Curs 1

2020-2021

Fundamentele Limbajelor de Programare

Cuprins

Organizare

Instructori

Curs:

- **Ioana Leuștean (seria 24), Traian-Florin Șerbănuță (seria 23)**

Laborator

Seria 24
- **Ioana Leuștean (241, 244)**
- **Natalia Ozunu (242, 243)**

Seria 23
- **Ana Țurlea (231, 232, 233)**
- **Traian Șerbănuță (234)**

Suport curs/seminar/laborator

Seria 24
- https://cs.unibuc.ro//~ileustean/FLP.html
- Moodle: https://moodle.unibuc.ro/course/view.php?id=4635
- Materiale Curs/Laborator: https://bit.ly/3de0SOF

Seria 23
- Materiale Curs/Laborator: http://bit.do/unibuc-flp
- Moodle (teste, note): https://moodle.unibuc.ro/course/view.php?id=4634

O parte din materiale sunt realizate în colaborare cu Denisa Diaconescu.

Notare

- **Testare parțială: 40 puncte**
- **Testare finală: 50 puncte**
- Se acordă 10 puncte din oficiu!

Notare

- **Testare parțială: 40 puncte**
- **Testare finală: 50 puncte**
- Se acordă 10 puncte din oficiu!

- Condiţie minimă pentru promovare:
  testare parțială: minim 20 puncte şi
  testare finală: minim 20 puncte.

Notare

- **Testare parțială: 40 puncte**
- **Testare finală: 50 puncte**
- Se acordă 10 puncte din oficiu!

- Condiţie minimă pentru promovare:
  testare parțială: minim 20 puncte şi
  testare finală: minim 20 puncte.

- Se poate obţine punctaj suplimentar pentru activitatea din timpul laboratorului:
  maxim 10 puncte.

Testare parțială: 40 puncte

- Data: 23 aprilie
- Timp de lucru: 1,5 ore
- Prezenţa este obligatorie pentru a putea promova!
- Pentru a trece această probă, trebuie să obţineţi minim 20 de puncte.

Testare finală: 50 puncte

- Data: În sesiune
- Timp de lucru: 2 ore
- Prezenţa este obligatorie pentru a putea promova!
- Pentru a trece această probă, trebuie să obţineţi minim 20 de puncte.

Curs/seminar/laborator

- Curs

  Semantica limbajelor de programare
  - Parsare, Verificarea tipurilor și Interpretare
  - Semantică operațională, statică și axiomatică
  - Inferarea automată a tipurilor

  Bazele programării funcționale
  - Lambda Calcul, Codificări Church, combinatori
  - Lambda Calcul cu tipuri de date

  Bazele programării logice
  - Logica clauzelor Horn, Unificare, Rezoluţie

- Laborator:

  Haskell Limbaj pur de programare funcțională
  - Interpretoare pentru mini-limbaje

  Prolog Cel mai cunoscut limbaj de programare logică
  - Verificator pentru un mini-limbaj imperativ
  - Inferența tipurilor pentru un mini-limbaj funcțional

Bibliografie

- B.C. Pierce, **Types and programming languages**. MIT Press.2002
- G. Winskel, **The formal semantics of programming languages**. MIT Press. 1993
- H. Barendregt, E. Barendsen, **Introduction to Lambda Calculus**, 2000.
- J. Lloyd. **Foundations of Logic Programming**, second edition. Springer, 1987.
- P. Blackburn, J. Bos, and K. Striegnitz, **Learn Prolog Now!** (Texts in Computing, Vol. 7),College Publications, 2006
- M. Huth, M. Ryan, **Logic in Computer Science (Modelling and Reasoning about Systems)**, Cambridge University Press, 2004.

Privire de ansamblu

Semantica Limbajelor de Programare

Ce definește un limbaj de programare?

Sintaxa Simboluri de operație, cuvinte cheie, descriere (formală) a programelor/expresiilor bine formate

Practica Un limbaj e definit de modul cum poate fi folosit

- Manual de utilizare și exemple de bune practici
- Implementare (compilator/interpretor)
- Instrumente ajutătoare (analizor de sintaxă, verificator de tipuri, depanator)

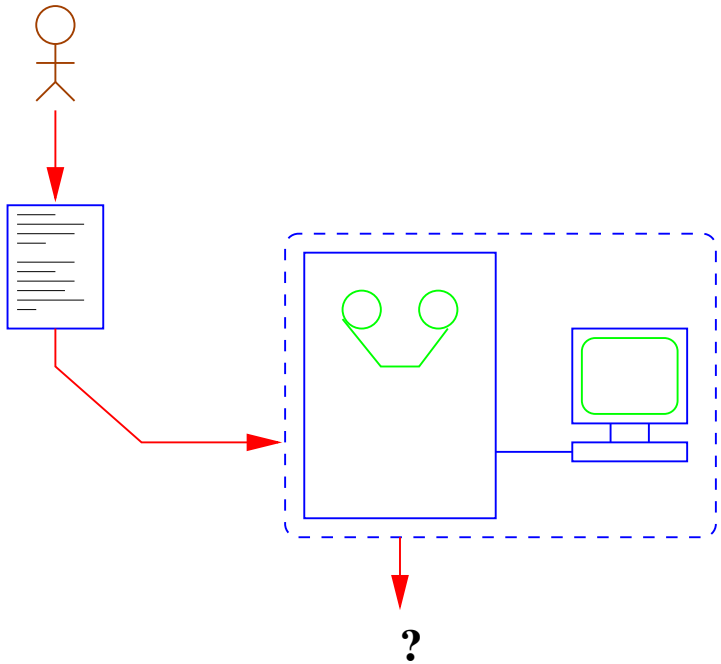
Semantica? Ce înseamnă / care e comportamentul unei instrucțiuni?

- De cele mai multe ori se dă din umeri și se spune că Practica e suficientă
- Limbajele mai utilizate sunt standardizate

La ce folosește semantica

- Să înțelegem un limbaj în profunzime
  - Ca programator: pe ce mă pot baza când programez în limbajul dat
  - Ca implementator al limbajului: ce garanții trebuie să ofer
- Ca instrument în proiectarea unui nou limbaj / a unei extensii
  - Înțelegerea componentelor și a relațiilor dintre ele
  - Exprimarea (și motivarea) deciziilor de proiectare
  - Demonstrarea unor proprietăți generice ale limbajului
    E.g., execuția nu se va bloca pentru programe care trec de analiza tipurilor
- Ca bază pentru demonstrarea corectitudinii programelor.

Problema corectitudinii programelor



- Pentru anumite metode de programare (e.g., imperativă, orientată pe obiecte), nu este uşor să stabilim că un program este corect sau să înţelegem ce înseamnă că este corect (e.g, în raport cu ce?!).
- Corectitudinea programelor devine o problemă din ce în ce mai importantă, nu doar pentru aplicaţii "safety-critical".
- Avem nevoie de metode ce asigură "calitate", capabile să ofere "garanţii".

C

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
  int square;
  for(int i = 1; i <= 5; ++i)
  {
    square = i * i;
    cout <<  square << endl;
  }
}
```

C

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
  int square;
  for(int i = 1; i <= 5; ++i)
  {
    square = i * i;
    cout <<  square << endl;
  }
}
```

- Este corect?

C

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
  int square;
  for(int i = 1; i <= 5; ++i)
  {
    square = i * i;
    cout <<  square << endl;
  }
}
```

- Este corect? În raport cu ce?

C

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
  int square;
  for(int i = 1; i <= 5; ++i)
  {
    square = i * i;
    cout <<  square << endl;
  }
}
```

- Este corect? În raport cu ce?
- Un formalism adecvat trebuie:
  - să permită descrierea problemelor (specificaţii), şi
  - să raţioneze despre implementarea lor (corectitudinea programelor).

Care este comportamentul corect?

```
int main(void) {
  int x = 0;
  return (x = 1) + (x = 2);
}
```

Care este comportamentul corect?

```
int main(void) {
  int x = 0;
  return (x = 1) + (x = 2);
}
```

Conform standardului C, comportamentul programului este nedefinit.

- GCC4, MSVC: valoarea întoarsă e 4
- GCC3, ICC, Clang: valoarea întoarsă e 3

Care este comportamentul corect?

```
int r;
int f(int x) {
  return (r = x);
}
int main() {
  return f(1) + f(2), r;
}
```

Care este comportamentul corect?

```
int r;
int f(int x) {
  return (r = x);
}
int main() {
  return f(1) + f(2), r;
}
```

Conform standardului C, comportamentul programului este corect, dar subspecificat:
poate întoarce atât valoarea 1 cât și 2.

Tipuri de semantică

Semantica dă "înţeles" unui program.

Tipuri de semantică

Semantica dă "înţeles" unui program.

- Operaţională:
  - Înţelesul programului este definit în funcţie de paşii (transformări dintr-o stare în alta) care apar în timpul execuţiei.

Tipuri de semantică

Semantica dă "înţeles" unui program.

- Operaţională:
  - Înţelesul programului este definit în funcţie de paşii (transformări dintr-o stare în alta) care apar în timpul execuţiei.
- Denotaţională:
  - Înţelesul programului este definit abstract ca element dintr-o structură matematică adecvată.

Tipuri de semantică

Semantica dă "înţeles" unui program.

- Operaţională:
  - Înţelesul programului este definit în funcţie de paşii (transformări dintr-o stare în alta) care apar în timpul execuţiei.
- Denotaţională:
  - Înţelesul programului este definit abstract ca element dintr-o structură matematică adecvată.
- Axiomatică:
  - Înţelesul programului este definit indirect în funcţie de axiomele şi regulile pe care le verifică.

Tipuri de semantică

Semantica dă "înţeles" unui program.

- Operaţională:
  - Înţelesul programului este definit în funcţie de paşii (transformări dintr-o stare în alta) care apar în timpul execuţiei.
- Denotaţională:
  - Înţelesul programului este definit abstract ca element dintr-o structură matematică adecvată.
- Axiomatică:
  - Înţelesul programului este definit indirect în funcţie de axiomele şi regulile pe care le verifică.
- Statică / a tipurilor
  - Reguli de bună-formare pentru programe
  - Oferă garanții privind execuția (e.g., nu se blochează)

Bazele programării funcționale / logice

Principalele paradigme de programare

- Imperativă (cum calculăm)
  - Procedurală
  - Orientată pe obiecte
- Declarativă (ce calculăm)
  - Logică
  - Funcţională

Fundamentele paradigmelor de programare

Imperativă	Execuția unei Mașini Turing
Funcțională	Beta-reducție în Lambda Calcul
Logică	Rezoluția în logica clauzelor Horn

Programare declarativă

- Programatorul spune ce vrea să calculeze, dar nu specifică concret cum calculează.
- Este treaba interpretorului (compilator/implementare) să identifice cum să efectueze calculul respectiv.
- Tipuri de programare declarativă:
  - Programare funcţională (e.g., Haskell)
  - Programare logică (e.g., Prolog)
  - Limbaje de interogare (e.g., SQL)

Programare funcțională

Esență: funcții care relaționează intrările cu ieșirile

Caracteristici:
- funcții de ordin înalt – funcții parametrizate de funcții
- grad înalt de abstractizare (e.g., functori, monade)
- grad înalt de reutilizarea codului — polimorfism

Fundamente:
- Teoria funcțiilor recursive
- Lambda-calcul ca model de computabilitate (echivalent cu mașina Turing)

Inspirație:
- Inferența tipurilor pentru templates/generics in POO
- Model pentru programarea distribuită/bazată pe evenimente (callbacks)

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.
- Unul din sloganurile programării logice:

  Program = Logică + Control (R. Kowalski)

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.
- Unul din sloganurile programării logice:

  Program = Logică + Control (R. Kowalski)

- Programarea logică poate fi privită ca o deducţie controlată.

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.
- Unul din sloganurile programării logice:

  Program = Logică + Control (R. Kowalski)

- Programarea logică poate fi privită ca o deducţie controlată.
- Un program scris într-un limbaj de programare logică este

  o listă de formule într-o logică

  ce exprimă fapte şi reguli despre o problemă.

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.
- Unul din sloganurile programării logice:

  Program = Logică + Control (R. Kowalski)

- Programarea logică poate fi privită ca o deducţie controlată.
- Un program scris într-un limbaj de programare logică este

  o listă de formule într-o logică

  ce exprimă fapte şi reguli despre o problemă.
- Exemple de limbaje de programare logică:
  - Prolog
  - Answer set programming (ASP)
  - Datalog

Programare logică & Prolog

Programare logică - în mod idealist

- Un "program logic" este o colecţie de proprietăţi presupuse (sub formă de formule logice) despre lume (sau mai degrabă despre lumea programului).
- Programatorul furnizează şi o proprietate (o formula logică) care poate să fie sau nu adevărată în lumea respectivă (întrebare, query).
- Sistemul determină dacă proprietatea aflată sub semnul întrebării este o consecinţă a proprietăţilor presupuse în program.
- Programatorul nu specifică metoda prin care sistemul verifică dacă întrebarea este sau nu consecinţă a programului.

Exemplu de program logic

$$
\begin{aligned}
\texttt{oslo} &\rightarrow \texttt{windy} \\
\texttt{oslo} &\rightarrow \texttt{norway} \\
\texttt{norway} &\rightarrow \texttt{cold} \\
\texttt{cold} \wedge \texttt{windy} &\rightarrow \texttt{winterIsComing} \\
&\qquad\quad \texttt{oslo}
\end{aligned}
$$

Exemplu de program logic

$$
\begin{aligned}
\texttt{oslo} &\rightarrow \texttt{windy} \\
\texttt{oslo} &\rightarrow \texttt{norway} \\
\texttt{norway} &\rightarrow \texttt{cold} \\
\texttt{cold} \wedge \texttt{windy} &\rightarrow \texttt{winterIsComing} \\
&\rightarrow \texttt{oslo}
\end{aligned}
$$

Exemplu de întrebare

Este adevărat `winterIsComing`?

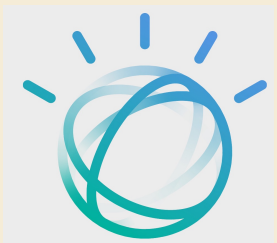
Prolog

- bazat pe logica clauzelor Horn
- semantica operaţională este bazată pe rezoluţie
- este Turing complet

Prolog

- bazat pe logica clauzelor Horn
- semantica operaţională este bazată pe rezoluţie
- este Turing complet

Limbajul Prolog este folosit pentru programarea sistemului IBM Watson!



Puteţi citi mai multe detalii aici.

Exemplul de mai sus în SWI-Prolog

Program:

```
windy :- oslo.
norway :- oslo.
cold :- norway.
winterIsComing :- windy, cold.
oslo.
```

Intrebare:

```
?- winterIsComing.
true
```

http://swish.swi-prolog.org/

Curs 1

2020-2021

Fundamentele Limbajelor de Programare

Cuprins

Haskell: Clasa de tipuri **Monad**

Clasa de tipuri **Monad**

```
class Applicative m => Monad m where
    (>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b
    (>>) :: m a - > m b -> m b
    return :: a -> m a

    ma >> mb = ma >>= \_ -> mb
```

- m a este tipul computațiilor care produc rezultate de tip a (și au efecte laterale)
- a -> m b este tipul continuărilor / a funcțiilor cu efecte laterale
- >>= este operația de „secvențiere” a computațiilor

Functor și Applicative definiți cu **return** și >>=

```
instance Monad M where
  return a = ...
  ma >>= k = ...

instance Applicative M where
  pure = return
  mf <*> ma = do
    f <- mf
    a <- ma
    return (f a)
   -- mf >>= (\f -> ma >>= (\a -> return (f a)))

instance Functor F where          -- ma >>= \a -> return (f a)
  fmap f ma = pure f <*> ma       -- ma >>= (return . f)
```

Notația **do** pentru monade

Notația cu operatori	Notația **do**
e >>= \x -> rest	x <- e rest
e >>= _ -> rest	e rest
e >> rest	e rest

Notația **do** pentru monade

Notația cu operatori	Notația **do**
e >>= \x -> rest	x <- e rest
e >>= _ -> rest	e rest
e >> rest	e rest

De exemplu

```
e1    >>= \x1 ->
e2    >> e3
```

devine

Notația **do** pentru monade

Notația cu operatori	Notația **do**
e >>= \x -> rest	x <- e rest
e >>= _ -> rest	e rest
e >> rest	e rest

De exemplu

```
e1    >>= \x1 ->
e2    >> e3
```

devine

```
do
    x1 <- e1
    e2
    e3
```

Haskell: Monade standard

Exemple de efecte laterale

I/O	Monada **IO**
Parțialitate	Monada **Maybe**
Excepții	Monada **Either**
Nedeterminism	Monada [] (listă)
Logging	Monada Writer
Memorie read-only	Monada Reader
Stare	Monada State

Monada **Maybe** (a rezultatelor parțiale)

```
data Maybe a = Nothing | Just a
```

Monada **Maybe** (a rezultatelor parțiale)

```
data Maybe a = Nothing | Just a

instance Monad Maybe where
  return = Just
  Just va  >>= k   = k va
  Nothing >>= _    = Nothing
```

Monada **Maybe** (a rezultatelor parțiale)

```
data Maybe a = Nothing | Just a

instance Monad Maybe where
  return = Just
  Just va  >>= k   = k va
  Nothing >>= _    = Nothing

radical :: Float -> Maybe Float
radical x | x >= 0 = return (sqrt x)
          | x < 0  = Nothing

solEq2 :: Float -> Float -> Float -> Maybe Float
solEq2 0 0 0 = return 0          -- a * x^2 + b * x + c = 0
solEq2 0 0 c = Nothing
solEq2 0 b c = return ((negate c) / b)
solEq2 a b c = do
                 rDelta <- radical (b * b - 4 * a * c)
                 return (negate b + rDelta) / (2 * a)
```

Monada **Either** (a excepțiilor)

```
data Either err a = Left err | Right a
```

Monada **Either** (a excepțiilor)

```
data Either err a = Left err | Right a

instance Monad (Either err) where
  return = Right
  Right va >>= k  = k va
  err      >>= _  = err    -- Left verr >>=_ = Left verr
```

Monada **Either** (a excepțiilor)

```
data Either err a = Left err | Right a

instance Monad (Either err) where
  return = Right
  Right va >>= k  = k va
  err      >>= _  = err    -- Left verr >>=_ = Left verr

radical :: Float -> Either String Float
radical x | x >= 0 = return (sqrt x)
          | x < 0  = Left "radical: argument negativ"

solEq2 :: Float -> Float -> Float -> Either String Float
solEq2 0 0 0 = return 0          -- a * x^2 + b * x + c = 0
solEq2 0 0 c = Left "Nu are solutii"
solEq2 0 b c = return ((negate c) / b)
solEq2 a b c = do
                 rDelta <- radical (b * b - 4 * a * c)
                 return (negate b + rDelta) / (2 * a)
```

Monada listelor (a rezultatelor nedeterministe)

```
instance Monad [] where
  return va = [va]
  ma >>= k = [vb | va <- ma, vb <- k va]
```

Rezultatul nedeterminist e dat de lista tuturor valorilor posibile.

Monada listelor (a rezultatelor nedeterministe)

```
instance Monad [] where
  return va = [va]
  ma >>= k = [vb | va <- ma, vb <- k va]
```

Rezultatul nedeterminist e dat de lista tuturor valorilor posibile.

```
radical :: Float -> [Float]
radical x | x >= 0 = [negate (sqrt x), sqrt x]
          | x < 0  = []

solEq2 :: Float -> Float -> Float -> [Float]
solEq2 0 0 c = []                    -- a * x^2 + b * x + c = 0
solEq2 0 b c = return ((negate c) / b)
solEq2 a b c = do
                  rDelta <- radical (b * b - 4 * a * c)
                  return (negate b + rDelta) / (2 * a)
```

Monada Writer (variantă simplificată)

```
newtype Writer log a = Writer { runWriter :: (a, log) }
-- a este parametru de tip

tell :: log -> Writer log ()
tell msg = Writer ((), msg)
```

Monada Writer (variantă simplificată)

```
newtype Writer log a = Writer { runWriter :: (a, log) }
-- a este parametru de tip

tell :: log -> Writer log ()
tell msg = Writer ((), msg)

instance Monad (Writer String) where
  return va =  Writer (va, "")
  ma >>= k =   let (va, log1) = runWriter ma
                   (vb, log2) = runWriter (k va)
               in Writer (vb, log1 ++ log2)
```

Monada Writer - Exemplu logging

```
newtype Writer log a = Writer { runWriter :: (a, log) }

tell :: log -> Writer log ()
tell msg = Writer ((), msg)
```

Monada Writer - Exemplu logging

```
newtype Writer log a = Writer { runWriter :: (a, log) }

tell :: log -> Writer log ()
tell msg = Writer ((), msg)

logIncrement :: Int -> Writer String Int
logIncrement x = do
  tell ("increment: " ++ show x ++ "\n")
  return (x + 1)

logIncrement2 :: Int -> Writer String Int
logIncrement2 x = do
  y <- logIncrement x
  logIncrement y


Main> runWriter (logIncrement2 13)
(15,"increment: 13\nincrement: 14\n")
```

Monada Writer (varianta lungă)

Clasa de tipuri Semigroup

O mulțime, cu o operație <> care ar trebui să fie asociativă

```
class Semigroup a where
  (<>) :: a -> a -> a
```

Clasa de tipuri Monoid

Un semigrup cu unitatea mempty. mappend este alias pentru <>.

```
class Semigroup a => Monoid a where
  mempty :: a
  mappend :: a -> a -> a
  mappend = (<>)
```

Foarte multe tipuri sunt instanțe ale lui Monoid. Exemplul clasic: listele.

Monada Writer (varianta lungă)

```
newtype Writer log a = Writer { runWriter :: (a, log) }

instance Monoid log => Monad (Writer log) where
  return a = Writer (a, mempty)
  ma >>= k = let (va, log1) = runWriter ma
                 (vb, log2) = runWriter (k va)
             in Writer (vb, log1 <> log2)
```

Monada Reader (stare nemodificabilă)

```
newtype Reader env a = Reader { runReader :: env -> a }
-- inspecteaza starea curenta
ask :: Reader env env
ask = Reader id
-- modifica starea doar pentru computatia data
local :: (env -> env) -> Reader env a -> Reader env a
local f r = Reader (runReader r . f)
```

Monada Reader (stare nemodificabilă)

```
newtype Reader env a = Reader { runReader :: env -> a }
-- inspecteaza starea curenta
ask :: Reader env env
ask = Reader id
-- modifica starea doar pentru computatia data
local :: (env -> env) -> Reader env a -> Reader env a
local f r = Reader (runReader r . f)

instance Monad (Reader env) where
  return = Reader const  -- return x = Reader (\_ -> x)
  ma >>= k = Reader f
             where
                f env = let va = runReader ma env
                        in  runReader (k va) env
```

Monada Reader- exemplu: mediu de evaluare

```
newtype Reader env a = Reader { runReader :: env -> a }
ask :: Reader env env
ask = Reader id

data Prop ::= Var String | Prop :&: Prop
type Env = [(String, Bool)]

var :: String -> Reader Env Bool
var x = do
          env <- ask
          fromMaybe False (lookup x env)

eval :: Prop -> Reader Env Bool
eval (Var x) = var x
eval (p1 :&: p2) = do
  b1 <- eval p1
  b2 <- eval p2
  return (b1 && b2)
```

Monada State

```
newtype State state a =
    State { runState :: state -> (a, state) }
```

Monada State

```
newtype State state a =
    State { runState :: state -> (a, state) }

instance Monad (State state) where
  return va = State (\s -> (va, s))
-- return va = State f where f s = (va, s)

  ma  >>= k =
      State $ \s -> let (va, news) = runState ma s
                    in runState (k va) news
-- ma :: State state a
-- k :: a -> State state b
-- s :: state
-- runState ma :: state -> (a, state)
-- (va, news) :: (a, state)  = runState ma s
-- k va :: State state b
-- runState (k va) news :: (b, state)
-- ma >>= k :: State state b
```

Monada State

```
newtype State state a =
    State { runState :: state -> (a, state) }

instance Monad (State state) where
  return va = State (\s -> (va, s))
  ma  >>= k =
      State $ \s -> let (va, news) = runState ma s
                    in runState (k va) news
```

Funcții ajutătoare:

```
get :: State state state          -- obtine starea curenta
get = State (\s -> (s, s))

set :: state -> State state () -- seteaza starea curenta
set s = State (const ((), s))

modify :: (state -> state) -> State state ()
modify f = State (\s -> ((), f s))    -- modifica starea
```

Monada State - exemplu "random"

```
newtype State state a = State{runState :: state->(a,state)}
get :: State state state
get = State (\s -> (s,s))
modify :: (state -> state) -> State state ()
modify f = State (\s -> ((), f s))
```

Monada State - exemplu "random"

```
newtype State state a = State{runState :: state->(a,state)}
get :: State state state
get = State (\s -> (s,s))
modify :: (state -> state) -> State state ()
modify f = State (\s -> ((), f s))

cMULTIPLIER, cINCREMENT :: Word32
cMULTIPLIER = 1664525 ; cINCREMENT = 1013904223

rnd, rnd2 :: State Word32 Word32
rnd = do modify (\seed -> cMULTIPLIER * seed + cINCREMENT)
         get
rnd2 = do r1 <- rnd
          r2 <- rnd
          return (r1 + r2)

Main> runState rnd2 0
(2210339985,1196435762)
```

Pe săptămâna viitoare!

Programare declarativă

Evaluare cu efecte laterale

În acest curs:

- vom defini un mini-limbaj asemănător cu limbajul Mini Haskell definit în cursurile trecute
- vom defini semantica limbajului folosind o monadă generică M
- înlocuind M cu monadele standard studiate anterior vom obține variații ale semanticii generale, care vor fi particularizate prin tipul de efecte surprins de fiecare monadă

Sintaxă abstractă

Lambda calcul cu întregi Sintaxă

```
type Name = String

data Term = Var Name
          | Con Integer
          | Term :+: Term
          | Lam Name Term
          | App Term Term
```

Program - Exemplu

λ-expresia $(\lambda x.x + x)(10 + 11)$
este definită astfel:

```
pgm :: Term
pgm = App
          (Lam "x" ((Var "x") :+: (Var "x")))
          ((Con 10) :+: (Con 11))
```

Program - Exemplu

```
pgm :: Term
pgm = App
   (Lam "y"
      (App
         (App
            (Lam "f"
               (Lam "y"
                  (App (Var "f") (Var "y"))
               )
            )
            (Lam "x"
               (Var "x" :+: Var "y")
            )
         )
         (Con 3)
      )
   )
   (Con 4)
```

Valori și medii de evaluare

```
data Value = Num Integer
           | Fun (Value -> M Value)
           | Wrong

instance Show Value where
 show (Num x) = show x
 show (Fun _) = "<function>"
 show Wrong   = "<wrong>"
```

Observații

- Vom interpreta termenii în valori ‘M Value‘, unde ‘M‘ este o monadă; variind se obțin comportamente diferite;
- ‘Wrong‘ reprezintă o eroare, de exemplu adunarea unor valori care nu sunt numere sau aplicarea unui termen care nu e funcție.

Evaluare - variabile și valori

```
type Environment = [(Name, Value)]
```

Interpretarea termenilor în monada ‘M‘

```
interp :: Term -> Environment -> M Value
interp (Var x) env = lookupM x env
interp (Con i) _ = return $ Num i
interp (Lam x e) env = return $
  Fun $ \ v -> interp e ((x,v):env)

lookupM :: Name -> Environment -> M Value
lookupM x env = case lookup x env of
  Just v  -> return v
  Nothing -> return Wrong
```

Evaluare - adunare

```
interp (t1 :+: t2) env = do
  v1 <- interp t1 env
  v2 <- interp t2 env
  add v1 v2
```

Interpretarea adunării în monada ‘M‘

```
add :: Value -> Value -> M Value
add (Num i) (Num j) = return (Num $ i + j)
add _ _             = return Wrong
```

Evaluare - aplicarea funcțiilor

```
interp (App t1 t2) env = do
  f <- interp t1 env
  v <- interp t2 env
  apply f v
```

Interpretarea aplicării funcțiilor în monada 'M'

```
apply :: Value -> Value -> M Value
apply (Fun k) v = k v
apply _ _       = return Wrong

-- k :: Value -> M Value
```

Testarea interpretorului

```
test :: Term -> String
test t = showM $ interp t []
```

unde

```
showM :: Show a => M a -> String
```

este o funcție definită special pentru fiecare tip de efecte laterale dorit.

Testarea interpretorului

```
test :: Term -> String
test t = showM $ interp t []
```

unde

```
showM :: Show a => M a -> String
```

este o funcție definită special pentru fiecare tip de efecte laterale dorit.

Exemplu de program

```
pgmW :: Term
pgmW = App
          (Lam "x" ((Var "x") :+: (Var "x")))
          ((Con 10) :+:  (Con 11))

test pgmW  -- apelul pentru testare
```

Interpretor monadic

```
data Value = Num Integer
           | Fun (Value -> M Value)
           | Wrong

interp :: Term -> Environment -> M Value
```

În continuare vom înlocui monada M cu:

- Identity
- **Maybe**
- **Either String**
- monada listelor
- Writer
- Reader
- State

Interpretare în monada ‘Identity‘

Monada ‘Identity‘ este "efectul identitate".

```
newtype Identity a = Identity { runIdentity :: a }

instance Monad Identity where
    return a              = Identity a
    ma >>= k = k (runIndentity ma)
```

Interpretare în monada ‘Identity‘

Monada ‘Identity‘ este "efectul identitate".

```
newtype Identity a = Identity { runIdentity :: a }

instance Monad Identity where
    return a              = Identity a
    ma >>= k = k (runIndentity ma)
```

Pentru a particulariza interpretorul definim

```
type M a = Identity a

showM :: Show a => M a -> String
showM = show . runIdentity
```

Interpretare în monada ‘Identity‘

Monada ‘Identity‘ este "efectul identitate".

```
newtype Identity a = Identity { runIdentity :: a }

instance Monad Identity where
    return a              = Identity a
    ma >>= k = k (runIndentity ma)
```

Pentru a particulariza interpretorul definim

```
type M a = Identity a

showM :: Show a => M a -> String
showM = show . runIdentity
```

Obținem interpretorul standard, asemănător celui discutat pentru limbajul Mini-Haskell.

Interpretare folosind monada ‘Identity‘

```
type M a = Identity a

showM :: Show a => M a -> String
showM = show . runIdentity

pgm = App
          (Lam "x" ((Var "x") :+: (Var "x")))
          ((Con 10) :+:  (Con 11))

*Var0> test pgm
"42"
```

Interpretare în monada ‘Maybe‘ (opțiune)

```
data Maybe a = Nothing | Just a

instance Monad Maybe where
  return = Just
  Just a  >>= k  = k a
  Nothing >>= _  = Nothing
```

Putem renunța la valoarea ‘Wrong‘, folosind monada ‘Maybe‘

```
type M a = Maybe a

showM :: Show a => M a -> String
showM (Just a) = show a
showM Nothing  = "<wrong>"
```

Interpretare în monada ‘Maybe‘

Putem acum înlocui rezultatele ‘Wrong‘ cu ‘Nothing‘

```
type M a = Maybe a

lookupM :: Name -> Environment -> M Value
lookupM x env = case lookup x env of
  Just v  -> return v
  Nothing -> Nothing

add :: Value -> Value -> M Value
add (Num i) (Num j) = return (Num $ i + j)
add _ _             = Nothing

apply :: Value -> Value -> M Value
apply (Fun k) v = k v
apply _ _       = Nothing
```

Interpretare în monada ‘Either String‘

```
data Either a b = Left a | Right b

instance Monad (Either err) where
  return = Right
  Right a >>= k  = k a
  err     >>= _  = err
```

Putem nuanța erorile folosind monada ‘Either String‘

```
type M a = Either String a

showM :: Show a => M a -> String
showM (Left s)  = "Error: " ++ s
showM (Right a) = "Success: " ++ show a
```

Interpretare în monada ‘Either String‘

Putem acum înlocui rezultatele ‘Wrong‘ cu valori ‘Left‘

```
type M a = Either String a

lookupM :: Name -> Environment -> M Value
lookupM x env = case lookup x env of
  Just v  -> return v
  Nothing -> Left ("unbound variable " ++ x)

add :: Value -> Value -> M Value
add (Num i) (Num j) = return $ Num $ i + j
add v1 v2           = Left $
  "Expected numbers: " ++ show v1 ++ ", " ++ show v2

apply :: Value -> Value -> M Value
apply (Fun k) v = k v
apply v _       = Left $
  "Expected function: " ++ show v
```

Interpretare în monada ‘Either String‘

```
type M a = Either String a

showM :: Show a => M a -> String
showM (Left s)  = "Error: " ++ s
showM (Right a) = "Success: " ++ show a

pgm = App
          (Lam "x" ((Var "x") :+: (Var "x")))
          ((Con 10) :+:  (Con 11))

*Var2> test pgm
"Success: 42"
```

Interpretare în monada ‘Either String‘

```
type M a = Either String a

showM :: Show a => M a -> String
showM (Left s)  = "Error: " ++ s
showM (Right a) = "Success: " ++ show a

pgm = App
          (Lam "x" ((Var "x") :+: (Var "x")))
          ((Con 10) :+:  (Con 11))

*Var2> test pgm
"Success: 42"

pgmE = App (Var "x") ((Con 10) :+:  (Con 11))

*Var2> test pgmE
"Error: unbound variable x"
```

Monada listelor (a funcțiilor nedeterministe)

```
instance Monad [] where
  return a = [a]
  ma >>= k = [b | a <- ma, b <- k a]
```

Rezultatul funcției e lista tuturor valorilor posibile.

```
> [4,9,25] >>= \x -> [(sqrt x), -(sqrt x)]
[2.0,-2.0,3.0,-3.0,5.0,-5.0]
```

Interpretare în monada listelor

Adăugarea unei instrucțiuni nedeterministe

```
data Term = ... | Amb Term Term | Fail

type M a = [a]

showM :: Show a => M a -> String
showM = show

interp Fail _ = []
interp (Amb t1 t2) env = interp t1 env ++ interp t2
    env

pgm = (App (Lam "x" (Var "x" :+: Var "x"))
       (Amb (Con 1) (Con2)))
> test pgm
"[2,4]"
```

Monada ‘Writer‘

Este folosită pentru a acumula (logging) informație produsă în timpul execuției.

```
newtype Writer log a = Writer { runWriter :: (a, log)
    }

instance Monoid log => Monad (Writer log) where
  return a = Writer (a, mempty)
  ma >>= k = let (a, log1) = runWriter ma
                 (b, log2) = runWriter (k a)
             in Writer (b, log1 `mappend` log2)
```

Funcție ajutătoare

```
tell :: log -> Writer log ()
tell log = Writer ((), log)  -- produce mesajul
```

Interpretare în monada ‘Writer‘

Adăugarea unei instrucțiuni de afișare
data Term = ... | Out Term

```
type M a = Writer String a

showM :: Show a => M a -> String
showM ma = "Output: " ++ w ++ "  Value: " ++ show a
  where (a, w) = runWriter ma


interp (Out t) env = do
  v <- interp t env
  tell (show v ++ "; ")
  return v
```

- Out t se evaluează la valoarea lui t, cu efectul lateral de a adăuga valoarea la șirul de ieșire.

Interpretare în monada ‘Writer‘

```
data Term = ... | Out Term

type M a = Writer String a

showM :: Show a => M a -> String
showM ma = "Output: " ++ w ++ "  Value: " ++ show a
  where (a, w) = runWriter ma

pgmW = App
          (Lam "x" ((Var "x") :+: (Var "x")))
          ((Out (Con 10)) :+: (Out (Con 11)))

> test pgm
"Output: 10; 11; Value: 42"
```

Monada ‘Reader‘

Face accesibilă o memorie (environment) nemodificabilă (imuabilă)

```
newtype Reader env a = Reader {runReader :: env -> a}

instance Monad (Reader env) where
  return = Reader const
  ma >>= k = Reader f
    where f env = let a = runReader ma env
                  in  runReader (k a) env
```

Monada ‘Reader‘

Face accesibilă o memorie (environment) nemodificabilă (imuabilă)

```
newtype Reader env a = Reader {runReader :: env -> a}

instance Monad (Reader env) where
  return = Reader const
  ma >>= k = Reader f
    where f env = let a = runReader ma env
                  in  runReader (k a) env
```

Funcții ajutătoare

```
ask :: Reader r r    -- obtine memoria
ask = Reader id  -- Reader (\r -> r)

-- modifica local memoria
local :: (r -> r) -> Reader r a -> Reader r a
local f ma = Reader $ (\r -> (runReader ma)(f r)
```

Interpretare în monada ‘Reader‘

Eliminarea argumentului ‘Environment‘

```
type Environment = [(Name, Value)]
type M a = Reader Environment a

showM :: Show a => M a -> String
showM ma = show $ runReader ma []
```

Funcția de interpretare era definită astfel:

```
interp :: Term -> Enviroment -> M Value
```

Deoarece interpretăm în monada ‘Reader Enviroment a‘ signatura funcției de interpretare este:

```
interp :: Term ->  M Value
```

Interpretare în monada ‘Reader‘

Interpretarea expresiilor de bază și căutare(‘lookup‘)

```
type Environment = [(Name, Value)]
type M a = Reader Environment a

interp :: Term -> M Value
interp (Var x) = lookupM x
interp (Con i) = return $ Num i


lookupM :: Name -> M Value
lookupM x = do
  env <- ask
  case lookup x env of
    Just v  -> return v
    Nothing -> return Wrong
```

Interpretare în monada ‘Reader‘

```
type Environment = [(Name, Value)]
interp :: Term -> M Value
```

Operatori binari și funcții

```
interp (t1 :+: t2) = do
  v1 <- interp t1
  v2 <- interp t2
  add v1 v2
interp (App t1 t2) = do
  f <- interp t1
  v <- interp t2
  apply f v
interp (Lam x e) = do
  env <- ask
  return $ Fun $ \ v ->
    local (const ((x,v):env)) (interp e)
```

Interpretare în monada ‘Reader‘

```
type Environment = [(Name, Value)]
type M a = Reader Environment a

showM :: Show a => M a -> String
showM ma = show $ runReader ma []

interp :: Term ->  M Value

pgm = App
          (Lam "x" ((Var "x") :+: (Var "x")))
          ((Con 10) :+:  (Con 11))

> test pgm
"42"
```

Monada ‘State‘

```
newtype State state a =
  State { runState :: state -> (a, state) }
instance Monad (State state) where
  return a = State (\ s -> (a, s))
  ma >>= k = State (\state ->
      let (a, aState) = runState ma state
       in runState (k a) aState)
```

Funcții ajutătoare

```
get :: State state state
get = State (\s -> (s, s))  -- starea curenta

put :: s -\> State s ()
put s = State (\_ ->((), s)) -- schimba starea

modify :: (state -> state) -> State state ()
modify f = State (\s -> ((), f s))
```

Interpretare în monada ‘State‘

Adăugăm un contor de instrucțiuni ‘Count‘, valoarea acestui contor reprezentând starea.
Astfel variabilele care reprezintă starea sunt numere întregi.

```
data Term = ... | Count

type M a = State Integer a

showM :: Show a => M a -> String
showM ma = show a ++ "\n" ++ "Count: " ++ show s
           where (a, s) = runState ma 0

interp Count _ = do
                   i <- get
                   return (Num i)
```

Interpretare în monada ‘State‘

Creștem starea (contorul) la fiecare instrucțiune

```
tickS :: M ()
tickS = modify (+1)  -- \s ->((), (s+1))

add :: Value -> Value -> M Value
add (Num i) (Num j) = tickS >> return (Num $ i + j)
add _ _             = return Wrong

apply :: Value -> Value -> M Value
apply (Fun k) v = tickS >> k v
apply _ _       = return Wrong
```

Interpretare în monada ‘State‘

```
data Term = ... | Count

type M a = State Integer a

showM :: Show a => M a -> String
showM ma = show a ++ "\n" ++ "Count: " ++ show s
           where (a, s) = runState ma 0

pgm = App
          (Lam "x" ((Var "x") :+: (Var "x")))
          ((Con 10) :+:  (Con 11))

> test pgm
"42\nCount: 3"
```

Pe săptămâna viitoare!

Curs 4

2020-2021

Fundamentele Limbajelor de Programare

Analiză sintactică

Tipul unui analizor sintactic

Prima încercare

```
type Parser a = String -> a
```

Tipul unui analizor sintactic

Prima încercare

```
type Parser a = String -> a
```

- Dar cel puțin pentru rezultate parțiale, va mai rămâne ceva de analizat

Tipul unui analizor sintactic

Prima încercare

```
type Parser a = String -> a
```

- Dar cel puțin pentru rezultate parțiale, va mai rămâne ceva de analizat

A doua încercare

```
type Parser a = String -> (a, String)
```

Tipul unui analizor sintactic

Prima încercare

```
type Parser a = String -> a
```

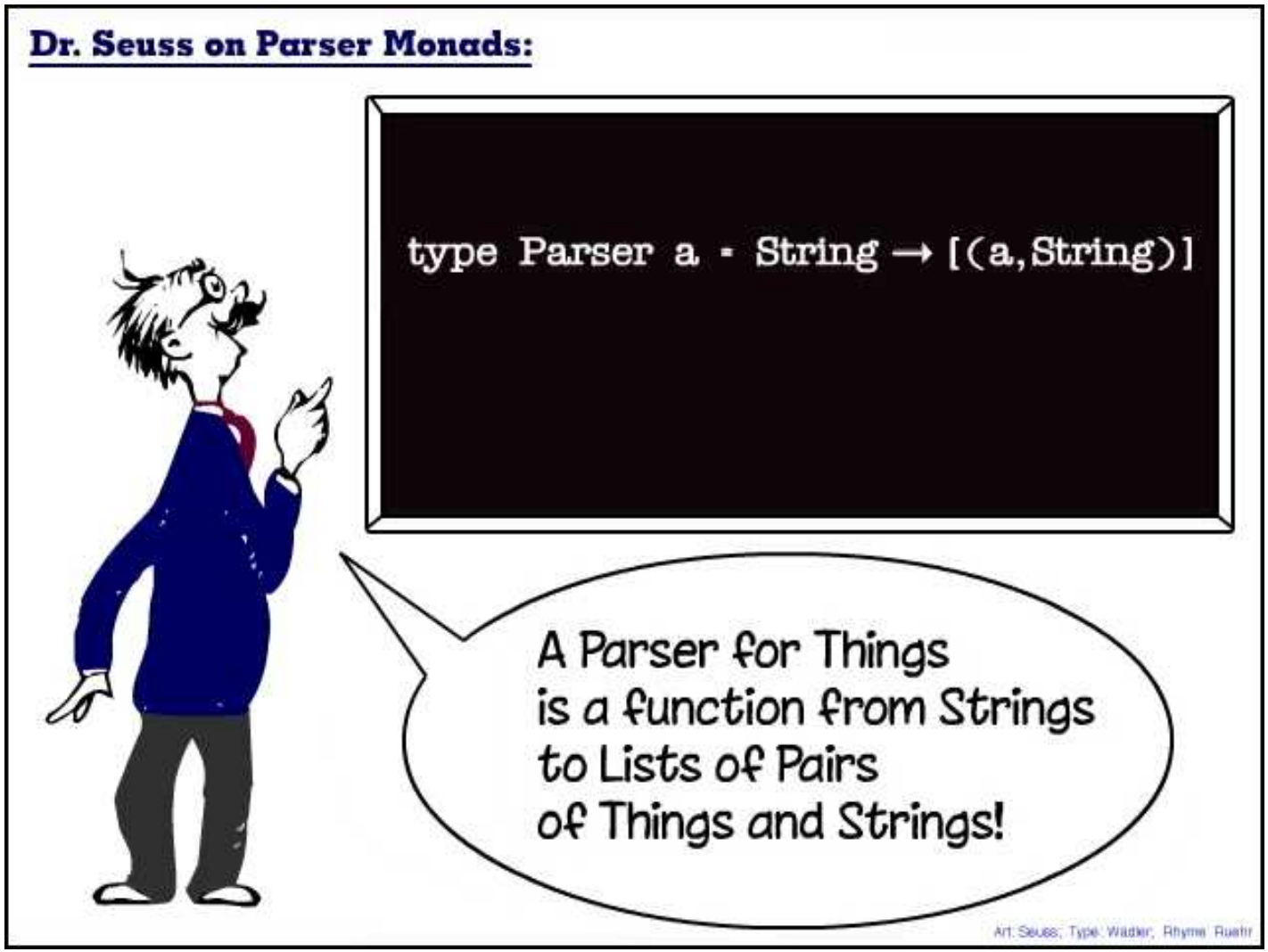
- Dar cel puțin pentru rezultate parțiale, va mai rămâne ceva de analizat

A doua încercare

```
type Parser a = String -> (a, String)
```

- Dar dacă gramatica e ambiguă?
- Dar dacă intrarea nu corespunde nici unui element din a?

Tipul unui analizor sintactic



Tipul Parser

Tipul Parser

```
newtype Parser a =
  Parser { apply :: String -> [(a, String)] }
```

```
-- Folosirea unui parser
-- apply :: Parser a -> String -> [(a, String)]
-- apply (Parser f) s = f s

-- Daca exista parsare, da prima varianta
parse :: Parser a -> String -> a
parse m s = head [ x | (x,t) <- apply m s, t == "" ]
```

Parsare pentru caractere

```
-- Recunoasterea unui caracter
anychar :: Parser Char
anychar = Parser f
  where
  f []     = []
  f (c:s) = [(c,s)]
```

Parsare pentru caractere

```
-- Recunoasterea unui caracter
anychar :: Parser Char
anychar = Parser f
  where
  f []     = []
  f (c:s) = [(c,s)]
```

```
*Main> parse anychar "a"
'a'
*Main> parse anychar "ab"
*** Exception: Prelude.head: empty list

*Main> apply anychar "abc"
[('a',"bc")]
```

Parsare pentru caractere

```
-- Recunoasterea unui caracter cu o proprietate
satisfy :: (Char -> Bool) -> Parser Char
satisfy p = Parser f
  where
  f []                  = []
  f (c:s) | p c         = [(c, s)]
          | otherwise = []
```

Parsare pentru caractere

```
-- Recunoasterea unui caracter cu o proprietate
satisfy :: (Char -> Bool) -> Parser Char
satisfy p = Parser f
  where
  f []                  = []
  f (c:s) | p c         = [(c, s)]
          | otherwise = []
```

```
*Main> parse (satisfy isUpper) "A"
'A'
(0.01 secs, 52,760 bytes)
*Main> parse (satisfy isUpper) "a"
*** Exception: Prelude.head: empty list

*Main> apply (satisfy isUpper) "Ab"
[('A',"b")]
```

Parsare pentru caractere

```
-- Recunoasterea unui anumit caracter
char :: Char -> Parser Char
char c = satisfy (== c)
```

Parsare pentru caractere

```
-- Recunoasterea unui anumit caracter
char :: Char -> Parser Char
char c = satisfy (== c)
```

```
*Main> parse (char 'a') "a"
'a'
(0.00 secs, 52,824 bytes)
*Main> parse (char 'a') "ab"
*** Exception: Prelude.head: empty list

*Main>  apply (char 'a') "ab"
[('a',"b")]
```

Parsarea unui cuvânt cheie

```
-- Recunoasterea unui cuvant cheie
string :: String -> Parser String
string [] = Parser (\s -> [([],s)])
string (x:xs) = Parser f
 where
   f s = [(y:z,zs)| (y,ys) <- apply (char x) s,
                    (z,zs) <- apply (string xs) ys]
```

Parsarea unui cuvânt cheie

```
-- Recunoasterea unui cuvant cheie
string :: String -> Parser String
string [] = Parser (\s -> [([],s)])
string (x:xs) = Parser f
 where
   f s = [(y:z,zs)| (y,ys) <- apply (char x) s,
                    (z,zs) <- apply (string xs) ys]

*Main> parse (string "abc") "abc"
"abc"
*Main> parse (string "abc") "abcd"
*** Exception: Prelude.head: empty list

"*Main> apply  (string "abc") "abcd"
[("abc","d")]
```

Monada Parser

```
--    class Monad m where
--      return :: a -> m a
--      (>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b

instance Monad Parser where
  return x  = Parser (\s -> [ (x, s) ])
  m >>= k   = Parser (\s -> [ (y, u)
                            | (x, t) <- apply m s
                            , (y, u) <- apply (k x) t
                            ])
```

Monada Parser

```
-- Recunoasterea unui cuvant cheie
string :: String -> Parser String
string [] = Parser (\s -> [([],s)])
string (x:xs) = Parser f
 where
   f s = [(y:z,zs)| (y,ys) <- apply (char x) s,
                    (z,zs) <- apply (string xs) ys]
```

e echivalent cu

```
string :: String -> Parser String
string []     = return []
string (x:xs) = do  y  <- char x
                    ys <- string xs
                    return (y:ys)
```

Combinarea variantelor

```
digit = satisfy isDigit
abcP = satisfy (`elem` ['A','B','C'])

alt :: Parser a -> Parser a -> Parser a
alt p1 p2 = Parser f
          where f s = apply p1 s ++ apply p2 s
```

Combinarea variantelor

```
digit = satisfy isDigit
abcP = satisfy (`elem` ['A','B','C'])

alt :: Parser a -> Parser a -> Parser a
alt p1 p2 = Parser f
          where f s = apply p1 s ++ apply p2 s

*Main> apply (alt digit abcP) "1sd"
[('1',"sd")]
*Main> apply (alt digit abcP) "Asd"
[('A',"sd")]
*Main> apply (alt digit abcP) "dsd"
[]
*Main> parse (alt digit abcP) "A"
'A'
*Main> parse (alt digit abcP) "1"
'1'
```

Parser e monadă cu plus

```
--    class MonadPlus m where
--      mzero :: m a
--      mplus :: m a -> m a -> m a

instance MonadPlus Parser where
  mzero       = Parser (\s -> [])
  mplus m n   = Parser (\s -> apply m s ++ apply n s)
                -- === alt m n
```

- mzero reprezintă analizorul sintactic care eșuează tot timpul
- mplus reprezintă combinarea alternativelor

```
instance Alternative Parser where
  empty   = mzero
  (<|>) = mplus
```

Parser e monadă cu plus

```
instance MonadPlus Parser where
    mzero       = Parser (\s -> [])
    mplus m n   = Parser (\s -> apply m s ++ apply n s)

instance Alternative Parser where
  empty  = mzero
  (<|>) = mplus
```

```
*Main> apply (digit <|> abcP) "1www"
[('1',"www")]
*Main> apply (digit <|> abcP) "Awww"
[('A',"www")]
*Main> parse (digit <|> abcP) "B"
'B'
*Main> parse (digit <|> abcP) "2"
'2'
```

Recunoașterea unui caracter cu o proprietate

Alternative și Gărzi

```
guard :: MonadPlus f => Bool -> f ()
guard True = return ()
guard False = mzero
```

```
satisfy :: (Char -> Bool) -> Parser Char
satisfy p = Parser f
  where
  f []                  = []
  f (c:s) | p c         = [(c, s)]
          | otherwise = []
```

e echivalentă cu

```
satisfy :: (Char -> Bool) -> Parser Char
satisfy p = do   c <- anychar
                 guard (p c)
                 return c
```

Recunoașterea unei secvențe repetitive

```
-- Steluta Kleene (zero, una sau mai multe repetitii)
many :: Parser a -> Parser [a]
many p = some p `mplus` return []

-- cel putin o repetitie
some :: Parser a -> Parser [a]
some p = do x <- p
            xs <- many p
            return (x:xs)
```

Recunoașterea unui numar întreg

```
-- Recunoasterea unui numar natural
decimal :: Parser Int
decimal = do  s <- some digit
              return (read s)

-- Recunoasterea unui numar negativ
negative :: Parser Int
negative = do   char '-'
                n <- decimal
                return (-n)

-- Recunoasterea unui numar intreg
integer :: Parser Int
integer = decimal `mplus` parseNeg
```

Recunoașterea unui identificator

Cum arată un identificator

Un identificator este definit de doi parametri

- felul primului caracter (e.g., începe cu o literă)
- felul restului caracterelor (e.g., literă sau cifră)

Dat fiind un parser pentru felul primului caracter și un parser pentru felul următoarelor caractere putem parsa un identificator:

```
-- Recunoasterea unui identificator
identifier :: Parser Char -> Parser Char -> Parser String
identifier firstCh nextCh = do    c <- firstCh
                                  s <- many nextCh
                                  return (c : s)
```

Exemplu

```
myId = identifier (satisfy isAlpha) (satisfy isAlphaNum)
```

Eliminarea spațiilor

Ignorarea spațiilor

```
skipSpace :: Parser ()
skipSpace = do  _ <- many (satisfy isSpace)
                return ()
```

Ignorarea spațiilor de dinainte și după

```
token :: Parser a -> Parser a
token p = do  skipSpace
              x <- p
              skipSpace
              return x
```

Modulul Exp

```
module Exp where

import Monad
import Parser

data Exp = Lit Int
         | Exp :+: Exp
         | Exp :*: Exp
         deriving (Eq,Show)

evalExp    :: Exp -> Int
evalExp    (Lit n)     = n
evalExp    (e :+: f) = evalExp e + evalExp f
evalExp    (e :*: f) = evalExp e * evalExp f
```

Recunoașterea unei expresii

```
parseExp :: Parser Exp
parseExp = parseLit `mplus` parseAdd `mplus` parseMul
  where
  parseLit = do   n <- integer
                  return (Lit n)
  parseAdd = do   char '('
                  d <- token parseExp
                  char '+'
                  e <- token parseExp
                  char ')'
                  return (d :+: e)
  parseMul = do   char '('
                  d <- token parseExp
                  char '*'
                  e <- token parseExp
                  char ')'
                  return (d :*: e)
```

Recunoașterea și evaluarea unei expresii

```
*Exp> parse parseExp "(1 + (2 * 3))"
Lit 1 :+: (Lit 2 :*: Lit 3)
*Exp> evalExp (parse parseExp "(1 + (2 * 3))")
7
*Exp> parse parseExp "( ( 1 + 2 ) * 3 )"
(Lit 1 :+: Lit 2) :*: Lit 3
*Exp> evalExp (parse parseExp "( ( 1 + 2 ) * 3 )")
9
```

Pe săptămâna viitoare!

Fundamentele Limbajelor de Programare

Gramatici de operatori cu precedență

Traian-Florin Șerbănuță

UNIBUC

19 martie 2021

Gramatici de operatori cu precedențe

Definiție

O gramatică independenta de context se numește gramatică de operatori dacă:

- Nu are producții vide — `A ::=`
- Nu are terminale adiacente în partea dreaptă — `A ::= BC`

Exemplu rău

```
E ::= E A E | -E | (E) | x
A ::= + | - | * | / | ^
```

Exemplu bun

```
E ::= E + E | E - E | E * E | E / E | E ^ E | - E | T
T ::= (E) | id | nat
```

Adăugăm precedențe și atribute de asociativitate

```
E ::= T
    > E ^ E (right)
    > - E
    > E * E (left) | E / E (left)
    > E + E (left) | E - E (left)
```

Calculăm tabela de precedențe

```
E ::= T
    > E ^ E (right)
    > - E
    > E * E (left) | E / E (left)
    > E + E (left) | E - E (left)
```

	T	^	0-	*	/	+	-	$
T		>		>	>	>	>	>
^	<	<	>	>	>	>	>	>
0-	<	<	<	>	>	>	>	>
	<	<	<	>	>	>	>	>
/	<	<	<	>	>	>	>	>
+	<	<	<	<	<	>	>	>
-	<	<	<	<	<	>	>	>
$	<	<	<	<	<	<	<	<

Adăugăm precedențele în șirul de analizat

	T	^	0-	*	/	+	-	$
T		>		>	>	>	>	>
^	<	<	>	>	>	>	>	>
0-	<	<	<	>	>	>	>	>
	<	<	<	>	>	>	>	>
/	<	<	<	>	>	>	>	>
+	<	<	<	<	<	>	>	>
-	<	<	<	<	<	>	>	>
$	<	<	<	<	<	<	<	<

- Dacă vrem să analizăm `-2^2^x + 3 * 5 - 2 + 4`
- Transformăm în `$<-<2>^<2>^<x>+<3>*<5>-<2>+<4>$`

Algoritm

1. Punem pe stivă până la primul >
2. Când întâlnim > scoatem din stivă până la <, și evaluăm
   - Am scos din stivă < `V1` o `V2` >
     - unde `V`-urile sunt valori deja obținute
   - Calculăm valoarea nouă `V` (arbore de parsare, număr)
3. Vedem relația dintre operatorul de pe stivă și cel din șir
   - dacă <, punem < `V` pe stivă și mergem la (1)
   - dacă >, punem `V` > pe stiva și mergem la (2)
   - dacă = (aceeași producție), punem `V` pe stivă și mergem la (1)

Până când avem doar $ în șir și operatorul rămas în stivă e $

Exemplu

- $<-<2>^<2>^<x>+<3>*<5>-<2>+<4>$
- ^<2>^<x>+<3>*<5>-<2>+<4>$ $<-<2>
- ^<2>^<x>+<3>*<5>-<2>+<4>$ $<-<2 (0- < ^)
- ^<x>+<3>*<5>-<2>+<4>$ $<-<2^<2>
- ^<x>+<3>*<5>-<2>+<4>$ $<-<2^<2 (^ < ^)
- +<3>*<5>-<2>+<4>$ $<-<2^<2^<x>
- +<3>*<5>-<2>+<4>$ $<-<2^<2^x> (^ > +)
- +<3>*<5>-<2>+<4>$ $<-<2^(2^x)> (^ > +)
- +<3>*<5>-<2>+<4>$ $<-(2^(2^x))> (0- > +)
- +<3>*<5>-<2>+<4>$ $<(-(2^(2^x))) ($ < +)

Algoritm

1. Punem pe stivă până la primul >
2. Când întâlnim > scoatem din stivă până la <, și evaluăm
3. Vedem relația dintre operatorul de pe stivă și cel din șir

- dacă <, punem < apoi valoarea pe stivă si mergem la (1)
- dacă >, punem valoarea, apoi > pe stiva și mergem la (2)

Exemplu

- `+<3>*<5>-<2>+<4>$ $<(-(2^(2^x)))`
- `*<5>-<2>+<4>$ $<(-(2^(2^x)))+<3>`
- `*<5>-<2>+<4>$ $<(-(2^(2^x)))+<3` `(+ < *)`
- `-<2>+<4>$ $<(-(2^(2^x)))+<3*<5>`
- `-<2>+<4>$ $<(-(2^(2^x)))+<3*5>` `(* > -)`
- `-<2>+<4>$ $<(-(2^(2^x)))+(3*5)>` `(+ > -)`
- `-<2>+<4>$ $<((-(2^(2^x)))+(3*5))` `($ < -)`
- `+<4>$ $<((-(2^(2^x)))+(3*5))-<2>`
- `+<4>$ $<((-(2^(2^x)))+(3*5))-2>` `(- > +)`
- `+<4>$ $<(((-(2^(2^x)))+(3*5))-2)` `($ < +)`

Algoritm

1. Punem pe stivă până la primul >
2. Când întâlnim > scoatem din stivă până la <, și evaluăm
3. Vedem relația dintre operatorul de pe stivă și cel din șir

- dacă <, punem < apoi valoarea pe stivă si mergem la (1)
- dacă >, punem valoarea, apoi > pe stiva și mergem la (2)

Exemplu

- `+<4>$ $<(((-(2^(2^x)))+(3*5))-2)`
- `$ $<(((-(2^(2^x)))+(3*5))-2)+<4>`
- `$ $<(((-(2^(2^x)))+(3*5))-2)+4>` (+ > $)
- `$ $((((-(2^(2^x)))+(3*5))-2)+4)` (gata)

Algoritm

1. Punem pe stivă până la primul >
2. Când întâlnim > scoatem din stivă până la <, și evaluăm
3. Vedem relația dintre operatorul de pe stivă și cel din șir

- dacă <, punem < apoi valoarea pe stivă si mergem la (1)
- dacă >, punem valoarea, apoi > pe stiva și mergem la (2)

Până când avem doar $ în șir și operatorul rămas în stivă e $

Surse

- Gatevidyalay
- Wikipedia
- Text.Parsec.Expr

Curs 5

2020-2021

Fundamentele Limbajelor de Programare

Semantica limbajelor de programare

- Limbaj de programare: sintaxă și semantică
- Feluri de semantică
  - Limbaj natural — descriere textuală a efectelor
  - Operațională — asocierea unei demonstrații a execuției
  - Axiomatică — Descrierea folosind logică a efectelor unei instrucțiuni
  - Denotațională — prin asocierea unui obiect matematic (denotație)
  - Statică — Asocierea unui sistem de tipuri care exclude programe eronate

IMP: un limbaj IMPerativ foarte simplu

Ce conține

- Expresii
  - Aritmetice
  - Booleene
- Blocuri de instrucțiuni
  - De atribuire
  - Condiționale
  - De ciclare
  - De interacțiune I/O

```
var n = 0; read("n=", n);
var prime = true;
var i = 1;
while (prime && i * i < n) {
      i = i + 1;
      if (n % i == 0) prime = false
      else {}
};
if (prime) print("Is␣prime:␣", n)
else print("Is␣not␣prime:␣", n)
```

Sintaxă formală

$$
\begin{aligned}
E ::= {} & n \mid x \mid b \\
& \mid E \texttt{ + } E \mid E \texttt{ * } E \mid E \texttt{ / } E \\
& \mid E \texttt{ <= } E \mid E \texttt{ == } E \\
& \mid \texttt{! } E \mid E \texttt{ \&\& } E
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C ::= {} & \texttt{var } x \texttt{ = } E \mid x \texttt{ = } E \\
& \mid \texttt{if (} B \texttt{) } C \texttt{ else } C \\
& \mid \texttt{while (} B \texttt{) } C \\
& \mid \texttt{read (} str \texttt{ , } x \texttt{) } \mid \texttt{print (} str \texttt{ , } E \texttt{)} \\
& \mid \texttt{\{ } \{C \texttt{ ;}\}^* \texttt{ \}}
\end{aligned}
$$

$$
P ::= \{C \texttt{ ;}\}^*
$$

unde n reprezintă numere întregi, b constante de adevăr, x identificatori și str șiruri de caractere.

Semantică statică

Semantică Statică - Motivație

- Este sintaxa unui limbaj de programare prea expresivă?
- Sunt programe care n-aș vrea să le pot scrie, dar le pot?

- Putem detecta programe greșite înainte de rulare?
- Putem garanta că execuția programului nu se va bloca?

Semantică Statică - Motivație

- Este sintaxa unui limbaj de programare prea expresivă?
- Sunt programe care n-aș vrea să le pot scrie, dar le pot?
  - Pot aduna întregi cu Booleeni
  - 2 <= 3 <= 5

- Putem detecta programe greșite înainte de rulare?
- Putem garanta că execuția programului nu se va bloca?
  - folosirea variabilelor fără a le declara
  - tipuri incompatibile (variabile, dar și expresii)

Semantică Statică - Motivație

- Este sintaxa unui limbaj de programare prea expresivă?
- Sunt programe care n-aș vrea să le pot scrie, dar le pot?
  - Pot aduna întregi cu Booleeni
  - 2 <= 3 <= 5
- Putem detecta programe greșite înainte de rulare?
- Putem garanta că execuția programului nu se va bloca?
  - folosirea variabilelor fără a le declara
  - tipuri incompatibile (variabile, dar și expresii)
- Soluție: Sistemele de tipuri

Sisteme de tipuri

- Descriu programele „bine formate“
- Pot preveni anumite erori
  - folosirea variabilelor nedeclarate/neinițializate
  - detectarea unor bucați de cod inaccesibile
  - erori de securitate
- Ajută compilatorul
- Pot influența proiectarea limbajului

Scop (ideal)

Progamele „bine formate“, i. e., cărora li se poate asocia un tip nu eșuează

Reguli intuitive pentru IMP

- Variabilele trebuie declarate înainte de a fi folosite
- Variabilele nu își schimba tipul în timpul execuției
- operanzii asociați unui operator într-o expresie trebuie să se evalueze la valori corespunzătoare tipurilor așteptate de operator
- Condițiile din if și while se evaluează la valori Booleene
- Se fac operații I/O doar cu valori de tip întreg

Sisteme de tipuri

- Vom defini o relație $\Gamma \vdash \mathit{frag} : T$
- Citim *frag* are tipul T dacă Γ, unde
- Γ — tipuri asociate variabilelor din e

Exemple

$$\begin{array}{lcll} & \vdash & \texttt{if}\ \mathit{true}\ \texttt{then}\ \{\}\ \texttt{else}\ \{\} : \texttt{stmt} & \\ x : \texttt{int} & \vdash & x + 13 : \texttt{int} & \\ x : \texttt{int} & \nvdash & x = y + 1 : T & \text{pentru orice } T \end{array}$$

Tipuri în limbajul IMP

Tipurile expresiilor = tipurile gramaticale

$$T ::= \texttt{int} \mid \texttt{bool} \mid \texttt{stmt}$$

Γ — Mediul de tipuri

- Asociază tipuri variabilelor
- Notație: o listă de perechi locație-tip $x_1 : t_1, \ldots, x_n : t_n$

Observații pentru limbajul IMP

- variabile din Γ au tipul fie **`int`** fie **`bool`**
- Apariția unei variabile în Γ înseamnă că variabila a fost declarată

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul constantelor

$$(\textsc{int}) \quad \Gamma \vdash n : \mathbf{int} \quad \text{dacă } n \in \mathbb{Z}$$

$$(\textsc{bool}) \quad \Gamma \vdash b : \mathbf{bool} \quad \text{dacă } b \in \{\mathit{true}, \mathit{false}\}$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul constantelor

$$(\textsc{int}) \quad \Gamma \vdash n : \mathbf{int} \quad \text{dacă } n \in \mathbb{Z}$$

$$(\textsc{bool}) \quad \Gamma \vdash b : \mathbf{bool} \quad \text{dacă } b \in \{\mathit{true}, \mathit{false}\}$$

Tipul operatorilor

Operanzii asociați unui operator într-o expresie trebuie să se evalueze la valori corespunzătoare tipurilor așteptate de operator

$$(\textsc{op+}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathbf{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathbf{int}}{\Gamma \vdash e_1 + e_2 : \mathbf{int}}$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul constantelor

$$(\textsc{int}) \quad \Gamma \vdash n : \mathbf{int} \quad \text{dacă } n \in \mathbb{Z}$$

$$(\textsc{bool}) \quad \Gamma \vdash b : \mathbf{bool} \quad \text{dacă } b \in \{true, false\}$$

Tipul operatorilor

Operanzii asociați unui operator într-o expresie trebuie să se evalueze la valori corespunzătoare tipurilor așteptate de operator

$$(\textsc{op}+) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathbf{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathbf{int}}{\Gamma \vdash e_1 + e_2 : \mathbf{int}}$$

$$(\textsc{op}\leq) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathbf{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathbf{int}}{\Gamma \vdash e_1 \texttt{<=} e_2 : \mathbf{bool}}$$

$$(\textsc{op}!) \quad \frac{\Gamma \vdash e : \mathbf{bool}}{\Gamma \vdash !e : \mathbf{bool}}$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul variabilelor și al declarațiilor

- Variabilele trebuie declarate înainte de a fi folosite
- Variabilele nu își schimba tipul în timpul execuției

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul variabilelor și al declarațiilor

- Variabilele trebuie declarate înainte de a fi folosite
- Variabilele nu își schimba tipul în timpul execuției

(LOC) $\Gamma \vdash x : t \quad \text{dacă } \Gamma(x) = t$

(DECL) $$\frac{\Gamma \vdash e : t \quad \Gamma, x \mapsto t \vdash sts : stmt}{\Gamma \vdash \mathbf{var}\ x = e; sts : stmt}$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul variabilelor și al declarațiilor

- Variabilele trebuie declarate înainte de a fi folosite
- Variabilele nu își schimba tipul în timpul execuției

(LOC) $\Gamma \vdash x : t \quad \text{dacă } \Gamma(x) = t$

(DECL) $$\frac{\Gamma \vdash e : t \quad \Gamma, x \mapsto t \vdash sts : stmt}{\Gamma \vdash \mathbf{var}\ x = e; sts : stmt}$$

Instrucțiuni: Atribuire și secvențiere

- Variabilele nu își schimba tipul în timpul execuției

(ATRIB) $$\frac{\Gamma \vdash e : t}{\Gamma \vdash x = e : \mathbf{stmt}} \quad \text{dacă } \Gamma(x) = t$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul variabilelor și al declarațiilor

- Variabilele trebuie declarate înainte de a fi folosite
- Variabilele nu își schimba tipul în timpul execuției

(LOC) $\Gamma \vdash x : t \quad \text{dacă } \Gamma(x) = t$

(DECL) $$\frac{\Gamma \vdash e : t \quad \Gamma, x \mapsto t \vdash sts : stmt}{\Gamma \vdash \mathbf{var}\ x = e; sts : stmt}$$

Instrucțiuni: Atribuire și secvențiere

- Variabilele nu își schimba tipul în timpul execuției

(ATRIB) $$\frac{\Gamma \vdash e : t}{\Gamma \vdash x = e : \mathbf{stmt}} \quad \text{dacă } \Gamma(x) = t$$

(SEQ) $$\frac{\Gamma \vdash st : \mathbf{stmt} \quad \Gamma \vdash sts : stmt}{\Gamma \vdash st; sts : \mathbf{stmt}} \quad \text{dacă } st \text{ nu e declaratie}$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipuri pentru instrucțiuni

- Condițiile din if și while se evaluează la valori Booleene

$$(\textsc{if})\quad \frac{\Gamma \vdash c : \mathbf{bool} \quad \Gamma \vdash t : \mathbf{stmt} \quad \Gamma \vdash e : \mathbf{stmt}}{\Gamma \vdash \mathbf{if}\ c\ \mathbf{then}\ t\ \mathbf{else}\ e : \mathbf{stmt}}$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipuri pentru instrucțiuni

- Condițiile din if și while se evaluează la valori Booleene

$$(\textsc{if})\quad \frac{\Gamma \vdash c : \mathbf{bool} \quad \Gamma \vdash t : \mathbf{stmt} \quad \Gamma \vdash e : \mathbf{stmt}}{\Gamma \vdash \mathbf{if}\ c\ \mathbf{then}\ t\ \mathbf{else}\ e : \mathbf{stmt}}$$

$$(\textsc{while})\quad \frac{\Gamma \vdash c : \mathbf{bool} \quad \Gamma \vdash b : \mathbf{stmt}}{\Gamma \vdash \mathbf{while}\ (c)\ b : \mathbf{stmt}}$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipuri pentru instrucțiuni

- Condițiile din if și while se evaluează la valori Booleene

$$(\textsc{if})\quad \frac{\Gamma \vdash c : \mathbf{bool} \quad \Gamma \vdash t : \mathbf{stmt} \quad \Gamma \vdash e : \mathbf{stmt}}{\Gamma \vdash \mathbf{if}\ c\ \mathbf{then}\ t\ \mathbf{else}\ e : \mathbf{stmt}}$$

$$(\textsc{while})\quad \frac{\Gamma \vdash c : \mathbf{bool} \quad \Gamma \vdash b : \mathbf{stmt}}{\Gamma \vdash \mathbf{while}\ (c)\ b : \mathbf{stmt}}$$

- Se fac operații I/O doar cu valori de tip întreg

$$(\textsc{read})\quad \Gamma \vdash \mathbf{read}\ (s, x) : \mathbf{stmt} \quad \textit{dacă}\ \Gamma(x) = \mathbf{int}$$

$$(\textsc{print})\quad \frac{\Gamma \vdash e : \mathbf{int}}{\Gamma \vdash \mathbf{print}\ (s, e) : \mathbf{stmt}}$$

Haskell: limbajul SIMPLE

Limbajul SIMPLE

SIMPLE - exemplu

```
pFact= Block [
       Asgn "n" (I 5),
       Asgn "fact " (Id "n"),
       Asgn "i" (I 1),
       While (BinE Neq  (Id "n") (Id "i"))
             (Block [ Asgn "fact" (BinA Mul (Id "
                 fact") (Id "i")),
                    Asgn "i" (BinA Add (Id "i") (I
                        1))
                    ])
             ]

*SIMPLE> pFact
Block [Asgn "n" 5,Asgn "fact " n,Asgn "i" 1,While n!=
    i (Block [Asgn "fact" (fact*i),Asgn "i" (i+1)])]
```

Limbajul SIMPLE - operatori

```
type Name = String

data BinAop = Add | Mul | Sub | Div | Mod

data BinCop = Lt | Lte | Gt | Gte

data BinEop = Eq | Neq

data BinLop = And | Or
```

Limbajul SIMPLE - expresii

```
data Exp
     = Id Name
     | I Integer
     | B Bool
     | UMin Exp
     | BinA BinAop Exp Exp
     | BinC BinCop Exp Exp
     | BinE BinEop Exp Exp
     | BinL BinLop Exp Exp
     | Not Exp
```

Limbajul SIMPLE - instrucțiuni

```
data Stmt
     = Asgn Name Exp

     | If Exp Stmt Stmt

     | While Exp Stmt

     | Block [Stmt]

     | Decl Name Exp
```

SIMPLE: operatori binari

- operatori aritmetici

```
data BinAop = Add | Mul

instance Show BinAop where
    show Add = "+"
    show Mul = "*"
```

SIMPLE: operatori binari

- operatori aritmetici

```
data BinAop = Add | Mul

instance Show BinAop where
    show Add = "+"
    show Mul = "*"
```

- operatori logici

```
data BinLop = And | Or

instance Show BinLop where
    show And = "&&"
    show Or = "||"
```

SIMPLE: relații

- relații de ordine

```
data BinCop = Lte | Gte

instance Show BinCop where
    show Lte = "<="
    show Gte = ">="
```

SIMPLE: relații

- relații de ordine

```
data BinCop = Lte | Gte

instance Show BinCop where
    show Lte = "<="
    show Gte = ">="
```

- relația de egalitate

```
data BinEop = Eq | Neq

instance Show BinEop where
    show Eq = "=="
    show Neq = "!="
```

SIMPLE: expresii simple

```
data Exp
     = Id Name
     | I Integer
     | B Bool
```

SIMPLE: expresii simple

```
data Exp
     = Id Name
     | I Integer
     | B Bool

instance Show Exp where
     show (Id x) = x
     show (I i) = show i
     show (B True) = "true"
     show (B False) = "false"
```

SIMPLE: expresii (complet)

```
data Exp
     = Id Name
     | I Integer
     | B Bool
     | UMin Exp
     | BinA BinAop Exp Exp
     | BinC BinCop Exp Exp
     | BinE BinEop Exp Exp
     | BinL BinLop Exp Exp
     | Not Exp
```

SIMPLE: expresii (complet)

```
instance Show Exp where
    show (Id x) = x
    show (I i) = show i
    show (B True) = "true"
    show (B False) = "false"
    show (UMin e) = "-" ++ show e
    show (BinA op e1 e2) = addParens $ show e1 ++
        show op ++ show e2
    show (BinL op e1 e2) = addParens $ show e1 ++
        show op ++ show e2
    show (BinC op e1 e2) = show e1 ++ show op ++ show
        e2
    show (BinE op e1 e2) = show e1 ++ show op ++ show
        e2
    show (Not e) = "!" ++ show e

addParens :: String -> String
addParens e = "(" ++ e ++ ")"
```

Exemplu: SIMPLE expresii

```
> :t BinC Lte  (Id "prime") (BinA Add (I 2) (Id "x"))
BinC Lte  (Id "prime") (BinA Add (I 2) (Id "x")) ::
    Exp

> :t BinL Lte  (Id "prime") (BinA Add (I 2) (Id "x"))
error: ...

> BinC Lte  (Id "prime") (BinA Add (I 2) (Id "x"))
prime<=(2+x)
```

Exemplu: SIMPLE expresii

Observați că:

```
> :t BinC Lte (B True) (BinA Add (I 2) (Id "x"))
BinC Lte (B True) (BinA Add (I 2) (Id "x")) :: Exp

> BinC Lte (B True) (BinA Add (I 2) (Id "x"))
true<=(2+x)
```

Exemplu: SIMPLE expresii

Observați că:

```
> :t BinC Lte (B True) (BinA Add (I 2) (Id "x"))
BinC Lte (B True) (BinA Add (I 2) (Id "x")) :: Exp

> BinC Lte (B True) (BinA Add (I 2) (Id "x"))
true<=(2+x)
```

Expresia de mai sus este **coerectă sintactic** dar greșită din punctul de vedere al verificării tipurilor.

SIMPLE: instrucțiuni

```
data Stmt
        =   Asgn Name Exp
          | If Exp Stmt Stmt
          | While Exp Stmt
          | Block [Stmt]
          | Decl Name Exp
  deriving (Show)
```

Exemplu: SIMPLE program

```
pFact= Block [
       Asgn "n" (I 5),
       Asgn "fact " (Id "n"),
       Asgn "i" (I 1),
       While (BinE Neq  (Id "n") (Id "i"))
             (Block [ Asgn "fact" (BinA Mul (Id "
                 fact") (Id "i")),
                      Asgn "i" (BinA Add (Id "i") (I
                           1))
                      ])
             ]
```

Exemplu: SIMPLE program

```
pFact= Block [
       Asgn "n" (I 5),
       Asgn "fact " (Id "n"),
       Asgn "i" (I 1),
       While (BinE Neq  (Id "n") (Id "i"))
             (Block [ Asgn "fact" (BinA Mul (Id "
                 fact") (Id "i")),
                      Asgn "i" (BinA Add (Id "i") (I
                          1))
                      ])
             ]

*SIMPLE> :t pFact
pFact :: Stmt
```

Exemplu: SIMPLE program

```
pFact= Block [
       Decl "n" (I 5),
       Decl "fact " (Id "n"),
       Decl "i" (I 1),
       While (BinE Neq  (Id "n") (Id "i"))
                (Block [ Asgn "fact" (BinA Mul (Id "
                   fact") (Id "i")),
                       Asgn "i" (BinA Add (Id "i") (I
                            1))
                       ])
              ]
```

Exemplu: SIMPLE program

```
pFact= Block [
       Decl "n" (I 5),
       Decl "fact " (Id "n"),
       Decl "i" (I 1),
       While (BinE Neq  (Id "n") (Id "i"))
             (Block [ Asgn "fact" (BinA Mul (Id "
                fact") (Id "i")),
                    Asgn "i" (BinA Add (Id "i") (I
                         1))
                    ])
             ]

*SIMPLE> pFact
Block [Asgn "n" 5,Asgn "fact " n,Asgn "i" 1,
While n!=i (Block [Asgn "fact" (fact*i),
Asgn "i" (i+1)])]
```

SIMPLE: verificarea sistemului de tipuri

SIMPLE type checker

- vom folosi o "stare" in care fiecare variabila are ascociat un tip; "stările" sunt definite folosind Data.Map

```
import Data.Map.Strict as Map
type CheckerState = Map Name Type

emptyCSt :: CheckerState -- "starea" vida
emptyCSt = Map.empty
```

SIMPLE type checker

- vom folosi o "stare" in care fiecare variabila are ascociat un tip; "stările" sunt definite folosind Data.Map

```
import Data.Map.Strict as Map
type CheckerState = Map Name Type

emptyCSt :: CheckerState -- "starea" vida
emptyCSt = Map.empty
```

- funcția de verificare va asocia unei construcții sintactice o valoare M Type, unde M este o monadă iar Type este un tip:

```
data Type = TInt | TBool

checkExp :: Exp -> M Type
```

SIMPLE type checker

- vom folosi o "stare" in care fiecare variabila are ascociat un tip; "stările" sunt definite folosind Data.Map

```
import Data.Map.Strict as Map
type CheckerState = Map Name Type

emptyCSt :: CheckerState -- "starea" vida
emptyCSt = Map.empty
```

- funcția de verificare va asocia unei construcții sintactice o valoare M Type, unde M este o monadă iar Type este un tip:

```
data Type = TInt | TBool

checkExp :: Exp -> M Type
```

Tipul "unit" () va fi tipul instrucțiunilor:

SIMPLE type checker

- vom folosi o "stare" in care fiecare variabila are ascociat un tip; "stările" sunt definite folosind Data.Map

```
import Data.Map.Strict as Map
type CheckerState = Map Name Type

emptyCSt :: CheckerState -- "starea" vida
emptyCSt = Map.empty
```

- funcția de verificare va asocia unei construcții sintactice o valoare M Type, unde M este o monadă iar Type este un tip:

```
data Type = TInt | TBool

checkExp :: Exp -> M Type
```

Tipul "unit" () va fi tipul instrucțiunilor: unde

```
checkStmt :: Stmt -> M ()
checkBlock :: [Stmt] -> M ()
```

SIMPLE type checker: monada

- Monada M este o combnație între monada Reader și monada **Either**

```
newtype EReader a =
    EReader {runEReader :: CheckerState ->(Either
        String a)}

instance Monad EReader where
     return a = EReader (\env ->  Right a)
     act >>= k = EReader  f
                 where
                  f env  = case (runEReader act env)
                      of
                            Left s -> Left s
                            Right va -> runEReader (k
                                va) env


type M = EReader
```

SIMPLE type checker: monada

- Monada EReader este o combnație între monada Reader și monada **Either**

```
newtype EReader a =
    EReader {runEReader :: CheckerState ->(Either
        String a)}

askEReader :: EReader CheckerState
askEReader =EReader (\env -> Right env)

localEReader ::(CheckerState ->CheckerState) ->
    EReader a -> EReader a
localEReader f ma = EReader (\env -> (runEReader ma)
    (f env))
```

SIMPLE type checker: funcții auxiliare

```
throwError :: String -> EReader a
throwError e = EReader (\_ -> (Left e))


expect ::(Show t,Eq t,Show e)=> t -> t -> e -> M ()
expect tExpect tActual e =
    if (tExpect /= tActual)
    then      (throwError
        $ "Type mismatch. Expected " ++ show tExpect
            ++ " but got " ++ show tActual ++ " for "
            ++ show e)
    else (return ())
```

SIMPLE type checker: **lookup**

```
data Type = TInt | TBool
  deriving (Eq)

type CheckerState = Map Name Type
type M = EReader

lookupM :: Name -> M Type
lookupM x = do
    env <- askEReader
    case (Map.lookup x env) of
        Nothing -> throwError $ "Variable " <> x <> "
            not declared"
        Just t -> return t
```

SIMPLE type checker: structura generală

```
checkExp :: Exp -> M Type

checkStmt :: Stmt -> M ()

checkBlock :: [Stmt] -> M ()

checkPgm :: [Stmt] -> Bool
checkPgm pgm =
 case (runEReader (checkBlock pgm)) emptyCSt of
        Left err -> error err
        Right _ -> True
```

SIMPLE type checker: structura generală

```
checkExp :: Exp -> M Type

checkStmt :: Stmt -> M ()

checkBlock :: [Stmt] -> M ()

checkPgm :: [Stmt] -> Bool
checkPgm pgm =
 case (runEReader (checkBlock pgm)) emptyCSt of
        Left err -> error err
        Right _ -> True

*Checker> checkPgm [pFact]
True
```

SIMPLE type checker: structura generală

```
checkExp :: Exp -> M Type

checkStmt :: Stmt -> M ()

checkBlock :: [Stmt] -> M ()

checkPgm :: [Stmt] -> Bool
checkPgm pgm =
 case (runEReader (checkBlock pgm)) emptyCSt of
        Left err -> error err
        Right _ -> True
```

SIMPLE type checker: structura generală

```
checkExp :: Exp -> M Type

checkStmt :: Stmt -> M ()

checkBlock :: [Stmt] -> M ()

checkPgm :: [Stmt] -> Bool
checkPgm pgm =
 case  (runEReader (checkBlock pgm)) emptyCSt of
        Left err -> error err
        Right _ -> True

*Checker> runEReader (checkExp (BinC Lte  (B True)
 (BinA Add (I 2) (Id "x")))) emptyCSt
Left "Type mismatch. Expected int but got bool for
    true"
```

SIMPLE type checker: verficarea blocurilor

```
checkBlock :: [Stmt] -> M ()

checkBlock [] = return ()

checkBlock (Decl x e : ss) = do
    t <- checkExp e
    localEReader (Map.insert x t) (checkBlock ss)

checkBlock (s : ss) = checkStmt s >> checkBlock ss
```

SIMPLE type checker: verificarea instrucțiunilor

```
checkStmt :: Stmt -> M ()
checkStmt (Decl _ _) = return ()
checkStmt (Block ss) = checkBlock ss
```

SIMPLE type checker: verificarea instrucțiunilor

```
checkStmt :: Stmt -> M ()
checkStmt (Decl _ _) = return ()
checkStmt (Block ss) = checkBlock ss

checkStmt (Asgn x e) = do
    tx <- lookupM x
    te <- checkExp e
    expect tx te e

checkStmt (If e s1 s2) = do
    te <- checkExp e
    expect TBool  te e
    checkStmt s1
    checkStmt s2

checkStmt (While e s) = ...
```

SIMPLE type checker: verificarea expresiilor

```
checkExp :: Exp -> M Type
checkExp (I _) = return TInt
checkExp (B _) = return TBool
checkExp (Id x) = lookupM x
```

SIMPLE type checker: verificarea expresiilor

```
checkExp :: Exp -> M Type
checkExp (I _) = return TInt
checkExp (B _) = return TBool
checkExp (Id x) = lookupM x

checkExp (BinA _ e1 e2) = do
    t1 <- checkExp e1
    expect TInt t1 e1
    t2 <- checkExp e2
    expect TInt t2 e2
    return TInt

checkExp (Not e) = do
    t <- checkExp e
    expect TBool t e
    return TBool
...
```

Pe săptămâna viitoare!

Curs 6

2020-2021

Fundamentele Limbajelor de Programare

λ-calcul

- În 1929-1932 Church a propus λ-calculul ca sistem formal pentru logica matematică. În 1935 a argumentat că orice funcție calculabilă peste numere naturale poate fi calculată in λ-calcul.
- În 1935, independent de Church, Turing a dezvoltat mecanismul de calcul numit astăzi Mașina Turing. În 1936 și el a argumentat câ orice funcție calculabilă peste numere naturale poate fi calculată de o mașină Turing. De asemenea, a arătat echivalența celor două modele de calcul. Această echivalență a constituit o indicație puternică asupra "universalității" celor două modele, conducând la ceea ce numim astăzi "Teza Church-Turing".

Referințe

λ-calcul: sintaxa

Lambda Calcul - sintaxă

$$
\begin{array}{lll}
t = & x & \text{(variabilă)} \\
 & \mid \lambda x.\, t & \text{(abstractizare)} \\
 & \mid t\ t & \text{(aplicare)}
\end{array}
$$

λ-calcul: sintaxa

Lambda Calcul - sintaxă

$$
\begin{array}{lll}
t = & x & \text{(variabilă)} \\
& \mid \lambda x.\, t & \text{(abstractizare)} \\
& \mid t\ t & \text{(aplicare)}
\end{array}
$$

λ-termeni

Fie $Var = \{x, y, z, \ldots\}$ o mulțime infinită de variabile.
Mulțimea λ-termenilor ΛT este definită inductiv astfel:

[Variabilă] $Var \subseteq \Lambda T$

[Aplicare] dacă $t_1, t_2 \in \Lambda T$ atunci $(t_1\, t_2) \in \Lambda T$

[Abstractizare] dacă $x \in Var$ și $t \in \Lambda T$ atunci $(\lambda x.t) \in \Lambda T$

Lambda termeni

λ-termeni: exemple

- x, y, z
- (xy), (yx), $(x(yx))$
- $(\lambda x.x)$, $(\lambda x.(xy))$, $(\lambda z.(xy))$, $(\lambda x.(\lambda z.(xy)))$
- $((\lambda x.x)y)$, $((\lambda x.(xz))y)$, $((\lambda x.x)(\lambda y.y))$

Lambda termeni

λ-termeni: exemple

- x, y, z
- (xy), (yx), $(x(yx))$
- $(\lambda x.x)$, $(\lambda x.(xy))$, $(\lambda z.(xy))$, $(\lambda x.(\lambda z.(xy)))$
- $((\lambda x.x)y)$, $((\lambda x.(xz))y)$, $((\lambda x.x)(\lambda y.y))$

Convenții:

- se elimină parantezele exterioare
- aplicarea este asociativă la stînga: $t_1\,t_2\,t_3$ este $(t_1\,t_2)t_3$
- corpul abstractizării este extins la dreapta: $\lambda x.t_1\,t_2$ este $\lambda x.(t_1\,t_2)$ (nu $(\lambda x.t_1)t_2$)
- scriem $\lambda xyz.t$ în loc de $\lambda x.\lambda y.\lambda z.t$

Lambda termeni / Funcții anonime

λ-termeni: exemple

- x, y, z
- (xy), (yx), $(x(yx))$
- $(\lambda x.x)$, $(\lambda x.(xy))$, $(\lambda z.(xy))$, $(\lambda x.(\lambda z.(xy)))$
- $((\lambda x.x)y)$, $((\lambda x.(xz))y)$, $((\lambda x.x)(\lambda y.y))$

λ-termeni/ funcții anonime în Haskell

În Haskell, `\` e folosit în locul simbolului λ și `->` în locul punctului.

$\lambda x.x * x$ este `\x -> x * x`

$\lambda x.x > 0$ este `\x -> x > 0`

Variabile libere și legate

Apariții libere și legate

Pentru un termen $\lambda x.t$ spunem că:

- aparițiile variabilei x în t sunt legate (*bound*)
- λx este legătura (*binder*), iar t este domeniul (*scope*) legării
- o apariție a unei variabile este liberă (*free*) dacă apare într-o poziție în care nu e legată.

Un termen fără variable libere se numește închis (*closed*).

Exemplu:

- $\lambda x.x$ este un termen închis
- $\lambda x.xy$ nu este termen închis, x este legată, y este liberă
- în termenul $x(\lambda x.xy)$ prima apariție a lui x este liberă, a doua este legată.

Variabile libere

Mulțimea variabilelor libere $FV(t)$

Pentru un λ-termen t mulțimea variabilelor libere este definită astfel:

[Variabilă] $FV(x) = x$

[Aplicare] $FV(t_1 t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$

[Abstractizare] $FV(\lambda x.t) = FV(t) \setminus \{x\}$

Exemplu:

$$\begin{aligned} FV(\lambda x.xy) = \quad & FV(xy) \setminus \{x\} \\ & (FV(x) \cup FV(y)) \setminus \{x\} \\ & (\{x\} \cup \{y\}) \setminus \{x\} \\ & \{y\} \end{aligned}$$

Variabile libere

Mulțimea variabilelor libere $FV(t)$

Pentru un λ-termen t mulțimea variabilelor libere este definită astfel:

[Variabilă] $FV(x) = x$

[Aplicare] $FV(t_1 t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$

[Abstractizare] $FV(\lambda x.t) = FV(t) \setminus \{x\}$

Exemplu:

$$
\begin{aligned}
FV(\lambda x.xy) = \quad & FV(xy) \setminus \{x\} \\
& (FV(x) \cup FV(y)) \setminus \{x\} \\
& (\{x\} \cup \{y\}) \setminus \{x\} \\
& \{y\}
\end{aligned}
$$

$$
FV(x\lambda x.xy) =
$$

Variabile libere

Mulțimea variabilelor libere $FV(t)$

Pentru un λ-termen t mulțimea variabilelor libere este definită astfel:

[Variabilă] $FV(x) = x$

[Aplicare] $FV(t_1 t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$

[Abstractizare] $FV(\lambda x.t) = FV(t) \setminus \{x\}$

Exemplu:

$$
\begin{aligned}
FV(\lambda x.xy) = \quad & FV(xy) \setminus \{x\} \\
& (FV(x) \cup FV(y)) \setminus \{x\} \\
& (\{x\} \cup \{y\}) \setminus \{x\} \\
& \{y\} \\
FV(x\lambda x.xy) = \quad & \{x, y\}
\end{aligned}
$$

Substituții

Fie t un λ-termen $x \in Var$.

Definiție intuitivă

Pentru un λ-termen u vom nota prin $[u/x]t$ rezultatul înlocuirii tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u în t.

Exemple: Dacă x, y, z sunt variabile distincte atunci

- $[y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$
- $[(\lambda z.zw)/x](\lambda y.x) = \lambda y.\lambda z.zw$

Substituții

Exemple: Dacă x, y, z sunt variabile distincte atunci

- $[y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$
- Cine este $[y/x]\lambda y.x$?

Substituții

Exemple: Dacă x, y, z sunt variabile distincte atunci

- $[y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$
- Cine este $[y/x]\lambda y.x$?
  Dacă folosim definiția intuitivă obținem
  $[y/x]\lambda y.x = \lambda y.y$ ceea ce este greșit!

Substituții

Exemple: Dacă x, y, z sunt variabile distincte atunci

- $[y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$
- Cine este $[y/x]\lambda y.x$?
  Dacă folosim definiția intuitivă obținem
  $[y/x]\lambda y.x = \lambda y.y$ ceea ce este greșit!

  Cum procedăm pentru a repara greșeala? Observăm că $\lambda y.x$ desemneaza o funcție constantă, aceeași funcție putând fi reprezentată prin $\lambda z.x$. Aplicarea corectă a substituției este:
  $[y/x]\lambda y.x = [y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$

Substituții

Exemple: Dacă x, y, z sunt variabile distincte atunci

- $[y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$
- Cine este $[y/x]\lambda y.x$?
  Dacă folosim definiția intuitivă obținem
  $[y/x]\lambda y.x = \lambda y.y$ ceea ce este greșit!

  Cum procedăm pentru a repara greșeala? Observăm că $\lambda y.x$ desemneaza o funcție constantă, aceeași funcție putând fi reprezentată prin $\lambda z.x$. Aplicarea corectă a substituției este:
  $[y/x]\lambda y.x = [y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$

  Avem libertatea de a redenumi variabilele legate!

α-conversie (α-echivalență)

α-conversia $=_\alpha$

[Reflexivitate] $t =_\alpha t$

[Simetrie] $t_1 =_\alpha t_2$ implică $t_2 =_\alpha t_1$

[Tranzitivitate] $t_1 =_\alpha t_2$ și $t_2 =_\alpha t_3$ implică $t_1 =_\alpha t_3$

[Redenumire] $\lambda x.t =_\alpha \lambda y.[y/x]t$ dacă $y \notin FV(t)$

[Compatibilitate] $t_1 =_\alpha t_2$ implică

$$tt_1 =_\alpha tt_2,\ t_1 t =_\alpha t_2 t \text{ și } \lambda x.t_1 =_\alpha \lambda x.t_2$$

α-conversie (α-echivalență)

α-conversia $=_\alpha$

[Reflexivitate] $t =_\alpha t$

[Simetrie] $t_1 =_\alpha t_2$ implică $t_2 =_\alpha t_1$

[Tranzitivitate] $t_1 =_\alpha t_2$ și $t_2 =_\alpha t_3$ implică $t_1 =_\alpha t_3$

[Redenumire] $\lambda x.t =_\alpha \lambda y.[y/x]t$ dacă $y \notin FV(t)$

[Compatibilitate] $t_1 =_\alpha t_2$ implică
$tt_1 =_\alpha tt_2$, $t_1 t =_\alpha t_2 t$ și $\lambda x.t_1 =_\alpha \lambda x.t_2$

Exemplu:
$[xy/x](\lambda y.yx) =_\alpha [xy/x](\lambda z.zx) =_\alpha \lambda z.z(xy)$

Substituții

Definirea substituției

Rezultatul substituirii lui x cu u în t este definit astfel:

[Variabilă] $[u/x]x = u$

[Variabilă] $[u/x]y = y$ dacă $x \neq y$

[Aplicare] $[u/x](t_1\, t_2) = [u/x]t_1\,[u/x]t_2$

[Abstractizare] $[u/x]\lambda y.t = \lambda y.[u/x]t$ dacă $x \neq y$ și $y \notin FV(u)$

α-conversia este compatibilă cu substituția

- $t_1 =_\alpha t_2$ și $u_1 =_\alpha u_2$ implică $[u_1/x]t_1 =_\alpha [u_2/x]t_2$

Vom lucra modulo α-conversie, doi termeni α-echivalenți vor fi considerați "egali".

β-reducție

β-reducția este o relație pe mulțimea α-termenilor.

β-reducția $\rightarrow_\beta$, $\overset{*}{\rightarrow}_\beta$

- un singur pas $\rightarrow_\beta \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$

  [Aplicarea] $(\lambda x.t)u \rightarrow_\beta [u/x]t$

  [Compatibilitatea] $t_1 \rightarrow_\beta t_2$ implică

  $tt_1 \rightarrow_\beta tt_2$, $t_1 t \rightarrow_\beta t_2 t$ și $\lambda x.t_1 \rightarrow_\beta \lambda x.t_2$

- zero sau mai mulți pași $\overset{*}{\rightarrow}_\beta \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$

  $t_1 \overset{*}{\rightarrow}_\beta t_2$ dacă există $n \geq 0$ și $u_0, \ldots, u_n$ astfel încât

  $t_1 =_\alpha u_0 \rightarrow_\beta u_1 \rightarrow_\beta \cdots \rightarrow_\beta u_n =_\alpha t_2$

Confluența β-reducției

Teorema Church-Rosser

Dacă $t \overset{*}{\to}_\beta t_1$ și $t \overset{*}{\to}_\beta t_2$ atunci există u astfel încât $t_1 \overset{*}{\to}_\beta u$ și $t_2 \overset{*}{\to}_\beta u$.

Exemplu:

β-forma normală

Intuitiv, o formă normală este un termen care nu mai poate fi redus (sau punctul final al unui calcul).

Formă normal ă

- un λ-termen căruia nu i se mai poate aplica reducerea într-un pas $\rightarrow_\beta$ se numește *β-formă normală*
- dacă $t \overset{*}{\rightarrow}_\beta u_1$, $t \overset{*}{\rightarrow}_\beta u_2$ și u_1, u_2 sunt η-forme normale atunci, datorită confluenței, $u_1 =_\alpha u_2$
- un λ-termen poate avea cel mult o β-formă normală (modulo α-echivalență)

β-forma normală

Formă normal ă

- un λ-termen căruia nu i se mai poate aplica reducerea într-un pas $\rightarrow_\beta$ se numește *β-formă normală*
- dacă $t \overset{*}{\rightarrow}_\beta u_1$, $t \overset{*}{\rightarrow}_\beta u_2$ și u_1, u_2 sunt η-forme normale atunci, datorită confluenței, $u_1 =_\alpha u_2$
- un λ-termen poate avea cel mult o β-formă normală (modulo α-echivalență)

Exemplu:

- zv este β-formă normală pentru $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v$
  $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v \rightarrow_\beta (\lambda y.yv)z \rightarrow_\beta zv$
- există termeni care **nu** pot fi redușI la o β-formă normală, de exemplu $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

β-conversia

Intuitiv, β-conversia extinde β-reducția în ambele direcții.

β-conversia $=_\beta$

- $=_\beta \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$
  $t_1 =_\beta t_2$ dacă există $n \geq 0$ și $u_0, \ldots, u_n$ astfel încât
  $t_1 =_\alpha u_0$, $u_n =_\alpha t_2$ și, pentru orice i, $u_i \to_\beta u_{i+1}$ sau $u_{i+1} \to_\beta u_i$

β-conversia

Intuitiv, β-conversia extinde β-reducția în ambele direcții.

β-conversia $=_\beta$

- $=_\beta \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$
  $t_1 =_\beta t_2$ dacă există $n \geq 0$ și $u_0, \ldots, u_n$ astfel încât
  $t_1 =_\alpha u_0$, $u_n =_\alpha t_2$ și, pentru orice i, $u_i \to_\beta u_{i+1}$ sau $u_{i+1} \to_\beta u_i$

Observații

- $=_\beta$ este o relație de echivalență

β-conversia

Intuitiv, β-conversia extinde β-reducția în ambele direcții.

β-conversia $=_\beta$

- $=_\beta \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$
  $t_1 =_\beta t_2$ dacă există $n \geq 0$ și $u_0, \ldots, u_n$ astfel încât
  $t_1 =_\alpha u_0$, $u_n =_\alpha t_2$ și, pentru orice i, $u_i \to_\beta u_{i+1}$ sau $u_{i+1} \to_\beta u_i$

Observații

- $=_\beta$ este o relație de echivalență
- pentru t_1, t_2 λ-termeni și u_1, u_2 β-forme normale
  dacă $t_1 \overset{*}{\to}_\beta u_1$, $t_2 \overset{*}{\to}_\beta u_2$ și $u_1 =_\alpha u_2$ atunci $t_1 =_\beta t_2$

β-conversia

β-conversia $=_\beta$

- $=_\beta \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$
  $t_1 =_\beta t_2$ dacă există $n \geq 0$ și $u_0, \ldots, u_n$ astfel încât
  $t_1 =_\alpha u_0$, $u_n =_\alpha t_2$ și, pentru orice i, $u_i \to_\beta u_{i+1}$ sau $u_{i+1} \to_\beta u_i$
- $=_\beta$ este o relație de echivalență

β-conversia

β-conversia $=_\beta$

- $=_\beta \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$
  $t_1 =_\beta t_2$ dacă există $n \geq 0$ și $u_0, \ldots, u_n$ astfel încât
  $t_1 =_\alpha u_0$, $u_n =_\alpha t_2$ și, pentru orice i, $u_i \to_\beta u_{i+1}$ sau $u_{i+1} \to_\beta u_i$
- $=_\beta$ este o relație de echivalență
- pentru t_1, t_2 λ-termeni și u_1, u_2 β-forme normale
  dacă $t_1 \overset{*}{\to}_\beta u_1$, $t_2 \overset{*}{\to}_\beta u_2$ și $u_1 =_\alpha u_2$ atunci $t_1 =_\beta t_2$

β-conversia reprezintă "egalitatea prin calcul", iar β-reducția (modulo α-conversie) oferă o procedură de decizie pentru aceasta.

Pe săptămâna viitoare!

Curs 7

2020-2021

Fundamentele Limbajelor de Programare

λ-calcul și calculabilitate

- În 1929-1932 Church a propus λ-calculul ca sistem formal pentru logica matematică. În 1935 a argumentat că orice funcție calculabilă peste numere naturale poate fi calculată in λ-calcul.
- În 1935, independent de Church, Turing a dezvoltat mecanismul de calcul numit astăzi Mașina Turing. În 1936 și el a argumentat câ orice funcție calculabilă peste numere naturale poate fi calculată de o mașină Turing. De asemenea, a arătat echivalența celor două modele de calcul. Această echivalență a constituit o indicație puternică asupra "universalității" celor două modele, conducând la ceea ce numim astăzi "Teza Church-Turing".

λ-calcul: sintaxa

$$
\begin{array}{lll}
t = & x & \text{(variabilă)} \\
& \mid (\lambda x.\, t) & \text{(abstractizare)} \\
& \mid (t\ t) & \text{(aplicare)}
\end{array}
$$

Convenții:

- se elimină parantezele exterioare
- aplicarea este asociativă la stînga: $t_1 t_2 t_3$ este $(t_1 t_2) t_3$
- corpul abstractizării este extins la dreapta: $\lambda x.t_1 t_2$ este $\lambda x.(t_1 t_2)$ (nu $(\lambda x.t_1) t_2$)
- scriem $\lambda xyz.t$ în loc de $\lambda x.\lambda y.\lambda z.t$

λ-calcul: sintaxa

$$
\begin{array}{rll}
t = & x & \text{(variabilă)} \\
& \mid (\lambda x.\, t) & \text{(abstractizare)} \\
& \mid (t\ t) & \text{(aplicare)}
\end{array}
$$

Convenții:

- se elimină parantezele exterioare
- aplicarea este asociativă la stînga: $t_1\, t_2\, t_3$ este $(t_1\, t_2)\, t_3$
- corpul abstractizării este extins la dreapta: $\lambda x.t_1\, t_2$ este $\lambda x.(t_1\, t_2)$ (nu $(\lambda x.t_1)\, t_2$)
- scriem $\lambda xyz.t$ în loc de $\lambda x.\lambda y.\lambda z.t$

Întrebare

Ce putem exprima / calcula folosind **doar** λ-calcul?

Rezumat

- Reprezentarea valorilor de adevăr și a expresiilor condiționale
- Reprezentarea perechilor (tuplurilor) și a funcțiilor proiecție
- Reprezentarea numerelor și a operatiilor aritmetice de bază
- Recursie

Ideea generală

Intuiție

Tipurile de date sunt codificate de capabilități

Boole	capabilitatea de a alege între două alternative
Perechi	capabilitatea de a calcula ceva bazat pe două valori
Numere naturale	capabilitatea de a itera de un număr dat de ori

Valori de adevăr

Intuiție:	Capabilitatea de a alege între două alternative.
Codificare:	Un Boolean este o funcție cu 2 argumente reprezentând ramurile unei alegeri.
true ::=	$\lambda t\ f.t$ — din cele două alternative o alege pe prima
false ::=	$\lambda t\ f.f$ — din cele două alternative o alege pe a doua

Operații Booleene

true ::= $\lambda t\ f.t$ — din cele două alternative o alege pe prima

false ::= $\lambda t\ f.f$ — din cele două alternative o alege pe a doua

`if` ::= $\lambda c\ then\ else.c\ then\ else$ — pur și simplu folosim valoarea de adevăr pentru a alege între alternative
`if` *false* $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x)$

Operații Booleene

true ::= $\lambda t\ f.t$ — din cele două alternative o alege pe prima

false ::= $\lambda t\ f.f$ — din cele două alternative o alege pe a doua

if ::= $\lambda c\ then\ else.c\ then\ else$ — pur și simplu folosim valoarea de adevăr pentru a alege între alternative

if *false* $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x) \rightarrow_\beta^3$

false $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x) \rightarrow_\beta^2 \lambda x.x$

and ::= $\lambda b1\ b2.$ **if** $b1\ b2$ *false* sau $\lambda b1\ b2.b1\ b2\ b1$

and *true false*

Operații Booleene

true ::= $\lambda t\ f.t$ — din cele două alternative o alege pe prima

false ::= $\lambda t\ f.f$ — din cele două alternative o alege pe a doua

if ::= $\lambda c\ then\ else.c\ then\ else$ — pur și simplu folosim valoarea de adevăr pentru a alege între alternative

if *false* $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x) \rightarrow_\beta^3$

false $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x) \rightarrow_\beta^2 \lambda x.x$

and ::= $\lambda b1\ b2.$ **if** $b1\ b2$ *false* sau $\lambda b1\ b2.b1\ b2\ b1$

and *true false* $\rightarrow_\beta^2$ *true false true* $\rightarrow_\beta^2$ *false*

or ::= $\lambda b1\ b2.$ **if** $b1$ *true* $b2$ sau $\lambda b1\ b2.b1\ b1\ b2$

or *true false*

Operații Booleene

true ::= $\lambda t\ f.t$ — din cele două alternative o alege pe prima

false ::= $\lambda t\ f.f$ — din cele două alternative o alege pe a doua

if ::= $\lambda c\ then\ else.c\ then\ else$ — pur și simplu folosim valoarea de adevăr pentru a alege între alternative

if *false* $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x) \rightarrow_\beta^3$

false $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x) \rightarrow_\beta^2 \lambda x.x$

and ::= $\lambda b1\ b2.$ **if** $b1\ b2$ *false* sau $\lambda b1\ b2.b1\ b2\ b1$

and *true false* $\rightarrow_\beta^2$ *true false true* $\rightarrow_\beta^2$ *false*

or ::= $\lambda b1\ b2.$ **if** $b1$ *true* $b2$ sau $\lambda b1\ b2.b1\ b1\ b2$

or *true false* $\rightarrow_\beta^2$ *true true false* $\rightarrow_\beta^2$ *true*

not ::= $\lambda b.$ **if** b *false true* sau $\lambda b\ t\ f.b\ f\ t$

not *true*

Operații Booleene

true ::= $\lambda t\ f.t$ — din cele două alternative o alege pe prima

false ::= $\lambda t\ f.f$ — din cele două alternative o alege pe a doua

if ::= $\lambda c\ then\ else.c\ then\ else$ — pur și simplu folosim valoarea de adevăr pentru a alege între alternative

if *false* $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x) \rightarrow_\beta^3$

false $(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x) \rightarrow_\beta^2 \lambda x.x$

and ::= $\lambda b1\ b2.$ **if** $b1\ b2$ *false* sau $\lambda b1\ b2.b1\ b2\ b1$

and *true false* $\rightarrow_\beta^2$ *true false true* $\rightarrow_\beta^2$ *false*

or ::= $\lambda b1\ b2.$ **if** $b1$ *true* $b2$ sau $\lambda b1\ b2.b1\ b1\ b2$

or *true false* $\rightarrow_\beta^2$ *true true false* $\rightarrow_\beta^2$ *true*

not ::= $\lambda b.$ **if** b *false true* sau $\lambda b\ t\ f.b\ f\ t$

not *true* $\rightarrow_\beta \lambda t\ f.true\ f\ t \rightarrow_\beta \lambda t\ f.f$

Perechi

Intuiție: Capabilitatea de a aplica o funcție componentelor perechii

Codificare: O funcție cu 3 argumente reprezentând componentele perechii și funcția ce vrem să o aplicăm lor.

`pair` ::= $\lambda x\ y.\lambda f.f\ x\ y$
Constructorul de perechi

Exemplu: `pair` 3 5 $\rightarrow_\beta^2$ $\lambda f.f$ 3 5

perechea $(3, 5)$ reprezintă capabilitatea de a aplica o funcție de două argumente lui 3 si apoi lui 5.

Operații pe perechi

$$\mathbf{pair} ::= \lambda x\ y.\lambda f.f\ x\ y$$

$$\mathbf{pair}\ xy \equiv_\beta f\ x\ y$$

$\mathbf{fst} ::= \lambda p.p\ \mathit{true}$ — *true* alege prima componentă

$\mathbf{fst}\ (\mathbf{pair}\ 3\ 5) \to_\beta \mathbf{pair}\ 3\ 5\ \mathit{true} \to_\beta^3 \mathit{true}\ 3\ 5 \to_\beta^2 3$

$\mathbf{snd} ::= \lambda p.p\ \mathit{false}$ — *false* alege a doua componentă

$\mathbf{snd}\ (\mathbf{pair}\ 3\ 5) \to_\beta \mathbf{pair}\ 3\ 5\ \mathit{false} \to_\beta^3 \mathit{false}\ 3\ 5 \to_\beta^2 5$

Numere naturale

Intuiție: Capabilitatea de a itera o funcție de un număr de ori peste o valoare inițială

Codificare: Un număr natural este o funcție cu 2 argumente

- `s` funcția care se iterează
- `z` valoarea inițială

$0 ::= \lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

Numere naturale

Intuiție: Capabilitatea de a itera o funcție de un număr de ori peste o valoare inițială

Codificare: Un număr natural este o funcție cu 2 argumente

- `s` funcția care se iterează
- `z` valoarea inițială

$0 ::= \lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

$1 ::= \lambda s\ z.s\ z$ — funcția iterată o dată aplicată valorii inițiale

Numere naturale

Intuiție: Capabilitatea de a itera o funcție de un număr de ori peste o valoare inițială

Codificare: Un număr natural este o funcție cu 2 argumente

- s funcția care se iterează
- z valoarea inițială

0 ::= $\lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

1 ::= $\lambda s\ z.s\ z$ — funcția iterată o dată aplicată valorii inițiale

2 ::= $\lambda s\ z.s(s\ z)$ — s iterată de 2 ori, aplicată valorii inițiale

Numere naturale

Intuiție: Capabilitatea de a itera o funcție de un număr de ori peste o valoare inițială

Codificare: Un număr natural este o funcție cu 2 argumente

- s funcția care se iterează
- z valoarea inițială

0 ::= $\lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

1 ::= $\lambda s\ z.s\ z$ — funcția iterată o dată aplicată valorii inițiale

2 ::= $\lambda s\ z.s(s\ z)$ — s iterată de 2 ori, aplicată valorii inițiale

...

8 ::= $\lambda s\ z.s(s(s(s(s(s(s(s\ z)))))))$

...

Numere naturale

Intuiție: Capabilitatea de a itera o funcție de un număr de ori peste o valoare inițială

Codificare: Un număr natural este o funcție cu 2 argumente

- s funcția care se iterează
- z valoarea inițială

0 ::= $\lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

1 ::= $\lambda s\ z.s\ z$ — funcția iterată o dată aplicată valorii inițiale

2 ::= $\lambda s\ z.s(s\ z)$ — s iterată de 2 ori, aplicată valorii inițiale

...

8 ::= $\lambda s\ z.s(s(s(s(s(s(s(s\ z)))))))$

...

Observație: $0 = \mathit{false}$

Operații aritmetice de bază

$0 ::= \lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

$8 ::= \lambda s\ z.s(s(s(s(s(s(s\ z))))))$

$\mathbf{S} ::= \lambda n\ s\ z.s\ (n\ s\ z)$ sau $\lambda n\ s\ z.n\ s\ (sz)$

$\mathbf{S}\ 0$

Operații aritmetice de bază

$0 ::= \lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

$8 ::= \lambda s\ z.s(s(s(s(s(s(s(s\ z)))))))$

$\mathbf{S} ::= \lambda n\ s\ z.s\ (n\ s\ z)$ sau $\lambda n\ s\ z.n\ s\ (sz)$

$\mathbf{S}\ 0 \rightarrow_\beta \lambda s\ z.0s(sz) \rightarrow_\beta^2 \lambda s\ z.sz = 1$

$+ ::= \lambda m\ n.m\ \ \mathbf{S}\ \ n$ sau $\lambda m\ n.\lambda s\ z.m\ s\ (n\ s\ z)$

$+\ 3\ 2$

Operații aritmetice de bază

$0 ::= \lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

$8 ::= \lambda s\ z.s(s(s(s(s(s(s(s\ z)))))))$

$\mathbf{S} ::= \lambda n\ s\ z.s\ (n\ s\ z)$ sau $\lambda n\ s\ z.n\ s\ (sz)$

$\mathbf{S}\ 0 \to_\beta \lambda s\ z.0s(sz) \to^2_\beta \lambda s\ z.sz = 1$

$+ ::= \lambda m\ n.m\ \ \mathbf{S}\ \ n$ sau $\lambda m\ n.\lambda s\ z.m\ s\ (n\ s\ z)$

$+\ 3\ 2 \to^2_\beta \lambda s\ z.3\ s\ (2\ s\ z) \to^2_\beta$

$\lambda s\ z.s(s(s(2\ s\ z))) \to^2_\beta \lambda s\ z.s(s(s(s(s\ z)))) = 5$

$* ::= \lambda m\ n.m\ (+\ n)\ 0$ sau $\lambda m\ n.\lambda s.m\ (n\ s)$

$*\ 3\ 2$

Operații aritmetice de bază

$0 ::= \lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

$8 ::= \lambda s\ z.s(s(s(s(s(s(s(s\ z)))))))$

$\mathbf{S} ::= \lambda n\ s\ z.s\ (n\ s\ z)$ sau $\lambda n\ s\ z.n\ s\ (sz)$

$\mathbf{S}\ 0 \to_\beta \lambda s\ z.0s(sz) \to^2_\beta \lambda s\ z.sz = 1$

$+ ::= \lambda m\ n.m\ \ \mathbf{S}\ \ n$ sau $\lambda m\ n.\lambda s\ z.m\ s\ (n\ s\ z)$

$+\ 3\ 2 \to^2_\beta \lambda s\ z.3\ s\ (2\ s\ z) \to^2_\beta$

$\lambda s\ z.s(s(s(2\ s\ z))) \to^2_\beta \lambda s\ z.s(s(s(s(s\ z)))) = 5$

$* ::= \lambda m\ n.m\ (+\ n)\ 0$ sau $\lambda m\ n.\lambda s.m\ (n\ s)$

$*\ 3\ 2 \to^2_\beta 3\ (+\ 2)0 \to^2_\beta +\ 2(+\ 2(+\ 2\ 0)) \to^4_\beta$

$+\ 2(+\ 2\ 2) \to^4_\beta +\ 2\ 4 \to^4_\beta 6$

$\mathbf{exp} ::= \lambda m\ n.n\ (*\ m)\ 1$ sau $\lambda m\ n.n\ m$

$\mathbf{exp}\ 3\ 2$

Operații aritmetice de bază

$0 ::= \lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

$8 ::= \lambda s\ z.s(s(s(s(s(s(s(s\ z)))))))$

$\mathbf{S} ::= \lambda n\ s\ z.s\ (n\ s\ z)$ sau $\lambda n\ s\ z.n\ s\ (sz)$

$\mathbf{S}\ 0 \to_\beta \lambda s\ z.0s(sz) \to^2_\beta \lambda s\ z.sz = 1$

$+ ::= \lambda m\ n.m\ \ \mathbf{S}\ \ n$ sau $\lambda m\ n.\lambda s\ z.m\ s\ (n\ s\ z)$

$+\ 3\ 2 \to^2_\beta \lambda s\ z.3\ s\ (2\ s\ z) \to^2_\beta$

$\lambda s\ z.s(s(s(2\ s\ z))) \to^2_\beta \lambda s\ z.s(s(s(s(s\ z)))) = 5$

$* ::= \lambda m\ n.m\ (+\ n)\ 0$ sau $\lambda m\ n.\lambda s.m\ (n\ s)$

$*\ 3\ 2 \to^2_\beta 3\ (+\ 2)0 \to^2_\beta +\ 2(+\ 2(+\ 2\ 0)) \to^4_\beta$

$+\ 2(+\ 2\ 2) \to^4_\beta +\ 2\ 4 \to^4_\beta 6$

$\mathbf{exp} ::= \lambda m\ n.n\ (*\ m)\ 1$ sau $\lambda m\ n.n\ m$

$\mathbf{exp}\ 3\ 2 \to^2_\beta 2\ 3 \to^2_\beta \lambda z.3(3\ z) \to_\beta$

$\lambda z.\lambda z'.3\ z(3\ z(3\ z\ z')) \equiv_\alpha \lambda s\ z.3\ s(3\ s(3\ s\ z)) \to^6_\beta$

$\lambda s\ z.s(s(s(s(s(s(s(s(s\ z)))))))) = 9$

Scăderi și comparații

Presupunem că avem o funcție predecesor $\mathbf{P}$ $x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$

Scăderi și comparații

Presupunem că avem o funcție predecesor $\mathbf{P}$ $x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$

- ::= $\lambda m\ n.n\ \mathbf{P}\ m$ — dă 0 dacă $m \leq n$

Scăderi și comparații

Presupunem că avem o funcție predecesor $\mathbf{P}\ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$

$\mathtt{-} ::= \lambda m\ n.n\ \mathbf{P}\ m$ — dă 0 dacă $m \leq n$

$\mathtt{?0=} ::= \lambda n.n(\lambda x.\mathit{false})\mathit{true}$ — testează dacă n e 0

Scăderi și comparații

Presupunem că avem o funcție predecesor $\mathbf{P}\ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$

$\mathbf{-} ::= \lambda m\ n.n\ \mathbf{P}\ m$ — dă 0 dacă $m \leq n$

$\mathbf{?0=} ::= \lambda n.n(\lambda x.\mathit{false})\mathit{true}$ — testează dacă n e 0

$\mathbf{<=} ::= \lambda m\ n.\ \mathbf{?0=}\ (\mathbf{-}\ m\ n)$

Scăderi și comparații

Presupunem că avem o funcție predecesor **P** $x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\texttt{-} &::= \lambda m\ n.n\ \mathbf{P}\ m \text{ — dă 0 dacă } m \leq n \\
\texttt{?0=} &::= \lambda n.n(\lambda x.\mathit{false})\mathit{true} \text{ — testează dacă } n \text{ e 0} \\
\texttt{<=} &::= \lambda m\ n.\ \texttt{?0=}\ (\texttt{-}\ m\ n) \\
\texttt{>} &::= \lambda m\ n.\ \mathbf{not}\ (\texttt{<=}\ m\ n) \\
\texttt{>=} &::= \lambda m\ n.\ \texttt{<=}\ n\ m \\
\texttt{<} &::= \lambda m\ n.\ \texttt{>}\ n\ m
\end{aligned}$$

Scăderi și comparații

Presupunem că avem o funcție predecesor **P** $x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\texttt{-} &::= \lambda m\ n.n\ \mathbf{P}\ m \text{ — dă 0 dacă } m \leq n \\
\texttt{?0=} &::= \lambda n.n(\lambda x.\mathit{false})\mathit{true} \text{ — testează dacă } n \text{ e 0} \\
\texttt{<=} &::= \lambda m\ n.\ \texttt{?0=}\ (\texttt{-}\ m\ n) \\
\texttt{>} &::= \lambda m\ n.\ \mathbf{not}\ (\texttt{<=}\ m\ n) \\
\texttt{>=} &::= \lambda m\ n.\ \texttt{<=}\ n\ m \\
\texttt{<} &::= \lambda m\ n.\ \texttt{>}\ n\ m \\
\texttt{=} &::= \lambda m\ n.\ \mathbf{and}\ (\texttt{<=}\ m\ n)\ (\texttt{>=}\ m\ n) \\
\texttt{<>} &::= \lambda m\ n.\ \mathbf{not}\ (\texttt{=}\ m\ n)
\end{aligned}$$

Problemă

Cum definim funcția **P**?

Definirea funcției $\mathbf{P}$ folosind perechi

$$\mathbf{P}\ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

Definirea funcției $\mathbf{P}$ folosind perechi

$$\mathbf{P}\ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{P}'' = \lambda n.n\ \mathbf{S}''\ (\mathbf{pair}\ 0\ 0)$$

Definirea funcției $\mathbf{P}$ folosind perechi

$$\mathbf{P}\ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{P}'' = \lambda n.n\ \mathbf{S}''\ (\mathbf{pair}\ 0\ 0)$$

$$\mathbf{S}'' = \lambda p.(\lambda x.\ \mathbf{pair}\ x(\mathbf{S}\ x))\ (\mathbf{snd}\ p)$$

Definirea funcției $\mathbf{P}$ folosind perechi

$$\mathbf{P}\ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{P''} = \lambda n.n\ \mathbf{S''}\ (\mathbf{pair}\ 0\ 0)$$

$$\mathbf{S''} = \lambda p.(\lambda x.\ \mathbf{pair}\ x(\mathbf{S}\ x))\ (\mathbf{snd}\ p)$$

$$\mathbf{P} = \lambda n.\ \mathbf{fst}\ (\mathbf{P''}\ n)$$

Definirea funcției $\mathbf{P}$ folosind perechi

$$\mathbf{P}\ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{P''} = \lambda n.n\ \mathbf{S''}\ (\mathbf{pair}\ 0\ 0)$$

$$\mathbf{S''} = \lambda p.(\lambda x.\ \mathbf{pair}\ x(\mathbf{S}\ x))\ (\mathbf{snd}\ p)$$

$$\mathbf{P} = \lambda n.\ \mathbf{fst}\ (\mathbf{P''}\ n)$$

$\mathbf{P}\ 2 \to_\beta \mathbf{fst}\ (\mathbf{P''}\ 2) \to_\beta \mathbf{fst}\ (2\ \mathbf{S''}\ (\mathbf{pair}\ 0\ 0)) \to_\beta^2$
$\mathbf{fst}\ (\mathbf{S''}\ (\mathbf{S''}\ (\mathbf{pair}\ 0\ 0))) \to_\beta \mathbf{fst}\ (\mathbf{S''}\ (\mathbf{S''}\ (\mathbf{pair}\ 0\ 0))) \to_\beta$
$\mathbf{fst}\ (\mathbf{S''}\ ((\lambda x.\ \mathbf{pair}\ x(\mathbf{S}\ x))\ (\mathbf{snd}\ (\mathbf{pair}\ 0\ 0)))) \to_\beta^6$
$\mathbf{fst}\ (\mathbf{S''}\ ((\lambda x.\ \mathbf{pair}\ x(\mathbf{S}\ x))\ 0)) \to_\beta \mathbf{fst}\ (\mathbf{S''}\ (\mathbf{pair}\ 0(\mathbf{S}\ 0))) \to_\beta^8$
$\mathbf{fst}\ (\mathbf{pair}\ (\mathbf{S}\ 0)(\mathbf{S}\ (\mathbf{S}\ 0))) \to_\beta^6 \mathbf{S}\ 0 \to_\beta^3 1$

Funcția predecesor — definiție alternativă directă

Idee 1: $\mathbf{P} ::= \lambda n.\ \mathbf{?0}\ n\ 0\ (\mathbf{P}'\ n)$ — am tratat primul caz. acum vrem o funcție $\mathbf{P}'$ care calculeaza $n - 1$ dacă $n \neq 0$

Idee 2: folosim iterația $\mathbf{P}' ::= \lambda n.n\ \mathbf{S}'\ Z'$, unde

- $\mathbf{S}'$ e un fel de succesor
- Z' e un fel de -1, i.e. $\mathbf{S}'\ Z' = 0$

$\mathbf{S}' ::= \lambda n.n\ \mathbf{S}\ 1$

$Z' ::= \lambda s\ z.0$ — Z' nu e codificarea unui număr
Dar se verifică că $\mathbf{S}'\ Z' \to_\beta Z'\ \mathbf{S}\ 1 \to_\beta^2 0$

Totul e OK deoarece $\mathbf{P}'$ e aplicată **doar** pe numere diferite de 0.

$\mathbf{P} ::= \lambda n.\ \mathbf{?0}\ n\ 0\ (n\ (\lambda n.n\ \ \mathbf{S}\ 1)\ (\lambda s\ z.0))$

Liste

Intuiție: Capabilitatea de a agrega o listă

Codificare: O funcție cu 2 argumente
funcția de agregare și valoarea inițială

null ::= $\lambda a\ i.i$ — lista vidă

cons ::= $\lambda x\ l.\lambda a\ i.a\ x\ (l\ a\ i)$
Constructorul de liste

Exemplu: **cons** 3 (**cons** 5 **null**) $\rightarrow_\beta^2 \lambda a\ i.a\ 3$ (**cons** 5 **null** $a\ i$) $\rightarrow_\beta^4 \lambda a\ i.a\ 3\ (a\ 5\ (\textbf{null}\ a\ i)) \rightarrow_\beta^2 \lambda a\ i.a\ 3\ (a\ 5\ i)$

Lista $[3, 5]$ reprezintă capabilitatea de a agrega elementele 3 si apoi 5 dată fiind o funcție de agregare a și o valoare implicită i.
Pentru aceste liste, operația de bază este `foldr`.

Operații pe liste

null ::= $\lambda a\ i.i$ — lista vidă

cons ::= $\lambda x\ l.\lambda a\ i.a\ x\ (l\ a\ i)$

Operații pe liste

`null` ::= $\lambda a\ i.i$ — lista vidă

`cons` ::= $\lambda x\ l.\lambda a\ i.a\ x\ (l\ a\ i)$

`?null=` ::= $\lambda l.l\ (\lambda x\ v.\mathit{false})\ \mathit{true}$

Operații pe liste

null ::= $\lambda a\ i.i$ — lista vidă

cons ::= $\lambda x\ l.\lambda a\ i.a\ x\ (l\ a\ i)$

?null= ::= $\lambda l.l\ (\lambda x\ v.\mathit{false})\ \mathit{true}$

head ::= $\lambda d\ l.l\ (\lambda x\ v.x)\ d$

primul element al listei, sau d dacă lista e vidă

Operații pe liste

null ::= $\lambda a\ i.i$ — lista vidă

cons ::= $\lambda x\ l.\lambda a\ i.a\ x\ (l\ a\ i)$

?null= ::= $\lambda l.l\ (\lambda x\ v.\mathit{false})\ \mathit{true}$

head ::= $\lambda d\ l.l\ (\lambda x\ v.x)\ d$
primul element al listei, sau d dacă lista e vidă

tail ::= $\lambda l.\ \mathbf{fst}\ (l\ (\lambda x\ p.\ \mathbf{pair}\ (\mathbf{snd}\ p)\ (\mathbf{cons}\ x\ (\mathbf{snd}\ p)))\ (\mathbf{pair\ null\ null}))$
coada listei, sau lista vidă dacă lista e vidă

foldr ::= $\lambda f\ i\ l.l\ f\ i$

map ::= $\lambda f\ l.l\ (\lambda x\ t.\ \mathbf{cons}\ (f\ x)\ t)\ \ \mathbf{null}$

filter ::= $\lambda p\ l.l\ (\lambda x\ t.p\ x\ (\mathbf{cons}\ x\ t)\ t)\ \ \mathbf{null}$

Factorial, Fibonacci, împărțire folosind perechi

$$\texttt{fact} ::= \lambda n.\ \textbf{snd}\ (n\ (\lambda p.\ \textbf{pair}\ (\textbf{S}\ (\textbf{fst}\ p))(\textbf{*}\ (\textbf{fst}\ p)(\textbf{snd}\ p)))\ (\textbf{pair}\ 1\ 1))$$

Factorial, Fibonacci, împărțire folosind perechi

$$\texttt{fact} ::= \lambda n.\ \textbf{snd}\ (n\ (\lambda p.\ \textbf{pair}\ (\textbf{S}\ (\textbf{fst}\ p))(\textbf{*}\ (\textbf{fst}\ p)(\textbf{snd}\ p)))\ (\textbf{pair}\ 1\ 1))$$

$$\texttt{fib} ::= \lambda n.\ \textbf{fst}\ (n\ (\lambda p.\ \textbf{pair}\ (\textbf{snd}\ p)(\textbf{+}\ (\textbf{fst}\ p)\ (\textbf{snd}\ p)))\ (\textbf{pair}\ 0\ 1))$$

Factorial, Fibonacci, împărțire folosind perechi

$$\texttt{fact} ::= \lambda n.\ \textbf{snd}\ (n\ (\lambda p.\ \textbf{pair}\ (\textbf{S}\ (\textbf{fst}\ p))(*\ (\textbf{fst}\ p)(\textbf{snd}\ p)))\ (\textbf{pair}\ 1\ 1))$$

$$\texttt{fib} ::= \lambda n.\ \textbf{fst}\ (n\ (\lambda p.\ \textbf{pair}\ (\textbf{snd}\ p)(+\ (\textbf{fst}\ p)\ (\textbf{snd}\ p)))\ (\textbf{pair}\ 0\ 1))$$

$$\texttt{divMod} ::= \lambda m\ n.m\ (\lambda p.\ >\ n\ (\textbf{snd}\ p)\ p\ (\textbf{pair}\ (\textbf{S}\ (\textbf{fst}\ p))\ (-\ (\textbf{snd}\ p)\ n)))\ (\textbf{pair}\ 0\ m)$$

Factorial, Fibonacci, împărțire folosind perechi

$$\texttt{fact} ::= \lambda n.\ \texttt{snd}\ (n\ (\lambda p.\ \texttt{pair}\ (\texttt{S}\ (\texttt{fst}\ p))(\texttt{*}\ (\texttt{fst}\ p)(\texttt{snd}\ p)))\ (\texttt{pair}\ 1\ 1))$$

$$\texttt{fib} ::= \lambda n.\ \texttt{fst}\ (n\ (\lambda p.\ \texttt{pair}\ (\texttt{snd}\ p)(\texttt{+}\ (\texttt{fst}\ p)\ (\texttt{snd}\ p)))\ (\texttt{pair}\ 0\ 1))$$

$$\texttt{divMod} ::= \lambda m\ n.m\ (\lambda p.\ >\ n\ (\texttt{snd}\ p)\ p\ (\texttt{pair}\ (\texttt{S}\ (\texttt{fst}\ p))\ (\texttt{-}\ (\texttt{snd}\ p)\ n)))\ (\texttt{pair}\ 0\ m)$$

Observații

- Nu toate funcțiile pot fi definite prin iterare fixată
- Pentru **divMod** obținem răspunsul (de obicei) din mult mai puțin de m iterații

Recursie

- există termeni care **nu** pot fi redușI la o β-formă normală, de exemplu
  $(\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x) \rightarrow_\beta (\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)$
  În λ-calcul putem defini calcule infinite!

Recursie

- există termeni care **nu** pot fi redușiși la o β-formă normală, de exemplu
  $(\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x) \rightarrow_\beta (\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)$
  În λ-calcul putem defini calcule infinite!
- Dacă notăm $Af ::= \lambda x.f\ (x\ x)$ atunci
  $Af\ Af =_\beta (\lambda x.f\ (x\ x))\ Af =_\beta f\ (Af\ Af)$
- Dacă notăm $Yf ::= Af\ Af$ atunci $Yf =_\beta f\ Yf$.

Recursie

- există termeni care **nu** pot fi redușiși la o β-formă normală, de exemplu
  $(\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x) \rightarrow_\beta (\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)$
  În λ-calcul putem defini calcule infinite!
- Dacă notăm $Af ::= \lambda x.f\ (x\ x)$ atunci
  $Af\ Af =_\beta (\lambda x.f\ (x\ x))\ Af =_\beta f\ (Af\ Af)$
- Dacă notăm $Yf ::= Af\ Af$ atunci $Yf =_\beta f\ Yf$.
- Fie $Y ::= \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$
  Atunci $Y\ f =_\beta f\ (Y\ f)$

Puncte fixe

- pentru o funcție $f : X \to X$ un **punct fix** este un element $x_0 \in X$ cu $f(x_0) = x_0$.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x + 1$ nu are puncte fixe
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$ are punctul fix $x = 0$

Puncte fixe

- pentru o funcție $f : X \to X$ un **punct fix** este un element $x_0 \in X$ cu $f(x_0) = x_0$.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x + 1$ nu are puncte fixe
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$ are punctul fix $x = 0$
- În λ-calcul

$$\mathtt{Y} ::= \quad \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))(\lambda x.f\ (x\ x))$$

are proprietatea că $Y\ f =_\beta f\ (Y\ f)$, deci $Y\ f$ este un **punct fix** pentru f.

Puncte fixe

- pentru o funcție $f : X \to X$ un **punct fix** este un element $x_0 \in X$ cu $f(x_0) = x_0$.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x + 1$ nu are puncte fixe
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$ are punctul fix $x = 0$
- În λ-calcul

$$\mathtt{Y} ::= \quad \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))(\lambda x.f\ (x\ x))$$

are proprietatea că $Y\ f =_\beta f\ (Y\ f)$, deci $Y\ f$ este un **punct fix** pentru f.

Y se numește **combinator de punct fix**.

Puncte fixe

- pentru o funcție $f : X \to X$ un **punct fix** este un element $x_0 \in X$ cu $f(x_0) = x_0$.
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x + 1$ nu are puncte fixe
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$ are punctul fix $x = 0$
- În λ-calcul

$$\mathtt{Y} ::= \quad \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))(\lambda x.f\ (x\ x))$$

are proprietatea că $Y\ f =_\beta f\ (Y\ f)$, deci $Y\ f$ este un **punct fix** pentru f.

Y se numește **combinator de punct fix**.

Avem $Y\ f =_\beta f\ (Y\ f) =_\beta f\ (f\ (Y\ f)) =_\beta \ldots$

Putem folosi Y pentru a obține apeluri recursive!

Puncte fixe - funcția factorial

$$\texttt{fact} ::= \lambda n.\ \texttt{if}\ (\texttt{?0}=\ n)\ 1\ (\texttt{*}\ n\ (\mathit{fact}\ (\texttt{P}\ \ n)))$$

Puncte fixe - funcția factorial

$$\texttt{fact} ::= \lambda n.\ \texttt{if}\ (\texttt{?0}=\ n)\ 1\ (\texttt{*}\ n\ (\mathit{fact}\ (\texttt{P}\ \ n)))$$

Această definiție nu este corectă conform regulilor noastre, cum procedăm?

Puncte fixe - funcția factorial

$$\texttt{fact} ::= \lambda n.\ \texttt{if}\ (\texttt{?0}=\ n)\ 1\ (\texttt{*}\ n\ (\mathit{fact}\ (\texttt{P}\ \ n)))$$

Această definiție nu este corectă conform regulilor noastre, cum procedăm?

- Pasul 1: abstractizăm, astfel încât construcția să fie corectă

$$\texttt{factA} ::= \lambda f.\lambda n.\ \texttt{if}\ (\texttt{?0}=\ n)\ 1\ (\texttt{*}\ n\ (f\ (\texttt{P}\ \ n)))$$

Puncte fixe - funcția factorial

$$\texttt{fact} ::= \lambda n.\ \texttt{if}\ (\texttt{?0}=\ n)\ 1\ (\texttt{*}\ n\ (\mathit{fact}\ (\texttt{P}\ \ n)))$$

Această definiție nu este corectă conform regulilor noastre, cum procedăm?

- Pasul 1: abstractizăm, astfel încât construcția să fie corectă

  $$\texttt{factA} ::= \lambda f.\lambda n.\ \texttt{if}\ (\texttt{?0}=\ n)\ 1\ (\texttt{*}\ n\ (f\ (\texttt{P}\ \ n)))$$

- Pasul 2: aplicăm combinatorul de punct fix

  $$\texttt{fact} ::= Y\ \ \texttt{factA}$$

Puncte fixe - funcția factorial

$$\texttt{fact} ::= \lambda n.\ \texttt{if}\ (\texttt{?0}=\ n)\ 1\ (\texttt{*}\ n\ (\mathit{fact}\ (\texttt{P}\ \ n)))$$

Această definiție nu este corectă conform regulilor noastre, cum procedăm?

- Pasul 1: abstractizăm, astfel încât construcția să fie corectă

  $$\texttt{factA} ::= \lambda f.\lambda n.\ \texttt{if}\ (\texttt{?0}=\ n)\ 1\ (\texttt{*}\ n\ (f\ (\texttt{P}\ \ n)))$$

- Pasul 2: aplicăm combinatorul de punct fix

  $$\texttt{fact} ::= Y\ \ \texttt{factA}$$

  Deoarece $Y\ \ \texttt{factA} =_\beta \texttt{factA}\ (Y\ \ \texttt{factA})$ obținem

  $$\texttt{fact} =_\beta \lambda n.\ \texttt{if}\ (\texttt{?0}=\ n)\ 1\ (\texttt{*}\ n\ (\ \mathit{fact}\ (\texttt{P}\ \ n))$$

divMod — definiție recursivă

Definiția primitiv recursivă (fără Y)

$$\texttt{divMod} ::= \lambda m\ n.m\ (\lambda p.\ >\ n\ (\texttt{snd}\ p)\ p\ (\texttt{pair}\ (\texttt{S}\ (\texttt{fst}\ p))\ (-\ (\texttt{snd}\ p)\ n)))\ (\texttt{pair}\ 0\ m)$$

Definiția recursivă (incorectă)

$$\texttt{divMod} ::= \lambda m\ n.\ \texttt{?0=}\ n\ (\texttt{pair}\ 0\ m)\ (\texttt{divMod'}\ \ 0\ m) \text{ where}$$

$$\texttt{divMod'} ::= \lambda q\ r.\ >\ n\ r\ (\texttt{pair}\ q\ r)\ (\texttt{divMod'}\ \ (\texttt{S}\ q)(-\ m\ n))$$

Definiția recursivă (corectă, folosind Y)

$$\texttt{divMod} ::= \lambda m\ n.\ \texttt{?0=}\ n\ \ (\texttt{pair}\ 0\ m)\ (\texttt{Y}\ (\lambda f.\lambda q\ r.\ >\ n\ r\ (\texttt{pair}\ q\ r)\ (f\ (\texttt{S}\ q)\ (-\ m\ n)))\ 0\ m)$$

Apel prin valoare (Call by Value)

Pentru a reduce $e_1 \ \ e_2$:

- Reducem e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reducem e_2 până la o valoare v
- Apoi reducem $(\lambda x.e) \ \ v$ la $[v/x]e$

Nu simplificăm sub λ

Apel prin valoare (Call by Value)

Pentru a reduce $e_1 \ \ e_2$:

- Reducem e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reducem e_2 până la o valoare v
- Apoi reducem $(\lambda x.e) \ \ v$ la $[v/x]e$

Nu simplificăm sub λ

$\mathbf{?0} = 0\ (+\ 2\ 1)\ (+\ 3\ 4)$

$\rightarrow_{\beta(v)} 0\ (\lambda x.false)\ true\ (+\ 2\ 1)\ (+\ 3\ 4)$

$\rightarrow^2_{\beta(v)} true\ (+\ 2\ 1)\ (+\ 3\ 4)$

$\rightarrow^2_{\beta(v)} true\ (\lambda s\ z.2\ s\ (1\ s\ z))\ (+\ 3\ 4)$

$\rightarrow_{\beta(v)} (\lambda f.\lambda s\ z.2\ s\ (1\ s\ z))\ (+\ 3\ 4)$

$\rightarrow^2_{\beta(v)} (\lambda f.\lambda s\ z.2\ s\ (1\ s\ z))\ (\lambda s\ z.3\ s\ (4\ s\ z))$

$\rightarrow_{\beta(v)} \lambda s\ z.2\ s\ (1\ s\ z)$

$\not\rightarrow_{\beta(v)}$

$\mathbf{?0} ::= (\lambda n.n\ (\lambda x.false)\ true)$

$0 ::= (\lambda s\ z.z)$

$+ ::= (\lambda m\ n\ s\ z.m\ s\ (n\ s\ z))$

$true ::= \lambda t\ f.t$

Apel prin nume (Limbaje pur funcționale)

Pentru a reduce $e_1 \ e_2$:

- Reducem e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reducem $(\lambda x.e) \ e_2$ la $[e_2/x]e$

Nu simplificăm sub λ nici în dreapta aplicației

Apel prin nume (Limbaje pur funcționale)

Pentru a reduce $e_1\ \ e_2$:

- Reducem e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reducem $(\lambda x.e)\ \ e_2$ la $[e_2/x]e$

Nu simplificăm sub λ nici în dreapta aplicației

?0= 0 (+ 2 1) (+ 3 4)
$\rightarrow_{\beta(N)}$ 0 ($\lambda x.false$) *true* (+ 2 1) (+ 3 4)
$\rightarrow^2_{\beta(N)}$ *true* (+ 2 1) (+ 3 4)
$\rightarrow^2_{\beta(N)}$ (+ 2 1)
$\rightarrow^2_{\beta(N)}$ ($\lambda s\ z.2\ s\ (1\ s\ z)$)
$\twoheadrightarrow_{\beta(N)}$

?0=$::=$ ($\lambda n.n\ (\lambda x.false)\ true$)
$0 ::= (\lambda s\ z.z)$
$true ::= \lambda t\ f.t$
+$::=$ ($\lambda m\ n\ s\ z.m\ s\ (n\ s\ z)$)

Evaluare lenesă

Pentru a reduce $e_1 \ \ e_2$:

- Reduc e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reduc corpul funcției e până la un e' care are nevoie de x
- Apoi reduc e_2 până la o valoare v
- Apoi reduc $(\lambda x.e') \ \ v$ la $[v/x]e'$

Evaluare nerestricționată

Pentru a reduce $e_1 \ \ e_2$

- Reducem fie e_1 fie e_2
- Putem reduce corpurile funcțiilor
- Oricând avem $(\lambda x.e')e''$, o putem (sau nu) reduce la $[e''/x]e'$
- Reduce până la o formă normală

Nu garantează găsirea unei forme normale

Evaluare „normală“

Pentru a reduce $e_1 \ \ e_2$

- Reducem mereu cel mai din stânga redex din cele de mai sus
- Reducem $(\lambda x.e')e''$ la $[e''/x]e'$
- Reducem e_1 (putem reduce și corpurile funcțiilor)
- Dacă $e_1 \not\mapsto$, reducem e_2
- Reduce până la o formă normală
- Garantează găsirea unei forme normale

Apel prin valoare

Pentru a reduce $e_1 \ \ e_2$:

- Reducem e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reducem e_2 până la o valoare v
- Apoi reducem $(\lambda x.e) \ \ v$ la $[v/x]e$

Reguli

$$\text{(V@S)} \quad \frac{e_1 \to_\beta e_1'}{e_1 \ \ e_2 \to_\beta e_1' \ \ e_2}$$

$$\text{(V@D)} \quad \frac{e_2 \to_\beta e_2'}{(\lambda x.e_1) \ \ e_2 \to_\beta (\lambda x.e_1) \ \ e_2'}$$

$$\text{(V@)} \quad (\lambda x.e_1) \ \ v_2 \to_\beta e \quad \textit{dacă } e = [v_2/x]e_1$$

Apel prin nume

Pentru a reduce $e_1 \ \ e_2$:

- Reducem e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reducem $(\lambda x.e) \ \ e_2$ la $[e_2/x]e$

Reguli

$$\text{(N@S)} \quad \frac{e_1 \to_\beta e_1'}{e_1 \ \ e_2 \to_\beta e_1' \ \ e_2}$$

$$\text{(N@)} \quad (\lambda x.e_1) \ \ e_2 \to_\beta e \quad \textit{dacă } e = [e_2/x]e_1$$

Evaluare nerestricționată

Pentru a reduce $e_1 \;\; e_2$

- Reducem fie e_1 fie e_2
- Putem reduce corpurile funcțiilor
- Oricând avem $(\lambda x.e')e''$, o putem (sau nu) reduce la $[e''/x]e'$

Reguli

(NR@S) $$\frac{e_1 \to e_1'}{e_1 \;\; e_2 \to e_1' \;\; e_2}$$

(NR@D) $$\frac{e_2 \to e_2'}{e_1 \;\; e_2 \to e_1 \;\; e_2'}$$

(NRFUND) $$\frac{e \to e'}{\lambda x.e \to \lambda x.e'}$$

(NR@) $(\lambda x.e_1) \;\; e_2 \to e \quad$ *dacă* $e = [e_2/x]e_1$

Evaluare „normală“

Pentru a reduce $e_1 \ e_2$

- Reducem mereu cel mai din stânga redex din cele de mai sus
- Reducem $(\lambda x.e')e''$ la $[e''/x]e'$
- Reducem e_1 (putem reduce și corpurile funcțiilor)
- Dacă $e_1 \not\mapsto$, reducem e_2

Reguli

(NOR@) $(\lambda x.e_1) \ e_2 \to e$ *dacă* $e = [e_2/x]e_1$

(NOR@S) $$\frac{e_1 \to e_1'}{e_1 \ e_2 \to e_1' \ e_2}$$ *dacă* e_1 nu e încă funcție

(NORFUND) $$\frac{e \to e'}{\lambda x.e \to \lambda x.e'}$$

(NOR@D) $$\frac{e_1 \not\mapsto \quad e_2 \to e_2'}{e_1 \ e_2 \to e_1 \ e_2'}$$

Evaluare lenesă

Pentru a reduce $e_1 \ \ e_2$:

- Reduc e_1 până la o funcție $\mathbf{fun}\ (x : T) \to e$
- Apoi reduc corpul funcției e până la un e' care are nevoie de x
- Apoi reduc e_2 până la o valoare v
- Apo reduc $(\lambda x.e') \ \ v$ la $[v/x]e'$

Reguli?

E mai complicat decât pare, deoarece trebuie să ne dăm seama că e' are nevoie de x.

Contexte de evaluare

- Găsirea redex-ului prin analiză sintactică
- Putem înlocui regulile structurale cu reguli gramaticale

Sintaxă: $e ::= x \mid \lambda x.e \mid e\ e$

Reguli structurale

$$\frac{e_1 \longrightarrow_\beta e_1'}{e_1\ e_2 \longrightarrow_\beta e_1'\ e_2}$$

$$\frac{e_2 \longrightarrow_\beta e_2'}{\langle(\lambda x.e_1)\ e_2 \longrightarrow_\beta (\lambda x.e_1)\ e_2'}$$

Contexte de evaluare

$$\begin{array}{lcl} c & ::= & \blacksquare \\ & \mid & c\ e \\ & \mid & (\lambda x.e)\ c \end{array}$$

Instanțierea unui context c cu expresia e

$$c[e] = [e/\blacksquare]c$$

Contexte de evaluare

Sintaxă: $e ::= x \mid \lambda x.e \mid e\ e$

Contexte: $c ::= \blacksquare \mid c\ e \mid (\lambda x.e)\ c$

Exemple de contexte

Corecte	Greșite
$\blacksquare$	5
$3\ \blacksquare$	$true\ x\ \blacksquare$

Exemple de contexte instanțiate

- $\blacksquare[x\ 1] = x\ 1$
- $(9\ (\blacksquare\ 7))[x] = 9\ (x\ 7)$
- $(9\ (\blacksquare\ 7))[5] = 9\ (5\ 7)$

Semantica Operațională Contextuală

Un pas de execuție folosind contexte de evaluare

- Descompune expresia în contextul c și redex-ul r
- Aplică o regulă operațională asupra lui r obținând e
- Pune e în contextul inițial, obținând $c[e]$

$$\frac{r \longrightarrow_\beta e}{c[r] \longrightarrow_\beta c[e]}$$

Evaluare lenesă folosind Semantica Contextuală

Contexte de evaluare pentru aplicație

$$
\begin{array}{rcl}
c & ::= & \blacksquare \\
 & | & c\ e \\
 & | & (\lambda x.c)\ e \\
 & | & (\lambda x.c[x])\ c
\end{array}
$$

Regulă de evaluare pentru aplicație

$$(\lambda x.c[x])\ v \rightarrow (\lambda x.c[v])\ v$$

Curs 8

2020-2021

Fundamentele limbajelor de programare

Cuprins

Programare logică & Prolog

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.
- Unul din sloganurile programării logice:

  Program = Logică + Control (R. Kowalski)

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.
- Unul din sloganurile programării logice:

  Program = Logică + Control (R. Kowalski)

- Programarea logică poate fi privită ca o deducție controlată.

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.
- Unul din sloganurile programării logice:

  Program = Logică + Control (R. Kowalski)

- Programarea logică poate fi privită ca o deducție controlată.
- Un program scris într-un limbaj de programare logică este

  o listă de formule într-o logică

  ce exprimă fapte și reguli despre o problemă.

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.
- Unul din sloganurile programării logice:

  Program = Logică + Control (R. Kowalski)

- Programarea logică poate fi privită ca o deducție controlată.
- Un program scris într-un limbaj de programare logică este

  o listă de formule într-o logică

  ce exprimă fapte și reguli despre o problemă.
- Exemple de limbaje de programare logică:
  - Prolog
  - Answer set programming (ASP)
  - Datalog

Ce veți vedea la laborator

Prolog

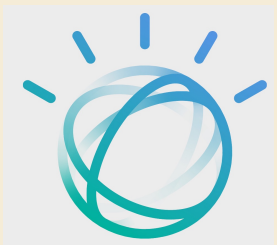
- bazat pe logica clauzelor Horn
- semantica operațională este bazată pe rezoluție
- este Turing complet
- vom folosi implementarea SWI-Prolog

Ce veți vedea la laborator

Prolog

- bazat pe logica clauzelor Horn
- semantica operațională este bazată pe rezoluție
- este Turing complet
- vom folosi implementarea SWI-Prolog

Limbajul Prolog este folosit pentru programarea sistemului IBM Watson!



Puteți citi mai multe detalii aici.

Learn Prolog Now! `http://www.let.rug.nl/bos/lpn/`

Programare logică - în mod idealist

- Un "program logic" este o colecție de proprietăți presupuse (sub formă de formule logice) despre lume (sau mai degrabă despre lumea programului).
- Programatorul furnizează și o proprietate (o formula logică) care poate să fie sau nu adevărată în lumea respectivă (întrebare, query).
- Sistemul determină dacă proprietatea aflată sub semnul întrebării este o consecință a proprietăților presupuse în program.
- Programatorul nu specifică metoda prin care sistemul verifică dacă întrebarea este sau nu consecință a programului.

Exemplu de program logic

$$
\begin{aligned}
\texttt{oslo} &\rightarrow \texttt{windy} \\
\texttt{oslo} &\rightarrow \texttt{norway} \\
\texttt{norway} &\rightarrow \texttt{cold} \\
\texttt{cold} \wedge \texttt{windy} &\rightarrow \texttt{winterIsComing} \\
&\qquad\quad \texttt{oslo}
\end{aligned}
$$

Exemplu de program logic

$$
\begin{aligned}
\texttt{oslo} &\rightarrow \texttt{windy} \\
\texttt{oslo} &\rightarrow \texttt{norway} \\
\texttt{norway} &\rightarrow \texttt{cold} \\
\texttt{cold} \wedge \texttt{windy} &\rightarrow \texttt{winterIsComing} \\
&\quad\ \texttt{oslo}
\end{aligned}
$$

Exemplu de întrebare

Este adevărat `winterIsComing`?

Putem să testăm în SWI-Prolog

Program:

```
windy :- oslo.
norway :- oslo.
cold :- norway.
winterIsComing :- windy, cold.
oslo.
```

Intrebare:

```
?- winterIsComing.
true
```

http://swish.swi-prolog.org/

Sintaxă: constante, variabile, termeni compuși

- Atomi: `sansa, 'Jon Snow', jon_snow`
- Numere: `23, 23.03,-1`

  Atomii și numerele sunt constante.
- Variabile: `X, Stark, _house`
- Termeni compuși: `father(eddard, jon_snow)`,
  `and(son(bran,eddard), daughter(arya,eddard))`
  - forma generală: atom(termen,. . ., termen)
  - atom-ul care denumește termenul se numește functor
  - numărul de argumente se numește aritate

Un mic exercițiu sintactic

Care din următoarele șiruri de caractere sunt constante și care sunt variabile în Prolog?

- ☐ vINCENT
- ☐ Footmassage
- ☐ variable23
- ☐ Variable2000
- ☐ big_kahuna_burger
- ☐ 'big kahuna burger'
- ☐ big kahuna burger
- ☐ 'Jules'
- ☐ _Jules
- ☐ '_Jules'

Un mic exercițiu sintactic

Care din următoarele șiruri de caractere sunt constante și care sunt variabile în Prolog?

- vINCENT – constantă
- Footmassage – variabilă
- variable23 – constantă
- Variable2000 – variabilă
- big_kahuna_burger – constantă
- 'big kahuna burger' – constantă
- big kahuna burger – nici una, nici alta
- 'Jules' – constantă
- _Jules – variabilă
- '_Jules' – constantă

Program în Prolog = bază de cunoștințe

Exemplu

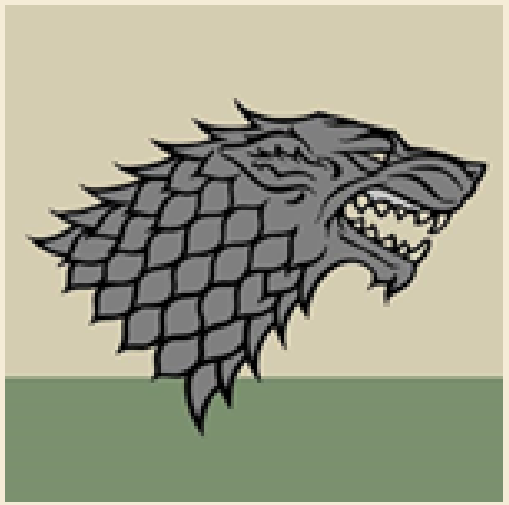
Un program în Prolog:

```
father(eddard,sansa).
father(eddard,jon_snow).

mother(catelyn,sansa).
mother(wylla,jon_snow).

stark(eddard).
stark(catelyn).

stark(X) :- father(Y,X),  stark(Y).
```



Un program în Prolog este o bază de cunoștințe (Knowledge Base).

Program în Prolog = mulțime de predicate

Practic, gândim un program în Prolog ca o mulțime de predicate cu ajutorul cărora descriem *lumea* (*universul*) programului respectiv.

Exemplu

```
father(eddard,sansa).
father(eddard,jon_snow).

mother(catelyn,sansa).
mother(wylla,jon_snow).

stark(eddard).
stark(catelyn).

stark(X) :- father(Y,X),  stark(Y).
```

Predicate:
father/2
mother/2
stark/1

Un program în Prolog

Program

- Un program în Prolog este format din reguli de forma

```
Head :- Body.
```

- Head este un predicat, iar Body este o secvență de predicate separate prin virgulă.
- Regulile fără `Body` se numesc fapte.

Program

- Un program în Prolog este format din reguli de forma

```
Head :- Body.
```

- Head este un predicat, iar Body este o secvență de predicate separate prin virgulă.
- Regulile fără `Body` se numesc fapte.

Exemplu

- Exemplu de regulă: `stark(X) :- father(Y,X), stark(Y).`
- Exemplu de fapt: `father(eddard, jon_snow).`

Interpretarea din punctul de vedere al logicii

- operatorul **:-** este implicația logică ←

Exemplu

```
winterfell(X) :- stark(X)
```

dacă `stark(X)` este adevărat, atunci `winterfell(X)` este adevărat.

Interpretarea din punctul de vedere al logicii

- operatorul `:-` este implicația logică $\leftarrow$

Exemplu

```
winterfell(X) :- stark(X)
```

dacă `stark(X)` este adevărat, atunci `winterfell(X)` este adevărat.

- virgula `,` este conjuncția $\wedge$

Exemplu

```
stark(X) :- father(Y,X), stark(Y)
```

dacă `father(Y,X)` și `stark(Y)` sunt adevărate,
atunci `stark(X)` este adevřat.

Interpretarea din punctul de vedere al logicii

- mai multe reguli cu același `Head` definesc același predicat, între defiții fiind un sau logic.

Exemplu

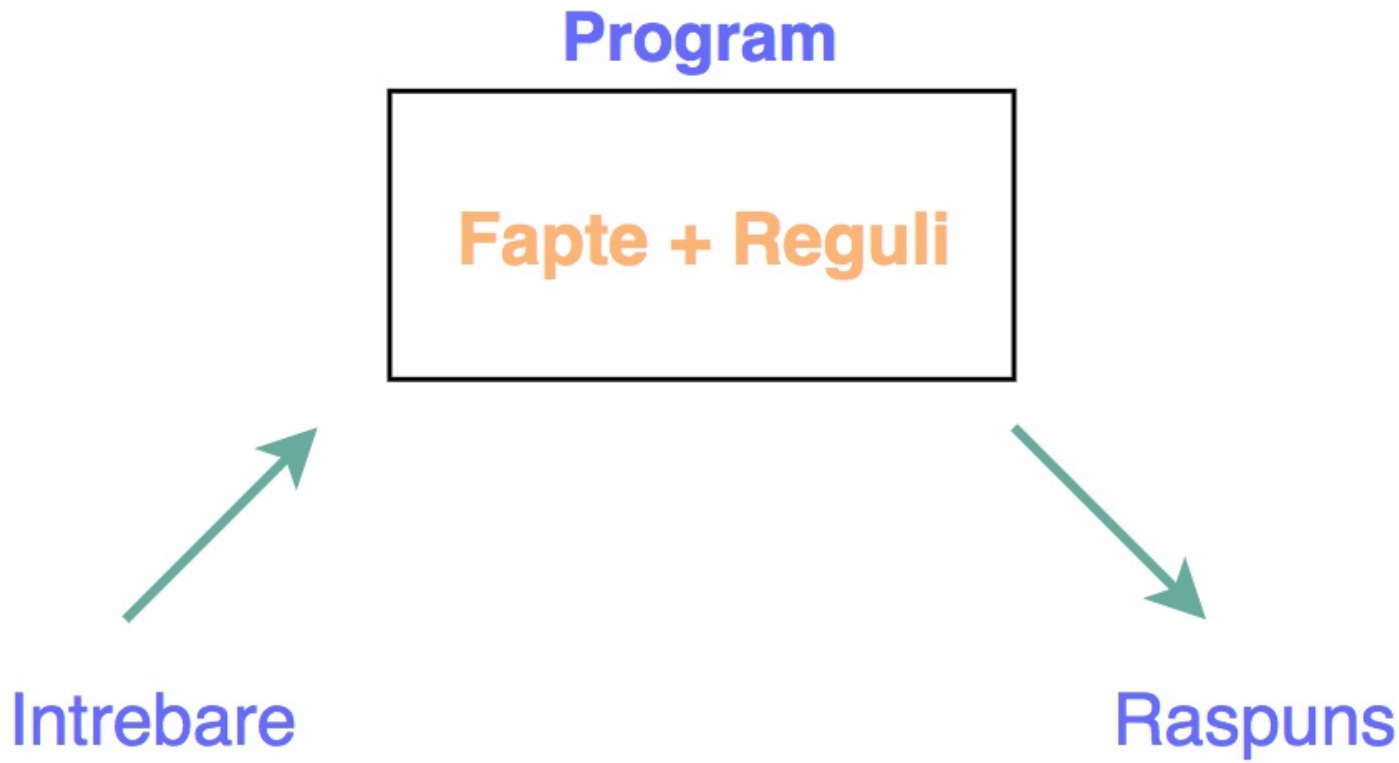
```
got_house(X) :- stark(X).
got_house(X) :- lannister(X).
got_house(X) :- targaryen(X).
got_house(X) :- baratheon(X).
```

dacă
`stark(X)` este adevărat sau `lannister(X)` este adevărat sau
`targaryen(X)` este adevărat sau `baratheon(X)` este adevărat,
atunci
`got_house(X)` este adevărat.

Un program în Prolog

Cum folosim un program în Prolog?

Întrebări în Prolog



Întrebări și ținte în Prolog

- Prolog poate răspunde la întrebări legate de consecințele relațiilor descrise într-un program în Prolog.
- Întrebările sunt de forma:

$$\texttt{?- predicat}_1\texttt{(...),...,predicat}_n\texttt{(...).}$$

- Prolog verifică dacă întrebarea este o consecință a relațiilor definite în program.
- Dacă este cazul, Prolog caută valori pentru variabilele care apar în întrebare astfel încât întrebarea să fie o consecință a relațiilor din program.
- un predicat care este analizat pentru a se răspunde la o întrebare se numește țintă (goal).

Întrebări în Prolog

Prolog poate da 2 tipuri de răspunsuri:

- `false` – în cazul în care întrebarea nu este o consecință a programului.
- `true` sau valori pentru variabilele din întrebare în cazul în care întrebarea este o consecință a programului.

Întrebări în Prolog

Prolog poate da 2 tipuri de răspunsuri:

- `false` – în cazul în care întrebarea nu este o consecință a programului.
- `true` sau valori pentru variabilele din întrebare în cazul în care întrebarea este o consecință a programului.

Exemplu

```
?- stark(jon_snow)
true
?- stark(wylla)
false
```

```
?- stark(X)
X = eddard ;
X = catelyn ;
X = sansa ;
X = jon_snow ;
false
```

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un raspuns, Prolog încearcă regulile în ordinea apariției lor.

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).  foo(b).  foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X).
X = a.
```

Pentru a răspunde la întrebare se caută o potrivire (unificator) între scopul `foo(X)` și baza de cunoștințe. Raspunsul este substituția care realizează potrivirea, în cazul nostru `X = a`.

Răspunsul la întrebare este găsit prin unificare!

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un raspuns, Prolog încearcă regulile în ordinea apariției lor.

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).  foo(b).  foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X).
X = a.

?- foo(d).
false
```

Dacaă nu se poate face potrivirea, răspunsul este false.

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un raspuns, Prolog încearcă regulile în ordinea apariției lor.

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).  foo(b).  foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X).
X = a.
```

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un raspuns, Prolog încearcă regulile în ordinea apariției lor.

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).  foo(b).  foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X).
X = a.
```

Dacă dorim mai multe răspunsuri, tastăm `;`

```
?- foo(X).
X = a ;
X = b ;
X = c.
```

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un raspuns, Prolog încearcă regulile în ordinea apariției lor.

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).
foo(b).
foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X).
```

```
?- trace.
true.

[trace]  ?- foo(X).
   Call: (8) foo(_4556) ? creep
   Exit: (8) foo(a) ? creep
X = a ;
   Redo: (8) foo(_4556) ? creep
   Exit: (8) foo(b) ? creep
X = b ;
   Redo: (8) foo(_4556) ? creep
   Exit: (8) foo(c) ? creep
X = c.
```

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un raspuns, Prolog redenumește variabilele.

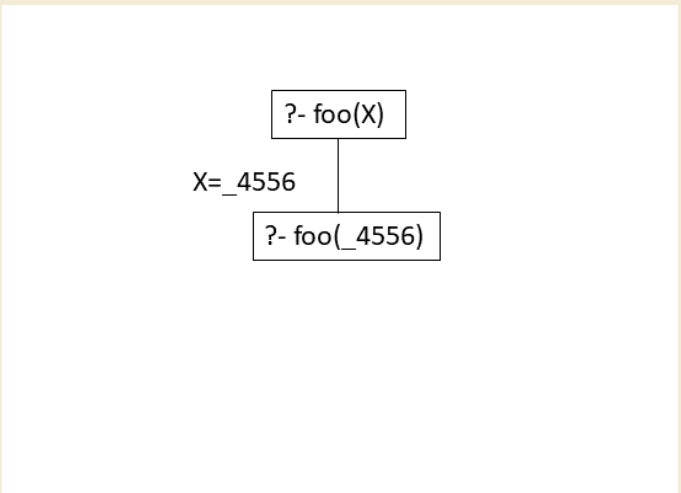
Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).
foo(b).
foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X).
```



Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un raspuns, Prolog încearcă regulile în ordinea apariției lor.

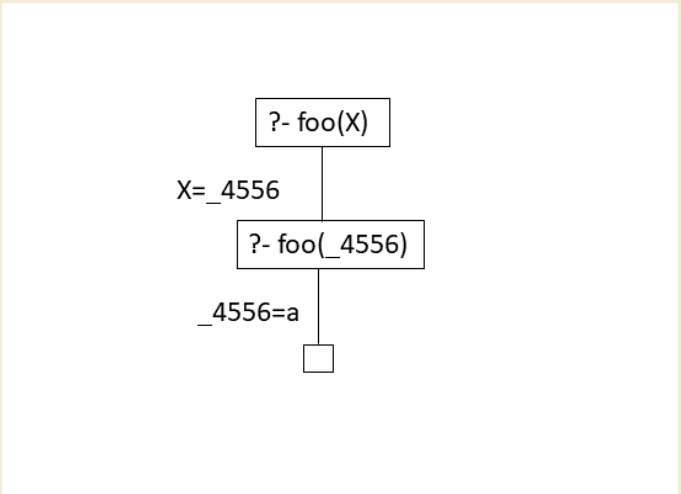
Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).
foo(b).
foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X).
```



În acest moment, a fost găsită prima soluție: `X=_4556=a`.

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un raspuns, Prolog încearcă clauzele în ordinea apariției lor.

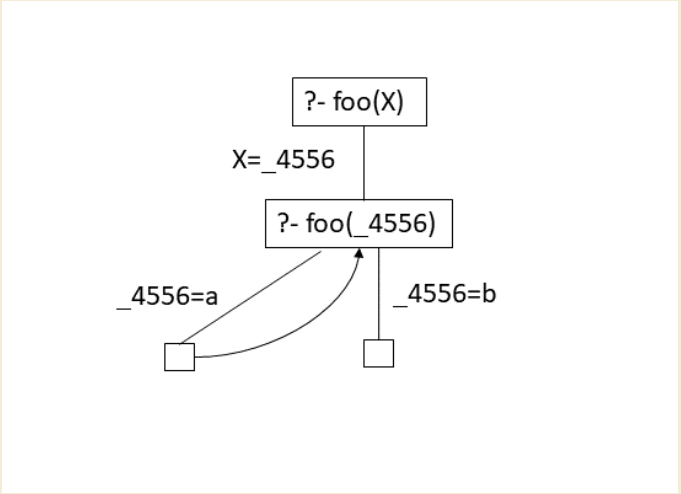
Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).
foo(b).
foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X).
```



Dacă se dorește încă un răspuns, atunci se face un pas înapoi în arborele de căutare și se încearcă satisfacerea țintei cu o nouă valoare.

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un raspuns, Prolog încearcă clauzele în ordinea apariției lor.

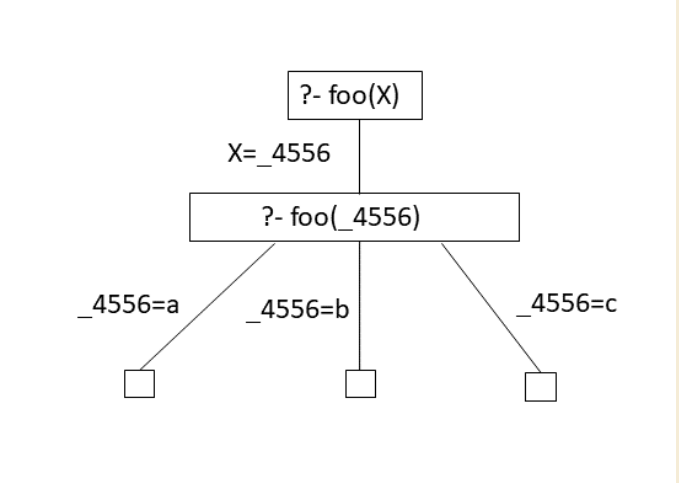
Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).
foo(b).
foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X).
```



arborele de căutare

Cum găsește Prolog răspunsul

Exemplu

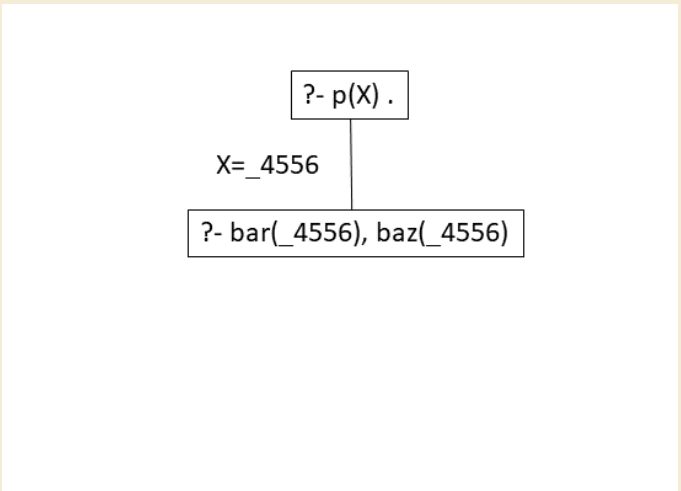
Să presupunem că avem programul:

```
bar(b).
bar(c).

baz(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- bar(X),baz(X).
```



Cum găsește Prolog răspunsul

Prolog se întoarce la ultima alegere dacă o sub-țintă eșuează.

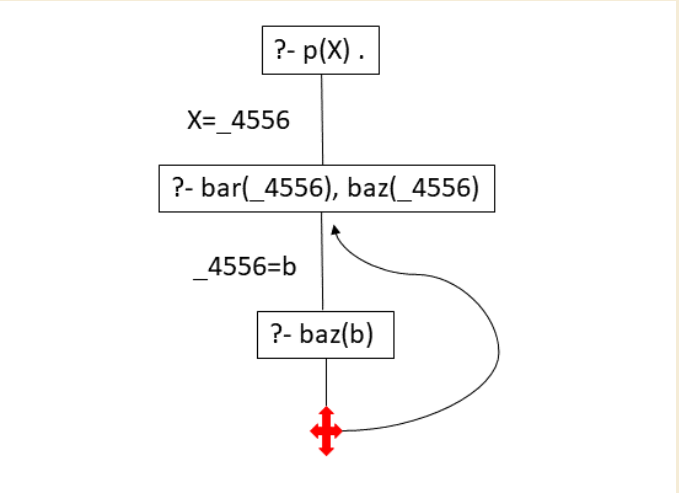
Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
bar(b).
bar(c).
baz(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- bar(X),baz(X).
```



Cum găsește Prolog răspunsul

Prolog se întoarce la ultima alegere dacă o sub-țintă eșuează.

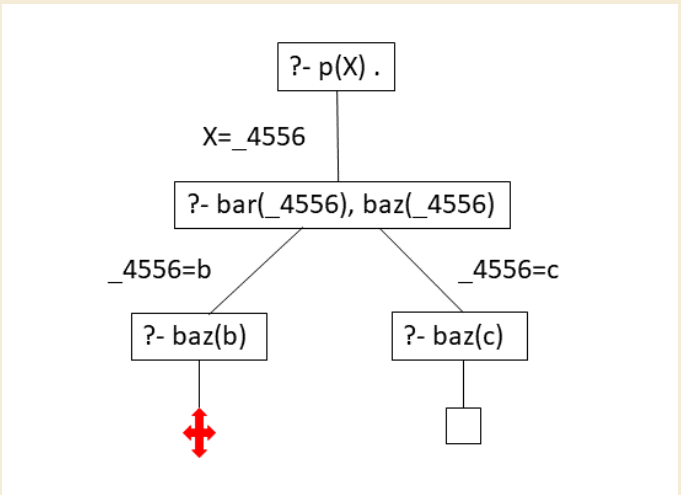
Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
bar(b).
bar(c).
baz(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- bar(X),baz(X).
```



Soluția găsită este: `X=_4556=c`.

Cum găsește Prolog răspunsul

Ce se întâmplă dacă schimbăm ordinea regulilor?

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
bar(c).
bar(b).

baz(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- bar(X),baz(X).
```

Cum găsește Prolog răspunsul

Ce se întâmplă dacă schimbăm ordinea regulilor?

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
bar(c).
bar(b).

baz(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- bar(X),baz(X).
X = c ;
false
```

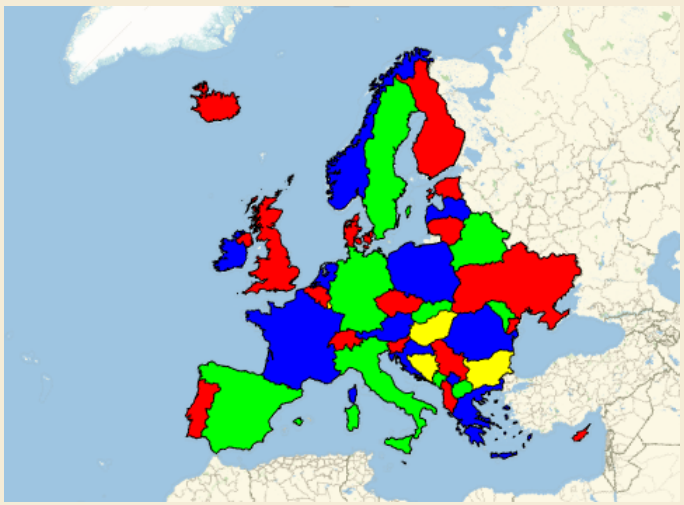
Vă explicați ce s-a întâmplat? Desenați arborele de căutare!

Un program mai complicat

Problema colorării hărților

Să se coloreze o hartă dată cu un număr minim de culori astfel încât oricare două țări vecine să fie colorate diferit.

Exemplu



Sursa imaginii

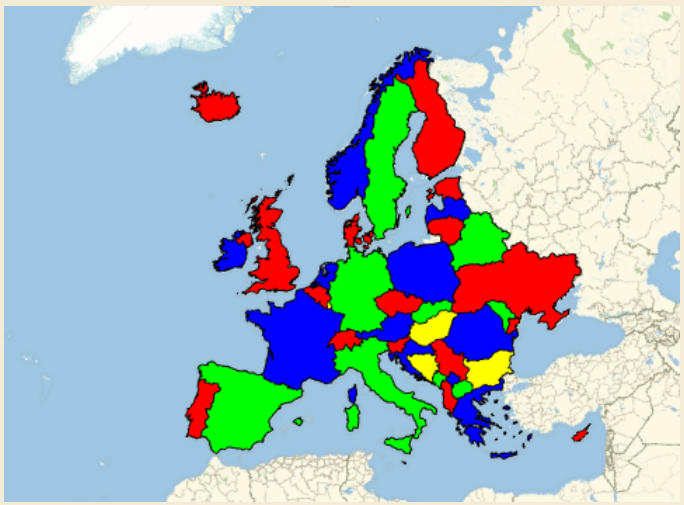
Un program mai complicat

Problema colorării hărților

Să se coloreze o hartă dată cu un număr minim de culori astfel încât oricare două țări vecine să fie colorate diferit.

Cum modelăm această problemă în Prolog?

Exemplu



Sursa imaginii

Un program mai complicat

Problema colorării hărților

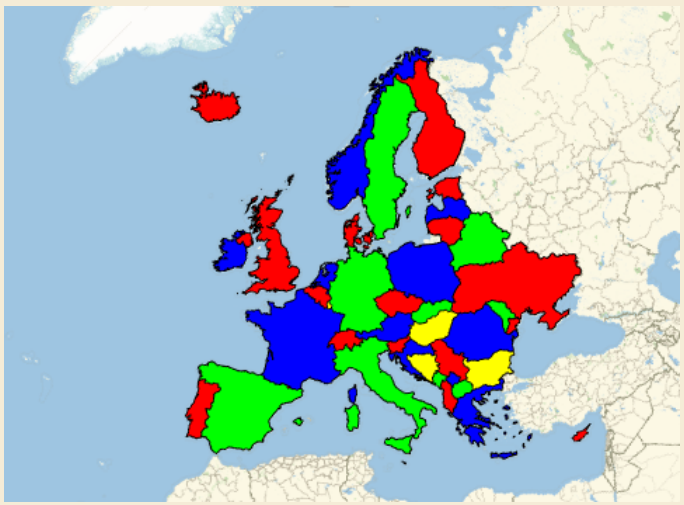
Să se coloreze o hartă dată cu un număr minim de culori astfel încât oricare două țări vecine să fie colorate diferit.

Cum modelăm această problemă în Prolog?

Exemplu

Trebuie să definim:

- culorile
- harta
- constrângerile



Sursa imaginii

Problema colorării hărților

Definim culorile

Exemplu

```
culoare(albastru).
culoare(rosu).
culoare(verde).
culoare(galben).
```

Problema colorării hărților

Definim culorile, harta

Exemplu

```
culoare(albastru).
culoare(rosu).
culoare(verde).
culoare(galben).

harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU) :- vecin(RO,SE), vecin(RO,UA),
                            vecin(RO,MD), vecin(RO,BG),
                            vecin(RO,HU), vecin(UA,MD),
                            vecin(BG,SE), vecin(SE,HU).
```

Problema colorării hărților

Definim culorile, harta și constrângerile.

Exemplu

```
culoare(albastru).
culoare(rosu).
culoare(verde).
culoare(galben).

harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU) :- vecin(RO,SE), vecin(RO,UA),
                            vecin(RO,MD), vecin(RO,BG),
                            vecin(RO,HU), vecin(UA,MD),
                            vecin(BG,SE), vecin(SE,HU).
vecin(X,Y) :- culoare(X),
              culoare(Y),
              X \== Y.
```

Problema colorării hărților

Definim culorile, harta și constrângerile. Cum punem întrebarea?

Exemplu

```
culoare(albastru).
culoare(rosu).
culoare(verde).
culoare(galben).

harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU) :- vecin(RO,SE), vecin(RO,UA),
                            vecin(RO,MD), vecin(RO,BG),
                            vecin(RO,HU), vecin(UA,MD),
                            vecin(BG,SE), vecin(SE,HU).
vecin(X,Y) :- culoare(X),
              culoare(Y),
              X \== Y.
```

Problema colorării hărților

Definim culorile, harta și constrângerile. Cum punem întrebarea?

Exemplu

```
culoare(albastru).
culoare(rosu).
culoare(verde).
culoare(galben).

harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU) :- vecin(RO,SE), vecin(RO,UA),
                            vecin(RO,MD), vecin(RO,BG),
                            vecin(RO,HU), vecin(UA,MD),
                            vecin(BG,SE), vecin(SE,HU).
vecin(X,Y) :- culoare(X),
              culoare(Y),
              X \== Y.

?- harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU).
```

Problema colorării hărților

Ce răspuns primim?

Exemplu

```
culoare(albastru).
culoare(rosu).
culoare(verde).
culoare(galben).

harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU) :- vecin(RO,SE), vecin(RO,UA),
                            vecin(RO,MD), vecin(RO,BG),
                            vecin(RO,HU), vecin(UA,MD),
                            vecin(BG,SE), vecin(SE,HU).
vecin(X,Y) :- culoare(X),
              culoare(Y),
              X \== Y.

?- harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU).
```

Problema colorării hărților

Exemplu

```
culoare(albastru).
culoare(rosu).
culoare(verde).
culoare(galben).
harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU) :-   vecin(RO,SE), vecin(RO,UA),
                              vecin(RO,MD), vecin(RO,BG),
                              vecin(RO,HU), vecin(UA,MD),
                              vecin(BG,SE), vecin(SE,HU).

vecin(X,Y) :- culoare(X),
              culoare(Y),
              X \== Y.
```

```
?- harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU).
RO = albastru,
SE = UA, UA = rosu,
MD = BG, BG = HU, HU = verde
```

Compararea termenilor: =,\=, ==,\==

`T = U`	reușește dacă există o potrivire (termenii se unifică)
`T \= U`	reușește dacă nu există o potrivire
`T == U`	reușește dacă termenii sunt identici
`T \== U`	reușește dacă termenii sunt diferiți

Compararea termenilor: =,\=, ==,\==

`T = U`	reușește dacă există o potrivire (termenii se unifică)
`T \= U`	reușește dacă nu există o potrivire
`T == U`	reușește dacă termenii sunt identici
`T \== U`	reușește dacă termenii sunt diferiți

Exemplu

```
?- X = Y.
X = Y.

?- p(X,q(Z)) = p(Y,X).
X = Y, Y = q(Z).

?- 2 = 1 + 1
false
```

```
?- X == Y .
false

?- p(X,Y) == p(X,Y).
true

?- 2 == 1 + 1
false
```

- În exemplul de mai sus, 1+1 este privită ca o expresie, nu este evaluată. Există și predicate care forțează evaluarea.

Negarea unui predicat: `\+ pred(X)`

Exemplu

```
animal(dog). animal(elephant). animal(sheep).

?- animal(cat).
false
?- \+ animal(cat).
true
```

Negarea unui predicat: `\+ pred(X)`

Exemplu

```
animal(dog). animal(elephant). animal(sheep).

?- animal(cat).
false
?- \+ animal(cat).
true
```

- Clauzele din Prolog dau doar condiții suficiente, dar nu și necesare pentru ca un predicat să fie adevărat.
- Pentru a da un răspuns pozitiv la o țintă, Prolog trebuie să construiască o "demonstrație" pentru a arată că mulțimea de fapte și reguli din program implică acea țintă.
- Astfel, un răspuns `false` nu înseamnă neapărat că ținta nu este adevărată, ci doar că Prolog nu a reușit să găsească o demonstrație.

Operatorul \+

- Negarea unei ținte se poate defini astfel:

```
neg(Goal) :- Goal, !, fail.
neg(Goal)
```

  unde `fail/0` este un predicat care eșuează întotdeauna.

Operatorul \+

- Negarea unei ținte se poate defini astfel:

```
neg(Goal) :- Goal, !, fail.
neg(Goal)
```

  unde `fail/0` este un predicat care eșuează întotdeauna.
- În PROLOG acest predicat este predefinit sub numele \+.
- Operatorul \+ se foloseste pentru a nega un predicat.
- `!` (cut) este un predicat predefinit (de aritate 0) care restricționează mecanismul de backtracking: execuția subțintei `!` se termină cu succes, deci alegerile (instanțierile) făcute înaite de a se ajunge la `!` nu mai pot fi schimbate.
- O țintă `\+ Goal` reușește dacă Prolog nu găsește o demonstrație pentru `Goal`. Negația din Prolog este definită ca incapacitatea de a găsi o demonstrație.
- Semantica operatorului \+ se numește negation as failure.

Negația ca eșec ("negation as failure")

Exemplu

Să presupunem că avem o listă de fapte cu perechi de oameni căsătoriți între ei:

```
married(peter, lucy).
married(paul, mary).
married(bob, juliet).
married(harry, geraldine).
```

Negația ca eșec

Exemplu (cont.)

Putem să definim un predicat `single/1` care reușește dacă argumentul său nu este nici primul nici al doilea argument în faptele pentru `married`.

```
single(Person) :-
        \+ married(Person, _),
        \+ married(_, Person).
```

```
?- single(mary).
false
```

```
?- single(anne).
true
```

```
?- single(X).
false
```

Răspunsul la întrebarea `?- single(anne).` trebuie gândit astfel:

Presupunem că Anne este single,
deoarece nu am putut demonstra că este maritată.

Predicatul -> /2 (if-then-else)

- if-then

```
If -> Then :- If, !, Then.
```

Predicatul -> /2 (if-then-else)

- if-then

```
If -> Then :- If, !, Then.
```

- if-then-else

```
If -> Then; _Else :- If, !, Then.
If -> Then; Else :- !, Else.
```

  Se încearcă demonstrarea predicatului `If`. Dacă întoarce true atunci se încearcă demonstrarea predicatului `Then`, iar dacă întoarce false se încearcă demonstrarea predicatului `Else`.

```
max(X,Y,Z) :- (X =< Y) -> Z = Y ;  Z = X

?- max(2,3,Z).
Z = 3.
```

Predicatul -> /2 (if-then-else)

- if-then

```
If -> Then :- If, !, Then.
```

- if-then-else

```
If -> Then; _Else :- If, !, Then.
If -> Then; Else :- !, Else.
```

  Se încearcă demonstrarea predicatului `If`. Dacă întoarce true atunci se încearcă demonstrarea predicatului `Then`, iar dacă întoarce false se încearcă demonstrarea predicatului `Else`.

```
max(X,Y,Z) :- (X =< Y) -> Z = Y ;  Z = X
```

```
?- max(2,3,Z).
Z = 3.
```

Observăm că `If -> Then` este echivalent cu `If -> Then ; fail`.

Tipuri de date compuse

Termeni compuși `f(t1,..., tn)`

- Termenii sunt unitățile de bază prin care Prolog reprezintă datele.
- Sunt de 3 tipuri:
  - Constante: `23, sansa, 'Jon Snow'`
  - Variabile: `X, Stark, _house`
  - Termeni compuși:
    - predicate
    - termeni prin care reprezentăm datele

Exemplu

- `born(john, date(20,3,1977))`
  - `born/2` și `date/3` sunt functori
  - `born/2` este un predicat
  - `date/3` definește date compuse

Tipuri de date definite recursiv

- Am văzut că listele sunt definite recursiv astfel:
  - `[]` este listă
  - `[X|L]` este listă, unde `X` este element și `L` este listă

Tipuri de date definite recursiv

- Am văzut că listele sunt definite recursiv astfel:
  - `[]` este listă
  - `[X|L]` este listă, unde `X` este element și `L` este listă
- Cum definim arborii binari în Prolog?

Tipuri de date definite recursiv

- Am văzut că listele sunt definite recursiv astfel:
  - `[]` este listă
  - `[X|L]` este listă, unde `X` este element și `L` este listă
- Cum definim arborii binari în Prolog? Soluție posibilă:

Tipuri de date definite recursiv

- Am văzut că listele sunt definite recursiv astfel:
  - `[]` este listă
  - `[X|L]` este listă, unde `X` este element și `L` este listă
- Cum definim arborii binari în Prolog? Soluție posibilă:
  - `void` este arbore

Tipuri de date definite recursiv

- Am văzut că listele sunt definite recursiv astfel:
  - `[]` este listă
  - `[X|L]` este listă, unde `X` este element și `L` este listă
- Cum definim arborii binari în Prolog? Soluție posibilă:
  - `void` este arbore
  - `tree(X,A1,A2)` este arbore, unde `X` este un element, iar `A1` și `A2` sunt arbori

Tipuri de date definite recursiv

- Am văzut că listele sunt definite recursiv astfel:
  - `[]` este listă
  - `[X|L]` este listă, unde `X` este element și `L` este listă
- Cum definim arborii binari în Prolog? Soluție posibilă:
  - `void` este arbore
  - `tree(X,A1,A2)` este arbore, unde `X` este un element, iar `A1` și `A2` sunt arbori

`tree(X,A1,A2)` este un termen compus, dar nu este un predicat!

Arbori binari în Prolog

- Cum arată un arbore?

Arbori binari în Prolog

- Cum arată un arbore?

```
tree(a, tree(b, tree(d, void, void), void), tree(c, void, tree(e, void, void)))
```

Arbori binari în Prolog

- Cum arată un arbore?

  tree(a, tree(b, tree(d, void, void), void), tree(c, void, tree(e, void, void)))

- Cum dăm un "nume" arborelui de mai sus?

Arbori binari în Prolog

- Cum arată un arbore?

  tree(a, tree(b, tree(d, void, void), void), tree(c, void, tree(e, void, void)))

- Cum dăm un "nume" arborelui de mai sus? Definim un predicat:

```
def(arb, tree(a, tree(b,
                      tree(d,void,void),
                      void),
                 tree(c, void,
                      tree(e,void,void)))).
```

Arbori binari în Prolog

- Cum arată un arbore?

  tree(a, tree(b, tree(d, void, void), void), tree(c, void, tree(e, void, void)))

- Cum dăm un "nume" arborelui de mai sus? Definim un predicat:

```
def(arb, tree(a, tree(b,
                      tree(d,void,void),
                      void),
                tree(c, void,
                      tree(e,void,void)))).
```

Deoarece în Prolog nu avem declarații explicite de date, pentru a defini arborii vom scrie un predicat care este adevărat atunci când argumentul său este un arbore.

Arbori binari în Prolog

- Scrieți un predicat care verifică că un termen este arbore binar.

Arbori binari în Prolog

- Scrieți un predicat care verifică că un termen este arbore binar.

```
binary_tree(void).
binary_tree(tree(Element,Left,Right)) :- binary_tree(Left),
                                         binary_tree(Right).
```

Arbori binari în Prolog

- Scrieți un predicat care verifică că un termen este arbore binar.

```
binary_tree(void).
binary_tree(tree(Element,Left,Right)) :- binary_tree(Left),

                                         binary_tree(Right).
```

Eventual putem defini și un predicat pentru elemente:

```
binary_tree(void).
binary_tree(tree(Element,Left,Right)) :- binary_tree(Left),

                                        binary_tree(Right),
                                        element_binary_tree(Element)

element_binary_tree(X):- integer(X). /* de exemplu */
```

Arbori binari în Prolog

- Scrieți un predicat care verifică că un termen este arbore binar.

```
binary_tree(void).
binary_tree(tree(Element,Left,Right)) :- binary_tree(Left),

                                         binary_tree(Right).
```

Eventual putem defini și un predicat pentru elemente:

```
binary_tree(void).
binary_tree(tree(Element,Left,Right)) :- binary_tree(Left),

                                        binary_tree(Right),
                                        element_binary_tree(Element)

element_binary_tree(X):- integer(X). /* de exemplu */


test:- def(arb,T), binary_tree(T).
```

Arbori binari în Prolog

Exercițiu

Scrieți un predicat care verifică că un element aparține unui arbore.

```
tree_member(X,tree(X,Left,Right)).

tree_member(X,tree(Y,Left,Right)) :- tree_member(X,Left).

tree_member(X,tree(Y,Left,Right)) :- tree_member(X,Right).
```

Arbori binari în Prolog

Exercițiu

Scrieți un predicat care determină parcurgerea în preordine a unui arbore binar.

```
preorder(tree(X,L,R),Xs) :- preorder(L,Ls),
                            preorder(R,Rs),
                            append([X|Ls],Rs,Xs).
```

Arbori binari în Prolog

Exercițiu

Scrieți un predicat care determină parcurgerea în preordine a unui arbore binar.

```
preorder(tree(X,L,R),Xs) :- preorder(L,Ls),
                            preorder(R,Rs),
                            append([X|Ls],Rs,Xs).
preorder(void,[]).
```

Arbori binari în Prolog

Exercițiu

Scrieți un predicat care determină parcurgerea în preordine a unui arbore binar.

```
preorder(tree(X,L,R),Xs) :- preorder(L,Ls),
                            preorder(R,Rs),
                            append([X|Ls],Rs,Xs).
preorder(void,[]).

test(Tree,Pre):- def(arb, Tree), preorder(Tree,Pre).
```

Arbori binari în Prolog

Exercițiu

Scrieți un predicat care determină parcurgerea în preordine a unui arbore binar.

```
preorder(tree(X,L,R),Xs) :- preorder(L,Ls),
                            preorder(R,Rs),
                            append([X|Ls],Rs,Xs).
preorder(void,[]).

test(Tree,Pre):- def(arb, Tree), preorder(Tree,Pre).

?- test(T,P).
T = tree(a, tree(b, tree(d, void, void), void), tree(c,
void, tree(e, void, void))),
P = [a, b, d, c, e]
```

Liste și recursie

Listă [t1,...,tn]

- O listă în Prolog este un șir de elemente, separate prin virgulă, între paranteze drepte:

```
[1,cold, parent(jon),[winter,is,coming],X]
```

- O listă poate conține termeni de orice fel.
- Ordinea termenilor din listă are importanță:

```
?- [1,2] == [2,1] .
false
```

- Lista vidă se notează [].
- Simbolul | delimitează coada listei:

```
?- [1,2,3,4,5,6] = [X|T].
X = 1, T = [2, 3, 4, 5, 6].

?- [1,2,3|[4,5,6]] == [1,2,3,4,5,6].
true.
```

Listă [t1,...,tn]==[t1 |[t2,...,tn]

- Simbolul | delimitează coada listei:

```
?- [1,2,3,4,5,6] = [X|T].
X = 1,
T = [2, 3, 4, 5, 6].
```

- Variabila anonimă _ este unificată cu orice termen Prolog:

```
?- [1,2,3,4,5,6] = [X|_].
X = 1.
```

- Deoarece Prologul face unificare poate identifica șabloane mai complicate:

```
?- [5,1,1,3,2]=[_|[X|[X|_]]].
X = 1.
?- [5,1,4,3,2]=[_|[X|[X|_]]].
false.
```

Liste

Exercițiu

- Definiți un predicat care verifică că un termen este lista.

```
is_list([]).
is_list([_|_]).
```

Liste

Exercițiu

- Definiți un predicat care verifică că un termen este lista.

```
is_list([]).
is_list([_|_]).
```

- Definiți predicate care verifică dacă un termen este primul element, ultimul element sau coada unei liste.

```
head([X|_],X).

last([X],X).
last([_|T],Y):- last(T,Y).

tail([],[]).
tail([_|T],T).
```

Liste

Exercițiu

- Definiți un predicat care verifică dacă un termen aparține unei liste.

```
member(H, [H|_]).
member(H, [_|T]) :- member(H,T).
```

Liste

Exercițiu

- Definiți un predicat care verifică dacă un termen aparține unei liste.

```
member(H, [H|_]).
member(H, [_|T]) :- member(H,T).
```

- Definiți un predicat `append/3` care verifică dacă o listă se obține prin concatenarea altor două liste.

```
append([],L,L).
append([X|T],L, [X|R]) :- append(T,L,R).
```

Liste

Exercițiu

- Definiți un predicat care verifică dacă un termen aparține unei liste.

```
member(H, [H|_]).
member(H, [_|T]) :- member(H,T).
```

- Definiți un predicat `append/3` care verifică dacă o listă se obține prin concatenarea altor două liste.

```
append([],L,L).
append([X|T],L, [X|R]) :- append(T,L,R).
```

Există predicatele predefinite `member/2` și `append/3`.

Liste append/3

- Funcția append/3:

```
?- listing(append/3).
append([],L,L).
append([X|T],L, [X|R]) :- append(T,L,R).

?- append(X,Y,[a,b,c]).
X = [],
Y = [a, b, c] ;
X = [a],
Y = [b, c] ;
X = [a, b],
Y = [c] ;
X = [a, b, c],
Y = [] ;
false
```

- Funcția astfel definită poate fi folosită atât pentru verificare, cât și pentru generare.

Liste

Exercițiu

- Definiți un predicat `elim/3` care verifică dacă o listă se obține din alta prin eliminarea unui element.

Liste

Exercițiu

- Definiți un predicat `elim/3` care verifică dacă o listă se obține din alta prin eliminarea unui element.

```
elim(X, [X|T], T).
elim(X, [H|T], [H|L]) :- elim(X,T,L).
```

Liste

Exercițiu

- Definiți un predicat `elim/3` care verifică dacă o listă se obține din alta prin eliminarea unui element.

```
elim(X, [X|T], T).
elim(X, [H|T], [H|L]) :- elim(X,T,L).
```

- Definiți un predicat care `perm/2` care verifică dacă două liste sunt permutări.

Liste

Exercițiu

- Definiți un predicat `elim/3` care verifică dacă o listă se obține din alta prin eliminarea unui element.

```
elim(X, [X|T], T).
elim(X, [H|T], [H|L]) :- elim(X,T,L).
```

- Definiți un predicat care `perm/2` care verifică dacă două liste sunt permutări.

```
perm([],[]). perm([X|T],L) :- elim(X,L,R), perm(R,T).
```

Liste

Exercițiu

- Definiți un predicat `elim/3` care verifică dacă o listă se obține din alta prin eliminarea unui element.

```
elim(X, [X|T], T).
elim(X, [H|T], [H|L]) :- elim(X,T,L).
```

- Definiți un predicat care `perm/2` care verifică dacă două liste sunt permutări.

```
perm([],[]). perm([X|T],L) :- elim(X,L,R), perm(R,T).
```

Predicatele predefinite `select/3` și `permutation/2` au aceeași funcționalitate.

Generează și testează

```
solution(X) :- generate(X), check(X).
```

Exercițiu

Determinați toate cuvintele dintr-o bază de cunoștințe dată, care sunt anagrame ale unui cuvânt dat.

KB: `word(relay).  word(early).  word(layer).`

Predicat util:

```
?- name(relay,L). % conversie între atomi și liste
L = [114, 101, 108, 97, 121]
```

Generează și testează

```
solution(X) :- generate(X), check(X).
```

Exercițiu

Determinați toate cuvintele dintr-o bază de cunoștințe dată, care sunt anagrame ale unui cuvânt dat.

KB: `word(relay).  word(early).  word(layer).`

Predicat util:

```
?- name(relay,L). % conversie între atomi și liste
L = [114, 101, 108, 97, 121]
```

Două abordări posibile:

- se generează o posibilă, soluție apoi se testează dacă este în KB.
- se parcurge KB și pentru fiecare termen se testează dacă e soluție.

Generează și testează

```
solution(X) :- generate(X), check(X).
```

Exercițiu

Determinați toate cuvintele dintr-o bază de cunoștințe dată, care sunt anagrame ale unui cuvânt dat.

KB: `word(relay).` `word(early).` `word(layer).`

Generează și testează

```
solution(X) :- generate(X), check(X).
```

Exercițiu

Determinați toate cuvintele dintr-o bază de cunoștințe dată, care sunt anagrame ale unui cuvânt dat.

KB: `word(relay).  word(early).  word(layer).`

```
anagram1(A,B) :- name(A,L), permutation(L,W),
                 name(B,W), word(B).
```

Generează și testează

```
solution(X) :- generate(X), check(X).
```

Exercițiu

Determinați toate cuvintele dintr-o bază de cunoștințe dată, care sunt anagrame ale unui cuvânt dat.

KB: `word(relay).  word(early).  word(layer).`

```
anagram1(A,B) :- name(A,L), permutation(L,W),
                 name(B,W), word(B).
anagram2(A,B) :- name(A,L), word(B),
                 name(B,W), permutation(L,W).
```

Generează și testează

```
solution(X) :- generate(X), check(X).
```

Exercițiu

Determinați toate cuvintele dintr-o bază de cunoștințe dată, care sunt anagrame ale unui cuvânt dat.

KB:
```
word(relay).  word(early).  word(layer).

anagram1(A,B) :- name(A,L), permutation(L,W),
                 name(B,W), word(B).
anagram2(A,B) :- name(A,L), word(B),
                 name(B,W), permutation(L,W).
```

```
?- anagram1(layre,X).
X = layer ;
X = relay ;
X = early ;
false.
```

```
?- anagram2(layre,X).
X = relay ;
X = early ;
X = layer ;
false.
```

Recursie

Exercițiu

- Definiți un predicat `rev/2` care verifică dacă o listă este inversa altei liste.

Recursie

Exercițiu

- Definiți un predicat `rev/2` care verifică dacă o listă este inversa altei liste.

```
rev([],[]).
rev([X|T],L) :- rev(T,R),append(R,[X],L).
```

Soluția de mai sus este corectă, dar foarte costisitoare computațional, datorită stilului de programare declarativ.

Cum putem defini o variantă mai rapidă?

O metodă care prin care recursia devine mai rapidă este folosirea acumulatorilor, în care se păstrează rezultatele parțiale.

Recursie cu acumulatori

- Varianta inițială:

```
rev([],[]).
rev([X|T],L) :- rev(T,R),append(R,[X],L).
```

- Varianta cu acumulator

```
rev(L,R) :- revac(L,[],R).
% la momentul inițial nu am acumulat nimic.
```

Recursie cu acumulatori

- Varianta inițială:

```
rev([],[]).
rev([X|T],L) :- rev(T,R),append(R,[X],L).
```

- Varianta cu acumulator

```
rev(L,R) :- revac(L,[],R).
% la momentul inițial nu am acumulat nimic.

revac([], R, R).
% cand lista inițială a fost consumată,
% am acumulat rezultatul final.
```

Recursie cu acumulatori

- Varianta inițială:

```
rev([],[]).
rev([X|T],L) :- rev(T,R),append(R,[X],L).
```

- Varianta cu acumulator

```
rev(L,R) :- revac(L,[],R).
% la momentul inițial nu am acumulat nimic.

revac([], R, R).
% cand lista inițială a fost consumată,
% am acumulat rezultatul final.

revac([X|T], Acc, R) :- revac(T,[X|Acc],R).
% Acc conține inversa listei care a fost deja parcursă.
```

- Complexitatea a fost redusă de la $O(n^2)$ la $O(n)$, unde n este lungimea listei.

Recursie

- Multe implementări ale limbajului Prolog aplică "last call optimization" atunci când un apel recursiv este ultimul predicat din corpul unei clauze (tail recursion).
- Atunci când este posibil, se recomandă utilizare recursiei la coadă (tail recursion).
- Vom defini un predicat care generează liste lungi în două moduri și vom analiza performanța folosind predicatul time/1.

Recursie

- Multe implementări ale limbajului Prolog aplică "last call optimization" atunci când un apel recursiv este ultimul predicat din corpul unei clauze (tail recursion).
- Atunci când este posibil, se recomandă utilizare recursiei la coadă (tail recursion).
- Vom defini un predicat care generează liste lungi în două moduri și vom analiza performanța folosind predicatul time/1.

```
biglist(0,[]).
biglist(N,[N|T]) :- N >= 1, M is N-1,biglist(M,T),M=M.

biglist_tr(0,[]).
biglist_tr(N,[N|T]) :- N >= 1, M is N-1,biglist_tr(M,T).
```

Recursie la coadă

- Predicat fără recursie la coadă:

```
biglist(0,[]).
biglist(N,[N|T]) :- N >= 1, M is N-1,biglist(M,T),M=M.
```

Apelul recursiv întoarce valoarea găsită în predicatul apelant, acestă valoare urmând a fi prelucrată.

Recursie la coadă

- Predicat fără recursie la coadă:

```
biglist(0,[]).
biglist(N,[N|T]) :- N >= 1, M is N-1,biglist(M,T),M=M.
```

Apelul recursiv întoarce valoarea găsită în predicatul apelant, acestă valoare urmând a fi prelucrată.

```
?- time(biglist(50000,X)).
100,000 inferences, 0.016 CPU in 0.038 seconds
(41% CPU, 6400000 Lips)
X = [50000, 49999, 49998|...] .
```

Recursie la coadă

- Predicat fără recursie la coadă:

```
biglist(0,[]).
biglist(N,[N|T]) :- N >= 1, M is N-1,biglist(M,T),M=M.
```

Apelul recursiv întoarce valoarea găsită în predicatul apelant, acestă valoare urmând a fi prelucrată.

```
?- time(biglist(50000,X)).
100,000 inferences, 0.016 CPU in 0.038 seconds
(41% CPU, 6400000 Lips)
X = [50000, 49999, 49998|...] .
```

- Predicatul cu recursie la coadă:

```
biglist_tr(0,[]).
biglist_tr(N,[N|T]) :- N >= 1, M is N-1,biglist_tr(M,T).
```

Recursie la coadă

- Predicat fără recursie la coadă:

```
biglist(0,[]).
biglist(N,[N|T]) :- N >= 1, M is N-1,biglist(M,T),M=M.
```

Apelul recursiv întoarce valoarea găsită în predicatul apelant, acestă valoare urmând a fi prelucrată.

```
?- time(biglist(50000,X)).
100,000 inferences, 0.016 CPU in 0.038 seconds
(41% CPU, 6400000 Lips)
X = [50000, 49999, 49998|...] .
```

- Predicatul cu recursie la coadă:

```
biglist_tr(0,[]).
biglist_tr(N,[N|T]) :- N >= 1, M is N-1,biglist_tr(M,T).

?- time(biglist_tr(50000,X)).
100,000 inferences, 0.000 CPU in 0.007 seconds
(0% CPU, Infinite Lips)
X = [50000, 49999, 49998|...]
```

Exemplu: reprezentarea unei GIC

Structura frazelor

- Aristotel, On Interpretation, `http://classics.mit.edu/Aristotle/interpretation.1.1.html`:

  "Every affirmation, then, and every denial, will consist of a noun and a verb, either definite or indefinite."

Structura frazelor

- Aristotel, On Interpretation,
  `http://classics.mit.edu/Aristotle/interpretation.1.1.html`:

  "Every affirmation, then, and every denial, will consist of a noun and a verb, either definite or indefinite."

- N. Chomsy, Syntactic structure, Mouton Publishers, First printing 1957 - Fourteenth printing 1985 [Chapter 4 (Phrase Structure)]

(i) $Sentence \rightarrow NP + VP$
(ii) $NP \rightarrow T + N$
(iii) $VP \rightarrow Verb + NP$
(iv) $T \rightarrow the$
(q) $N \rightarrow fman, ball$, etc.
(vi) $V \rightarrow hit, took$, etc.

Gramatică independentă de context

- Definim structura propozițiilor folosind o gramatică independentă de context:

S	→	NP VP
NP	→	Det N
VP	→	V
VP	→	V NP
Det	→	*the*
Det	→	*a*
N	→	*boy*
N	→	*girl*
V	→	*loves*
V	→	*hates*

- Neterminalele definesc categorii gramaticale:

  S (propozițiile),
  NP (expresiile substantivale),
  VP (expresiile verbale),
  V (verbele),
  N (substantivele),
  Det (articolele).

- Terminalele definesc cuvintele.

Gramatică independentă de context

GIC

S	→	NP VP	Det	→	*the*
NP	→	Det N	Det	→	*a*
VP	→	V	N	→	*boy*
VP	→	V NP	N	→	*girl*
			V	→	*loves*
			V	→	*hates*

Ce vrem să facem?

- Vrem să scriem un program în Prolog care să recunoască propozițiile generate de această gramatică.
- Reprezentăm propozițiile prin liste.

```
?- atomic_list_concat(SL,' ' , 'a boy loves a girl').
SL = [a, boy, loves, a, girl]
```

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

```
SL = [a, boy, loves, a, girl]
```

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

  ```
  SL = [a, boy, loves, a, girl]
  ```

- Fiecărui neterminal îi asociem un predicat care definește listele corespunzătoare categoriei gramaticale respective. `n([boy]).`

  ```
  n([girl]).  det([the]).  v([loves]).
  ```

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

```
SL = [a, boy, loves, a, girl]
```

- Fiecărui neterminal îi asociem un predicat care definește listele corespunzătoare categoriei gramaticale respective. `n([boy]).`

```
n([girl]).  det([the]).  v([loves]).
```

- Lista asociată unei propoziții se obține prin concatenarea listelor asociate elementelor componente.

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

  ```
  SL = [a, boy, loves, a, girl]
  ```

- Fiecărui neterminal îi asociem un predicat care definește listele corespunzătoare categoriei gramaticale respective. `n([boy]).`

  ```
  n([girl]).  det([the]).  v([loves]).
  ```

- Lista asociată unei propoziții se obține prin concatenarea listelor asociate elementelor componente.

  De exemplu, interpretăm regula S → NP VP astfel:

  o propozi tie este o listă `L` care se obține prin concatenarea a două liste, `X` și `Y`, unde `X` reprezintă o expresie substantivală și `Y` reprezintă o expresie verbală.

  ```
  s(L) :- np(X), vp(Y), append(X,Y,L).
  ```

Definirea unei gramatici în Prolog

Gramatică independentă de context

S	→	NP VP	Det	→	*the*
NP	→	Det N	Det	→	*a*
VP	→	V	N	→	*boy*
VP	→	V NP	N	→	*girl*
			V	→	*loves*
			V	→	*hates*

Prolog

```
s(L) :- np(X), vp(Y),
        append(X,Y,L).
np(L) :- det(X), n(Y),
         append(X,Y,L) .
vp(L) :- v(L).
vp(L):- v(X), np(Y),
        append(X,Y,L) .
```

```
det([the]).
det([a]).
n([boy]).
n([girl]).
v([loves]).
v([hates]).
```

Definirea unei gramatici în Prolog

```
s(L) :- np(X), vp(Y),
        append(X,Y,L).

np(L) :- det(X), n(Y),
         append(X,Y,L) .

vp(L) :- v(L).
vp(L):- v(X), np(Y),
        append(X,Y,L) .

det([the]).
det([a]).
n([boy]).
n([girl]).
v([loves]).
v([hates]).
```

```
?- s([a,boy,loves, a,
girl]).
true .

?- s[a, girl|T].
T = [loves] ;
T = [hates] ;
T = [loves, the, boy] ;
⋮

?- s(S).
S = [the, boy, loves] ;
S = [the, boy, hates] ;
⋮
```

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

```
SL = [a, boy, loves, a, girl]
```

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

  ```
  SL = [a, boy, loves, a, girl]
  ```

- Fiecărui neterminal îi asociem un predicat care definește listele corespunzătoare categoriei gramaticale respective. `n([boy]).`

  ```
  n([girl]).  det([the]).  v([loves]).
  ```

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

  ```
  SL = [a, boy, loves, a, girl]
  ```

- Fiecărui neterminal îi asociem un predicat care definește listele corespunzătoare categoriei gramaticale respective. `n([boy]).`

  ```
  n([girl]).  det([the]).  v([loves]).
  ```

- Lista asociată unei propoziții se obține prin concatenarea listelor asociate elementelor componente.

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

  ```
  SL = [a, boy, loves, a, girl]
  ```

- Fiecărui neterminal îi asociem un predicat care definește listele corespunzătoare categoriei gramaticale respective. `n([boy]).`

  ```
  n([girl]).  det([the]).  v([loves]).
  ```

- Lista asociată unei propoziții se obține prin concatenarea listelor asociate elementelor componente.

- Deși corectă, reprezentarea anterioară este ineficientă, arborele de căutare este foarte mare. Pentru a optimiza, folosim reprezentarea listelor ca diferențe.

Bibliografie

- M. Ben-Ari, **Mathematical Logic for Computer Science**, Springer, 2012.
- P. Blackburn, J. Bos, K. Striegnitz, **Learn Prolog now**, College Publications, 2006.
- J.W. Lloyd, Foundations of Logic Programming, Springer, 1987.
- L.S. Sterling and E.Y. Shapiro, The Art of Prolog `https://mitpress.mit.edu/books/art-prolog-second-edition`
- Logic Programming, The University of Edinburgh, https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/lp/

Pe săptămâna viitoare!

Curs 9

2020-2021

Fundamentele limbajelor de programare

Cuprins

Limbajul IMP

Limbajul IMP

Vom implementa un limbaj care conține:

- Expresii
  - Aritmetice — `x + 3`
  - Booleene — `x >= 7`
- Instrucțiuni
  - De atribuire — `x = 5`
  - Condiționale — `if(x >= 7, x =5, x = 0)`
  - De ciclare — `while(x >= 7,x = x - 1)`
- Compunerea instrțiunilor — `x=7;while(x>=0,x=x-1)`
- Blocuri de instrucțiuni — `{x=7;while(x>=0,x=x-1)}`

Limbajul IMP

Exemplu

Un program în limbajul IMP

```
{x = 10 ; sum = 0;
while(0 =< x,
      {sum = sum + x; x = x-1}
      )},sum
```

- Semantica
  după execuția programului, se evaluează `sum`

Sintaxa BNF a limbajului IMP

$$
\begin{aligned}
E &::= n \mid x \\
&\quad \mid E + E \mid E - E \mid E * E \\
\\
B &::= \texttt{true} \mid \texttt{false} \\
&\quad \mid E =< E \mid E >= E \mid E == E \\
&\quad \mid \texttt{not}(B) \mid \texttt{and}(B , B) \mid \texttt{or}(B , B) \\
\\
C &::= \texttt{skip} \\
&\quad \mid x = E \\
&\quad \mid \texttt{if}(B , C , C) \\
&\quad \mid \texttt{while}(B , C) \\
&\quad \mid \{ C \} \mid C ; C \\
\\
P &::= \{ C \}, E
\end{aligned}
$$

O implementare a limbajului IMP în Prolog

Decizii de implementare

- {} și ; sunt operatori

```
:- op(100, xf, {}).
:- op(1100, yf, ;).
```

- definim un predicat pentru fiecare categorie sintactică

```
stmt(while(BE,St)) :- bexp(BE),  stmt(St).
```

- while, if, and, etc sunt functori în Prolog
  `while(true,skip)` este un termen compus

- , are semnificația obișnuită

- pentru valori numerice folosim întregii din Prolog

```
aexp(I) :- integer(I).
```

- pentru identificatori folosim atomii din Prolog

```
aexp(X) :- atom(X).
```

Expresiile aritmetice

$$E ::= n \mid x \mid E + E \mid E - E \mid E * E$$

Prolog

```
aexp(I) :- integer(I).
aexp(X) :- atom(X).
aexp(A1 + A2) :- aexp(A1), aexp(A2).
aexp(A1 - A2) :- aexp(A1), aexp(A2).
aexp(A1 * A2) :- aexp(A1), aexp(A2).
```

Expresiile aritmetice

Exemplu

```
?- aexp(1000).
true.
?- aexp(id).
true.
?- aexp(id + 1000).
true.
?- aexp(2 + 1000).
true.
?- aexp(x * y).
true.
?- aexp(- x).
false.
```

Expresiile booleene

$B ::=$ **true** | **false**
| E =< E | E >= E | E == E
| not(B) | and(B , B) | or(B , B)

Prolog

```
bexp(true). bexp(false).
bexp(and(BE1,BE2)) :- bexp(BE1), bexp(BE2).
bexp(or(BE1,BE2)) :-  bexp(BE1), bexp(BE2).
bexp(not(BE)) :-  bexp(BE).

bexp(A1 =< A2) :- aexp(A1), aexp(A2).
bexp(A1 >= A2) :- aexp(A1), aexp(A2).
bexp(A1 == A2) :- aexp(A1), aexp(A2).
```

Expresiile booleene

Exemplu

```
?- bexp(true).
true.
?- bexp(id).
false.
?- bexp(not(1 =< 2)).
true.
?- bexp(or(1 =< 2,true)).
true.
?- bexp(or(a =< b,true)).
true.
?- bexp(not(a)).
false.
?- bexp(!(a)).
false.
```

Instrucțiunile

$C ::=$ **skip**
| x = E ;
| **if(** B **)** C **else** C
| **while(** B **)** C
| **{** C **}** | C ; C

Prolog

```
stmt(skip).
stmt(X = AE) :- atom(X), aexp(AE).
stmt(St1;St2) :- stmt(St1), stmt(St2).
stmt((St1;St2)) :- stmt(St1), stmt(St2).
stmt({St}) :- stmt(St).
stmt(if(BE,St1,St2)) :-  bexp(BE), stmt(St1), stmt(St2).
stmt(while(BE,St)) :- bexp(BE), stmt(St).
```

Instrucțiunile

Exemplu

```
?- stmt(id = 5).
true.
?- stmt(id = a).
true.
?- stmt(3 = 6).
false.
?- stmt(if(true, x=2;y=3, x=1;y=0)).
true.
?- stmt(while(x =< 0,skip)).
true.
?- stmt(while(x =< 0,)).
false.
?- stmt(while(x =< 0,skip)).
true .
```

Programele

$P ::= \{\ C\ \},\ E$

Prolog

```
program(St,AE) :- stmt(St), aexp(AE).
```

Exemplu

```
test0 :- program( {x = 10 ; sum = 0;
                   while(0 =< x,
                         {sum = sum + x; x = x-1}
                        )}
                   , sum).
```

?- test0.
true.

O implementare a semanticii small-step

Semantica small-step

- Introdusă de Gordon Plotkin (1981)
- Denumiri alternative:
  - Semantică Operațională Structurală
  - semantică prin tranziții
  - semantică prin reducere
- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație „de tranziție” între configurații:

$$\langle cod\ ,\ \sigma \rangle \rightarrow \langle cod\ ,\ \sigma' \rangle$$

Semantica small-step

- Introdusă de Gordon Plotkin (1981)
- Denumiri alternative:
  - Semantică Operațională Structurală
  - semantică prin tranziții
  - semantică prin reducere
- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație „de tranziție” între configurații:

$$\langle cod\ ,\ \sigma \rangle \to \langle cod\ ,\ \sigma' \rangle$$

- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții:

$$\langle \texttt{int}\ x = 0\ \texttt{;}\ x = x + 1\ \texttt{;}\ ,\ \bot \rangle \quad \longrightarrow \quad \langle x = x + 1\ \texttt{;}\ ,\ x \mapsto 0 \rangle$$

Semantica small-step

- Introdusă de Gordon Plotkin (1981)
- Denumiri alternative:
  - Semantică Operațională Structurală
  - semantică prin tranziții
  - semantică prin reducere
- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație „de tranziție” între configurații:

$$\langle cod\ ,\ \sigma \rangle \rightarrow \langle cod\ ,\ \sigma' \rangle$$

- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții:

$$\begin{aligned} \langle \texttt{int}\ x = 0\ \texttt{;}\ x = x + 1\ \texttt{;}\ ,\ \bot \rangle &\longrightarrow \langle x = x + 1\ \texttt{;}\ ,\ x \mapsto 0 \rangle \\ &\longrightarrow \langle x = 0 + 1\ \texttt{;}\ ,\ x \mapsto 0 \rangle \end{aligned}$$

Semantica small-step

- Introdusă de Gordon Plotkin (1981)
- Denumiri alternative:
  - Semantică Operațională Structurală
  - semantică prin tranziții
  - semantică prin reducere
- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație „de tranziție” între configurații:

$$\langle cod\ ,\ \sigma\rangle \to \langle cod\ ,\ \sigma'\rangle$$

- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții:

$$\begin{aligned}\langle \texttt{int}\ x = 0\ \texttt{;}\ x = x + 1\ \texttt{;}\ ,\ \bot\rangle &\longrightarrow \langle x = x + 1\ \texttt{;}\ ,\ x \mapsto 0\rangle \\ &\longrightarrow \langle x = 0 + 1\ \texttt{;}\ ,\ x \mapsto 0\rangle \\ &\longrightarrow \langle x = 1\ \texttt{;}\ ,\ x \mapsto 0\rangle\end{aligned}$$

Semantica small-step

- Introdusă de Gordon Plotkin (1981)
- Denumiri alternative:
  - Semantică Operațională Structurală
  - semantică prin tranziții
  - semantică prin reducere
- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație „de tranziție” între configurații:

$$\langle cod\ ,\ \sigma\rangle \to \langle cod\ ,\ \sigma'\rangle$$

- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții:

$$\begin{aligned}
\langle \texttt{int}\ x = 0\ \texttt{;}\ x = x + 1\ \texttt{;}\ ,\ \bot\rangle &\longrightarrow \langle x = x + 1\ \texttt{;}\ ,\ x \mapsto 0\rangle \\
&\longrightarrow \langle x = 0 + 1\ \texttt{;}\ ,\ x \mapsto 0\rangle \\
&\longrightarrow \langle x = 1\ \texttt{;}\ ,\ x \mapsto 0\rangle \\
&\longrightarrow \langle \texttt{\{\}}\ ,\ x \mapsto 1\rangle
\end{aligned}$$

Semantica small-step

- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație de tranziție între configurații:

  $\langle cod\ ,\ \sigma\rangle \rightarrow \langle cod'\ ,\ \sigma'\rangle$ `step(Cod,S1,Cod',S2)`
- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții.
- Starea executiei unui program IMP la un moment dat este o funcție parțială: $\sigma = n \mapsto 10, sum \mapsto 0$, etc.

Reprezentarea stărilor în Prolog

```
get(S,X,I) :- member(vi(X,I),S).
get(_,_,0).
set(S,X,I,[vi(X,I)|S1]) :- del(S,X,S1).

del(S,X,S1) :- select(vi(X,_), S, S1), !.
del(S, _, S).
```

Semantica expresiilor aritmetice

- Semantica unei variabile

  $\langle x\ ,\ \sigma\rangle \to \langle i\ ,\ \sigma\rangle \quad$ *dacă* $i = \sigma(x)$

Prolog

```
step(X,S,I,S) :-
  atom(X),
  get(S,X,I).
```

Semantica expresiilor aritmetice

- Semantica adunării a două expresii aritmetice

$$\langle i_1 + i_2 \ , \ \sigma \rangle \to \langle i \ , \ \sigma \rangle \quad \textit{dacă } i = i_1 + i_2$$

$$\frac{\langle a_1 \ , \ \sigma \rangle \to \langle a_1' \ , \ \sigma' \rangle}{\langle a_1 + a_2 \ , \ \sigma \rangle \to \langle a_1' + a_2 \ , \ \sigma' \rangle} \qquad \frac{\langle a_2 \ , \ \sigma \rangle \to \langle a_2' \ , \ \sigma' \rangle}{\langle a_1 + a_2 \ , \ \sigma \rangle \to \langle a_1 + a_2' \ , \ \sigma' \rangle}$$

Prolog

```
step(I1 + I2,S,I,S):- integer(I1),integer(I2),
                              I is I1 + I2.

step(AE + AE1,S1,AE + AE2,S1):- step(AE1,S1,AE2,S2).

step(AE1 + AE,S1,AE2 + AE,S2):- step(AE1,S1,AE2,S2).
```

Semantica expresiilor aritmetice

Exemplu

?- step(a + b, [vi(a,1),vi(b,2)],AE, S).
AE = 1+b,
S = [vi(a, 1), vi(b, 2)] .

?- step(1 + b, [vi(a,1),vi(b,2)],AE, S).
AE = 1+2,
S = [vi(a, 1), vi(b, 2)] .

?- step(1 + 2, [vi(a,1),vi(b,2)],AE, S).
AE = 3,
S = [vi(a, 1), vi(b, 2)]

Semantica expresiilor aritmetice

Exemplu

?- step(a + b, [vi(a,1),vi(b,2)],AE, S).
AE = 1+b,
S = [vi(a, 1), vi(b, 2)] .

?- step(1 + b, [vi(a,1),vi(b,2)],AE, S).
AE = 1+2,
S = [vi(a, 1), vi(b, 2)] .

?- step(1 + 2, [vi(a,1),vi(b,2)],AE, S).
AE = 3,
S = [vi(a, 1), vi(b, 2)]

- Semantica * și - se definesc similar.

Semantica expresiilor booleene

- Semantica operatorului de comparație

$\langle i_1 =< i_2 \ , \ \sigma \rangle \to \langle \mathbf{false} \ , \ \sigma \rangle \quad$ *dacă* $i_1 > i_2$

$\langle i_1 =< i_2 \ , \ \sigma \rangle \to \langle \mathbf{true} \ , \ \sigma \rangle \quad$ *dacă* $i_1 \leq i_2$

$$\frac{\langle a_1 \ , \ \sigma \rangle \to \langle a_1' \ , \ \sigma' \rangle}{\langle a_1 =< a_2 \ , \ \sigma \rangle \to \langle a_1' =< a_2 \ , \ \sigma' \rangle} \qquad \frac{\langle a_2 \ , \ \sigma \rangle \to \langle a_2' \ , \ \sigma' \rangle}{\langle a_1 =< a_2 \ , \ \sigma \rangle \to \langle a_1 =< a_2' \ , \ \sigma' \rangle}$$

Prolog

```
step(I1 =< I2,S,true,S):- integer(I1),integer(I2),
                                    (I1 =< I2).
step(I1 =< I2,S,false,S):- integer(I1),integer(I2),
                                     (I1 > I2).
step(AE =< AE1,S1,AE =< AE2,S2):- step(AE1,S1,AE2,S2).
step(AE1 =< AE,S1,AE2 =< AE,S2):- step(AE1,S1,AE2,S2).
```

Semantica expresiilor Booleene

- Semantica negației

$$\langle \textbf{not(true)} \ , \ \sigma \rangle \rightarrow \langle \textbf{false} \ , \ \sigma \rangle$$

$$\langle \textbf{not(false)} \ , \ \sigma \rangle \rightarrow \langle \textbf{true} \ , \ \sigma \rangle$$

$$\frac{\langle a \ , \ \sigma \rangle \rightarrow \langle a' \ , \ \sigma' \rangle}{\langle \textbf{not} \ (a) \ , \ \sigma \rangle \rightarrow \langle \textbf{not} \ (a') \ , \ \sigma' \rangle}$$

Prolog

```
step(not(true),S,false,S) .
step(not(false),S,true,S) .

step(not(BE1),S1,not(BE2),S2) :- step(BE1,S1,BE2,S2).
```

Semantica compunerii și a blocurilor

- Semantica blocurilor

  $\langle \{\ s\ \}\ ,\ \sigma \rangle \to \langle s\ ,\ \sigma \rangle$

- Semantica compunerii secvențiale

  $\langle \{\}; s_2\ ,\ \sigma \rangle \to \langle s_2\ ,\ \sigma \rangle \qquad \dfrac{\langle s_1\ ,\ \sigma \rangle \to \langle s_1'\ ,\ \sigma' \rangle}{\langle s_1; s_2\ ,\ \sigma \rangle \to \langle s_1'; s_2\ ,\ \sigma' \rangle}$

Prolog

```
step({E},S,E,S).

step((skip;St2),S,St2,S).
step((St1;St),S1,(St2;St),S2) :-
                                step(St1,S1,St2,S2) .
```

Semantica atribuirii

Semantica atribuirii

$\langle x = i\ ,\ \sigma\rangle \rightarrow \langle \{\}\ ,\ \sigma'\rangle \quad \textit{dacă}\ \sigma' = \sigma[i/x]$

$$\frac{\langle a\ ,\ \sigma\rangle \rightarrow \langle a'\ ,\ \sigma'\rangle}{\langle x = a\ ,\ \sigma\rangle \rightarrow \langle x = a'\ ;\ ,\ \sigma'\rangle}$$

Prolog

```
step(X = I,S,skip,S1) :- integer(I),set(S,X,I,S1).

step(X = AE1,S1,X = AE2,S2) :-
                                    step(AE1,S1,AE2,S2).
```

Semantica lui `if`

Semantica lui `if`

$$\langle \mathbf{if}\ (\mathbf{true}, bl_1, bl_2)\ ,\ \sigma\rangle \to \langle bl_1\ ,\ \sigma\rangle$$

$$\langle \mathbf{if}\ (\mathbf{false}, bl_1, bl_2)\ ,\ \sigma\rangle \to \langle bl_2\ ,\ \sigma\rangle$$

$$\frac{\langle b\ ,\ \sigma\rangle \to \langle b'\ ,\ \sigma'\rangle}{\langle \mathbf{if}\ (b, bl_1, bl_2)\ ,\ \sigma\rangle \to \langle \mathbf{if}\ (b', bl_1, bl_2)\ ,\ \sigma'\rangle}$$

Prolog

```
step(if(true,St1,_),S,St1,S).
step(if(false,_,St2),S,St2,S).

step(if(BE1,St1,St2),S1,if(BE2,St1,St2),S2) :-
                                    step(BE1,S1,BE2,S2) .
```

Semantica lui `while`

- Semantica lui `while`

$$\langle \textbf{while}\ (b, bl)\ ,\ \sigma\rangle \rightarrow \langle \textbf{if}\ (b, bl\ \textbf{;while}\ (b, bl), \textbf{skip})\ ,\ \sigma\rangle$$

Prolog

```
step(while(BE,St),S,if(BE,(St;while(BE,St)),skip),S).
```

Semantica programelor

- Semantica programelor

$$\frac{\langle a_1 \ , \ \sigma_1 \rangle \rightarrow \langle a_2 \ , \ \sigma_2 \rangle}{\langle (\mathbf{skip}, a_1) \ , \ \sigma_1 \rangle \rightarrow \langle (\mathbf{skip}, a_2) \ , \ \sigma_2 \rangle}$$

$$\frac{\langle s_1 \ , \ \sigma_1 \rangle \rightarrow \langle s_2 \ , \ \sigma_2 \rangle}{\langle (s_1, a) \ , \ \sigma_1 \rangle \rightarrow \langle (s_2, a) \ , \ \sigma_2 \rangle}$$

Prolog

```
step((skip,AE1),S1,(skip,AE2),S2) :-
                                step(AE1,S1,AE2,S2) .
step((St1,AE),S1,(St2,AE),S2) :-
                                step(St1,S1,St2,S2).
```

Execuția programelor

Prolog

```
all_steps(P1, S1, PF, SF) :-
    step(P1, S1, P2, S2)
    ->  all_steps(P2, S2, PF, SF)
    ;   PF = P1, SF = S1.

run_program(Name) :- defpg(Name,{P},E),
                     all_steps((P,E), [],(skip, I), _),
                     write(I).
```

Exemplu

```
defpg(pg2, {x = 10 ; sum = 0; while(0 =< x, {
                                  sum = sum + x;
                                  x = x - 1})},sum)
```

```
?- run_program(pg2).
55
true
```

Execuția programelor: `trace`

Putem defini o funcție care ne permite să urmărim execuția unui program în implementarea noastră?

Execuția programelor: `trace`

Putem defini o funcție care ne permite să urmărim execuția unui program în implementarea noastră?

Prolog

```
all_steps(P1, S1, PF, SF, [(P1, S1)| Trace]) :-
    step(P1, S1, P2, S2)
    ->  all_steps(P2, S2, PF, SF, Trace)
    ;   PF = P1, SF = S1, Trace=[].

trace_program(Name) :- defpg(Name,{P},E),
                       all_steps((P,E), [],_, _, Trace),
                       write(Trace).
```

Execuția programelor: `trace_program`

Exemplu

```
?- trace_program(pg2).
. . .
((if(0=<x,(sum=sum+x;x=x-1;while(0=<x,sum=sum+x;x=x-1)),skip), sum),
[vi(x,-1),vi(sum,55)]),
((if(0=<-1,(sum=sum+x;x=x-1;while(0=<x,sum=sum+x;x=x-1)),skip), sum),
[vi(x,-1),vi(sum,55)]),
((if(false,(sum=sum+x;x=x-1;while(0=<x,sum=sum+x;x=x-1)),skip), sum),
[vi(x,-1),vi(sum,55)]),
((skip, sum), [vi(x,-1),vi(sum,55)]),
((skip, 55), [vi(x,-1),vi(sum,55)]),
```

Sintaxa limbajului LAMBDA

BNF

$$
\begin{array}{rcl}
e & ::= & x \\
 & | & \lambda x.e \\
 & | & e\ e \\
 & | & \texttt{let}\ x = e\ \texttt{in}\ e
\end{array}
$$

Verificarea sintaxei în Prolog

```
exp(Id) :- atom(Id).                          % identifier
exp(Id -> Exp) :- atom(Id), exp(Exp).         % lambda
exp(Exp1 $ Exp2) :- exp(Exp1), exp(Exp2). % application
exp(let(Id, Exp1, Exp2)) :- atom(Id), exp(Exp1), exp(Exp2).
```

Semantica small-step pentru Lambda

- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație de tranziție între expresii dată fiind o stare cu valori pentru variabilele libere

  $\rho \vdash cod \rightarrow cod'$ `step(Env, Cod1,Cod2)`

- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții.

Semantica variabilelor

$$\rho \vdash x \to v \quad \textit{dacă } \rho(x) = v$$

Prolog

```
step(Env, X, V) :- atom(X), get(Env, X, V).
```

Semantica λ-abstracției

$$\rho \vdash \lambda x.e \rightarrow \mathit{closure}(x, e, \rho)$$

λ-abstracția se evaluează la o valoare specială numită closure care capturează valorile curente ale variabilelor pentru a se putea executa în acest mediu atunci când va fi aplicată.

Prolog

```
step(Env, X -> E, closure(X, E, Env)).
```

Semantica construcției `let`

$$\rho \vdash \texttt{let}\ x = e_1\ \texttt{in}\ e_2 \rightarrow (\lambda x.e2)\ e_1$$

A îi da lui x valoarea lui e_1 în e_2 este același lucru cu a aplica funcția de x cu corpul e_2 expresiei e_1.

Prolog

```
step(_, let(X, E1, E2), (X -> E2) $ E1).
```

Semantica operatorului de aplicare

$$\frac{\rho_e[v/x] \vdash e \to e'}{\rho \vdash \mathit{closure}(x, e, \rho_e)\ v \to \mathit{closure}(x, e', \rho_e)\ v} \quad \textit{dacă } v \text{ valoare}$$

$$\rho \vdash \mathit{closure}(x, v, \rho_e)\ e \to v \quad \textit{dacă } v \text{ valoare}$$

$$\frac{\rho \vdash e_1 \to e_1'}{\rho \vdash e_1\ e_2 \to e_1'\ e_2} \qquad \frac{\rho \vdash e_2 \to e_2'}{\rho \vdash e_1\ e_2 \to e_1\ e_2'}$$

Prolog

```
step(Env, E $ E1, E $ E2) :- step(Env, E1, E2).
step(Env, E1 $ E, E2 $ E) :- step(Env, E1, E2).
step(Env, closure(X, E, EnvE) $ V, Result) :-
    \+ step(Env, V, _),
    set(EnvE, X, V, EnvEX),
    step(EnvEX, E, E1)
    ->  Result = closure(X, E1, EnvE) $ V
    ;   Result = E.
```

Pe săptămâna viitoare!

Curs 10

2020-2021

Fundamentele limbajelor de programare

Cuprins

Sintaxa limbajului LAMBDA

BNF

$$
\begin{array}{rcl}
e & ::= & x \mid n \mid \mathit{true} \mid \mathit{false} \\
& \mid & e + e \mid e < e \mid \texttt{not}\ (e) \\
& \mid & \texttt{if}\ e\ \texttt{then}\ e\ \texttt{else}\ e \\
& \mid & \lambda x.e \mid e\ e \\
& \mid & \texttt{let}\ x = e\ \texttt{in}\ e
\end{array}
$$

Verificarea sintaxei în Prolog

```
exp(Id) :- atom(Id).                          % identifier
exp(Lit) :- Lit = true ; Lit = false ; integer(Lit).
exp(E1 + E2) :- exp(E1), exp(E2).             % same for any op
exp(if(E1, E2, E3)) :- exp(E1), exp(E2), exp(E3).
exp(Id -> Exp) :- atom(Id), exp(Exp).         % lambda
exp(Exp1 $ Exp2) :- exp(Exp1), exp(Exp2). % application
exp(let(Id, Exp1, Exp2)) :- atom(Id), exp(Exp1), exp(Exp2).
```

Semantica small-step pentru Lambda

- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație de tranziție între expresii dată fiind o stare cu valori pentru variabilele libere

  $\rho \vdash cod \rightarrow cod'$ `step(Env, Cod1,Cod2)`

- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții.

Semantica variabilelor

$$\rho \vdash x \to v \quad \textit{dacă } \rho(x) = v$$

Prolog

```
step(Env, X, V) :- atom(X), get(Env, X, V).
```

Semantica expresiilor aritmetice

- Semantica adunării a două expresii aritmetice

$$\langle i_1 + i_2 \ , \ \sigma \rangle \rightarrow \langle i \ , \ \sigma \rangle \quad \textit{dacă } i = i_1 + i_2$$

$$\frac{\langle a_1 \ , \ \sigma \rangle \rightarrow \langle a_1' \ , \ \sigma' \rangle}{\langle a_1 + a_2 \ , \ \sigma \rangle \rightarrow \langle a_1' + a_2 \ , \ \sigma' \rangle} \qquad \frac{\langle a_2 \ , \ \sigma \rangle \rightarrow \langle a_2' \ , \ \sigma' \rangle}{\langle a_1 + a_2 \ , \ \sigma \rangle \rightarrow \langle a_1 + a_2' \ , \ \sigma' \rangle}$$

- Pentru alți operatori (artimetici, de comparație, booleeni, condițional)
  - Similar cu regulile din IMP

Prolog

```
step(_, I1 + I2,I):- integer(I1),integer(I2),
                     I is I1 + I2.

step(Env, AE + AE1,AE + AE2):- step(Env, AE1,AE2).

step(Env, AE1 + AE,AE2 + AE):- step(Env, AE1,AE2).
```

Semantica λ-abstracției

$$\rho \vdash \lambda x.e \rightarrow \mathit{closure}(x, e, \rho)$$

λ-abstracția se evaluează la o valoare specială numită closure care capturează valorile curente ale variabilelor pentru a se putea executa în acest mediu atunci când va fi aplicată.

Prolog

```
step(Env, X -> E, closure(X, E, Env)).
```

Semantica construcției **`let`**

$$\rho \vdash \texttt{let}\ x = e_1\ \texttt{in}\ e_2 \rightarrow (\lambda x.e2)\ e_1$$

A îi da lui x valoarea lui e_1 în e_2 este același lucru cu a aplica funcția de x cu corpul e_2 expresiei e_1.

Prolog

```
step(_, let(X, E1, E2), (X -> E2) $ E1).
```

Semantica operatorului de aplicare

$$\frac{\rho_e[v/x] \vdash e \to e'}{\rho \vdash \mathit{closure}(x, e, \rho_e)\ v \to \mathit{closure}(x, e', \rho_e)\ v} \quad \textit{dacă } v \text{ valoare}$$

$$\rho \vdash \mathit{closure}(x, v, \rho_e)\ e \to v \quad \textit{dacă } v \text{ valoare}$$

$$\frac{\rho \vdash e_1 \to e_1'}{\rho \vdash e_1\ e_2 \to e_1'\ e_2} \qquad \frac{\rho \vdash e_2 \to e_2'}{\rho \vdash e_1\ e_2 \to e_1\ e_2'}$$

Prolog

```
step(Env, E $ E1, E $ E2) :- step(Env, E1, E2).
step(Env, E1 $ E, E2 $ E) :- step(Env, E1, E2).
step(Env, closure(X, E, EnvE) $ V, Result) :-
    \+ step(Env, V, _),
    set(EnvE, X, V, EnvEX),
    step(EnvEX, E, E1)
    ->  Result = closure(X, E1, EnvE) $ V
    ;   Result = E.
```

Problemă: Sintaxa este prea permisivă

Problemă: Mulți termeni acceptați de sintaxă nu pot fi evaluați

- $2\ (\lambda x.x)$
- $(\lambda x.x) + 1$
- $(\lambda x.x + 1)\ (\lambda x.x)$

Problemă: Sintaxa este prea permisivă

Problemă: Mulți termeni acceptați de sintaxă nu pot fi evaluați

- 2 $(\lambda x.x)$— expresia din stânga aplicației trebuie să reprezinte o funcție
- $(\lambda x.x) + 1$ — adunăm funcții cu numere
- $(\lambda x.x + 1)\ (\lambda x.x)$ — pot face o reducție, dar tot nu pot evalua

Soluție: Identificarea (precisă) a programelor corecte

- Definim tipuri pentru fragmente de program corecte (e.g., int, bool)
- Definim (recursiv) o relație care să lege fragmente de program de tipurile asociate

$$((\lambda x.x + 1)\ ((\lambda x.x)\ 3)) : \text{int}$$

Relația de asociere de tipuri

Definim (recursiv) o relație de forma $\Gamma \vdash e : \tau$, unde

- τ este un tip

  $\tau ::= int$ [întregi]
  $\quad | \; bool$ [valori de adevăr]
  $\quad | \; \tau \to \tau$ [funcții]
  $\quad | \; a$ [variabile de tip]

- e este un termen (potențial cu variabile libere)
- Γ este mediul de tipuri, o funcție parțială finită care asociază tipuri variabilelor (libere ale lui e)
- Variabilele de tip sunt folosite pentru a indica polimorfismul

Cum citim $\Gamma \vdash e : \tau$?

Dacă variabila x are tipul $\Gamma(x)$ pentru orice $x \in dom(\Gamma)$,
atunci termenul e are tipul τ.

Axiome

$(:\text{VAR})$ $\quad \Gamma \vdash x : \tau \quad$ *dacă* $\Gamma(x) = \tau$

$(:\text{INT})$ $\quad \Gamma \vdash n : \mathit{int} \quad$ *dacă* n întreg

$(:\text{BOOL})$ $\quad \Gamma \vdash b : \mathit{bool} \quad$ *dacă* $b = \mathit{true}$ *or* $b = \mathit{false}$

Expresii

$$(:\text{IOP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : int \quad \Gamma \vdash e_2 : int}{\Gamma \vdash e_1 \ o \ e_2 : int} \quad \text{dacă } o \in \{+, -, *, /\}$$

$$(:\text{COP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : int \quad \Gamma \vdash e_2 : int}{\Gamma \vdash e_1 \ o \ e_2 : bool} \quad \text{dacă } o \in \{\leq, \geq, <, >, =\}$$

$$(:\text{BOP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : bool \quad \Gamma \vdash e_2 : bool}{\Gamma \vdash e_1 \ o \ e_2 : bool} \quad \text{dacă } o \in \{\textbf{and}, \textbf{or}\}$$

$$(:\text{IF}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_b : bool \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \textbf{if } e_b \textbf{ then } e_1 \textbf{ else } e_2 : \tau}$$

Fragmentul funcțional

$$(:\text{FN}) \quad \frac{\Gamma' \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \tau \to \tau'} \quad \textit{dacă } \Gamma' = \Gamma[x \mapsto \tau]$$

$$(:\text{APP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1\ e_2 : \tau}$$

Programe în execuție

Problemă:

- În timpul execuției programul conține valori de tip closure
- Care este tipul lor?

Soluție

- Adăugam regula (:CL) $\dfrac{\Gamma_\rho \vdash \lambda x.e : \tau}{\Gamma \vdash closure(x, e, \rho) : \tau}$ *unde*
- Mediul de tipuri Γ_ρ asociat unui mediu de execuție ρ satisface:
  - $Dom(\Gamma_\rho) = Dom(\rho)$
  - Pentru orice variabilă $x \in Dom(\rho)$, există τ tip și v valoare astfel încât $\Gamma_\rho(x) = \tau, \rho(x) = v$ și $\vdash v : \tau$

Proprietăți

Theorem (Proprietatea de a progresa)

Dacă $\Gamma_\rho \vdash e : \tau$ *atunci* e *este valoare sau* e *poate progresa în* ρ*: există* e' *astfel încât* $\rho \vdash e \to e'$.

Theorem (Proprietatea de conservare a tipului)

Dacă $\Gamma_\rho \vdash e : \tau$ *și* $\rho \vdash e \to e'$, *atunci* $\Gamma'_\rho \vdash e' : \tau$.

Theorem (Siguranță—programele bine formate nu se împotmolesc)

Dacă $\Gamma_\rho \vdash e : \tau$ *și* $\rho \vdash e \longrightarrow^* e'$, *atunci* e' *este valoare sau există* e'', *astfel încât* $\rho \vdash e' \to e''$.

Probleme computaționale

Verificarea tipului

Date fiind Γ, e și τ, verificați dacă $\Gamma \vdash e : \tau$.

Determinarea (inferarea) tipului

Date fiind Γ și e, găsiți (sau arătați ce nu există) un τ astfel încât $\Gamma \vdash e : \tau$.

- A doua problemă e mai grea în general decât prima
- Algoritmi de inferare a tipurilor
  - Colectează constrângeri asupra tipului
  - Folosesc metode de rezolvare a constrângerilor (programare logică)

Probleme computaționale

Theorem (Determinarea tipului este decidabilă)

Date fiind Γ *și* e*, poate fi găsit (sau demonstrat că nu există) un* τ *astfel încât* $\Gamma \vdash e : \tau$.

Theorem (Verificarea tipului este decidabilă)

Date fiind Γ, e *și* τ, *problema* $\Gamma \vdash e : \tau$ *este decidabilă.*

Theorem (Unicitatea tipului)

Dacă $\Gamma \vdash e : \tau$ *și* $\Gamma \vdash e : \tau'$, *atunci* $\tau = \tau'$.

Exemplu

Care este tipul expresiei următoare (dacă are)

$$\lambda x.\lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y$$

Aplicăm regula

$$(:\text{FN})\quad \frac{\Gamma' \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \tau \to \tau'} \quad \textit{dacă}\ \Gamma' = \Gamma[x \mapsto \tau]$$

$\vdash \lambda x.\lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_x \to t$ dacă
$x \mapsto t_x \vdash \lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t$

Exemplu

Care este tipul expresiei următoare (dacă are)

$$\lambda x.\lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y$$

Aplicăm regula

$$(:\text{FN})\quad \frac{\Gamma' \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \tau \to \tau'} \quad \textit{dacă}\ \Gamma' = \Gamma[x \mapsto \tau]$$

$\vdash \lambda x.\lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_x \to t$ dacă
$x \mapsto t_x \vdash \lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t$
Mai departe: $x \mapsto t_x \vdash \lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_y \to t_0$ dacă
$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y \vdash \lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_0$ și, de mai sus,
$t = t_y \to t_0$

Exemplu

Care este tipul expresiei următoare (dacă are)

$$\lambda x.\lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y$$

Aplicăm regula

$$(:\text{FN})\quad \frac{\Gamma' \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \tau \to \tau'} \quad \textit{dacă}\ \Gamma' = \Gamma[x \mapsto \tau]$$

$\vdash \lambda x.\lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_x \to t$ dacă
$x \mapsto t_x \vdash \lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t$
Mai departe: $x \mapsto t_x \vdash \lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_y \to t_0$ dacă
$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y \vdash \lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_0$ și, de mai sus,
$t = t_y \to t_0$
Mai departe: $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y \vdash \lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_z \to t_1$
dacă $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_1$ și, de mai sus, $t_0 = t_z \to t_1$

Exemplu

Unde suntem

$\vdash \lambda x.\lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_x \to t$ dacă
$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_1$ și $t_0 = t_z \to t_1$,
$t = t_y \to t_0$.

Aplicăm regula (:IF)

$$\frac{\Gamma \vdash e_b : bool \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{if}\ e_b\ \mathbf{then}\ e_1\ \mathbf{else}\ e_2 : \tau}$$

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_1$ dacă
$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y = 0 : \mathbf{bool}$ și $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash z : t_1$ și
$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash x/y : t_1$

Exemplu

Aplicăm regula

$$(:\text{COP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : int \quad \Gamma \vdash e_2 : int}{\Gamma \vdash e_1 \ o \ e_2 : bool} \quad \text{dacă } o \in \{\leq, \geq, <, >, =\}$$

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y = 0 : \mathbf{bool}$ dacă
$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y : \mathbf{int}$ și $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash 0 : \mathbf{int}$

Aplicăm regula $(:\text{INT}) \quad \Gamma \vdash n : int \quad$ dacă n întreg

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash 0 : \mathbf{int}$ este adevărat

Aplicăm regula

$$(:\text{IOP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : int \quad \Gamma \vdash e_2 : int}{\Gamma \vdash e_1 \ o \ e_2 : int} \quad \text{dacă } o \in \{+, -, *, /\}$$

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash x/y : \mathbf{int}$ dacă
$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash x : \mathbf{int}$ și $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y : \mathbf{int}$
și, de mai sus, $t_1 = \mathbf{int}$

Exemplu

Recapitulăm

$\vdash \lambda x.\lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_x \to t$ dacă
$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y : \mathbf{int}$ și $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash z : t_1$
$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash x : \mathbf{int}$ și $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y : \mathbf{int}$
și $t_0 = t_z \to t_1$, $t = t_y \to t_0$, $t_1 = \mathbf{int}$.

Aplicăm regula (:VAR) $\Gamma \vdash x : \tau$ *dacă* $\Gamma(x) = \tau$

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y : t_y$ adevărat și, de mai sus $t_y = \mathbf{int}$
$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash z : t_z$ adevărat și, de mai sus, $t_1 = t_z$
$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash x : t_x$ adevărat și, de mai sus, $t_x = \mathbf{int}$

Exemplu

Finalizăm

$\vdash \lambda x.\lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : t_x \to t$ dacă
$t_0 = t_z \to t_1$, $t = t_y \to t_0$, $t_1 = \mathbf{int}$, $t_y = \mathbf{int}$, $t_1 = t_z$ și $t_x = \mathbf{int}$.

Rezolvăm constrângerile și obținem

$\vdash \lambda x.\lambda y.\lambda z.\ \mathbf{if}\ y = 0\ \mathbf{then}\ z\ \mathbf{else}\ x/y : \mathbf{int} \to \mathbf{int} \to \mathbf{int} \to \mathbf{int}$

Relația de asociere de tipuri în Prolog

Definim (recursiv) o relație de forma `type(Gamma, E, T)`, unde

- `Gamma` este o listă de perechi de forma `(X, T)` unde `X` este un identificator și `T` este o expresie de tip cu variabile
- `E` este o λ-expresie scrisă cu sintaxa descrisă mai sus
- `T` este o expresie de tip cu variabile

Sintaxa limbajului LAMBDA

BNF

$$
\begin{array}{rcl}
e & ::= & x \mid n \mid \mathit{true} \mid \mathit{false} \\
& \mid & e + e \mid e < e \mid \texttt{not}\ (e) \\
& \mid & \texttt{if}\ e\ \texttt{then}\ e\ \texttt{else}\ e \\
& \mid & \lambda x.e \mid e\ e \\
& \mid & \texttt{let}\ x = e\ \texttt{in}\ e
\end{array}
$$

Verificarea sintaxei în Prolog

```
exp(Id) :- atom(Id).                          % identifier
exp(Lit) :- Lit = true ; Lit = false ; integer(Lit).
exp(E1 + E2) :- exp(E1), exp(E2).             % same for any op
exp(if(E1, E2, E3)) :- exp(E1), exp(E2), exp(E3).
exp(Id -> Exp) :- atom(Id), exp(Exp).         % lambda
exp(Exp1 $ Exp2) :- exp(Exp1), exp(Exp2). % application
exp(let(Id, Exp1, Exp2)) :- atom(Id), exp(Exp1), exp(Exp2).
```

Sintaxa tipurilor

BNF

$\tau ::=$ *int* [întregi]
| *bool* [valori de adevăr]
| $\tau \rightarrow \tau$ [funcții]
| a [variabile de tip]

Verificarea sintaxei tipurilor în Prolog

```
is_type(X) :- variable(X).      % variabile
is_type(int).                   % intregi
is_type(bool).                  % valori de adevar
is_type(T1 -> T2) :-            % functii
    is_type(T1), is_type(T2).
```

Axiome

(:VAR) $\Gamma \vdash x : \tau \quad$ *dacă* $\Gamma(x) = \tau$

```
type(Gamma, X, T) :- atom(X), get(Gamma, X, T).
```

(:INT) $\Gamma \vdash n : int \quad$ *dacă* n întreg

```
type(_, I, int) :- integer(I).
```

(:BOOL) $\Gamma \vdash b : bool \quad$ *dacă* $b = true$ *or* $b = false$

```
type(_, true, bool).
type(_, false, bool).
```

Expresii

$$(:\text{IOP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : int \quad \Gamma \vdash e_2 : int}{\Gamma \vdash e_1\ o\ e_2 : int} \quad \text{dacă } o \in \{+, -, *, /\}$$

```
type(Gamma, E1 + E2, int) :-
    type(Gamma, E1, int), type(Gamma, E2, int).
```

$$(:\text{COP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : int \quad \Gamma \vdash e_2 : int}{\Gamma \vdash e_1\ o\ e_2 : bool} \quad \text{dacă } o \in \{\leq, \geq, <, >, =\}$$

```
type(Gamma, E1 < E2, bool) :-
    type(Gamma, E1, int), type(Gamma, E2, int).
```

$$(:\text{BOP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : bool \quad \Gamma \vdash e_2 : bool}{\Gamma \vdash e_1\ o\ e_2 : bool} \quad \text{dacă } o \in \{\textbf{and}, \textbf{or}\}$$

```
type(Gamma, and(E1, E2), bool) :-
    type(Gamma, E1, bool), type(Gamma, E2, bool).
```

Expresia condițională

$$(:\text{IF}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_b : \mathit{bool} \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{if}\ e_b\ \mathbf{then}\ e_1\ \mathbf{else}\ e_2 : \tau}$$

```
type(Gamma, if(E, E1, E2), T) :-
    type(Gamma, E, bool),
    type(Gamma, E1, T),
    type(Gamma, E2, T).
```

Fragmentul funcțional

$$(:\text{FN}) \quad \frac{\Gamma' \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \tau \to \tau'} \quad \textit{dacă } \Gamma' = \Gamma[x \mapsto \tau]$$

```
type(Gamma, X -> E, TX -> TE) :-
    atom(X), set(Gamma, X, TX, GammaX), type(GammaX, E, TE).
```

$$(:\text{APP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1\ e_2 : \tau}$$

```
type(Gamma, E1 $ E2, T) :-
    type(Gamma, E, TE2 -> T), type(Gamma, E2, TE2).
```

Tipurile variabile nu sunt suficiente

Tipurile variabile sunt destul de flexibile

- $\vdash \lambda x.x : t \to t$ pentru orice t
- $\vdash \mathbf{if}\ (\lambda x.x)\ \mathit{true}\ \mathbf{then}\ (\lambda x.x)\ 3\ \mathbf{else}\ 4 : \mathbf{int}$

Tipurile variabile nu sunt suficiente

Tipurile variabile sunt destul de flexibile

- $\vdash \lambda x.x : t \to t$ pentru orice t
- $\vdash \mathbf{if}\ (\lambda x.x)\ \mathit{true}\ \mathbf{then}\ (\lambda x.x)\ 3\ \mathbf{else}\ 4 : \mathbf{int}$

Dar tipul unei expresii este fixat:

$$\nvdash (\lambda id.\mathbf{if}\ id\ \mathit{true}\ \mathbf{then}\ id\ 3\ \mathbf{else}\ 4)(\lambda x.x) : \mathbf{int}$$

Tipurile variabile nu sunt suficiente

Tipurile variabile sunt destul de flexibile

- $\vdash \lambda x.x : t \to t$ pentru orice t
- $\vdash \mathbf{if}\ (\lambda x.x)\ \mathit{true}\ \mathbf{then}\ (\lambda x.x)\ 3\ \mathbf{else}\ 4 : \mathbf{int}$

Dar tipul unei expresii este fixat:

$$\not\vdash (\lambda \mathit{id}.\mathbf{if}\ \mathit{id}\ \mathit{true}\ \mathbf{then}\ \mathit{id}\ 3\ \mathbf{else}\ 4)(\lambda x.x) : \mathbf{int}$$

Soluție

Pentru funcțiile cu nume, am vrea să fie ca și cum am calcula mereu tipul

$$\vdash \mathbf{let}\ \mathit{id} = (\lambda x.x)\ \mathbf{in}\ \mathbf{if}\ \mathit{id}\ \mathit{true}\ \mathbf{then}\ \mathit{id}\ 3\ \mathbf{else}\ 4) : \mathbf{int}$$

Operațional: redenumim variabilele de tip când instanțiem numele funcției

Scheme de tipuri

- Numim schemă de tipuri o expresie de forma $\langle \tau \rangle$,
  unde τ este e un expresie tip cu variabile
- variabilele dintr-o schemă nu pot fi constrânse
  e ca și cum ar fi cuantificate universal
- O schemă poate fi concretizată la un tip obișnuit substituindu-i fiecare variabilă cu orice tip (poate fi și variabilă)
  - Pentru orice substituție θ de la variabile de tip la tipuri cu variabile

Reguli pentru scheme

$$(:\text{LET}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma_1 \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \texttt{let}\ x = e_1\ \texttt{in}\ e2 : \tau} \quad \textit{dacă}\ \Gamma_1 = \Gamma[\langle \tau_1 \rangle / x]$$

Reguli pentru scheme

$$(:\text{LET}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma_1 \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \textbf{let } x = e_1 \textbf{ in } e2 : \tau} \quad \textit{dacă } \Gamma_1 = \Gamma[\langle \tau_1 \rangle / x]$$

```
type(Gamma, let(X, E1, E2), T) :-
    type(Gamma, E1, T1),
    copy_term(T1, FreshT1),    % redenumeste variabilele
                               % ca sa nu poata fi constranse
    set(Gamma, X, scheme(FreshT1), GammaX),
    type(GammaX, E2, T).
```

Reguli pentru scheme

(:LET) $$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma_1 \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \textbf{let } x = e_1 \textbf{ in } e2 : \tau} \quad \textit{dacă } \Gamma_1 = \Gamma[\langle \tau_1 \rangle / x]$$

```
type(Gamma, let(X, E1, E2), T) :-
    type(Gamma, E1, T1),
    copy_term(T1, FreshT1),     % redenumeste variabilele
                                % ca sa nu poata fi constranse
    set(Gamma, X, scheme(FreshT1), GammaX),
    type(GammaX, E2, T).
```

(:SCH) $\Gamma \vdash x : \tau' \quad \textit{dacă } \Gamma(x) = \langle \tau \rangle \text{ și } \tau' = \theta(\tau)$

```
type(Gamma, X, T) :-
    atom(X), get(Gamma, X, T), is_type(T), !.
type(Gamma, X, T) :-
    atom(X), get(Gamma, X, scheme(TX)),
    copy_term(T1, T).           % redenumeste variabilele
                                % ca sa poata fi constranse
```

Pe săptămâna viitoare!

Curs 11

2020-2021

Fundamentele limbajelor de programare

Cuprins

Logica propoziţională (recap.)

Limbajul și formulele PL

- Limbajul PL
  - variabile propoziționale: $Var = \{p, q, v, \ldots\}$
  - conectori logici: $\neg$ (unar), $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ (binari)
- Formulele PL

$$\begin{array}{lcl} \mathit{var} & ::= & p \mid q \mid v \mid \ldots \\ \mathit{form} & ::= & \mathit{var} \mid (\neg \mathit{form}) \mid \mathit{form} \wedge \mathit{form} \mid \mathit{form} \vee \mathit{form} \\ & & \mid \mathit{form} \rightarrow \mathit{form} \mid \mathit{form} \leftrightarrow \mathit{form} \end{array}$$

- Conectorii sunt împărțiți în conectori de bază și conectori derivați (în funcție de formalism).
- Legături între conectori:

$$\begin{array}{rcl} \varphi \vee \psi & := & \neg\varphi \rightarrow \psi \\ \varphi \wedge \psi & := & \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \\ \varphi \leftrightarrow \psi & := & (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \end{array}$$

Sintaxa și semantica

Un sistem logic are două componente:

- Sintaxa
  - noțiuni sintactice: demonstrație, teoremă
  - notăm prin $\vdash \varphi$ faptul că φ este teoremă
  - notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că formula φ este demonstrabilă din mulțimea de formule Γ
- Semantica
  - noțiuni semantice: adevăr, model, tautologie (formulă universal adevărată)
  - notăm prin $\vDash \varphi$ faptul că φ este tautologie
  - notăm prin $\Gamma \vDash \varphi$ faptul că formula φ este adevărată atunci când toate formulele din mulțimea Γ sunt adevărate

Completitudine: Γ-teoremele și Γ-tautologiile coincid

$\Gamma \vdash \varphi$ dacă și numai dacă $\Gamma \vDash \varphi$

Exemplu

Formalizaţi următorul raţionament:

`If winter is coming and Ned is not alive then Robb is lord of Winterfell. Winter is coming. Rob is not lord of Winterfell. Then Ned is alive.`

O posibilă formalizare este următoarea:

p = `winter is coming`
q = `Ned is alive`
r = `Robb is lord of Winterfel`

$\{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, p, \neg r\} \models q$

Logica de ordinul I (recap.)

Logica de ordinul I - sintaxa

Limbaj de ordinul I $\mathcal{L}$

- unic determinat de $\tau = (\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C}, ari)$

Termenii lui $\mathcal{L}$, notați $Trm_{\mathcal{L}}$, sunt definiți inductiv astfel:

- orice variabilă este un termen;
- orice simbol de constantă este un termen;
- dacă $f \in \mathbf{F}$, $ar(f) = n$ și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $f(t_1, \ldots, t_n)$ este termen.

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt definite astfel:

- dacă $R \in \mathbf{R}$, $ar(R) = n$ și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $R(t_1, \ldots, t_n)$ este formulă atomică.

Formulele lui $\mathcal{L}$ sunt definite astfel:

- orice formulă atomică este o formulă
- dacă φ este o formulă, atunci $\neg\varphi$ este o formulă
- dacă φ și ψ sunt formule, atunci $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \to \psi$ sunt formule
- dacă φ este o formulă și x este o variabilă, atunci $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$ sunt formule

Logica de ordinul I - semantică

O structură este de forma $\mathcal{A} = (A, \mathbf{F}^{\mathcal{A}}, \mathbf{R}^{\mathcal{A}}, \mathbf{C}^{\mathcal{A}})$, unde

- A este o mulțime nevidă
- $\mathbf{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathbf{F}\}$ este o mulțime de operații pe A; dacă f are aritatea n, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$.
- $\mathbf{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathbf{R}\}$ este o mulțime de relații pe A; dacă R are aritatea n, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$.
- $\mathbf{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathbf{C}\}$.

O interpretare a variabilelor lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-interpretare) este o funcție $I : V \to A$.

Inductiv, definim interpretarea termenului t în $\mathcal{A}$ sub I notat $t_I^{\mathcal{A}}$.

Inductiv, definim când o formulă este adevărată în $\mathcal{A}$ în interpretarea I notat $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$. În acest caz spunem că $(\mathcal{A}, I)$ este model pentru φ.

O formulă φ este adevărată într-o structură $\mathcal{A}$, notat $\mathcal{A} \vDash \varphi$, dacă este adevărată în $\mathcal{A}$ sub orice interpretare. Spunem că $\mathcal{A}$ este model al lui φ.

O formulă φ este adevărată în logica de ordinul I, notat $\vDash \varphi$, dacă este adevărată în orice structură. O formulă φ este validă dacă $\vDash \varphi$.

O formulă φ este satisfiabilă dacă există o structură $\mathcal{A}$ și o $\mathcal{A}$-interpretare I astfel încât $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$.

Algoritmul de unificare

Unificare

- O subtituție σ este o funcție (parțială) de la variabile la termeni,
$$\sigma : V \to Trm_{\mathcal{L}}$$
- Doi termeni t_1 și t_2 se unifică dacă există o substituție θ astfel încât
$$\theta(t_1) = \theta(t_2).$$
- În acest caz, θ se numește unificatorul termenilor t_1 și t_2.
- Un unificator ν pentru t_1 și t_2 este un cel mai general unificator (cgu,mgu) dacă pentru orice alt unificator ν' pentru t_1 și t_2, există o substituție μ astfel încât
$$\nu' = \nu; \mu.$$

Algoritmul de unificare

- Pentru o mulțime finită de termeni $\{t_1, \ldots, t_n\}$, $n \geq 2$, algoritmul de unificare stabilește dacă există un cgu.
- Algoritmul lucrează cu două liste:
  - Lista soluție: S
  - Lista de rezolvat: R
- Inițial:
  - Lista soluție: $S = \emptyset$
  - Lista de rezolvat: $R = \{t_1 \doteq t_2, \ldots, t_{n-1} \doteq t_n\}$
- $\doteq$ este un simbol nou care ne ajută sa formăm perechi de termeni (ecuații).

Algoritmul de unificare

Algoritmul constă în aplicarea regulilor de mai jos:

- SCOATE
  - orice ecuație de forma $t \doteq t$ din R este eliminată.
- DESCOMPUNE
  - orice ecuație de forma $f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(t'_1, \ldots, t'_n)$ din R este înlocuită cu ecuațiile $t_1 \doteq t'_1, \ldots, t_n \doteq t'_n$.
- REZOLVĂ
  - orice ecuație de forma $x \doteq t$ sau $t \doteq x$ din R, unde variabila x nu apare în termenul t, este mutată sub forma $x \doteq t$ în S.
    În toate celelalte ecuații (din R și S), x este înlocuit cu t.

Algoritmul de unificare

Algoritmul se termină normal dacă $R = \emptyset$. În acest caz, S dă cgu.

Algoritmul este oprit cu concluzia inexistenței unui cgu dacă:

1. În R există o ecuație de forma
$$f(t_1, \ldots, t_n) \doteq g(t'_1, \ldots, t'_k) \text{ cu } f \neq g.$$
2. În R există o ecuație de forma $x \doteq t$ sau $t \doteq x$ și variabila x apare în termenul t.

Algoritmul de unificare - schemă

	Lista soluție S	Lista de rezolvat R
Inițial	$\emptyset$	$t_1 \doteq t'_1, \ldots, t_n \doteq t'_n$
SCOATE	S	$R', t \doteq t$
	S	R'
DESCOMPUNE	S	$R', f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(t'_1, \ldots, t'_n)$
	S	$R', t_1 \doteq t'_1, \ldots t_n \doteq t'_n$
REZOLVĂ	S	$R', x \doteq t$ sau $t \doteq x$, x nu apare în t
	$x \doteq t, S[x/t]$	$R'[x/t]$
Final	S	$\emptyset$

$S[x/t]$: în toate ecuațiile din S, x este înlocuit cu t

Exemplu

Exemplu

- Ecuațiile $\{g(y) \doteq x,\ f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)\}$ au gcu?

S	R	
$\emptyset$	$g(y) \doteq x,\ f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(g(z), w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z),\ h(g(y)) \doteq w,\ y \doteq z$	REZOLVĂ
$w \doteq h(g(y))$, $x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z),\ y \doteq z$	REZOLVĂ
$y \doteq z, x \doteq g(z)$, $w \doteq h(g(z))$	$g(z) \doteq g(z)$	SCOATE
$y \doteq z, x \doteq g(z)$, $w \doteq h(g(z))$	$\emptyset$	

- $\nu = \{y/z,\ x/g(z),\ w/h(g(z))\}$ este cgu.

Exemplu

Exemplu

- Ecuațiile $\{g(y) \doteq x,\ f(x, h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)\}$ au gcu?

S	R	
$\emptyset$	$g(y) \doteq x,\ f(x, h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z),\ h(y) \doteq b,\ y \doteq z$	- EȘEC -

- h și b sunt simboluri de operații diferite!
- Nu există unificator pentru ecuațiile din U.

Exemplu

Exemplu

- Ecuațiile $\{g(y) \doteq x,\ f(x, h(x), y) \doteq f(y, w, z)\}$ au gcu?

S	R	
$\emptyset$	$g(y) \doteq x,\ f(x, h(x), y) \doteq f(y, w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(y, w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq y,\ h(g(y)) \doteq w,\ y \doteq z$	- EȘEC -

- În ecuația $g(y) \doteq y$, variabila y apare în termenul $g(y)$.
- Nu există unificator pentru ecuațiile din U.

Validitate și satisfiabilitate

Propoziție

Dacă φ este o formulă atunci

φ este validă dacă și numai dacă $\neg\varphi$ nu este satisfiabilă.

Formă clauzală. Rezoluție

Literali. FNC

- În logica propoziţională un literal este o variabilă sau negaţia unei variabile.

$$\mathit{literal} := \; p \mid \neg p \qquad \text{unde } p \text{ este variabilă propoziţională}$$

- În logica de ordinul I un literal este o formulă atomică sau negaţia unei formule atomice.

$$\mathit{literal} := \; P(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg P(t_1, \ldots, t_n)$$

unde $P \in \mathbf{R}, \mathit{ari}(P) = n,$ şi $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni.

- Pentru un literal L vom nota cu L^c literalul complement.

O formulă este în formă normală conjunctivă (FNC) dacă este o conjuncţie de disjuncţii de literali.

Forma clauzală în logica propozițională

- Pentru orice formulă α există o FNC α^{fc} astfel încât $\alpha \dashv\vdash \alpha^{fc}$.
- Pentru o formulă din logica propozițională determinăm FNC corespunzătoare prin următoarele transformări:
  1. înlocuirea implicațiilor și echivalențelor

$$\varphi \to \psi \quad \dashv\vdash \quad \neg\varphi \vee \psi$$
$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad \dashv\vdash \quad (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$$

  2. regulile De Morgan

$$\neg(\varphi \vee \psi) \quad \dashv\vdash \quad \neg\varphi \wedge \neg\psi$$
$$\neg(\varphi \wedge \psi) \quad \dashv\vdash \quad \neg\varphi \vee \neg\psi$$

  3. principiului dublei negații

$$\neg\neg\psi \quad \dashv\vdash \quad \psi$$

  4. distributivitatea

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \quad \dashv\vdash \quad (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$
$$(\psi \wedge \chi) \vee \varphi \quad \dashv\vdash \quad (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi)$$

Forma clauzală în logica de ordinul I

- O formulă este formă normală conjunctivă prenex (FNCP) dacă
  - este în formă prenex $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi$ ($Q_i \in \{\forall, \exists\}$ oricare i)
  - ψ este FNC
- O formulă este formă clauzală dacă este enunț universal și FNCP:

  $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$ unde ψ este FNC
- Pentru orice formulă φ din logica de ordinul I există o formă clauzală φ^{fc} astfel încât

  φ este satisfiabilă dacă și numai dacă φ^{fc} este satisfiabilă
- Pentru o formulă φ, forma clauzală φ^{fc} se poate calcula astfel:
  1. se determină forma rectificată
  2. se cuantifică universal variabilele libere
  3. se determină forma prenex
  4. se determină forma Skolem

     în acest moment am obținut o formă Skolem $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$
  5. se determină o FNC ψ' astfel încât $\psi \dashv\vdash \psi'$
  6. φ^{fc} este $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi'$

Clauze

- O clauză este o disjuncție de literali.
- Dacă $L_1, \ldots, L_n$ sunt literali atunci clauza $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ o vom scrie ca mulțimea $\{L_1, \ldots, L_n\}$

  clauză = mulțime de literali

- Clauza $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ este satisfiabilă dacă $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ este satisfiabilă.
- O clauză C este trivială dacă conține un literal și complementul lui.
- Când $n = 0$ obținem clauza vidă, care se notează $\square$
- Prin definiție, clauza $\square$ nu este satisfiabilă.

Forma clauzală

- Observăm că o FNC este o conjuncție de clauze.
- Dacă $C_1, \ldots, C_k$ sunt clauze atunci $C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$ o vom scrie ca mulțimea $\{C_1, \ldots, C_k\}$

FNC = mulțime de clauze

- O mulțime de clauze $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ este satisfiabilă dacă $C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$ este satisfiabilă
- Când $k = 0$ obținem mulțimea de clauze vidă, pe care o notăm $\{\}$
- Prin definiție, mulțimea de clauze vidă $\{\}$ este satisfiabilă.

$\{\}$ este satisfiabilă, dar $\{\square\}$ nu este satisfiabilă

Forma clauzală

- Dacă φ este o formulă în calculul propozițional, atunci
$$\varphi^{fc} = \bigwedge_{i=1}^{k} \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij} \text{ unde } L_{ij} \text{ sunt literali}$$

- Dacă φ o formulă în logica de ordinul I, atunci
$$\varphi^{fc} = \forall x_1 \ldots \forall x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{k} \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij} \right) \text{ unde } L_{ij} \text{ sunt literali}$$

φ este satisfiabilă dacă și numai dacă

φ^{fc} este satisfiabilă dacă și numai dacă

$\{\{L_{11}, \ldots, L_{1n_1}\}, \ldots, \{L_{k1}, \ldots, L_{kn_k}\}\}$ este satisfiabilă

Rezoluția în logica propozițională

Regula rezoluției

$$Rez \ \frac{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde C_1, C_2 clauze, iar p este variabila propozițională astfel încât $\{p, \neg p\} \cap C_1 = \emptyset$ și $\{p, \neg p\} \cap C_2 = \emptyset$.

Fie $\mathcal{C}$ o mulțime de clauze. O derivare prin rezoluție din $\mathcal{C}$ este o secvență finită de clauze astfel încât fiecare clauză este din $\mathcal{C}$ sau rezultă din clauzele anterioare prin rezoluție (este rezolvent).

Derivare prin rezoluție

Fie $\mathcal{C}$ o mulțime de clauze. O derivare prin rezoluție din $\mathcal{C}$ este o secvență finită de clauze astfel încât fiecare clauză este din $\mathcal{C}$ sau rezultă din clauzele anterioare prin rezoluție (este rezolvent).

Exemplu

Fie $\mathcal{C} = \{\{\neg q, \neg p\}, \{q\}, \{p\}\}$ o mulțime de clauze. O derivare prin rezoluție pentru $\square$ din $\mathcal{C}$ este

$$
\begin{array}{lll}
C_1 = & \{\neg q, \neg p\} & \\
C_2 = & \{q\} & \\
C_3 = & \{\neg p\} & (Rez, C_1, C_2) \\
C_4 = & \{p\} & \\
C_5 = & \square & (Rez, C_3, C_4)
\end{array}
$$

Teorema de completitudine

$\models \varphi$ dacă și numai dacă există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ din $(\neg\varphi)^{fc}$.

Procedura Davis-Putnam DPP (informal)

Intrare: o mulțime $\mathcal{C}$ de clauze

Se repetă următorii pași:

- se elimină clauzele triviale
- se alege o variabilă p
- se adaugă la mulțimea de clauze toți rezolvenții obținuti prin aplicarea *Rez* pe variabila p
- se șterg toate clauzele care conțin p sau $\neg p$

Ieșire: dacă la un pas s-a obținut $\square$, mulțimea $\mathcal{C}$ nu este satisfiabilă; altfel $\mathcal{C}$ este satisfiabilă.

Logica Horn

Clauze definite. Programe logice. Clauze Horn

- clauză:

  $\{\neg Q_1, \ldots, \neg Q_n, P_1, \ldots, P_k\}$ sau $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P_1 \vee \ldots \vee P_k$

  unde $n, k \geq 0$ și $Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_k$ sunt formule atomice.

- clauză program definită: $k = 1$
  - cazul $n > 0$: $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P$
  - cazul $n = 0$: $\top \rightarrow P$ (clauză unitate, fapt)

  Program logic definit = mulțime finită de clauze definite

- scop definit (țintă, întrebare): k=0
  - $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow \bot$

- clauza vidă $\square$: $n = k = 0$

  Clauza Horn = clauză program definită sau clauză scop ($k \leq 1$)

Programare logica

- Logica clauzelor definite/Logica Horn: un fragment al logicii de ordinul I în care singurele formule admise sunt clauze Horn
  - formule atomice: $P(t_1, \ldots, t_n)$
  - $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P$
    unde toate Q_i, P sunt formule atomice, $\top$ sau $\bot$

- Problema programării logice: reprezentăm cunoștințele ca o mulțime de clauze definite KB și suntem interesați să aflăm răspunsul la o întrebare de forma $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n$, unde toate Q_i sunt formule atomice

$$KB \models Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n$$

  - Variabilele din KB sunt cuantificate universal.
  - Variabilele din $Q_1, \ldots, Q_n$ sunt cuantificate existențial.

Limbajul PROLOG are la bază logica clauzelor Horn.

Sistem de deducție *backchain*

Sistem de deducție pentru clauze Horn

Pentru un program logic definit KB avem

- Axiome: orice clauză din KB
- Regula de deducție: regula *backchain*

$$\frac{\theta(Q_1) \quad \theta(Q_2) \quad \ldots \quad \theta(Q_n) \quad (Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P)}{\theta(Q)}$$

unde $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P \in KB$, iar θ este cgu pentru Q și P.

Sistem de deducție

$$\frac{\theta(Q_1) \quad \theta(Q_2) \quad \ldots \quad \theta(Q_n) \quad (Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P)}{\theta(Q)}$$

unde $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n \rightarrow P \in KB$, iar θ este cgu pentru Q și P.

Exemplu

KB conține următoarele clauze definite:

$father(jon, ken)$. $father(ken, liz)$.

$father(X, Y) \rightarrow ancestor(X, Y)$

$daugther(X, Y) \rightarrow ancestor(Y, X)$

$ancestor(X, Y) \wedge ancestor(Y, Z) \rightarrow ancestor(X, Z)$

atunci

$$\frac{\dfrac{father(ken, liz)}{father(ken, Z)} \quad (father(Y, X) \rightarrow ancestor(Y, X))}{ancestor(ken, Z)}$$

Rezoluția SLD

Rezoluția SLD

Fie T o mulțime de clauze definite.

$$\text{SLD}\ \boxed{\frac{\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg Q_i \vee \cdots \vee \neg Q_n}{\theta(\neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m \vee \cdots \vee \neg Q_n)}}$$

unde

- $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ este o clauză definită din KB (în care toate variabilele au fost redenumite) și
- variabilele din $Q \vee \neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m$ și Q_i se redenumesc
- θ este c.g.u pentru Q_i și Q

Rezoluția SLD

Fie KB o mulțime de clauze definite și $Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_m$ o întrebare, unde Q_i sunt formule atomice.

- O derivare din KB prin rezoluție SLD este o secvență

$$G_0 := \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_m, \quad G_1, \quad \ldots, \quad G_k, \ldots$$

  în care G_{i+1} se obține din G_i prin regula SLD.
- Dacă există un k cu $G_k = \square$ (clauza vidă), atunci derivarea se numește SLD-respingere.

Rezoluția SLD

Exercițiu

Găsiți o SLD-respingere pentru următorul program Prolog și ținta:

```
1.  p(X) :- q(X,f(Y)), r(a).        ?- p(X), q(Y,Z).
2.  p(X) :- r(X).
3.  q(X,Y) :- p(Y).
4.  r(X) :- q(X,Y).
5.  r(f(b)).
```

Soluție

$G_0 = \neg p(X) \vee \neg q(Y, Z)$

$G_1 = \neg r(X_1) \vee \neg q(Y, Z)$ (2 cu $\theta(X) = X_1$)

$G_2 = \neg q(Y, Z)$ (5 cu $\theta(X_1) = f(b)$)

$G_3 = \neg p(Z_1)$ (3 cu $\theta(X) = Y_1$ și $\theta(Y) = Z_1$)

$G_4 = \neg r(X)$ (2 cu $\theta(Z_1) = X$)

$G_5 = \square$ (5 cu $\theta(X) = f(b)$)

Rezoluția SLD - arbori de căutare

Arbori SLD

- Presupunem că avem o mulțime de clauze definite KB și o țintă $G_0 = \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_m$
- Construim un arbore de căutare (arbore SLD) astfel:
  - Fiecare nod al arborelui este o țintă (posibil vidă)
  - Rădăcina este G_0
  - Dacă arborele are un nod G_i, iar G_{i+1} se obține din G_i folosind regula SLD folosind o clauză $C_i \in KB$, atunci nodul G_i are copilul G_{i+1}. Muchia dintre G_i și G_{i+1} este etichetată cu C_i.
- Dacă un arbore SLD cu rădăcina G_0 are o frunză $\square$ (clauza vidă), atunci există o SLD-respingere a lui G_0 din KB.

Rezoluția SLD - arbore de căutare complet

Exercițiu

Desenați arborele SLD pentru programul Prolog de mai jos și ținta
`?- p(X,X).`

```
1.  p(X,Y) :- q(X,Z), r(Z,Y).
2.  p(X,X) :- s(X).
3.  q(X,b).
4.  q(b,a).
5.  q(X,a) :- r(a,X).
6.  r(b,a).
7.  s(X) :- t(X,a).
8.  s(X) :- t(X,b).
9.  s(X) :- t(X,X).
10.  t(a,b).
11.  t(b,a).
```

Rezoluția SLD - arbore SLD complet

```
1.  p(X,Y) :- q(X,Z), r(Z,Y).
2.  p(X,X) :- s(X).
3.  q(X,b).
```

$p(X, Y) \vee \neg q(X, Z) \vee \neg r(Z, Y)$
$p(X, X) \vee \neg s(X)$
$q(X, b)$

```
4.  q(b,a).
5.  q(X,a) :- r(a,X).
6.  r(b,a).
```

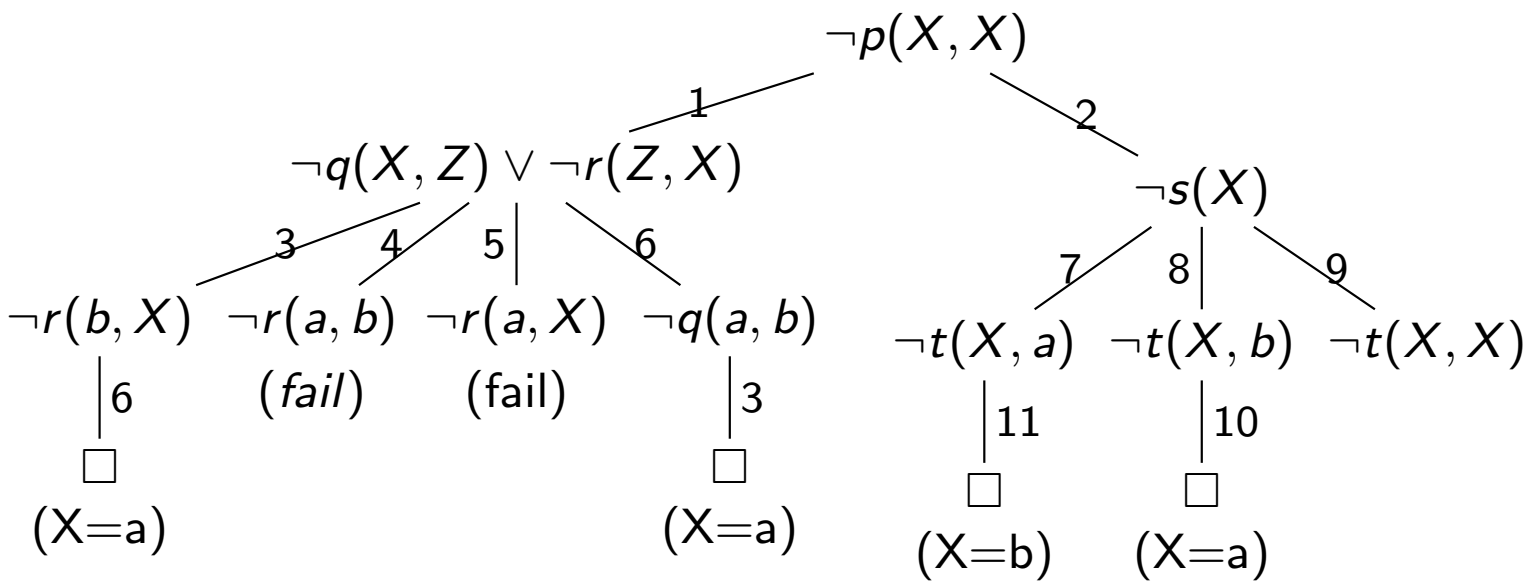
$q(b, a)$
$q(X, a) \vee \neg r(a, X)$
$r(b, a)$

```
7.  s(X) :- t(X,a).
8.  s(X) :- t(X,b).
9.  s(X) :- t(X,X).
```

$s(X) \vee \neg t(X, a)$
$s(X) \vee \neg t(X, b)$
$s(X) \vee \neg t(X, X)$

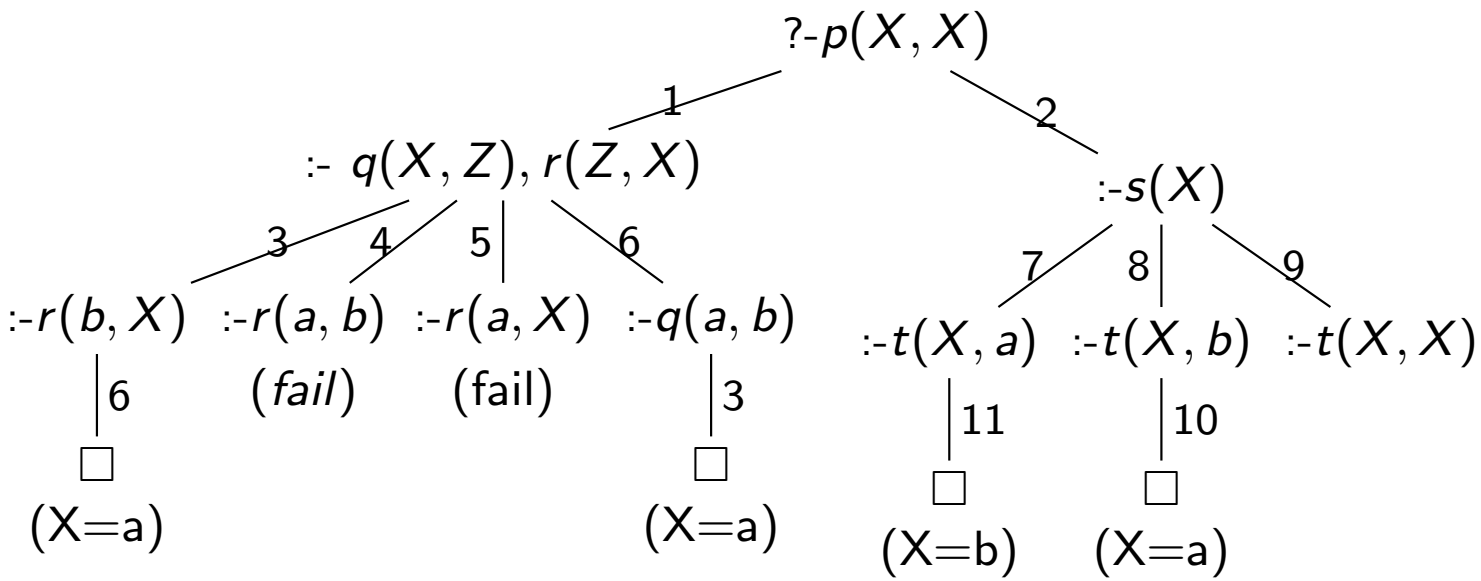
```
10.  t(a,b).
11.  t(b,a).
```

$t(a, b)$
$t(b, a)$



Rezoluția SLD - arbori de execuție

```
1.  p(X,Y) :- q(X,Z), r(Z,Y).
2.  p(X,X) :- s(X).
3.  q(X,b).
4.  q(b,a).
5.  q(X,a) :- r(a,X).
6.  r(b,a).
7.  s(X) :- t(X,a).
8.  s(X) :- t(X,b).
9.  s(X) :- t(X,X).
10.  t(a,b).
11.  t(b,a).
```



Rezoluția SLD

Exercițiu

Fie KB următoarea bază de cunoștințe definită în Prolog:

1. `r(a, a)`
2. `q(X, a)`
3. `p(X, Y) :- q(X, Z), r(Z, Y)`

(a)Desenați arborele SLD și arborele de execuție pentru întrebarea `?- p(X, Z)`

(b) Exprimați KB ca o mulțime de formule în logica de ordinul I demonstrați folosind rezoluția că din KB se deduce `p(X,Z)`, adică $\text{KB} \vdash \exists x \exists z\, p(x, z)$.

(a) Soluție:

1. `r(a, a).`
2. `q(X, a).`
3. `p(X, Y) :- q(X, Z), r(Z, Y)`

Arborele SLD:

$$\neg p(X, Z)$$
$$\downarrow 3$$
$$\neg q(X1, Z1) \vee \neg r(Z1, Y1)$$
$$\downarrow 2$$
$$\neg r(a, Y1)$$
$$\downarrow 1$$
$$\square$$

Arborele de execuție:

```
?- p(X,Z)
```
$\downarrow 3$
```
:- q(X1,Z1), r(Z1,Y1)
```
$\downarrow 2$
```
:- r(a,Y1)
```
$\downarrow 1$
$\square$

Rezoluția SLD

(cont.)
Fie KB următoarea bază de cunoștințe definită în Prolog:

1. `r(a, a).` 2. `q(X, a).` 3. `p(X, Y) :- q(X, Z), r(Z, Y)`

(b) Soluție:

KB$=\{r(a,a), \forall x\, q(x,a), \forall x \forall y \forall z\, (\neg q(x,y) \vee \neg r(z,y) \vee p(x,y))\}$

KB $\vdash \exists x \exists z\ p(x,z)$ dacă și numai dacă există o derivare prin rezoluție pentru $\square$ din forma clauzală a mulțimii $KB \cup \{\neg(\exists x \exists z\ p(x,z))\}$.

Forma clauzală a mulțimii $KB \cup \{\neg(\exists x \exists z\ p(x,z))\}$ este $\mathcal{C} = \{\{r(a,a)\}, \{q(x,a)\}, \{\neg q(x,y), \neg r(z,y), p(x,y)\}, \{\neg p(x,z)\}\}$. Se face derivarea direct sau se construiește arborele SLD.

Pe săptămâna viitoare!