

## Câteva consecințe

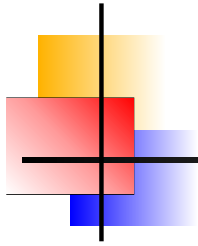
### Propoziția 1.52

Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$  și orice formule  $\varphi, \psi$ ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ și } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi.$$

**Dem.:**

- |     |   |                     |
|-----|---|---------------------|
| (1) | $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$   | ipoteză             |
| (2) | $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$  | Teorema deducției   |
| (3) | $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi$   | ipoteză             |
| (4) | $\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \varphi$  | Teorema deducției   |
| (5) | $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ | (42) și P.1.39.(ii) |
| (6) | $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$  | (MP): (2), (5)      |
| (7) | $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$   | (6), (4) și P. 1.48 |
| (8) | $\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$                     | (45) și P.1.39.(ii) |
| (9) | $\Gamma \vdash \varphi$   | (MP): (7), (8).     |



## *Câteva consecințe*

---

### *Propoziția 1.53*

*Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,*

$$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \quad (46)$$

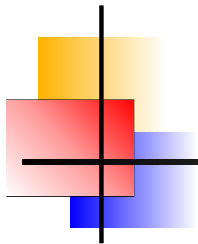
$$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi \quad (47)$$

$$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi \quad (48)$$

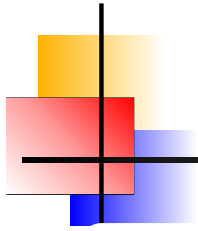
$$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi \quad \text{dacă} \quad \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi \quad (49)$$

$$\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi \quad (50)$$

**Dem.:** Exercițiu.



# SINTAXA și SEMANTICA



## Corectitudine

### *Teorema 1.54 (Teorema de corectitudine (Soundness Theorem))*

*Orice  $\Gamma$ -teoremă este consecință semantică a lui  $\Gamma$ , adică,*

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \varphi$$

*pentru orice  $\varphi \in Form$  și  $\Gamma \subseteq Form$ .*

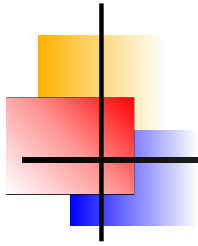
**Dem.:** Fie

$$\Sigma := \{\varphi \in Form \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că  $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ . O facem prin inducție după  $\Gamma$ -teoreme.

- ▶ Axiomele sunt în  $\Sigma$  (**exercițiu**).
- ▶ Evident,  $\Gamma \subseteq \Sigma$ .
- ▶ Demonstrăm acum că  $\Sigma$  este închisă la modus ponens.  
Presupunem că  $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ , adică,  $\Gamma \models \varphi$  și  $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ .  
Conform Propoziției 1.28.(i), obținem că  $\Gamma \models \psi$ , adică,  
 $\psi \in \Sigma$ .





## Sintaxă și semantică

Fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  o evaluare și  $v \in V$  o variabilă.

Definim

$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

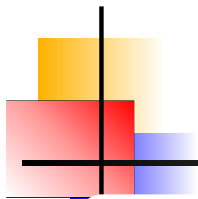
Așadar,  $e^+(v^e) = 1$ .

Pentru orice mulțime  $W = \{x_1, \dots, x_k\}$  de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \dots, x_k^e\}.$$

Pentru orice  $a \in \{0, 1\}$ , definim evaluarea  $e_{v \leftarrow a} : V \rightarrow \{0, 1\}$  prin

$$e_{v \leftarrow a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{daca } x \neq v \\ a & \text{daca } x = v. \end{cases}$$



### Propoziția 1.55

Fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  o evaluare. Pentru orice formulă  $\varphi$ ,

(i) Dacă  $e^+(\varphi) = 1$ , atunci  $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \varphi$ .

(ii) Dacă  $e^+(\varphi) = 0$ , atunci  $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$ .

**Dem.:** Suplimentar - nu trebuie citită pentru examen Prin inducție după formule. Avem următoarele cazuri:

►  $\varphi = v$ . Atunci  $\text{Var}(\varphi)^e = \{v^e\}$  și  $e^+(v) = e(v)$ .

Dacă  $e(v) = 1$ , atunci  $v^e = v$ , deci,  $\{v^e\} \vdash v$ .

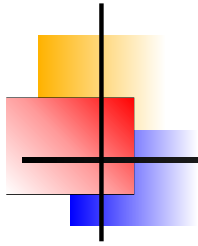
Dacă  $e(v) = 0$ , atunci  $v^e = \neg v$ , deci,  $\{v^e\} \vdash \neg v$ .

►  $\varphi = \neg\psi$ . Atunci  $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$ , deci  $\text{Var}(\varphi)^e = \text{Var}(\psi)^e$ .

Dacă  $e^+(\varphi) = 1$ , atunci  $e^+(\psi) = 0$ , deci, conform ipotezei de inducție pentru  $\psi$ ,  $\text{Var}(\psi)^e \vdash \neg\psi$ , adică,  $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \varphi$ .

Dacă  $e^+(\varphi) = 0$ , atunci  $e^+(\psi) = 1$ , deci, conform ipotezei de inducție pentru  $\psi$ ,  $\text{Var}(\psi)^e \vdash \psi$ , adică,  $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \psi$ .

Deoarece  $\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$  ((41) din Propoziția 1.51), putem aplica (MP) pentru a obține  $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi = \neg\varphi$ .



- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ . Atunci  $Var(\varphi) = Var(\psi) \cup Var(\chi)$ , deci  $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ .

Dacă  $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 0$ , atunci  $e^+(\psi) = 1$  și  $e^+(\chi) = 0$ . Avem

$Var(\psi)^e \vdash \psi$  ipoteza de inducție pentru  $\psi$

$Var(\chi)^e \vdash \neg\chi$  ipoteza de inducție pentru  $\chi$

$Var(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$   $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$  și P. 1.39.(i)

$\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \chi)$  (43) din Propoziția 1.51

$Var(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \rightarrow \chi)$  Propoziția 1.39.(iv).

Dacă  $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 1$ , atunci fie  $e^+(\psi) = 0$ , fie  $e^+(\chi) = 1$ .

În primul caz, obținem

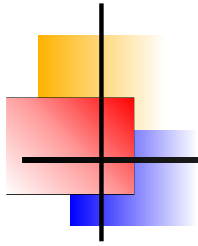
$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$	ipoteza de inducție pentru $\psi$
$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	(38) din P. 1.51 și P. 1.39.(ii)
$Var(\psi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	$Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 1.39.(i).

În al doilea caz, obținem

$Var(\chi)^e \vdash \chi$	ipoteza de inducție pentru $\chi$
$Var(\chi)^e \vdash \chi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	(A1) și Propoziția 1.37.(i)
$Var(\chi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	$Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 1.39.(i). $\square$

Demonstrația propoziției anterioare ne dă o construcție **efectivă** a unei demonstrații a lui  $\varphi$  sau  $\neg\varphi$  din premisele  $Var(\varphi)^e$ .





## Teorema de completitudine

### Teorema 1.56 (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$$\vdash \varphi \quad \text{dacă} \quad \models \varphi.$$

**Dem.:** " $\Rightarrow$ " Se aplică Teorema de corectitudine 1.54 pentru  $\Gamma = \emptyset$ .

" $\Leftarrow$ " Fie  $\varphi$  o tautologie și  $Var(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Demonstrăm prin inducție după  $k$  următoarea proprietate:

$$(*) \quad \text{pentru orice } k \leq n, \text{ pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \\ \{x_1^e, \dots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi.$$

Pentru  $k = n$ ,  $(*)$  ne dă  $\vdash \varphi$ .

$k = 0$ . Fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ . Deoarece  $\varphi$  este tautologie,  $e^+(\varphi) = 1$ . Aplicând Propoziția 1.55, obținem că

$$Var(\varphi)^e = \{x_1^e, \dots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$

## Teorema de completitudine

$k \Rightarrow k + 1$ . Presupunem că (\*) este adevărată pentru  $k$  și fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ . Trebuie să arătăm că  $\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$ . Considerăm evaluarea  $e' := e_{x_{n-k} \leftarrow \neg e(x_{n-k})}$ . Așadar,  $e'(v) = e(v)$  pentru orice  $v \neq x_{n-k}$  și

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

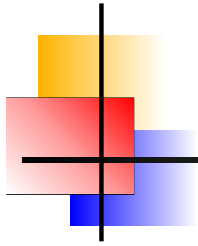
Rezultă că  $x_i^{e'} = x_i^e$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, n-k-1\}$  și

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din (\*) pentru  $e$  și  $e'$ , obținem

$$\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi \text{ și } \{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}^e\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziția 1.52 cu  $\Gamma := \{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\}$  și  $\psi := x_{n-k}$  pentru a conclud că  $\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$ . □



### Propoziția 1.57

Fie  $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$ . Presupunem că  $\varphi \sim \psi$ . Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \psi.$$

**Dem.:** Observăm că

$$\varphi \sim \psi \iff \models \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \models \psi \rightarrow \varphi$$

Propoziția 1.17

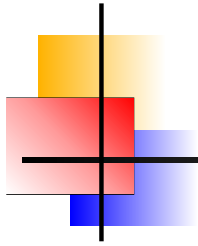
$$\iff \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \vdash \psi \rightarrow \varphi$$

Teorema de completitudine.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că  $\Gamma \vdash \varphi$ . Deoarece  $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ , rezultă din Propoziția 1.39.(ii) că  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ . Aplicăm acum (MP) pentru a obține că  $\Gamma \vdash \psi$ .

" $\Leftarrow$ " Similar.





## Notății

---

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule și  $\varphi$  o formulă.

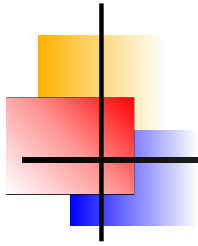
### Notății

$\Gamma \not\vdash \varphi$   $:\Leftrightarrow$   $\varphi$  nu este  $\Gamma$ -teoremă

$\not\vdash \varphi$   $:\Leftrightarrow$   $\varphi$  nu este teoremă

$\Gamma \not\models \varphi$   $:\Leftrightarrow$   $\varphi$  nu este consecință semantică a lui  $\Gamma$

$\not\models \varphi$   $:\Leftrightarrow$   $\varphi$  nu este tautologie.



## Mulțimi consistente

---

### Definiția 1.58

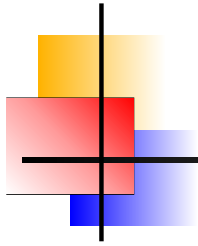
Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule.

- ▶  $\Gamma$  este **consistentă** dacă există o formulă  $\varphi$  astfel încât  $\Gamma \not\vdash \varphi$ .
- ▶  $\Gamma$  este **inconsistentă** dacă nu este consistentă, adică,  $\Gamma \vdash \varphi$  pentru orice formulă  $\varphi$ .

### Observație

Fie  $\Gamma, \Delta$  mulțimi de formule a.î.  $\Gamma \subseteq \Delta$ .

- ▶ Dacă  $\Delta$  este consistentă, atunci și  $\Gamma$  este consistentă.
- ▶ Dacă  $\Gamma$  este inconsistentă, atunci și  $\Delta$  este inconsistentă.



## *Mulțimi consistente*

---

### *Propoziția 1.59*

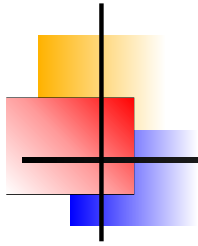
- (i)  $\emptyset$  este consistentă.*
- (ii) Mulțimea teoremelor este consistentă.*

#### **Dem.:**

- (i)* Dacă  $\vdash \perp$ , atunci, conform Teoremei de corectitudine 1.54, ar rezulta că  $\models \perp$ , o contradicție. Așadar  $\nvdash \perp$ , deci  $\emptyset$  este consistentă.
- (ii)* Aplicând Propoziția 1.39.(iv) pentru  $\Gamma = \emptyset$ , obținem că  $Thm = Thm(Thm)$ , adică, pentru orice  $\varphi$ ,  
$$\vdash \varphi \text{ ddacă } Thm \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că  $Thm$  este consistentă.





## Mulțimi consistente

### Propoziția 1.60

Pentru o mulțime de formule  $\Gamma$  sunt echivalente:

- (i)  $\Gamma$  este inconsistentă.
- (ii) Pentru orice formulă  $\psi$ ,  $\Gamma \vdash \psi$  și  $\Gamma \vdash \neg\psi$ .
- (iii) Există o formulă  $\psi$  a.î.  $\Gamma \vdash \psi$  și  $\Gamma \vdash \neg\psi$ .
- (iv)  $\Gamma \vdash \perp$ .

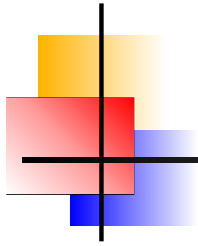
**Dem.:** (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii) și (i)  $\Rightarrow$  (iv) sunt evidente.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Fie  $\varphi$  o formulă. Conform (38) din Propoziția 1.51,

$$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$$

Aplicând (iii) și de două ori modus ponens, rezultă că  $\Gamma \vdash \varphi$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (iii). Presupunem că  $\Gamma \vdash \perp$ . Avem că  $\perp = \neg\top$ . Deoarece  $\top$  este tautologie, aplicăm Teorema de completitudine pentru a concludă că  $\vdash \top$ , deci și  $\Gamma \vdash \top$ . □



## Mulțimi consistente

### Propoziția 1.61

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule și  $\varphi$  o formulă.

(i)  $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  este inconsistentă.

(ii)  $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$  este inconsistentă.

**Dem.:**

(i) Avem

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$$

Propoziția 1.60

$$\iff \Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \perp$$

Teorema deducției

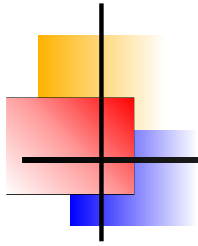
$$\iff \Gamma \vdash \varphi$$

$\neg\varphi \rightarrow \perp \sim \varphi$  și P. 1.57.

(ii) Similar.





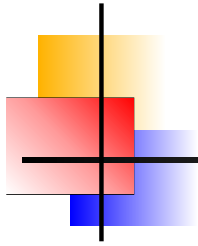


### Propoziția 1.62

Fie  $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  o mulțime finită de formule.

- (i) Pentru orice formulă  $\psi$ ,  $\Gamma \vdash \psi$  ddacă  $\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$   
ddacă  $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\} \vdash \psi$ .
- (ii)  $\Gamma$  este consistentă ddacă  $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$  este consistentă.

**Dem.:** Exercițiu.



## *Mulțimi consistente*

---

### *Propoziția 1.63*

*Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule.  $\Gamma$  este inconsistentă dacă  $\Gamma$  are o submulțime finită inconsistentă.*

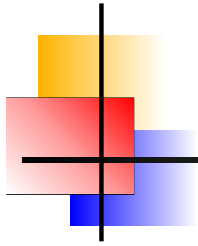
**Dem.:** " $\Leftarrow$ " este evidentă.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că  $\Gamma$  este inconsistentă. Atunci, conform Propoziției 1.60.(iv),  $\Gamma \vdash \perp$ . Aplicând Propoziția 1.44, obținem o submulțime finită  $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  a lui  $\Gamma$  a.î.  $\Sigma \vdash \perp$ . Prin urmare,  $\Sigma$  este inconsistentă.

Un rezultat echivalent:

### *Propoziția 1.64*

*Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule.  $\Gamma$  este consistentă dacă orice submulțime finită a lui  $\Gamma$  este consistentă.*



## Consecință a Teoremei de completitudine

### Teorema 1.65

Pentru orice formulă  $\varphi$ ,

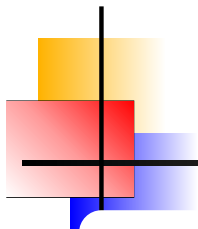
$$\{\varphi\} \text{ este consistentă} \iff \{\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}$$

**Dem.:** Avem

$$\begin{aligned} \{\varphi\} \text{ este inconsistentă} &\iff \vdash \neg\varphi \\ &\text{Propoziția 1.61.(ii)} \\ &\iff \models \neg\varphi \\ &\text{Teorema de completitudine} \\ &\iff \{\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ &\text{Propoziția 1.30.(ii).} \end{aligned}$$

Așadar,  $\{\varphi\}$  este consistentă  $\iff \{\varphi\}$  este satisfiabilă.





## *Teorema de completitudine tare*

### *Teorema 1.66 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)*

*Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$ ,*

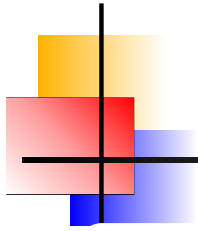
*$\Gamma$  este consistentă  $\iff \Gamma$  este satisfiabilă.*

**Dem.:** " $\Leftarrow$ " Presupunem că  $\Gamma$  este satisfiabilă, deci are un model  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ . Presupunem că  $\Gamma$  nu este consistentă. Atunci  $\Gamma \vdash \perp$  și, aplicând Teorema de corectitudine 1.54, rezultă că  $\Gamma \models \perp$ . Ca urmare,  $e \models \perp$ , ceea ce este o contradicție.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că  $\Gamma$  este consistentă. Demonstrăm că  $\Gamma$  este finit satisfiabilă și aplicăm apoi Teorema de compacitate 1.34 pentru a concluda că  $\Gamma$  este satisfiabilă.

Fie  $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  o submulțime finită a lui  $\Gamma$ . Atunci  $\Sigma$  este consistentă, conform Propoziției 1.64. Din Propoziția 1.62.(ii), rezultă că  $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$  este consistentă. Aplicând acum Teorema 1.65 obținem că  $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$  este satisfiabilă.

Deoarece, conform Propoziției 1.31.(i),  $\Sigma \sim \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$ , avem că  $\Sigma$  este satisfiabilă. □



## *Teorema de completitudine tare*

### *Teorema 1.67 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)*

*Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$  și orice formulă  $\varphi$ ,*

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi.$$

**Dem.:**

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \varphi &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} \\ &\text{Propoziția 1.61.(i)} \\ &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ &\text{Teorema de completitudine tare - versiunea 1} \\ &\iff \Gamma \models \varphi \\ &\text{Propoziția 1.30.(i).} \quad \square \end{aligned}$$

### *Observație*

Am demonstrat Teorema de completitudine tare - versiunea 2 folosind Teorema de completitudine tare - versiunea 1. Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente (**exercițiu**).