

## *Principiul inducției pe formule*

---

### *Propoziția 1.6 (Principiul inducției pe formule)*

Fie **P** o proprietate. Presupunem că:

- (0) Orice variabilă are proprietatea **P**.*
- (1) Pentru orice formulă  $\varphi$ , dacă  $\varphi$  are proprietatea **P**, atunci și  $(\neg\varphi)$  are proprietatea **P**.*
- (2) Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ , dacă  $\varphi$  și  $\psi$  au proprietatea **P**, atunci  $(\varphi \rightarrow \psi)$  are proprietatea **P**.*

*Atunci orice formulă  $\varphi$  are proprietatea **P**.*

**Dem.:** Pentru orice formulă  $\varphi$ , notăm cu  $c(\varphi)$  numărul conectorilor logici care apar în  $\varphi$ . Pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  definim proprietatea  $Q(n)$  astfel:

$Q(n)$  e adevărată ddacă orice formulă  $\varphi$  cu  $c(\varphi) \leq n$  are proprietatea **P**.

Demonstrăm prin inducție că  $Q(n)$  este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .



## Principiul inducției pe formule

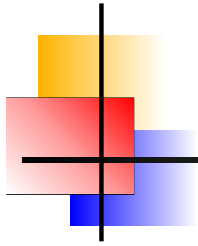
**Pasul inițial.**  $Q(0)$  este adevărată, deoarece pentru orice formulă  $\varphi$ ,  $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$ , cu  $v \in V$  și, conform ipotezei (0),  $v$  are proprietatea **P**.

**Ipoteza de inducție.** Fie  $n \in \mathbb{N}$ . Presupunem că  $Q(n)$  este adevărată.

**Pasul de inducție.** Demonstrăm că  $Q(n+1)$  este adevărată. Fie  $\varphi$  o formulă cu  $c(\varphi) \leq n+1$ . Avem trei cazuri:

- ▶  $\varphi = v \in V$ . Atunci  $\varphi$  are proprietatea **P**, conform (0).
- ▶  $\varphi = (\neg\psi)$ , unde  $\psi$  este formulă. Atunci  $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$ , deci, conform ipotezei de inducție,  $\psi$  are proprietatea **P**.  
Aplicând ipoteza (1), rezultă că  $\varphi$  are proprietatea **P**.
- ▶  $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ , unde  $\psi, \chi$  sunt formule. Atunci  $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$ , deci, conform ipotezei de inducție,  $\psi$  și  $\chi$  au proprietatea **P**. Rezultă din (2) că  $\varphi$  are proprietatea **P**.

Așadar,  $Q(n)$  este adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Deoarece pentru orice formulă  $\varphi$  există  $N \in \mathbb{N}$  a.î.  $c(\varphi) \leq N$ , rezultă că orice formulă  $\varphi$  are proprietatea **P**. □



## Principiul inducției pe formule

### Propoziția 1.7 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

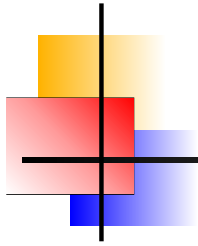
Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- ▶  $V \subseteq \Gamma$ ;
- ▶  $\Gamma$  este închisă la  $\neg$ , adică  $\varphi \in \Gamma$  implică  $(\neg\varphi) \in \Gamma$ ;
- ▶  $\Gamma$  este închisă la  $\rightarrow$ , adică  $\varphi, \psi \in \Gamma$  implică  $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$ .

Atunci  $\Gamma = \text{Form}$ .

**Dem.:** Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă  $\varphi$ ,  
 $\varphi$  are proprietatea **P** ddacă  $\varphi \in \Gamma$ .

Conform definiției lui  $\Gamma$ , rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 1.6), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea **P**, deci orice formulă  $\varphi$  este în  $\Gamma$ . Așadar,  $\Gamma = \text{Form}$ . □



### Definiția 1.8

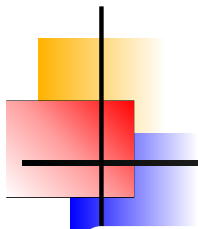
Fie  $\varphi$  o formulă a lui LP. O **subformulă** a lui  $\varphi$  este orice formulă  $\psi$  care apare în  $\varphi$ .

**Notăție:** Mulțimea subformulelor lui  $\varphi$  se notează  $\text{SubForm}(\varphi)$ .

### Exemplu:

Fie  $\varphi = ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$ . Atunci

$$\text{SubForm}(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \rightarrow v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$



## Formule

Conectorii derivați  $\vee$  (se citește **sau**),  $\wedge$  (se citește **și**),  $\leftrightarrow$  (se citește **dacă și numai dacă**) sunt introduși prin abrevierile:

$$(\varphi \vee \psi) \quad := \quad ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

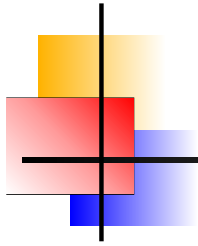
$$(\varphi \wedge \psi) \quad := \quad (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad := \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).$$

## Convenții

- ▶ În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem  $\neg\varphi$ ,  $\varphi \rightarrow \psi$ , dar scriem  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$ .
- ▶ Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$  are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
  - $\wedge, \vee$  au precedență mai mare decât  $\rightarrow, \leftrightarrow$ .

Prin urmare, formula  $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$  va fi scrisă  $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$ .



## *Principiul recursiei pe formule*

---

### *Propoziția 1.9 (Principiul recursiei pe formule)*

*Fie  $A$  o mulțime și funcțiile*

$$G_0 : V \rightarrow A, \quad G_{\neg} : A \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow} : A \times A \rightarrow A.$$

*Atunci există o unică funcție*

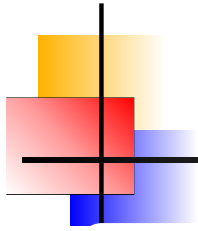
$$F : \text{Form} \rightarrow A$$

*care satisface următoarele proprietăți:*

*(R0)  $F(v) = G_0(v)$  pentru orice variabilă  $v \in V$ .*

*(R1)  $F(\neg\varphi) = G_{\neg}(F(\varphi))$  pentru orice formulă  $\varphi$ .*

*(R2)  $F(\varphi \rightarrow \psi) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi))$  pentru orice formule  $\varphi, \psi$ .*



## Principiul recursiei pe formule

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da **definiții recursive** ale diverselor funcții asociate formulelor.

### Exemplu:

Fie  $c : \text{Form} \rightarrow \mathbb{N}$  definită astfel: pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$c(\varphi)$  este numărul conectorilor logici care apar în  $\varphi$ .

O definiție recursivă a lui  $c$  este următoarea:

$$c(v) = 0 \quad \text{pentru orice variabilă } v$$

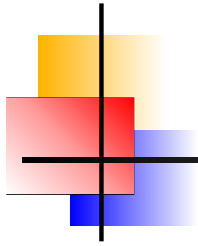
$$c(\neg\varphi) = c(\varphi) + 1 \quad \text{pentru orice formulă } \varphi$$

$$c(\varphi \rightarrow \psi) = c(\varphi) + c(\psi) + 1 \quad \text{pentru orice formule } \varphi, \psi.$$

În acest caz,  $A = \mathbb{N}$ ,  $G_0 : V \rightarrow A$ ,  $G_0(v) = 0$ ,

$$G_{\neg} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad G_{\neg}(n) = n + 1,$$

$$G_{\rightarrow} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad G_{\rightarrow}(m, n) = m + n + 1.$$



## *Principiul recursiei pe formule*

---

### *Notatie:*

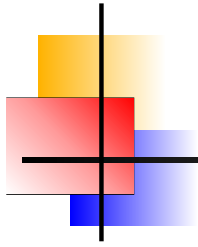
Pentru orice formulă  $\varphi$ , notăm cu  $Var(\varphi)$  mulțimea variabilelor care apar în  $\varphi$ .

### *Observație*

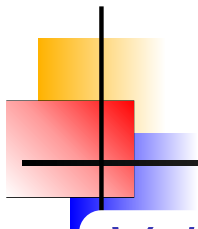
Mulțimea  $Var(\varphi)$  poate fi definită și recursiv.

**Dem.:** Exercițiu.





# SEMANTICA LP



## Tabele de adevăr

### Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr:

**1** pentru **adevărat** și **0** pentru **fals**. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este  $\{0, 1\}$ .

Definim următoarele operații pe  $\{0, 1\}$  folosind **tabelele de adevăr**.

$$\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

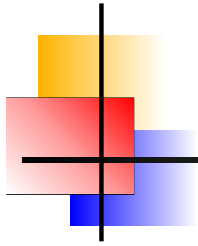
$p$	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că  $\neg p = 1 \iff p = 0$ .

$$\rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că  $p \rightarrow q = 1 \iff p \leq q$ .



## Tabele de adevăr

Operațiile  $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  și  $\leftrightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  se definesc astfel:

$p$	$q$	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

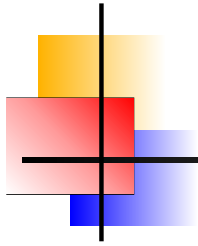
$p$	$q$	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

### Observație

Pentru orice  $p, q \in \{0, 1\}$ ,  $p \vee q = \neg p \rightarrow q$ ,  $p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$  și  $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ .

**Dem.:** Exercițiu.



### Definiția 1.10

O *evaluare* (sau *interpretare*) este o funcție  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ .

### Teorema 1.11

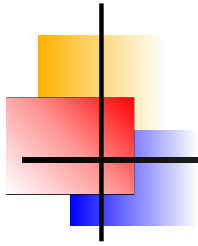
Pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  există o unică funcție

$$e^+ : \text{Form} \rightarrow \{0, 1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- ▶  $e^+(v) = e(v)$  pentru orice  $v \in V$ .
- ▶  $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$  pentru orice  $\varphi \in \text{Form}$ ,
- ▶  $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)$  pentru orice  $\varphi, \psi \in \text{Form}$ .

**Dem.:** Aplicăm Principiul Recursiei pe formule (Propoziția 1.9) cu  $A = \{0, 1\}$ ,  $G_0 = e$ ,  $G_\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $G_\neg(p) = \neg p$  și  $G_\rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $G_\rightarrow(p, q) = p \rightarrow q$ . □



### Propoziția 1.12

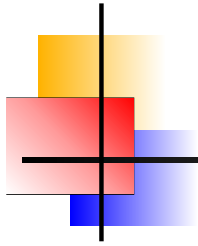
*Dacă  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  este o evaluare, atunci pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,*

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi),$$

$$e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi),$$

$$e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi).$$

**Dem.:** Exercițiu.



### Propoziția 1.13

Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice evaluări  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

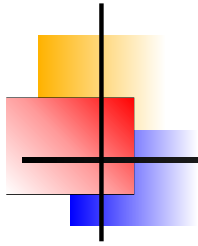
$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

**Dem.:** Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$\varphi$  are proprietatea **P** ddacă pentru orice evaluări  
 $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $\varphi$  satisface (\*).

Demonstrăm că orice formulă  $\varphi$  are proprietatea **P** folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

►  $\varphi = v$ . Atunci  $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$ .



### Propoziția 1.13

Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice evaluări  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

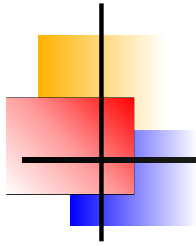
$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

**Dem.:** (continuare)

- $\varphi = (\neg\psi)$  și  $\psi$  satisface **P**. Fie  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$  a.î.  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice  $v \in \text{Var}(\varphi)$ . Deoarece  $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$ , rezultă că  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice  $v \in \text{Var}(\psi)$ . Așadar, aplicând **P** pentru  $\psi$ , obținem că  $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ . Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci  $\varphi$  satisface **P**.



### Propoziția 1.13

Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice evaluări  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

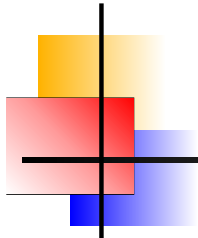
**Dem.:** (continuare)

- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$  și  $\psi, \chi$  satisfac **P**. Fie  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$  a.î.  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice  $v \in \text{Var}(\varphi)$ . Deoarece  $\text{Var}(\psi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$  și  $\text{Var}(\chi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$ , rezultă că  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice  $v \in \text{Var}(\psi)$  și pentru orice  $v \in \text{Var}(\chi)$ . Așadar, aplicând **P** pentru  $\psi$  și  $\chi$ , obținem că  $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$  și  $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$ . Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \rightarrow e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \rightarrow e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci  $\varphi$  satisface **P**. □





## Modele. Satisfiabilitate. Tautologii

Fie  $\varphi$  o formulă.

### Definiția 1.14

- ▶ O evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  este **model** al lui  $\varphi$  dacă  $e^+(\varphi) = 1$ . **Notăție:**  $e \models \varphi$ .
- ▶  $\varphi$  este **satisfiabilă** dacă admite un model.
- ▶ Dacă  $\varphi$  nu este satisfiabilă, spunem și că  $\varphi$  este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.
- ▶  $\varphi$  este **tautologie** dacă orice evaluare este model al lui  $\varphi$ .  
**Notăție:**  $\models \varphi$ .

**Notăție:** Mulțimea tuturor modelelor lui  $\varphi$  se notează  $Mod(\varphi)$ .

### Propoziția 1.15

- (i)  $\varphi$  este tautologie ddacă  $\neg\varphi$  este nesatisfiabilă.
- (ii)  $\varphi$  este nesatisfiabilă ddacă  $\neg\varphi$  este tautologie.

**Dem.:** Exercițiu.