Proprietăți

Propoziția 1.28

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq$ *Form.*

(i) *Dacă* $\Gamma \vDash \varphi$ *și* $\Gamma \vDash \varphi \rightarrow \psi$, *atunci* $\Gamma \vDash \psi$.

(ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ *ddacă* $\Gamma \vDash \varphi \rightarrow \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$ *ddacă* $\Gamma \vDash \varphi$ *și* $\Gamma \vDash \psi$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.29

Fie Γ *o mulțime de formule. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) Γ *este nesatisfiabilă.*

(ii) $\Gamma \vDash \varphi$ *pentru orice formulă* φ.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi$ *pentru orice formulă nesatisfiabilă* φ.

(iv) $\Gamma \vDash \bot$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Proprietăți

Propoziția 1.30

Fie Γ o mulțime de formule.

(i) $\Gamma \vDash \varphi$ *ddacă* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *este nesatisfiabilă.*

(ii) $\Gamma \vDash \neg\varphi$ *ddacă* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *este nesatisfiabilă.*

(iii) *Dacă* Γ *este satisfiabilă, atunci cel puțin una dintre* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *și* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *este satisfiabilă.*

Dem.:

(i) Avem că $\Gamma \not\vDash \varphi \iff$ există o evaluare $e : V \to \{0,1\}$ a.î. $e \vDash \Gamma$ și $e^+(\varphi) = 0 \iff$ există o evaluare $e : V \to \{0,1\}$ a.î. $e \vDash \Gamma$ și $e^+(\neg\varphi) = 1 \iff$ există o evaluare $e : V \to \{0,1\}$ a.î. $e \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

(ii) Similar.

(iii) Fie e un model al lui Γ. Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Dacă $e^+(\varphi) = 0$, deci $e^+(\neg\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. $\square$

Proprietăți

Propoziția 1.31

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *o mulțime finită de formule.*

(i) $\Gamma \sim \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$.

(ii) $\Gamma \vDash \psi$ *ddacă* $\vDash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$.

(iii) Γ *este nesatisfiabilă ddacă* $\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n$ *este tautologie.*

(iv) *Dacă* $\Delta = \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ *este o altă mulțime finită de formule, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(a) $\Gamma \sim \Delta$.

(b) $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \sim \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k$.

Dem.: Exercițiu.

Teorema de compacitate - versiunea 1

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 2

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 3

Pentru orice mulțime Γ de formule și pentru orice formulă φ, $\Gamma \vDash \varphi$ ddacă există o submulțime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \vDash \varphi$.

Propoziția 1.32

Cele trei versiuni sunt echivalente.

Dem.: Exercițiu.

Lema 1.33

Fie Γ finit satisfiabilă. Atunci există un șir (ε_n) în $\{0,1\}$ care satisface, pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

$\boldsymbol{P_n}$ *Orice submulțime finită Δ a lui Γ are un model $e : V \to \{0,1\}$ care satisface $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots n\}$.*

Dem.: Definim șirul (ε_n) prin inducție după $n \in \mathbb{N}$.

$n = 0$. Avem următoarele cazuri:

(1_0) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ, există un model e al lui Δ a.î. $e(v_0) = 0$. Definim $\varepsilon_0 := 0$.

(2_0) Există o submulțime finită Δ_0 a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_0, avem $e(v_0) = 1$. Definim $\varepsilon_0 := 1$.

Demonstrăm că $\boldsymbol{P_0}$ este satisfăcută. În cazul (1_0) este evident. Să considerăm cazul (2_0). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ. Atunci $\Delta \cup \Delta_0$ este o submulțime finită a lui Γ. Deoarece Γ este finit satisfiabilă, $\Delta \cup \Delta_0$ are un model e. Rezultă că $e \vDash \Delta$ și, din faptul că $e \vDash \Delta_0$, obținem că $e(v_0) = 1 = \varepsilon_0$.

Pasul de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că am definit $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ a.î. $\boldsymbol{P_n}$ este satisfăcută. Avem următoarele cazuri:

(1_{n+1}) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ, există un model e al lui Δ a.î.

$$e(v_i) = \varepsilon_i \text{ pentru orice } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ și } e(v_{n+1}) = 0.$$

Definim $\varepsilon_{n+1} := 0$.

(2_{n+1}) Există o submulțime finită Δ_{n+1} a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_{n+1}, avem

$$e(v_i) = \varepsilon_i \text{ pentru orice } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ implică } e(v_{n+1}) = 1.$$

Definim $\varepsilon_{n+1} := 1$.

Demonstrăm că $\boldsymbol{P_{n+1}}$ este satisfăcută. În cazul (1_{n+1}) este evident. Să considerăm cazul (2_{n+1}). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ. Atunci $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ este o submulțime finită a lui Γ. Prin urmare, conform $\boldsymbol{P_n}$, există un model e al lui $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots n\}$. Din (2_{n+1}), obținem și $e(v_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$. $\square$

Teorema 1.34 (Teorema de compactitate)

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

Dem.: "$\Rightarrow$" Evident.

"$\Leftarrow$" Presupunem că Γ este finit satisfiabilă. Definim

$$\overline{e} : V \to \{0,1\}, \quad \overline{e}(v_n) = \varepsilon_n,$$

unde (ε_n) este șirul construit în lema precedentă (Lema 1.33). Demonstrăm că $\overline{e}$ este model al lui Γ. Fie $\varphi \in \Gamma$ arbitrară și fie $k \in \mathbb{N}$ a.î. $Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$. Deoarece $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$ este o submulțime finită a lui Γ, putem aplica Proprietatea $\boldsymbol{P_k}$ pentru a obține un model e al lui φ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots k\}$. Atunci $\overline{e}(v) = e(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(\varphi)$. Aplicând Propoziția 1.13, rezultă că $\overline{e}^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $\overline{e} \vDash \varphi$.

Prin urmare, $\overline{e}$ este model al lui Γ, deci Γ este satisfiabilă. $\square$

SINTAXA LP

Sistemul deductiv

Folosim un sistem deductiv de tip Hilbert pentru LP.

Axiomele logice

Mulțimea Axm a axiomelor lui LP constă din toate formulele de forma:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$,

unde φ, ψ și χ sunt formule.

Regula de deducție

Pentru orice formule φ, ψ,

din φ și $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}.$$