Operații cu relații

Fie A, B, C mulțimi.

- Dacă $R \subseteq A \times B$, atunci relația inversă $R^{-1} \subseteq B \times A$ este definită astfel:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

- Dacă $R \subseteq A \times B$ și $Q \subseteq B \times C$, atunci compunerea lor $Q \circ R \subseteq A \times C$ este definită astfel:

$$Q \circ R = \{(a, c) \mid \text{ există } b \in B \text{ a.î. } (a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in Q\}.$$

- Diagonala lui A este $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Exercițiu

- Compunerea relațiilor este asociativă.
- Dacă $R \subseteq A \times B$ atunci $R \circ \Delta_A = R$ și $\Delta_B \circ R = R$.

Funcții

Definiție

O funcție este un triplet (A, B, R), unde A și B sunt mulțimi, iar $R \subseteq A \times B$ este o relație cu proprietatea că pentru orice $a \in A$ există un unic $b \in B$ cu $(a, b) \in R$.

Vom nota o funcție (A, B, R) prin $f : A \to B$, simbolul f având următoarea semnificație: fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un singur element $f(x) \in B$ a.î. $(x, f(x)) \in R$.

Spunem că $f : A \to B$ este definită pe A cu valori în B, A se numește domeniul de definiție al funcției f și B se numește domeniul valorilor lui f.

Notație: B^A este mulțimea funcțiilor de la A la B.

Definiție

O funcție parțială de la A la B este o funcție $f : C \to B$, unde C este o submulțime a lui A.

Funcții

Notații: Fie $f : A \to B$ o funcție, $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

- $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este imaginea directă a lui X prin f; $f(A)$ este imaginea lui f.
- $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ este imaginea inversă a lui Y prin f.

Definiție

Fie $f : A \to B$ o funcție

- f este injectivă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- f este surjectivă dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- f este bijectivă dacă f este injectivă și surjectivă.

Funcții

Fie $f : A \to B$ și $g : B \to C$ două funcții. Compunerea lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Funcția identică a lui A: $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$.

Definiție

O funcție $f : A \to B$ este inversabilă dacă există $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

Exercițiu. O funcție este bijectivă ddacă este inversabilă.

Definiție

Spunem că A este echipotentă cu B dacă există o bijecție $f : A \to B$. Notație: $A \sim B$.

Exercițiu. A este echipotentă cu B ddacă B este echipotentă cu A. De aceea, spunem de obicei că A și B sunt echipotente.

Familii

Fie I o mulțime nevidă.

Fie A o mulțime. O familie de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \to A$. Notăm cu $(a_i)_{i \in I}$ familia $f : I \to A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$. Vom scrie și $(a_i)_i$ sau (a_i) atunci când I este dedusă din context.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i, obținem o familie (indexată) de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$.

Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi T. Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i \in I}$ sunt definite astfel:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid \text{ există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}$$

Produsul cartezian al unei familii

Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi.

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i\in I}$ se definește astfel:

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} A_i &= \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\}\\ &= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.\end{aligned}$$

Pentru orice $j \in I$, aplicația $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j, \quad \pi_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$ se numește proiecție canonică a lui $\prod_{i\in I} A_i$. π_j este surjectivă.

Exercițiu. Fie I, J mulțimi nevide. Atunci
$\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j$ și $\bigcap_{i\in I} A_i \times \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j$.

$I = \{1, \ldots, n\}$

Fie n număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \ldots, n\}$ și A_1, ..., $A_n \subseteq T$.

- $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \ldots, x_n)$, un n-tuplu (ordonat)
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ și $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- $\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$ și $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$

Definiție

O relație n-ară între A_1, ..., A_n este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^{n} A_i$.
O relație n-ară pe A este o submulțime a lui A^n. Dacă R este relație n-ară, spunem că n este aritatea lui R.

Mulțimi numărabile

Definiție

O mulțime A este numărabilă dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.
O mulțime finită sau numărabilă se numește cel mult numărabilă.

Exemple

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ și $\mathbb{Q}$ sunt numărabile.
- Orice submulțime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

Proprietăți

(i) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi numărabile este mulțime numărabilă.

(ii) Produsul cartezian al unei familii cel mult numărabile de mulțimi numărabile este mulțime numărabilă.

Principiul diagonalizării

Fie R o relație binară pe o mulțime A și $D \subseteq A$ definită astfel:

$$D = \{x \in A \mid (x, x) \notin R\}.$$

Pentru orice $a \in A$, definim

$$R_a = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}.$$

Atunci D este diferit de fiecare R_a.

Dem.: Presupunem că există $a \in A$ astfel încât $D = R_a$. Sunt posibile două cazuri:

- $a \in D$. Rezultă că $(a, a) \notin R$, deci $a \notin R_a = D$. Contradicție.
- $a \notin D$. Rezultă că $(a, a) \in R$, deci $a \in R_a = D$. Contradicție.

Prin urmare, $D \neq R_a$ pentru orice $a \in A$. $\square$

Teoremă Cantor

Nu există o bijecție între $\mathbb{N}$ și mulțimea $2^{\mathbb{N}}$ a părților lui $\mathbb{N}$, deci $2^{\mathbb{N}}$ nu este mulțime numărabilă.

Dem.: Presupunem că există o bijecție $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$. Prin urmare, $2^{\mathbb{N}}$ poate fi enumerată ca $2^{\mathbb{N}} = \{S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots,\}$, unde $S_i = f(i)$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Considerăm relația binară $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definită astfel:

$$R = \{(i,j) \mid j \in f(i)\} = \{(i,j) \mid j \in S_i\}$$

și aplicăm Principiul diagonalizării. Astfel,

$$\begin{aligned} D &= \{n \in \mathbb{N} \mid (n,n) \notin R\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}, \\ R_i &= \{j \in \mathbb{N} \mid (i,j) \in R\} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \in S_i\} = S_i, \qquad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Deoarece $D \subseteq \mathbb{N}$ și f este bijecție, există $k \in \mathbb{N}$ a.î. $D = f(k) =$ $= S_k = R_k$. Pe de altă parte, conform Principiului diagonalizării, $D \neq R_i$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Am obținut o contradicție. $\square$

Relații binare

Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A^2$ o relație binară pe A.
Notație: Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiție

- R este reflexivă dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- R este ireflexivă dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- R este simetrică dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx.
- R este antisimetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,

  $$xRy \text{ și } yRx \text{ implică } x = y.$$
- R este tranzitivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$,

  $$xRy \text{ și } yRz \text{ implică } xRz.$$
- R este totală dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx.

Fie A o mulțime nevidă și R o relație binară pe A.

Definiție

R este relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Definiție

R este relație de

- ordine parțială dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
- ordine strictă dacă este ireflexivă și tranzitivă.
- ordine totală dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

Notații: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu $\leq$, iar relațiile de ordine strictă cu $<$.