

Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Definiția 1.68

Un *literal* este o

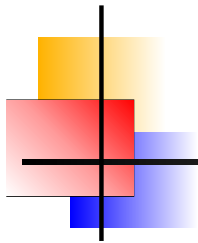
- ▶ variabilă (în care caz spunem că este *literal pozitiv*) sau
- ▶ negația unei variabile (în care caz spunem că este *literal negativ*).

Exemple: v_1, v_2, v_{10} literali pozitivi; $\neg v_0, \neg v_{100}$ literali negativi

Definiția 1.69

O formulă φ este în *formă normală disjunctivă (FND)* dacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Așadar, φ este în FND ddacă $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.



Forma normală conjunctivă / disjunctivă

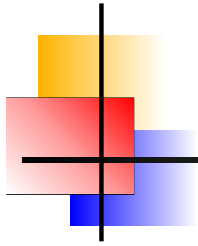
Definiția 1.70

O formulă φ este în **formă normală conjunctivă (FNC)** dacă φ este o conjuncție de disjuncții de literali.

Așadar, φ este în FNC ddacă $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Exemple

- ▶ $(v_0 \vee v_1) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge (\neg v_{20} \vee \neg v_{15} \vee \neg v_{34})$ este în FNC
- ▶ $(\neg v_9 \wedge v_1) \vee v_{24} \vee (v_2 \wedge \neg v_1 \wedge v_2)$ este în FND
- ▶ $v_1 \wedge \neg v_5 \wedge v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- ▶ $\neg v_{10} \vee v_{20} \vee v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- ▶ $(v_1 \vee v_2) \wedge ((v_1 \wedge v_3) \vee (v_4 \wedge v_5))$ nu este nici în FND, nici în FNC



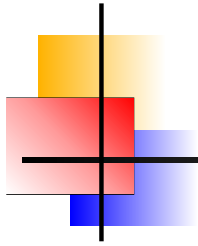
Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Notăție: Dacă L este literal, atunci $L^c := \begin{cases} \neg v & \text{dacă } L = v \in V \\ v & \text{dacă } L = \neg v. \end{cases}$

Propoziția 1.71

- (i) Fie φ o formulă în FNC, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FND.
- (ii) Fie φ o formulă în FND, $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FNC.

Dem.: Exercițiu.



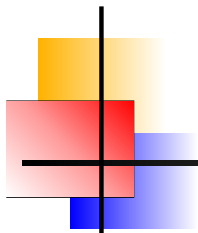
Funcția asociată unei formule

Exemplu: Arătați că $\models v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2))$.

v_1	v_2	$v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2))$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Acest tabel definește o funcție $F : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$

ε_1	ε_2	$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Funcția asociată unei formule

Fie φ o formulă și $Var(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Fie $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$. Definim $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} : Var(\varphi) \rightarrow \{0, 1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(x_i) = \varepsilon_i \quad \text{pentru orice } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Definim $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) \in \{0, 1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) := e^+(\varphi),$$

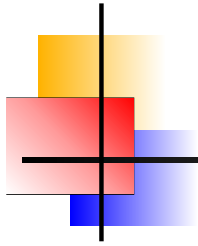
unde $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este orice evaluare care extinde $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$, adică, $e(x_i) = e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(x_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$. Conform Propoziției 1.13, definiția nu este ambiguă.

Definiția 1.72

Funcția asociată lui φ este $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, definită astfel:

$$F_\varphi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) \quad \text{pentru orice } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n.$$

Așadar, F_φ este funcția definită de tabela de adevăr pentru φ .

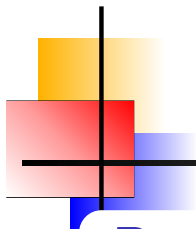


Funcția asociată unei formule

Propoziția 1.73

- (i) Fie φ o formulă. Atunci*
 - (a) $\models \varphi$ ddacă F_φ este funcția constantă 1.*
 - (b) φ este nesatisfiabilă ddacă F_φ este funcția constantă 0.*
- (ii) Fie φ, ψ două formule. Atunci*
 - (a) $\varphi \models \psi$ ddacă $F_\varphi \leq F_\psi$.*
 - (b) $\varphi \sim \psi$ ddacă $F_\varphi = F_\psi$.*
- (iii) Există formule diferite φ, ψ a.î. $F_\varphi = F_\psi$.*

Dem.: Exercițiu.



Caracterizarea funcțiilor booleene

Definiția 1.74

O **funcție booleană** este o funcție $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, unde $n \geq 1$. Spunem că n este **numărul variabilelor** lui F .

Exemplu: Pentru orice formulă φ , F_φ este funcție Booleană cu n variabile, unde $n = |\text{Var}(\varphi)|$.

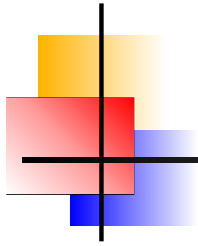
Teorema 1.75

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă φ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 0$ pentru orice $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$,

luăm $\varphi := \bigvee_{i=0}^{n-1} (v_i \wedge \neg v_i)$. Avem că $\text{Var}(\varphi) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$,

așadar, $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Cum $v_i \wedge \neg v_i$ este nesatisfiabilă pentru orice i , rezultă că φ este de asemenea nesatisfiabilă. Deci, F_φ este de asemenea funcția constantă 0.



Caracterizarea funcțiilor booleene

Altcumva, mulțimea

$$T := H^{-1}(1) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1\}$$

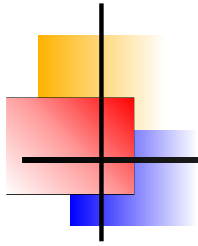
este nevidă.

Considerăm formula

$$\varphi := \bigvee_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in T} \left(\bigwedge_{\varepsilon_i=1} v_i \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg v_i \right).$$

Deoarece $\text{Var}(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$, avem că $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Se demonstrează că $H = F_\varphi$ (**exercițiu suplimentar**). □



Caracterizarea funcțiilor booleene

Teorema 1.76

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ o funcție booleană arbitrară.
Atunci există o formulă ψ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1$ pentru orice $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$,
atunci luăm

$$\psi := \bigwedge_{i=0}^{n-1} (v_i \vee \neg v_i).$$

Altcumva, mulțimea

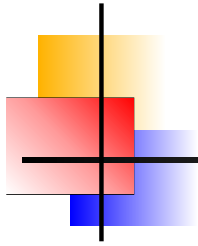
$$F := H^{-1}(0) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 0\}$$

este nevidă.

Considerăm formula $\psi := \bigwedge_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in F} \left(\bigvee_{\varepsilon_i=1} \neg v_i \vee \bigvee_{\varepsilon_i=0} v_i \right)$.

Se demonstrează că $H = F_\psi$ (exercițiu suplimentar).





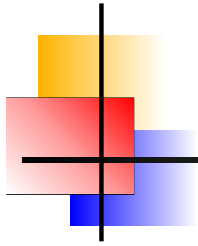
Caracterizarea funcțiilor Booleene

Exemplu: Fie $H : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ descrisă prin tabelul:

ε_1	ε_2	ε_3	$H(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$	
0	0	0	0	$D_1 = v_1 \vee v_2 \vee v_3$
0	0	1	0	$D_2 = v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3$
0	1	0	1	$C_1 = \neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
0	1	1	0	$D_3 = v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$
1	0	0	1	$C_2 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
1	0	1	1	$C_3 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$
1	1	0	1	$C_4 = v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
1	1	1	1	$C_5 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$

$\varphi = C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5$ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

$\psi = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$ în FNC a.î. $H = F_\psi$.



Forma normală conjunctivă / disjunctivă

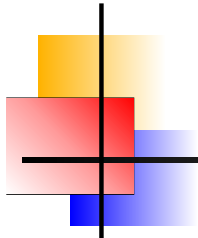
Teorema 1.77

Orice formulă φ este echivalentă cu o formulă φ^{FND} în FND și cu o formulă φ^{FNC} în FNC.

Dem.:

Fie $Var(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ și $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ funcția booleană asociată. Aplicând Teorema 1.75 cu $H := F_\varphi$, obținem o formulă φ^{FND} în FND a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FND}}$. Așadar, conform Propoziției 1.73.(ii), $\varphi \sim \varphi^{FND}$.

Similar, aplicând Teorema 1.76 cu $H := F_\varphi$, obținem o formulă φ^{FNC} în FNC a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FNC}}$. Prin urmare, $\varphi \sim \varphi^{FNC}$. □



Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Algoritm pentru a aduce o formulă la FNC/FND:

Pasul 1. Se înlocuiesc implicațiile și echivalențele, folosind:

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \quad \text{și} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi).$$

Pasul 2. Se înlocuiesc dubbele negații, folosind $\neg\neg\psi \sim \psi$, și se aplică regulile De Morgan pentru a înlocui

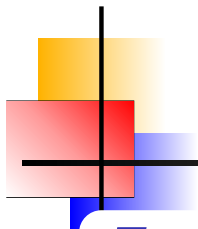
$$\neg(\varphi \vee \psi) \text{ cu } \neg\varphi \wedge \neg\psi \quad \text{și} \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \text{ cu } \neg\varphi \vee \neg\psi.$$

Pasul 3. Pentru FNC, se aplică distributivitatea lui \vee fața de \wedge , pentru a înlocui

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \text{ cu } (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \wedge \chi) \vee \varphi \text{ cu } (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi).$$

Pentru FND, se aplică distributivitatea lui \wedge fața de \vee , pentru a înlocui

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \text{ cu } (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \vee \chi) \wedge \varphi \text{ cu } (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi).$$



Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Exemplu

Considerăm formula $\varphi := (\neg v_0 \rightarrow \neg v_2) \rightarrow (v_0 \rightarrow v_2)$.

Avem

$$\begin{aligned}\varphi &\sim \neg(\neg v_0 \rightarrow \neg v_2) \vee (v_0 \rightarrow v_2) && \text{Pasul 1} \\ &\sim \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (v_0 \rightarrow v_2) && \text{Pasul 1} \\ &\sim \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) && \text{Pasul 1} \\ &\sim \neg(v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) && \text{Pasul 2} \\ &\sim (\neg v_0 \wedge \neg\neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) && \text{Pasul 2} \\ &\sim (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2 && \text{Pasul 2}\end{aligned}$$

Putem lua $\varphi^{FND} := (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2$.

Pentru a obține FNC, continuăm cu Pasul 3:

$$\begin{aligned}\varphi &\sim (\neg v_0 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) \\ &\sim (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2).\end{aligned}$$

Putem lua $\varphi^{FNC} := (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2)$. Se observă, folosind idempotența și comutativitatea lui \vee , că $\varphi^{FNC} \sim \neg v_0 \vee v_2$.

Definiția 1.78

O **clauză** este o mulțime finită de literali:

$$C = \{L_1, \dots, L_n\}, \text{ unde } L_1, \dots, L_n \text{ sunt literali.}$$

Dacă $n = 0$, obținem clauza vidă $\square := \emptyset$.

O clauză nevidă este considerată implicit o disjuncție.

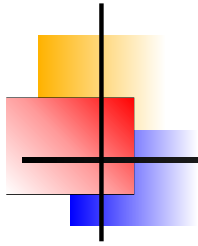
Definiția 1.79

Fie C o clauză și $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Spunem că **e este model al lui C** sau că **e satisface C** și scriem $e \models C$ dacă există $L \in C$ a.î. $e \models L$.

Definiția 1.80

O clauză C se numește

- (i) **satisfiabilă** dacă are un model.
- (ii) **validă** dacă orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al lui C .



Clauze

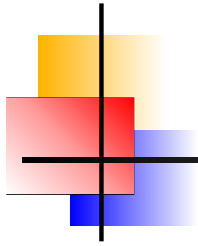
Definiția 1.81

O clauză C este *trivială* dacă există un literal L a.î. $L, L^c \in C$.

Propoziția 1.82

- (i) Orice clauză nevidă este satisfiabilă.
- (ii) Clauza vidă \square este nesatisfiabilă.
- (iii) O clauză este validă ddacă este trivială.

Dem.: Exercițiu.



Clauze

$\mathcal{S} = \{C_1, \dots, C_m\}$ este o mulțime de clauze.

Dacă $m = 0$, obținem mulțimea vidă de clauze \emptyset .

\mathcal{S} este considerată implicit ca o formulă în FNC: conjuncție de disjuncții ale literalilor din fiecare clauză.

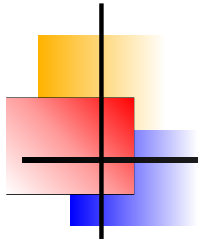
Definiția 1.83

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Spunem că *e este model al lui \mathcal{S}* sau că *e satisface \mathcal{S}* și scriem $e \models \mathcal{S}$ dacă $e \models C_i$ pentru orice $i \in \{1, \dots, m\}$.

Definiția 1.84

\mathcal{S} se numește

- (i) *satisfiabilă* dacă are un model.
- (ii) *validă* dacă orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al lui \mathcal{S} .



Clauze

Propoziția 1.85

- ▶ Dacă \mathcal{S} conține clauza vidă \square , atunci \mathcal{S} nu este satisfiabilă.
- ▶ \emptyset este validă.

Dem.: Exercițiu.

Exemplu

$\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$ este satisfiabilă.

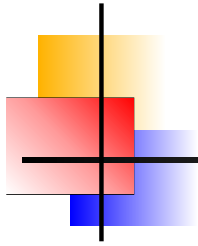
Dem.: Considerăm $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e(v_1) = e(v_2) = 1$. Atunci $e \models \mathcal{S}$. \square

Exemplu

$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{v_3\}\}$ nu este satisfiabilă.

Dem.: Presupunem că \mathcal{S} are un model e . Atunci

$e(v_1) = e(v_3) = 1$ și, deoarece $e \models \{\neg v_3, \neg v_2\}$, trebuie să avem $e(v_2) = 0$. Rezultă că $e(v_2) = e^+(\neg v_1) = 0$, deci e nu satisface $\{\neg v_1, v_2\}$. Am obținut o contradicție. \square



Clauze și FNC

Unei formule φ în FNC îi asociem o mulțime de clauze \mathcal{S}_φ astfel:

Fie

$$\varphi := \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right),$$

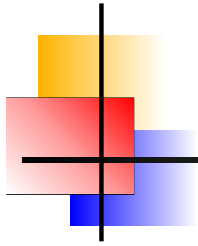
unde fiecare $L_{i,j}$ este literal. Pentru orice i , fie C_i clauza obținută considerând toți literalii $L_{i,j}, j \in \{1, \dots, k_i\}$ distincți. Fie \mathcal{S}_φ mulțimea tuturor clauzelor $C_i, i \in \{1, \dots, n\}$ distincte.

\mathcal{S}_φ se mai numește și **forma clauzală** a lui φ .

Propoziția 1.86

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e \models \varphi$ dacă $e \models \mathcal{S}_\varphi$.

Dem.: Exercițiu.



Clauze și FNC

Unei mulțimi de clauze \mathcal{S} îi asociem o formulă $\varphi_{\mathcal{S}}$ în FNC astfel:

- ▶ $C = \{L_1, \dots, L_n\}, n \geq 1 \mapsto \varphi_C := L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n.$
- ▶ $\square \mapsto \varphi_{\square} := v_0 \wedge \neg v_0.$

Fie $\mathcal{S} = \{C_1, \dots, C_m\}$ o mulțime nevidă de clauze. Formula asociată lui \mathcal{S} este

$$\varphi_{\mathcal{S}} := \bigwedge_{i=1}^m \varphi_{C_i}.$$

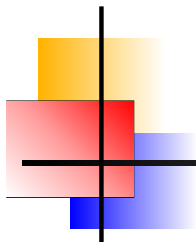
Formula asociată mulțimii vide de clauze este $\varphi_{\emptyset} := v_0 \vee \neg v_0.$

Formula $\varphi_{\mathcal{S}}$ nu este unic determinată, depinde de ordinea în care se scriu elementele în clauze și în \mathcal{S} , dar se observă imediat că: $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ implică $\varphi_{\mathcal{S}} \sim \varphi_{\mathcal{S}'}$.

Propoziția 1.87

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e \models \mathcal{S}$ ddacă $e \models \varphi_{\mathcal{S}}$.

Dem.: Exercițiu.



Rezoluția

Definiția 1.88

Fie C_1, C_2 două clauze. O clauză R se numește **rezolvent** al clauzelor C_1, C_2 dacă există un literal L a.î. $L \in C_1, L^c \in C_2$ și

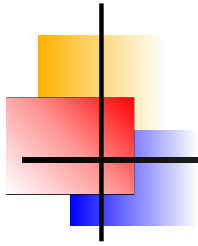
$$R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\}).$$

Regula Rezoluției

$$\text{Rez} \quad \frac{C_1, C_2}{(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})}, \quad L \in C_1, L^c \in C_2$$

Notăm cu **$\text{Res}(C_1, C_2)$** mulțimea rezolvenților clauzelor C_1, C_2 .

- ▶ Rezoluția a fost introdusă de **Blake** (1937) și dezvoltată de **Davis, Putnam** (1960) și **Robinson** (1965).
- ▶ Multe demonstratoare automate de teoreme folosesc rezoluția. Limbajul PROLOG este bazat pe rezoluție.



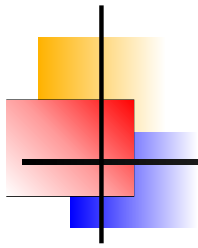
Exemplu

$C_1 = \{v_1, v_2, \neg v_5\}$, $C_2 = \{v_1, \neg v_2, v_{100}, v_5\}$.

- ▶ Luăm $L := \neg v_5$. Atunci $L \in C_1$ și $L^c = v_5 \in C_2$. Prin urmare, $R = \{v_1, v_2, \neg v_2, v_{100}\}$ este rezolvent al clauzelor C_1, C_2 .
- ▶ Dacă luăm $L' := v_2$, atunci $L' \in C_1$ și $L'^c = \neg v_2 \in C_2$. Prin urmare, $R' = \{v_1, \neg v_5, v_{100}, v_5\}$ este rezolvent al clauzelor C_1, C_2 .

Exemplu

$C_1 = \{v_7\}$, $C_2 = \{\neg v_7\}$. Atunci clauza vidă \square este rezolvent al clauzelor C_1, C_2 .



Fie \mathcal{S} o mulțime de clauze.

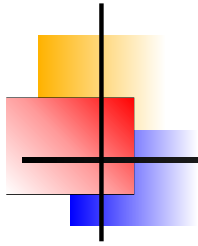
Definiția 1.89

O *derivare prin rezoluție din \mathcal{S}* sau o *\mathcal{S} -derivare prin rezoluție* este o secvență C_1, C_2, \dots, C_n de clauze a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) C_i este o clauză din \mathcal{S} ;
- (ii) există $j, k < i$ a.î. C_i este rezolvent al clauzelor C_j, C_k .

Definiția 1.90

Fie C o clauză. O *derivare prin rezoluție a lui C din \mathcal{S}* este o \mathcal{S} -derivare prin rezoluție C_1, C_2, \dots, C_n a.î. $C_n = C$.



Exemplu

Fie

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3, v_4\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{\neg v_4\}\}.$$

O derivare prin rezoluție a clauzei vide \square din \mathcal{S} este următoarea:

C_1	$=$	$\{\neg v_4\}$	$C_1 \in \mathcal{S}$
C_2	$=$	$\{\neg v_2, \neg v_3, v_4\}$	$C_2 \in \mathcal{S}$
C_3	$=$	$\{\neg v_2, \neg v_3\}$	C_3 rezolvent al clauzelor C_1, C_2
C_4	$=$	$\{v_3\}$	$C_4 \in \mathcal{S}$
C_5	$=$	$\{\neg v_2\}$	C_5 rezolvent al clauzelor C_3, C_4
C_6	$=$	$\{\neg v_1, v_2\}$	$C_6 \in \mathcal{S}$
C_7	$=$	$\{\neg v_1\}$	C_7 rezolvent al clauzelor C_5, C_6
C_8	$=$	$\{v_1\}$	$C_8 \in \mathcal{S}$
C_9	$=$	\square	C_9 rezolvent al clauzelor C_7, C_8 .