

Curs 5

Semantica limbajelor de programare

- Limbaj de programare: sintaxă și semantică
- Feluri de semantică
 - Limbaj natural — descriere textuală a efectelor
 - Operațională — asocierea unei demonstrații a execuției
 - Axiomatică — Descrierea folosind logică a efectelor unei instrucțiuni
 - Denotațională — prin asocierea unui obiect matematic (denotație)
 - Statică — Asocierea unui sistem de tipuri care exclude programe eronate

IMP: un limbaj IMPerativ foarte simplu

Ce conține

- Expresii
 - Aritmetice
 - Booleene
- Blocuri de instrucțiuni
 - De atribuire
 - Condiționale
 - De ciclare
 - De interacțiune I/O

```
var n = 0; read("n=", n);
var prime = true;
var i = 1;
while (prime && i * i < n) {
    i = i + 1;
    if (n % i == 0) prime = false
    else {}
};
if (prime) print("Is_prime:", n)
else print("Is_not_prime:", n)
```

Sintaxă formală

$$\begin{aligned} E ::= & n \mid x \mid b \\ & \mid E + E \mid E * E \mid E / E \\ & \mid E \leq E \mid E == E \\ & \mid ! E \mid E \&\& E \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} C ::= & \text{var } x = E \mid x = E \\ & \mid \text{if } (B) C \text{ else } C \\ & \mid \text{while } (B) C \\ & \mid \text{read } (str, x) \mid \text{print } (str, E) \\ & \mid \{ \{ C ; \}^* \} \end{aligned}$$
$$P ::= \{ C ; \}^*$$

unde n reprezintă numere întregi, b constante de adevăr, x identificatori și str șiruri de caractere.

Semantică statică

Semantică Statică - Motivație

- Este sintaxa unui limbaj de programare prea expresivă?
- Sunt programe care n-aș vrea să le pot scrie, dar le pot?

- Putem detecta programe greșite înainte de rulare?
- Putem garanta că execuția programului nu se va bloca?

Semantică Statică - Motivație

- Este sintaxa unui limbaj de programare prea expresivă?
- Sunt programe care n-aș vrea să le pot scrie, dar le pot?
 - Pot aduna întregi cu Booleeni
 - $2 \leq 3 \leq 5$
- Putem detecta programe greșite înainte de rulare?
- Putem garanta că execuția programului nu se va bloca?
 - folosirea variabilelor fără a le declara
 - tipuri incompatibile (variabile, dar și expresii)

Semantică Statică - Motivație

- Este sintaxa unui limbaj de programare prea expresivă?
- Sunt programe care n-aș vrea să le pot scrie, dar le pot?
 - Pot aduna întregi cu Booleeni
 - $2 \leq 3 \leq 5$
- Putem detecta programe greșite înainte de rulare?
- Putem garanta că execuția programului nu se va bloca?
 - folosirea variabilelor fără a le declara
 - tipuri incompatibile (variabile, dar și expresii)
- Soluție: Sistemele de tipuri

Sisteme de tipuri

- Descriu programele „bine formate“
- Pot preveni anumite erori
 - folosirea variabilelor nedeclarate/neinițializate
 - detectarea unor bucați de cod inaccesibile
 - erori de securitate
- Ajută compilatorul
- Pot influența proiectarea limbajului

Scop (ideal)

Programele „bine formate“, i. e., cărora li se poate asocia un tip nu eșuează

Reguli intuitive pentru IMP

- Variabilele trebuie declarate înainte de a fi folosite
- Variabilele nu își schimbă tipul în timpul execuției
- operanzii asociați unui operator într-o expresie trebuie să se evalueze la valori corespunzătoare tipurilor așteptate de operator
- Condițiile din if și while se evaluează la valori Booleene
- Se fac operații I/O doar cu valori de tip întreg

Sisteme de tipuri

- Vom defini o relație $\Gamma \vdash frag : T$
- Citim *frag are tipul T dacă Γ* , unde
- Γ — tipuri asociate variabilelor din e

Exemple

$\vdash \text{if } true \text{ then } \{ \} \text{ else } \{ \} : \text{stmt}$

$x : \text{int} \vdash x + 13 \quad : \text{int}$

$x : \text{int} \not\vdash x = y + 1 \quad : T \quad \text{pentru orice } T$

Tipuri în limbajul IMP

Tipurile expresiilor = tipurile gramaticale

$$T ::= \mathbf{int} \mid \mathbf{bool} \mid \mathbf{stmt}$$

Γ — Mediul de tipuri

- Asociază tipuri variabilelor
- **Notăție:** o listă de perechi locație-tip $x_1 : t_1, \dots, x_n : t_n$

Observații pentru limbajul IMP

- variabile din Γ au tipul fie **int** fie **bool**
- Apariția unei variabile în Γ înseamnă că variabila a fost declarată

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul constantelor

(INT) $\Gamma \vdash n : \mathbf{int}$ dacă $n \in \mathbb{Z}$

(BOOL) $\Gamma \vdash b : \mathbf{bool}$ dacă $b \in \{true, false\}$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul constantelor

(INT) $\Gamma \vdash n : \mathbf{int}$ dacă $n \in \mathbb{Z}$

(BOOL) $\Gamma \vdash b : \mathbf{bool}$ dacă $b \in \{true, false\}$

Tipul operatorilor

Operanzii asociați unui operator într-o expresie trebuie să se evalueze la valori corespunzătoare tipurilor așteptate de operator

(OP+)
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathbf{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathbf{int}}{\Gamma \vdash e_1 + e_2 : \mathbf{int}}$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul constantelor

(INT) $\Gamma \vdash n : \mathbf{int}$ dacă $n \in \mathbb{Z}$

(BOOL) $\Gamma \vdash b : \mathbf{bool}$ dacă $b \in \{true, false\}$

Tipul operatorilor

Operanzii asociați unui operator într-o expresie trebuie să se evalueze la valori corespunzătoare tipurilor așteptate de operator

(OP+)
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathbf{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathbf{int}}{\Gamma \vdash e_1 + e_2 : \mathbf{int}}$$

(OP≤)
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathbf{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \mathbf{int}}{\Gamma \vdash e_1 \leq e_2 : \mathbf{bool}}$$

(OP!)
$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathbf{bool}}{\Gamma \vdash !e : \mathbf{bool}}$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul variabilelor și al declarațiilor

- Variabilele trebuie declarate înainte de a fi folosite
- Variabilele nu își schimbă tipul în timpul execuției

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul variabilelor și al declarațiilor

- Variabilele trebuie declarate înainte de a fi folosite
- Variabilele nu își schimbă tipul în timpul execuției

(LOC) $\Gamma \vdash x : t$ dacă $\Gamma(x) = t$

(DECL)
$$\frac{\Gamma \vdash e : t \quad \Gamma, x \mapsto t \vdash sts : stmt}{\Gamma \vdash \mathbf{var} \ x = e; sts : stmt}$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul variabilelor și al declarațiilor

- Variabilele trebuie declarate înainte de a fi folosite
- Variabilele nu își schimbă tipul în timpul execuției

$$(\text{LOC}) \quad \Gamma \vdash x : t \quad \text{dacă } \Gamma(x) = t$$

$$(\text{DECL}) \quad \frac{\Gamma \vdash e : t \quad \Gamma, x \mapsto t \vdash sts : stmt}{\Gamma \vdash \mathbf{var} \ x = e; sts : stmt}$$

Instrucțiuni: Atribuire și secvențiere

- Variabilele nu își schimbă tipul în timpul execuției

$$(\text{ATTRIB}) \quad \frac{\Gamma \vdash e : t}{\Gamma \vdash x = e : \mathbf{stmt}} \quad \text{dacă } \Gamma(x) = t$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipul variabilelor și al declarațiilor

- Variabilele trebuie declarate înainte de a fi folosite
- Variabilele nu își schimbă tipul în timpul execuției

$$(\text{LOC}) \quad \Gamma \vdash x : t \quad \text{dacă } \Gamma(x) = t$$

$$(\text{DECL}) \quad \frac{\Gamma \vdash e : t \quad \Gamma, x \mapsto t \vdash sts : stmt}{\Gamma \vdash \mathbf{var} \ x = e; sts : stmt}$$

Instrucțiuni: Atribuire și secvențiere

- Variabilele nu își schimbă tipul în timpul execuției

$$(\text{ATTRIB}) \quad \frac{\Gamma \vdash e : t}{\Gamma \vdash x = e : \mathbf{stmt}} \quad \text{dacă } \Gamma(x) = t$$

$$(\text{SEQ}) \quad \frac{\Gamma \vdash st : \mathbf{stmt} \quad \Gamma \vdash sts : stmt}{\Gamma \vdash st; sts : \mathbf{stmt}} \quad \text{dacă } st \text{ nu e declarație}$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipuri pentru instrucțiuni

- Condițiile din if și while se evaluează la valori Booleene

$$(IF) \quad \frac{\Gamma \vdash c : \mathbf{bool} \quad \Gamma \vdash t : \mathbf{stmt} \quad \Gamma \vdash e : \mathbf{stmt}}{\Gamma \vdash \mathbf{if } c \mathbf{ then } t \mathbf{ else } e : \mathbf{stmt}}$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipuri pentru instrucțiuni

- Condițiile din if și while se evaluează la valori Booleene

$$(IF) \quad \frac{\Gamma \vdash c : \mathbf{bool} \quad \Gamma \vdash t : \mathbf{stmt} \quad \Gamma \vdash e : \mathbf{stmt}}{\Gamma \vdash \mathbf{if } c \mathbf{ then } t \mathbf{ else } e : \mathbf{stmt}}$$

$$(WHILE) \quad \frac{\Gamma \vdash c : \mathbf{bool} \quad \Gamma \vdash b : \mathbf{stmt}}{\Gamma \vdash \mathbf{while } (c) b : \mathbf{stmt}}$$

IMP: Reguli formale pentru tipuri

Tipuri pentru instrucțiuni

- Condițiile din if și while se evaluează la valori Booleene

$$(IF) \quad \frac{\Gamma \vdash c : \mathbf{bool} \quad \Gamma \vdash t : \mathbf{stmt} \quad \Gamma \vdash e : \mathbf{stmt}}{\Gamma \vdash \mathbf{if } c \mathbf{ then } t \mathbf{ else } e : \mathbf{stmt}}$$

$$(WHILE) \quad \frac{\Gamma \vdash c : \mathbf{bool} \quad \Gamma \vdash b : \mathbf{stmt}}{\Gamma \vdash \mathbf{while } (c) b : \mathbf{stmt}}$$

- Se fac operații I/O doar cu valori de tip întreg

$$(READ) \quad \Gamma \vdash \mathbf{read } (s, x) : \mathbf{stmt} \quad \text{dacă } \Gamma(x) = \mathbf{int}$$

$$(PRINT) \quad \frac{\Gamma \vdash e : \mathbf{int}}{\Gamma \vdash \mathbf{print } (s, e) : \mathbf{stmt}}$$

Haskell: limbajul SIMPLE

Limbajul SIMPLE

SIMPLE - exemplu

```
pFact= Block [  
    Asgn "n" (1 5),  
    Asgn "fact " (Id "n"),  
    Asgn "i" (1 1),  
    While (BinE Neq (Id "n") (Id "i"))  
        (Block [ Asgn "fact" (BinA Mul (Id "  
            fact") (Id "i")),  
                Asgn "i" (BinA Add (Id "i") (1  
                    1))  
            ])  
        ]  
    ]
```

```
*SIMPLE> pFact  
Block [Asgn "n" 5,Asgn "fact " n,Asgn "i" 1,While n!=  
    i (Block [Asgn "fact" (fact*i),Asgn "i" (i+1)])]
```


Limbajul SIMPLE - operatori

```
type Name = String
```

```
data BinAop = Add | Mul | Sub | Div | Mod
```

```
data BinCop = Lt | Lte | Gt | Gte
```

```
data BinEop = Eq | Neq
```

```
data BinLop = And | Or
```

Limbajul SIMPLE - expresii

```
data Exp
= Id Name
| I Integer
| B Bool
| UMin Exp
| BinA BinAop Exp Exp
| BinC BinCop Exp Exp
| BinE BinEop Exp Exp
| BinL BinLop Exp Exp
| Not Exp
```

Limbajul SIMPLE - instrucțiuni

```
data Stmt
    = Asgn Name Exp
    | If Exp Stmt Stmt
    | While Exp Stmt
    | Block [Stmt]
    | Decl Name Exp
```

SIMPLE: operatori binari

- operatori aritmetici

```
data BinAop = Add | Mul
```

```
instance Show BinAop where
```

```
  show Add = "+"
```

```
  show Mul = "*"
```

SIMPLE: operatori binari

□ operatori aritmetici

```
data BinAop = Add | Mul
```

```
instance Show BinAop where
```

```
  show Add = "+"
```

```
  show Mul = "*"
```

□ operatori logici

```
data BinLop = And | Or
```

```
instance Show BinLop where
```

```
  show And = "&&"
```

```
  show Or = "||"
```

SIMPLE: relații

- relații de ordine

```
data BinCop =  Lte |  Gte
```

```
instance Show BinCop where
```

```
  show Lte = "<="
```

```
  show Gte = ">="
```

SIMPLE: relații

□ relații de ordine

```
data BinCop =  Lte |  Gte
```

```
instance Show BinCop where
```

```
  show Lte = "<="
```

```
  show Gte = ">="
```

□ relația de egalitate

```
data BinEop = Eq |  Neq
```

```
instance Show BinEop where
```

```
  show Eq = "=="
```

```
  show Neq = "!="
```

SIMPLE: expresii simple

```
data Exp
  = Id Name
  | I Integer
  | B Bool
```


SIMPLE: expresii simple

```
data Exp
  = Id Name
  | I Integer
  | B Bool
```

```
instance Show Exp where
  show (Id x) = x
  show (I i) = show i
  show (B True) = "true"
  show (B False) = "false"
```

SIMPLE: expresii (complet)

```
data Exp
  = Id Name
  | I Integer
  | B Bool
  | UMin Exp
  | BinA BinAop Exp Exp
  | BinC BinCop Exp Exp
  | BinE BinEop Exp Exp
  | BinL BinLop Exp Exp
  | Not Exp
```

SIMPLE: expresii (complet)

```
instance Show Exp where  
  show (Id x) = x  
  show (I i) = show i  
  show (B True) = "true"  
  show (B False) = "false"  
  show (UMin e) = "-" ++ show e  
  show (BinA op e1 e2) = addParens $ show e1 ++  
    show op ++ show e2  
  show (BinL op e1 e2) = addParens $ show e1 ++  
    show op ++ show e2  
  show (BinC op e1 e2) = show e1 ++ show op ++ show  
    e2  
  show (BinE op e1 e2) = show e1 ++ show op ++ show  
    e2  
  show (Not e) = "!" ++ show e
```

```
addParens :: String -> String  
addParens e = "(" ++ e ++ ")"
```

Exemplu: SIMPLE expresii

```
> :t BinC Lte (Id "prime") (BinA Add (I 2) (Id "x"))
BinC Lte (Id "prime") (BinA Add (I 2) (Id "x")) ::
  Exp
```

```
> :t BinL Lte (Id "prime") (BinA Add (I 2) (Id "x"))
error: ...
```

```
> BinC Lte (Id "prime") (BinA Add (I 2) (Id "x"))
prime <= (2 + x)
```

Exemplu: SIMPLE expresii

Observați că:

```
> :t BinC Lte (B True) (BinA Add (I 2) (Id "x"))  
BinC Lte (B True) (BinA Add (I 2) (Id "x")) :: Exp
```

```
> BinC Lte (B True) (BinA Add (I 2) (Id "x"))  
true <=(2+x)
```

Exemplu: SIMPLE expresii

Observați că:

```
> :t BinC Lte (B True) (BinA Add (1 2) (Id "x"))  
BinC Lte (B True) (BinA Add (1 2) (Id "x")) :: Exp
```

```
> BinC Lte (B True) (BinA Add (1 2) (Id "x"))  
true <=(2+x)
```

Expresia de mai sus este **coerectă sintactic** dar **greșită** din punctul de vedere al verificării tipurilor.

SIMPLE: instrucțiuni

data Stmt

= Asgn Name Exp
 | If Exp Stmt Stmt
 | While Exp Stmt
 | Block [Stmt]
 | Decl Name Exp

deriving (Show)

Exemplu: SIMPLE program

```
pFact= Block [  
  Asgn "n" (I 5),  
  Asgn "fact " (Id "n"),  
  Asgn "i" (I 1),  
  While (BinE Neq (Id "n") (Id "i"))  
    (Block [ Asgn "fact" (BinA Mul (Id "  
      fact") (Id "i")),  
      Asgn "i" (BinA Add (Id "i") (I  
        1))  
    ])  
]
```


Exemplu: SIMPLE program

```
pFact= Block [  
  Asgn "n" (I 5),  
  Asgn "fact " (Id "n"),  
  Asgn "i" (I 1),  
  While (BinE Neq (Id "n") (Id "i"))  
    (Block [ Asgn "fact" (BinA Mul (Id "  
      fact") (Id "i")),  
      Asgn "i" (BinA Add (Id "i") (I  
        1))  
    ])  
  ]
```

```
*SIMPLE> :t pFact  
pFact :: Stmt
```

Exemplu: SIMPLE program

```
pFact= Block [  
  Decl "n" (I 5),  
  Decl "fact " (Id "n"),  
  Decl "i" (I 1),  
  While (BinE Neq (Id "n") (Id "i"))  
    (Block [ Asgn "fact" (BinA Mul (Id "  
      fact") (Id "i")),  
      Asgn "i" (BinA Add (Id "i") (I  
        1))  
    ])  
]
```

Exemplu: SIMPLE program

```
pFact= Block [  
  Decl "n" (I 5),  
  Decl "fact " (Id "n"),  
  Decl "i" (I 1),  
  While (BinE Neq (Id "n") (Id "i"))  
    (Block [ Asgn "fact" (BinA Mul (Id "  
      fact") (Id "i")),  
      Asgn "i" (BinA Add (Id "i") (I  
        1))  
    ])  
  ]
```

```
*SIMPLE> pFact  
Block [Asgn "n" 5,Asgn "fact " n,Asgn "i" 1,  
While n!=i (Block [Asgn "fact" (fact*i),  
Asgn "i" (i+1)])]
```

SIMPLE: verificarea sistemului de tipuri

SIMPLE type checker

- vom folosi o "stare" in care fiecare variabila are asociat un tip;
"stările" sunt definite folosind Data.Map

```
import Data.Map.Strict as Map  
type CheckerState = Map Name Type
```

```
emptyCSt :: CheckerState  -- "starea" vida  
emptyCSt = Map.empty
```

SIMPLE type checker

- vom folosi o "stare" in care fiecare variabila are asociat un tip; "stările" sunt definite folosind Data.Map

```
import Data.Map.Strict as Map
type CheckerState = Map Name Type
```

```
emptyCSt :: CheckerState  -- "starea" vida
emptyCSt = Map.empty
```

- funcția de verificare va asocia unei construcții sintactice o valoare M Type, unde M este o monadă iar Type este un tip:

```
data Type = TInt | TBool
```

```
checkExp :: Exp -> M Type
```

SIMPLE type checker

- vom folosi o "stare" in care fiecare variabila are asociat un tip; "stările" sunt definite folosind Data.Map

```
import Data.Map.Strict as Map
type CheckerState = Map Name Type
```

```
emptyCSt :: CheckerState  -- "starea" vida
emptyCSt = Map.empty
```

- funcția de verificare va asocia unei construcții sintactice o valoare M Type, unde M este o monadă iar Type este un tip:

```
data Type = TInt | TBool
```

```
checkExp :: Exp -> M Type
```

Tipul "unit" () va fi tipul instrucțiunilor:

SIMPLE type checker

- vom folosi o "stare" in care fiecare variabila are asociat un tip; "stările" sunt definite folosind Data.Map

```
import Data.Map.Strict as Map
type CheckerState = Map Name Type
```

```
emptyCSt :: CheckerState  -- "starea" vida
emptyCSt = Map.empty
```

- funcția de verificare va asocia unei construcții sintactice o valoare M Type, unde M este o monadă iar Type este un tip:

```
data Type = TInt | TBool
```

```
checkExp :: Exp -> M Type
```

Tipul "unit" () va fi tipul instrucțiunilor: unde

```
checkStmt :: Stmt -> M ()
checkBlock :: [Stmt] -> M ()
```


SIMPLE type checker: monada

- Monada M este o combinație între monada Reader și monada **Either**

```
newtype EReader a =  
    EReader {runEReader :: CheckerState ->(Either  
        String a)}
```



```
instance Monad EReader where  
    return a = EReader (\env -> Right a)  
    act >=> k = EReader f  
        where  
            f env = case (runEReader act env)  
                of  
                    Left s -> Left s  
                    Right va -> runEReader (k  
                        va) env
```



```
type M = EReader
```

SIMPLE type checker: monada

- Monada EReader este o combinație între monada Reader și monada **Either**

```
newtype EReader a =  
    EReader {runEReader :: CheckerState ->(Either  
        String a)}
```

```
askEReader :: EReader CheckerState  
askEReader =EReader (\env -> Right env)
```

```
localEReader ::(CheckerState ->CheckerState) ->  
    EReader a -> EReader a  
localEReader f ma = EReader (\env -> (runEReader ma)  
    (f env))
```

SIMPLE type checker: funcții auxiliare

```
throwError :: String -> EReader a  
throwError e = EReader (\_ -> (Left e))
```

```
expect :: (Show t, Eq t, Show e) => t -> t -> e -> M ()  
expect tExpect tActual e =  
    if (tExpect /= tActual)  
    then      (throwError  
        $ "Type mismatch. Expected " ++ show tExpect  
        ++ " but got " ++ show tActual ++ " for "  
        ++ show e)  
    else (return ())
```

SIMPLE type checker: **lookup**

```
data Type = TInt | TBool  
    deriving (Eq)
```

```
type CheckerState = Map Name Type  
type M = EReader
```

```
lookupM :: Name -> M Type  
lookupM x = do  
    env <- askEReader  
    case (Map.lookup x env) of  
        Nothing -> throwError $ "Variable " <> x <> "  
            not declared"  
        Just t -> return t
```

SIMPLE type checker: structura generală

checkExp :: Exp -> M Type

checkStmt :: Stmt -> M ()

checkBlock :: [Stmt] -> M ()

checkPgm :: [Stmt] -> **Bool**

checkPgm pgm =

```
case (runEReader (checkBlock pgm)) emptyCSt of  
    Left err -> error err  
    Right _ -> True
```

SIMPLE type checker: structura generală

checkExp :: Exp -> M Type

checkStmt :: Stmt -> M ()

checkBlock :: [Stmt] -> M ()

checkPgm :: [Stmt] -> **Bool**

checkPgm pgm =

case (runEReader (checkBlock pgm)) emptyCSt **of**
 Left err -> **error** err
 Right _ -> **True**

*Checker> checkPgm [pFact]

True

SIMPLE type checker: structura generală

`checkExp :: Exp -> M Type`

`checkStmt :: Stmt -> M ()`

`checkBlock :: [Stmt] -> M ()`

`checkPgm :: [Stmt] -> Bool`

`checkPgm pgm =`

`case (runEReader (checkBlock pgm)) emptyCSt of
 Left err -> error err
 Right _ -> True`

SIMPLE type checker: structura generală

`checkExp :: Exp -> M Type`

`checkStmt :: Stmt -> M ()`

`checkBlock :: [Stmt] -> M ()`

`checkPgm :: [Stmt] -> Bool`

`checkPgm pgm =`

`case (runEReader (checkBlock pgm)) emptyCSt of`
 `Left err -> error err`
 `Right _ -> True`

`*Checker> runEReader (checkExp (BinC Lte (B True)`
 `(BinA Add (I 2) (Id "x")))) emptyCSt`
`Left "Type mismatch. Expected int but got bool for`
 `true"`

SIMPLE type checker: verificarea blocurilor

```
checkBlock :: [Stmt] -> M ()
```

```
checkBlock [] = return ()
```

```
checkBlock (Decl x e : ss) = do  
    t <- checkExp e  
    localEReader (Map.insert x t) (checkBlock ss)
```

```
checkBlock (s : ss) = checkStmt s >> checkBlock ss
```

SIMPLE type checker: verificarea instrucțiunilor

```
checkStmt :: Stmt -> M ()  
checkStmt (Decl _ _) = return ()  
checkStmt (Block ss) = checkBlock ss
```

SIMPLE type checker: verificarea instrucțiunilor

```
checkStmt :: Stmt -> M ()  
checkStmt (Decl _ _) = return ()  
checkStmt (Block ss) = checkBlock ss
```

```
checkStmt (Asgn x e) = do  
    tx <- lookupM x  
    te <- checkExp e  
    expect tx te e
```

```
checkStmt (If e s1 s2) = do  
    te <- checkExp e  
    expect TBool te e  
    checkStmt s1  
    checkStmt s2
```

```
checkStmt (While e s) = ...
```

SIMPLE type checker: verificarea expresiilor

```
checkExp :: Exp -> M Type
checkExp (I _) = return TInt
checkExp (B _) = return TBool
checkExp (Id x) = lookupM x
```

SIMPLE type checker: verificarea expresiilor

```
checkExp :: Exp -> M Type
checkExp (I _) = return TInt
checkExp (B _) = return TBool
checkExp (Id x) = lookupM x
```

```
checkExp (BinA _ e1 e2) = do
    t1 <- checkExp e1
    expect TInt t1 e1
    t2 <- checkExp e2
    expect TInt t2 e2
    return TInt
```

```
checkExp (Not e) = do
    t <- checkExp e
    expect TBool t e
    return TBool
```

...



Pe săptămâna viitoare!

Curs 6

- În 1929-1932 Church a propus λ -calculul ca sistem formal pentru logica matematică. În 1935 a argumentat că orice funcție calculabilă peste numere naturale poate fi calculată în λ -calcul.
- În 1935, independent de Church, Turing a dezvoltat mecanismul de calcul numit astăzi Mașina Turing. În 1936 și el a argumentat că orice funcție calculabilă peste numere naturale poate fi calculată de o mașină Turing. De asemenea, a arătat echivalența celor două modele de calcul. Această echivalență a constituit o indicație puternică asupra "universalității" celor două modele, conducând la ceea ce numim astăzi "Teza Church-Turing".

Referințe



λ -calcul: sintaxa

Lambda Calcul - sintaxă

$t =$ x (variabilă)
 $| \lambda x. t$ (abstractizare)
 $| t t$ (aplicare)

λ -calcul: sintaxa

Lambda Calcul - sintaxă

$$\begin{array}{ll} t = & x \quad \text{(variabilă)} \\ & | \lambda x. t \quad \text{(abstractizare)} \\ & | t \ t \quad \text{(aplicare)} \end{array}$$

λ -termeni

Fie $Var = \{x, y, z, \dots\}$ o mulțime infinită de variabile.
Mulțimea λT termenilor λT este definită inductiv astfel:

[Variabilă] $Var \subseteq \lambda T$

[Aplicare] dacă $t_1, t_2 \in \lambda T$ atunci $(t_1 \ t_2) \in \lambda T$

[Abstractizare] dacă $x \in Var$ și $t \in \lambda T$ atunci $(\lambda x. t) \in \lambda T$

Lambda termeni

λ -termeni: exemple

- x, y, z
- $(xy), (yx), (x(yx))$
- $(\lambda x.x), (\lambda x.(xy)), (\lambda z.(xy)), (\lambda x.(\lambda z.(xy)))$
- $((\lambda x.x)y), ((\lambda x.(xz))y), ((\lambda x.x)(\lambda y.y))$

Lambda termeni

λ -termeni: exemple

- x, y, z
- $(xy), (yx), (x(yx))$
- $(\lambda x.x), (\lambda x.(xy)), (\lambda z.(xy)), (\lambda x.(\lambda z.(xy)))$
- $((\lambda x.x)y), ((\lambda x.(xz))y), ((\lambda x.x)(\lambda y.y))$

Convenții:

- se elimină parantezele exterioare
- aplicarea este asociativă la stînga: $t_1 t_2 t_3$ este $(t_1 t_2) t_3$
- corpul abstractizării este extins la dreapta: $\lambda x.t_1 t_2$ este $\lambda x.(t_1 t_2)$ (nu $(\lambda x.t_1) t_2$)
- scriem $\lambda xyz.t$ în loc de $\lambda x.\lambda y.\lambda z.t$

Lambda termeni / Funcții anonime

λ -termeni: exemple

- x, y, z
- $(xy), (yx), (x(yx))$
- $(\lambda x.x), (\lambda x.(xy)), (\lambda z.(xy)), (\lambda x.(\lambda z.(xy)))$
- $((\lambda x.x)y), ((\lambda x.(xz))y), ((\lambda x.x)(\lambda y.y))$

λ -termeni/ funcții anonime în Haskell

În Haskell, \backslash e folosit în locul simbolului λ și \rightarrow în locul punctului.

$\lambda x.x * x$ este $\backslash x \rightarrow x * x$

$\lambda x.x > 0$ este $\backslash x \rightarrow x > 0$

Variabile libere și legate

Apariții libere și legate

Pentru un termen $\lambda x.t$ spunem că:

- aparițiile variabilei x în t sunt legate (*bound*)
- λx este legătura (*binder*), iar t este domeniul (*scope*) legării
- o apariție a unei variabile este liberă (*free*) dacă apare într-o poziție în care nu e legată.

Un termen fără variabile libere se numește închis (*closed*).

Exemplu:

- $\lambda x.x$ este un termen închis
- $\lambda x.xy$ nu este termen închis, x este legată, y este liberă
- în termenul $x(\lambda x.xy)$ prima apariție a lui x este liberă, a doua este legată.

Variabile libere

Mulțimea variabilelor libere $FV(t)$

Pentru un λ -termen t mulțimea variabilelor libere este definită astfel:

$$[\text{Variabilă}] \quad FV(x) = x$$

$$[\text{Aplicare}] \quad FV(t_1 t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$$

$$[\text{Abstractizare}] \quad FV(\lambda x.t) = FV(t) \setminus \{x\}$$

Exemplu:

$$\begin{aligned} FV(\lambda x.xy) &= FV(xy) \setminus \{x\} \\ &= (FV(x) \cup FV(y)) \setminus \{x\} \\ &= (\{x\} \cup \{y\}) \setminus \{x\} \\ &= \{y\} \end{aligned}$$

Variabile libere

Mulțimea variabilelor libere $FV(t)$

Pentru un λ -termen t mulțimea variabilelor libere este definită astfel:

$$[\text{Variabilă}] \quad FV(x) = x$$

$$[\text{Aplicare}] \quad FV(t_1 t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$$

$$[\text{Abstractizare}] \quad FV(\lambda x.t) = FV(t) \setminus \{x\}$$

Exemplu:

$$\begin{aligned} FV(\lambda x.xy) &= FV(xy) \setminus \{x\} \\ &= (FV(x) \cup FV(y)) \setminus \{x\} \\ &= (\{x\} \cup \{y\}) \setminus \{x\} \\ &= \{y\} \end{aligned}$$

$$FV(x\lambda x.xy) =$$

Variabile libere

Mulțimea variabilelor libere $FV(t)$

Pentru un λ -termen t mulțimea variabilelor libere este definită astfel:

$$[\text{Variabilă}] \quad FV(x) = x$$

$$[\text{Aplicare}] \quad FV(t_1 t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$$

$$[\text{Abstractizare}] \quad FV(\lambda x.t) = FV(t) \setminus \{x\}$$

Exemplu:

$$\begin{aligned} FV(\lambda x.xy) &= FV(xy) \setminus \{x\} \\ &= (FV(x) \cup FV(y)) \setminus \{x\} \\ &= (\{x\} \cup \{y\}) \setminus \{x\} \\ &= \{y\} \\ FV(x\lambda x.xy) &= \{x, y\} \end{aligned}$$

Substituții

Fie t un λ -termen $x \in Var$.

Definiție intuitivă

Pentru un λ -termen u vom nota prin $[u/x]t$ rezultatul înlocuirii tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u în t .

Exemple: Dacă x, y, z sunt variabile distincte atunci

- $[y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$
- $[(\lambda z.zw)/x](\lambda y.x) = \lambda y.\lambda z.zw$

Substituții

Exemple: Dacă x, y, z sunt variabile distincte atunci

- $[y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$
- Cine este $[y/x]\lambda y.x$?

Substituții

Exemple: Dacă x, y, z sunt variabile distincte atunci

□ $[y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$

□ Cine este $[y/x]\lambda y.x$?

Dacă folosim definiția intuitivă obținem

$[y/x]\lambda y.x = \lambda y.y$ ceea ce este greșit!

Substituții

Exemple: Dacă x, y, z sunt variabile distincte atunci

□ $[y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$

□ Cine este $[y/x]\lambda y.x$?

Dacă folosim definiția intuitivă obținem

$[y/x]\lambda y.x = \lambda y.y$ ceea ce este greșit!

Cum procedăm pentru a repara greșeala? Observăm că $\lambda y.x$ desemnează o funcție constantă, aceeași funcție putând fi reprezentată prin $\lambda z.x$. Aplicarea corectă a substituției este:

$$[y/x]\lambda y.x = [y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$$

Substituții

Exemple: Dacă x, y, z sunt variabile distincte atunci

□ $[y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$

□ Cine este $[y/x]\lambda y.x$?

Dacă folosim definiția intuitivă obținem

$[y/x]\lambda y.x = \lambda y.y$ ceea ce este greșit!

Cum procedăm pentru a repara greșeala? Observăm că $\lambda y.x$ desemnează o funcție constantă, aceeași funcție putând fi reprezentată prin $\lambda z.x$. Aplicarea corectă a substituției este:

$$[y/x]\lambda y.x = [y/x]\lambda z.x = \lambda z.y$$

Avem libertatea de a redenumi variabilele legate!

α -conversie (α -echivalență)

α -conversia $=_{\alpha}$

[Reflexivitate] $t =_{\alpha} t$

[Simetrie] $t_1 =_{\alpha} t_2$ implică $t_2 =_{\alpha} t_1$

[Tranzitivitate] $t_1 =_{\alpha} t_2$ și $t_2 =_{\alpha} t_3$ implică $t_1 =_{\alpha} t_3$

[Redenumire] $\lambda x.t =_{\alpha} \lambda y.[y/x]t$ dacă $y \notin FV(t)$

[Compatibilitate] $t_1 =_{\alpha} t_2$ implică

$tt_1 =_{\alpha} tt_2$, $t_1t =_{\alpha} t_2t$ și $\lambda x.t_1 =_{\alpha} \lambda x.t_2$

α -conversie (α -echivalență)

α -conversia $=_{\alpha}$

[Reflexivitate] $t =_{\alpha} t$

[Simetrie] $t_1 =_{\alpha} t_2$ implică $t_2 =_{\alpha} t_1$

[Tranzitivitate] $t_1 =_{\alpha} t_2$ și $t_2 =_{\alpha} t_3$ implică $t_1 =_{\alpha} t_3$

[Redenumire] $\lambda x.t =_{\alpha} \lambda y.[y/x]t$ dacă $y \notin FV(t)$

[Compatibilitate] $t_1 =_{\alpha} t_2$ implică

$tt_1 =_{\alpha} tt_2$, $t_1t =_{\alpha} t_2t$ și $\lambda x.t_1 =_{\alpha} \lambda x.t_2$

Exemplu:

$[xy/x](\lambda y.yx) =_{\alpha} [xy/x](\lambda z.zx) =_{\alpha} \lambda z.z(xy)$

Substituții

Definirea substituției

Rezultatul substituirii lui x cu u în t este definit astfel:

[Variabilă] $[u/x]x = u$

[Variabilă] $[u/x]y = y$ dacă $x \neq y$

[Aplicare] $[u/x](t_1 t_2) = [u/x]t_1 [u/x]t_2$

[Abstractizare] $[u/x]\lambda y.t = \lambda y.[u/x]t$ dacă
 $x \neq y$ și $y \notin FV(u)$

α -conversia este compatibilă cu substituția

□ $t_1 =_{\alpha} t_2$ și $u_1 =_{\alpha} u_2$ implică $[u_1/x]t_1 =_{\alpha} [u_2/x]t_2$

Vom lucra modulo α -conversie, doi termeni α -echivalenți vor fi considerați "egali".

β -reducție

β -reducția este o relație pe mulțimea α -termenilor.

β -reducția $\rightarrow_\beta, \rightarrow_\beta^*$

□ un singur pas $\rightarrow_\beta \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$

[Aplicarea] $(\lambda x.t)u \rightarrow_\beta [u/x]t$

[Compatibilitatea] $t_1 \rightarrow_\beta t_2$ implică

$tt_1 \rightarrow_\beta tt_2, t_1 t \rightarrow_\beta t_2 t$ și $\lambda x.t_1 \rightarrow_\beta \lambda x.t_2$

□ zero sau mai mulți pași $\rightarrow_\beta^* \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$

$t_1 \xrightarrow{*}_\beta t_2$ dacă există $n \geq 0$ și u_0, \dots, u_n astfel încât

$t_1 =_\alpha u_0 \rightarrow_\beta u_1 \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta u_n =_\alpha t_2$

Confluența β -reducției

Teorema Church-Rosser

Dacă $t \xrightarrow{*}_{\beta} t_1$ și $t \xrightarrow{*}_{\beta} t_2$ atunci există u astfel încât $t_1 \xrightarrow{*}_{\beta} u$ și $t_2 \xrightarrow{*}_{\beta} u$.

Exemplu:

β -forma normală

Intuitiv, o formă normală este un termen care nu mai poate fi redus (sau punctul final al unui calcul).

Formă normală

- un λ -termen căruia nu i se mai poate aplica reducerea într-un pas \rightarrow_β se numește *β -formă normală*
- dacă $t \xrightarrow{*}_\beta u_1$, $t \xrightarrow{*}_\beta u_2$ și u_1, u_2 sunt η -forme normale atunci, datorită confluentei, $u_1 =_\alpha u_2$
- un λ -termen poate avea cel mult o β -formă normală (modulo α -echivalență)

β -forma normală

Formă normală

- un λ -termen căruia nu i se mai poate aplica reducerea într-un pas \rightarrow_β se numește β -formă normală
- dacă $t \xrightarrow{*}_\beta u_1$, $t \xrightarrow{*}_\beta u_2$ și u_1, u_2 sunt η -forme normale atunci, datorită confluenței, $u_1 =_\alpha u_2$
- un λ -termen poate avea cel mult o β -formă normală (modulo α -echivalență)

Exemplu:

- zv este β -formă normală pentru $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v$
 $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v \rightarrow_\beta (\lambda y.yv)z \rightarrow_\beta zv$
- există termeni care **nu** pot fi reduși la o β -formă normală, de exemplu $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

β -conversia

Intuitiv, β -conversia extinde β -reducția în ambele direcții.

β -conversia $=_{\beta}$

$$\square =_{\beta} \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$$

$t_1 =_{\beta} t_2$ dacă există $n \geq 0$ și u_0, \dots, u_n astfel încât

$t_1 =_{\alpha} u_0$, $u_n =_{\alpha} t_2$ și, pentru orice i , $u_i \rightarrow_{\beta} u_{i+1}$ sau $u_{i+1} \rightarrow_{\beta} u_i$

β -conversia

Intuitiv, β -conversia extinde β -reducția în ambele direcții.

β -conversia $=_{\beta}$

$$\square =_{\beta} \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$$

$t_1 =_{\beta} t_2$ dacă există $n \geq 0$ și u_0, \dots, u_n astfel încât

$t_1 =_{\alpha} u_0$, $u_n =_{\alpha} t_2$ și, pentru orice i , $u_i \rightarrow_{\beta} u_{i+1}$ sau $u_{i+1} \rightarrow_{\beta} u_i$

Observații

$\square =_{\beta}$ este o relație de echivalență

β -conversia

Intuitiv, β -conversia extinde β -reducția în ambele direcții.

β -conversia $=_{\beta}$

$$\square =_{\beta} \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$$

$t_1 =_{\beta} t_2$ dacă există $n \geq 0$ și u_0, \dots, u_n astfel încât

$t_1 =_{\alpha} u_0$, $u_n =_{\alpha} t_2$ și, pentru orice i , $u_i \rightarrow_{\beta} u_{i+1}$ sau $u_{i+1} \rightarrow_{\beta} u_i$

Observații

$\square =_{\beta}$ este o relație de echivalență

\square pentru t_1, t_2 λ -termeni și u_1, u_2 β -forme normale

dacă $t_1 \xrightarrow{*}_{\beta} u_1$, $t_2 \xrightarrow{*}_{\beta} u_2$ și $u_1 =_{\alpha} u_2$ atunci $t_1 =_{\beta} t_2$

β -conversia

β -conversia $=_{\beta}$

□ $=_{\beta} \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$

$t_1 =_{\beta} t_2$ dacă există $n \geq 0$ și u_0, \dots, u_n astfel încât

$t_1 =_{\alpha} u_0$, $u_n =_{\alpha} t_2$ și, pentru orice i , $u_i \rightarrow_{\beta} u_{i+1}$ sau $u_{i+1} \rightarrow_{\beta} u_i$

□ $=_{\beta}$ este o relație de echivalență

β -conversia

β -conversia $=_{\beta}$

□ $=_{\beta} \subseteq \Lambda T \times \Lambda T$

$t_1 =_{\beta} t_2$ dacă există $n \geq 0$ și u_0, \dots, u_n astfel încât

$t_1 =_{\alpha} u_0$, $u_n =_{\alpha} t_2$ și, pentru orice i , $u_i \rightarrow_{\beta} u_{i+1}$ sau $u_{i+1} \rightarrow_{\beta} u_i$

□ $=_{\beta}$ este o relație de echivalență

□ pentru t_1, t_2 λ -termeni și u_1, u_2 β -forme normale

dacă $t_1 \xrightarrow{*}_{\beta} u_1$, $t_2 \xrightarrow{*}_{\beta} u_2$ și $u_1 =_{\alpha} u_2$ atunci $t_1 =_{\beta} t_2$

β -conversia reprezintă "egalitatea prin calcul", iar β -reducția (modulo α -conversie) oferă o procedură de decizie pentru aceasta.



Pe săptămâna viitoare!

Curs 7

λ -calcul și calculabilitate

- În 1929-1932 Church a propus λ -calculul ca sistem formal pentru logica matematică. În 1935 a argumentat că orice funcție calculabilă peste numere naturale poate fi calculată în λ -calcul.
- În 1935, independent de Church, Turing a dezvoltat mecanismul de calcul numit astăzi Mașina Turing. În 1936 și el a argumentat că orice funcție calculabilă peste numere naturale poate fi calculată de o mașină Turing. De asemenea, a arătat echivalența celor două modele de calcul. Această echivalență a constituit o indicație puternică asupra "universalității" celor două modele, conducând la ceea ce numim astăzi "Teza Church-Turing".

λ -calcul: sintaxa

$t =$	x	(variabilă)
	$ (\lambda x. t)$	(abstractizare)
	$ (t \ t)$	(aplicare)

Convenții:

- se elimină parantezele exterioare
- aplicarea este asociativă la stînga: $t_1 t_2 t_3$ este $(t_1 t_2) t_3$
- corpul abstractizării este extins la dreapta: $\lambda x. t_1 t_2$ este $\lambda x. (t_1 t_2)$ (nu $(\lambda x. t_1) t_2$)
- scriem $\lambda xyz. t$ în loc de $\lambda x. \lambda y. \lambda z. t$

λ -calcul: sintaxa

$t =$	x	(variabilă)
	$ (\lambda x. t)$	(abstractizare)
	$ (t \ t)$	(aplicare)

Convenții:

- se elimină parantezele exterioare
- aplicarea este asociativă la stînga: $t_1 t_2 t_3$ este $(t_1 t_2) t_3$
- corpul abstractizării este extins la dreapta: $\lambda x. t_1 t_2$ este $\lambda x. (t_1 t_2)$ (nu $(\lambda x. t_1) t_2$)
- scriem $\lambda xyz. t$ în loc de $\lambda x. \lambda y. \lambda z. t$

Întrebare

Ce putem exprima / calcula folosind **doar** λ -calcul?

- Reprezentarea valorilor de adevăr și a expresiilor condiționale
- Reprezentarea perechilor (tuplurilor) și a funcțiilor proiecție
- Reprezentarea numerelor și a operațiilor aritmetice de bază
- Recursie

Ideea generală

Intuiție

Tipurile de date sunt codificate de capabilități

Boole capabilitatea de a alege între două alternative

Perechi capabilitatea de a calcula ceva bazat pe două valori

Numere naturale capabilitatea de a itera de un număr dat de ori

Intuiție: Capabilitatea de a alege între două alternative.

Codificare: Un Boolean este o funcție cu 2 argumente reprezentând ramurile unei alegeri.

true ::= $\lambda t f.t$ — din cele două alternative o alege pe prima

false ::= $\lambda t f.f$ — din cele două alternative o alege pe a doua

Operații Booleene

true ::= $\lambda t f.t$ — din cele două alternative o alege pe prima

false ::= $\lambda t f.f$ — din cele două alternative o alege pe a doua

if ::= $\lambda c \text{ then } else.c \text{ then } else$ — pur și simplu folosim valoarea de adevăr pentru a alege între alternative
if false $(\lambda x.x \ x) (\lambda x.x)$

Operații Booleene

true ::= $\lambda t f.t$ — din cele două alternative o alege pe prima

false ::= $\lambda t f.f$ — din cele două alternative o alege pe a doua

if ::= $\lambda c \text{ then } else.c \text{ then } else$ — pur și simplu folosim valoarea de adevăr pentru a alege între alternative

if false $(\lambda x.x \ x) (\lambda x.x) \rightarrow_{\beta}^3$

false $(\lambda x.x \ x) (\lambda x.x) \rightarrow_{\beta}^2 \lambda x.x$

and ::= $\lambda b1 \ b2. \text{if } b1 \ b2 \text{ false sau } \lambda b1 \ b2.b1 \ b2 \ b1$
and true false

Operații Booleene

true ::= $\lambda t f.t$ — din cele două alternative o alege pe prima

false ::= $\lambda t f.f$ — din cele două alternative o alege pe a doua

if ::= $\lambda c \text{ then } else.c \text{ then } else$ — pur și simplu folosim valoarea de adevăr pentru a alege între alternative

if false $(\lambda x.x \ x) (\lambda x.x) \rightarrow_{\beta}^3$

false $(\lambda x.x \ x) (\lambda x.x) \rightarrow_{\beta}^2 \lambda x.x$

and ::= $\lambda b1 \ b2. \text{if } b1 \ b2 \text{ false sau } \lambda b1 \ b2. b1 \ b2 \ b1$
and true false $\rightarrow_{\beta}^2 \text{true false true} \rightarrow_{\beta}^2 \text{false}$

or ::= $\lambda b1 \ b2. \text{if } b1 \ \text{true } b2 \text{ sau } \lambda b1 \ b2. b1 \ b1 \ b2$
or true false

Operații Booleene

true ::= $\lambda t f.t$ — din cele două alternative o alege pe prima

false ::= $\lambda t f.f$ — din cele două alternative o alege pe a doua

if ::= $\lambda c \text{ then } else.c \text{ then } else$ — pur și simplu folosim valoarea de adevăr pentru a alege între alternative

if false $(\lambda x.x \ x) (\lambda x.x) \rightarrow_{\beta}^3$

false $(\lambda x.x \ x) (\lambda x.x) \rightarrow_{\beta}^2 \lambda x.x$

and ::= $\lambda b1 \ b2. \text{if } b1 \ b2 \text{ false sau } \lambda b1 \ b2. b1 \ b2 \ b1$
and true false $\rightarrow_{\beta}^2 \text{true false true} \rightarrow_{\beta}^2 \text{false}$

or ::= $\lambda b1 \ b2. \text{if } b1 \ \text{true } b2 \text{ sau } \lambda b1 \ b2. b1 \ b1 \ b2$
or true false $\rightarrow_{\beta}^2 \text{true true false} \rightarrow_{\beta}^2 \text{true}$

not ::= $\lambda b. \text{if } b \text{ false true sau } \lambda b \ t \ f. b \ f \ t$
not true

Operații Booleene

true ::= $\lambda t f.t$ — din cele două alternative o alege pe prima

false ::= $\lambda t f.f$ — din cele două alternative o alege pe a doua

if ::= $\lambda c \text{ then } else.c \text{ then } else$ — pur și simplu folosim valoarea de adevăr pentru a alege între alternative

if false $(\lambda x.x \ x) (\lambda x.x) \rightarrow_{\beta}^3$

false $(\lambda x.x \ x) (\lambda x.x) \rightarrow_{\beta}^2 \lambda x.x$

and ::= $\lambda b1 \ b2. \text{if } b1 \ b2 \text{ false sau } \lambda b1 \ b2. b1 \ b2 \ b1$
and true false $\rightarrow_{\beta}^2 \text{true false true} \rightarrow_{\beta}^2 \text{false}$

or ::= $\lambda b1 \ b2. \text{if } b1 \text{ true } b2 \text{ sau } \lambda b1 \ b2. b1 \ b1 \ b2$
or true false $\rightarrow_{\beta}^2 \text{true true false} \rightarrow_{\beta}^2 \text{true}$

not ::= $\lambda b. \text{if } b \text{ false true sau } \lambda b \ t \ f. b \ f \ t$
not true $\rightarrow_{\beta} \lambda t \ f. \text{true } f \ t \rightarrow_{\beta} \lambda t \ f. f$

Perechi

Intuiție: Capabilitatea de a aplica o funcție componentelor perechii

Codificare: O funcție cu 3 argumente reprezentând componentele perechii și funcția ce vrem să o aplicăm lor.

pair ::= $\lambda x y. \lambda f. f\ x\ y$
Constructorul de perechi

Exemplu: **pair** 3 5 $\rightarrow_{\beta}^2 \lambda f. f\ 3\ 5$

perechea (3, 5) reprezintă capabilitatea de a aplica o funcție de două argumente lui 3 și apoi lui 5.

Operații pe perechi

pair ::= $\lambda x y. \lambda f. f \ x \ y$

pair $xy \equiv_{\beta} f \ x \ y$

fst ::= $\lambda p. p \ true$ — *true* alege prima componentă

fst (**pair** 3 5) \rightarrow_{β} **pair** 3 5 *true* \rightarrow_{β}^3 *true* 3 5 \rightarrow_{β}^2 3

snd ::= $\lambda p. p \ false$ — *false* alege a doua componentă

snd (**pair** 3 5) \rightarrow_{β} **pair** 3 5 *false* \rightarrow_{β}^3 *false* 3 5 \rightarrow_{β}^2 5

Numere naturale

Intuiție: Capabilitatea de a itera o funcție de un număr de ori peste o valoare inițială

Codificare: Un număr natural este o funcție cu 2 argumente

s funcția care se iterează

z valoarea inițială

0 ::= $\lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

Numere naturale

Intuiție: Capabilitatea de a itera o funcție de un număr de ori peste o valoare inițială

Codificare: Un număr natural este o funcție cu 2 argumente

s funcția care se iterează

z valoarea inițială

0 ::= $\lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

1 ::= $\lambda s\ z.s\ z$ — funcția iterată o dată aplicată valorii inițiale

Numere naturale

Intuiție: Capabilitatea de a itera o funcție de un număr de ori peste o valoare inițială

Codificare: Un număr natural este o funcție cu 2 argumente

s funcția care se iterează

z valoarea inițială

0 ::= $\lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

1 ::= $\lambda s\ z.s\ z$ — funcția iterată o dată aplicată valorii inițiale

2 ::= $\lambda s\ z.s(s\ z)$ — s iterată de 2 ori, aplicată valorii inițiale

Numere naturale

Intuiție: Capabilitatea de a itera o funcție de un număr de ori peste o valoare inițială

Codificare: Un număr natural este o funcție cu 2 argumente

s funcția care se iterează

z valoarea inițială

0 ::= $\lambda s z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

1 ::= $\lambda s z.s z$ — funcția iterată o dată aplicată valorii inițiale

2 ::= $\lambda s z.s(s z)$ — s iterată de 2 ori, aplicată valorii inițiale

...

8 ::= $\lambda s z.s(s(s(s(s(s(s z))))))$

...

Numere naturale

Intuiție: Capabilitatea de a itera o funcție de un număr de ori peste o valoare inițială

Codificare: Un număr natural este o funcție cu 2 argumente

s funcția care se iterează

z valoarea inițială

0 ::= $\lambda s\ z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

1 ::= $\lambda s\ z.s\ z$ — funcția iterată o dată aplicată valorii inițiale

2 ::= $\lambda s\ z.s(s\ z)$ — s iterată de 2 ori, aplicată valorii inițiale

...

8 ::= $\lambda s\ z.s(s(s(s(s(s(s\ z))))))$

...

Observație: $0 = false$

Operații aritmetice de bază

0 ::= $\lambda s z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

8 ::= $\lambda s z.s(s(s(s(s(s(s z))))))$

S ::= $\lambda n s z.s (n s z)$ sau $\lambda n s z.n s (sz)$
S 0

Operații aritmetice de bază

0 ::= $\lambda s z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

8 ::= $\lambda s z.s(s(s(s(s(s(s z))))))$

S ::= $\lambda n s z.s (n s z)$ sau $\lambda n s z.n s (sz)$

$S\ 0 \rightarrow_{\beta} \lambda s z.0s(sz) \xrightarrow{\beta^2} \lambda s z.sz = 1$

+ ::= $\lambda m n.m\ S\ n$ sau $\lambda m n.\lambda s z.m\ s\ (n s z)$

$+ 3\ 2$

Operații aritmetice de bază

0 ::= $\lambda s z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

8 ::= $\lambda s z.s(s(s(s(s(s(s z))))))$

S ::= $\lambda n s z.s (n s z)$ sau $\lambda n s z.n s (sz)$

$S 0 \rightarrow_{\beta} \lambda s z.0s(sz) \xrightarrow{\beta^2} \lambda s z.sz = 1$

+ ::= $\lambda m n.m S n$ sau $\lambda m n.\lambda s z.m s (n s z)$

$+ 3 2 \xrightarrow{\beta^2} \lambda s z.3 s (2 s z) \xrightarrow{\beta^2}$

$\lambda s z.s(s(s(2 s z))) \xrightarrow{\beta^2} \lambda s z.s(s(s(s z))) = 5$

***** ::= $\lambda m n.m (+ n) 0$ sau $\lambda m n.\lambda s.m (n s)$

$* 3 2$

Operații aritmetice de bază

0 ::= $\lambda s z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

8 ::= $\lambda s z.s(s(s(s(s(s(s z))))))$

S ::= $\lambda n s z.s (n s z)$ sau $\lambda n s z.n s (sz)$

S 0 \rightarrow_{β} $\lambda s z.0s(sz) \rightarrow_{\beta}^2 \lambda s z.sz = 1$

+ ::= $\lambda m n.m \text{ S } n$ sau $\lambda m n.\lambda s z.m s (n s z)$

+ 3 2 $\rightarrow_{\beta}^2 \lambda s z.3 s (2 s z) \rightarrow_{\beta}^2$

$\lambda s z.s(s(s(2 s z))) \rightarrow_{\beta}^2 \lambda s z.s(s(s(s z))) = 5$

***** ::= $\lambda m n.m (+ n) 0$ sau $\lambda m n.\lambda s.m (n s)$

***** 3 2 $\rightarrow_{\beta}^2 3 (+ 2) 0 \rightarrow_{\beta}^2 + 2(+ 2(+ 2 0)) \rightarrow_{\beta}^4$

$+ 2(+ 2 2) \rightarrow_{\beta}^4 + 2 4 \rightarrow_{\beta}^4 6$

exp ::= $\lambda m n.n (* m) 1$ sau $\lambda m n.n m$

exp 3 2

Operații aritmetice de bază

0 ::= $\lambda s z.z$ — s se iterează de 0 ori, deci valoarea inițială

8 ::= $\lambda s z.s(s(s(s(s(s(s z))))))$

S ::= $\lambda n s z.s (n s z)$ sau $\lambda n s z.n s (sz)$

$$\mathbf{S} 0 \rightarrow_{\beta} \lambda s z.0s(sz) \rightarrow_{\beta}^2 \lambda s z.sz = 1$$

+ ::= $\lambda m n.m \mathbf{S} n$ sau $\lambda m n.\lambda s z.m s (n s z)$

$$+ 3 2 \rightarrow_{\beta}^2 \lambda s z.3 s (2 s z) \rightarrow_{\beta}^2$$

$$\lambda s z.s(s(s(2 s z))) \rightarrow_{\beta}^2 \lambda s z.s(s(s(s z))) = 5$$

***** ::= $\lambda m n.m (+ n) 0$ sau $\lambda m n.\lambda s.m (n s)$

$$* 3 2 \rightarrow_{\beta}^2 3 (+ 2) 0 \rightarrow_{\beta}^2 + 2(+ 2(+ 2 0)) \rightarrow_{\beta}^4$$

$$+ 2(+ 2 2) \rightarrow_{\beta}^4 + 2 4 \rightarrow_{\beta}^4 6$$

exp ::= $\lambda m n.n (* m) 1$ sau $\lambda m n.n m$

$$\mathbf{exp} 3 2 \rightarrow_{\beta}^2 2 3 \rightarrow_{\beta}^2 \lambda z.3(3 z) \rightarrow_{\beta}$$

$$\lambda z.\lambda z'.3 z(3 z(3 z z')) \equiv_{\alpha} \lambda s z.3 s(3 s(3 s z)) \rightarrow_{\beta}^6$$

$$\lambda s z.s(s(s(s(s(s(s z)))))) = 9$$

Scăderi și comparații

Presupunem că avem o funcție predecesor $\mathbf{P} x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$

Scăderi și comparații

Presupunem că avem o funcție predecesor $\mathbf{P} x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$

- ::= $\lambda m n.n \mathbf{P} m$ — dă 0 dacă $m \leq n$

Scăderi și comparații

Presupunem că avem o funcție predecesor $\mathbf{P} \ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$

$- ::= \lambda m \ n. n \ \mathbf{P} \ m$ — dă 0 dacă $m \leq n$

$?0 ::= \lambda n. n(\lambda x. false) true$ — testează dacă n e 0

Scăderi și comparații

Presupunem că avem o funcție predecesor $\mathbf{P} \ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$

$- ::= \lambda m \ n. n \ \mathbf{P} \ m$ — dă 0 dacă $m \leq n$

$?0 ::= \lambda n. n(\lambda x. false) true$ — testează dacă n e 0

$< ::= \lambda m \ n. ?0 = (- \ m \ n)$

Scăderi și comparații

Presupunem că avem o funcție predecesor $\mathbf{P} \ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$

$- ::= \lambda m \ n. n \ \mathbf{P} \ m$ — dă 0 dacă $m \leq n$

$\mathbf{?0} ::= \lambda n. n(\lambda x. \text{false}) \text{true}$ — testează dacă n e 0

$\leq ::= \lambda m \ n. \mathbf{?0} \ (- \ m \ n)$

$> ::= \lambda m \ n. \mathbf{not} \ (\leq \ m \ n)$

$\geq ::= \lambda m \ n. \leq \ n \ m$

$< ::= \lambda m \ n. > \ n \ m$

Scăderi și comparații

Presupunem că avem o funcție predecesor $\mathbf{P} \ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$

$- ::= \lambda m \ n. n \ \mathbf{P} \ m$ — dă 0 dacă $m \leq n$

$?0 ::= \lambda n. n(\lambda x. \text{false}) \text{true}$ — testează dacă n e 0

$<= ::= \lambda m \ n. ?0 \ (- \ m \ n)$

$> ::= \lambda m \ n. \mathbf{not} \ (<= \ m \ n)$

$>= ::= \lambda m \ n. <= \ n \ m$

$< ::= \lambda m \ n. > \ n \ m$

$= ::= \lambda m \ n. \mathbf{and} \ (<= \ m \ n) \ (>= \ m \ n)$

$<> ::= \lambda m \ n. \mathbf{not} \ (= \ m \ n)$

Problemă

Cum definim funcția \mathbf{P} ?

Definirea funcției **P** folosind perechi

$$\mathbf{P} x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

Definirea funcției **P** folosind perechi

$$\mathbf{P} \ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{P}'' = \lambda n.n \ \mathbf{S}'' \ (\mathbf{pair} \ 0 \ 0)$$

Definirea funcției **P** folosind perechi

$$\mathbf{P} \ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{P''} = \lambda n. n \ \mathbf{S''} \ (\mathbf{pair} \ 0 \ 0)$$

$$\mathbf{S''} = \lambda p. (\lambda x. \mathbf{pair} \ x (\mathbf{S} \ x)) \ (\mathbf{snd} \ p)$$

Definirea funcției **P** folosind perechi

$$\mathbf{P} \ x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{P''} = \lambda n. n \ \mathbf{S''} \ (\mathbf{pair} \ 0 \ 0)$$

$$\mathbf{S''} = \lambda p. (\lambda x. \mathbf{pair} \ x (\mathbf{S} \ x)) \ (\mathbf{snd} \ p)$$

$$\mathbf{P} = \lambda n. \mathbf{fst} \ (\mathbf{P''} \ n)$$

Definirea funcției **P** folosind perechi

$$\mathbf{P} \, x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{P''} = \lambda n. n \, \mathbf{S''} \, (\mathbf{pair} \, 0 \, 0)$$

$$\mathbf{S''} = \lambda p. (\lambda x. \mathbf{pair} \, x (\mathbf{S} \, x)) \, (\mathbf{snd} \, p)$$

$$\mathbf{P} = \lambda n. \mathbf{fst} \, (\mathbf{P''} \, n)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \, 2 &\rightarrow_{\beta} \mathbf{fst} \, (\mathbf{P''} \, 2) \rightarrow_{\beta} \mathbf{fst} \, (2 \, \mathbf{S''} \, (\mathbf{pair} \, 0 \, 0)) \rightarrow_{\beta}^2 \\ &\mathbf{fst} \, (\mathbf{S''} \, (\mathbf{S''} \, (\mathbf{pair} \, 0 \, 0))) \rightarrow_{\beta} \mathbf{fst} \, (\mathbf{S''} \, (\mathbf{S''} \, (\mathbf{pair} \, 0 \, 0))) \rightarrow_{\beta} \\ &\mathbf{fst} \, (\mathbf{S''} \, ((\lambda x. \mathbf{pair} \, x (\mathbf{S} \, x)) \, (\mathbf{snd} \, (\mathbf{pair} \, 0 \, 0)))) \rightarrow_{\beta}^6 \\ &\mathbf{fst} \, (\mathbf{S''} \, ((\lambda x. \mathbf{pair} \, x (\mathbf{S} \, x)) \, 0)) \rightarrow_{\beta} \mathbf{fst} \, (\mathbf{S''} \, (\mathbf{pair} \, 0 (\mathbf{S} \, 0))) \rightarrow_{\beta}^8 \\ &\mathbf{fst} \, (\mathbf{pair} \, (\mathbf{S} \, 0) (\mathbf{S} \, (\mathbf{S} \, 0))) \rightarrow_{\beta}^6 \mathbf{S} \, 0 \rightarrow_{\beta}^3 1 \end{aligned}$$

Funcția predecesor — definiție alternativă directă

Idee 1: $P ::= \lambda n. ?0 = n \ 0 \ (P' \ n)$ — am tratat primul caz. acum vrem o funcție P' care calculează $n - 1$ dacă $n \neq 0$

Idee 2: folosim iterația $P' ::= \lambda n. n \ S' \ Z'$, unde

- S' e un fel de succesor
- Z' e un fel de -1 , i.e. $S' \ Z' = 0$

$S' ::= \lambda n. n \ S \ 1$

$Z' ::= \lambda s \ z. 0$ — Z' nu e codificarea unui număr
Dar se verifică că $S' \ Z' \rightarrow_{\beta} Z' \ S \ 1 \rightarrow_{\beta}^2 0$

Totul e OK deoarece P' e aplicată **doar** pe numere diferite de 0.

$P ::= \lambda n. ?0 = n \ 0 \ (n \ (\lambda n. n \ S \ 1) \ (\lambda s \ z. 0))$

Liste

Intuiție: Capabilitatea de a agrega o listă

Codificare: O funcție cu 2 argumente
funcția de agregare și valoarea inițială

null ::= $\lambda a \ i.i$ — lista vidă

cons ::= $\lambda x \ l.\lambda a \ i.a \ x \ (l \ a \ i)$
Constructorul de liste

Exemplu: $\text{cons } 3 \ (\text{cons } 5 \ \text{null}) \rightarrow_{\beta}^2 \lambda a \ i.a \ 3 \ (\text{cons } 5 \ \text{null} \ a \ i) \rightarrow_{\beta}^4 \lambda a \ i.a \ 3 \ (a \ 5 \ (\text{null } a \ i)) \rightarrow_{\beta}^2 \lambda a \ i.a \ 3 \ (a \ 5 \ i)$

Lista $[3, 5]$ reprezintă capabilitatea de a agrega elementele 3 și apoi 5 dată fiind o funcție de agregare a și o valoare implicită i .
Pentru aceste liste, operația de bază este `foldr`.

Operații pe liste

null ::= $\lambda a\ i.i$ — lista vidă

cons ::= $\lambda x\ l.\lambda a\ i.a\ x\ (l\ a\ i)$

Operații pe liste

null ::= $\lambda a \ i.i$ — lista vidă

cons ::= $\lambda x \ l.\lambda a \ i.a \ x \ (l \ a \ i)$

?null ::= $\lambda l.l \ (\lambda x \ v.false) \ true$

Operații pe liste

null ::= $\lambda a\ i.i$ — lista vidă

cons ::= $\lambda x\ l.\lambda a\ i.a\ x\ (l\ a\ i)$

?null ::= $\lambda l\ l\ (\lambda x\ v.false)\ true$

head ::= $\lambda d\ l.l\ (\lambda x\ v.x)\ d$

primul element al listei, sau d dacă lista e vidă

Operații pe liste

null ::= $\lambda a \ i.i$ — lista vidă

cons ::= $\lambda x \ l.\lambda a \ i.a \ x \ (l \ a \ i)$

?null ::= $\lambda l \ l \ (\lambda x \ v.false) \ true$

head ::= $\lambda d \ l.l \ (\lambda x \ v.x) \ d$
primul element al listei, sau d dacă lista e vidă

tail ::= $\lambda l. \mathbf{fst} \ (l \ (\lambda x \ p. \mathbf{pair} \ (\mathbf{snd} \ p) \ (\mathbf{cons} \ x \ (\mathbf{snd} \ p)))) \ (\mathbf{pair} \ \mathbf{null} \ \mathbf{null})$
coada listei, sau lista vidă dacă lista e vidă

foldr ::= $\lambda f \ i \ l.l \ f \ i$

map ::= $\lambda f \ l.l \ (\lambda x \ t. \mathbf{cons} \ (f \ x) \ t) \ \mathbf{null}$

filter ::= $\lambda p \ l.l \ (\lambda x \ t.p \ x \ (\mathbf{cons} \ x \ t) \ t) \ \mathbf{null}$

Factorial, Fibonacci, împărțire folosind perechi

```
fact ::=  $\lambda n.$  snd ( $n$  ( $\lambda p.$  pair (S (fst  $p$ ))(* (fst  $p$ )(snd  $p$ ))) (pair 1 1))
```

Factorial, Fibonacci, împărțire folosind perechi

fact ::= $\lambda n. \text{snd } (n (\lambda p. \text{pair } (\text{S } (\text{fst } p)) (* (\text{fst } p) (\text{snd } p)))) (\text{pair } 1 \ 1))$

fib ::= $\lambda n. \text{fst } (n (\lambda p. \text{pair } (\text{snd } p) (+ (\text{fst } p) (\text{snd } p)))) (\text{pair } 0 \ 1))$

Factorial, Fibonacci, împărțire folosind perechi

fact ::= $\lambda n. \text{snd } (n (\lambda p. \text{pair } (\text{S } (\text{fst } p)) (* (\text{fst } p) (\text{snd } p)))) (\text{pair } 1 \ 1))$

fib ::= $\lambda n. \text{fst } (n (\lambda p. \text{pair } (\text{snd } p) (+ (\text{fst } p) (\text{snd } p)))) (\text{pair } 0 \ 1))$

divMod ::= $\lambda m \ n. m (\lambda p. > n (\text{snd } p) \ p (\text{pair } (\text{S } (\text{fst } p)) (- (\text{snd } p) \ n)))) (\text{pair } 0 \ m)$

Factorial, Fibonacci, împărțire folosind perechi

fact ::= $\lambda n. \mathbf{snd} (n (\lambda p. \mathbf{pair} (\mathbf{S} (\mathbf{fst} p)) (* (\mathbf{fst} p) (\mathbf{snd} p))) (\mathbf{pair} 1 1))$

fib ::= $\lambda n. \mathbf{fst} (n (\lambda p. \mathbf{pair} (\mathbf{snd} p) (+ (\mathbf{fst} p) (\mathbf{snd} p))) (\mathbf{pair} 0 1))$

divMod ::= $\lambda m n. m (\lambda p. > n (\mathbf{snd} p) p (\mathbf{pair} (\mathbf{S} (\mathbf{fst} p)) (- (\mathbf{snd} p) n))) (\mathbf{pair} 0 m)$

Observații

- Nu toate funcțiile pot fi definite prin iterare fixată
- Pentru **divMod** obținem răspunsul (de obicei) din mult mai puțin de m iterații

Recursie

- există termeni care **nu** pot fi reduși la o β -formă normală, de exemplu

$$(\lambda x. x x)(\lambda x. x x) \rightarrow_{\beta} (\lambda x. x x)(\lambda x. x x)$$

În λ -calcul putem defini calcule infinite!

Recursie

- există termeni care **nu** pot fi reduși la o β -formă normală, de exemplu

$$(\lambda x. x \ x)(\lambda x. x \ x) \rightarrow_{\beta} (\lambda x. x \ x)(\lambda x. x \ x)$$

În λ -calcul putem defini calcule infinite!

- Dacă notăm $Af ::= \lambda x. f \ (x \ x)$ atunci
 $Af \ Af =_{\beta} (\lambda x. f \ (x \ x)) \ Af =_{\beta} f \ (Af \ Af)$
- Dacă notăm $Yf ::= Af \ Af$ atunci $Yf =_{\beta} f \ Yf$.

Recursie

- există termeni care **nu** pot fi reduși la o β -formă normală, de exemplu

$$(\lambda x. x x)(\lambda x. x x) \rightarrow_{\beta} (\lambda x. x x)(\lambda x. x x)$$

În λ -calculul putem defini calcule infinite!

- Dacă notăm $Af ::= \lambda x. f (x x)$ atunci
 $Af Af =_{\beta} (\lambda x. f (x x)) Af =_{\beta} f (Af Af)$
- Dacă notăm $Yf ::= Af Af$ atunci $Yf =_{\beta} f Yf$.
- Fie $Y ::= \lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$
Atunci $Y f =_{\beta} f (Y f)$

Puncte fixe

- pentru o funcție $f : X \rightarrow X$ un **punct fix** este un element $x_0 \in X$ cu $f(x_0) = x_0$.
 - $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x + 1$ nu are puncte fixe
 - $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$ are punctul fix $x = 0$

Puncte fixe

□ pentru o funcție $f : X \rightarrow X$ un **punct fix** este un element $x_0 \in X$ cu $f(x_0) = x_0$.

□ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x + 1$ nu are puncte fixe

□ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$ are punctul fix $x = 0$

□ În λ -calcul

$$Y ::= \lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$$

are proprietatea că $Y f =_{\beta} f (Y f)$, deci $Y f$ este un **punct fix** pentru f .

Puncte fixe

- pentru o funcție $f : X \rightarrow X$ un **punct fix** este un element $x_0 \in X$ cu $f(x_0) = x_0$.

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x + 1$ nu are puncte fixe

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$ are punctul fix $x = 0$

- În λ -calcul

$$Y ::= \lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$$

are proprietatea că $Y f =_{\beta} f (Y f)$, deci $Y f$ este un **punct fix** pentru f .

Y se numește **combinator de punct fix**.

Puncte fixe

- pentru o funcție $f : X \rightarrow X$ un **punct fix** este un element $x_0 \in X$ cu $f(x_0) = x_0$.

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x + 1$ nu are puncte fixe

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$ are punctul fix $x = 0$

- În λ -calcul

$$Y ::= \lambda f. (\lambda x. f (x x)) (\lambda x. f (x x))$$

are proprietatea că $Y f =_{\beta} f (Y f)$, deci $Y f$ este un **punct fix** pentru f .

Y se numește **combinator de punct fix**.

Avem $Y f =_{\beta} f (Y f) =_{\beta} f (f (Y f)) =_{\beta} \dots$

Putem folosi Y pentru a obține apeluri recursive!

Puncte fixe - funcția factorial

```
fact ::= λn. if (?0= n) 1 (* n (fact (P n)))
```

Puncte fixe - funcția factorial

fact ::= $\lambda n. \text{if } (?0 = n) \ 1 \ (* \ n \ (\text{fact} \ (\text{P } n)))$

Această definiție nu este corectă conform regulilor noastre, cum procedăm?

Puncte fixe - funcția factorial

fact ::= $\lambda n. \text{if } (?0 = n) \ 1 \ (* \ n \ (\text{fact} \ (\mathbf{P} \ n)))$

Această definiție nu este corectă conform regulilor noastre, cum procedăm?

- Pasul 1: abstractizăm, astfel încât construcția să fie corectă

factA ::= $\lambda f. \lambda n. \text{if } (?0 = n) \ 1 \ (* \ n \ (\text{f} \ (\mathbf{P} \ n)))$

Puncte fixe - funcția factorial

fact ::= $\lambda n. \text{if } (?0 = n) \ 1 \ (* \ n \ (\text{fact} \ (\mathbf{P} \ n)))$

Această definiție nu este corectă conform regulilor noastre, cum procedăm?

- Pasul 1: abstractizăm, astfel încât construcția să fie corectă

factA ::= $\lambda f. \lambda n. \text{if } (?0 = n) \ 1 \ (* \ n \ (\textcolor{red}{f} \ (\mathbf{P} \ n)))$

- Pasul 2: aplicăm combinatorul de punct fix

fact ::= $\mathbf{Y} \ \text{factA}$

Puncte fixe - funcția factorial

fact ::= $\lambda n. \text{if } (?0 = n) \ 1 \ (* \ n \ (\text{fact} \ (\mathbf{P} \ n)))$

Această definiție nu este corectă conform regulilor noastre, cum procedăm?

- Pasul 1: abstractizăm, astfel încât construcția să fie corectă

factA ::= $\lambda f. \lambda n. \text{if } (?0 = n) \ 1 \ (* \ n \ (\mathbf{f} \ (\mathbf{P} \ n)))$

- Pasul 2: aplicăm combinatorul de punct fix

fact ::= $\mathbf{Y} \ \mathbf{factA}$

Deoarece $\mathbf{Y} \ \mathbf{factA} =_{\beta} \mathbf{factA} \ (\mathbf{Y} \ \mathbf{factA})$ obținem

$\mathbf{fact} =_{\beta} \lambda n. \text{if } (?0 = n) \ 1 \ (* \ n \ (\text{fact} \ (\mathbf{P} \ n)))$

divMod — definiție recursivă

Definiția primitiv recursivă (fără Y)

divMod ::= $\lambda m n. m (\lambda p. > n (\text{snd } p) p (\text{pair } (\text{S } (\text{fst } p)) (- (\text{snd } p) n))) (\text{pair } 0 m)$

Definiția recursivă (incorectă)

divMod ::= $\lambda m n. ?0 = n (\text{pair } 0 m) (\text{divMod}' 0 m)$ where
divMod' ::= $\lambda q r. > n r (\text{pair } q r) (\text{divMod}' (\text{S } q) (- m n))$

Definiția recursivă (corectă, folosind Y)

divMod ::= $\lambda m n. ?0 = n (\text{pair } 0 m)$
 $(\mathbf{Y} (\lambda f. \lambda q r. > n r (\text{pair } q r) (f (\text{S } q) (- m n))))$
 $0 m)$

Apel prin valoare (Call by Value)

Pentru a reduce $e_1 \ e_2$:

- Reducem e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reducem e_2 până la o valoare v
- Apoi reducem $(\lambda x.e) \ v$ la $[v/x]e$

Nu simplificăm sub λ

Apel prin valoare (Call by Value)

Pentru a reduce $e_1 \ e_2$:

- Reducem e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reducem e_2 până la o valoare v
- Apoi reducem $(\lambda x.e) \ v$ la $[v/x]e$

Nu simplificăm sub λ

$?0 = 0 \ (+ \ 2 \ 1) \ (+ \ 3 \ 4)$	$?0 ::= (\lambda n.n \ (\lambda x.false) \ true)$
$\rightarrow_{\beta(V)} 0 \ (\lambda x.false) \ true \ (+ \ 2 \ 1) \ (+ \ 3 \ 4)$	$0 ::= (\lambda s \ z.z)$
$\rightarrow_{\beta(V)}^2 true \ (+ \ 2 \ 1) \ (+ \ 3 \ 4)$	$+ ::= (\lambda m \ n \ s \ z.m \ s \ (n \ s \ z))$
$\rightarrow_{\beta(V)}^2 true \ (\lambda s \ z.2 \ s \ (1 \ s \ z)) \ (+ \ 3 \ 4)$	$true ::= \lambda t \ f.t$
$\rightarrow_{\beta(V)} (\lambda f.\lambda s \ z.2 \ s \ (1 \ s \ z)) \ (+ \ 3 \ 4)$	
$\rightarrow_{\beta(V)}^2 (\lambda f.\lambda s \ z.2 \ s \ (1 \ s \ z)) \ (\lambda s \ z.3 \ s \ (4 \ s \ z))$	
$\rightarrow_{\beta(V)} \lambda s \ z.2 \ s \ (1 \ s \ z)$	
$\rightarrow_{\beta(V)}$	

Apel prin nume (Limbaje pur funcționale)

Pentru a reduce $e_1 \ e_2$:

- Reducem e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reducem $(\lambda x.e) \ e_2$ la $[e_2/x]e$

Nu simplificăm sub λ nici în dreapta aplicației

Apel prin nume (Limbaaje pur funcționale)

Pentru a reduce $e_1 \ e_2$:

- Reducem e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reducem $(\lambda x.e) \ e_2$ la $[e_2/x]e$

Nu simplificăm sub λ nici în dreapta aplicației

$?0 = 0 \ (+ \ 2 \ 1) \ (+ \ 3 \ 4)$

$\rightarrow_{\beta(N)} 0 \ (\lambda x.false) \ true \ (+ \ 2 \ 1) \ (+ \ 3 \ 4)$

$\rightarrow_{\beta(N)}^2 true \ (+ \ 2 \ 1) \ (+ \ 3 \ 4)$

$\rightarrow_{\beta(N)}^2 (+ \ 2 \ 1)$

$\rightarrow_{\beta(N)}^2 (\lambda s \ z.2 \ s \ (1 \ s \ z))$

$\rightarrow_{\beta(N)}^+$

$?0 ::= (\lambda n.n \ (\lambda x.false) \ true)$

$0 ::= (\lambda s \ z.z)$

$true ::= \lambda t \ f.t$

$+ ::= (\lambda m \ n \ s \ z.m \ s \ (n \ s \ z))$

Evaluare leneșă

Pentru a reduce $e_1 \ e_2$:

- Reduc e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reduc corpul funcției e până la un e' care are nevoie de x
- Apoi reduc e_2 până la o valoare v
- Apoi reduc $(\lambda x.e')$ v la $[v/x]e'$

Evaluare nerestricționată

Pentru a reduce e_1 e_2

- Reducem fie e_1 fie e_2
- Putem reduce corpurile funcțiilor
- Oricând avem $(\lambda x.e')e''$, o putem (sau nu) reduce la $[e''/x]e'$
- Reduce până la o formă normală

Nu garantează găsirea unei forme normale

Evaluare „normală“

Pentru a reduce $e_1 \ e_2$

- Reducem mereu cel mai din stânga redex din cele de mai sus
- Reducem $(\lambda x.e')e''$ la $[e''/x]e'$
- Reducem e_1 (putem reduce și corpurile funcțiilor)
- Dacă $e_1 \rightarrow$, reducem e_2
- Reduce până la o formă normală
- Garantează găsirea unei forme normale

Apel prin valoare

Pentru a reduce $e_1 \ e_2$:

- Reducem e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reducem e_2 până la o valoare v
- Apoi reducem $(\lambda x.e) \ v$ la $[v/x]e$

Reguli

$$(V@S) \quad \frac{e_1 \rightarrow_{\beta} e'_1}{e_1 \ e_2 \rightarrow_{\beta} e'_1 \ e_2}$$

$$(V@D) \quad \frac{e_2 \rightarrow_{\beta} e'_2}{(\lambda x.e_1) \ e_2 \rightarrow_{\beta} (\lambda x.e_1) \ e'_2}$$

$$(V@) \quad (\lambda x.e_1) \ v_2 \rightarrow_{\beta} e \quad \text{dacă } e = [v_2/x]e_1$$

Apel prin nume

Pentru a reduce $e_1 \ e_2$:

- Reducem e_1 până la o funcție $\lambda x.e$
- Apoi reducem $(\lambda x.e) \ e_2$ la $[e_2/x]e$

Reguli

$$(N@S) \quad \frac{e_1 \rightarrow_{\beta} e'_1}{e_1 \ e_2 \rightarrow_{\beta} e'_1 \ e_2}$$

$$(N@) \quad (\lambda x.e_1) \ e_2 \rightarrow_{\beta} e \quad \text{dacă } e = [e_2/x]e_1$$

Evaluare nerestricționată

Pentru a reduce $e_1 \ e_2$

- Reducem fie e_1 fie e_2
- Putem reduce corpurile funcțiilor
- Oricând avem $(\lambda x.e')e''$, o putem (sau nu) reduce la $[e''/x]e'$

Reguli

$$(NR@S) \quad \frac{e_1 \rightarrow e'_1}{e_1 \ e_2 \rightarrow e'_1 \ e_2}$$

$$(NR@D) \quad \frac{e_2 \rightarrow e'_2}{e_1 \ e_2 \rightarrow e_1 \ e'_2}$$

$$(NR_{FUN}) \quad \frac{e \rightarrow e'}{\lambda x.e \rightarrow \lambda x.e'}$$

$$(NR@) \quad (\lambda x.e_1) \ e_2 \rightarrow e \quad \text{dacă } e = [e_2/x]e_1$$

Evaluare „normală“

Pentru a reduce $e_1 \ e_2$

- Reducem mereu cel mai din stânga redex din cele de mai sus
- Reducem $(\lambda x.e')e''$ la $[e''/x]e'$
- Reducem e_1 (putem reduce și corpurile funcțiilor)
- Dacă $e_1 \rightarrow$, reducem e_2

Reguli

$$(\text{NOR@}) \quad (\lambda x.e_1) \ e_2 \rightarrow e \quad \text{dacă } e = [e_2/x]e_1$$

$$(\text{NOR@S}) \quad \frac{e_1 \rightarrow e'_1}{e_1 \ e_2 \rightarrow e'_1 \ e_2} \quad \text{dacă } e_1 \text{ nu e încă funcție}$$

$$(\text{NORFUND}) \quad \frac{e \rightarrow e'}{\lambda x.e \rightarrow \lambda x.e'}$$

$$(\text{NOR@D}) \quad \frac{e_1 \rightarrow \quad e_2 \rightarrow e'_2}{e_1 \ e_2 \rightarrow e_1 \ e'_2}$$

Evaluare leneșă

Pentru a reduce $e_1 \ e_2$:

- Reduc e_1 până la o funcție **fun** $(x : T) \rightarrow e$
- Apoi reduc corpul funcției **e** până la un e' care are nevoie de x
- Apoi reduc e_2 până la o valoare v
- Apoi reduc $(\lambda x. e')$ v la $[v/x]e'$

Reguli?

E mai complicat decât pare, deoarece trebuie să ne dăm seama că e' are nevoie de x .

Contexte de evaluare

- Găsirea redex-ului prin analiză sintactică
- Putem înlocui regulile structurale cu reguli gramaticale

Sintaxă: $e ::= x \mid \lambda x.e \mid e e$

Reguli structurale

$$\frac{e_1 \rightarrow_{\beta} e'_1}{e_1 e_2 \rightarrow_{\beta} e'_1 e_2}$$
$$\frac{e_2 \rightarrow_{\beta} e'_2}{\langle (\lambda x.e_1) e_2 \rangle \rightarrow_{\beta} (\lambda x.e_1) e'_2}$$

Contexte de evaluare

$$c ::= \blacksquare$$
$$| c e$$
$$| (\lambda x.e) c$$

Instantierea unui context c cu expresia e

$$c[e] = [e/\blacksquare]c$$

Contexte de evaluare

Sintaxă: $e ::= x \mid \lambda x.e \mid e e$

Contexte: $c ::= \blacksquare \mid c e \mid (\lambda x.e) c$

Exemple de contexte

Corecte

\blacksquare

$3 \blacksquare$

Greșite

5

$true x \blacksquare$

Exemple de contexte instanțiate

$\square \blacksquare[x \ 1] = x \ 1$

$\square (9 (\blacksquare 7))[x] = 9 (x \ 7)$

$\square (9 (\blacksquare 7))[5] = 9 (5 \ 7)$

Semantica Operațională Contextuală

Un pas de execuție folosind contexte de evaluare

- Descompune expresia în contextul c și redex-ul r
- Aplică o regulă operațională asupra lui r obținând e
- Pune e în contextul inițial, obținând $c[e]$

$$\frac{r \longrightarrow_{\beta} e}{c[r] \longrightarrow_{\beta} c[e]}$$

Evaluare leneșă folosind Semantica Contextuală

Contexte de evaluare pentru aplicație

$$\begin{aligned} c &::= \blacksquare \\ &| c\ e \\ &| (\lambda x. c)\ e \\ &| (\lambda x. c[x])\ c \end{aligned}$$

Regulă de evaluare pentru aplicație

$$(\lambda x. c[x])\ v \rightarrow (\lambda x. c[v])\ v$$

Curs 8

Cuprins

- 1 Programare logică & Prolog
- 2 Tipuri de date compuse
- 3 Liste și recursie
- 4 Exemplu: reprezentarea unei GIC

Programare logică & Prolog

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.
- Unul din sloganurile programării logice:

Program = Logică + Control (R. Kowalski)

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.
- Unul din sloganurile programării logice:
Program = Logică + Control (R. Kowalski)
- Programarea logică poate fi privită ca o deducție controlată.

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.
- Unul din sloganurile programării logice:
Program = Logică + Control (R. Kowalski)
- Programarea logică poate fi privită ca o deducție controlată.
- Un program scris într-un limbaj de programare logică este
o listă de formule într-o logică
ce exprimă fapte și reguli despre o problemă.

Programare logică

- Programarea logică este o paradigmă de programare bazată pe logică formală.
- Unul din sloganurile programării logice:
Program = Logică + Control (R. Kowalski)
- Programarea logică poate fi privită ca o deducție controlată.
- Un program scris într-un limbaj de programare logică este
o listă de formule într-o logică
ce exprimă fapte și reguli despre o problemă.
- Exemple de limbaje de programare logică:
 - Prolog
 - Answer set programming (ASP)
 - Datalog

Ce veți vedea la laborator

Prolog

- ☐ bazat pe logica clauzelor Horn
- ☐ semantica operațională este bazată pe rezoluție
- ☐ este Turing complet
- ☐ vom folosi implementarea [SWI-Prolog](#)

Ce veți vedea la laborator

Prolog

- bazat pe logica clauzelor Horn
- semantica operațională este bazată pe rezoluție
- este Turing complet
- vom folosi implementarea **SWI-Prolog**

Limbajul Prolog este folosit pentru programarea sistemului IBM Watson!



Puteți citi mai multe detalii [aici](#).

Learn Prolog Now!<http://www.let.rug.nl/bos/lpn/>

Programare logică - în mod idealist

- Un "program logic" este o colecție de proprietăți presupuse (sub formă de formule logice) despre lume (sau mai degrabă despre lumea programului).
- Programatorul furnizează și o proprietate (o formula logică) care poate să fie sau nu adevărată în lumea respectivă (întrebare, query).
- Sistemul determină dacă proprietatea aflată sub semnul întrebării este o consecință a proprietăților presupuse în program.
- Programatorul nu specifică metoda prin care sistemul verifică dacă întrebarea este sau nu consecință a programului.

Exemplu de program logic

oslo → windy
oslo → norway
norway → cold
cold \wedge windy → winterIsComing
oslo

Exemplu de program logic

```
oslo → windy
oslo → norway
norway → cold
cold ∧ windy → winterIsComing
oslo
```

Exemplu de întrebare

Este adevărat `winterIsComing`?

Putem să testăm în SWI-Prolog

Program:

```
windy :- oslo.  
norway :- oslo.  
cold :- norway.  
winterIsComing :- windy, cold.  
oslo.
```

Intrebare:

```
?- winterIsComing.  
true
```

<http://swish.swi-prolog.org/>

Sintaxă: constante, variabile, termeni compuși

- **Atomii**: sansa, 'Jon Snow', jon_snow
- **Numere**: 23, 23.03, -1
Atomii și numerele sunt constante.
- **Variabile**: X, Stark, _house
- Termeni **compuși**: father(eddard, jon_snow),
and(son(bran, eddard), daughter(arya, eddard))
 - forma generală: atom(termen,..., termen)
 - atom-ul care denumește termenul se numește **functor**
 - numărul de argumente se numește **aritate**



Un mic exercițiu sintactic

Care din următoarele șiruri de caractere sunt **constante** și care sunt **variabile** în Prolog?

- ☐ vINCENT
- ☐ Footmassage
- ☐ variable23
- ☐ Variable2000
- ☐ big_kahuna_burger
- ☐ 'big kahuna burger'
- ☐ big kahuna burger
- ☐ 'Jules'
- ☐ _Jules
- ☐ '_Jules'

Un mic exercițiu sintactic

Care din următoarele șiruri de caractere sunt **constante** și care sunt **variabile** în Prolog?

- ☐ vINCENT – **constantă**
- ☐ Footmassage – **variabilă**
- ☐ variable23 – **constantă**
- ☐ Variable2000 – **variabilă**
- ☐ big_kahuna_burger – **constantă**
- ☐ 'big kahuna burger' – **constantă**
- ☐ big kahuna burger – **nici una, nici alta**
- ☐ 'Jules' – **constantă**
- ☐ _Jules – **variabilă**
- ☐ '_Jules' – **constantă**

Program în Prolog = bază de cunoștințe

Exemplu

Un program în Prolog:

```
father(eddard,sansa).  
father(eddard,jon_snow).
```

```
mother(catelyn,sansa).  
mother(wylla,jon_snow).
```

```
stark(eddard).  
stark(catelyn).
```

```
stark(X) :- father(Y,X), stark(Y).
```



Un program în Prolog este o **bază de cunoștințe** (Knowledge Base).

Program în Prolog = mulțime de predicate

Practic, gândim un program în Prolog ca o mulțime de **predicate** cu ajutorul cărora descriem *lumea* (*universul*) programului respectiv.

Exemplu

```
father(eddard,sansa) .  
father(eddard,jon_snow) .
```

```
mother(catelyn,sansa) .  
mother(wylla,jon_snow) .
```

```
stark(eddard) .  
stark(catelyn) .
```

```
stark(X) :- father(Y,X), stark(Y) .
```

Predicate:

```
father/2  
mother/2  
stark/1
```

Un program în Prolog

Program

Fapte + Reguli

Program

- Un **program** în Prolog este format din **reguli** de forma
Head :- Body.
- **Head** este un predicat, iar **Body** este o secvență de predicate separate prin virgulă.
- Regulile fără Body se numesc **fapte**.

Program

- Un **program** în Prolog este format din **reguli** de forma
Head :- Body.
- **Head** este un predicat, iar **Body** este o secvență de predicate separate prin virgulă.
- Regulile fără Body se numesc **fapte**.

Exemplu

- Exemplu de regulă: `stark(X) :- father(Y,X), stark(Y).`
- Exemplu de fapt: `father(eddard, jon_snow).`

Interpretarea din punctul de vedere al logicii

□ operatorul `:-` este implicația logică ←

Exemplu

```
winterfell(X) :- stark(X)
```

dacă `stark(X)` este adevărat, atunci `winterfell(X)` este adevărat.

Interpretarea din punctul de vedere al logicii

- operatorul `:-` este implicația logică \leftarrow

Exemplu

`winterfell(X) :- stark(X)`

dacă `stark(X)` *este adevărat*, *atunci* `winterfell(X)` *este adevărat*.

- virgula `,` este conjuncția \wedge

Exemplu

`stark(X) :- father(Y,X), stark(Y)`

dacă `father(Y,X)` *și* `stark(Y)` *sunt adevărate*,
atunci `stark(X)` *este adevărat*.

Interpretarea din punctul de vedere al logicii

- mai multe reguli cu același Head definesc același predicat, între definiții fiind un sau logic.

Exemplu

```
got_house(X) :- stark(X).  
got_house(X) :- lannister(X).  
got_house(X) :- targaryen(X).  
got_house(X) :- baratheon(X).
```

dacă

stark(X) este adevărat sau lannister(X) este adevărat sau
targaryen(X) este adevărat sau baratheon(X) este adevărat,
atunci
got_house(X) este adevărat.

Un program în Prolog

Program

Fapte + Reguli

Cum folosim un program în Prolog?

Întrebări în Prolog



Întrebări și ținte în Prolog

- Prolog poate răspunde la întrebări legate de consecințele relațiilor descrise într-un program în Prolog.
- **Întrebările** sunt de forma:
$$?- \text{predicat}_1(\dots), \dots, \text{predicat}_n(\dots).$$
- Prolog verifică dacă întrebarea este o consecință a relațiilor definite în program.
- Dacă este cazul, Prolog caută valori pentru variabilele care apar în întrebare astfel încât întrebarea să fie o consecință a relațiilor din program.
- un predicat care este analizat pentru a se răspunde la o întrebare se numește **țintă** (*goal*).

Întrebări în Prolog

Prolog poate da 2 tipuri de răspunsuri:

- **false** – în cazul în care întrebarea nu este o consecință a programului.
- **true** sau **valori pentru variabilele din întrebare** în cazul în care întrebarea este o consecință a programului.

Întrebări în Prolog

Prolog poate da 2 tipuri de răspunsuri:

- ❑ **false** – în cazul în care întrebarea nu este o consecință a programului.
- ❑ **true** sau **valori pentru variabilele din întrebare** în cazul în care întrebarea este o consecință a programului.

Exemplu

```
?- stark(jon_snow)
true
?- stark(wylla)
false
```

```
?- stark(X)
X = eddard ;
X = catelyn ;
X = sansa ;
X = jon_snow ;
false
```

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un răspuns, Prolog încearcă regulile în ordinea apariției lor.

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).  foo(b).  foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X).
```

```
X = a.
```

Pentru a răspunde la întrebare se caută o potrivire (unificator) între scopul `foo(X)` și baza de cunoștințe. Răspunsul este substituția care realizează potrivirea, în cazul nostru `X = a`.

Răspunsul la întrebare este găsit prin unificare!

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un răspuns, Prolog încearcă regulile în ordinea apariției lor.

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).  foo(b).  foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X).
```

```
X = a.
```

```
?- foo(d).
```

```
false
```

Dacă nu se poate face potrivirea, răspunsul este **false**.

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un răspuns, Prolog încearcă regulile în ordinea apariției lor.

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).  foo(b).  foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X).
```

```
X = a.
```

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un răspuns, **Prolog încearcă regulile în ordinea apariției lor.**

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).  foo(b).  foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X).
```

```
X = a.
```

Dacă dorim mai multe răspunsuri, tastăm ;

```
?- foo(X).
```

```
X = a ;
```

```
X = b ;
```

```
X = c.
```


Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un răspuns, **Prolog încearcă regulile în ordinea apariției lor.**

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

`foo(a).`

`foo(b).`

`foo(c).`

și că punem următoarea întrebare:

`?- foo(X).`

```
?- trace.  
true.  
  
[trace] ?- foo(X).  
  Call: (8) foo(_4556) ? creep  
  Exit: (8) foo(a) ? creep  
X = a ;  
  Redo: (8) foo(_4556) ? creep  
  Exit: (8) foo(b) ? creep  
X = b ;  
  Redo: (8) foo(_4556) ? creep  
  Exit: (8) foo(c) ? creep  
X = c.
```

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un raspuns, **Prolog redenumeste variabilele.**

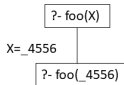
Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a) .  
foo(b) .  
foo(c) .
```

și că punem următoarea întrebare:

?- foo(X) .



Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un răspuns, **Prolog încearcă regulile în ordinea apariției lor.**

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

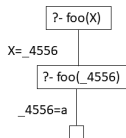
`foo(a) .`

`foo(b) .`

`foo(c) .`

și că punem următoarea întrebare:

`?- foo(X) .`



În acest moment, a fost găsită prima soluție: `X=_4556=a`.

Cum găsește Prolog răspunsul

Pentru a găsi un răspuns, Prolog încearcă clauzele în ordinea apariției lor.

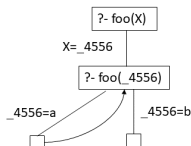
Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a) .  
foo(b) .  
foo(c) .
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- foo(X) .
```



Dacă se dorește încă un răspuns, atunci se face un pas înapoi în **arborele de căutare** și se încearcă satisfacerea țintei cu o nouă valoare.

Cum găsește Prolog răspunsul

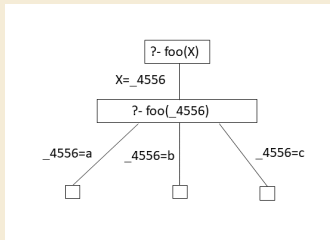
Pentru a găsi un răspuns, **Prolog încearcă clauzele în ordinea apariției lor.**

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
foo(a).  
foo(b).  
foo(c).
```

și că punem următoarea întrebare:
?- foo(X).



arborele de căutare

Cum găsește Prolog răspunsul

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

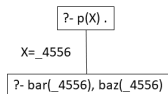
`bar(b) .`

`bar(c) .`

`baz(c) .`

și că punem următoarea întrebare:

`?- bar(X), baz(X) .`



Cum găsește Prolog răspunsul

Prolog se întoarce la ultima alegere dacă o sub-întrebă eșuează.

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

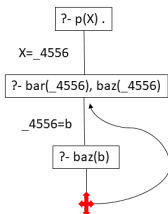
bar(b) .

bar(c) .

baz(c) .

și că punem următoarea întrebare:

?- bar(X), baz(X) .



Cum găsește Prolog răspunsul

Prolog se întoarce la ultima alegere dacă o sub-întită eșuează.

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

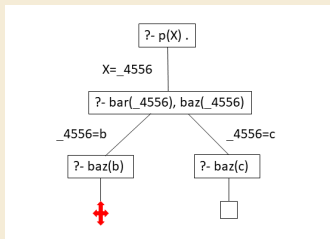
`bar(b) .`

`bar(c) .`

`baz(c) .`

și că punem următoarea întrebare:

`?- bar(X), baz(X) .`



Soluția găsită este: `X=_4556=c`.

Cum găsește Prolog răspunsul

Ce se întâmplă dacă schimbăm ordinea regulilor?

Exemplu

Să presupunem că avem
programul:

`bar(c) .`

`bar(b) .`

`baz(c) .`

și că punem următoarea întrebare:

?- `bar(X) , baz(X) .`

Cum găsește Prolog răspunsul

Ce se întâmplă dacă schimbăm ordinea regulilor?

Exemplu

Să presupunem că avem programul:

```
bar(c) .
```

```
bar(b) .
```

```
baz(c) .
```

și că punem următoarea întrebare:

```
?- bar(X), baz(X) .
```

```
X = c ;
```

```
false
```

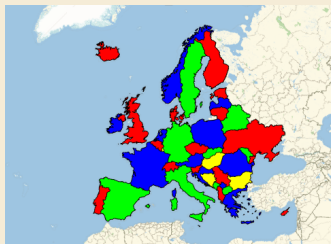
Vă explicați ce s-a întâmplat? Desenați arborele de căutare!

Un program mai complicat

Problema colorării hărților

Să se coloreze o hartă dată cu un număr minim de culori astfel încât oricare două țări vecine să fie colorate diferit.

Exemplu



Sursa imaginii

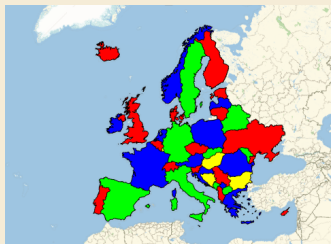
Un program mai complicat

Problema colorării hărților

Să se coloreze o hartă dată cu un număr minim de culori astfel încât oricare două țări vecine să fie colorate diferit.

Cum modelăm această problemă în Prolog?

Exemplu



Sursa imaginii

Un program mai complicat

Problema colorării hărților

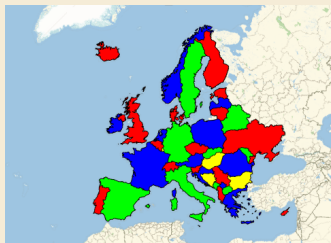
Să se coloreze o hartă dată cu un număr minim de culori astfel încât oricare două țări vecine să fie colorate diferit.

Cum modelăm această problemă în Prolog?

Exemplu

Trebuie să definim:

- ☐ culorile
- ☐ harta
- ☐ constrângerile



Sursa imaginii

Problema colorării hărților

Definim culorile

Exemplu

```
culoare(albastru).  
culoare(rosu).  
culoare(verde).  
culoare(galben).
```

Problema colorării hărților

Definim culorile, harta

Exemplu

culoare(albastru).

culoare(rosu).

culoare(verde).

culoare(galben).

harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU) :- vecin(RO,SE), vecin(RO,UA),
vecin(RO,MD), vecin(RO,BG),
vecin(RO,HU), vecin(UA,MD),
vecin(BG,SE), vecin(SE,HU).

Problema colorării hărților

Definim culorile, harta și constrângerile.

Exemplu

```
culoare(albastru).
```

```
culoare(rosu).
```

```
culoare(verde).
```

```
culoare(galben).
```

```
harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU) :- vecin(RO,SE), vecin(RO,UA),  
                               vecin(RO,MD), vecin(RO,BG),  
                               vecin(RO,HU), vecin(UA,MD),  
                               vecin(BG,SE), vecin(SE,HU).
```

```
vecin(X,Y) :- culoare(X),  
              culoare(Y),  
              X \== Y.
```


Problema colorării hărților

Definim culorile, harta și constrângerile. Cum punem întrebarea?

Exemplu

```
culoare(albastru).
```

```
culoare(rosu).
```

```
culoare(verde).
```

```
culoare(galben).
```

```
harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU) :- vecin(RO,SE), vecin(RO,UA),  
                                vecin(RO,MD), vecin(RO,BG),  
                                vecin(RO,HU), vecin(UA,MD),  
                                vecin(BG,SE), vecin(SE,HU).
```

```
vecin(X,Y) :- culoare(X),  
               culoare(Y),  
               X \== Y.
```

Problema colorării hărților

Definim culorile, harta și constrângerile. Cum punem întrebarea?

Exemplu

```
culoare(albastru).
```

```
culoare(rosu).
```

```
culoare(verde).
```

```
culoare(galben).
```

```
harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU) :- vecin(RO,SE), vecin(RO,UA),  
                                vecin(RO,MD), vecin(RO,BG),  
                                vecin(RO,HU), vecin(UA,MD),  
                                vecin(BG,SE), vecin(SE,HU).
```

```
vecin(X,Y) :- culoare(X),  
              culoare(Y),  
              X \== Y.
```

```
?- harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU).
```

Problema colorării hărților

Ce răspuns primim?

Exemplu

```
culoare(albastru).
```

```
culoare(rosu).
```

```
culoare(verde).
```

```
culoare(galben).
```

```
harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU) :- vecin(RO,SE), vecin(RO,UA),  
                               vecin(RO,MD), vecin(RO,BG),  
                               vecin(RO,HU), vecin(UA,MD),  
                               vecin(BG,SE), vecin(SE,HU).
```

```
vecin(X,Y) :- culoare(X),  
              culoare(Y),  
              X \== Y.
```

```
?- harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU).
```

Problema colorării hărților

Exemplu

```
culoare(albastru).
```

```
culoare(rosu).
```

```
culoare(verde).
```

```
culoare(galben).
```

```
harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU) :-    vecin(RO,SE), vecin(RO,UA),  
                                vecin(RO,MD), vecin(RO,BG),  
                                vecin(RO,HU), vecin(UA,MD),  
                                vecin(BG,SE), vecin(SE,HU).
```

```
vecin(X,Y) :- culoare(X),  
              culoare(Y),  
              X \== Y.
```

```
?- harta(RO,SE,MD,UA,BG,HU).
```

```
RO = albastru,
```

```
SE = UA, UA = rosu,
```

```
MD = BG, BG = HU, HU = verde ■
```

Compararea termenilor: $=, \backslash=, ==, \backslash==$

$T = U$	reuşeşte dacă există o potrivire (termenii se unifică)
$T \backslash= U$	reuşeşte dacă nu există o potrivire
$T == U$	reuşeşte dacă termenii sunt identici
$T \backslash== U$	reuşeşte dacă termenii sunt diferiţi

Compararea termenilor: $=, \backslash=, ==, \backslash==$

$T = U$	reuşeşte dacă există o potrivire (termenii se unifică)
$T \backslash= U$	reuşeşte dacă nu există o potrivire
$T == U$	reuşeşte dacă termenii sunt identici
$T \backslash== U$	reuşeşte dacă termenii sunt diferiţi

Exemplu

?- $X = Y$.

$X = Y$.

?- $X == Y$.

false

?- $p(X, q(Z)) = p(Y, X)$.

$X = Y, Y = q(Z)$.

?- $p(X, Y) == p(X, Y)$.

true

?- $2 = 1 + 1$

false

?- $2 == 1 + 1$

false

- În exemplul de mai sus, $1+1$ este privită ca o expresie, nu este evaluată. Există şi predicate care forţează evaluarea.

Negarea unui predicat: \neg pred(X)

Exemplu

```
animal(dog). animal(elephant). animal(sheep).
```

```
?- animal(cat).
```

```
false
```

```
?-  $\neg$  animal(cat).
```

```
true
```

Negarea unui predicat: $\backslash + \text{pred}(X)$

Exemplu

```
animal(dog). animal(elephant). animal(sheep).
```

```
?- animal(cat).
```

```
false
```

```
?-  $\backslash +$  animal(cat).
```

```
true
```

- ❑ Clauzele din Prolog dau doar condiții suficiente, dar nu și necesare pentru ca un predicat să fie adevărat.
- ❑ Pentru a da un răspuns pozitiv la o țintă, Prolog trebuie să construiască o "demonstrație" pentru a arată că mulțimea de fapte și reguli din program implică acea țintă.
- ❑ Astfel, un răspuns **false** nu înseamnă neapărat că ținta nu este adevărată, ci doar că **Prolog nu a reușit să găsească o demonstrație**.

Operatorul \+

- Negarea unei ținte se poate defini astfel:

```
neg(Goal) :- Goal, !, fail.  
neg(Goal)
```

unde **fail/0** este un predicat care eșuează întotdeauna.

Operatorul \+

- Negarea unei ținte se poate defini astfel:

```
neg(Goal) :- Goal, !, fail.  
neg(Goal)
```

unde **fail/0** este un predicat care eșuează întotdeauna.

- În PROLOG acest predicat este predefinit sub numele \+.
- Operatorul \+ se folosește pentru a nega un predicat.
- **!(cut)** este un predicat predefinit (de aritate 0) care restricționează mecanismul de backtracking: execuția subțintei ! se termină cu succes, deci alegerile (instanțierile) făcute înaintea de a se ajunge la ! nu mai pot fi schimbate.
- O țintă \+ Goal reușește dacă Prolog nu găsește o demonstrație pentru Goal. Negația din Prolog este definită ca incapacitatea de a găsi o demonstrație.
- Semantica operatorului \+ se numește **negation as failure**.

Negația ca eșec ("negation as failure")

Exemplu

Să presupunem că avem o listă de fapte cu perechi de oameni căsătoriți între ei:

```
married(peter, lucy).  
married(paul, mary).  
married(bob, juliet).  
married(harry, geraldine).
```

Negația ca eșec

Exemplu (cont.)

Putem să definim un predicat `single/1` care reușește dacă argumentul său nu este nici primul nici al doilea argument în faptele pentru `married`.

```
single(Person) :-
```

```
    \+ married(Person, _),
```

```
    \+ married(_, Person).
```

```
?- single(mary).    ?- single(anne).    ?- single(X).
```

```
false
```

```
true
```

```
false
```

Răspunsul la întrebarea `?- single(anne).` trebuie gândit astfel:

Presupunem că Anne este single,
deoarece nu am putut demonstra că este maritată.

Predicatul \rightarrow /2 (if-then-else)

□ if-then

`If \rightarrow Then :- If, !, Then.`

Predicatul `-> /2` (if-then-else)

□ if-then

`If -> Then :- If, !, Then.`

□ if-then-else

`If -> Then; _Else :- If, !, Then.`

`If -> Then; Else :- !, Else.`

Se încearcă demonstrarea predicatului `If`. Dacă întoarce `true` atunci se încearcă demonstrarea predicatului `Then`, iar dacă întoarce `false` se încearcă demonstrarea predicatului `Else`.

`max(X,Y,Z) :- (X =< Y) -> Z = Y ; Z = X`

`?- max(2,3,Z).`

`Z = 3.`

Predicatul \rightarrow /2 (if-then-else)

□ if-then

If \rightarrow Then :- If, !, Then.

□ if-then-else

If \rightarrow Then; _Else :- If, !, Then.

If \rightarrow Then; Else :- !, Else.

Se încearcă demonstrarea predicatului If. Dacă întoarce true atunci se încearcă demonstrarea predicatului Then, iar dacă întoarce false se încearcă demonstrarea predicatului Else.

```
max(X,Y,Z) :- (X <= Y) -> Z = Y ; Z = X
```

```
?- max(2,3,Z).
```

```
Z = 3.
```

Observăm că If \rightarrow Then este echivalent cu If \rightarrow Then ; fail.

Tipuri de date compuse

Termeni compuși $f(t_1, \dots, t_n)$

- **Termenii** sunt unitățile de bază prin care Prolog reprezintă datele.
- Sunt de 3 tipuri:
 - **Constante**: 23, sansa, 'Jon Snow'
 - **Variable**: X, Stark, _house
 - **Termeni compuși**:
 - predicate
 - termeni prin care reprezentăm datele

Exemplu

- `born(john, date(20,3,1977))`
 - `born/2` și `date/3` sunt functori
 - `born/2` este un predicat
 - `date/3` definește date compuse

Tipuri de date definite recursiv

- Am văzut că listele sunt definite recursiv astfel:
 - [] este listă
 - [X|L] este listă, unde X este element și L este listă

Tipuri de date definite recursiv

- Am văzut că listele sunt definite recursiv astfel:
 - [] este listă
 - [X|L] este listă, unde X este element și L este listă
- Cum definim arborii binari în Prolog?

Tipuri de date definite recursiv

- Am văzut că listele sunt definite recursiv astfel:
 - [] este listă
 - [X|L] este listă, unde X este element și L este listă
- Cum definim arborii binari în Prolog? Soluție posibilă:

Tipuri de date definite recursiv

- Am văzut că listele sunt definite recursiv astfel:
 - [] este listă
 - [X|L] este listă, unde X este element și L este listă
- Cum definim arborii binari în Prolog? Soluție posibilă:
 - void este arbore

Tipuri de date definite recursiv

- Am văzut că listele sunt definite recursiv astfel:
 - [] este listă
 - [X|L] este listă, unde X este element și L este listă

- Cum definim arborii binari în Prolog? Soluție posibilă:
 - void este arbore
 - tree(X,A1,A2) este arbore, unde X este un element, iar A1 și A2 sunt arbori

Tipuri de date definite recursiv

- Am văzut că listele sunt definite recursiv astfel:
 - [] este listă
 - [X|L] este listă, unde X este element și L este listă
- Cum definim arborii binari în Prolog? Soluție posibilă:
 - void este arbore
 - tree(X,A1,A2) este arbore, unde X este un element, iar A1 și A2 sunt arbori

tree(X,A1,A2) este un termen compus, dar nu este un predicat!

Arbori binari în Prolog

- Cum arată un arbore?

Arbori binari în Prolog

- Cum arată un arbore?

```
tree(a, tree(b, tree(d, void, void), void), tree(c, void, tree(e, void, void)))
```

Arbori binari în Prolog

- Cum arată un arbore?

```
tree(a, tree(b, tree(d, void, void), void), tree(c, void, tree(e, void, void)))
```

- Cum dăm un "nume" arborelui de mai sus?

Arbori binari în Prolog

- Cum arată un arbore?

```
tree(a, tree(b, tree(d, void, void), void), tree(c, void, tree(e, void, void)))
```

- Cum dăm un "nume" arborelui de mai sus? Definim un predicat:

```
def(arb, tree(a, tree(b,  
                    tree(d,void,void),  
                    void),  
    tree(c, void,  
        tree(e,void,void))))).
```

Arbori binari în Prolog

- Cum arată un arbore?

```
tree(a, tree(b, tree(d, void, void), void), tree(c, void, tree(e, void, void)))
```

- Cum dăm un "nume" arborelui de mai sus? Definim un predicat:

```
def(arb, tree(a, tree(b,  
                    tree(d,void,void),  
                    void),  
    tree(c, void,  
        tree(e,void,void))))).
```

Deoarece în Prolog nu avem declarații explicite de date, pentru a defini arborii vom scrie un predicat care este adevărat atunci când argumentul său este un arbore.

Arbori binari în Prolog

- Scrieți un predicat care verifică că un termen este arbore binar.

Arbori binari în Prolog

- Scrieți un predicat care verifică că un termen este arbore binar.

```
binary_tree(void).  
binary_tree(tree(Element,Left,Right)) :- binary_tree(Left),  
                                          binary_tree(Right).
```

Arbori binari în Prolog

- Scrieți un predicat care verifică că un termen este arbore binar.

```
binary_tree(void).  
binary_tree(tree(Element,Left,Right)) :- binary_tree(Left),  
                                         binary_tree(Right).
```

Eventual putem defini și un predicat pentru elemente:

```
binary_tree(void).  
binary_tree(tree(Element,Left,Right)) :- binary_tree(Left),  
                                         binary_tree(Right),  
                                         element_binary_tree(Element)  
  
element_binary_tree(X):- integer(X). /* de exemplu */
```

Arbori binari în Prolog

- Scrieți un predicat care verifică că un termen este arbore binar.

```
binary_tree(void).  
binary_tree(tree(Element,Left,Right)) :- binary_tree(Left),  
                                         binary_tree(Right).
```

Eventual putem defini și un predicat pentru elemente:

```
binary_tree(void).  
binary_tree(tree(Element,Left,Right)) :- binary_tree(Left),  
                                         binary_tree(Right),  
                                         element_binary_tree(Element)  
  
element_binary_tree(X):- integer(X). /* de exemplu */  
  
test:- def(arb,T), binary_tree(T).
```


Arbori binari în Prolog

Exercițiu

Scrieți un predicat care verifică că un element aparține unui arbore.

```
tree_member(X,tree(X,Left,Right)).
```

```
tree_member(X,tree(Y,Left,Right)) :- tree_member(X,Left).
```

```
tree_member(X,tree(Y,Left,Right)) :- tree_member(X,Right).
```

Arbori binari în Prolog

Exercițiu

Scrieți un predicat care determină parcurgerea în preordine a unui arbore binar.

```
preorder(tree(X,L,R),Xs) :- preorder(L,Ls),  
                                preorder(R,Rs),  
                                append([X|Ls],Rs,Xs).
```

Arbori binari în Prolog

Exercițiu

Scrieți un predicat care determină parcurgerea în preordine a unui arbore binar.

```
preorder(tree(X,L,R),Xs) :- preorder(L,Ls),  
                                preorder(R,Rs),  
                                append([X|Ls],Rs,Xs).  
preorder(void,[]).
```

Arbori binari în Prolog

Exercițiu

Scrieți un predicat care determină parcurgerea în preordine a unui arbore binar.

```
preorder(tree(X,L,R),Xs) :- preorder(L,Ls),  
                                preorder(R,Rs),  
                                append([X|Ls],Rs,Xs).  
  
preorder(void,[]).  
  
test(Tree,Pre):- def(arb, Tree), preorder(Tree,Pre).
```

Arbori binari în Prolog

Exercițiu

Scrieți un predicat care determină parcurgerea în preordine a unui arbore binar.

```
preorder(tree(X,L,R),Xs) :- preorder(L,Ls),
                               preorder(R,Rs),
                               append([X|Ls],Rs,Xs).

preorder(void,[]).

test(Tree,Pre):- def(arb, Tree), preorder(Tree,Pre).

?- test(T,P).
T = tree(a, tree(b, tree(d, void, void), void), tree(c,
void, tree(e, void, void))),
P = [a, b, d, c, e]
```

Liste și recursie

Listă $[t_1, \dots, t_n]$

- O listă în Prolog este un șir de elemente, separate prin virgulă, între paranteze drepte:

`[1,cold, parent(jon),[winter,is,coming],X]`

- O listă poate conține termeni de orice fel.
- Ordinea termenilor din listă are importanță:

?- `[1,2] == [2,1]` .

false

- Lista vidă se notează `[]`.
- Simbolul `|` delimitează coada listei:

?- `[1,2,3,4,5,6] = [X|T]` .

`X = 1, T = [2, 3, 4, 5, 6]` .

?- `[1,2,3|[4,5,6]] == [1,2,3,4,5,6]` .
true.

Listă $[t_1, \dots, t_n] == [t_1 \mid [t_2, \dots, t_n]]$

- Simbolul \mid delimitează coada listei:

?- $[1, 2, 3, 4, 5, 6] = [X \mid T]$.

$X = 1,$

$T = [2, 3, 4, 5, 6]$.

- Variabila anonimă $_$ este unificată cu orice termen Prolog:

?- $[1, 2, 3, 4, 5, 6] = [X \mid _]$.

$X = 1.$

- Deoarece Prologul face unificare poate identifica șabloane mai complicate:

?- $[5, 1, 1, 3, 2] = [_ \mid [X \mid [X \mid _]]]$.

$X = 1.$

?- $[5, 1, 4, 3, 2] = [_ \mid [X \mid [X \mid _]]]$.

false.

Exercițiu

- Definiți un predicat care verifică că un termen este lista.

```
is_list([]).
```

```
is_list([_|_]).
```

Exercițiu

- Definiți un predicat care verifică că un termen este lista.

```
is_list([]).
```

```
is_list([_|_]).
```

- Definiți predicate care verifică dacă un termen este primul element, ultimul element sau coada unei liste.

```
head([X|_],X).
```

```
last([X],X).
```

```
last([_|T],Y):- last(T,Y).
```

```
tail([],[]).
```

```
tail([_|T],T).
```

Exercițiu

- Definiți un predicat care verifică dacă un termen aparține unei liste.

`member(H, [H|_]) .`

`member(H, [_|T]) :- member(H,T) .`

Exercițiu

- Definiți un predicat care verifică dacă un termen aparține unei liste.
`member(H, [H|_]) .`
`member(H, [_|T]) :- member(H,T) .`
- Definiți un predicat `append/3` care verifică dacă o listă se obține prin concatenarea altor două liste.
`append([],L,L) .`
`append([X|T],L, [X|R]) :- append(T,L,R) .`

Exercițiu

- Definiți un predicat care verifică dacă un termen aparține unei liste.
`member(H, [H|_]) .`
`member(H, [_|T]) :- member(H,T) .`
- Definiți un predicat `append/3` care verifică dacă o listă se obține prin concatenarea altor două liste.
`append([],L,L) .`
`append([X|T],L, [X|R]) :- append(T,L,R) .`

Există predicatele predefinite `member/2` și `append/3`.

Liste append/3

□ Funcția append/3:

```
?- listing(append/3).
```

```
append([],L,L).
```

```
append([X|T],L, [X|R]) :- append(T,L,R).
```

```
?- append(X,Y,[a,b,c]).
```

```
X = [],
```

```
Y = [a, b, c] ;
```

```
X = [a],
```

```
Y = [b, c] ;
```

```
X = [a, b],
```

```
Y = [c] ;
```

```
X = [a, b, c],
```

```
Y = [] ;
```

false

- Funcția astfel definită poate fi folosită atât pentru verificare, cât și pentru generare.

Exercițiu

- Definiți un predicat `elim/3` care verifică dacă o listă se obține din alta prin eliminarea unui element.

Exercițiu

- Definiți un predicat `elim/3` care verifică dacă o listă se obține din alta prin eliminarea unui element.

```
elim(X, [X|T], T).
```

```
elim(X, [H|T], [H|L]) :- elim(X,T,L).
```


Exercițiu

- Definiți un predicat `elim/3` care verifică dacă o listă se obține din alta prin eliminarea unui element.

```
elim(X, [X|T], T).
```

```
elim(X, [H|T], [H|L]) :- elim(X,T,L).
```

- Definiți un predicat `perm/2` care verifică dacă două liste sunt permutări.

Exercițiu

- Definiți un predicat `elim/3` care verifică dacă o listă se obține din alta prin eliminarea unui element.

```
elim(X, [X|T], T).
```

```
elim(X, [H|T], [H|L]) :- elim(X,T,L).
```

- Definiți un predicat `perm/2` care verifică dacă două liste sunt permutări.

```
perm([], []). perm([X|T],L) :- elim(X,L,R), perm(R,T).
```

Exercițiu

- Definiți un predicat `elim/3` care verifică dacă o listă se obține din alta prin eliminarea unui element.

```
elim(X, [X|T], T).  
elim(X, [H|T], [H|L]) :- elim(X,T,L).
```

- Definiți un predicat care `perm/2` care verifică dacă două liste sunt permutări.

```
perm([], []). perm([X|T],L) :- elim(X,L,R), perm(R,T).
```

Predicatele predefinite `select/3` și `permutation/2` au aceeași funcționalitate.

Generează și testează

```
solution(X) :- generate(X), check(X).
```

Exercițiu

Determinați toate cuvintele dintr-o bază de cunoștințe dată, care sunt anagrame ale unui cuvânt dat.

KB: word(relay). word(early). word(layer).

Predicat util:

```
?- name(relay,L). % conversie între atomi și liste  
L = [114, 101, 108, 97, 121]
```

Generează și testează

```
solution(X) :- generate(X), check(X).
```

Exercițiu

Determinați toate cuvintele dintr-o bază de cunoștințe dată, care sunt anagrame ale unui cuvânt dat.

KB: word(relay). word(early). word(layer).

Predicat util:

```
?- name(relay,L). % conversie între atomi și liste  
L = [114, 101, 108, 97, 121]
```

Două abordări posibile:

- ☐ se generează o posibilă, soluție apoi se testează dacă este în KB.
- ☐ se parcurge KB și pentru fiecare termen se testează dacă e soluție.

Generează și testează

```
solution(X) :- generate(X), check(X).
```

Exercițiu

Determinați toate cuvintele dintr-o bază de cunoștințe dată, care sunt anagrame ale unui cuvânt dat.

```
KB: word(relay).  word(early).  word(layer).
```

Generează și testează

```
solution(X) :- generate(X), check(X).
```

Exercițiu

Determinați toate cuvintele dintr-o bază de cunoștințe dată, care sunt anagrame ale unui cuvânt dat.

```
KB: word(relay).  word(early).  word(layer).
```

```
anagram1(A,B) :- name(A,L), permutation(L,W),  
                  name(B,W), word(B).
```

Generează și testează

```
solution(X) :- generate(X), check(X).
```

Exercițiu

Determinați toate cuvintele dintr-o bază de cunoștințe dată, care sunt anagrame ale unui cuvânt dat.

```
KB: word(relay).  word(early).  word(layer).
```

```
anagram1(A,B) :- name(A,L), permutation(L,W),  
                  name(B,W), word(B).
```

```
anagram2(A,B) :- name(A,L), word(B),  
                  name(B,W), permutation(L,W).
```


Generează și testează

```
solution(X) :- generate(X), check(X).
```

Exercițiu

Determinați toate cuvintele dintr-o bază de cunoștințe dată, care sunt anagrame ale unui cuvânt dat.

```
KB: word(relay).  word(early).  word(layer).
```

```
anagram1(A,B) :- name(A,L), permutation(L,W),  
                  name(B,W), word(B).
```

```
anagram2(A,B) :- name(A,L), word(B),  
                  name(B,W), permutation(L,W).
```

```
?- anagram1(layre,X).
```

```
X = layer ;
```

```
X = relay ;
```

```
X = early ;
```

```
false.
```

```
?- anagram2(layre,X).
```

```
X = relay ;
```

```
X = early ;
```

```
X = layer ;
```

```
false.
```

Exercițiu

- Definiți un predicat `rev/2` care verifică dacă o listă este inversa altei liste.

Exercițiu

- Definiți un predicat `rev/2` care verifică dacă o listă este inversa altei liste.

```
rev([], []).
```

```
rev([X|T], L) :- rev(T, R), append(R, [X], L).
```

Soluția de mai sus este corectă, dar foarte costisitoare computațional, datorită stilului de programare declarativ.

Cum putem defini o variantă mai rapidă?

O metodă care prin care recursia devine mai rapidă este folosirea **acumulatorilor**, în care se păstrează rezultatele parțiale.

Recursie cu acumulatori

- Varianta inițială:

```
rev([], []).
```

```
rev([X|T], L) :- rev(T, R), append(R, [X], L).
```

- Varianta cu acumulator

```
rev(L, R) :- revac(L, [], R).
```

```
% la momentul inițial nu am acumulat nimic.
```

Recursie cu acumulatori

- Varianta inițială:

```
rev([], []).
```

```
rev([X|T], L) :- rev(T, R), append(R, [X], L).
```

- Varianta cu acumulator

```
rev(L, R) :- revac(L, [], R).
```

```
% la momentul inițial nu am acumulat nimic.
```

```
revac([], R, R).
```

```
% cand lista inițială a fost consumată,
```

```
% am acumulat rezultatul final.
```

Recursie cu acumulatori

- Varianta inițială:

```
rev([], []).
```

```
rev([X|T], L) :- rev(T, R), append(R, [X], L).
```

- Varianta cu acumulator

```
rev(L, R) :- revac(L, [], R).
```

```
% la momentul inițial nu am acumulat nimic.
```

```
revac([], R, R).
```

```
% cand lista inițială a fost consumată,
```

```
% am acumulat rezultatul final.
```

```
revac([X|T], Acc, R) :- revac(T, [X|Acc], R).
```

```
% Acc conține inversa listei care a fost deja parcursă.
```

- Complexitatea a fost redusă de la $O(n^2)$ la $O(n)$, unde n este lungimea listei.

Recursie

- Multe implementări ale limbajului Prolog aplică "last call optimization" atunci când un apel recursiv este ultimul predicat din corpul unei clauze (tail recursion).
- Atunci când este posibil, se recomandă utilizare recursiei la coadă (tail recursion).
- Vom defini un predicat care generează liste lungi în două moduri și vom analiza performanța folosind predicatul [time/1](#).

Recursie

- Multe implementări ale limbajului Prolog aplică "last call optimization" atunci când un apel recursiv este ultimul predicat din corpul unei clauze (tail recursion).
- Atunci când este posibil, se recomandă utilizare recursiei la coadă (tail recursion).
- Vom defini un predicat care generează liste lungi în două moduri și vom analiza performanța folosind predicatul `time/1`.

```
biglist(0, []).
```

```
biglist(N, [N|T]) :- N >= 1, M is N-1, biglist(M, T), M=M.
```

```
biglist_tr(0, []).
```

```
biglist_tr(N, [N|T]) :- N >= 1, M is N-1, biglist_tr(M, T).
```


Recursie la coadă

- Predicat fără recursie la coadă:

```
biglist(0, []).
```

```
biglist(N, [N|T]) :- N >= 1, M is N-1, biglist(M, T), M=M.
```

Apelul recursiv întoarce valoarea găsită în predicatul apelant, această valoare urmând a fi prelucrată.

Recursie la coadă

- Predicat **fără** recursie la coadă:

```
biglist(0, []).
```

```
biglist(N, [N|T]) :- N >= 1, M is N-1, biglist(M, T), M=M.
```

Apelul recursiv întoarce valoarea găsită în predicatul apelant, această valoare urmând a fi prelucrată.

```
?- time(biglist(50000, X)).
```

```
100,000 inferences, 0.016 CPU in 0.038 seconds
```

```
(41% CPU, 6400000 Lips)
```

```
X = [50000, 49999, 49998|...] .
```

Recursie la coadă

- Predicat **fără** recursie la coadă:

```
biglist(0, []).
```

```
biglist(N, [N|T]) :- N >= 1, M is N-1, biglist(M, T), M=M.
```

Apelul recursiv întoarce valoarea găsită în predicatul apelant, această valoare urmând a fi prelucrată.

```
?- time(biglist(50000, X)).
```

```
100,000 inferences, 0.016 CPU in 0.038 seconds  
(41% CPU, 6400000 Lips)
```

```
X = [50000, 49999, 49998|...] .
```

- Predicatul **cu** recursie la coadă:

```
biglist_tr(0, []).
```

```
biglist_tr(N, [N|T]) :- N >= 1, M is N-1, biglist_tr(M, T).
```

Recursie la coadă

- Predicat **fără** recursie la coadă:

```
biglist(0, []).
```

```
biglist(N, [N|T]) :- N >= 1, M is N-1, biglist(M, T), M=M.
```

Apelul recursiv întoarce valoarea găsită în predicatul apelant, această valoare urmând a fi prelucrată.

```
?- time(biglist(50000, X)).
```

```
100,000 inferences, 0.016 CPU in 0.038 seconds  
(41% CPU, 6400000 Lips)
```

```
X = [50000, 49999, 49998|...] .
```

- Predicatul **cu** recursie la coadă:

```
biglist_tr(0, []).
```

```
biglist_tr(N, [N|T]) :- N >= 1, M is N-1, biglist_tr(M, T).
```

```
?- time(biglist_tr(50000, X)).
```

```
100,000 inferences, 0.000 CPU in 0.007 seconds  
(0% CPU, Infinite Lips)
```

```
X = [50000, 49999, 49998|...]
```

Exemplu: reprezentarea unei GLC

Structura frazelor

- Aristotel, On Interpretation,

<http://classics.mit.edu/Aristotle/interpretation.1.1.html>:

"Every affirmation, then, and every denial, will consist of a noun and a verb, either definite or indefinite."

Structura frazelor

- Aristotel, On Interpretation,

<http://classics.mit.edu/Aristotle/interpretation.1.1.html>:

"Every affirmation, then, and every denial, will consist of a noun and a verb, either definite or indefinite."

- N. Chomsky, Syntactic structure, Mouton Publishers, First printing 1957 - Fourteenth printing 1985 [Chapter 4 (Phrase Structure)]

(i) $Sentence \rightarrow NP + VP$

(ii) $NP \rightarrow T + N$

(iii) $VP \rightarrow Verb + NP$

(iv) $T \rightarrow the$

(q) $N \rightarrow fman, ball, etc.$

(vi) $V \rightarrow hit, took, etc.$

Gramatică independentă de context

- Definim structura propozițiilor folosind o gramatică independentă de context:

S	→	NP VP
NP	→	Det N
VP	→	V
VP	→	V NP
Det	→	<i>the</i>
Det	→	<i>a</i>
N	→	<i>boy</i>
N	→	<i>girl</i>
V	→	<i>loves</i>
V	→	<i>hates</i>

- Neterminalele definesc categorii gramaticale:

S (propozițiile),
NP (expresiile substantivale),
VP (expresiile verbale),
V (verbele),
N (substantivele),
Det (articolele).

- Terminalele definesc cuvintele.

Gramatică independentă de context

GIC

S → NP VP
NP → Det N
VP → V
VP → V NP

Det → *the*
Det → *a*
N → *boy*
N → *girl*
V → *loves*
V → *hates*

Ce vrem să facem?

- Vrem să scriem un program în Prolog care să recunoască propozițiile generate de această gramatică.
- Reprezentăm propozițiile prin liste.

```
?- atomic_list_concat(SL, ' ', 'a boy loves a girl').  
SL = [a, boy, loves, a, girl]
```

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

SL = [a, boy, loves, a, girl]

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

SL = [a, boy, loves, a, girl]

- Fiecărui neterminal îi asociem un predicat care definește listele corespunzătoare categoriei gramaticale respective. `n([boy]).`

`n([girl]). det([the]). v([loves]).`

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

SL = [a, boy, loves, a, girl]

- Fiecărui neterminal îi asociem un predicat care definește listele corespunzătoare categoriei gramaticale respective. `n([boy]).`

`n([girl]).` `det([the]).` `v([loves]).`

- Lista asociată unei propoziții se obține prin concatenarea listelor asociate elementelor componente.

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

`SL = [a, boy, loves, a, girl]`

- Fiecărui neterminal îi asociem un predicat care definește listele corespunzătoare categoriei gramaticale respective. `n([boy])`.

`n([girl])`. `det([the])`. `v([loves])`.

- Lista asociată unei propoziții se obține prin concatenarea listelor asociate elementelor componente.

De exemplu, interpretăm regula $S \rightarrow NP VP$ astfel:

o propoziție este o listă `L` care se obține prin concatenarea a două liste, `X` și `Y`, unde `X` reprezintă o expresie substantivală și `Y` reprezintă o expresie verbală.

`s(L) :- np(X), vp(Y), append(X,Y,L)`.

Definirea unei gramatici în Prolog

Gramatică independentă de context

S → NP VP

NP → Det N

VP → V

VP → V NP

Det → *the*

Det → *a*

N → *boy*

N → *girl*

V → *loves*

V → *hates*

Prolog

```
s(L) :- np(X), vp(Y),
        append(X,Y,L).
np(L)  :- det(X), n(Y),
        append(X,Y,L) .
vp(L)  :- v(L) .
vp(L) :- v(X), np(Y),
        append(X,Y,L) .
```

```
det([the]).
det([a]).
n([boy]).
n([girl]).
v([loves]).
v([hates]).
```

Definirea unei gramatici în Prolog

```
s(L) :- np(X), vp(Y),  
        append(X,Y,L).
```

```
np(L) :- det(X), n(Y),  
        append(X,Y,L) .
```

```
vp(L) :- v(L).
```

```
vp(L):- v(X), np(Y),  
        append(X,Y,L) .
```

```
det([the]).
```

```
det([a]).
```

```
n([boy]).
```

```
n([girl]).
```

```
v([loves]).
```

```
v([hates]).
```

```
?- s([a,boy,loves, a,  
girl]).
```

```
true .
```

```
?- s[a, girl|T].
```

```
T = [loves] ;
```

```
T = [hates] ;
```

```
T = [loves, the, boy] ;
```

```
⋮
```

```
?- s(S).
```

```
S = [the, boy, loves] ;
```

```
S = [the, boy, hates] ;
```

```
⋮
```

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

SL = [a, boy, loves, a, girl]

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

SL = [a, boy, loves, a, girl]

- Fiecărui neterminal îi asociem un predicat care definește listele corespunzătoare categoriei gramaticale respective. n([boy]).

n([girl]). det([the]). v([loves]).

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

SL = [a, boy, loves, a, girl]

- Fiecărui neterminal îi asociem un predicat care definește listele corespunzătoare categoriei gramaticale respective. n([boy]).

n([girl]). det([the]). v([loves]).

- Lista asociată unei propoziții se obține prin concatenarea listelor asociate elementelor componente.

Definirea unei gramatici în Prolog

- Reprezentăm propozițiile prin liste.

SL = [a, boy, loves, a, girl]

- Fiecărui neterminal îi asociem un predicat care definește listele corespunzătoare categoriei gramaticale respective. n([boy]).

n([girl]). det([the]). v([loves]).

- Lista asociată unei propoziții se obține prin concatenarea listelor asociate elementelor componente.
- Deși corectă, reprezentarea anterioară este ineficientă, arborele de căutare este foarte mare. Pentru a optimiza, folosim reprezentarea listelor ca diferite.

Bibliografie

- M. Ben-Ari, **Mathematical Logic for Computer Science**, Springer, 2012.
- P. Blackburn, J. Bos, K. Striegnitz, **Learn Prolog now**, College Publications, 2006.
- J.W. Lloyd, **Foundations of Logic Programming**, Springer, 1987.
- L.S. Sterling and E.Y. Shapiro, **The Art of Prolog** <https://mitpress.mit.edu/books/art-prolog-second-edition>
- **Logic Programming**, The University of Edinburgh, <https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/lp/>



Pe săptămâna viitoare!

Curs 9

Cuprins

- 1 Limbajul IMP
- 2 O implementare a limbajului IMP în Prolog
- 3 O implementare a semanticii small-step
- 4 Semantica Small-Step pentru Lambda Calcul

Limbajul IMP

Limbajul IMP

Vom implementa un limbaj care conține:

- Expresii

- Aritmetice

`x + 3`

- Booleene

`x >= 7`

- Instrucțiuni

- De atribuire

`x = 5`

- Condiționale

`if(x >= 7, x = 5, x = 0)`

- De ciclare

`while(x >= 7, x = x - 1)`

- Compunerea instrucțiunilor

`x=7;while(x>=0,x=x-1)`

- Blocuri de instrucțiuni

`{x=7;while(x>=0,x=x-1)}`

Limbajul IMP

Exemplu

Un program în limbajul IMP

```
{x = 10 ; sum = 0;  
while(0 =< x,  
      {sum = sum + x; x = x-1}  
)},sum
```

□ Semantica

după execuția programului, se evaluează sum

Sintaxa BNF a limbajului IMP

$E ::= n \mid x$
 $\mid E + E \mid E - E \mid E * E$

$B ::= \text{true} \mid \text{false}$
 $\mid E < E \mid E > E \mid E == E$
 $\mid \text{not}(B) \mid \text{and}(B, B) \mid \text{or}(B, B)$

$C ::= \text{skip}$
 $\mid x = E$
 $\mid \text{if}(B, C, C)$
 $\mid \text{while}(B, C)$
 $\mid \{ C \} \mid C ; C$

$P ::= \{ C \}, E$

O implementare a limbajului IMP în Prolog

Decizii de implementare

- `{}` și `;` sunt operatori
 - `:- op(100, xf, {}).`
 - `:- op(1100, yf, ;).`
- definim un predicat pentru fiecare categorie sintactică
 - `stmt(while(BE,St)) :- bexp(BE), stmt(St).`
- `while`, `if`, `and`, etc sunt functori în Prolog
 - `while(true,skip)` este un termen compus
- `,` are semnificația obișnuită
- pentru valori numerice folosim întregii din Prolog
 - `aexp(I) :- integer(I).`
- pentru identificatori folosim atomii din Prolog
 - `aexp(X) :- atom(X).`

Expresiile aritmetice

$$E ::= n \mid x \\ \mid E + E \mid E - E \mid E * E$$

Prolog

```
aexp(I) :- integer(I).  
aexp(X) :- atom(X).  
aexp(A1 + A2) :- aexp(A1), aexp(A2).  
aexp(A1 - A2) :- aexp(A1), aexp(A2).  
aexp(A1 * A2) :- aexp(A1), aexp(A2).
```

Expresiile aritmetice

Exemplu

?- aexp(1000).

true.

?- aexp(id).

true.

?- aexp(id + 1000).

true.

?- aexp(2 + 1000).

true.

?- aexp(x * y).

true.

?- aexp(- x).

false.

Expresiile booleene

$B ::= \text{true} \mid \text{false}$
 $\mid E \leq E \mid E \geq E \mid E == E$
 $\mid \text{not}(B) \mid \text{and}(B, B) \mid \text{or}(B, B)$

Prolog

```
bexp(true). bexp(false).  
bexp(and(BE1,BE2)) :- bexp(BE1), bexp(BE2).  
bexp(or(BE1,BE2)) :- bexp(BE1), bexp(BE2).  
bexp(not(BE)) :- bexp(BE).
```

```
bexp(A1 <= A2) :- aexp(A1), aexp(A2).  
bexp(A1 >= A2) :- aexp(A1), aexp(A2).  
bexp(A1 == A2) :- aexp(A1), aexp(A2).
```


Expresiile booleene

Exemplu

?- bexp(true).

true.

?- bexp(id).

false.

?- bexp(not(1 =< 2)).

true.

?- bexp(or(1 =< 2,true)).

true.

?- bexp(or(a =< b,true)).

true.

?- bexp(not(a)).

false.

?- bexp(!(a)).

false.

Instrucțiunile

```
C ::= skip
    | x = E ;
    | if( B ) C else C
    | while( B ) C
    | { C } | C ; C
```

Prolog

```
stmt(skip).
stmt(X = AE) :- atom(X), aexp(AE).
stmt(St1;St2) :- stmt(St1), stmt(St2).
stmt((St1;St2)) :- stmt(St1), stmt(St2).
stmt({St}) :- stmt(St).
stmt(if(BE,St1,St2)) :- bexp(BE), stmt(St1), stmt(St2).
stmt(while(BE,St)) :- bexp(BE), stmt(St).
```

Instrucțiunile

Exemplu

?- stmt(id = 5).

true.

?- stmt(id = a).

true.

?- stmt(3 = 6).

false.

?- stmt(if(true, x=2;y=3, x=1;y=0)).

true.

?- stmt(while(x =< 0,skip)).

true.

?- stmt(while(x =< 0,)).

false.

?- stmt(while(x =< 0,skip)).

true .

Programele

$P ::= \{ C \}, E$

Prolog

```
program(St,AE) :- stmt(St), aexp(AE).
```

Exemplu

```
test0 :- program( {x = 10 ; sum = 0;
                  while(0 <= x,
                        {sum = sum + x; x = x-1}
                      )}
          , sum).
```

```
?- test0.
true.
```

O implementare a semanticii small-step

Semantica small-step

- Introdusă de Gordon Plotkin (1981)
- Denumiri alternative:
 - Semantică Operațională Structurală
 - semantică prin tranziții
 - semantică prin reducere
- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație „de tranziție” între configurații:

$$\langle cod, \sigma \rangle \rightarrow \langle cod, \sigma' \rangle$$

Semantica small-step

- Introdusă de Gordon Plotkin (1981)
- Denumiri alternative:
 - Semantică Operațională Structurală
 - semantică prin tranziții
 - semantică prin reducere
- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație „de tranziție” între configurații:

$$\langle cod, \sigma \rangle \rightarrow \langle cod, \sigma' \rangle$$

- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții:
 $\langle \text{int } x = 0 ; x = x + 1 ; , \perp \rangle \longrightarrow \langle x = x + 1 ; , x \mapsto 0 \rangle$

Semantica small-step

- Introdusă de Gordon Plotkin (1981)
- Denumiri alternative:
 - Semantică Operațională Structurală
 - semantică prin tranziții
 - semantică prin reducere
- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație „de tranziție” între configurații:

$$\langle cod, \sigma \rangle \rightarrow \langle cod, \sigma' \rangle$$

- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții:
$$\begin{aligned} \langle \text{int } x = 0 ; x = x + 1 ; , \perp \rangle &\longrightarrow \langle x = x + 1 ; , x \mapsto 0 \rangle \\ &\longrightarrow \langle x = 0 + 1 ; , x \mapsto 0 \rangle \end{aligned}$$

Semantica small-step

- Introdusă de Gordon Plotkin (1981)
- Denumiri alternative:
 - Semantică Operațională Structurală
 - semantică prin tranziții
 - semantică prin reducere
- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație „de tranziție” între configurații:

$$\langle cod, \sigma \rangle \rightarrow \langle cod, \sigma' \rangle$$

- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții:
$$\begin{aligned}\langle \text{int } x = 0 ; x = x + 1 ; , \perp \rangle &\longrightarrow \langle x = x + 1 ; , x \mapsto 0 \rangle \\ &\longrightarrow \langle x = 0 + 1 ; , x \mapsto 0 \rangle \\ &\longrightarrow \langle x = 1 ; , x \mapsto 0 \rangle\end{aligned}$$

Semantica small-step

- Introdusă de Gordon Plotkin (1981)
- Denumiri alternative:
 - Semantică Operațională Structurală
 - semantică prin tranziții
 - semantică prin reducere
- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație „de tranziție” între configurații:

$$\langle \text{cod} , \sigma \rangle \rightarrow \langle \text{cod} , \sigma' \rangle$$

- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții:

$$\begin{aligned} \langle \text{int } x = 0 ; x = x + 1 ; , \perp \rangle &\longrightarrow \langle x = x + 1 ; , x \mapsto 0 \rangle \\ &\longrightarrow \langle x = 0 + 1 ; , x \mapsto 0 \rangle \\ &\longrightarrow \langle x = 1 ; , x \mapsto 0 \rangle \\ &\longrightarrow \langle \{\} , x \mapsto 1 \rangle \end{aligned}$$

Semantica small-step

- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație de tranziție între configurații:
 $\langle cod, \sigma \rangle \rightarrow \langle cod', \sigma' \rangle$ step(Cod,S1,Cod',S2)
- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții.
- Starea execuției unui program IMP la un moment dat este o funcție parțială: $\sigma = n \mapsto 10, sum \mapsto 0$, etc.

Reprezentarea stărilor în Prolog

```
get(S,X,I) :- member(vi(X,I),S).  
get(_,_,0).  
set(S,X,I,[vi(X,I)|S1]) :- del(S,X,S1).  
  
del(S,X,S1) :- select(vi(X,_), S, S1), !.  
del(S, _, S).
```

Semantica expresiilor aritmetice

□ Semantica unei variabile

$\langle x, \sigma \rangle \rightarrow \langle i, \sigma \rangle$ dacă $i = \sigma(x)$

Prolog

```
step(X,S,I,S) :-  
    atom(X),  
    get(S,X,I).
```

Semantica expresiilor aritmetice

□ Semantica adunării a două expresii aritmetice

$$\langle i_1 + i_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle i, \sigma \rangle \quad \text{dacă } i = i_1 + i_2$$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle a'_1, \sigma' \rangle}{\langle a_1 + a_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle a'_1 + a_2, \sigma' \rangle} \quad \frac{\langle a_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle a'_2, \sigma' \rangle}{\langle a_1 + a_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle a_1 + a'_2, \sigma' \rangle}$$

Prolog

```
step(I1 + I2,S,I,S):- integer(I1),integer(I2),  
                        I is I1 + I2.
```

```
step(AE + AE1,S1,AE + AE2,S1):- step(AE1,S1,AE2,S2).
```

```
step(AE1 + AE,S1,AE2 + AE,S2):- step(AE1,S1,AE2,S2).
```

Semantica expresiilor aritmetice

Exemplu

?- step(a + b, [vi(a,1),vi(b,2)],AE, S).

AE = 1+b,

S = [vi(a, 1), vi(b, 2)] .

?- step(1 + b, [vi(a,1),vi(b,2)],AE, S).

AE = 1+2,

S = [vi(a, 1), vi(b, 2)] .

?- step(1 + 2, [vi(a,1),vi(b,2)],AE, S).

AE = 3,

S = [vi(a, 1), vi(b, 2)]

Semantica expresiilor aritmetice

Exemplu

?- step(a + b, [vi(a,1),vi(b,2)],AE, S).

AE = 1+b,

S = [vi(a, 1), vi(b, 2)] .

?- step(1 + b, [vi(a,1),vi(b,2)],AE, S).

AE = 1+2,

S = [vi(a, 1), vi(b, 2)] .

?- step(1 + 2, [vi(a,1),vi(b,2)],AE, S).

AE = 3,

S = [vi(a, 1), vi(b, 2)]

□ Semantica * și – se definesc similar.

Semantica expresiilor booleene

□ Semantica operatorului de comparație

$\langle i_1 =< i_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle \mathbf{false}, \sigma \rangle$ dacă $i_1 > i_2$

$\langle i_1 =< i_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle \mathbf{true}, \sigma \rangle$ dacă $i_1 \leq i_2$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle a'_1, \sigma' \rangle}{\langle a_1 =< a_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle a'_1 =< a_2, \sigma' \rangle} \quad \frac{\langle a_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle a'_2, \sigma' \rangle}{\langle a_1 =< a_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle a_1 =< a'_2, \sigma' \rangle}$$

Prolog

```
step(I1 =< I2,S,true,S):- integer(I1),integer(I2),
                           (I1 =< I2).
step(I1 =< I2,S,false,S):- integer(I1),integer(I2),
                           (I1 > I2).
step(AE =< AE1,S1,AE =< AE2,S2):- step(AE1,S1,AE2,S2).
step(AE1 =< AE,S1,AE2 =< AE,S2):- step(AE1,S1,AE2,S2).
```


Semantica expresiilor Booleene

□ Semantica negației

$\langle \text{not}(\text{true}) , \sigma \rangle \rightarrow \langle \text{false} , \sigma \rangle$

$\langle \text{not}(\text{false}) , \sigma \rangle \rightarrow \langle \text{true} , \sigma \rangle$

$$\frac{\langle a , \sigma \rangle \rightarrow \langle a' , \sigma' \rangle}{\langle \text{not} (a) , \sigma \rangle \rightarrow \langle \text{not} (a') , \sigma' \rangle}$$

Prolog

```
step(not(true),S,false,S) .
```

```
step(not(false),S,true,S) .
```

```
step(not(BE1),S1,not(BE2),S2) :- step(BE1,S1,BE2,S2) .
```

Semantica compunerii și a blocurilor

□ Semantica blocurilor

$$\langle \{s\}, \sigma \rangle \rightarrow \langle s, \sigma \rangle$$

□ Semantica compunerii secvențiale

$$\langle \{\}; s_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle s_2, \sigma \rangle \quad \frac{\langle s_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle s'_1, \sigma' \rangle}{\langle s_1; s_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle s'_1; s_2, \sigma' \rangle}$$

Prolog

```
step({E}, S, E, S).
```

```
step((skip; St2), S, St2, S).
```

```
step((St1; St), S1, (St2; St), S2) :-  
    step(St1, S1, St2, S2) .
```

Semantica atribuirii

□ Semantica atribuirii

$\langle x = i, \sigma \rangle \rightarrow \langle \{\} , \sigma' \rangle$ dacă $\sigma' = \sigma[i/x]$

$$\frac{\langle a, \sigma \rangle \rightarrow \langle a', \sigma' \rangle}{\langle x = a, \sigma \rangle \rightarrow \langle x = a' ; , \sigma' \rangle}$$

Prolog

```
step(X = I,S,skip,S1) :- integer(I),set(S,X,I,S1).
```

```
step(X = AE1,S1,X = AE2,S2) :-  
                                step(AE1,S1,AE2,S2).
```

Semantica lui if

□ Semantica lui if

$\langle \text{if } (\text{true}, bl_1, bl_2), \sigma \rangle \rightarrow \langle bl_1, \sigma \rangle$

$\langle \text{if } (\text{false}, bl_1, bl_2), \sigma \rangle \rightarrow \langle bl_2, \sigma \rangle$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \rightarrow \langle b', \sigma' \rangle}{\langle \text{if } (b, bl_1, bl_2), \sigma \rangle \rightarrow \langle \text{if } (b', bl_1, bl_2), \sigma' \rangle}$$

Prolog

```
step(if(true,St1,_),S,St1,S).  
step(if(false,_,St2),S,St2,S).
```

```
step(if(BE1,St1,St2),S1,if(BE2,St1,St2),S2) :-  
    step(BE1,S1,BE2,S2) .
```

Semantica lui while

□ Semantica lui while

$\langle \text{while } (b, bl) , \sigma \rangle \rightarrow \langle \text{if } (b, bl ; \text{while } (b, bl), \text{skip}) , \sigma \rangle$

Prolog

```
step(while(BE,St),S,if(BE,(St;while(BE,St)),skip),S).
```

Semantica programelor

□ Semantica programelor

$$\frac{\langle a_1, \sigma_1 \rangle \rightarrow \langle a_2, \sigma_2 \rangle}{\langle (\mathbf{skip}, a_1), \sigma_1 \rangle \rightarrow \langle (\mathbf{skip}, a_2), \sigma_2 \rangle}$$

$$\frac{\langle s_1, \sigma_1 \rangle \rightarrow \langle s_2, \sigma_2 \rangle}{\langle (s_1, a), \sigma_1 \rangle \rightarrow \langle (s_2, a), \sigma_2 \rangle}$$

Prolog

```
step((skip,AE1),S1,(skip,AE2),S2) :-  
    step(AE1,S1,AE2,S2) .  
step((St1,AE),S1,(St2,AE),S2) :-  
    step(St1,S1,St2,S2) .
```

Execuția programelor

Prolog

```
all_steps(P1, S1, PF, SF) :-  
    step(P1, S1, P2, S2)  
    -> all_steps(P2, S2, PF, SF)  
    ;   PF = P1, SF = S1.
```

```
run_program(Name) :- defpg(Name, {P}, E),  
                     all_steps((P,E), [], (skip, I), _),  
                     write(I).
```

Exemplu

```
defpg(pg2, {x = 10 ; sum = 0; while(0 =< x, {  
                                         sum = sum + x;  
                                         x = x - 1}}}, sum)
```

```
?- run_program(pg2).  
55  
true
```

Execuția programelor: trace

Putem defini o funcție care ne permite să urmărim execuția unui program în implementarea noastră?

Execuția programelor: trace

Putem defini o funcție care ne permite să urmărim execuția unui program în implementarea noastră?

Prolog

```
all_steps(P1, S1, PF, SF, [(P1, S1)| Trace]) :-  
    step(P1, S1, P2, S2)  
    -> all_steps(P2, S2, PF, SF, Trace)  
    ;   PF = P1, SF = S1, Trace=[].
```

```
trace_program(Name) :- defpg(Name, {P}, E),  
                        all_steps((P,E), [], _, _, Trace),  
                        write(Trace).
```

Execuția programelor: trace_program

Exemplu

?- trace_program(pg2).

...

```
((if(0=<x,(sum=sum+x;x=x-1;while(0=<x,sum=sum+x;x=x-1)),skip), sum),  
[vi(x,-1),vi(sum,55)]),  
((if(0=<-1,(sum=sum+x;x=x-1;while(0=<x,sum=sum+x;x=x-1)),skip), sum),  
[vi(x,-1),vi(sum,55)]),  
((if(false,(sum=sum+x;x=x-1;while(0=<x,sum=sum+x;x=x-1)),skip), sum),  
[vi(x,-1),vi(sum,55)]),  
((skip, sum), [vi(x,-1),vi(sum,55)]),  
((skip, 55), [vi(x,-1),vi(sum,55)]),
```

Sintaxa limbajului LAMBDA

BNF

```
e ::= x
    | λx.e
    | e e
    | let x = e in e
```

Verificarea sintaxei în Prolog

```
exp(Id) :- atom(Id).                % identifier
exp(Id -> Exp) :- atom(Id), exp(Exp). % lambda
exp(Exp1 $ Exp2) :- exp(Exp1), exp(Exp2). % application
exp(let(Id, Exp1, Exp2)) :- atom(Id), exp(Exp1), exp(Exp2).
```

Semantica small-step pentru Lambda

- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație de tranziție între expresii dată fiind o stare cu valori pentru variabilele libere
 $\rho \vdash cod \rightarrow cod'$ step(Env, Cod1, Cod2)
- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții.

Semantica variabilelor

$$\rho \vdash x \rightarrow v \quad \text{dacă } \rho(x) = v$$

Prolog

```
step(Env, X, V) :- atom(X), get(Env, X, V).
```

Semantica λ -abstracției

$$\rho \vdash \lambda x.e \rightarrow \text{closure}(x, e, \rho)$$

λ -abstracția se evaluează la o valoare specială numită closure care capturează valorile curente ale variabilelor pentru a se putea executa în acest mediu atunci când va fi aplicată.

Prolog

```
step(Env, X -> E, closure(X, E, Env)).
```

Semantica construcției **let**

$$\rho \vdash \mathbf{let} \ x = e_1 \ \mathbf{in} \ e_2 \rightarrow (\lambda x. e_2) \ e_1$$

A îi da lui x valoarea lui e_1 în e_2 este același lucru cu a aplica funcția de x cu corpul e_2 expresiei e_1 .

Prolog

```
step(_, let (X, E1, E2), (X -> E2) $ E1).
```

Semantica operatorului de aplicare

$$\frac{\rho_e[v/x] \vdash e \rightarrow e'}{\rho \vdash \text{closure}(x, e, \rho_e) v \rightarrow \text{closure}(x, e', \rho_e) v} \quad \text{dacă } v \text{ valoare}$$

$$\rho \vdash \text{closure}(x, v, \rho_e) e \rightarrow v \quad \text{dacă } v \text{ valoare}$$

$$\frac{\rho \vdash e_1 \rightarrow e'_1}{\rho \vdash e_1 e_2 \rightarrow e'_1 e_2} \quad \frac{\rho \vdash e_2 \rightarrow e'_2}{\rho \vdash e_1 e_2 \rightarrow e_1 e'_2}$$

Prolog

```
step(Env, E $ E1, E $ E2) :- step(Env, E1, E2).
step(Env, E1 $ E, E2 $ E) :- step(Env, E1, E2).
step(Env, closure(X, E, EnvE) $ V, Result) :-
    \+ step(Env, V, _),
    set(EnvE, X, V, EnvEX),
    step(EnvEX, E, E1)
-> Result = closure(X, E1, EnvE) $ V
; Result = E.
```




Pe săptămâna viitoare!

Curs 10

Cuprins

1 Semantica Small-Step pentru Lambda Calcul

2 Determinarea tipurilor

- Asociere de tipuri
- Proprietăți
- Exemplu
- Implementare în Prolog

3 Funcții polimorfe

Sintaxa limbajului LAMBDA

BNF

```
e ::= x | n | true | false
    | e + e | e < e | not (e)
    | if e then e else e
    | λx.e | e e
    | let x = e in e
```

Verificarea sintaxei în Prolog

```
exp(Id) :- atom(Id).                % identifier
exp(Lit) :- Lit = true ; Lit = false ; integer(Lit).
exp(E1 + E2) :- exp(E1), exp(E2).   % same for any op
exp(if(E1, E2, E3)) :- exp(E1), exp(E2), exp(E3).
exp(Id -> Exp) :- atom(Id), exp(Exp). % lambda
exp(Exp1 $ Exp2) :- exp(Exp1), exp(Exp2). % application
exp(let(Id, Exp1, Exp2)) :- atom(Id), exp(Exp1), exp(Exp2).
```

Semantica small-step pentru Lambda

- Definește cel mai mic pas de execuție ca o relație de tranziție între expresii dată fiind o stare cu valori pentru variabilele libere
 $\rho \vdash cod \rightarrow cod'$ step(Env, Cod1, Cod2)
- Execuția se obține ca o succesiune de astfel de tranziții.

Semantica variabilelor

$$\rho \vdash x \rightarrow v \quad \text{dacă } \rho(x) = v$$

Prolog

```
step(Env, X, V) :- atom(X), get(Env, X, V).
```

Semantica expresiilor aritmetice

□ Semantica adunării a două expresii aritmetice

$\langle i_1 + i_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle i, \sigma \rangle$ dacă $i = i_1 + i_2$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle a'_1, \sigma' \rangle}{\langle a_1 + a_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle a'_1 + a_2, \sigma' \rangle} \quad \frac{\langle a_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle a'_2, \sigma' \rangle}{\langle a_1 + a_2, \sigma \rangle \rightarrow \langle a_1 + a'_2, \sigma' \rangle}$$

□ Pentru alți operatori (aritmetici, de comparație, booleeni, condițional)

□ Similar cu regulile din IMP

Prolog

```
step(_, I1 + I2, I):- integer(I1),integer(I2),  
                      I is I1 + I2.
```

```
step(Env, AE + AE1, AE + AE2):- step(Env, AE1, AE2).
```

```
step(Env, AE1 + AE, AE2 + AE):- step(Env, AE1, AE2).
```

Semantica λ -abstracției

$$\rho \vdash \lambda x.e \rightarrow \text{closure}(x, e, \rho)$$

λ -abstracția se evaluează la o valoare specială numită closure care capturează valorile curente ale variabilelor pentru a se putea executa în acest mediu atunci când va fi aplicată.

Prolog

```
step(Env, X -> E, closure(X, E, Env)).
```


Semantica construcției **let**

$$\rho \vdash \mathbf{let} \ x = e_1 \ \mathbf{in} \ e_2 \rightarrow (\lambda x. e_2) \ e_1$$

A îi da lui x valoarea lui e_1 în e_2 este același lucru cu a aplica funcția de x cu corpul e_2 expresiei e_1 .

Prolog

```
step(_, let(X, E1, E2), (X -> E2) $ E1).
```

Semantica operatorului de aplicare

$$\frac{\rho_e[v/x] \vdash e \rightarrow e'}{\rho \vdash \text{closure}(x, e, \rho_e) v \rightarrow \text{closure}(x, e', \rho_e) v} \quad \text{dacă } v \text{ valoare}$$

$$\rho \vdash \text{closure}(x, v, \rho_e) e \rightarrow v \quad \text{dacă } v \text{ valoare}$$

$$\frac{\rho \vdash e_1 \rightarrow e'_1}{\rho \vdash e_1 e_2 \rightarrow e'_1 e_2} \quad \frac{\rho \vdash e_2 \rightarrow e'_2}{\rho \vdash e_1 e_2 \rightarrow e_1 e'_2}$$

Prolog

```
step(Env, E $ E1, E $ E2) :- step(Env, E1, E2).
step(Env, E1 $ E, E2 $ E) :- step(Env, E1, E2).
step(Env, closure(X, E, EnvE) $ V, Result) :-
    \+ step(Env, V, _),
    set(EnvE, X, V, EnvEX),
    step(EnvEX, E, E1)
-> Result = closure(X, E1, EnvE) $ V
; Result = E.
```

Problemă: Sintaxa este prea permisivă

Problemă: Mulți termeni acceptați de sintaxă nu pot fi evaluați

- ☐ $2 (\lambda x.x)$
- ☐ $(\lambda x.x) + 1$
- ☐ $(\lambda x.x + 1) (\lambda x.x)$

Problemă: Sintaxa este prea permisivă

Problemă: Mulți termeni acceptați de sintaxă nu pot fi evaluați

- $2 (\lambda x.x)$ — expresia din stânga aplicației trebuie să reprezinte o funcție
- $(\lambda x.x) + 1$ — adunăm funcții cu numere
- $(\lambda x.x + 1) (\lambda x.x)$ — pot face o reducere, dar tot nu pot evalua

Soluție: Identificarea (precisă) a programelor corecte

- Definim tipuri pentru fragmente de program corecte (e.g., int, bool)
- Definim (recursiv) o relație care să lege fragmente de program de tipurile asociate

$((\lambda x.x + 1) ((\lambda x.x) 3)) : \text{int}$

Relația de asociere de tipuri

Definim (recursiv) o relație de forma $\Gamma \vdash e : \tau$, unde

- τ este un tip

$\tau ::= \text{int}$ [întregi]
| bool [valori de adevăr]
| $\tau \rightarrow \tau$ [funcții]
| a [variabile de tip]

- e este un termen (potențial cu variabile libere)
- Γ este **mediul de tipuri**, o funcție parțială finită care asociază tipuri variabilelor (libere ale lui e)
- Variabilele de tip sunt folosite pentru a indica polimorfismul

Cum citim $\Gamma \vdash e : \tau$?

Dacă variabila x are tipul $\Gamma(x)$ pentru orice $x \in \text{dom}(\Gamma)$, atunci termenul e are tipul τ .

Axiome

(:VAR) $\Gamma \vdash x : \tau$ *dacă* $\Gamma(x) = \tau$

(:INT) $\Gamma \vdash n : int$ *dacă* n întreg

(:BOOL) $\Gamma \vdash b : bool$ *dacă* $b = true$ or $b = false$

Expresii

$$(:\text{IOP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \text{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 \text{ o } e_2 : \text{int}} \quad \text{dacă } o \in \{+, -, *, /\}$$

$$(:\text{COP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \text{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 \text{ o } e_2 : \text{bool}} \quad \text{dacă } o \in \{\leq, \geq, <, >, =\}$$

$$(:\text{BOP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \text{bool} \quad \Gamma \vdash e_2 : \text{bool}}{\Gamma \vdash e_1 \text{ o } e_2 : \text{bool}} \quad \text{dacă } o \in \{\mathbf{and}, \mathbf{or}\}$$

$$(:\text{IF}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_b : \text{bool} \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{if } e_b \mathbf{ then } e_1 \mathbf{ else } e_2 : \tau}$$

Fragmentul funcțional

$$(\text{:FN}) \quad \frac{\Gamma' \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x. e : \tau \rightarrow \tau'} \quad \text{dacă } \Gamma' = \Gamma[x \mapsto \tau]$$

$$(\text{:APP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1 e_2 : \tau}$$

Programe în execuție

Problemă:

- În timpul execuției programul conține valori de tip closure
- Care este tipul lor?

Soluție

- Adăugăm regula ($_{:CL}$)
$$\frac{\Gamma_\rho \vdash \lambda x.e : \tau}{\Gamma \vdash closure(x, e, \rho) : \tau} \quad unde$$
- Mediul de tipuri Γ_ρ asociat unui mediu de execuție ρ satisface:
 - $Dom(\Gamma_\rho) = Dom(\rho)$
 - Pentru orice variabilă $x \in Dom(\rho)$, există τ tip și v valoare astfel încât $\Gamma_\rho(x) = \tau, \rho(x) = v$ și $\vdash v : \tau$

Proprietăți

Theorem (Proprietatea de a progresa)

Dacă $\Gamma_\rho \vdash e : \tau$ atunci e este valoare sau e poate progresa în ρ : există e' astfel încât $\rho \vdash e \rightarrow e'$.

Theorem (Proprietatea de conservare a tipului)

Dacă $\Gamma_\rho \vdash e : \tau$ și $\rho \vdash e \rightarrow e'$, atunci $\Gamma'_\rho \vdash e' : \tau$.

Theorem (Siguranță—programele bine formate nu se împotmolesc)

Dacă $\Gamma_\rho \vdash e : \tau$ și $\rho \vdash e \longrightarrow^ e'$, atunci e' este valoare sau există e'' , astfel încât $\rho \vdash e' \rightarrow e''$.*

Probleme computaționale

Verificarea tipului

Date fiind Γ , e și τ , verificați dacă $\Gamma \vdash e : \tau$.

Determinarea (inferarea) tipului

Date fiind Γ și e , găsiți (sau arătați ce nu există) un τ astfel încât $\Gamma \vdash e : \tau$.

- A doua problemă e mai grea în general decât prima
- Algoritmi de inferare a tipurilor
 - Colectează constrângeri asupra tipului
 - Folosesc metode de rezolvare a constrângerilor (programare logică)

Probleme computaționale

Theorem (Determinarea tipului este decidabilă)

Date fiind Γ și e , poate fi găsit (sau demonstrat că nu există) un τ astfel încât $\Gamma \vdash e : \tau$.

Theorem (Verificarea tipului este decidabilă)

Date fiind Γ , e și τ , problema $\Gamma \vdash e : \tau$ este decidabilă.

Theorem (Unicitatea tipului)

Dacă $\Gamma \vdash e : \tau$ și $\Gamma \vdash e : \tau'$, atunci $\tau = \tau'$.

Exemplu

Care este tipul expresiei următoare (dacă are)

$\lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y$

Aplicăm regula

(:FN) $\frac{\Gamma' \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x. e : \tau \rightarrow \tau'} \quad \text{dacă } \Gamma' = \Gamma[x \mapsto \tau]$

$\vdash \lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_x \rightarrow t$ dacă
 $x \mapsto t_x \vdash \lambda y. \lambda z. \text{if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t$

Exemplu

Care este tipul expresiei următoare (dacă are)

$\lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{ if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y$

Aplicăm regula

(:FN) $\frac{\Gamma' \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x. e : \tau \rightarrow \tau'} \quad \text{dacă } \Gamma' = \Gamma[x \mapsto \tau]$

$\vdash \lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{ if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_x \rightarrow t$ dacă

$x \mapsto t_x \vdash \lambda y. \lambda z. \text{ if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t$

Mai departe: $x \mapsto t_x \vdash \lambda y. \lambda z. \text{ if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_y \rightarrow t_0$ dacă

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y \vdash \lambda z. \text{ if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_0$ și, de mai sus,
 $t = t_y \rightarrow t_0$

Exemplu

Care este tipul expresiei următoare (dacă are)

$\lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{ if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y$

Aplicăm regula

(:FN) $\frac{\Gamma' \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x. e : \tau \rightarrow \tau'} \quad \text{dacă } \Gamma' = \Gamma[x \mapsto \tau]$

$\vdash \lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{ if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_x \rightarrow t$ dacă

$x \mapsto t_x \vdash \lambda y. \lambda z. \text{ if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t$

Mai departe: $x \mapsto t_x \vdash \lambda y. \lambda z. \text{ if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_y \rightarrow t_0$ dacă

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y \vdash \lambda z. \text{ if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_0$ și, de mai sus,
 $t = t_y \rightarrow t_0$

Mai departe: $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y \vdash \lambda z. \text{ if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_z \rightarrow t_1$

dacă $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash \text{ if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_1$ și, de mai sus,
 $t_0 = t_z \rightarrow t_1$

Exemplu

Unde suntem

$\vdash \lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_x \rightarrow t$ dacă
 $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash \text{if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_1$ și $t_0 = t_z \rightarrow t_1$,
 $t = t_y \rightarrow t_0$.

Aplicăm regula (if)
$$\frac{\Gamma \vdash e_b : \text{bool} \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \text{if } e_b \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 : \tau}$$

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash \text{if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_1$ dacă
 $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y = 0 : \text{bool}$ și $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash z : t_1$ și
 $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash x/y : t_1$

Exemplu

Aplicăm regula

$$(\text{:COP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \text{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 \text{ o } e_2 : \text{bool}} \quad \text{dacă } o \in \{\leq, \geq, <, >, =\}$$

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y = 0 : \text{bool}$ dacă

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y : \text{int}$ și $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash 0 : \text{int}$

Aplicăm regula $(\text{:INT}) \quad \Gamma \vdash n : \text{int}$ dacă n întreg

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash 0 : \text{int}$ este adevărat

Aplicăm regula

$$(\text{:IOP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \text{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 \text{ o } e_2 : \text{int}} \quad \text{dacă } o \in \{+, -, *, /\}$$

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash x/y : \text{int}$ dacă

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash x : \text{int}$ și $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y : \text{int}$

și, de mai sus, $t_1 = \text{int}$

Exemplu

Recapitulăm

$\vdash \lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_x \rightarrow t$ dacă

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y : \text{int}$ și $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash z : t_1$
 $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash x : \text{int}$ și $x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y : \text{int}$
și $t_0 = t_z \rightarrow t_1, t = t_y \rightarrow t_0, t_1 = \text{int}$.

Aplicăm regula (:VAR) $\Gamma \vdash x : \tau$ dacă $\Gamma(x) = \tau$

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash y : t_y$ adevărat și, de mai sus $t_y = \text{int}$

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash z : t_z$ adevărat și, de mai sus, $t_1 = t_z$

$x \mapsto t_x, y \mapsto t_y, z \mapsto t_z \vdash x : t_x$ adevărat și, de mai sus, $t_x = \text{int}$

Exemplu

Finalizăm

$\vdash \lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : t_x \rightarrow t$ dacă
 $t_0 = t_z \rightarrow t_1, t = t_y \rightarrow t_0, t_1 = \text{int}, t_y = \text{int}, t_1 = t_z$ și $t_x = \text{int}$.

Rezolvăm constrângerile și obținem

$\vdash \lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{if } y = 0 \text{ then } z \text{ else } x/y : \text{int} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int}$

Relația de asociere de tipuri în Prolog

Definim (recursiv) o relație de forma `type(Gamma, E, T)`, unde

- `Gamma` este o listă de perechi de forma `(X, T)` unde `X` este un identificator și `T` este o expresie de tip cu variabile
- `E` este o λ -expresie scrisă cu sintaxa descrisă mai sus
- `T` este o expresie de tip cu variabile

Sintaxa limbajului LAMBDA

BNF

```
e ::= x | n | true | false
    | e + e | e < e | not (e)
    | if e then e else e
    | λx.e | e e
    | let x = e in e
```

Verificarea sintaxei în Prolog

```
exp(Id) :- atom(Id).                % identifier
exp(Lit) :- Lit = true ; Lit = false ; integer(Lit).
exp(E1 + E2) :- exp(E1), exp(E2).   % same for any op
exp(if(E1, E2, E3)) :- exp(E1), exp(E2), exp(E3).
exp(Id -> Exp) :- atom(Id), exp(Exp). % lambda
exp(Exp1 $ Exp2) :- exp(Exp1), exp(Exp2). % application
exp(let(Id, Exp1, Exp2)) :- atom(Id), exp(Exp1), exp(Exp2).
```

Sintaxa tipurilor

BNF

```
 $\tau ::= \text{int}$  [întregi]  
      |  $\text{bool}$  [valori de adevăr]  
      |  $\tau \rightarrow \tau$  [funcții]  
      |  $a$  [variabile de tip]
```

Verificarea sintaxei tipurilor în Prolog

```
is_type(X) :- variable(X).      % variabile  
is_type(int).                  % întregi  
is_type(bool).                 % valori de adevăr  
is_type(T1 -> T2) :-           % funcții  
    is_type(T1), is_type(T2).
```

Axiome

(:VAR) $\Gamma \vdash x : \tau$ *dacă* $\Gamma(x) = \tau$
type(Gamma, X, T) :- **atom**(X), get(Gamma, X, T).

(:INT) $\Gamma \vdash n : int$ *dacă* n întreg
type(_, I, int) :- **integer**(I).

(:BOOL) $\Gamma \vdash b : bool$ *dacă* $b = true$ or $b = false$
type(_, **true**, bool).
type(_, **false**, bool).

Expresii

$$(\text{:IOP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \text{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 \ o \ e_2 : \text{int}} \quad \text{dacă } o \in \{+, -, *, /\}$$

type (Gamma, E1 + E2, int) :-
 type (Gamma, E1, int), type (Gamma, E2, int).

$$(\text{:COP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \text{int} \quad \Gamma \vdash e_2 : \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 \ o \ e_2 : \text{bool}} \quad \text{dacă } o \in \{\leq, \geq, <, >, =\}$$

type (Gamma, E1 < E2, bool) :-
 type (Gamma, E1, int), type (Gamma, E2, int).

$$(\text{:BOP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \text{bool} \quad \Gamma \vdash e_2 : \text{bool}}{\Gamma \vdash e_1 \ o \ e_2 : \text{bool}} \quad \text{dacă } o \in \{\mathbf{and}, \mathbf{or}\}$$

type (Gamma, and (E1, E2), bool) :-
 type (Gamma, E1, bool), type (Gamma, E2, bool).

Expresia condițională

$$(\text{::IF}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_b : \text{bool} \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \text{if } e_b \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 : \tau}$$

```
type (Gamma, if (E, E1, E2), T) :-  
  type (Gamma, E, bool),  
  type (Gamma, E1, T),  
  type (Gamma, E2, T).
```

Fragmentul funcțional

$$(:\text{FN}) \quad \frac{\Gamma' \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x. e : \tau \rightarrow \tau'} \quad \text{dacă } \Gamma' = \Gamma[x \mapsto \tau]$$

`type (Gamma, X -> E, TX -> TE) :-`

`atom(X), set(Gamma, X, TX, GammaX), type(GammaX, E, TE).`

$$(:\text{APP}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1 e_2 : \tau}$$

`type (Gamma, E1 $ E2, T) :-`

`type (Gamma, E, TE2 -> T), type (Gamma, E2, TE2).`

Tipurile variabile nu sunt suficiente

Tipurile variabile sunt destul de flexibile

- $\vdash \lambda x.x : t \rightarrow t$ pentru orice t
- $\vdash \text{if } (\lambda x.x) \text{ true then } (\lambda x.x) \text{ 3 else 4 :int}$

Tipurile variabile nu sunt suficiente

Tipurile variabile sunt destul de flexibile

- $\vdash \lambda x.x : t \rightarrow t$ pentru orice t
- $\vdash \text{if } (\lambda x.x) \text{ true then } (\lambda x.x) \text{ 3 else 4 :int}$

Dar tipul unei expresii este fixat:

$\nvdash (\lambda id.\text{if } id \text{ true then } id \text{ 3 else 4})(\lambda x.x) : \text{int}$

Tipurile variabile nu sunt suficiente

Tipurile variabile sunt destul de flexibile

- $\vdash \lambda x.x : t \rightarrow t$ pentru orice t
- $\vdash \mathbf{if} (\lambda x.x) \mathbf{true} \mathbf{then} (\lambda x.x) \mathbf{3} \mathbf{else} \mathbf{4} : \mathbf{int}$

Dar tipul unei expresii este fixat:

$\nvdash (\lambda id.\mathbf{if} \ id \ \mathbf{true} \ \mathbf{then} \ id \ \mathbf{3} \ \mathbf{else} \ 4)(\lambda x.x) : \mathbf{int}$

Soluție

Pentru funcțiile cu nume, am vrea să fie ca și cum am calcula mereu tipul

$\vdash \mathbf{let} \ id = (\lambda x.x) \ \mathbf{in} \ \mathbf{if} \ id \ \mathbf{true} \ \mathbf{then} \ id \ \mathbf{3} \ \mathbf{else} \ 4 : \mathbf{int}$

Operațional: redenumim variabilele de tip când instanțiem numele funcției

Scheme de tipuri

- Numim schemă de tipuri o expresie de forma $\langle \tau \rangle$, unde τ este o expresie tip cu variabile
- variabilele dintr-o schemă nu pot fi constrânse
e ca și cum ar fi cuantificate universal
- O schemă poate fi concretizată la un tip obișnuit substituindu-i fiecare variabilă cu orice tip (poate fi și variabilă)
 - Pentru orice substituție θ de la variabile de tip la tipuri cu variabile

Reguli pentru scheme

$$(\text{:LET}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma_1 \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{let} \ x = e_1 \ \mathbf{in} \ e_2 : \tau} \quad \text{dacă } \Gamma_1 = \Gamma[\langle \tau_1 \rangle / x]$$

Reguli pentru scheme

$$(\text{:LET}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma_1 \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \text{let } x = e_1 \text{ in } e_2 : \tau} \quad \text{dacă } \Gamma_1 = \Gamma[\langle \tau_1 \rangle / x]$$

```
type(Gamma, let(X, E1, E2), T) :-  
    type(Gamma, E1, T1),  
    copy_term(T1, FreshT1),    % redenumeste variabilele  
                                % ca sa nu poata fi constranse  
    set(Gamma, X, scheme(FreshT1), GammaX),  
    type(GammaX, E2, T).
```


Reguli pentru scheme

$$(\text{:LET}) \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma_1 \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{let} \ x = e_1 \ \mathbf{in} \ e_2 : \tau} \quad \text{dacă } \Gamma_1 = \Gamma[\langle \tau_1 \rangle / x]$$

```
type(Gamma, let(X, E1, E2), T) :-  
    type(Gamma, E1, T1),  
    copy_term(T1, FreshT1),      % redenumeste variabilele  
                                % ca sa nu poata fi constranse  
    set(Gamma, X, scheme(FreshT1), GammaX),  
    type(GammaX, E2, T).
```

$$(\text{:SCH}) \quad \Gamma \vdash X : \tau' \quad \text{dacă } \Gamma(x) = \langle \tau \rangle \text{ și } \tau' = \theta(\tau)$$

```
type(Gamma, X, T) :-  
    atom(X), get(Gamma, X, T), is_type(T), !.  
type(Gamma, X, T) :-  
    atom(X), get(Gamma, X, scheme(TX)),  
    copy_term(T1, T).           % redenumeste variabilele  
                                % ca sa poata fi constranse
```



Pe săptămâna viitoare!

Curs 11

Cuprins

- 1 Logica propozițională (recap.)
- 2 Logica de ordinul I (recap.)
- 3 Algoritmul de unificare
- 4 Formă clauzală. Rezoluție
 - Rezoluția în logica propozițională
- 5 Logica Horn
- 6 Rezoluția SLD

Logica propozițională (recap.)

Limbajul și formulele PL

□ Limbajul PL

- variabile propoziționale: $Var = \{p, q, v, \dots\}$
- conectori logici: \neg (unar), \rightarrow , \wedge , \vee , \leftrightarrow (binari)

□ Formulele PL

$$\begin{aligned} var &::= p \mid q \mid v \mid \dots \\ form &::= var \mid (\neg form) \mid form \wedge form \mid form \vee form \\ &\quad \mid form \rightarrow form \mid form \leftrightarrow form \end{aligned}$$

- Conectorii sunt împărțiți în conectori **de bază** și conectori **derivați** (în funcție de formalism).
- Legături între conectori:

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &::= \neg \varphi \rightarrow \psi \\ \varphi \wedge \psi &::= \neg(\varphi \rightarrow \neg \psi) \\ \varphi \leftrightarrow \psi &::= (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

Sintaxa și semantica

Un sistem logic are două componente:

□ Sintaxa

- noțiuni sintactice: **demonstrație**, **teoremă**
- notăm prin $\vdash \varphi$ faptul că φ este teoremă
- notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că formula φ este demonstrabilă din mulțimea de formule Γ

□ Semantica

- noțiuni semantice: **adevăr**, **model**, **tautologie** (formulă universal adevărată)
- notăm prin $\models \varphi$ faptul că φ este tautologie
- notăm prin $\Gamma \models \varphi$ faptul că formula φ este adevărată atunci când toate formulele din mulțimea Γ sunt adevărate

Completitudine: Γ -teoremele și Γ -tautologiile coincid

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \models \varphi$$

Logica propozițională

Exemplu

Formalizați următorul raționament:

If winter is coming and Ned is not alive then Robb is lord of Winterfell. Winter is coming. Rob is not lord of Winterfell. Then Ned is alive.

O posibilă formalizare este următoarea:

p = winter is coming

q = Ned is alive

r = Robb is lord of Winterfel

$\{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, p, \neg r\} \models q$

Logica de ordinul I (recap.)

Logica de ordinul I - sintaxa

Limbaj de ordinul I \mathcal{L}

- unic determinat de $\tau = (\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C}, \text{ari})$

Termenii lui \mathcal{L} , notați $\text{Trm}_{\mathcal{L}}$, sunt definiți inductiv astfel:

- orice variabilă este un termen;
- orice simbol de constantă este un termen;
- dacă $f \in \mathbf{F}$, $\text{ar}(f) = n$ și t_1, \dots, t_n sunt termeni, atunci $f(t_1, \dots, t_n)$ este termen.

Formulele atomice ale lui \mathcal{L} sunt definite astfel:

- dacă $R \in \mathbf{R}$, $\text{ar}(R) = n$ și t_1, \dots, t_n sunt termeni, atunci $R(t_1, \dots, t_n)$ este formulă atomică.

Formulele lui \mathcal{L} sunt definite astfel:

- orice formulă atomică este o formulă
- dacă φ este o formulă, atunci $\neg\varphi$ este o formulă
- dacă φ și ψ sunt formule, atunci $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ sunt formule
- dacă φ este o formulă și x este o variabilă, atunci $\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$ sunt formule

Logica de ordinul I - semantică

O **structură** este de forma $\mathcal{A} = (A, \mathbf{F}^{\mathcal{A}}, \mathbf{R}^{\mathcal{A}}, \mathbf{C}^{\mathcal{A}})$, unde

- A este o mulțime nevidă
- $\mathbf{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathbf{F}\}$ este o mulțime de operații pe A ; dacă f are aritatea n , atunci $f^{\mathcal{A}} : A^n \rightarrow A$.
- $\mathbf{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathbf{R}\}$ este o mulțime de relații pe A ; dacă R are aritatea n , atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$.
- $\mathbf{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathbf{C}\}$.

O **interpretare a variabilelor** lui \mathcal{L} în \mathcal{A} (**\mathcal{A} -interpretare**) este o funcție $I : V \rightarrow A$.

Inductiv, definim **interpretarea termenului** t în \mathcal{A} sub I notat $t_I^{\mathcal{A}}$.

Inductiv, definim când o **formulă este adevărată în \mathcal{A} în interpretarea I** notat $\mathcal{A}, I \models \varphi$.

În acest caz spunem că (\mathcal{A}, I) este **model** pentru φ .

O formulă φ este **adevărată într-o structură \mathcal{A}** , notat $\mathcal{A} \models \varphi$, dacă este adevărată în \mathcal{A} sub orice interpretare. Spunem că \mathcal{A} este **model** al lui φ .

O formulă φ este **adevărată în logica de ordinul I**, notat $\models \varphi$, dacă este adevărată în orice structură. O formulă φ este **validă** dacă $\models \varphi$.

O formulă φ este **satisfiabilă** dacă există o structură \mathcal{A} și o \mathcal{A} -interpretare I astfel încât $\mathcal{A}, I \models \varphi$.

Algoritmul de unificare

Unificare

- O **substituție** σ este o funcție (parțială) de la variabile la termeni,

$$\sigma : V \rightarrow Trm_{\mathcal{L}}$$

- Doi termeni t_1 și t_2 **se unifică** dacă există o substituție θ astfel încât

$$\theta(t_1) = \theta(t_2).$$

- În acest caz, θ se numește **unificatorul** termenilor t_1 și t_2 .

- Un unificator ν pentru t_1 și t_2 este un **cel mai general unificator** (**cgu, mgu**) dacă pentru orice alt unificator ν' pentru t_1 și t_2 , există o substituție μ astfel încât

$$\nu' = \nu; \mu.$$

Algoritmul de unificare

- Pentru o mulțime finită de termeni $\{t_1, \dots, t_n\}$, $n \geq 2$, algoritmul de unificare stabilește dacă există un cgu.
- Algoritmul lucrează cu două liste:
 - Lista soluție: S
 - Lista de rezolvat: R
- Inițial:
 - Lista soluție: $S = \emptyset$
 - Lista de rezolvat: $R = \{t_1 \dot{=} t_2, \dots, t_{n-1} \dot{=} t_n\}$
- $\dot{=}$ este un simbol nou care ne ajută să formăm perechi de termeni (ecuații).

Algoritmul de unificare

Algoritmul constă în aplicarea regulilor de mai jos:

□ SCOATE

- orice ecuație de forma $t \doteq t$ din R este eliminată.

□ DESCOMPUNE

- orice ecuație de forma $f(t_1, \dots, t_n) \doteq f(t'_1, \dots, t'_n)$ din R este înlocuită cu ecuațiile $t_1 \doteq t'_1, \dots, t_n \doteq t'_n$.

□ REZOLVĂ

- orice ecuație de forma $x \doteq t$ sau $t \doteq x$ din R , unde variabila x nu apare în termenul t , este mutată sub forma $x \doteq t$ în S .
În toate celelalte ecuații (din R și S), x este înlocuit cu t .

Algoritmul de unificare

Algoritmul se termină normal dacă $R = \emptyset$. În acest caz, S dă cgu.

Algoritmul este oprit cu concluzia inexistenței unui cgu dacă:

1 În R există o ecuație de forma

$$f(t_1, \dots, t_n) \doteq g(t'_1, \dots, t'_k) \text{ cu } f \neq g.$$

2 În R există o ecuație de forma $x \doteq t$ sau $t \doteq x$ și variabila x apare în termenul t .

Algoritmul de unificare - schemă

	Lista soluție S	Lista de rezolvat R
Inițial	\emptyset	$t_1 \doteq t'_1, \dots, t_n \doteq t'_n$
SCOATE	S	$R', t \doteq t$
	S	R'
DESCOMPUNE	S	$R', f(t_1, \dots, t_n) \doteq f(t'_1, \dots, t'_n)$
	S	$R', t_1 \doteq t'_1, \dots, t_n \doteq t'_n$
REZOLVĂ	S	$R', x \doteq t$ sau $t \doteq x$, x nu apare în t
	$x \doteq t, S[x/t]$	$R'[x/t]$
Final	S	\emptyset

$S[x/t]$: în toate ecuațiile din S , x este înlocuit cu t

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)\}$ au gcu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(g(z), w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z), h(g(y)) \doteq w, y \doteq z$	REZOLVĂ
$w \doteq h(g(y)),$ $x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z), y \doteq z$	REZOLVĂ
$y \doteq z, x \doteq g(z),$ $w \doteq h(g(z))$	$g(z) \doteq g(z)$	SCOATE
$y \doteq z, x \doteq g(z),$ $w \doteq h(g(z))$	\emptyset	

□ $\nu = \{y/z, x/g(z), w/h(g(z))\}$ este cgu.

Exemplu

Exemplu

- Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)\}$ au gcu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z), h(y) \doteq b, y \doteq z$	- EȘEC -

- h și b sunt simboluri de operații diferite!
- Nu există unificator pentru ecuațiile din U .

Exemplu

Exemplu

- Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(y, w, z)\}$ au gcu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(y, w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(y, w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq y, h(g(y)) \doteq w, y \doteq z$	- EȘEC -

- În ecuația $g(y) \doteq y$, variabila y apare în termenul $g(y)$.
- Nu există unificator pentru ecuațiile din U .

Validitate și satisfiabilitate

Propoziție

Dacă φ este o formulă atunci

φ este validă dacă și numai dacă $\neg\varphi$ nu este satisfiabilă.

Formă clauzală. Rezoluție

Literali. FNC

- În logica propozițională un literal este o variabilă sau negația unei variabile.

$$\text{literal} := p \mid \neg p \quad \text{unde } p \text{ este variabilă propozițională}$$

- În logica de ordinul I un literal este o formulă atomică sau negația unei formule atomice.

$$\text{literal} := P(t_1, \dots, t_n) \mid \neg P(t_1, \dots, t_n)$$

unde $P \in \mathbf{R}$, $\text{ari}(P) = n$, și t_1, \dots, t_n sunt termeni.

- Pentru un literal L vom nota cu L^c literalul complement.

O formulă este în formă normală conjunctivă (FNC) dacă este o conjuncție de disjuncții de literali.

Forma clauzală în logica propozițională

- Pentru orice formulă α există o FNC α^{fc} astfel încât $\alpha \models \alpha^{fc}$.
- Pentru o formulă din logica propozițională determinăm FNC corespunzătoare prin următoarele transformări:

1 înlocuirea implicațiilor și echivalențelor

$$\varphi \rightarrow \psi \quad \models \quad \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad \models \quad (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$$

2 regulile De Morgan

$$\neg(\varphi \vee \psi) \quad \models \quad \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \quad \models \quad \neg\varphi \vee \neg\psi$$

3 principiului dublei negații

$$\neg\neg\psi \quad \models \quad \psi$$

4 distributivitatea

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \quad \models \quad (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

$$(\psi \wedge \chi) \vee \varphi \quad \models \quad (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi)$$

Forma clauzală în logica de ordinul I

- O formulă este **formă normală conjunctivă prenex (FNCP)** dacă
 - este în formă prenex $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$ ($Q_i \in \{\forall, \exists\}$ oricare i)
 - ψ este **FNC**
- O formulă este **formă clauzală** dacă este **enunț universal** și **FNCP**:
 $\forall x_1 \dots \forall x_n\psi$ unde ψ este **FNC**
- Pentru orice formulă φ din logica de ordinul I există o formă clauzală φ^{fc} astfel încât
 φ este satisfiabilă dacă și numai dacă φ^{fc} este satisfiabilă
- Pentru o formulă φ , **forma clauzală** φ^{fc} se poate calcula astfel:
 - 1 se determină forma rectificată
 - 2 se cuantifică universal variabilele libere
 - 3 se determină forma prenex
 - 4 se determină forma Skolem

în acest moment am obținut o formă Skolem $\forall x_1 \dots \forall x_n\psi$

 - 5 se determină o FNC ψ' astfel încât $\psi \models \psi'$
 - 6 φ^{fc} este $\forall x_1 \dots \forall x_n\psi'$

Clauze

- O clauză este o disjuncție de literali.
- Dacă L_1, \dots, L_n sunt literali atunci clauza $L_1 \vee \dots \vee L_n$ o vom scrie ca mulțimea $\{L_1, \dots, L_n\}$
clauză = mulțime de literali
- Clauza $C = \{L_1, \dots, L_n\}$ este satisfiabilă dacă $L_1 \vee \dots \vee L_n$ este satisfiabilă.
- O clauză C este trivială dacă conține un literal și complementul lui.
- Când $n = 0$ obținem clauza vidă, care se notează \square
- Prin definiție, clauza \square nu este satisfiabilă.

Forma clauzală

- Observăm că o FNC este o conjuncție de clauze.
- Dacă C_1, \dots, C_k sunt clauze atunci $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$ o vom scrie ca mulțimea $\{C_1, \dots, C_k\}$
FNC = mulțime de clauze
- O mulțime de clauze $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ este satisfiabilă dacă $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$ este satisfiabilă
- Când $k = 0$ obținem mulțimea de clauze vidă, pe care o notăm $\{\}$
- Prin definiție, mulțimea de clauze vidă $\{\}$ este satisfiabilă.

$\{\}$ este satisfiabilă, dar $\{\square\}$ nu este satisfiabilă

Forma clauzală

- Dacă φ este o formulă în **calculul propozițional**, atunci

$$\varphi^{fc} = \bigwedge_{i=1}^k \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij} \text{ unde } L_{ij} \text{ sunt literali}$$

- Dacă φ o formulă în **logica de ordinul I**, atunci

$$\varphi^{fc} = \forall x_1 \dots \forall x_n \left(\bigwedge_{i=1}^k \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij} \right) \text{ unde } L_{ij} \text{ sunt literali}$$

φ este **satisfiabilă** dacă și numai dacă

φ^{fc} este satisfiabilă dacă și numai dacă

$\{\{L_{11}, \dots, L_{1n_1}\}, \dots, \{L_{k1}, \dots, L_{kn_k}\}\}$ este satisfiabilă

Rezoluția în logica propozițională

Regula rezoluției

$$\text{Rez} \quad \frac{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde C_1, C_2 clauze, iar p este variabila propozițională astfel încât $\{p, \neg p\} \cap C_1 = \emptyset$ și $\{p, \neg p\} \cap C_2 = \emptyset$.

Fie \mathcal{C} o mulțime de clauze. O **derivare prin rezoluție** din \mathcal{C} este o secvență finită de clauze astfel încât fiecare clauză este din \mathcal{C} sau rezultă din clauzele anterioare prin rezoluție (este **rezolvent**).

Derivare prin rezoluție

Fie \mathcal{C} o mulțime de clauze. O **derivare prin rezoluție** din \mathcal{C} este o secvență finită de clauze astfel încât fiecare clauză este din \mathcal{C} sau rezultă din clauzele anterioare prin rezoluție (este **rezolvent**).

Exemplu

Fie $\mathcal{C} = \{\{\neg q, \neg p\}, \{q\}, \{p\}\}$ o mulțime de clauze. O derivare prin rezoluție pentru \square din \mathcal{C} este

$$C_1 = \{\neg q, \neg p\}$$

$$C_2 = \{q\}$$

$$C_3 = \{\neg p\} \quad (\text{Rez}, C_1, C_2)$$

$$C_4 = \{p\}$$

$$C_5 = \square \quad (\text{Rez}, C_3, C_4)$$

Teorema de completitudine

$\models \varphi$ dacă și numai dacă există o derivare prin rezoluție a lui \square din $(\neg \varphi)^{fc}$.

Procedura Davis-Putnam DPP (informal)

Intrare: o mulțime \mathcal{C} de clauze

Se repetă următorii pași:

- se elimină clauzele triviale
- se alege o variabilă p
- se adaugă la mulțimea de clauze toți rezolvenții obținuți prin aplicarea *Rez* pe variabila p
- se șterg toate clauzele care conțin p sau $\neg p$

Ieșire: dacă la un pas s-a obținut □, mulțimea \mathcal{C} nu este satisfiabilă; altfel \mathcal{C} este satisfiabilă.

Logica Horn

Clauze definite. Programe logice. Clauze Horn

□ clauză:

$$\{\neg Q_1, \dots, \neg Q_n, P_1, \dots, P_k\} \quad \text{sau} \quad Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n \rightarrow P_1 \vee \dots \vee P_k$$

unde $n, k \geq 0$ și $Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_k$ sunt formule atomice.

□ clauză program definită: $k = 1$

□ cazul $n > 0$: $Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n \rightarrow P$

□ cazul $n = 0$: $\top \rightarrow P$ (clauză unitate, fapt)

Program logic definit = mulțime finită de clauze definite

□ scop definit (țintă, întrebare): $k=0$

□ $Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n \rightarrow \perp$

□ clauza vidă □: $n = k = 0$

Clauza Horn = clauză program definită sau clauză scop ($k \leq 1$)

Programare logica

- Logica clauzelor definite/Logica Horn: un fragment al logicii de ordinul I în care singurele formule admise sunt clauze Horn
 - formule atomice: $P(t_1, \dots, t_n)$
 - $Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n \rightarrow P$
unde toate Q_i, P sunt formule atomice, \top sau \perp
- Problema programării logice: reprezentăm cunoștințele ca o mulțime de clauze definite KB și suntem interesați să aflăm răspunsul la o întrebare de forma $Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n$, unde toate Q_i sunt formule atomice
$$KB \models Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n$$
 - Variabilele din KB sunt cuantificate universal.
 - Variabilele din Q_1, \dots, Q_n sunt cuantificate existențial.

Limbajul PROLOG are la bază logica clauzelor Horn.

Sistem de deducție *backchain*

Sistem de deducție pentru clauze Horn

Pentru un program logic definit KB avem

- **Axiome:** orice clauză din KB
- **Regula de deducție:** regula *backchain*

$$\frac{\theta(Q_1) \quad \theta(Q_2) \quad \dots \quad \theta(Q_n) \quad (Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n \rightarrow P)}{\theta(Q)}$$

unde $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n \rightarrow P \in KB$, iar θ este cgu pentru Q și P .

Sistem de deducție

$$\frac{\theta(Q_1) \quad \theta(Q_2) \quad \dots \quad \theta(Q_n) \quad (Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n \rightarrow P)}{\theta(Q)}$$

unde $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n \rightarrow P \in KB$, iar θ este cgu pentru Q și P .

Exemplu

KB conține următoarele clauze definite:

father(jon, ken). father(ken, liz).

father(X, Y) → ancestor(X, Y)

daughter(X, Y) → ancestor(Y, X)

ancestor(X, Y) ∧ ancestor(Y, Z) → ancestor(X, Z)

atunci

$$\frac{\text{father(ken, liz)}}{\text{father(ken, Z)}} \quad \frac{\text{father(Y, X) → ancestor(Y, X)}}{\text{ancestor(ken, Z)}}$$

Rezoluția SLD

Rezoluția SLD

Fie T o mulțime de clauze definite.

$$\text{SLD} \quad \boxed{\frac{\neg Q_1 \vee \dots \vee \neg Q_i \vee \dots \vee \neg Q_n}{\theta(\neg Q_1 \vee \dots \vee \neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_m \vee \dots \vee \neg Q_n)}}$$

unde

- $Q \vee \neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_m$ este o clauză definită din KB (în care toate variabilele au fost redenumite) și
- variabilele din $Q \vee \neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_m$ și Q_i se redenumesc
- θ este c.g.u pentru Q_i și Q

Rezoluția SLD

Fie KB o mulțime de clauze definite și $Q_1 \wedge \dots \wedge Q_m$ o întrebare, unde Q_i sunt formule atomice.

- O **derivare** din KB prin rezoluție SLD este o secvență

$$G_0 := \neg Q_1 \vee \dots \vee \neg Q_m, \quad G_1, \quad \dots, \quad G_k, \dots$$

în care G_{i+1} se obține din G_i prin regula **SLD**.

- Dacă există un k cu $G_k = \square$ (clauza vidă), atunci derivarea se numește **SLD-respingere**.

Rezoluția SLD

Exercițiu

Găsiți o SLD-respingere pentru următorul program Prolog și ținta:

1. $p(X) :- q(X, f(Y)), r(a). \quad ?- p(X), q(Y, Z).$
2. $p(X) :- r(X).$
3. $q(X, Y) :- p(Y).$
4. $r(X) :- q(X, Y).$
5. $r(f(b)).$

Soluție

$G_0 = \neg p(X) \vee \neg q(Y, Z)$	
$G_1 = \neg r(X_1) \vee \neg q(Y, Z)$	(2 cu $\theta(X) = X_1$)
$G_2 = \neg q(Y, Z)$	(5 cu $\theta(X_1) = f(b)$)
$G_3 = \neg p(Z_1)$	(3 cu $\theta(X) = Y_1$ și $\theta(Y) = Z_1$)
$G_4 = \neg r(X)$	(2 cu $\theta(Z_1) = X$)
$G_5 = \square$	(5 cu $\theta(X) = f(b)$)

Rezoluția SLD - arbori de căutare

Arbori SLD

- Presupunem că avem o mulțime de clauze definite KB și o țintă $G_0 = \neg Q_1 \vee \dots \vee \neg Q_m$
- Construim un arbore de căutare (**arbore SLD**) astfel:
 - Fiecare nod al arborelui este o țintă (posibil vidă)
 - Rădăcina este G_0
 - Dacă arborele are un nod G_i , iar G_{i+1} se obține din G_i folosind regula SLD folosind o clauză $C_i \in KB$, atunci nodul G_i are copilul G_{i+1} . Muchia dintre G_i și G_{i+1} este etichetată cu C_i .
- Dacă un arbore SLD cu rădăcina G_0 are o frunză \square (clauza vidă), atunci există o SLD-respingere a lui G_0 din KB .

Rezoluția SLD - arbore de căutare complet

Exercițiu

Desenați arborele SLD pentru programul Prolog de mai jos și ținta
?- p(X,X).

- | | |
|--------------------------------|----------------------|
| 1. $p(X,Y) :- q(X,Z), r(Z,Y).$ | 7. $s(X) :- t(X,a).$ |
| 2. $p(X,X) :- s(X).$ | 8. $s(X) :- t(X,b).$ |
| 3. $q(X,b).$ | 9. $s(X) :- t(X,X).$ |
| 4. $q(b,a).$ | 10. $t(a,b).$ |
| 5. $q(X,a) :- r(a,X).$ | 11. $t(b,a).$ |
| 6. $r(b,a).$ | |

Rezoluția SLD - arbore SLD complet

1. $p(X, Y) :- q(X, Z), r(Z, Y).$

2. $p(X, X) :- s(X).$

3. $q(X, b).$

4. $q(b, a).$

5. $q(X, a) :- r(a, X).$

6. $r(b, a).$

7. $s(X) :- t(X, a).$

8. $s(X) :- t(X, b).$

9. $s(X) :- t(X, X).$

10. $t(a, b).$

11. $t(b, a).$

$p(X, Y) \vee \neg q(X, Z) \vee \neg r(Z, Y)$

$p(X, X) \vee \neg s(X)$

$q(X, b)$

$q(b, a)$

$q(X, a) \vee \neg r(a, X)$

$r(b, a)$

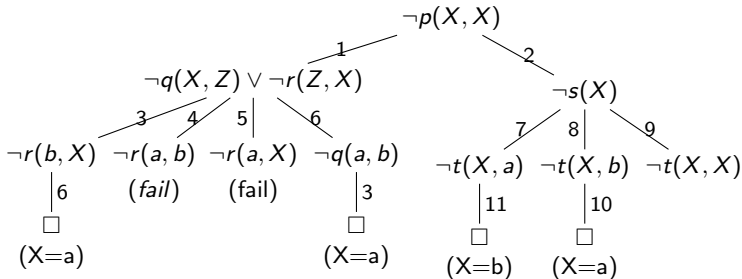
$s(X) \vee \neg t(X, a)$

$s(X) \vee \neg t(X, b)$

$s(X) \vee \neg t(X, X)$

$t(a, b)$

$t(b, a)$



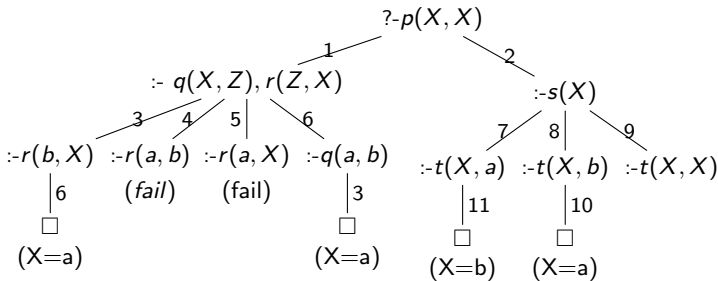
Rezoluția SLD - arbori de execuție

1. $p(X,Y) :- q(X,Z), r(Z,Y).$
 2. $p(X,X) :- s(X).$
 3. $q(X,b).$

4. $q(b,a).$
 5. $q(X,a) :- r(a,X).$
 6. $r(b,a).$

7. $s(X) :- t(X,a).$
 8. $s(X) :- t(X,b).$
 9. $s(X) :- t(X,X).$

10. $t(a,b).$
 11. $t(b,a).$



Exercițiu

Fie KB următoarea bază de cunoștințe definită în Prolog:

1. $r(a, a)$
2. $q(X, a)$
3. $p(X, Y) :- q(X, Z), r(Z, Y)$

(a) Desenați arborele SLD și arborele de execuție pentru întrebarea
?- $p(X, Z)$

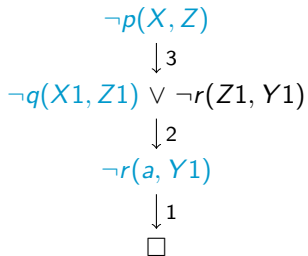
(b) Exprimați KB ca o mulțime de formule în logica de ordinul I
demonstrați folosind rezoluția că din KB se deduce $p(X, Z)$, adică
 $KB \vdash \exists x \exists z p(x, z)$.

Rezoluția SLD

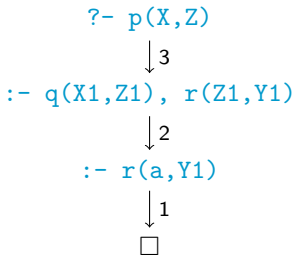
(a) Soluție:

1. $r(a, a).$
2. $q(X, a).$
3. $p(X, Y) \text{ :- } q(X, Z), r(Z, Y)$

Arborele SLD:



Arborele de execuție:



Rezoluția SLD

(cont.)

Fie KB următoarea bază de cunoștințe definită în Prolog:

1. $r(a, a)$. 2. $q(X, a)$. 3. $p(X, Y) :- q(X, Z), r(Z, Y)$

(b) Soluție:

$KB = \{r(a, a), \forall x q(x, a), \forall x \forall y \forall z (\neg q(x, y) \vee \neg r(z, y) \vee p(x, y))\}$

$KB \vdash \exists x \exists z p(x, z)$ dacă și numai dacă există o derivare prin rezoluție pentru \square din forma clauzală a mulțimii $KB \cup \{\neg(\exists x \exists z p(x, z))\}$.

Forma clauzală a mulțimii $KB \cup \{\neg(\exists x \exists z p(x, z))\}$ este

$C = \{\{r(a, a)\}, \{q(x, a)\}, \{\neg q(x, y), \neg r(z, y), p(x, y)\}, \{\neg p(x, z)\}\}$. Se

face derivarea direct sau se construiește arborele SLD.



Pe săptămâna viitoare!