$$

□

4.2 Teorema di Lagrange

Il seguente teorema di Lagrange è una generalizzazione del teorema 4.1 e infatti la dimostrazione si fonda proprio su tale teorema

Teorema 4.2. Ogni espansione in frazione continua di un numero quadratico irrazionale α è periodica da un certo termine in poi.

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è ricondurci al teorema 4.1. Per fare ciò dobbiamo dimostrare che l'espansione in frazione continua di un qualsiasi irrazionale quadratico α raggiungerà un certo α_{n+1} irrazionale quadratico ridotto.
Cominciamo scrivendo l'espanzione di α:

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \cdots + \frac{1}{\alpha_n}$$

Ora, dalla relazione del capitolo 3 sappiamo che possiamo scrivere

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n+1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n+1}} \tag{4.4}$$

dove α e α_{n+1} sono irrazionali quadratici e $\alpha_{n+1} > 1$.
Prendo ora i coniugati di entrambi i lati dell'uguaglianza 4.4

$$\alpha' = \frac{\alpha'_{n+1}p_n + p_{n+1}}{\alpha'_{n+1}q_n + q_{n+1}}$$

che può essere riscritta come

$$\alpha'_{n+1} = -\frac{\alpha' q_{n-1} - p_{n-1}}{\alpha' q_n + p_n}$$

Fattorizzando:

$$\begin{aligned} \alpha'_{n+1} = -\frac{q_{n-1}}{q_n}\left(\frac{\alpha' - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\alpha' - \dfrac{p_n}{q_n}}\right) = \\ = -\frac{q_{n-1}}{q_n}\left(\frac{\alpha' - c_{n-1}}{\alpha' - c_n}\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

dove abbiamo semplicemente utilizzato la notazione dei convergenti nell'ultima uguaglianza. A questo punto, ricordandoci il teorema 3.1 sappiamo che:

$$\left(\frac{\alpha' - c_{n-1}}{\alpha' - c_n}\right) \longrightarrow \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' - \alpha} \tag{4.6}$$

al crescere di n.
Ricordiamo inoltre che i convergenti c_n sono alternativamente più piccoli e più grandi di α oltre che convergere ad α. Quindi, così si comporta anche la nostra successione
Notiamo inoltre che q_n e q_{n-1} sono entrambi interi positivi e che

$$0 < q_{n-1} < q_n \implies \frac{q_{n-1}}{q_n} < 1$$

A questo punto sappiamo quindi che esiste un certo N t.c 4.6 è "leggermente" inferiore a 1. Il valore di α_{N+1} dato dalla relazione 4.5 è compreso tra -1 e 0. Questo prova che α_{N+1} è ridotto. E dal teorema 4.1 otteniamo la tesi $\square$

4.3 $\sqrt{N}$

In questa sezione cerchiamo di capire che forma abbia la frazione continua di $\sqrt{N}$.

Osservazione 4.1. Innanzitutto osserviamo che $\sqrt{N}$ è maggiore di 1 e quindi il suo coniugato $-\sqrt{N}$ non è compreso tra -1 e 0. Quindi $\sqrt{N}$ non è un irrazionale ridotto.

Da questa osservazione deduciamo che la frazione continua di $\sqrt{N}$ non può essere puramente periodica. Scriviamo l'espansione di $\sqrt{N}$

$$\sqrt{N} = a_1 + \frac{1}{a_2+}\cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n+}\cdots$$

A questo punto facciamo la seguente

Osservazione 4.2. Dalla definizione di a_1, come il più grande intero positivo minore di $\sqrt{N}$, ho che $\sqrt{N} + a_1$ è maggiore di 1 e che $-\sqrt{N} + a_1$ è compreso tra -1 e 0, cioè $\sqrt{N} + a_1$ è un irrazionale ridotto.
Esplicitamente la sua espansione in frazione continua risulta essere

$$\sqrt{N} + a_1 = 2a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3+}\cdots +$$

Dal fatto che sappiamo dal teorema di Lagrange che è puramente periodica, possiamo affermare che la sua espansione sia della forma

$$\begin{aligned}\alpha = \sqrt{N} + a_1 = 2a_1 + \frac{1}{a_2+} + \frac{1}{a_3+}\cdots + \frac{1}{a_n+}\frac{1}{2a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots &= \\ = [a_1,\ \overline{a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ 2a_1}]\end{aligned}$$

Ricordandoci che $-\dfrac{1}{\alpha'}$ ha la stessa espansione di α a meno di invertire i termini del suo periodo, otteniamo che

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\sqrt{N} - a_1} = a_n + \frac{1}{a_{n-1}+}\cdots + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{2a_1+}\cdots$$

Guardando ora l'espansione periodica di $\sqrt{N} - a_1$ dalla sua precedente scrittura, otteniamo

$$\sqrt{N} - a_1 = 0 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots + \frac{1}{a_n+}\frac{1}{2a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots$$

e l'espansione del suo reciproco è

$$\frac{1}{\sqrt{N}-a_1} = a_2 + \frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n+}\frac{1}{2a_1+}\frac{1}{a_n+}\ldots$$

Comparando le due espansioni otteniamo che

$$a_n = a_2 \qquad a_{n-1} = a_3 \quad \ldots \quad a_3 = a_{n-1}, \qquad a_2 = a_n$$

Segue che l'espansione di $\sqrt{N}$ è della seguente forma:

$$\sqrt{N} = [a_1,\ \overline{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_4, a_2, 2a_1}] \tag{4.7}$$

Abbiamo cioè dimostrato la seguente:

Proposizione 4.1. Ogni numero irrazionale quadratico della forma $\sqrt{N}$ non un quadrato perfetto è della forma

$$[a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_i,\ \overline{a_{i+1},\ \ldots a_m,\ a_m,\ \ldots,\ a_{i+1}, 2a_{i+1}}]$$

oppure

$$[a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_i,\ \overline{a_{i+1},\ \ldots a_m,\ a_{m+1},\ a_m,\ \ldots,\ a_{i+1}, 2a_{i+1}}]$$

Esempio 4.1. Due possibili esempi che possono aiutare a comprendere cosa abbiamo di fronte possono essere

$$\sqrt{29} = [5\ \overline{2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 10}]$$

$$\sqrt{19} = [4,\ \overline{2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 8}]$$

Capitolo 5

Equazione di Pell

In questa sezione ci concentreremo su una possibile applicazione del teorema di Lagrange. In particolare, la ricerca delle soluzioni di una delle equazioni diofantee: l'equazione di Pell.

5.1 Introduzione all'equazione di Pell

Definiamo ora l'equazione di Pell.

Definizione 5.1. Chiamiamo *equazione di Pell* un'equazione della seguente forma:

$$x^2 - Ny^2 = \pm 1$$

dove $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ è dato e $x,\ y \in \mathbb{Z}$ sono le nostre incognite.

Notazione. Per comodità, d'ora in avanti con equazione di Pell *positiva* intenderò il caso:

$$x^2 - Ny^2 = 1$$

Con *negativa* invece:

$$x^2 - Ny^2 = -1$$

Possiamo innanzitutto suppore che N sia un quadrato non perfetto, altrimenti la soluzione del problema sarebbe banale come si evince dalla seguente osservazione:

Osservazione 5.1. Supponiamo di avere un'equazione di Pell con $N = n^2$, allora possiamo riscrivere l'equazione:

$$x^2 - Ny^2 = x^2 - n^2y^2 = x^2 - (ny)^2 = 1$$

In generale, una differenza di quadrati non è mai uguale a uno, a meno che non ci troviamo di fronte al seguente caso:

$$(\pm 1)^2 - 0^2$$

Infatti,

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 1$$

$(x + y) > 1$ e quindi concludiamo

5.2 L'equazione di Pell nella "vita di tutti i giorni"

Una storica applicazione dell'equazione di Pell è il cosiddetto "problema del bestiame" conosciuto come "Archimede's cattle problem" e rimasto irrisolto fino al 1880 quando la soluzione fu trovata da Carl Ernst August Amthor a Dresda.
Il problema, spiegato in una poesia greca di qurantaquattro versi, è il seguente:
Calcola, o amico, il numero del bestiamo del sole che un tempo pascolava sulle pianure della Sicilia, diviso per colore in quattro mandrie, una "bianca" come il latte, una "nera", una "screziata" e una "gialla". Il numero di tori è maggiore del numero delle mucche e le relazioni tra loro sono le seguenti:

$$\textit{Tori bianchi} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \textit{tori neri} + \textit{tori gialli}$$

$$\textit{Tori neri} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \textit{tori screziati} + \textit{tori gialli}$$

$$\textit{Tori pezzati} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \textit{tori bianchi} + \textit{tori gialli}$$

$$\textit{Mucche bianche} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \textit{mandria nera}$$

$$\textit{Mucche nere} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \textit{mandria screziata}$$

$$\textit{Mucche pezzate} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \textit{mandria gialla}$$

$$\textit{Mucche gialle} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \textit{mandria bianca}$$

Se puoi dare, o amico, il numero di ogni tipo di tori e vacche, non sei un novizio nei numeri, eppure non puoi essere considerato di grande abilità. Considera, tuttavia, le reguenti relazioni aggiuntive tra i tori del sole:

$$\textit{Tori bianchi} + \textit{tori neri} = \textit{un numero quadrato}$$

$$\textit{Tori pezzati} + \textit{tori gialli} = \textit{un numero triangolare}$$

Se hai calcolato anche questi, o amico,, e hai trovato il numero totale del bestiame, esulta come un vincitore, perché ti sei dimostrato il più abile nei numeri.

I vincoli della prima parte sono risolvibili attraverso 7 equazioni lineari con 8 incognite. Per quanto riguarda invece i vincoli nella seconda parte del problema sono risolvibili attraverso un'equazione di Pell. In particolare, si potrebbe vedere che la soluzione a tale problema è equivalente alle soluzioni della seguente equazione di Pell:

$$x^2 - 4729494y^2 = 1$$

Per pura curiosità, la soluzione è dell'ordine di $7,76 \cdot 10^{206544}$: il che richiederebbe più spazio di quanto ce ne sia su tutta la terra.

5.3 Esistenza della soluzione

In questa sezione dimostreremo il seguente teorema di esistenza di soluzioni per l'equazione di Pell positiva e la quasi esistenza per quella negativa

Teorema 5.1. Indipendentemente dalla frazione continua di $\sqrt{N}$, l'equazione di Pell positiva ammette sempre una soluzione intera.
Se $\sqrt{N}$ ha una frazione continua con n, definito in 4.7 dalla lunghezza del periodo, dispari, allora l'equazione di Pell negativa ammette sempre una soluzione.

Dimostrazione. Dalla precedente sezione sappiamo che:

$$\sqrt{N} = a_1 + \frac{1}{a_2 +}_{\dots} + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{a_2 +}_{\dots} =$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2 +}_{\dots} + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\alpha_{n+1}} \tag{5.1}$$

dove

$$\alpha_{n+1} = 2a_1 + \frac{1}{a_2 +}_{\dots} = \sqrt{N} + a_1 \tag{5.2}$$

Ricordandoci dei convergenti a pagina 9 e osservando 5.1 deduciamo:

$$\sqrt{N} = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} \tag{5.3}$$

Sostituendo 5.2 in 5.3 otteniamo:

$$\sqrt{N} = \frac{(\sqrt{N} + a_1) p_n + p_{n-1}}{(\sqrt{N} + a_1) q_n + q_{n-1}} \tag{5.4}$$

Moltiplicando entrambi i lati per il denominatore e svolgendo gli oppurtuni calcoli otteniamo:

$$\sqrt{N}(\sqrt{N} + a_1) q_n + q_{n-1} = (\sqrt{N} + a_1) p_n + p_{n-1}$$

$$N q_n + (a_1 q_n + q_{n-1})\sqrt{N} = a_1 p_n + p_{n-1} + p_n \sqrt{N}$$

che può essere scomposta in:

$$\begin{cases} N q_n = a_1 p_n + p_{n-1} \\ a_1 q_n + q_{n-1} = p_n \end{cases}$$

E possono essere riscritti come:

$$\begin{cases} p_{n-1} = N q_n - a_1 p_n \\ q_{n-1} = p_n - a_1 q_n \end{cases}$$

Ricordandoci il teorema 2.3 otteniamo:

$$p_n(p_n - a_1 q_n) - q_n(N q_n - a_1 p_n) = (-1)^n$$

Svolgendo gli opportuni calcoli:

$$p_n^2 - N q_n^2 = (-1)^n \tag{5.5}$$

Quindi, analizziamo distintamente i casi in cui n sia pari e i casi in cui sia dispari.

- se è n pari, allora vale:

$$p_n^2 - Nq_n^2 = 1$$

 Quindi $x = p_n$ e $y = q_n$ è una soluzione praticolare dell'equazione di Pell positiva

- n dispari, allora vale:

$$p_n^2 - Nq_n^2 = -1$$

 Quindi $x = p_n$ e $y = q_n$ è una soluzione particolare dell'equazione di Pell negativa

Se n fosse dispari, ma volessimo trovare una soluzione particolare dell'equazione di Pell positiva, è sufficiente ripetere la dimostrazione considerando i termini della frazione continua fino a $2n + 1$:

$$\sqrt{N} = a_1 + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2a_1} + \dots =$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n + 1} + \dots + \frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{a_{2n+1}} + \dots$$

Otteniamo così che:

$$p_{2n}^2 - Nq_{2n}^2 = (-1)^{2n} = 1$$

E cioè Quindi $x = p_{2n}$ e $y = q_{2n}$ è una soluzione particolare dell'equazione di Pell positiva. □

L'ultimo caso non trattato dal teorema è esposto nella seguente osservazione:

Osservazione 5.2. Se n fosse pari, ma volessimo trovare una soluzione particolare dell'equazione di Pell negativa, la dimostrazione appena svolta cadrebbe in quando non riusciremmo a scrivere l'equazione 5.2. Un esempio per cui non esistono soluzioni intere è il seguente:

$$x^2 - 3y^2 = -1$$

5.4 Non unicità delle soluzioni dell'equazione di Pell

Teorema 5.2. Se $(x_1,\ y_1)$ è la più piccola soluzione positiva dell'equazione di Pell positiva, allora tutte le altre soluzioni positive possono essere ottenute dalla seguente equazione:

$$x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n$$

dove $n\ \in \mathbb{Z}_{>0}$

Dimostrazione. Fissato n qualsiasi, abbiamo che vale

$$x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n = (x_1 + y_1\sqrt{N})(x_1 + y_1\sqrt{N})\dots(x_1 + y_1\sqrt{N})$$

D'altra parte il coniugato del prodotto è il prodotto del coniugato, e quindi vale anche che

$$x_n - y_n\sqrt{N} = (x_1 - y_1\sqrt{N})^n = (x_1 - y_1\sqrt{N})(x_1 - y_1\sqrt{N})\dots(x_1 - y_1\sqrt{N})$$

A questo punto, ricordandoci della differenza di quadrati e utilizzando le due precedenti equazioni, otteniamo la tesi

$$\begin{aligned} x_n^2 - Ny_n^2 = (x_n + y_n\sqrt{N})(x_n - y_n\sqrt{N}) = \\ = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n(x_1 - y_1\sqrt{N})^n = \\ = (x_1^2 - Ny_1^2)^n = 1 \end{aligned}$$

□

Teorema 5.3. Assumendo che l'equazione di Pell negativa abbia una soluzione. Poniamo $(x_1,\ y_1)$ la più piccola soluzione positiva, allora tutte le soluzioni positive possono essere ottenute dalla seguente equazione:

$$x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n$$

dove n=2i+1 con $i\ \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Con la stessa notazione del precedente teorema:

Osservazione 5.3. Tutte le soluzioni della corrispondente equazione di Pell positiva sono della forma:

$$x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n$$

dove n=2i con i$\in \mathbb{Z}_{>0}$

Si noti che quindi ha senso parlare di soluzioni più piccole.

5.5 Esempio con N=14

Cerchiamo tutte le soluzioni della seguente equazione di Pell:

$$x^2 - 14y^2 = 1.$$

Attraverso l'algoritmo 3.1 possiamo vedere che

$$\sqrt{14} = [3,\ \overline{1,\ 2,\ 1,\ 6}] = [a_1,\ \overline{a_2,\ a_3,\ a_4,\ 2a_1}]$$

Il che ci mostra che $n = 4$, che è un numero pari.
A questo punto è sufficiente calcolare p_4 e q_4 ricordandoci di come sono stati definiti nel teorema 2.2.

$$p_1 = a_1 = 3 \qquad q_1 = 1$$

$$p_2 = a_2 a_1 + 1 = 1 \cdot 3 + 1 = 4 \qquad q_2 = a_2 = 1$$

$$p_3 = a_3 p_2 + p_1 = 2 \cdot 4 + 3 = 11 \qquad q_3 = a_3 q_2 + q_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$p_4 = a_4 p_3 + p_2 = 1 \cdot 11 + 4 = 15 \qquad q_4 = a_4 q_3 + q_2 = 1 \cdot 3 + 1 = 4$$

che risultano essere rispettivamente 15 e 4. Quindi questa è una soluzione particolare grazie al teorema 5.1. Esplicitamente si vede che $15^2 - 14 \cdot 4^2 = 225 - 224 = 1$
Ora possiamo calcolare le altre soluzioni attraverso il teorema 5.2. Fissato un certo i sarà sufficiente svolgere la seguente equazione per ottenere le altre soluzioni

$$x_i + y_i\sqrt{14} = (15 + 4\sqrt{14})^i$$

Per esempio, ponendo $i = 2$ otteniamo

$$x_2 + y_2\sqrt{14} = (15 + 4\sqrt{14})^2 = 225 + 224 + 120\sqrt{14} =$$

$$= 449 + 120\sqrt{14}$$

Cioè, $x_2 = 449$ e $y_2 = 120$ è un'altra soluzione dell'equazione di Pell considerata. Esplicitamente si vede che $449^2 - 14 \cdot 120^2 = 201601 - 201600 = 1$

Bibliografia

[B K80] A. Amthor B. Krumbiegel. *Das Problema Bovinum des Archimedes*. Historisch-literarische Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1880.

[Bel95] A. H. Bell. *The American Mathematical Monthly, vol. 2, n. 5, The Cattle Problem.* Mathematical Association Of America, 1895.

[Niv61] Ivan Niven. *Numbers: Rational and Irrational*. Random House, 1961.

[Old63] C. D. Olds. *Continued Fraction*. Random House, 1963.