Principiul inducției pe formule

Propoziția 1.6 (Principiul inducției pe formule)

*Fie **P** o proprietate. Presupunem că:*

*(0) Orice variabilă are proprietatea **P**.*

*(1) Pentru orice formulă φ, dacă φ are proprietatea **P**, atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea **P**.*

*(2) Pentru orice formule φ, ψ, dacă φ și ψ au proprietatea **P**, atunci $(\varphi \to \psi)$ are proprietatea **P**.*

*Atunci orice formulă φ are proprietatea **P**.*

Dem.: Pentru orice formulă φ, notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea ***P***.

Demonstrăm prin inducție că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul inducției pe formule

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ, $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$, conform (0).
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ au proprietatea $\boldsymbol{P}$. Rezultă din (2) că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Așadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. $\square$

Propoziția 1.7 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- *$V \subseteq \Gamma$;*
- *Γ este închisă la $\neg$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;*
- *Γ este închisă la $\rightarrow$, adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$.*

Atunci $\Gamma = Form$.

Dem.: Definim următoarea proprietate ***P***: pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ ddacă } \varphi \in \Gamma.$$

Conform definiției lui Γ, rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 1.6), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea ***P***, deci orice formulă φ este în Γ. Așadar, $\Gamma = Form$. $\square$

Subformule

Definiția 1.8

Fie φ o formulă a lui LP. O subformulă a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ.

Notație: Mulțimea subformulelor lui φ se notează $SubForm(\varphi)$.

Exemplu:

Fie $\varphi = ((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1))$. Atunci

$$SubForm(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \to v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$

Formule

Conectorii derivați $\vee$ (se citește sau), $\wedge$ (se citește și), $\leftrightarrow$ (se citește dacă și numai dacă) sunt introduși prin abrevierile:

$$\begin{aligned}
(\varphi \vee \psi) &:= ((\neg\varphi) \to \psi)\\
(\varphi \wedge \psi) &:= (\neg(\varphi \to (\neg\psi)))\\
(\varphi \leftrightarrow \psi) &:= ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)).
\end{aligned}$$

Convenții

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \to \psi$, dar scriem $(\varphi \to \psi) \to \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
  - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\to, \leftrightarrow$.

Prin urmare, formula $(((\varphi \to (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \to \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.

Propoziția 1.9 (Principiul recursiei pe formule)

Fie A o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \to A, \quad G_\neg : A \to A, \quad G_\to : A \times A \to A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : Form \to A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.

(R1) $F(\neg\varphi) = G_\neg(F(\varphi))$ pentru orice formulă φ.

(R2) $F(\varphi \to \psi) = G_\to(F(\varphi), F(\psi))$ pentru orice formule φ, ψ.

Principiul recursiei pe formule

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da definiții recursive ale diverselor funcții asociate formulelor.

Exemplu:

Fie $c : Form \to \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice formulă φ,

$c(\varphi)$ este numărul conectorilor logici care apar în φ.

O definiție recursivă a lui c este următoarea:

$$\begin{aligned} c(v) &= 0 \quad \text{pentru orice variabilă } v \\ c(\neg\varphi) &= c(\varphi) + 1 \quad \text{pentru orice formulă } \varphi \\ c(\varphi \to \psi) &= c(\varphi) + c(\psi) + 1 \quad \text{pentru orice formule } \varphi, \psi. \end{aligned}$$

În acest caz, $A = \mathbb{N}$, $G_0 : V \to A$, $G_0(v) = 0$,

$$G_\neg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad G_\neg(n) = n + 1,$$

$$G_\to : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad G_\to(m, n) = m + n + 1.$$

Principiul recursiei pe formule

Notație:

Pentru orice formulă φ, notăm cu $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ.

Observație

Mulțimea $Var(\varphi)$ poate fi definită și recursiv.

Dem.: Exercițiu.

SEMANTICA LP

Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr: 1 pentru adevărat și 0 pentru fals. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0,1\}$.

Definim următoarele operații pe $\{0,1\}$ folosind tabelele de adevăr.

$$\neg : \{0,1\} \to \{0,1\},$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că $\neg p = 1 \iff p = 0$.

$$\rightarrow: \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\},$$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că $p \rightarrow q = 1 \iff p \leq q$.

Tabele de adevăr

Operațiile $\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, $\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ și $\leftrightarrow$: $\{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observație

Pentru orice $p, q \in \{0,1\}$, $p \vee q = \neg p \to q$, $\; p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$.

Dem.: Exercițiu.

Evaluări

Definiția 1.10

O *evaluare* *(sau* *interpretare*) *este o funcție* $e : V \to \{0,1\}$.

Teorema 1.11

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$ *există o unică funcție*

$$e^+ : Form \to \{0,1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- $e^+(v) = e(v)$ *pentru orice orice* $v \in V$.
- $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ *pentru orice* $\varphi \in Form$,
- $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi)$ *pentru orice* $\varphi, \psi \in Form$.

Dem.: Aplicăm Principiul Recursiei pe formule (Propoziția 1.9) cu $A = \{0,1\}$, $G_0 = e$, $G_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$, $G_\neg(p) = \neg p$ și $G_\to : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, $G_\to(p,q) = p \to q$. $\square$

Propoziția 1.12

Dacă $e : V \to \{0, 1\}$ *este o evaluare, atunci pentru orice formule* φ, ψ,

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \vee \psi) &= e^+(\varphi) \vee e^+(\psi), \\ e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi), \\ e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi). \end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.13

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ ddacă pentru orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$, φ satisface (*).

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.

Propoziția 1.13

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$,

(*) $\quad e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi)$.

Dem.: (continuare)

- $\varphi = (\neg\psi)$ și ψ satisface $\boldsymbol{P}$. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\varphi) = Var(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi)$. Așadar, aplicând $\boldsymbol{P}$ pentru ψ, obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface $\boldsymbol{P}$.

Propoziția 1.13

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$,

$$(*) \qquad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: (continuare)

- $\varphi = (\psi \to \chi)$ și ψ, χ satisfac $\boldsymbol{P}$. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\psi) \subseteq Var(\varphi)$ și $Var(\chi) \subseteq Var(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi)$ și pentru orice $v \in Var(\chi)$. Așadar, aplicând $\boldsymbol{P}$ pentru ψ și χ, obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ și $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \to e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \to e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface $\boldsymbol{P}$. $\square$

Modele. Satisfiabilitate. Tautologii

Fie φ o formulă.

Definiția 1.14

- *O evaluare $e : V \to \{0,1\}$ este model al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Notație: $e \vDash \varphi$.*
- *φ este satisfiabilă dacă admite un model.*
- *Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este nesatisfiabilă sau contradictorie.*
- *φ este tautologie dacă orice evaluare este model al lui φ. Notație: $\vDash \varphi$.*

Notație: Mulțimea tuturor modelelor lui φ se notează $Mod(\varphi)$.

Propoziția 1.15

(i) φ este tautologie ddacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

(ii) φ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Dem.: Exercițiu.