FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 12

(S12.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\begin{align} \forall x(\varphi \wedge \psi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \varphi \wedge \forall x\psi \tag{1}\\ \exists x(\varphi \vee \psi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \varphi \vee \exists x\psi \tag{2}\\ \varphi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\varphi \tag{3}\\ \forall x(\varphi \to \psi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \varphi \to \forall x\psi \tag{4}\\ \exists x(\psi \to \varphi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\psi \to \varphi. \tag{5} \end{align}$$

(S12.2) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \forall x(f(x) = c) \wedge \neg\forall z(g(y,z) = d)\\ \varphi_2 &= \forall y(\forall x P(x,y) \to \exists z Q(x,z))\\ \varphi_3 &= \exists x \forall y P(x,y) \vee \neg\exists y(S(y) \to \forall z R(z))\\ \varphi_4 &= \exists z(\exists x Q(x,z) \vee \exists x R(x)) \to \neg(\neg\exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z,x)) \end{aligned}$$

(S12.3) Fie φ, ψ formule şi x o variabilă. Să se demonstreze:

(i) $\vDash \varphi$ implică $\vDash \forall x\varphi$;

(ii) $\vDash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$.