Regelungstechnik

Zusammenfassung

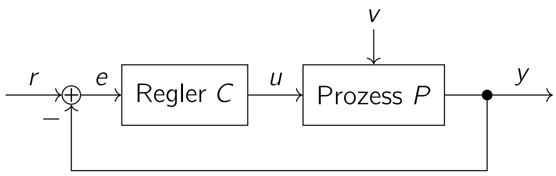
Joel von Rotz / Quelldateien

Inhaltsverzeichnis

Systeme

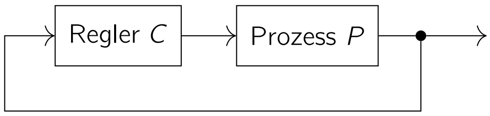
Grundlegende Systeme

Regler System

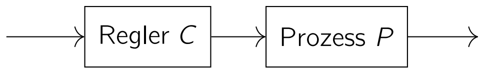


r : Führungsgrösse (Soll-Wert)
e : Regelfehler
u : Stell-/Steuergrösse
y : Regelgrösse (Ist-Wert)
v : Störgrösse

Geschlossenes System



Offenes System

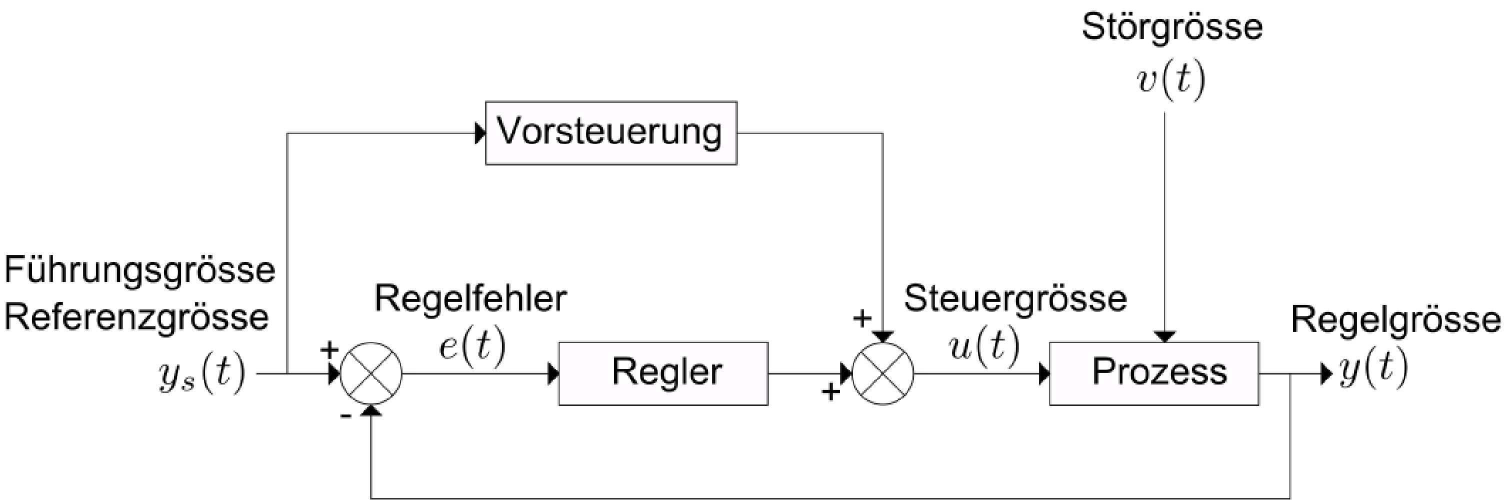


! Schleifenübertragungsfunktion

$$L(s) = C(s) \cdot P(s)$$

Vorsteuerung

Mit einer Vorsteuerung kann die Regelungszeit gekürzt werden (kleinerer Fehler zum Auskorrigieren).



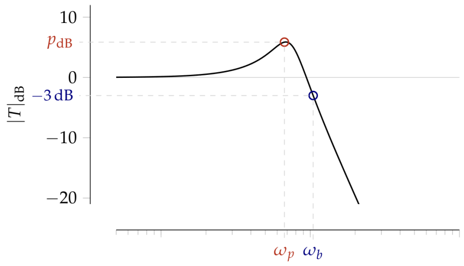
Minimalphasiges System

Liegen keine Pole oder Nullstellen in der rechten Halbebene, so spricht man von **minimalphasigen Systeme**. Amplituden- und Phasengang stehen in einer direkten Beziehung zueinander. Es gilt **nur bei minimalphasigen Systemen**:

$$\angle G \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d \log |G|}{d \log \omega}$$

Pro 20dB Steigung oder Abfall beträgt die Phasenverschiebung $+90°$, respektive $-90°$.

Führungsverhalten



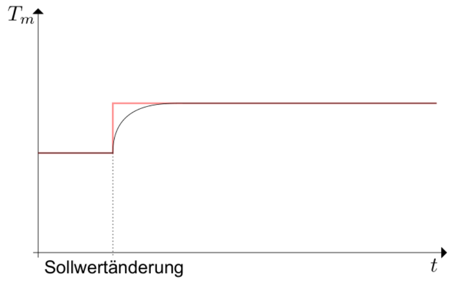
$$G_{yr} = T = \frac{PC}{1+PC} \quad \text{und} \quad G_{ur} = CS = \frac{C}{1+PC}$$

Merkmale

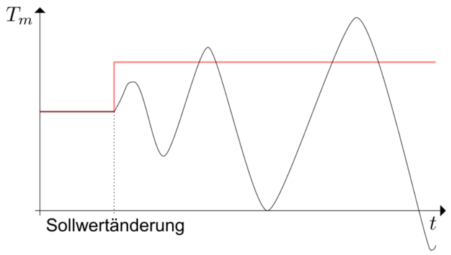
Das Führungsverhalten verfügt über vier Merkmale, welche für jedes System betrachtet soll:

- **Stabilität**
- **Statischer Fehler / stationäre Genauigkeit**
- **Überschwingen**
- **Schnelles Erreichen des stationären Wertes**

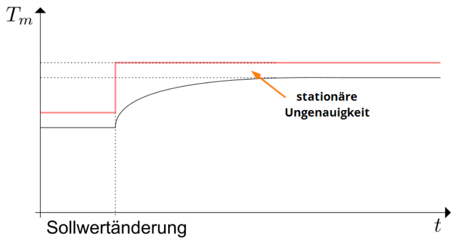
Gutes Führungsverhalten



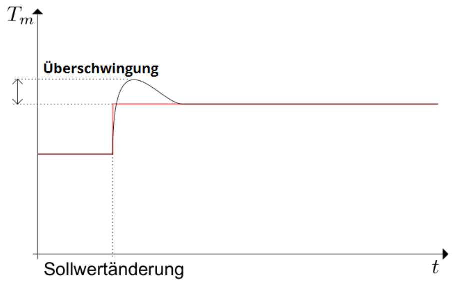
Instabilität



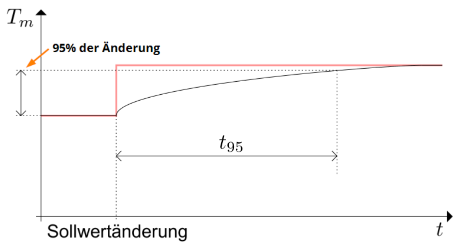
Statischer Fehler / stationäre Ungenauigkeit



Überschwingen



Langsames Erreichen des neuen stationären Wertes



Bleibende Fehler bei langsam oder nicht ändernden Regelgrössen

Der bleibende Fehler bei sich langsam oder nicht ändernden Führungssgrössen ergibt sich anhand des Verlaufs der Übertragungsfunktion bei tiefen Frequenzen.

$$G_{yr} \approx 1 - e_0 - e_1 \cdot s - e_2 \cdot s^2 - \cdots$$

$$e = e_0 \cdot r + e_1 \cdot \dot{r} + e_2 \cdot \ddot{r} + \cdots$$

Typ	r	e
Sprung	s_0	$e_0 s_0$
Rampe	$v_0 t$	$e_0 v_0 t + e_1 v_0$
Parabel	$a_0 t^2$	$e_0 a_0 t^2 + e_1 2 a_0 t + e_2 2 a_0$

Stationärer Fehler

Bei Rampe: $e_0 = 0$ Bei Parabel $e_0 = e_1 = 0$

Störverhalten

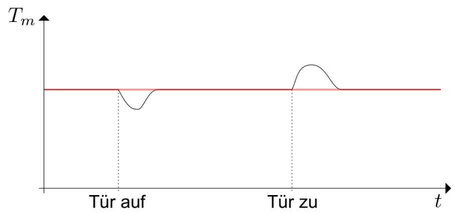
$$G_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$$

Merkmale

Das Störverhlaten verfügt ebenfalls über vier Merkmale, welche für jedes System betrachtet soll:

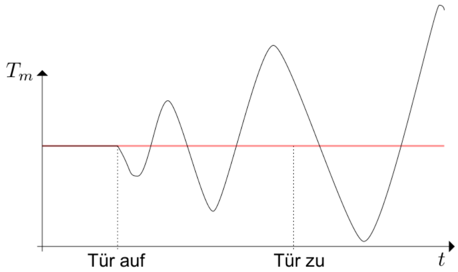
- **Stabilität**
- **Statischer Fehler / stationäre Genauigkeit**
- **Überschwingen**
- **Schnelles Erreichen des stationären Wertes**.

Gutes Störverhalten

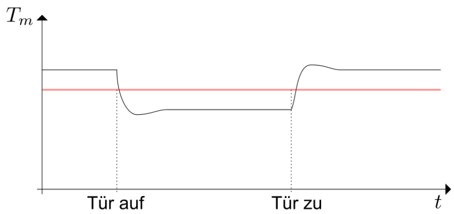


rot: Sollwert

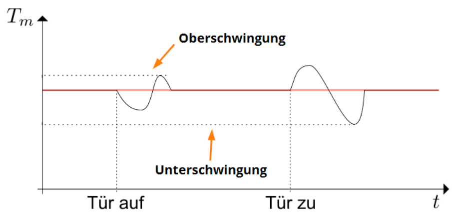
Instabilität



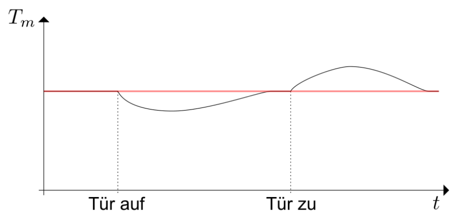
Stationärer Fehler / Ungenauigkeit



Überschwingen



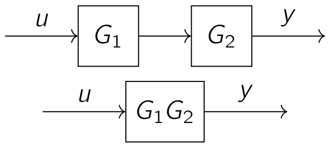
Langsames Erreichen des stationären Wertes



Darstellungsarten

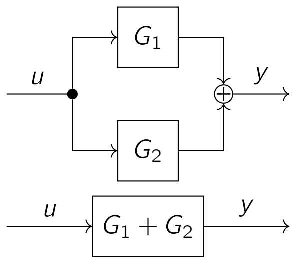
Blockdiagrammalgebra

Verkettung



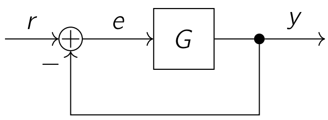
$$y = G_2(G_1 \cdot u) = (G_1 G_2) \cdot u$$

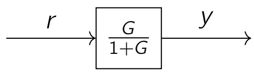
Parallel



$$y = G_1 \cdot u + G_1 \cdot u = (G_1 + G_2) \cdot u$$

Rückkopplung





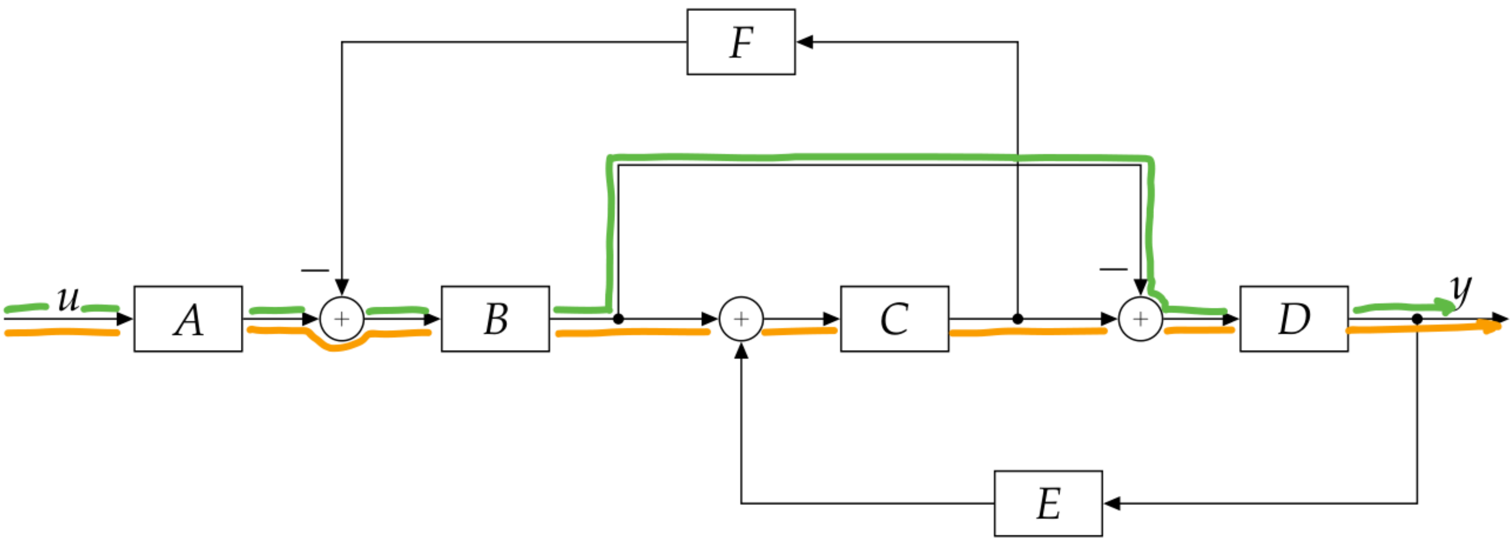
$$\begin{aligned} y &= G \cdot e = G(r - y) \\ (1+G) \cdot y &= G \cdot r \\ y &= \underbrace{\frac{G}{1+G}}_{G_{yr}} \cdot r \end{aligned}$$

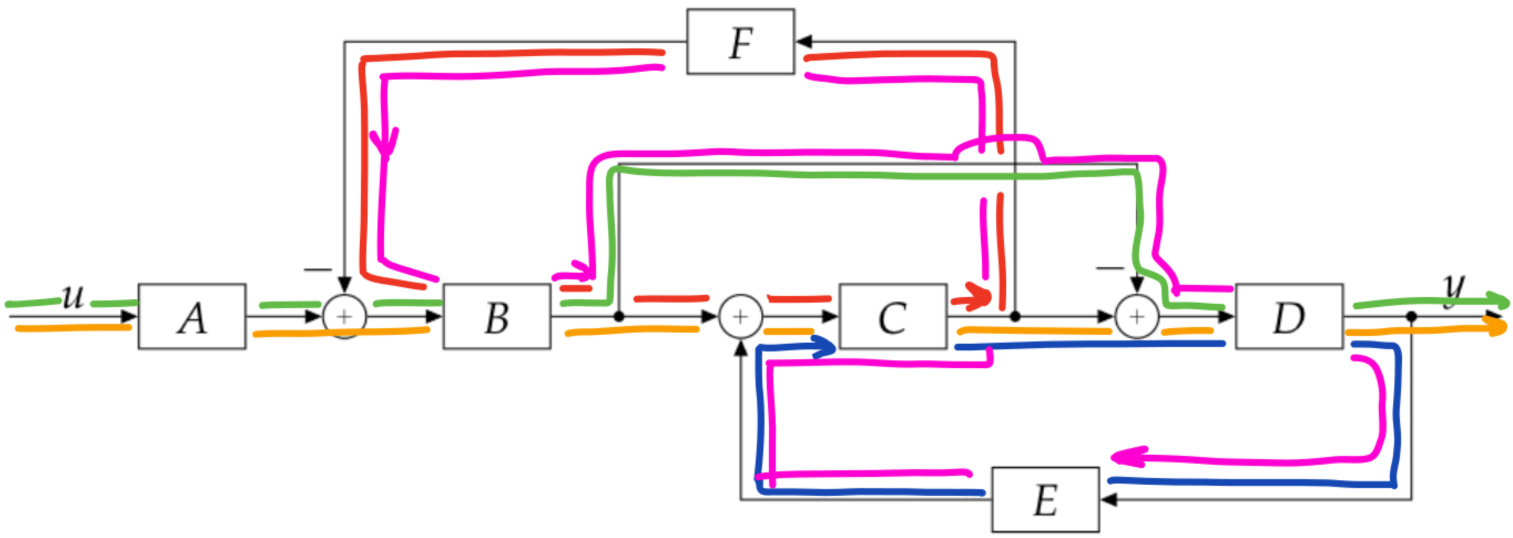
Regel von Mason

$$G_{ij} = \frac{\sum_k P_k \cdot \Delta_k}{\Delta}$$

$$
\begin{aligned}
P_k &= \text{Vorwärtspfad } k \\
\Delta &= 1 - \Sigma \text{ aller Loops} \\
&\quad + \Sigma \text{ aller Produkte 2er Loops, die sich nicht berühren} \\
&\quad - \Sigma \text{ aller Produkte 3er Loops, die sich nicht berühren} \\
&\quad + \cdots \\
\Delta_k &= 1 - \Sigma \text{ aller Loops, die } P_k \text{ nicht berühren} \\
&\quad + \Sigma \text{ aller Produkte 2er Loops, die } P_k \text{ \& sich nicht berühren} \\
&\quad - \Sigma \text{ aller Produkte 3er Loops, die } P_k \text{ \& sich nicht berühren} \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}
$$

Beispiel





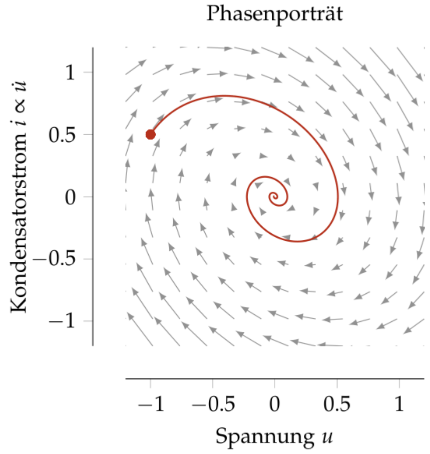
$P_1 = ABCD \quad \Delta_1 = 1 - 0 \quad P_2 = ABD \quad \Delta_2 = 1 - 0$

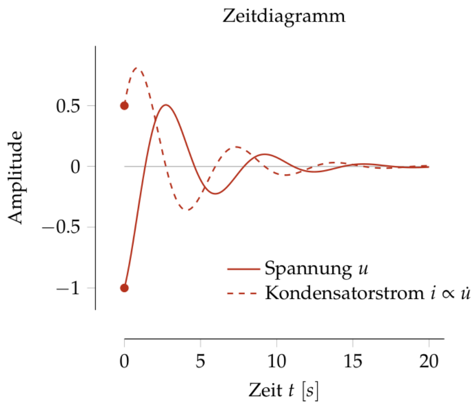
$\Delta = A - ((-BCF) + CDE + ((-B)(-D)(CEF))$

$$G_{uy} = \frac{ABD(1+C)}{A + BCF - CDE - BCDEF}$$

Zustandraumdarstellung

Die Zustandsraumdarstellung erlaubt ein Einblick in das Verhalten eines dynamischen Systems. Anhand eines *Zeitdiagrammes* und *Phasenporträit* kann das System *visualisiert* werden. Man gibt Startkonditionen an und kann über das Phasenporträit den zeitlichen Verlauf verfolgen.





Autonomes, zeitinvariantes System

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(x)} \xrightarrow{x}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Autonome Systeme berücksichtigen äusserliche Beeinflussungen nicht und sind ausschliesslich vom Anfangszustand abhängig.

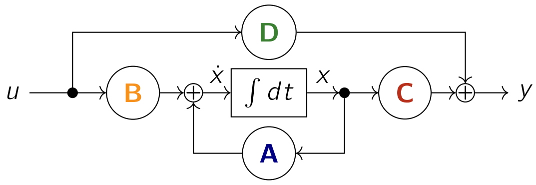
Allgemeine Systeme

$$\xrightarrow{u} \boxed{\begin{matrix} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{matrix}} \xrightarrow{y}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \qquad y = h(x, u)$$

Lineares Zustandsraummodell

Viele der Systeme können an ein zeitinvariantes und lineares System (LTI-System) angenähert werden.



$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \qquad y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

A : beschreibt Dynamik
B : beschreibt Steuereinfluss
C : beschreibt Messung
D : beschreibt Durchgriff

Übertragungsfunktion

Wird als Eingangssignal u

$$u = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

gegeben, ergibt sich folgendes Ausgangssignal

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}(x(0) - (sI - A)^{-1}B)}_{\text{transient } y_t} + \underbrace{\overbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)}^{\text{Übertragungsfunktion}} e^{st}}_{\text{stationär } y_s}$$

Hinweis

Ist A stabil, so geht der transiente Anteil y_t asymptotisch gegen Null. Der stationäre Anteil bleibt übrig und entspricht der Übertragungsfunktion.

The z-Transform

$$\mathcal{Z}\{I_l(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} I_l(k) z^{-k} \quad \to z \in \mathbb{C}$$

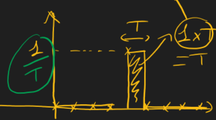
$$= z^{-l} \to \text{nach Rechts (d Samples)}$$

$$l=0 \to \mathcal{Z}\{I_0(k)\} = 1. \qquad z^{-(l+d)} = z^{-l} \times \underbrace{z^{-d}}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases} \quad (\to e^{-T_t s})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1$$

$\neq$



$$1 \times T = T \qquad \frac{1}{T} \times T = 1$$

$$S_l(k) = \{0;\ 0; \dots; 0;\ 1;\ 1;\ 1;\ \dots\}$$

$k=0$ $\qquad$ $k=l$

$$\mathcal{Z}\{S_l(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} S_l(k) z^{-k}$$

$$= z^{-l} + z^{-(l+1)} + \dots$$

$$\mathcal{Z}\{S_l(z)\} = z^{-l} \underbrace{[1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots +]}_{\text{geschlossene Form?}} \to \text{offen}$$

A

$$A = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

$$z^{-1} A = 0 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

$$\underbrace{A - z^{-1} A} = 1 + \underline{\underline{0}} \qquad \underbrace{z^{-\infty} \to 0}_{|z|>1} \quad \left(z^{-\infty} = \frac{1}{z^{\infty}}\right)$$

$$A = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \qquad \underbrace{|z| > 1}_{\text{Konvergenzbereich.}}$$

$$\mathcal{Z}\{S_l(k)\} = z^{-l} \frac{z}{z-1}$$

$\to$ (Verschiebung nach Rechts)

$$l = 0; \quad \mathcal{Z}\{S_l(k)\} = \frac{z}{z-1}$$

3) $w(k) = a^{kT}$ (a^t abgetastet).

$$\mathcal{Z}\{w(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{kT} z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-T} z)^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\underbrace{a^{-T} z}_{\alpha})^{-k}$$

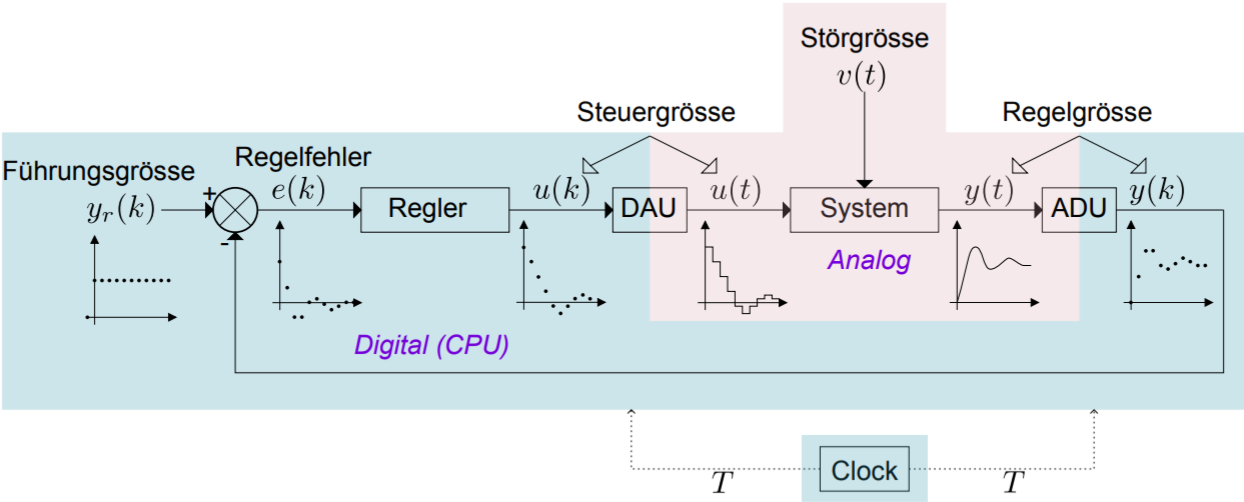
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{-k}$$

$$= \frac{1}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{1}{1 - a^{T} z^{-1}} = \frac{z}{z - a^{T}}$$

$$|\alpha| > 1$$

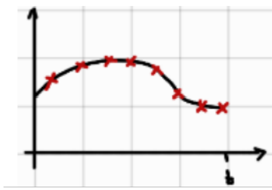
$$|a^{-T} z| > 1 \to |z| > \frac{1}{|a^{-T}|}$$

diskreten Regelkreis



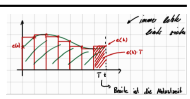
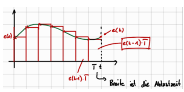
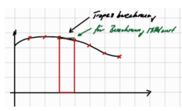
P-Anteil

$P = u(t) = k_p * e(k)$



I-Anteil

Beim I – Anteil gibt es drei Varianten:

Rückwärtsrechteck Regel	$u(k) \approx u_i * (k-1) + \frac{k_p}{T_i} * e(k) * T$	
Vorwärtsrechteck Regel	$u(k) \approx u_i * (k-1) + \frac{k_p}{T_i} * e(k-1) * T$	
Trapez Regel "Tustin-Approx"	$u(k) \approx u_i * (k-1) + \frac{k_p}{T_i} * \frac{e(k)-e(k-1)}{2} * T$	

D-Anteil

$u_d \approx k_p * T_d * \frac{e(k)-e(k-1)}{T}$