

Γ -teoreme

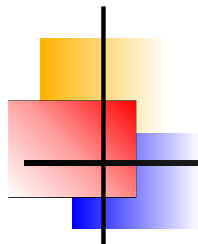
Fie Γ o mulțime de formule. Definiția Γ -teoremelor este un nou exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 1.35

Γ -teoremele sunt formulele lui LP definite astfel:

- (T0) Orice axiomă este Γ -teoremă.*
- (T1) Orice formulă din Γ este Γ -teoremă.*
- (T2) Dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ sunt Γ -teoreme, atunci ψ este Γ -teoremă.*
- (T3) Numai formulele obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ -teoreme.*

Dacă φ este Γ -teoremă, atunci spunem și că φ este **dedusă din ipotezele Γ** .



Γ -teoreme

Notății

$Thm(\Gamma) :=$ mulțimea Γ -teoremelor

$\Gamma \vdash \varphi := \Leftrightarrow \varphi$ este Γ -teoremă

$\Gamma \vdash \Delta := \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.

$Thm := Thm(\emptyset)$

$\vdash \varphi := \Leftrightarrow \emptyset \vdash \varphi$

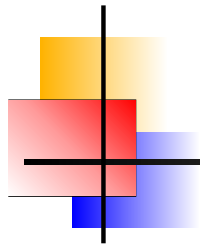
Definiția 1.36

O formulă φ se numește **teoremă** a lui LP dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condițiile (T0), (T1), (T2) folosind notația \vdash , obținem

Propoziția 1.37

- (i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.



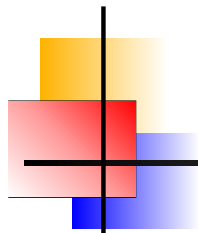
O definiție alternativă a Γ -teoremelor:

Definiția 1.38

Mulțimea $Thm(\Gamma)$ este intersecția tuturor mulțimilor de formule Σ care satisfac următoarele proprietăți:

- (i) $Axm \subseteq \Sigma$;*
- (ii) $\Gamma \subseteq \Sigma$;*
- (iii) Σ este închisă la modus ponens:*

dacă $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.



Γ -teoreme

Definiția Γ -teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin **inducție după Γ -teoreme**.

Versiunea 1

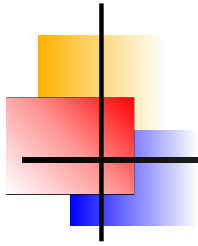
Fie **P** o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ -teoremă satisface **P** astfel:

- (i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea **P** ;
- (ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea **P** ;
- (iii) demonstrăm că dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ au proprietatea **P** , atunci ψ are proprietatea **P** .

Versiunea 2

Fie Σ o mulțime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

- (i) demonstrăm că orice axiomă este în Σ ;
- (ii) demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ ;
- (iii) demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ și $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.



Propoziția 1.39

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

(i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ implică } \Delta \vdash \varphi.$$

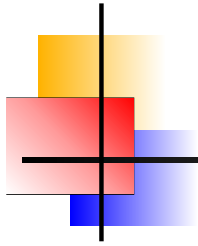
(ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$.

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,

$$\Delta \vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iv) $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $Thm(\Gamma) \vdash \varphi$ ddacă $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.



Γ -demonstrații

Definiția 1.40

O Γ -demonstrație (*demonstrație din ipotezele Γ*) este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) θ_i este axiomă;
- (ii) $\theta_i \in \Gamma$;
- (iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$.

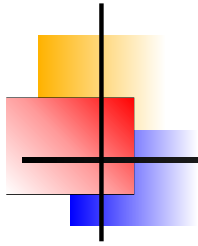
O \emptyset -demonstrație se va numi simplu *demonstrație*.

Lema 1.41

Dacă $\theta_1, \dots, \theta_n$ este o Γ -demonstrație, atunci

$$\Gamma \vdash \theta_i \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dem.: Exercițiu.

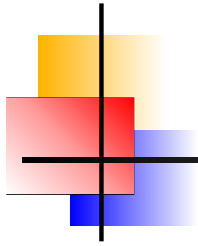


Definiția 1.42

Fie φ o formulă. O Γ -demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește lungimea Γ -demonstrației.

Propoziția 1.43

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ -demonstrație a lui φ .



Propoziția 1.44

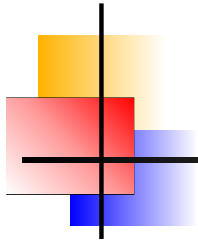
Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ , $\Gamma \vdash \varphi$ dacă există o submulțime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$.

Dem.: " \Leftarrow " Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Aplicând Propoziția 1.39.(i) obținem că $\Gamma \vdash \varphi$.

" \Rightarrow " Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziției 1.43, φ are o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \dots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$ este o Σ -demonstrație a lui φ , deci $\Sigma \vdash \varphi$. □



$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Propoziția 1.45

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Dem.:

$$(1) \quad \vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$$

(A2) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi, \chi := \varphi$) și Propoziția 1.37.(i)

$$(2) \quad \vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$$

(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi$) și Propoziția 1.37.(i)

$$(3) \quad \vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$$

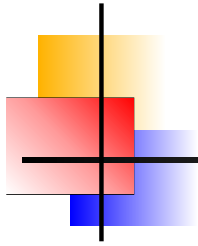
(1), (2) și Propoziția 1.37.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)

$$(4) \quad \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$$

(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi$) și Propoziția 1.37.(i)

$$(5) \quad \vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

(MP): (3), (4)



Teorema deducției

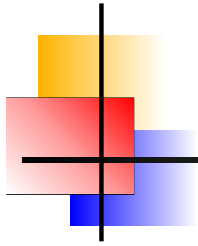
Teorema 1.46 (Teorema deducției)

Fie $\Gamma \subseteq \text{Form}$ și $\varphi, \psi \in \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \text{dacă } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Dem.: " \Leftarrow " Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

- | | | |
|-----|---|----------------------|
| (1) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | ipoteză |
| (2) | $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | Propoziția 1.39.(i) |
| (3) | $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ | Propoziția 1.37.(ii) |
| (4) | $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ | (MP): (2), (3). |



Teorema deducției

" \Rightarrow " Fie

$$\Sigma := \{\psi \in \text{Form} \mid \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi\}.$$

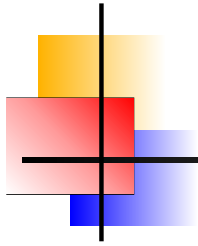
Trebuie să demonstrăm că $\text{Thm}(\Gamma \cup \{\varphi\}) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după $\Gamma \cup \{\varphi\}$ -teoreme.

- Fie ψ o axiomă sau o formulă din Γ . Atunci

- (1) $\Gamma \vdash \psi$ Propoziția 1.37.(i), (ii)
- (2) $\Gamma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (A1) și Propoziția 1.37.(i)
- (3) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (MP): (1), (2).

Așadar $\psi \in \Sigma$.

- Fie $\psi = \varphi$. Atunci $\varphi \rightarrow \psi = \varphi \rightarrow \varphi$ este teoremă, conform Propoziției 1.45, deci $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Așadar $\psi \in \Sigma$.



Teorema deducției

- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens.

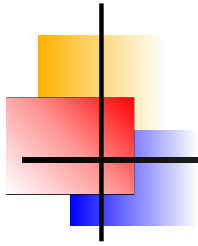
Presupunem că $\psi, \psi \rightarrow \chi \in \Sigma$ și trebuie să arătăm că $\chi \in \Sigma$.

Atunci

- | | | |
|-----|---|--------------------|
| (1) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | ipoteză inducție |
| (2) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ | ipoteză inducție |
| (3) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ | (A2) și P.1.37.(i) |
| (4) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ | (MP): (2), (3). |
| (5) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ | (MP): (1), (4). |

Așadar $\chi \in \Sigma$.





Câteva consecințe

Teorema deducției este un instrument foarte util pentru a arăta că o formulă e teoremă.

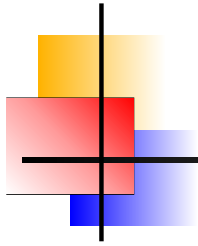
Propoziția 1.47

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)). \quad (35)$$

Dem.: Folosind teorema deducției observăm că

$$\begin{aligned} & \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi. \end{aligned}$$

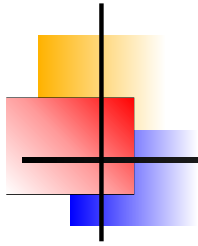


Câteva consecințe

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

- | | | |
|-----|--|---------------------------|
| (1) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ | Propoziția 1.37.(ii) |
| (2) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | Propoziția 1.37.(ii) |
| (3) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ | (MP): (1), (2) |
| (4) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$ | Propoziția 1.37.(ii) |
| (5) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$ | (MP): (3), (4). \square |



Câteva consecințe

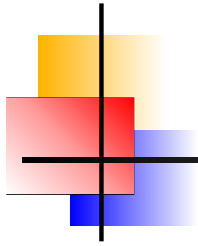
Propoziția 1.48

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi.$$

Dem.:

- | | | |
|-----|---|--|
| (1) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | ipoteză |
| (2) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ | P.1.47 și P.1.39.(ii) |
| (3) | $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ | (MP): (1), (2) |
| (4) | $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$ | ipoteză |
| (5) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ | (MP): (3), (4). □ |



Câteva consecințe

Propoziția 1.49

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \quad (36)$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.50

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Exercițiu.