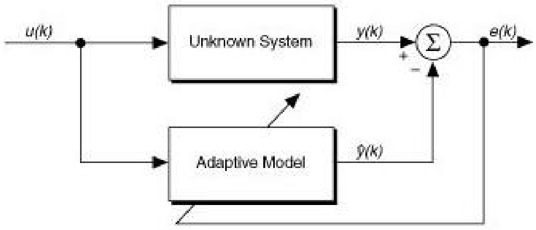

Figura 6.1: Clássico problema de regressão.

que o modelo matemático adaptativo, ajustou-se ao sistema desconhecido, representando assim toda a dinâmica do mesmo. Ou seja, o modelo "identifica" o sistema.
Suponha que ao ser apresentado um sinal $u(k)$ ao sistema desconhecido da figura (6.1), foi fornecido o seguinte sinal de saída $y(k)$. Uma pergunta natural é, dentre os modelos

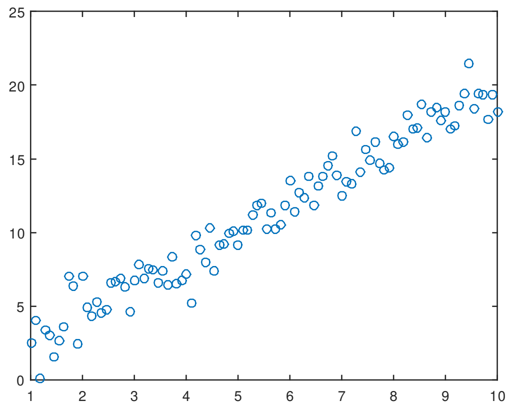

Figura 6.2: Exemplo aplicado ao sistema da figura (6.1).

matemático apresentados na figura (6.3), qual o que "melhor" se ajusta ao sistema? Baseado em qual métrica? Como escolher o "melhor" modelo?
Pela tendência dos dados, claramente vemos que uma hipótese razoavel seria um modelo matemático, tal como:

$$\hat{y}(u_i) = f(w_i; u_i) = w_0 + w_1 u_i$$

com isso, nosso problema se resume a encontrar os valores w_0 e w_1 que melhor ajustam o modelo. Mas, ainda resta uma dúvida. qual a métrica utilizada para medir a qualidade do ajuste?. Ou seja, dado o conjunto de dados de entrada e saída do modelo (desconhecido), como identificá-lo ou representá-lo pelo método de regressão? Para isso iremos utilizar um **funcional de custo**, definido como:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (E_i)^2 \tag{6.1}$$

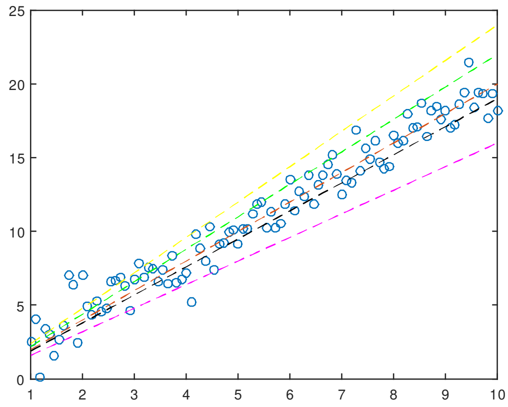

Figura 6.3: Diferentes modelos de ajuste aos dados da figura (6.2).

onde $E = y - \hat{y}$ representa o erro do processo. De modo que para o problema proposto, podemos reescrever a expressão (6.1) como,

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \hat{y}(u_i))^2 \Rightarrow J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(y_i - (w_0 + w_1 u_i))^2.$$

Para minimizar o erro precisamos encontrar os valores de w_0 e w_1 que nos dão o ponto de mínimo na superfície quadrática dada pelo funcional de custo.

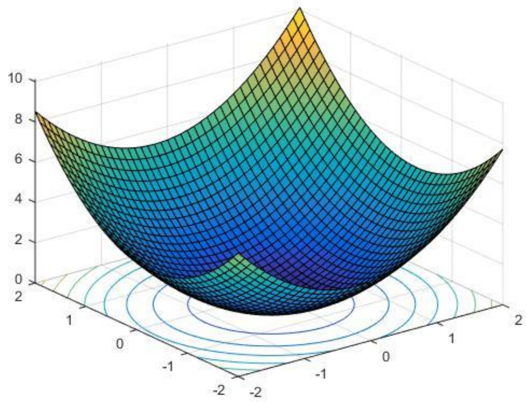

Figura 6.4: Gráfico do funcional de custo para duas variáveis w_0 e w_1.

Para isso, utilizaremos o conceito do vetor gradiente, iremos operar da seguinte forma:

$$\frac{\partial J}{\partial w_0} = 0 \;\; e \;\; \frac{\partial J}{\partial w_1} = 0$$

obtendo as seguintes expressões,

$$\frac{\partial J}{\partial w_0} = \left[\sum_{i=1}^{m}(y_i - (w_0 + w_1 u_i))\right](-1) = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial w_1} = \left[\sum_{i=1}^{m}(y_i - (w_0 + w_1 u_i))\right]\left(-\sum_{i=1}^{m} x_i\right) = 0$$

que corresponde a um sistema de equações lineares, que escrito na forma matricial, corresponde a

$$\begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} u_i \\ \sum_{i=1}^{m} u_i & \sum_{i=1}^{m} u_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i.u_i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle & \langle \mathbf{1},\mathbf{u}\rangle \\ \langle \mathbf{u},\mathbf{1}\rangle & \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{1},\mathbf{y}\rangle \\ \langle \mathbf{y},\mathbf{u}\rangle \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

em que $\mathbf{1} = (1_1, 1_2, \cdots, 1_m)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$ e $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^T$ pertencem ao $\mathbb{R}^m$ e $\mathbf{w} = (w_0\,, w_1)^T \in \mathbb{R}^2$.

■ **Exemplo 6.1** Obter a reta que melhor se ajusta os dados da seguinte tabela

0	1	2	3	4
0,98	-3,01	-6,99	-11,01	-15

Tabela 6.1: Dados do exemplo 6.1.

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35,03 \\ -110,02 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,986 \\ -3,996 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = 0,986.\mathbf{1} - 3,996.\mathbf{u}$$

■

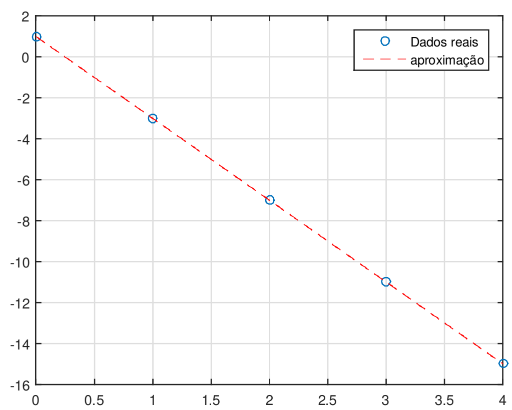

Figura 6.5: Gráfico do exemplo 6.1.