Curs 11

Cristian Niculescu

1 Actualizare Bayesiană: predicţie probabilistică

1.1 Scopul învăţării

Să poată să utilizeze legea probabilităţii totale pentru a calcula probabilităţile predictive a priori şi a posteriori.

1.2 Introducere

Am văzut actualizarea probabilităţii ipotezelor bazată pe date. Putem de asemenea folosi datele pentru a actualiza probabilitatea fiecărui rezultat posibil al unui experiment viitor.

1.2.1 Predicţie probabilistică; cuvinte de probabilitate estimativă (WEP)

Moduri de predicţie:
Predicţie: "Mâine va ploua."
Predicţie folosind cuvinte de probabilitate estimativă (WEP): "Este probabil să plouă mâine."
Predicţie probabilistică: "Mâine va ploua cu probabilitatea de 60% (şi nu plouă cu probabilitatea de 40%).
Fiecare tip de formulare este adecvat în diverse momente. Puteţi vedea `http://en.wikipedia.org/wiki/Words_of_Estimative_Probability` pentru o discuţie despre utilizarea adecvată a cuvintelor de probabilitate estimativă. Articolul conţine de asemenea o listă de *cuvinte nevăstuică (weasel words)* ca "ar putea (might)", "nu poate exclude (cannot rule out)", "este de conceput (it's conceivable)" care ar trebui evitate deoarece aproape sigur produc confuzie.
Sunt multe locuri unde vrem să facem o predicţie probabilistică. Exemple:
Rezultate ale tratamentului medical

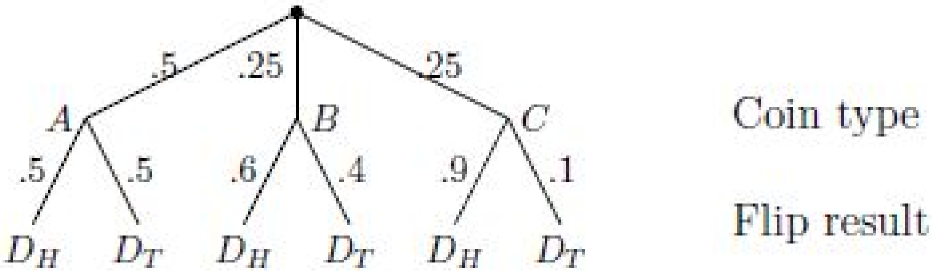
Prognoza meteo
Schimbarea climei
Pariuri sportive
Alegeri
...
Acestea sunt toate situaţii unde există incertitudine despre rezultat şi am vrea o descriere cât mai precisă posibil a ce se poate întâmpla.

1.3 Probabilităţi predictive

Predicţia probabilistică înseamnă atribuirea unei probabilităţi fiecărui rezultat posibil al unui experiment.
Reconsiderăm exemplul cu monedele: sunt 3 tipuri de monede care sunt de nedistins în afară de probabilităţile lor de avers la aruncare.
Monedele de tip A sunt corecte, cu probabilitatea aversului 0.5.
Monedele de tip B au probabilitatea aversului 0.6.
Monedele de tip C au probabilitatea aversului 0.9.
Avem un sertar cu 4 monede: 2 de tip A, una de tip B şi una de tip C. Alegem o monedă din sertar. Fie A evenimentul "moneda aleasă este de tipul A". Analog pentru B şi C.

1.3.1 Probabilităţi predictive a priori

Înainte de a colecta datele, calculăm probabilitatea ca moneda aleasă de noi să dea avers (sau revers) dacă o aruncăm. Fie D_H evenimentul "avers" şi D_T evenimentul "revers". Putem folosi legea probabilităţii totale pentru a determina probabilităţile acestor evenimente. Desenând un arbore sau calculând cu formula, obţinem ("Coin type" = "tipul monedei", "Flip result" = "rezultatul aruncării"):



$$
\begin{aligned}
P(D_H) &= P(D_H|A)P(A) + P(D_H|B)P(B) + P(D_H|C)P(C) \\
&= 0.5 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.25 + 0.9 \cdot 0.25 = 0.625 \\
P(D_T) &= P(D_T|A)P(A) + P(D_T|B)P(B) + P(D_T|C)P(C) \\
&= 0.5 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.25 + 0.1 \cdot 0.25 = 0.375.
\end{aligned}
$$

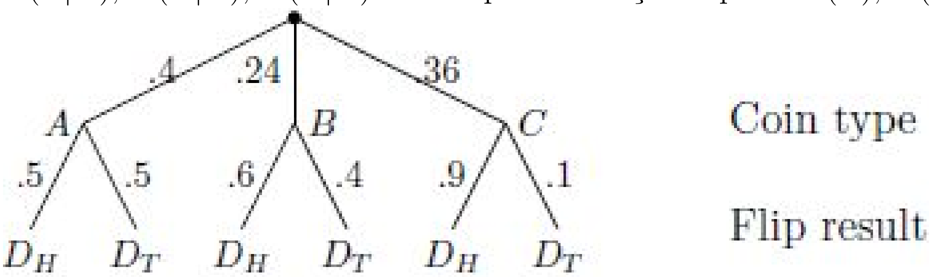
Definiţie: Aceste probabilităţi dau o predicţie (probabilistică) a ce se va întâmpla dacă moneda este aruncată. Deoarece ele sunt calculate înainte de a colecta orice dată, ele se numesc probabilităţi predictive a priori.

1.3.2 Probabilităţi predictive a posteriori

Presupunem că aruncăm moneda o dată şi obţinem avers. Acum avem datele D, pe care le putem folosi pentru a actualiza probabilităţile a priori ale ipotezelor noastre la probabilităţi a posteriori. Folosim un tabel Bayes pentru a facilita acest calcul:

hypothesis	prior	likelihood	Bayes numerator	posterior
H	$P(H)$	$P(D\|H)$	$P(D\|H)P(H)$	$P(H\|D)$
A	0.5	0.5	0.25	0.4
B	0.25	0.6	0.15	0.24
C	0.25	0.9	0.225	0.36
total	1		0.625	1

Dacă am aruncat moneda o dată şi am obţinut avers, putem calcula probabilitatea că moneda aleasă de noi va da avers (sau revers) dacă o aruncăm a 2-a oară. Procedăm ca mai sus, dar folosind probabilităţile a posteriori $P(A|D)$, $P(B|D)$, $P(C|D)$ în locul probabilităţilor a priori $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$.



$$
\begin{aligned}
P(D_H|D) &= P(D_H|A)P(A|D) + P(D_H|B)P(B|D) + P(D_H|C)P(C|D) \\
&= 0.5 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.24 + 0.9 \cdot 0.36 = 0.668 \\
P(D_T|D) &= P(D_T|A)P(A|D) + P(D_T|B)P(B|D) + P(D_T|C)P(C|D) \\
&= 0.5 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.24 + 0.1 \cdot 0.36 = 0.332.
\end{aligned}
$$

Definiţie: Aceste probabilităţi dau o predicţie (probabilistică) a ceea ce se va întâmpla dacă moneda este aruncată iar. Deoarece sunt calculate după colectarea datelor şi actualizarea a priori la a posteriori, ele sunt numite probabilităţi predictive a posteriori.
Observăm că aversul la prima aruncare creşte probabilitatea aversului la a 2-a aruncare.

1.3.3 Recapitulare

Fiecare ipoteză dă o probabilitate diferită a aversului, deci probabilitatea totală a aversului este o medie ponderată. Pentru probabilitatea predictivă a priori a aversului, ponderile sunt date de probabilităţile a priori ale ipotezelor. Pentru probabilitatea predictivă a posteriori a aversului, ponderile sunt date de probabilităţile a posteriori ale ipotezelor.
Reţineţi: Probabilităţile a priori şi a posteriori sunt pentru ipoteze. Probabilităţile predictive a priori şi a posteriori sunt pentru date. Ultimele prezic datele viitoare.

2 Actualizare Bayesiană: şanse

2.1 Scopurile învăţării

1. Să poată converti şansele în probabilitate şi invers.
2. Să poată actualiza şansele a priori în şanse a posteriori folosind factori Bayes.
3. Să înţeleagă cum factorii Bayes măsoară gradul în care datele dau dovezi pentru sau împotriva ipotezelor.

2.2 Şanse

Când comparăm 2 evenimente, putem formula afirmaţiile probabilistice în termeni de şanse.
Definiţie. Şansele unui eveniment E versus evenimentul E' sunt raportul probabilităţilor lor $P(E)/P(E')$. Dacă nu se specifică evenimentul E', al

2-lea eveniment este presupus a fi evenimentul complementar E^c. Astfel, şansele lui E sunt:

$$O(E) = \frac{P(E)}{P(E^c)}.$$

De exemplu, $O(\text{ploaie}) = 2$ înseamnă că probabilitatea de a ploua este de 2 ori probabilitatea de a nu ploua (2/3 versus 1/3). Putem spune că "şansele de ploaie sunt 2 la 1".

Exemplu. Pentru o monedă corectă, $O(\text{avers}) = \frac{1/2}{1/2} = 1$. Putem spune că şansele aversului sunt 1 la 1 sau 50-50.

Exemplu. Pentru un zar standard, şansele de a da 4 sunt $\frac{1/6}{5/6} = \frac{1}{5}$. Putem spune că şansele sunt "1 la 5 pentru" sau "5 la 1 împotriva" a da un 4.

Exemplu. Probabilitatea unei perechi într-o mână de poker de 5 cărţi este 0.42257. Astfel, şansele unei perechi sunt $0.42257/(1 - 0.42257) = 0.73181$.

Formule de conversie: Dacă $P(E) = p$, atunci $O(E) = \frac{p}{1-p}$. Dacă $O(E) = q$, atunci $P(E) = \frac{q}{1+q}$.

Observaţii:

1. A 2-a formulă provine din rezolvarea ecuaţiei în p
$q = p/(1 - p)$.
2. Probabilităţile sunt între 0 şi 1, în timp ce şansele sunt între 0 şi ∞.
3. Proprietatea $P(E^c) = 1 - P(E)$ devine $O(E^c) = 1/O(E)$.

Exemplu. Fie F evenimentul că o mână de poker să fie ful (3 cărţi de un rang şi alte 2 cărţi de un alt rang). Atunci $P(F) = 0.0014521$ deci $O(F) = 0.0014521/(1 - 0.0014521) = 0.0014542$.

Şansele de a nu avea ful sunt
$O(F^c) = (1 - 0.0014521)/0.0014521 = 687.6578 = 1/O(F)$.

4. Dacă $P(E)$ sau $O(E)$ este mic, atunci $O(E) \approx P(E)$. Aceasta rezultă din formulele de conversie.

Exemplu. La exemplul din poker, unde F = "ful", am văzut că $P(F)$ şi $O(F)$ diferă abia la a 6-a zecimală.

2.3 Actualizarea şanselor

2.3.1 Introducere

În actualizarea Bayesiană, am utilizat verosimilitatea datelor pentru a actualiza probabilităţile a priori ale ipotezelor la probabilităţi a posteriori. În limbaj de şanse, vom actualiza şansele a priori la şanse a posteriori. Datele dau dovezi pentru sau împotriva unei ipoteze dacă şansele ei a posteriori sunt mai mari sau mai mici decât şansele ei a priori.

2.3.2 Exemplu: sindromul Marfan

Sindromul Marfan este o boală genetică a ţesutului conjunctiv care apare la 1 din 15000 de oameni. Principalele caracteristici oculare ale sindromului Marfan includ ectopia de cristalin bilaterală, miopie şi detaşarea retinei. Aproximativ 70% din oamenii cu sindrom Marfan au cel puţin una din aceste caracteristici oculare, în timp ce doar 7% din oamenii fără sindrom Marfan au. (Nu garantăm acurateţea acestor numere.)
Dacă o persoană are cel puţin una din aceste caracteristici oculare, care sunt şansele să aibă sindromul Marfan?
Răspuns: Aceasta este o problemă standard de actualizare Bayesiană. Ipotezele noastre sunt:
M = "persoana are sindromul Marfan",
M^c = "persoana nu are sindromul Marfan".
Datele sunt:
F = "persoana are cel puţin o caracteristică oculară".
Ştim probabilitatea a priori a lui M şi verosimilităţile lui F dat fiind M sau M^c:

$$P(M) = 1/15000,\ P(F|M) = 0.7,\ P(F|M^c) = 0.07.$$

Putem calcula probabilităţile a posteriori folosind un tabel:

hypothesis	prior	likelihood	Bayes numerator	posterior
H	$P(H)$	$P(F\|H)$	$P(F\|H)P(H)$	$P(H\|F)$
M	0.000067	0.7	0.0000467	0.00066
M^c	0.999933	0.07	0.069995	0.99933
total	1		0.07004	1

Şansele a priori sunt:

$$O(M) = \frac{P(M)}{P(M^c)} = \frac{1/15000}{14999/15000} = \frac{1}{14999} \approx 0.000067.$$

Şansele a posteriori sunt date de raportul probabilităţilor a posteriori sau al numărătorilor Bayes, deoarece factorul normalizator este acelaşi la numărător şi la numitor.

$$O(M|F) = \frac{P(M|F)}{P(M^c|F)} = \frac{P(F|M)P(M)}{P(F|M^c)P(M^c)} = 0.000667.$$

Şansele a posteriori sunt de 10 ori mai mari decât şansele a priori. În acest sens, a avea o caracteristică oculară este o dovadă puternică în favoarea ipotezei M. Totuşi, deoarece şansele a priori sunt atât de mici, este încă foarte puţin probabil ca persoana să aibă sindromul Marfan.

2.4 Factorii Bayes şi puterea dovezii

Factorul 10 din exemplul precedent se numeşte factor Bayes.
Definiţie: Pentru ipoteza H şi datele D, factorul Bayes este raportul verosimilităţilor:

$$\text{factorul Bayes} = \frac{P(D|H)}{P(D|H^c)}.$$

Să vedem exact unde factorul Bayes apare în actualizarea şanselor. Avem

$$\begin{aligned} O(H|D) &= \frac{P(H|D)}{P(H^c|D)} \\ &= \frac{P(D|H)P(H)}{P(D|H^c)P(H^c)} \\ &= \frac{P(D|H)}{P(D|H^c)} \cdot \frac{P(H)}{P(H^c)} \\ &= \frac{P(D|H)}{P(D|H^c)} \cdot O(H). \end{aligned}$$

$$\text{şansele a posteriori} = \textbf{factorul Bayes} \times \text{şansele a priori.}$$

Din această formulă vedem că factorul Bayes (BF) ne spune dacă datele dau dovezi pentru sau împotriva ipotezei.
Dacă $BF > 1$, atunci şansele a posteriori sunt mai mari decât şansele a priori. Astfel, datele dau dovezi pentru ipoteză.
Dacă $BF < 1$, atunci şansele a posteriori sunt mai mici decât şansele a priori. Astfel, datele dau dovezi împotriva ipotezei.
Dacă $BF = 1$, atunci şansele a priori şi a posteriori sunt egale. Astfel, datele nu dau nicio dovadă pentru sau împotriva ipotezei.
Următorul exemplu este din cartea *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms* de David J. C. Mackay, care spune cu privire la probele dintr-un proces:
"În opinia mea, sarcina unui juriu ar trebui în general să fie a înmulţi împreună rapoarte de verosimilitate evaluate cu grijă de la fiecare parte independentă de dovadă admisibilă cu o probabilitate a priori motivată la fel de grijuliu. Acest punct de vedere este împărtăşit de mulţi statisticieni, dar învăţaţii judecători de apel britanici nu au fost de acord recent şi în realitate au răsturnat verdictul unui proces deoarece juraţii fuseseră învăţaţi să utilizeze teorema lui Bayes pentru a trata dovezi ADN complicate."

Exemplul 1. 2 oameni au lăsat urme de sânge la locul unei crime. Un suspect, Oliver, are grupa de sânge "0". Grupele de sânge ale celor 2 urme sunt "0" (o grupă obişnuită în populaţia locală, având frecvenţa 60%) şi "AB" (o grupă rară, cu frecvenţa 1%). Dau aceste date (grupele "0" şi "AB" găsite la locul crimei) dovezi în favoarea propoziţiei că "Oliver a fost una dintre cele 2 persoane prezente la locul crimei"?
Răspuns: Sunt 2 ipoteze:
S = "Oliver şi o altă persoană necunoscută au fost la locul crimei";
S^c = "2 persoane necunoscute au fost la locul crimei".
Datele sunt:
D = "grupele de sânge "0" şi "AB" au fost găsite".
Factorul Bayes pentru prezenţa lui Oliver este $BF_{\text{Oliver}} = \frac{P(D|S)}{P(D|S^c)}$. Calculăm numărătorul şi numitorul separat.
Datele spun că ambele grupe de sânge "0" şi "AB" au fost aflate la locul crimei. Dacă Oliver a fost la locul crimei, grupa "0" ar fi acolo. Deci, $P(D|S)$ este probabilitatea că cealaltă persoană avea grupa "AB". Ni s-a spus că aceasta este 0.01, deci $P(D|S) = 0.01$.
Dacă Oliver nu a fost la locul crimei, atunci au fost 2 persoane aleatoare, una cu grupa "0" şi una cu grupa "AB". Probabilitatea acestui fapt este $2 \cdot 0.6 \cdot 0.01$. Factorul 2 este deoarece sunt 2 moduri în care se poate întâmpla asta - prima persoană are grupa 0 şi a 2-a grupa AB sau viceversa. (Am presupus că grupele de sânge ale celor 2 persoane sunt independente. Aceasta nu este exact adevărat, dar pentru o populaţie suficient de mare este destul de aproape de adevăr. Fie N_0, numărul de oameni cu grupa 0, N_{AB}, numărul de oameni cu grupa AB şi N, mărimea populaţiei. Probabilitatea exactă este $\frac{(N_0-1)\cdot N_{AB}}{C^2_{N-1}} = \frac{2\cdot(N_0-1)\cdot N_{AB}}{(N-1)(N-2)} = 2 \cdot \frac{0.6N-1}{N-1} \cdot \frac{0.01N}{N-2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 2 \cdot 0.6 \cdot 0.01$. Aceasta arată că pentru N suficient de mare, probabilitatea este aproximativ $2 \cdot 0.6 \cdot 0.01$.)
Factorul Bayes pentru prezenţa lui Oliver la locul crimei este

$$BF_{\text{Oliver}} = \frac{P(D|S)}{P(D|S^c)} \approx \frac{0.01}{2 \cdot 0.6 \cdot 0.01} = 0.8(3).$$

Deoarece $BF_{\text{Oliver}} < 1$, datele dau dovezi (slabe) împotriva prezenţei lui Oliver la locul crimei.
Exemplul 2. Un alt suspect, Alberto, are grupa de sânge AB. Dau aceleaşi date dovezi în favoarea propoziţiei că Alberto a fost una din cele 2 persoane prezente la locul crimei?
Răspuns: Refolosind notaţiile de mai sus cu Alberto în locul lui Oliver, avem:

$$BF_{\text{Alberto}} = \frac{P(D|S)}{P(D|S^c)} \approx \frac{0.6}{2 \cdot 0.6 \cdot 0.01} = 50.$$

Deoarece $BF_{\text{Alberto}} \gg 1$, datele dau o dovadă puternică în favoarea prezenţei lui Alberto la locul crimei.
Observaţii:
1. În ambele exemple, am calculat doar factorul Bayes, nu şansele a posteriori. Pentru a le calcula pe ultimele, am avea nevoie să ştim şansele a priori pentru prezenţa lui Oliver (sau Alberto) la locul crimei, pe baza altor dovezi.
2. Dacă 50% din populaţie ar fi avut grupa 0 de sânge în loc de 60%, atunci factorul Bayes al lui Oliver ar fi fost 1 (nici pentru, nici împotrivă). Mai general, punctul de echilibru pentru dovezile cu grupe de sânge este când proporţia grupei de sânge a suspectului din populaţia generală egalează proporţia grupei de sânge a suspectului dintre cele aflate la locul crimei.

2.4.1 Reactualizare

Presupunem că adunăm datele în 2 etape, întâi D_1, apoi D_2. A posteriori finale pot fi calculate toate o dată sau în 2 etape, unde întâi actualizăm a priori folosind verosimilităţile pentru D_1 şi apoi actualizăm a posteriori rezultate după prima actualizare folosind verosimilităţile pentru D_2. Ultima abordare merge ori de câte ori verosimilităţile se înmulţesc:

$$P(D_1, D_2|H) = P(D_1|H)P(D_2|H).$$

Deoarece verosimilităţile sunt condiţionate de ipoteze, spunem că D_1 şi D_2 sunt condiţionat independente dacă relaţia de mai sus are loc pentru orice ipoteză H.
Exemplu. Sunt 5 zaruri într-un sertar, cu 4, 6, 8, 12 şi 20 de feţe (acestea sunt ipotezele). Luăm aleator un zar şi-l aruncăm de 2 ori, obţinând întâi 7, apoi 11. Sunt aceste rezultate condiţionat independente? Dar independente?
Răspuns. Rezultatele sunt condiţionat independente. De exemplu, pentru ipoteza zarului cu 8 feţe avem:

$$\begin{aligned} P(7 \text{ la aruncarea } 1|\text{zar cu } 8 \text{ feţe}) &= 1/8, \\ P(11 \text{ la aruncarea } 2|\text{zar cu } 8 \text{ feţe}) &= 0, \\ P(7 \text{ la aruncarea } 1, 11 \text{ la aruncarea } 2|\text{zar cu } 8 \text{ feţe}) &= 0. \end{aligned}$$

Pentru ipoteza zarului cu 20 de feţe avem:

$$\begin{aligned} P(7 \text{ la aruncarea } 1|\text{zar cu } 20 \text{ feţe}) &= 1/20, \\ P(11 \text{ la aruncarea } 2|\text{zar cu } 20 \text{ feţe}) &= 1/20, \\ P(7 \text{ la aruncarea } 1, 11 \text{ la aruncarea } 2|\text{zar cu } 20 \text{ feţe}) &= (1/20)^2. \end{aligned}$$

Totuşi, rezultatele nu sunt independente. Adică:

$P(7 \text{ la aruncarea } 1, 11 \text{ la aruncarea } 2) \neq P(7 \text{ la aruncarea } 1) P(11 \text{ la aruncarea } 2).$

Intuitiv, aceasta este deoarece 7 la aruncarea 1 ne permite să eliminăm zarurile cu 4 şi 6 feţe, făcând un 11 la aruncarea 2 mai probabil. Ne verificăm intuiţia calcuând ambii membri. La membrul drept avem:

$$\begin{aligned} P(7 \text{ la aruncarea } 1) &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{20}=\frac{31}{600}, \\ P(11 \text{ la aruncarea } 2) &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{20}=\frac{2}{75}. \end{aligned}$$

Deci membrul drept este $\frac{31}{600}\cdot\frac{2}{75} = 0.0013(7)$.
Membrul stâng este:

$$\begin{aligned} & P(7 \text{ la aruncarea } 1, 11 \text{ la aruncarea } 2) \\ & = P(11 \text{ la aruncarea } 2 | 7 \text{ la aruncarea } 1)\cdot P(7 \text{ la aruncarea } 1) \\ & = \left(\frac{10}{31}\cdot\frac{1}{12}+\frac{6}{31}\cdot\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{31}{600} \\ & = \frac{17}{9000} = 0.001(8). \end{aligned}$$

Aici $\frac{10}{31}$ şi $\frac{6}{31}$ sunt probabilităţile a posteriori ale zarurilor cu 12 şi cu 20 de feţe dat fiind un 7 la aruncarea 1 (se pot calcula cu un tabel de actualizare Bayesiană).
Concluzionăm că, fără condiţionarea de ipoteze, aruncările nu sunt independente.
Întorcându-ne la schema generală, dacă D_1 şi D_2 sunt condiţionat independente pentru H şi H^c, atunci are sens să considerăm fiecare factor Bayes independent:

$$BF_i = \frac{P(D_i|H)}{P(D_i|H^c)}, i = 1, 2.$$

Şansele a priori ale lui H sunt $O(H)$. Şansele a posteriori după D_1 sunt

$$O(H|D_1) = BF_1 \cdot O(H).$$

Şansele a posteriori după D_1 şi D_2 sunt

$$\begin{aligned} O(H|D_1, D_2) &= BF_2 \cdot O(H|D_1) \\ &= BF_2 \cdot BF_1 \cdot O(H). \end{aligned}$$

Actualizarea şanselor cu date noi, condiţionat independente de cele vechi, se face prin înmulţirea şanselor a posteriori curente cu factorul Bayes al noilor

date.
Exemplul 3. Alte simptome ale sindromului Marfan
Reamintim din exemplul de mai devreme că factorul Bayes pentru cel puţin o caracteristică oculară (F) este

$$BF_F = \frac{P(F|M)}{P(F|M^c)} = \frac{0.7}{0.07} = 10.$$

Semnul închieturii mâinii (W) este capacitatea de a înfăşura o mână în jurul celeilalte închieturi a mâinii astfel încât unghia degetului mic să poată fi acoperită de degetul mare. Presupunem că 10% din populaţie are semnul închieturii mâinii, în timp ce 90% din oamenii cu sindromul Marfan îl au. De aceea, factorul Bayes pentru semnul închieturii mâinii este

$$BF_W = \frac{P(W|M)}{P(W|M^c)} = \frac{0.9}{0.1} = 9.$$

Presupunem că F şi W sunt simptome condiţionat independente. Adică, printre oamenii cu sindromul Marfan, caracteristicile oculare şi semnul închieturii mâinii sunt independente şi printre oamenii fără sindromul Marfan, caracteristicile oculare şi semnul închieturii mâinii sunt independente. Cu această presupunere, şansele a posteriori ale sindromului Marfan pentru cineva care are atât caracteristicile oculare cât şi semnul închieturii mâinii sunt

$$O(M|F,W) = BF_W \cdot BF_F \cdot O(M) = 9 \cdot 10 \cdot \frac{1}{14999} \approx \frac{6}{1000}.$$

Putem converti şansele posterioare în probabilitate, dar, deoarece şansele sunt atât de mici, rezultatul este aproape acelaşi:

$$P(M|F,W) \approx \frac{6}{1000+6} \approx 0.596\%.$$

Aşadar, caracteristicile oculare şi semnul închieturii sunt ambele dovezi puternice în favoarea ipotezei M şi, luate împreună, sunt dovezi foarte puternice. Din nou, deoarece şansele a priori sunt atât de mici, este încă improbabil că persoana are sindromul Marfan, dar în această situaţie merită să fie făcute alte teste date fiind consecinţele potenţial fatale ale bolii (ca anevrismul aortic sau disecţia aortică).
Observăm de asemenea că, dacă o persoană are exact unul din cele 2 simptome, atunci produsul factorilor Bayes este aproape de 1 (9/10 sau 10/9). Astfel, cele 2 părţi ale datelor se anulează una pe alta în ce priveşte dovezile pe care le dau pentru sindromul Marfan.

2.5 Log şanse

În practică, este adesea convenabil a lucra cu logaritmii naturali ai şanselor în locul şanselor. Destul de firesc, aceştia sunt numiţi log şanse. Formula de actualizare Bayesiană

$$O(H|D_1, D_2) = BF_2 \cdot BF_1 \cdot O(H)$$

devine

$$\ln(O(H|D_1, D_2)) = \ln(BF_2) + \ln(BF_1) + \ln(O(H)).$$

Putem interpreta formula de mai sus pentru log şansele a posteriori ca suma log şanselor a priori cu toate dovezile $\ln(BF_i)$ furnizate de date. Luând logaritmii, dovezile pentru ($BF_i > 1$) sunt pozitive şi dovezile împotrivă ($BF_i < 1$) sunt negative. Log şansele joacă de asemenea un rol central în regresia logistică, un model statistic legat de regresia liniară.