I CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

CURS I

EXAMEN — EXERCIȚII (CURS + SEMINAR + CĂRȚI) / TEORIE

SEMINARE — 1 PREZENȚĂ = 0.05 pct / 1 REZOLVARE = 0.05 pct

NOTĂ FINALĂ : SEMINAR + EXAMEN

CURS I

ȘIRURI ÎN SPAȚII METRICE

I Noțiuni generale despre spații metrice

Def 1 Se numește distanță sau metrică pe o mulțime nevidă X o funcție notată cu $d : X \times X \to \mathbb{R}$ care are următoarele proprietăți

a) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in X$

b) $d(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x, y, z$

Def 2 Se numește spațiu metric orice mulțime nevidă X pe care se definește cel puțin o distanță $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$

NOTAȚIE

(N, d)

EXEMPLE DE SPAȚII METRICE

1) $(\mathbb{R}, d)$, spațiu metric

$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$d(x,y) = |x-y|$ = distanța uzuală a lui $\mathbb{R}$

2) $(\mathbb{R}, d)$, spațiu metric

$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ - distanță pe $\mathbb{R}$

3) $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall\ 1 \le i \le n\}$, $n \ge 2$

$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $d_2((x_1, x_2 \dots x_n), (y_1, y_2 \dots y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $d_1((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = (x_1 - y_1) + \dots + (x_n - y_n)$

$d_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $d_k((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) =$

$= \sqrt[k]{(x_1 - y_1)^k + \dots + (x_n - y_n)^k}$

Def 3 Fie (X, d) un spațiu metric, $x_0 \in X$ și $r > 0$

a) Se numește bila deschisă de centru x_0 și raza r mulțimea $B(x_0, r) = \{y \in X \mid d(y, x_0) < r\}$

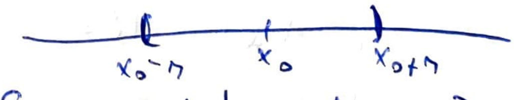
b) Se numește bila închisă de centru x_0 și raza r mulțimea $B[x_0, r] = \{y \in X \mid d(y, x_0) \le r\}$

Exemple de bile deschise și închise

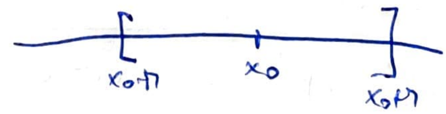
1) $(\mathbb{R}, d)$

$d(x, y) = |x - y|$

$B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$



$B[x_0, r] = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x_0| \le r\} = [x_0 - r, x_0 + r]$



2) $(\mathbb{R}, d)$

$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \ne y \end{cases}$

$B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(y, x_0) < r\} = \begin{cases} \mathbb{R}, & r > 1 \\ \{x_0\}, & r = 1 \\ \{x_0\}, & r \in (0, 1) \end{cases}$

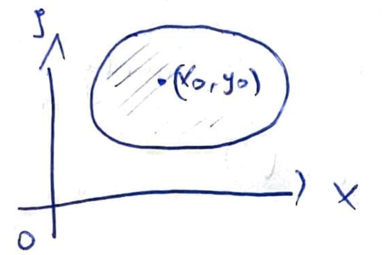
$B[x_0, r] = \{y \in \mathbb{R} \mid d(y, x_0) \le r\} = \begin{cases} \mathbb{R}, & r > 1 \\ \mathbb{R}, & r = 1 \\ \{x_0\}, & r \in (0, 1) \end{cases}$

(2)

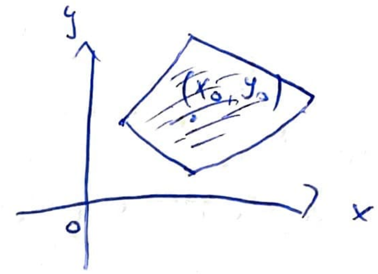
3) $\mathbb{R}^2$.

$B((x_0, y_0), d_2)$

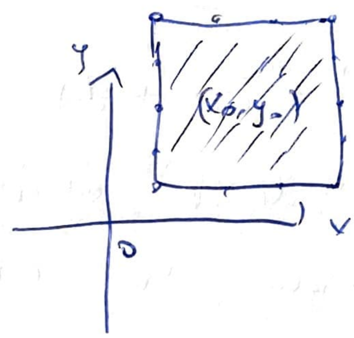
d_2:



d_1



d_∞:



II ȘIRURI ÎN SPAȚII METRICE

(X, d), spațiu metric

Def 1 Se numește șir cu elemente în (X, d) orice f-ție

$f : \mathbb{N} \to X$

NOTAȚII: $f(n) = a_n$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \overset{not}{=} f$

Def 2 Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir din (X, d)

a) Spunem că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent dacă $\exists\, l \in X$ cu proprietatea că ~~orice~~ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(a_n, l) < \varepsilon$ $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$ $(\varepsilon = \text{rază})$

Elem. l se numește limita și se notează cu $\lim_{n \to \infty} a_n$

b) Spunem că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este divergent dacă nu este un șir convergent

c) Spunem că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit dacă toate elementele lui se află într-o bilă închisă: $\exists\, x_0 \in X$, $\exists\, r>0$ a.î. $d(a_n, x_0) \le r$ $(\varepsilon = \text{rază})$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) Spunem că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este șir Cauchy dacă $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\, n_\varepsilon$ a.î. $d(a_n, a_m) < \varepsilon \; (\forall)$ $m, n \ge n_\varepsilon$

__Def 6__ Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din (X, d) și $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ un șir strict crescător din $\mathbb{N}$. Șirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ se numește subșir al șirului x_n (matrice)

__Def 7__ Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir (X, d). Elementul $l \in X$ se numește __pct. limită__ al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă este limita unui subșir: $(\exists)\, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subșir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$

__Teorema 1__ a) Orice șir convergent $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X, d) este șir Cauchy

b) Orice șir Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X, d) este șir mărginit

c) Orice șir Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X, d) care are cel puțin un pct limită în X este șir convergent

__Def 8__ Se numește spațiu metric complet un spațiu (X, d) în care ~~fiecare~~ orice șir Cauchy este convergent

CALCUL INTEGRAL ȘI DIFERENȚIAL

Șiruri în $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$

Șiruri de numere reale

① Șiruri în $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$

$\mathbb{R}^k = \{(a_1, a_2 \dots a_k) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$
$\forall i \in \mathbb{N}$

$(a_1, a_2 \dots a_k) + (b_1, b_2 \dots b_k) = (a_1+b_1, a_2+b_2 \dots a_k+b_k)$

$0 = 0_{\mathbb{R}^k} = (0, 0, 0 \dots 0)$ → elem. neutru pt. adunare în $\mathbb{R}^k$

$\alpha \cdot (a_1 \dots a_k) = (\alpha a_1, \cancel{\alpha} \alpha a_2 \dots \alpha a_k)$

LEMA 1 Oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}^k$ sunt adev. inegalitățile

$$d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y)$$

TEOREMA 1 Se consideră $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $\mathbb{R}^k$ cu $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots x_{kn})$ șir

a) Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este convergent dacă șirurile de numere reale $(x_{1n}, x_{2n}, \dots x_{kn})$ sunt convergente.

$\lim_{n\to\infty} x_n = (\lim_{n\to\infty} x_{1n}, \lim_{n\to\infty} x_{2n}, \dots, \lim_{n\to\infty} x_{kn})$

b) Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este șir Cauchy dacă toate șirurile de numere reale $(x_{1n}, x_{2n}, \dots x_{kn})$ sunt șiruri Cauchy.

EXEMPLU Fie $x_n = \left(\frac{(-1)^n}{n}, 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right), n\in\mathbb{N}^*$

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, n\in\mathbb{N}^*$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$ (mărg. inf. mărg. sup)
$(-1)^n \in [-1, 0)$, $\frac{1}{n} \to 0$

$b_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*$ $= \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}) = +\infty$
(nemărginit sup)

$x_n = (a_n, b_n), n\in\mathbb{N}^*$

șirul x_n este divergent

C: șirul x_n este divergent și nemărginit.

$U = (0,1)$, $v = (1,0)$ } vectorii nu se compară!

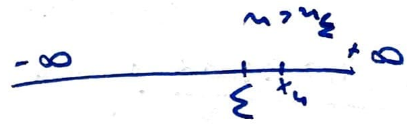
Studiul unui șir de vectori se reduce la studiul elementelor lui.

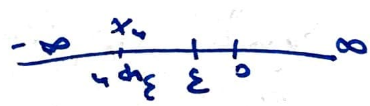
② Șiruri de numere reale.

<u>Def. 1.</u> a) Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ se numește (strict) crescător dacă ($x_n < x_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$) $x_n \le x_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

b) Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ se numește (strict) descrescător dacă ($x_n > x_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$) $x_n \ge x_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

c) Spunem că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita $+\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $x_n > \varepsilon$, $\forall n \ge n_\varepsilon$





d) Spunem că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita $-\infty$ dacă $\forall \varepsilon < 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $x_n < \varepsilon$, $\forall n \ge n_\varepsilon$

<u>LEMA LUI CESARO</u>

Orice șir mărginit de numere reale are cel puțin un subșir convergent (Orice șir de numere reale are cel puțin un pct. limită în $\mathbb{R}$)

<u>CRITERIUL lui CAUCHY pentru șirul de numere reale:</u>

Un șir de numere reale este convergent dacă și numai dacă este șir Cauchy.

($\mathbb{R}$ este spațiu metric complet)

Demonstrație „⇒" P.p. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir convergent din $\mathbb{R}$ ⇒ șir Cauchy în $\mathbb{R}$

(rezultat general valabil în spații metrice)

„⇐" P.p $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir Cauchy ⇒ șir mărginit în $\mathbb{R}$ $\overset{\text{Lema}}{\Longrightarrow}$ (Cesaro)

șirul are un punct limită în $\mathbb{R}$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir Cauchy în $\mathbb{R}$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are un pct. limită în $\mathbb{R}$

COROLAR

Un șir din $\mathbb{R}^k$, $k\geq 2$ este convergent dacă și numai dacă este șir Cauchy ($\mathbb{R}^k$ este spațiu metric complet)

Criteriul raportului pt. șiruri cu termeni pozitivi

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+^*$ pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Dacă $l < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Dacă $l > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

Criteriul radicalului pt. șiruri cu termeni pozitivi

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+^*$ pt. care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$,

atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

LEMA STOLZ-CESARO (varianta $\cancel{\frac{+\infty}{\pm\infty}}$ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Se consideră șirurile a_n, b_n și $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$. care verif. următoarele ipoteze.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir strict crescător.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir strict descrescător.

b) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

C_7: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

Lema Stolz-Cesaro varianta $\frac{0}{0}$

Se consideră $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri din $\mathbb{R}$ care verif. următoarele ipoteze.

a) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ și b_n șir strict monoton

b) ~~$\lim_{n\to\infty}$~~ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

c) $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

C_2: $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

Teorema lui ~~Weiers~~ WEIERSTRASS pt. ~~în~~ șiruri de numere reale

Orice șir de numere reale monoton și mărginit este și convergent. (monoton + mărg = convergent) limita este capătul sup sau inf

(crescător + mărg sup = convergent) ~~lim~~ limita este ~~final~~ capătul sup

(descrescător + mărg inf = convergent) limita este capătul inf

Reciproca teoremei este în general falsă.

$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$

$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ → șirul este convergent. (+ mărginit), dar nu e monoton

~~$x_1 \geq x_2 \geq x_3$~~

$x_1 < x_2 > x_3 \Rightarrow$ ~~rag~~ șirul x_n nu este monoton.

Criteriul Cleștelui pt. șiruri de nr. reale.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șiruri. Cu urm. proprietăți:

a) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n \leq x_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$

b) $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l \in \mathbb{R}$

C_2: $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$

Criteriul Majorării pt șiruri de numere reale.

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ~~șiruri~~ din $\mathbb{R}$ cu urm. proprietăți:

a) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, a.î. $x_n \geq a_n$, $\forall n \geq n_0$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Atunci $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

CURS 3

CALCUL DIFERENȚIAL și INTEGRAL

Șiruri de numere reale

I Teorema 1
Orice șir ~~monoton~~ de numere reale monoton are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$).
$[-\infty, \infty]$

~~Din orice șir mărginit~~

Teorema 2

Orice șir de numere reale are cel puțin un subșir care are limită (în $\mathbb{R}$)

APLICAȚIE la teorema lui WEIERSTRASS

Șirul $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent.

MONOTONIE

$$x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} + \ln n$$

$$= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n+1}{n}$$

Se alege fct. $f : [k, k+1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $k \in \mathbb{N}^*$

f continuă pe $[k, k+1]$
f deriv. pe $(k, k+1)$ $\xrightarrow[\text{Lagrange}]{\text{th.}}$ $\exists\, c \in (k, k+1)$ a.î.

$$\frac{f(k+1) - f(k)}{k+1-k} = f'(c)$$

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{c}$$

$$k < c < k+1 \Rightarrow \frac{1}{k} > \frac{1}{c} > \frac{1}{k+1}$$

$\Rightarrow \frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$ $\forall k \geq 1$

$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ descrescător.

- MĂRGINIREA INFERIOARĂ

$k=1 \Rightarrow \cancel{\ln 2} - \ln 1 < 1$

$k=2 \Rightarrow \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} < \frac{1}{2}$

$\vdots$

$k=n \Rightarrow \ln(n+1) - \cancel{\ln n} < \frac{1}{n}$ (+)

$$\ln(n+1) - \underbrace{\ln 1}_{0} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\ln(n+1) - \ln n < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\ln(n+1) - \ln n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

mărg inferior.

Din 1, 2 $\Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.

Notație $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n) = c \in (0, 1)$

c = constanta lui Euler.

Obs $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) = +\infty$

2) Limita inf. și sup. a unui șir de numere reale.

Pentru șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ construim șirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din $\overline{\mathbb{R}}$ definit prin:

$$u_n = \sup_{k \geq n} x_k \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$v_n = \inf_{k \geq n} x_k \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

PROPRIETĂȚI:

1) $u_{n+1} \le u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2) $v_{n+1} \ge v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

3) $u_n \ge v_m$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$

4) $\exists\, u = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \overline{\mathbb{R}}$

$\exists\, v = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n \in \overline{\mathbb{R}}$

5) $u \ge v$

Def 1 a) Numărul u = infimul $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup\limits_{k\ge n} x_k \right) \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește limita sup a șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

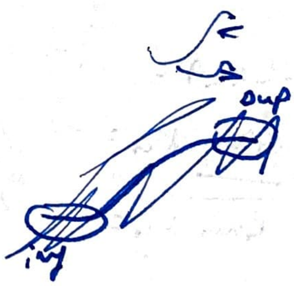
b) Numărul $v = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf\limits_{k\ge n} x_k \right) \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește limita inferioară a șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

NOTAȚII: $\overline{\lim}\, x_n \overset{not}{=} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup\limits_{k\ge n} x_k \right)$

$\underline{\lim}\, x_n \overset{not}{=} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf\limits_{k\ge n} x_k \right)$

Observații

$\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$



Def 2 Numărul $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește un punct limită al șirului x_n dacă $\exists\, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subșir al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$.

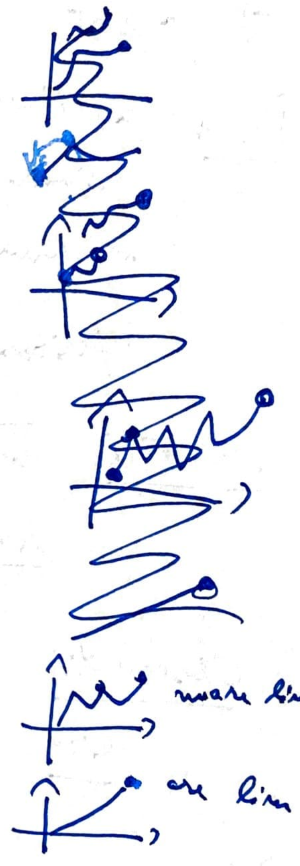
NOTAȚIE: $L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \overset{def}{=} \{ l \in \overline{\mathbb{R}} \mid l = \text{limită al șirului } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \}$

Teorema 3 Pentru orice șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ sunt adevărate egalitățile $\underline{\lim}\, x_n = \inf L((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ și $\overline{\lim}\, x_n = \sup L(($

Teorema 4 a) Un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limită ddacă $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$

b) Un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este mărginit superior ddacă $\lim x_n \in \mathbb{R}$

c) Un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este mărginit inferior ddacă $\underline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$.



APLICAȚIE Fie $x_n := \frac{n(-1)^n}{n+1} \cdot \sin\frac{n\pi}{2}$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, \\ -1 \end{cases}$$

$L(x_n) = \{-1, 0, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\lim}\, x_n = -1 \\ \overline{\lim}\, x_n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (\exists) \lim_{n\to\infty} x_n$$

(x_n) șir mărginit

SERII DE NUMERE REALE

Se consideră șirul $(x_n) \in \mathbb{R}$. Se asociază șirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ definit astfel:

$$s_n = x_0 + \dots + x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Def 1

Perechea de șiruri $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$, notată $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ se numește serie de numere reale

x_n se numește termenul general de rang n al seriei, s_n se numește suma parțială de rang n al seriei.

Def 2 a) Seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește convergentă dacă șirul sumelor parțiale s_n este convergent.

b) Seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește divergentă dacă șirul sumelor parțiale s_n nu este convergent.

c) Spunem că seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ are sumă dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită ($\in \overline{\mathbb{R}}$)

Limita șirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește suma seriei.

NOTAȚIE $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$

$\sum x_n = (x_n, s_n)$

d) Seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește absolut convergentă dacă seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă.

Teoremă: Dacă seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Demonstrație: Șirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent

Notăm $\lim_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$

$x_n = x_0 + x_1 + \dots x_n - (x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1})$

$x_n = s_n - s_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{s_n}_{S} - \underbrace{s_{n-1}}_{S} = \cancel{\lim_{n\to\infty}} S - S = 0$

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

Serii de numere reale.

1) Noțiuni generale

Teorema 1 Dacă seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (reciproca e falsă)

COROLAR Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ sau $\nexists \lim_{n\to\infty} x_n$, atunci seria este divergentă

Obs Reciproca T_1 este falsă

Ex: $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ~~este divergentă~~ serie divergentă

Teorema 2 Orice serie de nr. reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ abs convergentă este serie convergentă.

Obs 1) Reciproca T_2 este falsă

2) Dacă $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \geq 0 \ \forall n \geq n_0$ sau $x_n \leq 0, \forall n \geq n_0$, atunci noț. de serie absolut convergentă și serie conv. sunt echiv.

Def O serie de nr. reale $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ care este conv. și nu este abs. convergentă se numește serie semiconvergentă.

CRITERIUL LUI LEIBNIZ (pentru serii alternate de nr. reale)

Se consideră un șir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^+$ descrescător pt. care ~~există limita și~~ $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Seriile de nr. reale $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ sunt convergente.

EXEMPLU DE SERIE SEMICONVERGENTĂ.

$x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$

Studiem absolut convergența seriei, adică seria $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty, \text{ semidivergentă} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nu este abs. convergentă

Studiem convergența folosind criteriul lui LEIBNIZ.

$x_n = \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow$

a_n șir descrescător.

$\overset{C}{\underset{LEIBNIZ}{\Rightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ serie convergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serie convergentă.

Din ①, ② $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este semiconvergentă.

CRITERIUL LUI ABEL (serii cu termeni oarecare)

Se consideră șirurile (a_n) și (b_n) din $\mathbb{R}$ care verif. urm. ipoteze:

a) $a_{n+1} \le a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

b) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a.î. $\alpha \le b_0 + b_1 + \ldots + b_n \le \beta, \forall n \in \mathbb{N}$

Atunci seria de numere ~~totale~~ reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$ este convergentă

CRITERIUL LUI DIRICHLET

Se consideră șirurile (a_n) și (b_n) care verif. urm. ipoteze:

a) (a_n) monot și mărginit

b) ~~(b_n)~~ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ este convergentă.

Atunci seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$ este convergentă.

Serie: $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}+1, 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1 \dots \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n}\right)$

SERII REMARCABILE DE NUMERE REALE

1) Seria armonică.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$
- ~~convergentă dacă α~~ serie divergentă $\alpha \leq 1$
- serie convergentă $\alpha > 1$

2) Seria putere

$\sum_{n=1}^{\infty} a^{k}$
- absolut convergentă ~~dacă~~ dacă $|a| < 1$
- divergentă dacă $|a| \geq 1$

II Serii cu termeni pozitivi

Se consideră $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din $\mathbb{R}_+$

Teorema 3 Fie o serie de numere reale pozitive $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. Sunt adevărate următoarele afirmații:

a) Șirul sumelor parțiale (s_n) este șir crescător.

b) Seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă ddacă șirul sumelor parțiale (s_n) este mărginit superior.

În plus $\sum_{n=0} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n$

c) Orice serie cu termeni pozitivi poate fi serie convergentă sau serie divergentă

1. CRITERIUL RAPORTULUI (pt. serii cu termeni pozitivi)

Fie (x_n) un șir din $\mathbb{R}_+$ pt. care $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$

Dacă $l<1$, atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă

$l>1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

2. CRITERIUL RADICALULUI (pt serii cu termeni pozitivi)

Fie (x_n) un șir din $\mathbb{R}_+$ pt care $\exists \lim_{n\to\infty} \cancel{\frac{x_{n+1}}{x_n}} \sqrt[n]{x_n} = l$

Dacă $l<1$, atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă.

Dacă $l>1$, atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este divergentă.

3. CRITERIUL RAABE-DUHAMEL

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}_+$ pt care $\exists \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=l$

Dacă $\begin{cases} l<1 & \text{atunci } \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ este divergentă.} \\ l>1, & \text{— — convergentă.} \end{cases}$

4. CRITERIUL DE CONDENSARE A LUI CAUCHY

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir descrescător din $\mathbb{R}_+$ pt care $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Atunci ~~2 serii~~ seriile de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty}}$

și $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n}$ au ~~aceeași~~ aceeași natură.

5. CRITERIUL DE COMPARAȚIE CU INEGALITĂȚI

Se consideră seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pt care $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n < y_n, \forall, n \geq n_0$ (una dintre serii are termenii mai mici decât cealaltă de la un rang încolo)

Dacă $\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ este convergentă, atunci seria } \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ este convergentă} \\ \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ este divergentă, atunci seria } \sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ este divergentă.} \end{cases}$

6. CRITERIUL DE COMPARAȚIE CU LIMITĂ

Se consideră seriile cu termeni din $\mathbb{R}_+$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$, pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, +\infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$

a) Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci seriile au aceeași natură.

b) Dacă $l = 0$ și seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cancel{x_n} y_n$ e conv $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

c) Dacă $l = +\infty$, ~~atunci se~~ și seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ e divergentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ e divergentă.

CURS 5

CALCUL DIFERENȚIAL și INTEGRAL

$X \neq \emptyset$

$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$

$A \subseteq X \Rightarrow A \in \mathcal{P}(X)$ – mulț. părților lui $X = \mathcal{P}(X)$

$A \subseteq X$, $C_X A = X \setminus A$. compl. lui A în rap. cu X

Definiție 1. O familie de mulțimi $\mathcal{T}$ (tau) $\subseteq \mathcal{P}(X)$

Se numește topologie pe X dacă verifică urm. condiții:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

b) $G_1, G_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$

c) $G_i \in \mathcal{T}\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$

Definiția 2. Se numește spațiu topologic o mulțime nevidă X pe care se definește cel puțin o topologie $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

NOTAȚIE $(X, \mathcal{T})$

~~EXEMPLE DST~~

EXEMPLE DE SPAȚII TOPOLOGICE

$X \neq \emptyset$

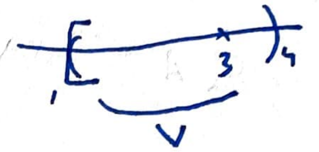
$$\left.\begin{array}{l} \underset{(\text{tau})}{\mathcal{T}_1} = \{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{P}(X) \\ \mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(X) \end{array}\right\} \text{topologii pe } X$$

Definiția 3. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic.

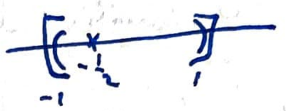
a) O mulțime $G \subseteq X$ se numește mulțime deschisă (relativ la topologia $\mathcal{T}$) dacă $G \in \mathcal{T}$

b) O mulțime $F \subseteq X$ se numește mulțime închisă (relativ la $\mathcal{G}$), dacă $C_X F = X \setminus F \in \mathcal{G}$

c) O mulțime $V \subseteq X$ se numește vecinătate a elementului $x_0 \in X$ dacă $\exists\, G \in \mathcal{G}$ a.î. $x_0 \in G \subseteq V$



NOTAȚIE: $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x_0) = \{V \subseteq X \mid V \text{ vecinătate a elem } x_0\}$



d) O mulțime $K \subseteq X$ se numește mulțime compactă (relativ la $\mathcal{G}$) dacă din orice acoperire cu mulțimi deschise a mulțimii K se poate extrage o subacoperire finită.

$$\left.\begin{aligned} &K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \\ &G_i \in \mathcal{G} \quad \forall i \in I \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists\, i_1, i_2, \dots, i_n \in I \text{ a.î. } K \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n}$$

e) O mulțime $A \subseteq X$ se numește mulțime neconexă (relativ la $\mathcal{G}$) dacă $\exists\, G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ a.î. $G_1 \cap A \neq \emptyset$, $G_2 \cap A \neq \emptyset$, $(G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) = \emptyset$ și $A = (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A)$

f) O mulțime $A \subseteq X$ se numește mulțime conexă (relativ la $\mathcal{G}$) dacă ~~$\exists G$~~ nu este mulțime neconexă.

EXEMPLU DE MULȚIME NECONEXĂ în $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q} = ((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}) \cup ((\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q})$

$(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

$(\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

$((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}) \cap ((\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}) = \emptyset$

$\Rightarrow \mathbb{Q}$ mulțime neconexă.

1R:

(Neconexă atunci când între $a,b \in X$ există un $c \notin X$)
$a<b$

Ex: $(0,2) \cup \{3\}$ - neconexă

$a = 1$
$b = 3$
$c = 2 \notin (0,2)$

<u>Definiție</u>: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și $A \subseteq X$.

a) Elementul $x_0 \in X$, se numește pct interior al mulțimii A, dacă $A \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0)$

<u>Notație</u>: $\mathring{A} \overset{def}{=} \{x_0 \in X \mid A \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0)\}$ - interiorul mulț. A.

x_0 pct interior al lui A

b) Elementul $x_0 \in X$ se numește pct. de aderență al mulțimii A dacă: $V \cap A \neq \emptyset \ \forall V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0)$

<u>NOTAȚIE</u> $\bar{A} \overset{def}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ pct. de aderență al lui $A\}$

c) Elementul $x_0 \in X$ se numește pct. de acumulare a mulțimii A dacă $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \ (\forall) V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0)$

<u>NOTAȚIE</u> $A' \overset{def}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct de acumulare al mulțimii $A\}$

d) Elementul $x_0 \in X$ se numește punct de izolare al mulțimii A dacă $\exists V_0 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0)$ a.î. $V_0 \cap A = \{x_0\}$

<u>NOTAȚIE</u> $I_{\mathcal{T}} A \overset{def}{=} \{x_0 \mid x_0$ este pct. izolat al mulțimii $A\}$.

~~Mulțimea~~

e) Mulțimea $\bar{A} \cap \overline{C_X A}$ se numește frontiera topologică a mulțimii A

<u>NOTAȚIE</u>: $Fr_{\mathcal{T}} A \overset{def}{=} \bar{A} \cap \overline{C_X A}$

TEOREMA 1

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și $A \in X$, Sunt adevărate următoarele afirmații:

a) $\overline{C_X A} = C_X \mathring{A}$

$C_X \mathring{A} = C_X \bar{A}$

$Fr\, A = \bar{A} \cap \overline{C_X A} = \bar{A} \cap$

$M \cap C_X N \stackrel{def}{=} M \cap (X \setminus N)$

b) $\mathring{A} \subseteq A$

$G \in \overline{G}$, $G \subseteq A \Rightarrow G \subseteq \mathring{A}$

$\mathring{A} \in \mathcal{T}$

$A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = \mathring{A}$

c) $A \subseteq \bar{A}$

$A \subseteq F$, F închisă $\Rightarrow \bar{A} \subseteq F$

$\bar{A}$ mulțime închisă.

A este închisă $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

d) $\bar{A} = A \cup A'$

A este mulțime închisă dacă

$A = A \cup A'$

e) $I_Z\, A \subseteq A \setminus A'$

② Topologia unui spațiu metric.

(X, d) = spațiu metric.

$d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ distanța d.

Teorema 2. Orice spațiu metric (X, d) este spațiu topologic.

Demonstrație: Distanței d îi asociez o topologie (familie de mulțimi)

$\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{P}(X)$ definită în felul următor:

$$\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X \mid G \neq \emptyset, (\forall) x \in G \ \exists R > 0$$

a.î. $B(x, R) \subseteq G\}$

TERMINOLOGIE: $\mathcal{T}_d$ topologia asociată unei distanțe d.

~~TOPOLOGIA UNUI SPAȚIU METRIC~~

CALCULUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL.

TOPOLOGIA UNUI SPAȚIU METRIC

(X, d) spațiu metric.

$$\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X \mid G \neq \emptyset, \forall x \in G\ \exists r > 0 \text{ a.î. } B(x, r) \subseteq G\}.$$

Teorema 1. (Propr. topologiei $\mathcal{T}_d$)

În orice spațiu metric (X, d) sunt adevărate următoarele afirmații:

a) Orice bilă deschisă din X ~~este~~ este mulțime deschisă ($B(x, r) \in \mathcal{T}_d$, $\forall x \in X$, $\forall r > 0$)

b) Orice bilă închisă este mulțime închisă ($B[x, r]$ e mulț. închisă $\forall x \in X$ $\forall r > 0$)

c) Spațiul topologic $(X, \mathcal{T}_d)$ ~~e~~ este spațiu topologic separat ($\forall x \neq y \in X$, $\exists V_1 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_d}(x)$, $\exists V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_d}(y)$ a.î. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$)

d) Fie $A \subseteq X$ și $x_0 \in X$

$$\begin{cases} x_0 \in \mathring{A} \iff \exists r > 0 \text{ a.î. } B(x_0, r) \subseteq A \\ x_0 \in \bar{A} \iff \forall r > 0,\ B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset \\ x_0 \in A' \iff \forall r > 0,\ B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \\ x_0 \in \operatorname{Iz} A \iff \exists r > 0 \text{ a.î. } B(x_0, r) \cap A = \{x_0\} \end{cases}$$

e) Fie $A \subseteq X$ și $x_0 \in X$

$x_0 \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din A a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$

$x_0 \in A' \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din $A \setminus \{x_0\}$

Exemple - topologia $\mathcal{T}_d$

1) $(\mathbb{R}, d)$ - sp. metric $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$

$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ - topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$

2) $(\mathbb{R}^n, d_2)_{n \geq 2}$ $\quad d_2((a_1, \dots a_n), (b_1, \dots b_n)) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + \dots + (b_n-a_n)^2}$

↳ distanța uzuală a lui $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{T}_{d_2} \overset{not}{=} \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ - topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$.

APLICAȚII: $A = [0, 1) \cup \{2\} \subseteq \mathbb{R}$

$1 \in A'$? (DA)

$2 \in \bar{A}$? (DA)

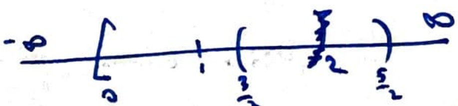
$2 \in A'$? (NU)

a) Aleg. $x_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1 \\ x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\| \Rightarrow 1 \in A'$$

b) Aleg $y_n = 2$, $n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to \infty} y_n = 2 \\ y_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\| \Rightarrow 2 \in \bar{A}$$



$B(2, \frac{1}{2}) \cap A \setminus \{2\} = \emptyset \Rightarrow$

$2 \notin A'$

Teorema 2 (Caracterizarea mulț. compacte în spații metrice)

O mulțime $K \subseteq (X, d)$ este compactă (relativ la $\mathcal{T}_d$) ddacă $\forall$ șir $x_n \overset{din}{\subseteq} K$ are cel puțin un pct. limită $l \in K$

Exemplu: $K = [0, 2) \subseteq \mathbb{R}$

K - mulțime compactă? (NU)

Aleg. $x_n = \frac{2n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in K, \forall n \in \mathbb{N} \\ \exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2 \notin K \end{array}\right\| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ K nu este mulț. compactă.

Teoreme HEINEZ-BOREL

O mulțime $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ este mulțime compactă ddacă K ~~are 2 proprietăți~~: este mulțime închisă și mărginită în $\mathbb{R}^n$

APLICAȚIE

$A = [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$

A - mulțime închisă
A - nemarg superior $\Rightarrow$ A nu este mulțime compactă

Definiția 1

O mulțime nevidă $I \subseteq \mathbb{R}$ se numește interval în $\mathbb{R}$ dacă $\forall\, x \leq y \in I$ avem că $\{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \leq y\} \subseteq I$

Exemple 1) $I = \{a\}$ - interval

2) $I = \mathbb{R}$ - interval

3) $I = [0, 2] \cup \{3\}$

$x = 1 \in I$
$y = 3 \in I$
$x < t = 2 < y = 3$, $t \notin I$ $\Rightarrow$ I nu e interval.

4) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - nu sunt intervale.

Teorema 2 - teorema de caract. a mulțimilor conexe din $\mathbb{R}$.

O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ este conexă ddacă $A = \emptyset$ sau A este interval.

Exemplu: $A = [0, 2)$

$x \leq y \in A \Rightarrow 0 \leq x \leq y < 2$
$x \leq t \leq y$ $\Rightarrow t \in A$

A interval
$\neq \emptyset$ $\Rightarrow$ A mult. conexă.

FUNCȚII CONTINUE

① Noțiuni generale despre funcții.

$f: X \to Y$, o funcție

Def 1: a) Fie $f: X \to Y$ o funcție și $A \subseteq X$. Se numește imagine directă a mulțimii A prin funcția f mulțimea $f(A)$

$$f(A) \overset{def}{=} \{ y \in Y \mid \exists x \in A \text{ a.î. } f(x) = y \} \subseteq Y$$

b) ~~Def~~ Fie: $f: X \to Y$ o funcție și $B \subseteq Y$. Se numește preimaginea (imaginea) a mulțimii B prin funcția f mulțimea $f^{-1}(B) \overset{def}{=} \{ x \in X \mid f(x) \in B \} \subseteq X$.

Obs: $f:$ ~~$X \to Y$~~ $X \to Y$ o funcție

a) $f(\emptyset) = \emptyset$

$f(X) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X \text{ a.î. } y = f(x) \}$

$f(X) = Y \Rightarrow \operatorname{Im} f = Y \Leftrightarrow f$ funcție surjectivă.

b) $f^{-1}(\emptyset) = \{ x \in X \mid f(x) \in \emptyset \} = \emptyset$

$f^{-1}(Y) = \{ x \in X \mid f(x) \in Y \} = X$

② Funcții continue - definiții și proprietăți.

Def. 1. Fie $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ și $x_0 \in D$

Spunem că f este funcție continuă în x_0 dacă

$\forall W \in \mathcal{V}_{\tau_{d_2}}(f(x_0)), \exists V \in \mathcal{V}_{\tau_{d_1}}$ a.î. $f(D \cap V) \subseteq W$

Teorema 1 Fie $D \subseteq (X, d_1)$ a.î. $\exists x_0 \in \operatorname{Izo} D$, $\forall$ funcție $f: D \to (Y, d_2)$ este continuă în x_0.

Demonstrație: $x_0 \in \mathrm{Iz}_{\tau} D \Rightarrow \exists\, V_0 \in \mathcal{V}_{\tau_{d_1}}(x_0)$ a.î. $V_0 \cap D = \{x_0\}$

$f(V_0 \cap D) = f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\}$

Alegem $W \in \mathcal{V}_{\tau_{d_2}}(f(x_0))$

$\{f(x_0)\} \subseteq W \Rightarrow$

$\Rightarrow f(V_0 \cap D) \subseteq W$

$\Rightarrow f$. cont. în x_0

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL.

Funcții continue.

Definiții alternative pt. funcțiile continue.

a) Funcția $f: D \subseteq (X, d_1) \to (X, d_2)$ este continuă în $x_0 \in D$ dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\ (\forall)\ x \in D$ cu $d(x_1, x_0) < \delta_\varepsilon$

b) Funcția $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este continuă în $x_0 \in D$ dacă $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din D, cu $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teorema 1 (Prop f.ct. continue)

$f: (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o fct. continuă. Sunt adev. urm. afirmații:

a) $\forall\ G \in \mathcal{T}_{d_2}$ avem că $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_{d_1}$ („întoarce" mulțimi deschise din Y în mulțimi deschise din X)

b) $\forall\ F \subseteq Y$ mulțime închisă, avem că $f^{-1}(F) \subseteq X$ mult. închisă. („întoarce" mult. închise din Y în mult. închise din X)

c) $(\forall)\ K \subseteq X$ mulțimea compactă avem că $f(K) \subseteq Y$ mult. compactă („duce" mult. compacte din X în mult. compacte din Y)

d) $(\forall)\ A \subseteq X$ mulțime conexă, avem că $f(A) \subseteq Y$ mult. conexă („duce" mulțimea conexă din X în mult. conexă din Y)

A

Teorema 2

Fie $K \subseteq (X, d_1)$ o mult. compactă. Orice fct. continuă $f: K \subseteq (X, d_1) \to \mathbb{R}$ este mărginită și își atinge ~~marg~~ marginile. ($(\exists)\min f(x)$, $(\exists)\max f(x)$)

Şir

Definiţia 1 Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Spunem că $f: I \to \mathbb{R}$ are propr. lui Darboux. $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall x \in \mathbb{R}$ situat între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists)\, c_x \in I$ situat între x_1, x_2 a.î. $f(c_x) = x$

Teorema 3.

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval.

a) $(\forall)$ f = fct. continuă ; $f: I \to \mathbb{R}$ are propr. lui Darboux

b) $(\forall)$ f - injectivă $f: I \to \mathbb{R}$ care are propr. Darboux este str. monotonă.

COROLAR:

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ şi $f: I \to \mathbb{R}$ o fct. continuă.

a) Dacă f. injectivă, atunci f este str. monotonă.

b) Dacă $(\exists)\, a, b \in I$ a.î. $f(a) \cdot f(b) < 0$;
$(\exists)\, c \in I$ situat între a, b a.î. $f(c) = 0$.
$(\nexists)$

① $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x$ (fct. cont fără propr. Darboux)

$B(0,1) \cap \mathbb{N} = \{0\} \Rightarrow 0 \in \text{Iz}\, \mathbb{N}$

~~$B(0, n) \cap \mathbb{N} =$~~

$B(n,1) \cap \mathbb{N} = \{n\} \Rightarrow n \in \text{Iz}\, \mathbb{N}$

$\Rightarrow \text{Iz}\, \mathbb{N} = \mathbb{N} \Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{N}$

! Dacă x izolat într-un pct, x cont în punctul acela.

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$

$\lambda \in (f(0), f(1)) \Rightarrow (\exists)\, c \in (0,1)$ a.î. $f(c) = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow f$ nu are propr. lui Darboux.

ȘIRURI DE FUNCȚII

Se consideră șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ unde $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

Definiția 1 Spunem că șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu pe o mulțime nevidă $A \subseteq D$, $\forall x \in A$. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$

NOTAȚIE $\forall x \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{not}{=} f(x)$

$$f : A \to \mathbb{R}$$

$$f_n \xrightarrow[A]{s} f$$

Exemplu: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (0^0 - nu se poate)

Fie $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$A = \{x \in D \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$A = [0,1]$$

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$$

Definiția 2 Spunem că șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către funcția $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unde $A \subseteq D$ este nevidă, dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î.
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall x \in A$

NOTAȚIE $f_n \xrightarrow[A]{u} f$

Observație: $f_n \xrightarrow[A]{u} f \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f_n \xrightarrow[A]{s} f$

Conver

<u>Teorema</u>: (Criteriul practic de convergență uniformă)

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții și $f : A \subseteq D \to \mathbb{R}$ o funcție.
Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $f_n \xrightarrow[A]{u} f$

b) $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

<u>Teorema lui WEIERSTRASS pentru șiruri de funcții</u>

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții și $f : A \subset D \to \mathbb{R}$ o funcție astfel că $f_n \xrightarrow[A]{u} f$.
Dacă $\exists\, x_0 \in A$ cu propr. că $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n este continuă în x_0, atunci f este continuă în x_0

<u>COROLAR</u> Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții și $f : A \subseteq D \to \mathbb{R}$ o funcție astfel ca $f_n \xrightarrow[A]{s} f$. Dacă $\exists\, x_0 \in A$ a.î. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ f_n este continuă în x_0 și f nu este continuă în x_0, atunci $f_n \cancel{\xrightarrow[A]{u}} f$

<u>EXEMPLU</u>

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

f_n continuă în $x_0 = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$
f nu este funcție continuă în $x_0 = 1$ $\Rightarrow f_n \cancel{\xrightarrow[{[0,1]}]{u}} f$

<u>EXEMPLU</u> $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$, $n \in \mathbb{N}$

<u>Convergența simplă</u>

Fie $x \in (0,\infty)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0$ (îl lăsăm pe x ca o const)

$A = (0,\infty)$

$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = 0$

$f_n \xrightarrow[(0,\infty)]{s} f$

Convergență uniformă.

$(n \text{ e fixat})$

$$\sup_{x\in(0,\infty)} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \sup_{x\in(0,\infty)} \left| \cancel{f} \frac{\cancel{x+}\, x}{x+n} - 0 \right| = \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{x}{x+n} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0$$

$\cancel{\text{Si}}$ C2: $\cancel{f_n \xrightarrow[(0,\infty)]{u} f}$

CURS 8

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

SERII DE FUNCȚII

Se consideră șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

I se atribuie șirul de funcții $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit în modul următor:

$$s_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x), \ \forall x \in D$$

Definiția 1: Perechea de șiruri de funcții $((f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}})$ se numește serie de funcții notată cu $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$

f_n se numește termenul general de rang n al seriei de funcții.

s_n se numește suma parțială de rang n al seriei de funcții.

Definiția 2: a) Spunem că seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este simplu convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplu pe mulț. A.

b) Spunem că seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergentă pe mulț. $A \subseteq D$ dacă seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ este simplu convergentă pe mulț. A.

c) Spunem că seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform pe mult. A.

Observație: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ absolut convergentă pe mulț. A $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ simplu convergentă pe mulț. A

2) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulț. A $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ simplu convergentă pe mult. A.

Teorema 1: Se consideră șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $f_n: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $A\subseteq D$ nevidă și $x_0\in A$. Dacă seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergent pe mulț. A către funcția $f: A\to\mathbb{R}$ și f_n este funcție continuă în x_0, $\forall n\in\mathbb{N}$, atunci f este continuă în x_0.

Criterii de convergență pentru serii de funcții.

Criteriul lui Cauchy pentru serii de funcții.

Seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea $A\subseteq D$, ddacă $\forall \varepsilon>0\ \forall n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\dots+f_{n+m}(x)|<\varepsilon\ \forall x\in A$, $\forall n\geq n_\varepsilon$ $\forall m\in\mathbb{N}^*$

Teorema lui Weierstrass pentru serii de funcții

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții cu $f_n: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ și $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+^*$ astfel ca $|f_n(x)|\leq a_n\ \forall x\in D$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Dacă seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform și absolut convergentă pe mult. D.

APLICAȚIE: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{\cos(nx)}{n^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

$|f_n(x)|=\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|=\frac{|\cos(nx)|}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}\quad\forall x\in\mathbb{R}$ (1)

$a_n=\frac{1}{n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serie convergentă (2)

(1), (2) $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ este abs conv. și uniform convergentă

Criteriul lui Dirichlet pentru serii de funcții

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri de funcții cu $f_n, g_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ care verifică următoarele condiții:

a) $f_n \xrightarrow[D]{u} 0$

b) $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, $\forall x \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$

c) $\exists M > 0$ a.î. $|g_0(x) + g_1(x) + \ldots + g_n(x)| \leq M$, $\forall x \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Atunci seria de funcții $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă pe mulțimea D

Criteriul lui ABEL pentru serii de funcții.

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri de funcții cu $f_n, g_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică următoarele condiții:

a) $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, $\forall x \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sau $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, $\forall x \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) ~~$\exists$~~ $\exists M > 0$, a.î. $|f_n(x)| \leq M$, $\forall x \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) seria de funcții $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ este uniform convergentă pe D.

Atunci seria de funcții $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \cdot g_n$ este uniform convergentă pe mulțimea D.

Aplicație: Seria de funcții $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$, nu este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$

Seria de funcții $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ nu este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$ ddacă $\forall x \in \mathbb{R}$, seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ nu este absolut convergentă.

Fie $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n+x^2}}{\frac{1}{n}} = 1 \in (0,\infty) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

au aceeași natură

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serie divergentă $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ serie divergentă.

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right|$ serie divergentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ nu este abs. convergentă.

$\forall x \in \mathbb{R}$.

$\frac{(-1)^n}{n+x^2} = f_n(x) \cdot g_n(x)$

$f_n(x) = (-1)^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$g_n(x) = \frac{1}{n+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$g_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} 0$!! (verificam)

$g_{n+1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n+1+x^2} - \frac{1}{n+x^2} = \frac{-1}{(n+1+x^2)(n+x^2)}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$|f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)| = |-1+1-1+\ldots+(-1)^n| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{R}$.

Din criteriul lui Dirichlet $\Rightarrow$ seria de funcții $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

SPAȚII LINIARE NORMATE

Spațiul liniar real.

X

$+ : X \times X \to X$

$(u, v) \to u + v$ – adunarea vectorilor din X

$(X, +)$ – grup abelian

0_X – elem neutru al adunării vectorilor din X

$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$

$(\alpha, x) \to \alpha \cdot x \in X$ înmulțirea cu scalari a vectorilor din X

$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

$\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

$(\alpha \cdot \beta) \cdot x$

Definiția 1: Se numește normă pe spațiul liniar real X o funcție $p : X \to \mathbb{R}$, care are următoarele proprietăți:

a) $p(u+v) \leq p(u) + p(v) \quad \forall u, v \in X.$

b) $p(\alpha \cdot u) = |\alpha| \cdot p(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in X$

c) $p(u) = 0 \iff u = 0_X$

Notație: $p(u) \overset{not}{=} \|u\|$ = norma vectorului u

$p \overset{not}{=} \| \ \|$

Definiția 2: Se numește spațiu liniar normat orice spațiu liniar real pe care se definește cel puțin o normă. $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$, sau $p : X \to \mathbb{R}$

NOTAȚIE: $(X, \| \ \|)$ - spațiu liniar normat

CURS. 9

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL.

Spații liniare normate

Exemple de spații liniare normate

1) $(\mathbb{R}, |\ |)$ (F.d. modul)

$|\ |: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \to |x| \in \mathbb{R}$

2) $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$, $n \geq 2$

$\|\ \|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\|(a_1, \dots a_n)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$

NOTAȚIE $(X, \|\ \|)$

$u \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$\frac{u}{\alpha} \overset{not}{=} \frac{1}{\alpha} u$.

Teorema 1.

Orice spațiu liniar normat $(X, \|\ \|)$ este spațiu metric.

$\|\ \|: X \to \mathbb{R}_+$

$d: X \times X \to \mathbb{R}$, $d(u, v) \overset{def}{=} \|u - v\|$ - distanța asoc. normei.

SCHEMĂ $\|\ \| \Rightarrow d \Rightarrow \mathcal{T}_d \overset{not}{=} \mathcal{T}_{\|\ \|}$ (topologia generată de norma $\|\ \|$)

FUNCȚII DERIVABILE

① Noțiuni generale

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \|\ \|)$, $x_0 \in D \cap D'$

Definiția 1 Spunem că funcția $f: D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \|\ \|)$ este derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$ dacă $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in X$

NOTAȚIE $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{not}{=} f'(x_0) \in X$ - derivata f.d. f în pct. x_0.

Definiția 2 Spunem că funcția $f: D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \|\ \|)$ este derivabilă pe mulțimea $A \subseteq D \cap D'$ dacă funcția f este derivabilă în orice punct al mulțimii A. $f': A \subseteq D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \|\ \|)$

Teoremă! Orice funcție $f: D \subseteq \mathbb{R} \to (X\mathbb{R}, \| \|)$, derivabilă în punctul $x_0 \in D \cap D'$ este funcție continuă în punctul x_0.

Observație: Reciproca este falsă!

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = |x|$

f continuă în $x_0 = 0$.

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ = nu există $\Rightarrow$ f nu e deriv. în x_0

② **Funcții vectorial derivabile**

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \; m \geq 2$

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots f_m(x))$

$f_1, f_2 \dots f_m : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ componentele fct. vectoriale f.

Teorema de caracterizare a derivabilității unei fct. vectoriale:

Fct. $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \; m \geq 2$ derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$

ddacă $f_1, f_2 \dots f_m : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în x_0.

$f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0) \dots f_m'(x_0))$

Ex: $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (\underbrace{|x|}_{f_1(x)}, \underbrace{\arcsin(x)}_{f_2(x)}, \underbrace{e^x}_{f_3(x)})$

$f_1, f_2, f_3 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \text{ derivabilă pe } [-1,1] \setminus \{0\} \\ f_2 \text{ derivabilă pe } [-1,1] \\ f_3 \text{ derivabilă pe } [-1,1] \end{array}\right\} f \text{ derivabilă pe } (-1,1) \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \left(-1, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, e^x\right), & x \in (-1, 0) \\ \left(1, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, e^x\right), & x \in (0, 1) \end{cases}$$

3) Funcții reale derivabile.

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Teorema de caracterizare a derivabilității fct. inverse.

Fie $J, \mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ două intervale și $f: J \to \mathcal{J}$ fct. injectivă.

cu următoarele proprietăți:

a) f este fct. strict monotonă pe J

b) f este derivabilă în $x_0 \in J$

c) $f'(x_0) \neq 0$.

~~Atunci~~ Atunci $f^{-1}: \mathcal{J} \to J$ este derivabilă în $f(x_0)$

și $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Teorema lui Rolle.

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fct. continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b)

cu $f(a) = f(b)$

$(\exists)$ $c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = 0$

Teorema lui Lagrange:

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, o fct. continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b)

$(\exists)$ $c \in (a,b)$ a.î. $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$

Corolare:

1) Fie $J \subseteq \mathbb{R}$ interval și $f: J \to \mathbb{R}$ fct. derivabilă pe J

- dacă $f'(x) = 0$ $(\forall) x \in J \Rightarrow f$: fct. constantă.
- dacă $f'(x) > 0$ $(\forall) x \in J \Rightarrow f$: s↗ pe J
- dacă $f'(x) \geq 0$, $(\forall) x \in J \Rightarrow f$: ↗ pe J

• dacă $f'(x) < 0$ $(\forall)$ $x \in J$ $\Rightarrow$ f: s$\searrow$ pe J

• dacă $f'(x) \leq 0$ $(\forall)$ $x \in J$ $\Rightarrow$ f: $\searrow$ pe J

2) Fie $J \subseteq \mathbb{R}$ interval și $f : J \to \mathbb{R}$ = funcție continuă pe J pt care $(\exists)$ $x_0 \in J$ a.î. f. derivabilă pe $J \setminus \{x_0\}$.

dacă $(\exists)$ $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f. este derivabilă în x_0 și

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

Teorema lui Darboux.

Fie $J \subseteq \mathbb{R}$ = interval și $f: J \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe J.

Atunci $f' : J \to \mathbb{R}$ are P.D.

Corolar:

P.p. că $f'(x) \neq 0$ $(\forall)$ $x \in J$. Atunci $f'(x) > 0$, $(\forall)$ $x \in J$ sau $f'(x) < 0$ $(\forall)$ $x \in J$

Def. 3: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție și un element $x_0 \in D$ fixat.

a) Elementul $x_0 \in D$ se numește punct de minim ~~stam.~~ local (global) al funcției f dacă $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ a.î. ~~$f(x_0) \geq f$~~ $f(x) \geq f(x_0)$ $(\forall$ $x \in V \cap D)$ $(f(x) \geq f(x_0)$ $\forall$ $x \in D)$

b) Elementul $x_0 \in D$ = pct de maxim local (global) al fct. f dacă $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ a.î. $f(x) \leq f(x_0)$ $(\forall)$ $x \in V \cap D$ $(f(x) \leq f(x_0)$ $(\forall)$ $x \in D)$

Teorema lui Fermat

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ un pct. de extrem local al fct. f. Dacă f este derivabilă în $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Ex: $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - \sqrt{x}$

f. continuă pe $[0, \infty)$

f. deriv. pe $(0, \infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\forall)\ x \in (0, \infty)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow x+1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow \underline{x = 1} \in (0, \infty)$

x	$[0$		1		$\infty)$
f'	|	$- -$	0	$- - - - -$	
f	0	$\searrow$	$\ln 2 - 1$	$\searrow$	

$f(x) \leq f(0)$ $\forall\ x \in [0, \infty) \Rightarrow x_0 = 0$ pct. de maxim global al fct. f.

CURS 10

CALCUL DIFERENȚIAL și INTEGRAL.

Funcții reale derivabile.

Teorema lui l'HOSPITAL.

Se consideră $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $x_0 \in \overline{I} \setminus I$ și $f, g : \overline{I} \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile pe I.

Varianta $\left[\frac{0}{0}\right]$

Se presupune că:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

b) $g'(x) \neq 0, \forall x \in I$

c) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Varianta $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$

Se presupune că

a) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$

b) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

c) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$.

Atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Observație: Ipoteza, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ este esențială la teorema lui l'HOSPITAL.

$f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$

$g(x) = \sin x$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\in[-1,1]} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1}\left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \underbrace{2x \sin\frac{1}{x}}_{\to 0} - \cos\frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\cos\frac{1}{x} \text{ nu există.}$$

Definiția 1. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D \cap D'$

a) Spunem că f este derivabilă de două ori în x_0 dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ a.î. f este derivabilă pe $V \cap D$ și $f' : V \cap D \to \mathbb{R}$ este derivabilă ~~pe $V \cap D$~~ în punctul x_0.

NOTAȚIE: $f''(x_0) \stackrel{def}{=} (f')'(x_0)$

b) Spunem că f este derivabilă de n ori în punctul $x_0 \in D \cap D'$, $n \geq 2$ dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ a.î. f este derivabilă de $n-1$ ori pe mulțimea $V \cap D$ și $f^{(n-1)} : V \cap D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0.

NOTAȚIE

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$$

c) Spunem că f este derivabilă de n ori pe mulțimea $A \subseteq D \cap D'$ dacă f este derivabilă de n ori în orice punct al mulțimii A.

NOTAȚIE: $f^{(n)} : A \to \mathbb{R}$

Teoremă: Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile de n ori în punctul $x_0 \in D \cap D'$, $n \geq 2$.

Atunci $f \cdot g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă de n ori în punctul x_0 și $(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = C_n^0 f^{(n)}(x_0) + C_n^1 f^{(n-1)}(x_0) \cdot g'(x_0) + C_n^2 f^{(n-2)}(x_0)\, g''(x_0) + \dots + C_n^{n-1} f'(x_0)\, g^{(n-1)}(x_0) + C_n^n g^{(n)}(x_0)$

Definiția 2. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcție derivabilă de n ori în punctul $x_0 \in D \cap D'$, $n \geq 1$

Funcția $T_{f,n,x_0} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$T_{f,n,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

se numește polinomul Taylor atașat funcției f și punctului x_0

Funcția $R_{f,n,x_0} = f - T_{f,n,x_0} : D \to \mathbb{R}$ se numește restul lui Taylor de rang n atașat funcției f și punctului x_0.

<u>Observație</u>: $f = T_{f,n,x_0} + R_{f,n,x_0}$.

<u>Formula lui TAYLOR cu restul sub forma lui LAGRANGE.</u>

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $n \in \mathbb{N}$, $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $(n+1)$ ori pe I și $x_0 \in I$.

Oricare ar fi $x \in I$, $x \neq x_0$, există un element $c \in I$ situat între x_0 și x astfel încât $f(x) = T_{f,n,x_0}(x) +$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

<u>Definiția 3</u> Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție.

a) Spunem că funcția f este de clasă C^n pe mulțimea I, $n \in \mathbb{N}^*$ dacă f este derivabilă de n ori pe I și $f^{(n)}: I \to \mathbb{R}$ este continuă pe I

<u>NOTAȚIE</u> $C^n(I) \overset{def}{=} \{f: I \to \mathbb{R} \mid f$ funcție de clasă C^n pe $I\}$

b) Spunem că f este de clasă C^∞ pe mulțimea I dacă f este derivabilă de n ori pe mulțimea I, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

<u>NOTAȚIE</u> $C^\infty(I) \overset{def}{=} \{f: I \to \mathbb{R},\ f$ funcție de clasa C^∞ pe $I.\}$

Aplicații

Să se arate că $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{100}}{100!}$ $\forall x \in (0,\infty)$

Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

$f \in C^\infty([0,\infty))$

$f^{(n)}(x) = e^x \ \forall x \in [0,\infty), \forall n \in \mathbb{N}^*$

f este derivabilă de 101 ori pe $[0,\infty)$

Fie $x_0 = 0$

$\forall x \in [0,\infty), x \neq 0 \ \exists c \in [0,\infty)$ ~~stau~~ situat între 0 și x

astfel încât $f(x_0) = T_{f,100,0} + \frac{f^{(101)}(c)\, x^{101}}{101!}$

$$e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(100)}(0)}{100!}x^{100}$$

$$+ \frac{f^{(101)}(c)\, x^{101}}{101!}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{100}}{100!} + \frac{e^x x^{101}}{101!}$$

$\frac{e^c x^{101}}{101!} > 0 \ (\forall)\, x \in (0;+\infty)$

$\Rightarrow e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{100}}{100!}$

Pentru $x = 0$ inegalitatea e adevărată.

Definiția 4 Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție.

a) Spunem că f este funcție convexă pe I dacă

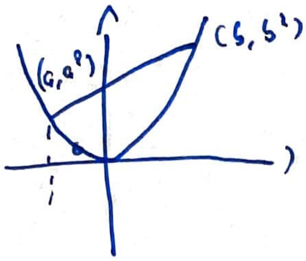
$f((1-t)x + t\cdot y) \leq (1-t)f(x) + t f(y)$

$\forall x,y \in I, \forall t \in [0,1]$

b) Spunem că f este funcție concavă pe I dacă

$f((1-t)x + t\cdot y) \geq (1-t)f(x) + t f(y), \forall x,y \in I, \forall t \in [0,1]$

$y = x^2$



INEGALITATEA LUI JENSEN

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție convexă (concavă) pe I.

Oricare ar fi $x_1, x_2 \dots x_n \in I$ și $\alpha_1 \dots \alpha_n \in (0, \infty)$ cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ are loc inegalitatea.

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \ge \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

<u>Teorema 1.</u> Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de două ori pe I.

a) f este funcție convexă pe $I \Leftrightarrow f''(x) > 0, (\forall) x \in I$

b) f este funcție concavă pe $I \Leftrightarrow f''(x) < 0, (\forall) x \in I$.

<u>APLICAȚIE:</u> Fie $n \ge 1$. Arătați că $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n \le \frac{x^n + y^n + z^n}{3}, \forall x, y, z > 0$

Fie. $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^n$

$f'(x) = n x^{n-1}$ $(\forall)$ $x \in (0, \infty)$

$f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$ $(\forall)$ $x \in (0, \infty)$

$f''(x) \ge 0$ $(\forall)$ $x \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow f$ convex pe $(0, +\infty)$

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n = f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right) \le \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) + \frac{1}{3}f(z) = \frac{1}{3}(f(x) + f(y) + f(z))$$

CURS 11

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL.

SPAȚIUL LINIAR $\mathbb{R}^n$

Aplicații liniare și continue între spații liniare normate.

§ 1 SPAȚIUL LINIAR $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ \forall 1 \le i \le n\}$

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$0 = (0, 0 \dots 0)$

$\underset{\mathbb{R}}{\underset{\Uparrow}{\alpha}} \cdot (x_1 \dots x_n) = (\alpha x_1 \dots \alpha x_n)$

Se definesc vectorii
$e_1 = (1, 0, \dots 0)$
$e_2 = (0, 1, \dots 0)$
$\vdots$
$e_n = (0, 0 \dots, 1)$

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$ - baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$

PROPRIETĂȚI: $\forall\, x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n e_n$

② Aplicații liniare și continue între spații liniare normate.

Definiția: O funcție $T : (X, \|\ \|_X) \to (Y, \|\ \|_Y)$ se numește aplicație liniară de la X la Y dacă: $T(\alpha \cdot x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, x, y \in X$

Teorema: a) O aplicație liniară $T : (X, \|\ \|_X) \to (Y, \|\ \|_Y)$ este fct. continuă pe X ddacă $\exists\, \lambda > 0$ a.î. $\|T(x)\|_Y \le \lambda \cdot \|x\|_X$ $\forall\, x \in X$

b) Orice aplicație liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este fct. cont. pe $\mathbb{R}^n$

$\|(x_1, \dots x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ - norma lui $\mathbb{R}^n$

NOTAȚIE $\mathcal{L}(X, Y) \overset{def}{=} \{ T : X \to Y \mid T$ aplicație liniară și continuă de la X la $Y \}$

EXEMPLE DE APLICAȚII LINIARE

1) $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; id_{\mathbb{R}}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \mid id_{\mathbb{R}} \overset{not}{=} dx$

2) $n \geq 2$ $pr_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, pr_1(x_1, \dots x_n) \overset{def}{=} x_1 \mid pr_1 \overset{not}{=} dx_1$

$pr_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, pr_2(x_1, \dots x_n) \overset{def}{=} x_2 \mid pr_2 \overset{not}{=} dx_2$

$\vdots$

$pr_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, pr_n(x_1 \dots x_n) \overset{def}{=} x_n \mid pr_n \overset{not}{=} dx_n$

Teorema 2 a) O funcție $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ este aplicație liniară de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}^m$ ddacă $(\exists!)\ v \in \mathbb{R}^m$ a.î. $T(x) = x v, \forall x \in \mathbb{R}$

$(T = id_{\mathbb{R}} \cdot v = dx \cdot v)$

b) O funcție $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \geq 2$ este aplicație liniară de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^m$ ddacă $(\exists!)\ v_1, v_2 \dots v_n \in \mathbb{R}^m$ a.î.

$T(x_1, \dots x_n) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \ \forall (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$(T = pr_1 \cdot v_1 + pr_2 \cdot v_2 + \dots + pr_n \cdot v_n = dx_1 \cdot v_1 + dx_2 \cdot v_2 + \dots + dx_n \cdot v_n)$

c) O funcție $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este aplicație liniară de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^m$ ddacă $(\exists!)\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a.î. $T(x_1, \dots x_n) = A$

$= \left[A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^t = (x_1, \dots x_n) \cdot A^t \ \forall (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$(A \cdot B)^t = {}^tB \cdot {}^tA$

FUNCȚII DIFERENȚIABILE

① Noțiuni generale.

Definiția 1 O funcție $f : D \subset (X, \|\ \|_x) \to (Y, \|\ \|_y)$ este diferențiabilă în punctul $x_0 \in D \cap D'$ dacă $(\exists!)\ T \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_y}{\|x - x_0\|_X} = 0$$

NOTAȚIE $T \overset{not}{=} df(x_0)$ - diferențiala funcției f în punctul x_0

Definiția 2 Funcția $f : D \subseteq (X, \|\ \|_x) \to \cancel{Y(\|}(Y, \|\ \|_y)$ este diferențiabilă pe $A \subseteq D \cap D'$ dacă f este diferențiabilă în orice punct ~~din~~ al mulțimii A.

NOTAȚIE $df : A \to \cancel{\mathcal{L}(X, Y)}\ \mathcal{L}(X, Y)$

Teorema 1 dacă $f : D \subseteq (X, \|\ \|_x) \to (Y, \|\ \|_y)$ este funcție diferențiabilă în x_0, atunci f este funcție continuă în x_0.

Teorema 2

a) Orice fct. constantă $f : (X, \|\ \|_x) \to (Y, \|\ \|_y)$ este diferențiabilă pe X și $df(x) = 0\ \forall x \in X$.

b) Orice apl. liniară și continuă $T : (X, \|\ \|_x) \to (Y, \|\ \|_y)$ este diferențiabilă pe X și $dT(x) = T$

② Funcții diferențiabile $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$f(x) = (f_1(x), f_2(x) \ldots f_m(x))$

$f_1, \ldots f_m : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ componentele ~~fct~~ fct. f.

Teorema 3

Funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă în $x_0 \in D \cap D'$ ddacă f este derivabilă în x_0. În plus $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ este dată de formula $df(x_0)(x) = x\, f'(x_0)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Notație $df(x_0) = dx\, f'(x_0)$

③ Funcții diferențiabile $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \geq 2$

$f = (f_1, \dots, f_n)$

$f_1 \dots f_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Def 3 Spunem că f admite derivată parțială în raport cu variabila x_i, $1 \leq i \leq n$, în punctul $x_0 \in D \cap D'$ dacă:

$$\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}^m$$

Not: $$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x)}{t} \overset{not}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \in \mathbb{R}^m$$

Obs: $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \in \mathbb{R}^m \iff \exists \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0) \in \mathbb{R}$

$---$

$\exists \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x_0) \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x_0) \right)$$

Teorema 4 Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă în x_0, atunci f admite toate derivatele parțiale în x_0. În plus $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este dată de formula $df(x_0)(x_1 \dots x_n) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$ (4)

$\forall (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$df(x_0) = dx_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \dots + dx_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$$

COROLAR

Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nu admite cel puțin o derivată parțială în pct. $x_0 \in D \cap D'$, atunci f nu este diferențiabilă în x_0.

Criteriul de diferențiabilitate.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o fct. și $A : \mathring{A} \subseteq D$ astfel că f admite toate derivatele parțiale în orice pct. al mulțimii A și acestea sunt funcții continue pe A. Atunci f este diferențiabilă pe mulțimea A.

CALCULUL DIFERENȚIAL
ȘI INTEGRAL.

CURS 12

Funcții diferențiabile

Def 1. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{R}^*$ și $x_0 \in D \cap D'$ a.î. f este diferențiabilă în x_0.

Matricea $J_f(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

se numește ~~Iacbia~~ Jacobia funcției f în pct. x_0.

Dacă $m = n$, $\det J_f(x_0) \overset{not.}{=} \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots x_n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. se numește Jacobianul fct. f în pct. x_0.

Obs. Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă în punctul x_0 ~~atunci~~ atunci $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este definită prin formula $df(x_0)(x_1, \dots x_n) = \left[J_f(x_0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^t \; \forall (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1 (operații cu fct. diferențiabile)

a) Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ două funcții diferențiabile în punctul $x_0 \in D \cap D'$, atunci $f+g$, $f-g$, $\alpha f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sunt diferențiabile în x_0 și sunt adevărate relațiile: $d(f \pm g)(x_0) = df(x_0) \pm dg(x_0)$, $d(\alpha f)(x_0) = \alpha\, df(x_0)$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

b) Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ și $x_0 \in D \cap D'$ astfel că f este diferențiabilă în x_0 și g este diferențiabilă în $f(x_0) \in B \cap B'$. ~~Atunci~~ Atunci $g \circ f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă în $x_0 \in D \cap D'$ și $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$

Obs În continuarea teoremei 1 sunt adevărate următoarele reguli:

a) $J_{f\pm g}(x_0) = J_f(x_0) \pm J_g(x_0)$

$J_{\alpha f}(x_0) = \alpha J_f(x_0)$

b)

Def 2: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcție. Elem $x_0 \in D \cap D'$ se numește pct. critic al funcției f dacă f este diferențiabilă în x_0 și $df(x_0) = 0$.

Obs:

1) $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x) \dots f_m(x))$, $x_0 \in D \cap D'$ este punct critic al funcției $f \Leftrightarrow f$ este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = (0, 0 \dots 0)$

2) $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \geq 2$, $f(x_1 \dots x_n) = (f_1(x_1 \dots x_m)$, $f_2(x_1 \dots x_m), \dots, f_m(x_1 \dots x_m)$

$x_0 \in D \cap D'$ este pct. critic al fct. f. $\Leftrightarrow f$ este diferențiabilă în x_0 și $\frac{\partial f_i}{\partial f_j}(x_0) = 0$, $\forall i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

Def 3 Fie $D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$. Spunem că $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este funcție de clasă C^1 pe mulțimea D dacă f admite toate derivatele parțiale pe mulțimea D și acestea sunt f continue pe D.

Notație: $C^1(D) = \{ f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid f$ fct. de clasă C^1 pe mulțimea $D \}$

Obs: $f \in C^1(D) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ este diferențiabilă pe mult. D.

APLICAȚIE

Punctele critice ale funcției.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy.$

Se std. diferențiabilitatea funcției.

f. cont. pe $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^3 + y^3 + 3xy)'_x = 3x^2 + 3y, \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}} \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^3 + y^3 + 3xy)'_y = 3y^2 + 3x \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă.

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ fct. continuă pe $\mathbb{R}^2$.

CONCLUZIE: f. diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

Egalăm deriv. parț. a fct. f cu 0 și rez. sist.

$$(\mathbb{R}^2) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$x = x^4 \Rightarrow x - x^4 = 0 \Rightarrow x(1 - x^3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
$x_2 = 1$

$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$
$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1$
$\left. \begin{array}{l} (0,0) \in \mathbb{R}^2 \\ (1,1) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow C = \{(0,0), (1,1)\}$ - mult. pct. critice

Funcții diferențiabile de două ori.

① Noțiuni introductive.

Def 1. Spunem că $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă de două ori în punctul $x_0 \in D \cap D'$ dacă $\exists\ U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ a.î. f este diferențiabilă pe $U \cap D$ și $df: U \cap D \to$
$\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ este diferențiabilă în x_0

NOTAȚIE:

$$d^2 f(x_0) = d(df)(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$d^2 f(x_0): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - aplicația ~~b~~ biliniară și continuă

② Funcții diferențiabile de 2 ori. Caz particular $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$f(x) = (f_1(x), \dots f_m(x))$

Teoremă:

Funct. $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă de 2 ori în pct. $x_0 \in$
$\in D \cap D'$ ddacă f este derivabilă de 2 ori în x_0. În plus, $d^2 f(x_0): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ este definită prin $d^2 f(x_0)(x, y) =$
$= d\,x\,dx\, f''(x_0)$

③ Funcții diferențiabile de 2 ori Cazul part. $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \geq 2$

Def 2 Spunem că $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admite derivată parțială de ordinul 2 în raport cu variabilele x_i și x_j $(1 \leq i, j \leq n)$ în pct. $x_0 \in D \cap D'$ dacă $\exists\ V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ a.î. f admite derivată part. în raport cu variabila x_j

pe mult. $V \cap D$ și $\frac{\partial f}{\partial x_j} : V \cap D \to \mathbb{R}^m$ admite derivată parțială în raport cu x_i în pct. x_0.

<u>Notație.</u> $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i}(x_0) \overset{not}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)$$

<u>Teorema lui Schwarz.</u>

Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă de 2 ori într-un pct atunci f admite toate deriv. parțiale de ordin 2 în x_0 și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$ $\forall$ $i, j \in \{1 \ldots n\}$. În plus, $d^2 f(x_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este definită prin formula $d^2 f(x_0) =$
$= ((a_1 \ldots a_n), (b_1 \ldots b_n)) = a_1 b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x_0) + a_1 b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) + \ldots$
$+ a_n b_n \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}(x_0)$ $\forall$ $(a_1 \ldots a_n), (b_1 \ldots b_n) \in \mathbb{R}^n$.

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

COROLAR

a) Dacă f nu admite cel puțin o derivată parțială de ordinul 2 în x_0, atunci f nu este diferențiabilă de două ori în x_0.

b) Dacă f admite toate derivatele parțiale de ordinul 2 în x_0 și $\exists\ i \neq j \in \{1, 2 \dots n\}$ astfel ca $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$, atunci f nu este diferențiabilă de două ori în x_0.

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f cont pe $\mathbb{R}^2$

f diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

f dif. de 2 ori pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

f admite toate deriv. parțiale de ordinul 2 $(0,0) \Rightarrow f$ nu este diferențiabilă de 2 ori în $(0,0)$

Teorema lui Young

a) Fie $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o fct., $x_0 \in D$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ astfel că $V \subseteq D$ și $i \neq j \in \{1 \dots n\}$ astfel că $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ există pe V.

Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sunt cont. în x_0, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$

b) $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o fct., $x_0 \in D$, $\exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ astfel ca $V \subseteq D$.

Dacă f admite toate derivatele parțiale de ordinul 2 pe mulțimea V și acestea sunt continue în pct. x_0, atunci f este diferențiabilă de 2 ori în x_0.

<u>Corolar.</u>

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcție și $\emptyset \neq A = \mathring{A} \subseteq D$ astfel ca f admite toate deriv. parțiale de ord. 2. pe mulț. A și acestea sunt fct. continue pe mulț. A, ~~pe mulț. A~~ atunci f este dif. de 2 ori pe mulț. A.

Ex: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

f cont. pe $\mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^3 + y^3 - 3xy)'_x = 3x^2 - 3y$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^3 + y^3 - 3xy)'_y = 3y^2 - 3x$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ mulț. deschisă.

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sunt cont. pe $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ f este dif. pe $\mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = (3x^2 - 3y)'_x = 6x$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = (3y^2 - 3x)'_x = -3$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = (3x^2 - 3y)'_y = -3$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = (3y^2-3x)'_y = 6y, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}^2$ mult. deschisă.

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ cont pe $\mathbb{R}^2$

Concluzie: f dif de 2 ori pe $\mathbb{R}^2$

$$\left(\begin{array}{l} f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \quad d^2 f(x_0): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \end{array} \right)$$

$d^2 f(2,1): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$d^2 f(2,1)((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = a_1 a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) + a_1 b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1)$
$+ b_1 a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,1) + b_1 b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(2,1) = 12 a_1 a_2 + 3 a_1 b_2 - 3 b_1 a_2 +$
$+ 6 b_1 a_2 + 6 b_1 b_2 \; \forall (a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \mathbb{R}^2.$

$d^2 f(2,1) = 12\, dx\, dx - 3\, dx\, dy - 3\, dy\, dx + 6\, dy\, dy.$

<u>Def 1.</u> Spunem că $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este de clasă C^2 pe mult. D dacă f admite toate deriv. parțiale de ordin 2 pe mult. D și acestea sunt fct. cont. pe D.

<u>Not:</u> $C^2(D) \overset{not}{=} \{ f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid f.\ fct.\ de\ clasă\ C^2 \}$.

<u>Obs:</u> $f \in C^2(D) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ este dif. de 2 ori pe mult. D.

Puncte de extrem local pentru funcții de mai ~~multe~~ multe variabile reale.

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$.

<u>Def 1</u> Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o fct. dif. de 2 ori în pct. $x_0 \in D \cap D'$

Matricea ~~Hf~~ $H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j = \overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$

se numește <u>hessiana</u> funcției f în pct. x_0.

<u>Criteriul de determinare a pct. de extrem local</u> al fct. $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Se consideră $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o fct. de clasă C^2 pe mult. D și $x_0 \in D$ un pct. critic al fct. f.

a) Dacă $d^2 f(x_0)(v, v) > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ atunci x_0 este pct de minim local al fct. f.

b) Dacă $d^2 f(x_0)(v, v) < 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, atunci x_0 este pct. de maxim local al fct. f.

c) Dacă $\exists \; v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ astfel că $d^2 f(x_0)(v_1, v_1) < 0$ și $d^2 f(x_0)(v_2, v_2) > 0$, atunci x_0 nu este pct. de extrem local al fct. f.

Obs: $d^2 f(x_0) \to H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$

$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x_0)$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x_0) \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$\Delta_n = \det H_f(x_0)$

a) $\Delta_1, \dots, \Delta_n > 0 \Rightarrow x_0$ pct. de min local al f-ct. f

b) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0 \Rightarrow x_0$ pct. max local al f-ct. f

c) $\Delta_1, \dots \Delta_n \geq 0$ și cel puțin un minor este nul

$\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \geq 0$ și cel puțin un minor este nul

$\Rightarrow$ Criteriul nu se pronunță.

d) în toate celelalte cazuri x_0 nu este pct. de extrem local.

Notație:

$(a_1, \dots a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$

$(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = ((a_1, \dots a_n), a_{n+1}) := (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$

<u>Teorema fct. implicite</u>

Fie $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ o f-ct. de clasă C^1 pe mulțimea D și $(x_0, y_0) \in D_0$ cu urm. prop:

a) $f(x_0, y_0) = 0$

b) $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0, y_0) \neq 0$

Există $r_1, r_2 > 0$ a.î. $B(x_0, r_1) \times B(y_0, r_2) \subseteq D$

$(\exists!)$ $f: B(x_0, r_1) \to B(y_0, r_2)$ fct. de clasă C^1 care

verif:

i) $f(x_0) = y_0$

ii) $f(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, r_1)$

În plus, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = - \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0, y_0)} \quad \forall_{i \in \overline{1,n}}$.

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL. CURS 14

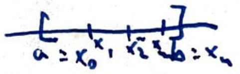
Funcții integrabile Riemann

I Noțiuni generale.

Definiția 1 a) Se numește diviziune a intervalului $[a,b]$ o mulț. finită $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ cu $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

NOTAȚIE : $\mathcal{D}([a,b]) \stackrel{def}{=} \{\Delta \mid \Delta \text{ diviziune a int. } [a,b]\}$

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$



b) Fie $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Numărul real $\max\limits_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) \in \mathbb{R}$ se numește norma diviziunii Δ.

NOTAȚIE $\|\Delta\| \stackrel{def}{=} \max (x_i - x_{i-1})$

c) Fie $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, Δ: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Mulțimea finită $t_\Delta = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ cu $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall\, 1 \le i \le n$ se numește sist. de pct. intermediare asoc. diviziunii Δ

Definiția 2 Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție, $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, Δ : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $t_\Delta = \{t_1, \dots, t_n\}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ. Numărul real $f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ se numește suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ și sist. de puncte interm. t_Δ.

NOTAȚIE

$$\sigma_\Delta(f; t_\Delta) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Definiția 3: O funcție $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă $\exists\, I \in \mathbb{R}$ cu propr. că $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $|\sigma_\Delta(f; t_\Delta) - I| < \varepsilon$, $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ și $\forall\, t_\Delta$ un sistem de pct. intermediare asociate diviziunii Δ.

NOTAȚII: $I \overset{not}{=} \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ – integrala Riemann a funcției f pe $[a,b]$

$$R([a,b]) \overset{def}{=} \{ f:[a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ integrabilă Riemann pe } [a,b] \}$$

Teorema: Fie $f \in R([a,b])$. Pentru orice șir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$, pentru orice t_{Δ_n} sistem de puncte intermediare asociate diviziunii Δ_n există $\lim_{n\to\infty}$

$$\sigma_{\Delta_n}(f; t_{\Delta_n}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Definiția 4

O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numește neglijabilă Lebesgue dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, ((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de intervale deschise a.î. $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n)$ și

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

Obs Mulțimile neglijabile Lebesgue au următoarele propr.

1) $\emptyset$, mulțimile finite și mulț. numărabile sunt mulț. neglijabile Lebesgue.

2) $A \subseteq B$
B mulțime neglijabilă Lebesgue $\not\Rightarrow$ A mulț. neglijabilă Lebesgue

3) A mulț. neglijabilă & $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mulț. neglijabilă Lebesgue.

Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue.

O funcție $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ ddacă f este funcție mărginită și $D_f = \{x \in [a,b] \mid f$ nu este continuă în $x\}$ este ~~sunt~~ mulțime neglijabilă Lebesgue

COROLAR Orice funcție continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$

Definiția 5 Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o fct. mărginită, $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$,

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ și $M_i = \sup\limits_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t)$,

$m_i = \inf\limits_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t) \quad \forall\, 1 \le i \le n$

a) ~~numărul~~ real $M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1})$ $= \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ se numește suma DARBOUX superioară asociată fct. f și diviziunea Δ.

b) Numărul real $m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+\dots+m_n(x_n-x_{n-1})$

$=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$ se numește suma Darboux asociată

funcției f și diviziunii Δ.

<u>NOTAȚII</u>

$$S_\Delta(f)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

$$s_\Delta(f)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$

<u>Criteriul de integrabilitate al lui DARBOUX.</u>

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o fct. mărginită. Următoarele afirmații sunt echiv.:

a) $f\in R([a,b])$

b) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$ a.î. $S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$ $\forall\ \Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$

c) $\forall\ (\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și din $\mathcal{D}([a,b])$ cu $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$ avem că $\lim_{n\to\infty}(S_{\Delta_n}(f)-s_{\Delta_n}(f))=0$

<u>Corolar</u> Orice fct. monot. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$

III Propr. fct. integrabile Riemann:

<u>Teorema 2</u> Fie 2 fct. $f,g\in R([a,b])$ astfel ca mulț. $\{x\in[a,b]\mid f(x)\neq g(x)\}$ este finită. Atunci $\int_a^b f(x)dx=$ $=\int_a^b g(x)dx$

Definiția 6: Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval și $f,F:I\to\mathbb{R}$ două fct. ~~Spunem~~ Spunem că F este o primitivă a lui f dacă F este fct. deriv. pe I și $F'(x)=f(x)\ \forall x\in I$

FORMULA LEIBNIZ-NEWTON

Se consideră $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ~~este~~ o funcție integrabilă Riemann pe $[a,b]$ care admite primitive, $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ fiind una dintre primitivele ei. Are loc egalitatea $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$

$= F(b) - F(a)$

Formula de integrare prin părți pentru integrale Riemann

Fie $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două fct. derivabile pe $[a,b]$ cu $f', g' \in R([a,b])$

Atunci $\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$

Teorema de medie pt. fct. integrabile Riemann

Fie $f, g \in R([a,b])$ care verif. următoarele condiții:

a) f are propr. lui Darboux

b) $g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$

Există $c \in (a,b)$ a.î. $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)\,dx$

Corolar

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o fct. continuă, atunci $\exists\, c \in (a,b)$ astfel încât $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$

III 1. Teorema de trecere la limită sub integrala Riemann

Teorema convergenței uniforme

Se consideră $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $R([a,b])$ și $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ astfel ca $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f$

Atunci $f \in R([a,b])$ și $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$

Teorema convergenței mărginite

Se consideră $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $R([a,b])$ și $f\in R([a,b])$

astfel ca:

i) $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{s} f$

ii) $\exists M>0$ a.î. $|f_n(x)|\le M$, $\forall x\in[a,b]$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Atunci $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

Teorema convergenței monotone

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $R([a,b])$ și $f\in R([a,b])$

astfel ca: ~~dtz~~

i) $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{s} f$

ii) șirul de fct. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton.

Atunci $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

Funcțiile GAMA și BETA ale lui EULER.

Teorema 1. a) Oricare ar fi $p, q \in (0,\infty)$ integrala improprie $\int_{0+0}^{1-0} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ este convergentă

b) Oricare ar fi $p \in (0,\infty)$, integrala improprie $\int_{0+0}^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x}\,dx$ este convergentă

Definiția 1. a) Funcția $B:(0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ definită $B(p,q) = \int_{0+0}^{1-0} x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}\,dx$ se numește funcția BETA a lui EULER

b) Funcția $\Gamma:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $\Gamma(p) = \int_{0+0}^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x}\,dx$ se numește funcția GAMA a lui EULER

Teorema 2 (propr. funcției Γ)

Funcția $\Gamma:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ are următoarele proprietăți:

a) $\Gamma(1) = 1 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-e^{-x}) + e^0 = 1$

b) $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p),\ \forall p > 0$

$\Gamma(n+1) = n!,\ \forall n \in \mathbb{N}$

c) $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(p\pi)},\ \forall p \in (0,1)$

$*\ P = \Gamma$

d) $\Gamma(p) > 0,\ \forall p \in (0,\infty)$

$p = \frac{1}{2} \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$; $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0 \Big| \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Teorema 3 (Proprietățile fct. BETA)

Funcție $B : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ cu următoarele propr:

a) $B(p,q) > 0,\ \forall\ p,q \in (0,\infty)$

b) $B(p,q) = B(q,p),\ \forall\ p,q \in (0,\infty)$

c) $B(p,q) = 2\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0} (\sin x)^{2p-1} \cdot (\cos x)^{2q-1}$, $\forall\ p,q \in (0,\infty)$

d) $B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx$, $\forall\ p,q \in (0,\infty)$

Teorema 4. (Formula de legătură între B și Γ)

Este adevărată egalitatea $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $\forall p,q \in (0,\infty)$

APLICAȚIE 1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = ?\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Schimbare de variabilă $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

$dx = (\sqrt{y})' dy = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int_{0+0}^{+\infty} \frac{\cancel{e^{-y}}\, e^{-y}}{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0+0}^{\infty} y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$p-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

2) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^{13} x\, dx$

$B(p,q) = \int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2q-1} dx$

$\begin{cases} 2p-1 = 3 \\ 2q-1 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 7 \end{cases}$

$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^{13} x\, dx = \frac{B(2,7)}{2} = \frac{1}{112}$

$B(2,7) = \frac{\Gamma(2)\cdot\Gamma(7)}{\Gamma(2+7)} = \frac{1!\cdot 6!}{8!} = \frac{6!}{8!} = \frac{1}{7\cdot 8} = \frac{1}{56}$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt{tg\, x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} (\sin x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\cos x)^{-\frac{1}{2}}\, dx =$

$= \begin{cases} 2p-1 = \frac{1}{2} \\ 2q-1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{3}{4} \\ q = \frac{1}{4} \end{cases}$

$\int_0^{\pi/2-0} \sqrt{tg\, x}\, dx = \frac{B(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

$B(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{4}) \cdot \Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(1)} = \Gamma(\frac{3}{4}) \cdot \Gamma(\frac{1}{4})$

$\Gamma(\frac{3}{4}) \cdot \Gamma(\frac{1}{4}) = \Gamma(\frac{3}{4}) \cdot \Gamma(1 - \frac{3}{4}) = \frac{\pi}{\sin(\frac{3\pi}{4})} = \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{2} = \pi\sqrt{2}$

~~MULTI~~ MULȚIMI MĂSURABILE JORDAN ÎN $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

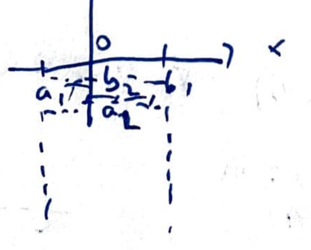
$\boxed{\text{I}}$ Interval închis n-dimensional

Definiția 1 ~~intervalului~~ mulțimea $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ $\subseteq \mathbb{R}^n$ se numește interval închis n-dimensional

Numărul real $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$ se numește volumul intervalului I.

NOTAȚIE $v(I) \overset{def}{=} (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot \dots (b_n - a_n) \in \mathbb{R}$

$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$



$\Delta_1 : a_1 = x_0^1 < x_1^1 < \dots < x_{m_1}^1 = b_1 \in \mathcal{D}([a_1, b_1])$

$\Delta_2 : a_2 = x_0^2 < x_1^2 < \dots < x_{m_2}^2 = b_2 \in \mathcal{D}([a_2, b_2])$

$\vdots$

$\Delta_n : a_n = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{m_n}^n = b_n \in \mathcal{D}([a_n, b_n])$

Definiția 2 Mulțimea $G = \{ [x_{j_1}^1, x_{j_1+1}^1] \times [x_{j_2}^2, x_{j_2+1}^2] \times \dots \times [x_{j_n}^n, x_{j_n+1}^n]$

$\mid 0 \leq j_1 \leq m_1 - 1, \dots, 0 \leq j_n \leq m_n - 1 \} = \{I_1, I_2, \dots$

$\dots, I_k\}$, se numește partiție a intervalului I

(II) Inel de mulțimi, măsură pozitivă

<u>Definiția 2</u> Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Familia de mulțimi $\mathcal{R}$ se numește inel de mulțimi dacă verifică următoarele condiții:

a) $\forall A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$

b) $\forall A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$

Obs: $\mathcal{R}$ = inel de mulțimi, atunci:

1) $\emptyset \in \mathcal{R}$

2) $\forall A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$

<u>Definiția 3</u> Fie $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un inel de mulțimi. Se numește măsură (pozitivă) orice funcție $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ care are următoarele proprietăți:

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \ \forall A, B \in \mathcal{R}$ cu $A \cap B = \emptyset$

<u>Observație</u> Fie $\mu : A \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o măsură (pozitivă). Sunt adev. următoarele afirmații

a) $\begin{matrix} A, B \in \mathcal{R} \\ A \subseteq B \end{matrix} \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

b) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{R}$

c) $A \subseteq B \in \mathcal{R}$ cu $\mu(B) \in \mathbb{R}$
$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

CALCUL DIFERENȚIAL
ȘI INTEGRAL

CURS 16

Integrala în $\mathbb{R}^n$

① Proprietăți ale funcțiilor integrabile Riemann în $\mathbb{R}^n$

Teorema 1 Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Atunci $\mu(E) = \int_E 1\,dx$

Teorema 2 Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f, g : E \to \mathbb{R}$, funcții integrabile Riemann pe E. Atunci:

$(f+g), (f-g), \alpha \cdot f, |f| : E \to \mathbb{R}$ sunt funcții integrabile Riemann și în plus avem:

$$\int_E (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_E f(x)\,dx \pm \int_E g(x)\,dx$$

$$\int_E \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_E f(x)\,dx$$

$$\left| \int_E f(x)\,dx \right| \le \int_E |f(x)|\,dx$$

Teorema 3 Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f : E \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann pe E care este funcție mărginită pe E, $m = \inf_{x \in E} f(x)$, $M = \sup_{x \in E} f(x)$. Atunci

$$m \cdot M(E) \le \int_E f(x)\,dx \le M \cdot \mu(E)$$

② Criterii de integrabilitate în $\mathbb{R}^n$

Criteriul de integrabilitate a lui Lebesgue

Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f : E \to \mathbb{R}$, o funcție mărginită. Funcția f este integrabilă Riemann pe E ddacă $D_f = \{x \in E \mid f$ nu este continuă în $x\}$ este mulțime neglijabilă Lebesgue

Definiția 1 Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f: E \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită pe E, $\alpha = \{E_1, \dots, E_k\}$ o descompunere Jordan a mulțimii E,

$m_i = \inf_{x \in E_i} f(x)$, $M_i = \sup_{x \in E_i} f(x)$

a) Numărul real $s_\alpha(f) = m_1 \cdot \mu(E_1) + m_2 \cdot \mu(E_2) + \dots + m_k \cdot \mu(E_k)$

se numește suma Darboux inferioară asociată funcției f și descompunerii α

b) Numărul real $S_\alpha(f) = M_1 \cdot \mu(E_1) + M_2 \cdot \mu(E_2) + \dots + M_k \cdot \mu(E_k)$

se numește suma Darboux superioară asociată funcției f și descompunerii α

Criteriul de integrabilitate a lui Darboux

Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: E \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită pe E.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) f este integrabilă Riemann pe E

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha_\varepsilon \in \mathcal{D}(E)$ a.î. $S_{\alpha_\varepsilon}(f) - s_{\alpha_\varepsilon}(f) < \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $S_{\alpha_\varepsilon}(f) - s_{\alpha_\varepsilon}(f) < \varepsilon$ $\forall \alpha \in \mathcal{D}(E)$ $\|d\alpha\| < \delta_\varepsilon$

Teorema 4: Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: E \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann care este funcție mărginită pe E

a) $\int_E f(x)\,dx = \sup_{\alpha \in \mathcal{D}(E)} s_\alpha(f) = \inf_{\alpha \in \mathcal{D}(E)} S_\alpha(f)$

b) $\forall (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de descompuneri ale mulțimii E cu $\|\alpha_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ avem că

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{x \to \infty} s_{\alpha_n}(f) = \lim_{n \to \infty} S_{\alpha_n}(f)$$

③ Metode de calcul ale integralelor ~~finite~~ multiple

NOTAȚIE $(x_1, x_2 \dots, \underbrace{\hat{x}_k}_{\text{se omite}}, \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$

Teorema lui Fubini pe intervale închise n-dimensionale

Fie $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ un interval închis n-dimensional $f: I \to \mathbb{R}$, o funcție integrabilă Riemann pe I astfel ca funcția

$x_k \to f(x_1, x_2, \dots x_k, \dots x_n)$ să fie integrabilă Riemann pe $\in [a_k, b_k]$

Atunci funcția $(x_1, x_2, \dots \hat{x}_k, \dots x_n) \to f(x_1, x_2 \dots x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n)$ este integrabilă Riemann pe $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times \dots \times [a_n, b_n]$ și

$$\int_I f(x_1 \dots x_k \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{I \setminus [a_k, b_k]} \left(\int_{a_k}^{b_k} f(x_1, \dots x_n)\, dx_k \right) dx_1 \dots dx_{k-1}\, dx_{k+1} \dots dx_n$$

COROLAR: $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

Orice funcție continuă $f: I \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe I și

$$\int_I f(x_1, \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots x_n)\, dx_1 \right) dx_2 \right) \dots \right) dx_n$$

APLICAȚIE Fie $f: [0, a] \times [0, b] \times [0, c] \to \mathbb{R}$ o fct. continuă cu $a, b, c > 0$

Atunci: $\int_0^a \int_0^b \int_0^c f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^b \left(\int_0^a \left(\int_0^c f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy$

Teorema lui Fubini pe mulțimi simple în raport cu axa Ox_j

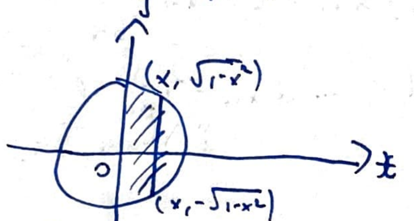
Fie $K \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n-1})$ o mulțime compactă. Fie $\varphi_1, \varphi_2 : K \to \mathbb{R}$, două f. continue și $E = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n) \le x_j \le \varphi_2(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n)$ cu $(x_1, x_2 \dots \hat{x}_j, \dots x_n) \in K$. Orice fct. continuă $f : E \to \mathbb{R}$ e integrabilă ~~Riemann~~ Riemann pe E și

$$\int_E f(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_K \left(\int_{\varphi_1(x_1 \dots x_n)}^{\varphi_2(x_1 \dots x_n)} f(x_1 \dots x_n)\, dx_j \right) dx_1 \dots d\hat{x}_j \dots dx_n$$

f

APLICAȚIE Fie $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$

$f : E \to \mathbb{R}$ o funcție continuă



$$E : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{\varphi_1(x)} \le y \le \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\varphi_2(x)} \end{cases}$$

E - mulțime simplă în raport cu Oy

$$\iint_E f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy \right) dx = \cancel{\int_0^1 \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}}$$

APLICAȚIE $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi_1(x, z) \le y \le \varphi_2(x, z)\}$

$(x, z) \in K \subseteq \mathbb{R}^2$

$\to$ compactă + măsurabilă Jordan.

$f : E \to \mathbb{R}$ - funcție continuă

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_K \left(\int_{\varphi_1(x,z)}^{\varphi_2(x,z)} f(x,y,z)\, dy \right) dx\, dz$$

__Definiția__ = Fie ~~f~~ $f = (f_1 \dots f_n) : \mathring{D} = D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcție de clasă

C^1 pe mulț. D.

~~D~~ a) Matricea $J_f(x_1 \dots x_n) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1 \dots x_n) \right)_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$

Se numește matricea Jacobi a funcției f în punctul

$(x_1 \dots x_n)$

Numărul real $|J_f(x_1 \dots x_n)|$ se numește jacobianul funcției

f în punctul $(x_1 \dots x_n) \in D$

__NOTAȚIE:__ $\frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} \overset{def}{=} \det J_f(x_1 \dots x_n)$

__Teorema de schimbare de variabilă pentru integrala multiplă__

Fie $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcție de clasă C^1, $E \in J(\mathbb{R}^n)$ astfel

ca $\bar{E} \subseteq D$, $f(E) = J(\mathbb{R}^n)$ și $\det(J_f(x)) \ne 0$ $\forall x \in \mathring{E}$.

Pentru $\forall$ $f: f(E) \to \mathbb{R}$, integrabilă Riemann pe $f(E)$, funcția $f \circ f$.

$\cdot |\det J_f| : E \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe E $\int_{f(E)} f = \int_E f \circ f$.

$\cdot |\det J_f|$

5

CURS 17

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL.

Schimbări de variabilă în integrale multiple.

1) Trecerea la coordonate polare în $\mathbb{R}^2$

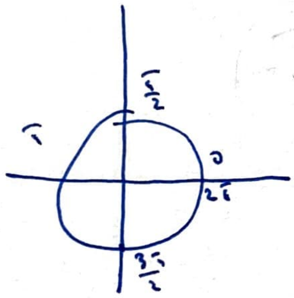
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(R, \alpha) = (\overbrace{R\cos\alpha}^{x}, \overbrace{R\sin\alpha}^{y})$

$$\det J_f(R,\alpha) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -R\sin\alpha \\ \sin\alpha & R\cos\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= R\cos^2\alpha + R\sin^2\alpha = R$$

Condiții: $R \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ sau $\alpha \in [-\pi, \pi]$



2) Trecerea la coordonate polare generalizate în $\mathbb{R}^2$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(R, \alpha) = (\overbrace{aR\cos\alpha}^{x}, \overbrace{bR\sin\alpha}^{y})$; $a, b \in \mathbb{R}^*$

$$\det J_f(R,\alpha) = \begin{vmatrix} a\cos\alpha & -aR\sin\alpha \\ b\sin\alpha & bR\cos\alpha \end{vmatrix} = abR\cos^2\alpha + abR\sin^2\alpha$$

$= abR$

CONDIȚII: $R \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ sau $\alpha \in [-\pi, \pi]$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = R^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2$$

③ Trecerea la coordonate sferice în $\mathbb{R}^3$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

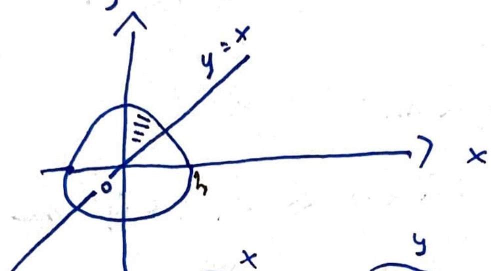
$f(R, \alpha, \beta) = (\underbrace{R\sin\alpha\cos\beta}_{x}, \underbrace{R\sin\alpha\,\cancel{\cos}\sin\beta}_{y}, \underbrace{R\cos\alpha}_{z})$

$\det J_f(R, \alpha, \beta) = -R^2\sin\alpha$

CONDIȚII: $R \geq 0$, α

APLICAȚIE:

$\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 3,\ 0 \leq x \leq y\}$



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(R, \alpha) = (\overbrace{R\cos\alpha}^{x}, \overbrace{R\sin\alpha}^{y})$

$D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 3 \\ \cancel{0 \leq y \leq y} \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}$

$D': \begin{cases} R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha \leq 3 \\ 0 \leq R\cos\alpha \leq R\sin\alpha \\ R \geq 0 \\ \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases}$

$\begin{cases} R^2 \leq 3 \\ 0 \leq \cos\alpha \leq \sin\alpha \\ R \geq 0 \\ \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq R \leq \sqrt{3} \\ \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos\alpha \leq \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq R \leq \sqrt{3} \\ \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$D': \begin{cases} 0 \leq R \leq \sqrt{3} \\ \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$D' = [0, \sqrt{3}] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{D'} R\sin\alpha\sqrt{R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha}$

②

$|\det J_\varphi(R,\alpha)|\, dR\, d\alpha = \iint_{D'} R\sin\alpha\, |R|\cdot|R|\, dR\, d\alpha =$

$= \iint_{D'} R^3 \sin\alpha\, dR\, d\alpha = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt3} R^3\sin\alpha\, dR\right)d\alpha = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{R^4}{4}\sin\alpha\Big|_0^{\sqrt3}\right)d\alpha$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{9}{4}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{9}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{9}{4}\left(-\cos\alpha\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right) =$

$= 9/4\left(-0+\frac{\sqrt2}{2}\right) = \frac{9\sqrt2}{8}$

INTEGRALE CURBILINII

[1] Drumuri în $\mathbb{R}^n$

<u>Definiția 1</u> Se numește drum în $\mathbb{R}^n$ orice fct. continuă $d:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$

<u>NOTAȚIE</u>. $d:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ drum

$d(t) = (d_1(t),\dots,d_n(t))$

$d_1, d_2 \dots d_n : [a,b]\to\mathbb{R}$ funcții continue.

$d \overset{not}{=} (d_1 \dots d_n)$

<u>Definiția 2</u>: Fie $d=(d_1\dots d_n):[a,b]\to\mathbb{R}^n$ un drum

a) d se numește <u>drum închis</u> dacă $d(a)=d(b)$

b) d se numește <u>drum simplu</u> dacă $d\big|_{(a,b)}$ este funcție injectivă

c) d se numește <u>drum de clasă C^1</u> dacă $d_1, d_2 \dots d_n$ sunt funcții derivabile și derivatele lor sunt funcții continue pe $[a,b]$

d) O mulțime $C\subseteq\mathbb{R}^n$ se numește curbă de clasă C^1 dacă $\exists$ un drum de clasă C^1 $d:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ astfel încât $C = \operatorname{Im} d$

Obs: Oricărui drum $d:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de clasă C^1 i se asociază funcția lungime $l:[a,b]\to\mathbb{R}$

Teoremă: Fie $d:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ un drum de clasă C^1. Atunci funcția lungime $l:[a,b]\to\mathbb{R}$ asociată drumului d este de clasă C^1 pe $[a,b]$ și $l'(t) = \|d'(t)\| = \|(d_1'(t), d_2'(t), \ldots d_n'(t))\| = \sqrt{d_1'(t)^2 + \ldots + d_n'(t)^2}$

$\forall t\in[a,b]$

Obs: $\|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$

[2] Integrala curbilinie de primul tip

Se consideră:

1) $d:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ drum de clasă C^1
2) $F: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, funcție continuă
3) $C = \operatorname{Im} d \subseteq D$

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "F\circ d"'] & C \subseteq D \arrow[d] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Observație: Funcția $(F\circ d)\cdot l':[a,b]\to\mathbb{R}$, funcție continuă pe $[a,b]$

Definiția 3 Integrala Riemann $\int_a^b (F\circ d)(t)\cdot l'(t)\,dt$ se numește integrala curbilinie de primul tip a funcției F pe drumul d (pe curba C)

NOTAȚII: $\int_d F\,dl = \int_C F\,dl \overset{def}{=} \int_a^b (F\circ d)(t)\, l'(t)\,dt$

13 Integrala curbilinie de al doilea tip

Definiție Se numește formă diferențiabilă de gradul I pe $\mathbb{R}^n$ orice funcție continuă $\omega : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

NOTAȚIE $\omega(x_1, \dots x_n) = P_1(x_1, \dots x_n)dx_1 + P_2(x_1, \dots x_n)dx_2 + \dots + P_n(x_1, \dots x_n)dx_n$

$P_1, P_2 \dots P_n : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcții continue

$\omega \overset{not}{=} P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \dots + P_n dx_n$

Se consideră : $d = (d_1, d_2, \dots d_n)$

1) $d : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ drum de clasă C^1

2) $\omega = P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \dots + P_n dx_n$: formă dif. de gradul I

$P_1, P_2 \dots P_n : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

3) $C : \operatorname{Im} d \subseteq D$

Definiția 5 Integrala Riemann $\int_a^b (P_1 \circ d)(t)\, d_1'(t) + (P_2 \circ d)(t)\, d_2'(t) + \dots + (P_n \circ d)(t)(d_n'(t))\, dt$ se numește integrala curbilinie de al 2-lea tip a formei diferențiale ω pe ~~curba~~ drumul d (pe curba c)

CURS 18 ULTIMUL

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL.

FORMULA LUI GREEN

~~Teorema~~ ~~Formula~~

$\int_d \omega$;

Fie $\omega = P\,dx + Q\,dy : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o formă diferențială de gradul I pentru care $\exists \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$, funcții continue. $K \subseteq D$ mulțime compactă măsurabilă Jordan cu $\mathrm{Fr}\,K = \mathrm{Im}\,d$, unde $d : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ drum simplu închis de clasă C^1. Atunci:

$$\int_{\substack{d \\ (C)}} P\,dx + Q\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy$$

Aplicații:

Calculați folosind formula lui Green, integrala curbilinie:

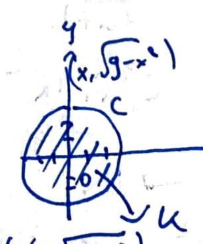
$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy, \text{ unde } C: x^2 + y^2 = 9$$

$P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$P(x,y) = y^2$
$Q(x,y) = x^2$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= (y^2)'_y = 2y \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= (x^2)'_x = 2x \end{aligned}\right\} \text{funcții continue pe } \mathbb{R}^2$$

$C = \mathrm{Fr}\,K$



$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$

$K : \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow K$ simplă în rap. Oy

$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy =$

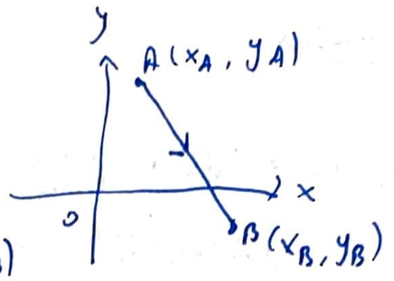
$$= \iint_K (2x - 2y)\,dx\,dy = \int_{-3}^{3} \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (2x - 2y)\,dy \right) dx = \int_{-3}^{3} \left(2xy - y^2 \Big|_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \right) dx$$

$$= \int_{-3}^{3} 4x\sqrt{9-x^2}\,dx = -2\int_{-3}^{3} (-2x)\sqrt{9-x^2}\,dx = -2\int_{-3}^{3} (9-x^2)'(9-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -2 \cdot \frac{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2} \Bigg|_{-3}^{3} = -\frac{4}{3}\sqrt{(9-x^2)^3}\Bigg|_{-3}^{3} = 0$$

Parametrizări de unor curbe remarcabile din plan

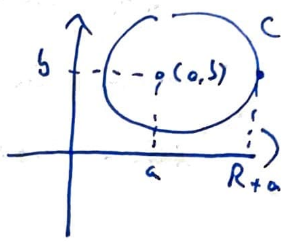
1) $C: [A,B]$



$d: [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$d(t) = (1-t)(x_A, y_A) + t(x_B, y_B)$

2) $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$



$d: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ sau $d: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$

$d(t) = (R\cos t + a, R\sin t + b)$

3) $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a, b > 0$

$a \neq b$

Pp că $a > b$.

$(0, b)$, $(0, -b)$

$(a, 0)$, $(-a, 0)$

(a, b), R

$d: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ sau $d: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$

$d(t) = (a\cos t, b\sin t)$

APLICAȚIE: Calculați integrala curbilinie $\int_C y^2 dx + x^2 dy$, unde $x^2 + y^2 = 9$

$d: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$d(t) = (\underbrace{3\cos t}_{d_1(t)}, \underbrace{3\sin t}_{d_2(t)})$

d: drum de clasă C^1 în $\mathbb{R}^2$

$P_1, P_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$P_1(x,y) = y^2$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2$

$P_2(x,y) = x^2$

$\operatorname{Im} d = C \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\int_C y^2dx + x^2dy = \int_0^{2\pi}(3\sin t)^2\underbrace{(3\cos t)'}_{-3\sin t}dt + \int_0^{2\pi}(3\cos t)^2\underbrace{(3\sin t)'}_{3\cos t}dt =$$

$$= -27\int_0^{2\pi}\sin^3 t\,dt + 27\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt = -27\int_0^{2\pi}\sin t\underbrace{\sin^2 t}_{(1-\cos^2 t)}dt + 27\int_0^{2\pi}\cos t\cos^2 t\,dt$$

$$= -27\left(\int_0^{2\pi}\sin t\,dt - \int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t\,dt\right) + \ldots$$

$$= -27\left(-\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}(\cos t)'\cdot\cos^2 t\,dt\right) + \ldots$$

$$= -27\left(0 + \underbrace{\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi}}_{0}\right) + 0 = 0$$

STRUCTURA EXAMENULUI

Oficiu: 1p

Teorie:
- Subiectul I: 1,5p (3 definiții)
- Subiectul II: 1p (2 teoreme)

→ 2,5p

TIMP DE LUCRU: 20 min

Exerciții:
- Subiectul I
- Subiectul II
- Subiectul III

→ 6,5p

TIMP DE LUCRU: 100 min

NOTA FINALĂ = NOTA PB SCRISE + PUNCTAJ SEMINAR

CONSULTAȚII: 26.01.2020: ora 9 (Sala 12)