UNIVERSITÀ DI TRENTO

Frazioni continue ed equazione di Pell

Dario Maddaloni

Novembre 2021

Indice

L'equazione di Pell

Equazione di Pell

Chiamiamo **equazione di Pell** un'equazione della seguente forma

$$x^2 - Ny^2 = \pm 1$$

dove abbiamo fissato $N \in \mathbb{N}$ non un quadrato perfetto

E di tale equazione cerchiamo tutte le possibili soluzioni per $x,\ y\ \in \mathbb{Z}$

Facciamo chiarezza

$$x^2 - 14y^2 = 1$$

Frazioni continue

Frazione continua

Frazione continua

Chiamiamo **frazione continua** un'espressione del tipo:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}}$$

dove $a_1 \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in \mathbb{N}$ con $i \geq 2$.

Notazione

$$a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\dots \qquad \text{oppure} \qquad [a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots]$$

E come facciamo a ricavarle?

"Algoritmo" di calcolo

Obiettivo

Si voglia trovare la frazione continua di un certo numero α.

Scriviamo α come α_1

1. Fissiamo $a_i = \lfloor \alpha_i \rfloor$
2. Calcoliamo α_{i+1} t.c. $\alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}$ (i.e. $\alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - a_i}$)
3. Ripetiamo per α_{i+1} dal primo punto
4. Otteniamo una successione $a_1, \ a_2, \ a_3, \ \dots$
5. Sostituiamo "a salire" e otteniamo:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 + \dots}$$

Facciamo chiarezza

Consideriamo $\alpha = \sqrt{14} = \alpha_1$.

- $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 3$

$$\alpha_1 = 3 + \frac{1}{\alpha_2} \quad \text{quindi} \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - 3} = \frac{\sqrt{14}+3}{5} \approx 1,348$$

- $a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 1$

$$\alpha_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_3} \quad \text{quindi} \quad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - 1} = \frac{\sqrt{14}+2}{2} \approx 2,871$$

- $a_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = 2$

$$\alpha_3 = 2 + \frac{1}{\alpha_4} \quad \text{quindi} \quad \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - 4} = \frac{\sqrt{14}+2}{5} \approx 1,148$$

- $a_4 = \lfloor \alpha_4 \rfloor = 1$

  e avanti così..

Otteniamo quindi che $\sqrt{14} = [3,\ 1,\ 2,\ 1,\ \ldots]$

Mi fermo qui perché prima voglio introdurre il teorema di Lagrange

Teorema delle potenze di -1

Fissata una frazione continua $[a_1,\ a_2,\ \dots]$ e i seguenti valori:

$$p_{-1} = 0, \quad p_0 = 1, \quad p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$$

$$q_{-1} = 1, \quad q_0 = 0, \quad q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$$

vale che

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i$$

Facciamo chiarezza

$$p_1 = 3 \cdot 1 + 0 = 3,\ p_2 = 1 \cdot 3 + 1 = 4$$
$$q_1 = 3 \cdot 0 + 1 = 1,\ q_2 = 1 \cdot 1 + 0 = 1$$

e vale che $p_2 \cdot q_1 - q_2 \cdot p_1 = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1 = (-1)^2$

Teorema di Lagrange

Preparativi per Lagrange

Coniugato di un irrazionale quadratico

Dato un numero irrazionale quadratico α

$$\frac{P+\sqrt{D}}{Q} \qquad P, Q \in \mathbb{Z} \text{ e } D \in \mathbb{N}$$

definiamo **coniugato di** α il valore

$$\alpha' = \frac{P-\sqrt{D}}{Q}$$

Irrazionale quadratico ridotto

Definiamo un numero irrazionale quadratico **ridotto** se $\alpha > 1$ e $-1 < \alpha' < 0$

pre-teorema di Lagrange

Se α è un numero irrazionale quadratico ridotto, allora la sua corrispettiva frazione continua è puramente periodica.

teorema di Lagrange

Ogni espansione in frazione continua di un numero quadratico irrazionale α è periodica da un certo termine in poi

Mostriamo il caso particolare: $\sqrt{N}$

$\sqrt{N}$ è un irrazionale quadratico, ma non è ridotto. Sappiamo però

$$\sqrt{N} = a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\dots$$

e che $\alpha \triangleq \sqrt{N} + \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor = \sqrt{N} + a_1$ è ridotto e quindi con frazione continua periodica:

$$\alpha = 2a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n+}\frac{1}{2a_1+}\dots = [\overline{2a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n}]$$

$$\sqrt{N} + a_1 = \alpha = [\overline{2a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n}]$$

Ora, confronto due modi di esprimere $\dfrac{1}{\sqrt{N} - a_1}$:

- $-\dfrac{1}{\alpha'} = \dfrac{1}{\sqrt{N} - a_1} = [\overline{a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_2,\ 2a_1}]$

Vedendo che $\sqrt{N} - a_1 = [0, \overline{a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ 2a_1}]$ posso dire che

- $\dfrac{1}{\sqrt{N} - a_1} = [\overline{a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ 2a_1}]$

Otteniamo quindi, comparando le due espansioni, che $\sqrt{N}$ sarà della forma $[a_1,\ \overline{a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_3,\ a_2,\ 2a_1}]$

Facciamo chiarezza

Consideriamo $\alpha = \sqrt{14} = \alpha_1$.

- $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 3$
$$\alpha_1 = 3 + \frac{1}{\alpha_2} \quad \text{quindi} \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - 3} = \frac{\sqrt{14}+3}{5} \approx 1,348$$
- $a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 1$
$$\alpha_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_3} \quad \text{quindi} \quad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - 1} = \frac{\sqrt{14}+2}{2} \approx 2,871$$
- $a_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = 2$
$$\alpha_3 = 2 + \frac{1}{\alpha_4} \quad \text{quindi} \quad \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - 4} = \frac{\sqrt{14}+2}{5} \approx 1,148$$

Facciamo chiarezza

- $a_4 = \lfloor \alpha_4 \rfloor = 1$
$$\alpha_4 = 1 + \frac{1}{\alpha_5} \quad \text{quindi} \quad \alpha_5 = \frac{1}{\alpha_4 - 1} = \sqrt{14} + 3 \approx 6,742$$
- $a_5 = \lfloor \alpha_5 \rfloor = 6$
$$\alpha_5 = 6 + \frac{1}{\alpha_6} \quad \text{quindi} \quad \alpha_6 = \frac{1}{\alpha_5 - 6} = \frac{\sqrt{14} + 3}{5} = \alpha_2$$

Si vede quindi che $\sqrt{14} = [3,\ \overline{1,\ 2,\ 1,\ 6}]$

Teoremi di Pell

Teorema di quasi esistenza di soluzioni

Indipendentemente dalla frazione continua di $\sqrt{N}$, l'equazione di Pell $x^2 - Ny^2 = 1$ ammette sempre una soluzione intera.
Se $\sqrt{N}$ ha una frazione continua di periodo dispari, allora l'equazione di Pell $x^2 - Ny^2 = -1$, ammette sempre una soluzione

Non esistenza

$x^2 - 3y^2 = -1$ non ha soluzioni intere

Dimostrazione

1. $\sqrt{N} = [a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \alpha_{n+1}]$
2. $\alpha_{n+1} = \sqrt{N} + a_1$
3. $\sqrt{N} = \dfrac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}$ (da un lemma)
4. $p_n(p_n - a_1 q_n) - q(Nq_n - a_1 p_n) = (-1)^n$
5. $p_n^2 - Nq_n^2 = (-1)^n$

Convergenti

$\sqrt{14} = [3, \ \overline{1, \ 2, \ 1, \ 6}]$

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 3 & q_1 &= 2 \\
p_2 &= 4 & q_2 &= 1 \\
p_3 = a_3 \cdot p_2 + p_1 &= 11 & q_3 = a_3 \cdot q_2 + q_1 &= 3 \\
p_4 = a_4 \cdot p_3 + p_2 &= 15 & q_4 = a_4 \cdot q_3 + q_2 &= 4
\end{aligned}
$$

Il teorema precedente effettivamente vale:

$$p_4^2 - 14 \cdot q_4^2 = 15^2 - 14 \cdot 4^2 = 225 - 224 = 1$$

Teorema delle soluzioni generali

Se $(x_1,\ y_1)$ è la più piccola soluzione positiva dell'equazione di Pell positiva, allora tutte le altre soluzioni positive possono essere ottenute dalla seguente equazione:

$$x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n$$

con $n \in \mathbb{N}$

Facciamo chiarezza

Si dovrà trovare le soluzioni di $x_i + y_i\sqrt{14} = (15 + 4\sqrt{14})^i$

i=2: $x_2 + y_2\sqrt{14} = (15 + 4\sqrt{14})^2 = 449 + 120\sqrt{14}$

Cioè, $(x_2,\ y_2) = (449,\ 120)$ è una soluzione:

$$449^2 - 14 \cdot 120^2 = 1$$

i=3: $x_3 + y_3\sqrt{14} = (15 + 4\sqrt{14})^3 = 13455 + 3596\sqrt{14}$

Cioè, $(x_3,\ y_3) = (13455,\ 3596)$ è una soluzione:

$$13455^2 - 14 \cdot 3596^2 = 181037025 - 181037024 = 1$$

i=4: e così via...

Conclusioni

Riassunto

Facciamo chiarezza

$$x^2 - 14y^2 = 1$$

- $\sqrt{14} = [3, \ \overline{1, \ 2, \ 1, \ 6}]$
- $p_4 = 15, \ q_4 = 4$, quindi $(15, \ 4)$ è la soluzione più piccola
- Risolviamo $x_i + y_i\sqrt{14} = (15 + 4\sqrt{14})^i$

Fine

Grazie per l'attenzione e Saluti!