Rezoluția

Pentru orice mulțime de clauze $\mathcal{S}$, notăm cu

$$Res(\mathcal{S}) := \bigcup_{C_1, C_2 \in \mathcal{S}} Res(C_1, C_2).$$

Propoziția 1.91

Pentru orice mulțime de clauze $\mathcal{S}$ și orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$,

$$e \vDash \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad e \vDash Res(\mathcal{S}).$$

Teorema 1.92 (Teorema de corectitudine a rezoluției)

Fie $\mathcal{S}$ o mulțime de clauze. Dacă $\square$ se derivează prin rezoluție din $\mathcal{S}$, atunci $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

Algoritmul Davis-Putnam (DP)

Intrare: $\mathcal{S}$ mulțime nevidă de clauze netriviale.
$i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

Pi.1 Fie x_i o variabilă care apare în $\mathcal{S}_i$. Definim

$$\mathcal{T}_i^1 \;:= \{C \in \mathcal{S}_i \mid x_i \in C\}, \quad \mathcal{T}_i^0 \;:= \{C \in \mathcal{S}_i \mid \neg x_i \in C\}.$$

Pi.2 **if** $(\mathcal{T}_i^1 \neq \emptyset$ și $\mathcal{T}_i^0 \neq \emptyset)$ **then**

$$\mathcal{U}_i \;:=\; \{(C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \mid C_1 \in \mathcal{T}_i^1, C_0 \in \mathcal{T}_i^0\}.$$

else $\mathcal{U}_i := \emptyset$.
Pi.3 Definim

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_{i+1} &:= \big(\mathcal{S}_i \setminus (\mathcal{T}_i^0 \cup \mathcal{T}_i^1)\big) \cup \mathcal{U}_i; \\ \mathcal{S}_{i+1} &:= \mathcal{S}'_{i+1} \setminus \{C \in \mathcal{S}'_{i+1} \mid C \text{ trivială}\}. \end{aligned}$$

Pi.4 **if** $\mathcal{S}_{i+1} = \emptyset$ **then** $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.
else if $\square \in \mathcal{S}_{i+1}$ **then** $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.
else $\{i := i + 1;$ go to Pi.1$\}$.

Algoritmul Davis-Putnam (DP)

$\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$. $i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

P1.1 $x_1 := v_3$; $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$; $\mathcal{T}_1^0 := \{\{v_1, \neg v_3\}\}$.
P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$.
P1.3 $\mathcal{S}_2' := \{\{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$; $\mathcal{S}_2 := \{\{v_2, v_1\}\}$.
P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1 $x_2 := v_2$; $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_2, v_1\}\}$; $\mathcal{T}_2^0 := \emptyset$.
P2.2 $\mathcal{U}_2 := \emptyset$.
P2.3 $\mathcal{S}_3 := \emptyset$.
P2.4 $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.

Algoritmul Davis-Putnam (DP)

$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}$.

$i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

P1.1 $x_1 := v_1$; $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_1, v_3\}, \{v_1\}\}$; $\mathcal{T}_1^0 := \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}\}$.

P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$.

P1.3 $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$.

P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1. $x_2 := v_2$; $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$; $\mathcal{T}_2^0 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}\}$.

P2.2 $\mathcal{U}_2 := \{\{v_3, \neg v_4, \neg v_3\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.

P2.3 $\mathcal{S}_3 := \{\{v_3\}, \{v_4\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.

P2.4 $i := 3$ and go to P3.1.

P3.1 $x_3 := v_3$; $\mathcal{T}_3^1 := \{\{v_3\}\}$; $\mathcal{T}_3^0 := \{\{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.

P3.2. $\mathcal{U}_3 := \{\{\neg v_4\}\}$. P3.3 $\mathcal{S}_4 := \{\{v_4\}, \{\neg v_4\}\}$.

P3.4 $i := 4$ and go to P4.1.

P4.1 $x_4 := v_4$; $\mathcal{T}_4^1 := \{\{v_4\}\}$; $\mathcal{T}_4^0 := \{\{\neg v_4\}\}$.

P4.2 $\mathcal{U}_4 := \{\square\}$. P4.3 $\mathcal{S}_5 := \{\square\}$.

P4.4 $\mathcal{S}$ nu este satisfiabilă.

Algoritmul DP - terminare

Notăm:

$Var(C) := \{x \in V \mid x \in C \text{ sau } \neg x \in C\}, \quad Var(\mathcal{S}) := \bigcup_{C \in \mathcal{S}} Var(C).$

Așadar, $Var(C) = \emptyset$ ddacă $C = \square$ și $Var(\mathcal{S}) = \emptyset$ ddacă $\mathcal{S} = \emptyset$ sau $\mathcal{S} = \{\square\}$.

Propoziția 1.93

Fie $n := |Var(\mathcal{S})|$. Atunci algoritmul DP se termină după cel mult n pași.

Dem.: Se observă imediat că pentru orice i,

$$Var(\mathcal{S}_{i+1}) \subseteq Var(\mathcal{S}_i) \setminus \{x_i\} \subsetneq Var(\mathcal{S}_i).$$

Prin urmare, $n = |Var(\mathcal{S}_1)| > |Var(\mathcal{S}_2)| > |Var(\mathcal{S}_3)| > \ldots \geq 0$.

$\square$

Algoritmul DP - corectitudine și completitudine

Fie $N \leq n$ numărul de pași după care se termină DP. Atunci $\mathcal{S}_{N+1} = \emptyset$ sau $\square \in S_{N+1}$.

Teorema 1.94

Algoritmul DP este corect și complet, adică,

$$\mathcal{S} \text{ este nesatisfiabilă} \;\; \text{ddacă} \; \square \in S_{N+1}.$$

LOGICA DE ORDINUL I

Definiția 2.1

Un limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I este format din:

- *o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;*
- *conectorii $\neg$ și $\rightarrow$;*
- *paranteze: (,);*
- *simbolul de egalitate $=$;*
- *cuantificatorul universal $\forall$;*
- *o mulțime $\mathcal{R}$ de simboluri de relații;*
- *o mulțime $\mathcal{F}$ de simboluri de funcții;*
- *o mulțime $\mathcal{C}$ de simboluri de constante;*
- *o funcție aritate $ari : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$.*

- $\mathcal{L}$ este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathrm{ari})$.
- τ se numește signatura lui $\mathcal{L}$ sau vocabularul lui $\mathcal{L}$ sau alfabetul lui $\mathcal{L}$ sau tipul de similaritate al lui $\mathcal{L}$

Limbaje de ordinul I

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

- Mulțimea $Sim_{\mathcal{L}}$ a simbolurilor lui $\mathcal{L}$ este

$$Sim_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc simboluri non-logice.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$ se numesc simboluri logice.

- Notăm variabilele cu $x, y, z, v, \ldots$, simbolurile de relații cu $P, Q, R \ldots$, simbolurile de funcții cu $f, g, h, \ldots$ și simbolurile de constante cu $c, d, e, \ldots$.

- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:

$\mathcal{F}_m$:= mulțimea simbolurilor de funcții de aritate m;

$\mathcal{R}_m$:= mulțimea simbolurilor de relații de aritate m.

Definiția 2.2

Mulțimea $Expr_{\mathcal{L}}$ a expresiilor lui $\mathcal{L}$ este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui $\mathcal{L}$.

- Expresia vidă se notează λ.
- Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ.

Definiția 2.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ o expresie a lui $\mathcal{L}$, unde $\theta_i \in Sim_{\mathcal{L}}$ pentru orice i.

- *Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \ldots \theta_j$ se numește (i, j)-subexpresia lui θ;*
- *Spunem că o expresie ψ apare în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i, j)-subexpresia lui θ;*
- *Notăm cu $Var(\theta)$ mulțimea variabilelor care apar în θ.*