# Formule

## Definiția 2.6

*Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile de forma:*

- $(s = t)$, *unde* $s, t$ *sunt termeni;*
- $(Rt_1 \dots t_m)$, *unde* $R \in \mathcal{R}_m$ *și* $t_1, \dots, t_m$ *sunt termeni.*

## Definiția 2.7

*Formulele lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile definite astfel:*

(F0) *Orice formulă atomică este formulă.*

(F1) *Dacă* $\varphi$ *este formulă, atunci* $(\neg\varphi)$ *este formulă.*

(F2) *Daca* $\varphi$ *și* $\psi$ *sunt formule, atunci* $(\varphi \to \psi)$ *este formulă.*

(F3) *Dacă* $\varphi$ *este formulă, atunci* $(\forall x\varphi)$ *este formulă pentru orice variabilă* $x$.

(F4) *Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3) sunt formule.*

# *Formule*

*Notații*

- Mulțimea formulelor se notează $Form_{\mathcal{L}}$.
- Formule: $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.
- $Var(\varphi)$ este mulțimea variabilelor care apar în formula $\varphi$.

*Convenție*

De obicei renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Atunci când nu e pericol de confuzie, scriem $s = t$ în loc de $(s = t)$, $Rt_1 \ldots t_m$ în loc de $(Rt_1 \ldots t_m)$, $\forall x\varphi$ în loc de $(\forall x\varphi)$, etc..

### *Propoziția 2.8 (Inducția pe formule)*

*Fie $\Gamma$ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:*

- *$\Gamma$ conține toate formulele atomice;*
- *$\Gamma$ este închisă la $\neg, \rightarrow$ și $\forall x$ (pentru orice variabilă $x$).*

*Atunci $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$.*

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate $\mathcal{P}$: definim $\Gamma$ ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$.

## Conectori derivați

Conectorii $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ și cuantificatorul existențial $\exists$ sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$\begin{aligned}
\varphi \vee \psi &:= ((\neg\varphi) \to \psi) \\
\varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \to (\neg\psi))) \\
\varphi \leftrightarrow \psi &:= ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\
\exists x\varphi &:= (\neg\forall x(\neg\varphi)).
\end{aligned}$$

# Formule

## Convenții

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \to \psi$, dar scriem $(\varphi \to \psi) \to \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedență mai mare decât ceilalți conectori;
  - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\to, \leftrightarrow$.
- Prin urmare, formula $(((\varphi \to (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \to \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.
- Cuantificatorii $\forall$, $\exists$ au precedență mai mare decât ceilalți conectori.
- Așadar, $\forall x\varphi \to \psi$ este $(\forall x\varphi) \to \psi$ și nu $\forall x(\varphi \to \psi)$.

# *Notații*

De multe ori identificăm un limbaj $\mathcal{L}$ cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și scriem $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

- Scriem de multe ori $f(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $ft_1 \ldots t_m$ și $R(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $Rt_1 \ldots t_m$.
- Pentru simboluri $f$ de operații binare scriem $t_1 f t_2$ în loc de $ft_1 t_2$.
- Analog pentru simboluri $R$ de relații binare: scriem $t_1 R t_2$ în loc de $Rt_1 t_2$.

## $\mathcal{L}$-structura

*Definiția 2.9*

*O $\mathcal{L}$-structură este un cvadruplu*

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

*unde*

- *$A$ este o mulțime nevidă;*
- *$\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe $A$; dacă $f$ are aritatea $m$, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \to A$;*
- *$\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe $A$; dacă $R$ are aritatea $m$, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;*
- *$\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.*
- *$A$ se numește universul structurii $\mathcal{A}$. Notație: $A = |\mathcal{A}|$*
- *$f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește denotația sau interpretarea lui $f$ (respectiv $R$, $c$) în $\mathcal{A}$.*

## *Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$*

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- $\mathcal{L}_=$-structurile sunt mulțimile nevide

*Exemple de formule:*

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$

## Exemple - Limbajul aritmeticii $\mathcal{L}_{ar}$

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}$; $\dot{<}$ este simbol de relație binară, adică are aritatea 2;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}$; $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare și $\dot{S}$ este simbol de operație unar (adică are aritatea 1);
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$.

Exemplul natural de $\mathcal{L}_{ar}$-structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, S(m) = m + 1$ este funcția succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} = <,\ \dot{+}^{\mathcal{N}} = +,\ \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot,\ \dot{S}^{\mathcal{N}} = S,\ \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$.

# *Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binar*

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{R\}$; $R$ simbol binar
- $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- $\mathcal{L}$-structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară

- Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate $(A, \leq)$, folosim simbolul $\dot{\leq}$ în loc de $R$ și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\leq}$.
- Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $\dot{<}$ în loc de $R$ și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- Dacă suntem interesați de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul $\dot{E}$ în loc de $R$ și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{Graf}$.
- Dacă suntem interesați de structuri $(A, \in)$, folosim simbolul $\dot{\in}$ în loc de $R$ și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\in}$.

## Exemple - Limbajul grupurilor $\mathcal{L}_{Gr}$

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{^{-1}}\}$; $\dot{*}$ simbol binar, $\dot{^{-1}}$ simbol unar
- $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \dot{*}, \dot{^{-1}}; \dot{e})$ sau $\mathcal{L}_{Gr} = (\dot{*}, \dot{^{-1}}, \dot{e})$.

Exemple naturale de $\mathcal{L}_{Gr}$-structuri sunt grupurile: $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, e)$.
Prin urmare, $\dot{*}^{\mathcal{G}} = \cdot$, $\dot{^{-1}}^{\mathcal{G}} = ^{-1}$, $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$.

Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{-}\}$; $\dot{+}$ simbol binar, $\dot{-}$ simbol unar;
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$.

# SEMANTICA

## *Interpretare (evaluare)*

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură.

*Definiția 2.10*

*O interpretare sau evaluare a (variabilelor) lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ este o funcție $e : V \to A$.*

În continuare, $e : V \to A$ este o interpretare a lui $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$.

*Definiția 2.11 (Interpretarea termenilor)*

*Prin inducție pe termeni se definește interpretarea $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a* termenului $t$ sub evaluarea $e$*:*

- *dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;*
- *dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;*
- *dacă $t = ft_1 \dots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.*

# *Interpretarea formulelor*

Prin inducție pe formule se definește interpretarea

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a *formulei* $\varphi$ *sub evaluarea* $e$.

$$\begin{aligned}(s = t)^{\mathcal{A}}(e) &= \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases} \\ (Rt_1 \ldots t_m)^{\mathcal{A}}(e) &= \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}\end{aligned}$$

## *Negația și implicația*

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$, unde,

$$\rightarrow: \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\},$$

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Prin urmare,

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \big(\ \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \text{ sau } \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1\big)$.

# *Interpretarea formulelor*

## *Notație*

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretarea $e_{x \leftarrow a} : V \to A$ prin

$$e_{x \leftarrow a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

## *Interpretarea formulelor*

$$(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

## *Relația de satisfacere*

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

### *Definiția 2.12*

*Fie $\varphi$ o formulă. Spunem că:*

- *$e$ satisface $\varphi$ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.*
- *$e$ nu satisface $\varphi$ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$. Notație: $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.*

### *Corolar 2.13*

*Pentru orice formule $\varphi, \psi$ și orice variabilă $x$,*

*(i)* $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

*(ii)* $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *implică* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
$\iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ *sau* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

*(iii)* $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ *pentru orice* $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

**Dem.:** Exercițiu ușor.

## Relația de satisfacere

Fie $\varphi, \psi$ formule și $x$ o variabilă.

*Propoziția 2.14*

*(i)* $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

*(ii)* $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

*(iii)* $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

*(iv)* $(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \textit{dacă există } a \in A \ \ \textit{a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \textit{altfel.} \end{cases}$

**Dem.:** Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

$$
\begin{aligned}
(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \quad &\iff \quad (\neg\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\
&\iff \quad \text{există } a \in A \ \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 0 \\
&\iff \quad \text{există } a \in A \ \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 1.
\end{aligned}
$$

*Corolar 2.15*

*(i)* $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *și* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

*(ii)* $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *sau* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

*(iii)* $\mathcal{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *ddacă* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

*(iv)* $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ *există* $a \in A$ *a.î.* $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

Fie $\varphi$ formulă a lui $\mathcal{L}$.

### *Definiția 2.16*

*Spunem că $\varphi$ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și o evaluare $e : V \to A$ a.î.*

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

*Spunem și că $(\mathcal{A}, e)$ este un model al lui $\varphi$.*

Atenție! Este posibil ca atât $\varphi$ cât și $\neg\varphi$ să fie satisfiabile.
Exemplu: $\varphi := x = y$ în $\mathcal{L}_=$.

Fie $\varphi$ formulă a lui $\mathcal{L}$.

### *Definiția 2.17*

*Spunem că $\varphi$ este adevărată într-o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ dacă pentru orice evaluare $e : V \to A$,*

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

*Spunem și că $\mathcal{A}$ satisface $\varphi$ sau că $\mathcal{A}$ este un model al lui $\varphi$.*

*Notație:* $\mathcal{A} \vDash \varphi$

### *Definiția 2.18*

*Spunem că $\varphi$ este formulă universal adevărată sau (logic) validă dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,*

$$\mathcal{A} \vDash \varphi.$$

*Notație:* $\vDash \varphi$

Fie $\varphi, \psi$ formule ale lui $\mathcal{L}$.

## *Definiția 2.19*

*$\varphi$ și $\psi$ sunt logic echivalente dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e: V \to A$,*

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

*Notație:* $\varphi \mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \psi$

## *Definiția 2.20*

*$\psi$ este consecință semantică a lui $\varphi$ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e: V \to A$,*

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

*Notație:* $\varphi \vDash \psi$

## *Observație*

*(i)* $\varphi \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi \to \psi$.

*(ii)* $\varphi \mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \psi$ ddacă ($\psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi$) ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

# *Echivalențe și consecințe logice*

Pentru orice formule $\varphi$, $\psi$ și orice variabile $x, y$,

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x\varphi &\;\;\mathrel{\models\!\!\!\!\!\dashv}\;\; \forall x\neg\varphi && (1)\\
\neg\forall x\varphi &\;\;\mathrel{\models\!\!\!\!\!\dashv}\;\; \exists x\neg\varphi && (2)\\
\forall x(\varphi \wedge \psi) &\;\;\mathrel{\models\!\!\!\!\!\dashv}\;\; \forall x\varphi \wedge \forall x\psi && (3)\\
\forall x\varphi \vee \forall x\psi &\;\;\models\;\; \forall x(\varphi \vee \psi) && (4)\\
\exists x(\varphi \wedge \psi) &\;\;\models\;\; \exists x\varphi \wedge \exists x\psi && (5)\\
\exists x(\varphi \vee \psi) &\;\;\mathrel{\models\!\!\!\!\!\dashv}\;\; \exists x\varphi \vee \exists x\psi && (6)\\
\forall x(\varphi \to \psi) &\;\;\models\;\; \forall x\varphi \to \forall x\psi && (7)\\
\forall x(\varphi \to \psi) &\;\;\models\;\; \exists x\varphi \to \exists x\psi && (8)\\
\forall x\varphi &\;\;\models\;\; \exists x\varphi && (9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi &\vDash \exists x\varphi && (10)\\
\forall x\varphi &\vDash \varphi && (11)\\
\forall x\forall y\varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall y\forall x\varphi && (12)\\
\exists x\exists y\varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists y\exists x\varphi && (13)\\
\exists y\forall x\varphi &\vDash \forall x\exists y\varphi. && (14)
\end{aligned}
$$

**Dem.:** Exercițiu.

*Propoziția 2.21*

*Pentru orice termeni $s, t, u$,*

(i) $\vDash t = t$;

(ii) $\vDash s = t \to t = s$;

(iii) $\vDash s = t \wedge t = u \to s = u$.

**Dem.:** *Exercițiu ușor.*