Curs 2

Cristian Niculescu

1 Probabilitate: terminologie şi exemple

1.1 Scopurile învăţării

1. Să ştie definiţiile spaţiului probelor, evenimentului şi probabilităţii.
2. Să poată organiza un scenariu cu caracter aleator într-un experiment şi spaţiu al probelor.
3. Să poată face calcule de bază folosind o probabilitate.

1.2 Terminologie

1.2.1 Lista de distribuţie a probabilităţii

Experiment: o procedură repetabilă cu cazuri (rezultate) posibile bine definite.
Spaţiul probelor: mulţimea tuturor cazurilor posibile. De obicei notăm spaţiul probelor cu Ω, uneori cu S.
Eveniment: o submulţime a spaţiului probelor.
Funcţie de probabilitate: o funcţie dând probabilitatea pentru fiecare caz.

1.2.2 Exemple simple

Exemplul 1. Aruncarea unei monede corecte.
Experiment: aruncăm moneda, raportăm dacă aterizează avers sau revers.
Spaţiul probelor: $\Omega = \{H, T\}$.
Funcţie de probabilitate: $P(H) = 0.5,\ P(T) = 0.5$.
Exemplul 2. Aruncarea de 3 ori a unei monede corecte.
Experiment: aruncăm moneda de 3 ori, listăm rezultatele.
Spaţiul probelor: $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$.
Funcţie de probabilitate: fiecare caz este egal probabil, cu probabilitatea $1/8$.
Pentru spaţii mici de probe putem pune mulţimea cazurilor şi probabilităţile într-un tabel de probabilitate.

Caz	HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT
Probabilitate	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Exemplul 3. Măsurarea masei unui proton
Experiment: se urmează o procedură definită pentru a măsura masa şi a raporta rezultatul.
Spaţiul probelor: $\Omega = [0, \infty)$, i.e. în principiu putem obţine orice valoare pozitivă.
Funcţie de probabilitate: deoarece există un continuum de cazuri posibile, nu există o funcţie de probabilitate. În locul ei avem nevoie să folosim o *densitate de probabilitate.*
Exemplul 4. Taxiuri (Un spaţiu de probe discret infinit)
Experiment: se numără taxiurile care trec pe lângă facultate pe durata cursului.
Spaţiul probelor: $\Omega = \mathbb{N}$.
Acesta este modelat adesea cu următoarea funcţie de probabilitate cunoscută ca repartiţia (distribuţia) Poisson:

$$P(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

unde λ este numărul mediu de taxiuri. Putem pune asta într-un tabel:

Caz	0	1	2	3	...	k	...
Probabilitate	$e^{-\lambda}$	$e^{-\lambda}\lambda$	$e^{-\lambda}\lambda^2/2$	$e^{-\lambda}\lambda^3/3!$	...	$e^{-\lambda}\lambda^k/k!$	...

Întrebare: Acceptând că aceasta este o funcţie de probabilitate validă, cât este $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$?
Răspuns: Aceasta este probabilitatea totală a tuturor cazurilor posibile, deci suma este 1. (Observăm că aceasta rezultă de asemenea din seria Taylor $e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$.)
Într-o schemă dată poate fi mai mult de o alegere rezonabilă a spaţiului probelor. Iată un exemplu simplu.
Exemplul 5. 2 zaruri corecte (Alegerea spaţiului probelor)
Presupunem că aruncăm un zar corect. Atunci spaţiul probelor şi funcţia de probabilitate sunt

Caz	1	2	3	4	5	6
Probabilitate	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Acum presupunem că aruncăm 2 zaruri corecte. Care ar trebui să fie spaţiul probelor? Iată 2 opţiuni.

1. Înregistrăm perechea numerelor de pe zaruri (primul zar, al 2-lea zar).
2. Înregistrăm suma numerelor de pe zaruri. În acest caz sunt 11 cazuri $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Aceste cazuri nu sunt toate egal probabile.
Ca mai sus, putem pune această informaţie în tabele. Pentru prima opţiune, spaţiul probelor este produsul cartezian al spaţiilor probelor pentru fiecare zar

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (6, 6)\}.$$

Fiecare din cele 36 de cazuri este egal probabil. (De ce 36 de cazuri?) Pentru funţia de probabilitate vom face un tabel 2 dimensional cu liniile corespunzând numerelor de pe primul zar, coloanele numerelor de pe al 2-lea zar, iar în tabel sunt probabilităţile.

	Zar 2	1	2	3	4	5	6
Zar 1	1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

2 zaruri corecte într-un tabel 2-dimensional

În a 2-a opţiune prezentăm cazurile şi probabilităţile în tabelul nostru uzual.

Caz	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilitate	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Suma a 2 zaruri corecte

Gândiţi: Care este relaţia dintre cele 2 tabele de probabilităţi de mai sus?
Vom vedea că cea mai bună alegere a spaţiului probelor depinde de context. Deocamdată observăm că, dacă dăm rezultatul ca o pereche de numere, este uşor să aflăm suma.
Observaţie. Listarea experimentului, spaţiului probelor şi a funcţiei de probabilitate este un bun mod de a începe lucrul sistematic cu probabilitatea. Vă poate ajuta să evitaţi unele din capcanele obişnuite din subiect.

Evenimente
Un eveniment este o colecţie de cazuri, i.e. un eveniment este o submulţime a spaţiului probelor Ω. Asta sună ciudat, dar chiar corespunde înţelesului obişnuit al cuvântului.
Exemplul 6. Folosind schema din exemplul 2 vom descrie evenimentul să obţinem exact 2 aversuri în cuvinte prin $E =$ "exact 2 aversuri". Scris ca o

submulţime, acesta devine

$$E = \{HHT, HTH, THH\}.$$

Ar trebui să mişcaţi confortabil între descrierea evenimentelor în cuvinte şi ca submulţimi ale spaţiului probelor.
Probabilitatea unui eveniment E este calculată adunând probabilităţile tuturor cazurilor din E. În acest exemplu fiecare caz are probabilitatea $1/8$, deci avem $P(E) = 3/8$.

1.2.3 Definiţia unui spaţiu al probelor discret

Definiţie. Un spaţiu al probelor discret este unul care este cel mult numărabil (listabil), putând fi ori finit ori infinit.
Exemple. $\{H, T\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N}^*$, $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$ sunt toate mulţimi discrete. Primele 2 sunt finite şi ultimele 2 sunt infinite.
Exemplu. Intervalul [0,1] *nu* este discret, ci *continuu*.

1.2.4 Funcţia de probabilitate

Până acum am folosit o definiţie ocazională a funcţiei de probabilitate. Să dăm una mai precisă.
Definiţia funcţiei de probabilitate
Pentru un spaţiu al probelor discret S, o funcţie de probabilitate P atribuie fiecărui caz ω un număr $P(\omega)$ numit probabilitatea lui ω. P trebuie să satisfacă 2 reguli:
Regula 1. $0 \leq P(\omega) \leq 1$ (probabilităţile sunt între 0 şi 1).
Regula 2. Suma probabilităţilor tuturor cazurilor posibile este 1 (ceva trebuie să aibă loc).
În simboluri, regula 2 spune: dacă $S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, atunci $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$. Sau $\sum_{j=1}^{n} P(\omega_j) = 1$.
Probabilitatea unui eveniment E este suma probabilităţilor tuturor cazurilor din E. Adică,

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\omega).$$

Gândiţi: Verificaţi regulile 1 şi 2 pe exemplele 1 şi 2 de mai sus.
Exemplul 7. Aruncarea până la primul avers (un exemplu clasic)
Presupunem că avem o monedă cu probabilitatea p a aversurilor şi avem următorul scenariu.
Experiment: Aruncăm moneda până apare primul avers. Raportăm numărul aruncărilor.

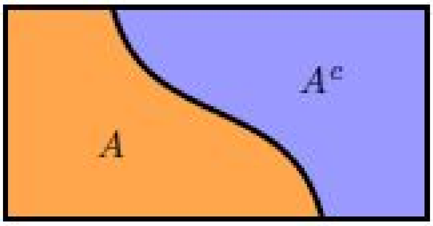
Spaţiul probelor: $\Omega = \mathbb{N}^*$.
Funcţia de probabilitate: $P(n) = (1-p)^{n-1}p$.
Provocarea 1: arătaţi că suma tuturor probabilităţilor este 1 (indicaţie: serii geometrice).
Provocarea 2: justificaţi formula pentru $P(n)$.
Probleme de oprire. Exemplul didactic anterior este o versiune a unei clase generale de probleme numite probleme de regula opririi. O regulă de oprire este o regulă care ne spune când să terminăm un anumit proces. În exemplul didactic de mai sus procesul a fost aruncarea unei monezi şi l-am oprit după primul avers. Un exemplu mai practic este o regulă pentru terminarea unei serii de tratamente medicale. O astfel de regulă ar putea depinde de cât de bine funcţionează tretamentele, cum le tolerează pacientul şi probabilitatea să fie eficace continuarea tratamentelor. Ne putem informa despre probabilitatea opririi într-un anumit număr de tratamente sau numărul mediu de tratamente la care să ne aşteptăm înaintea opririi.

1.3 Câteva reguli ale probabilităţii

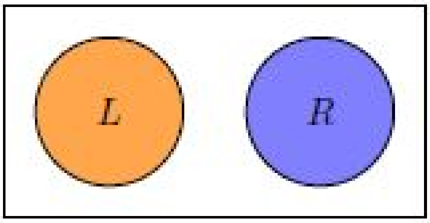
Pentru evenimentele A, L şi R incluse într-un spaţiu al probelor Ω:
Regula 1. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
Regula 2. Dacă L şi R sunt disjuncte, atunci $P(L \cup R) = P(L) + P(R)$.
Regula 3. Dacă L şi R nu sunt disjuncte, avem **principiul includerii şi excluderii:**

$$P(L \cup R) = P(L) + P(R) - P(L \cap R).$$

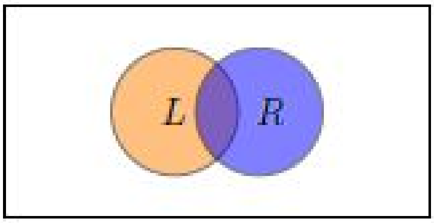
Vizualizăm aceste reguli folosind diagrame Venn-Euler.



$\Omega = A \cup A^c$, nicio suprapunere



$L \cup R$, nicio suprapunere



$L \cup R$, suprapunerea $= L \cap R$

Le putem de asemenea justifica logic.
Regula 1: A şi A^c împart Ω în 2 regiuni disjuncte. Deoarece probabilitatea totală $P(\Omega) = 1$, această regulă spune că probabilitatea lui A şi probabilitatea lui "non A" sunt complementare, adică au suma 1.
Regula 2: L şi R împart $L \cup R$ în 2 regiuni disjuncte. Deci probabilitatea lui $L \cup R$ este împărţită între $P(L)$ şi $P(R)$.
Regula 3: În suma $P(L) + P(R)$ suprapunerea $P(L \cap R)$ este numărată de 2 ori. Deci $P(L) + P(R) - P(L \cap R)$ numără totul din reuniune exact o dată.
Gândiţi: Regula 2 este un caz special al regulii 3.

Pentru următoarele exemple presupunem că avem un experiment care produce un întreg aleator între 1 şi 20. Probabilităţile nu sunt necesar uniforme, i.e., nu sunt necesar aceleaşi pentru fiecare caz.
Exemplul 8. Dacă probabilitatea unui număr par este 0.6, care este probabilitatea unui număr impar?
Răspuns: Deoarece a fi impar este complementar cu a fi par, probabilitatea unui număr impar este $1 - 0.6 = 0.4$.
Să refacem acest exemplu un pic mai formal. Întâi, pentru a ne putea referi la el, să numim întregul aleator X. De asemenea, numim A evenimentul "X este par". Atunci evenimentul "X este impar" este A^c. Ne este dată $P(A) = 0.6$. De aceea $P(A^c) = 1 - 0.6 = 0.4$.
Exemplul 9. Considerăm 2 evenimente, A: "X este multiplu de 2"; B: "X este impar şi mai mic ca 10". Presupunem că $P(A) = 0.6$ şi $P(B) = 0.25$.
(i) Cine este $A \cap B$?
(ii) Care este probabilitatea lui $A \cup B$?
Răspuns: (i) Deoarece toate numerele din A sunt pare şi toate numerele din B sunt impare, aceste evenimente sunt disjuncte. Adică $A \cap B = \emptyset$.
(ii) Deoarece A şi B sunt disjuncte, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.85$.
Exemplul 10. Fie A, B şi C evenimentele X este multiplu de 2, 3, respectiv 6. Dacă $P(A) = 0.6, P(B) = 0.3$ şi $P(C) = 0.2$, cât este $P(A \text{ sau } B)$?
Răspuns: Observăm 2 lucruri. Întâi, am folosit cuvântul "sau", care înseamnă reuniune: "A sau B" $= A \cup B$. Al 2-lea, un întreg este divizibil cu 6 dacă şi numai dacă este divizibil cu 2 şi cu 3. De aici rezultă $C = A \cap B$. Deci principiul includerii şi excluderii spune

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.3 - 0.2 = 0.7.$$

2 Probabilitatea condiţionată, independenţa şi teorema lui Bayes

2.1 Scopurile învăţării

1. Să ştie definiţiile probabilităţii condiţionate şi independenţei evenimentelor.
2. Să poată calcula probabilitatea condiţionată direct din definiţie.
3. Să poată folosi regula mutiplicării pentru a calcula probabilitatea totală a unui eveniment.
4. Să poată verifica dacă 2 evenimente sunt independente.
5. Să poată folosi formula lui Bayes pentru a "inversa" probabilităţile condiţionate.
6. Să poată organiza calculul probabilităţilor condiţionate folosind arbori şi tabele.
7. Să înţeleagă complet eroarea ratei de bază.

2.2 Probabilitatea condiţionată

Probabilitatea condiţionată răspunde la întrebarea "cum se schimbă probabilitatea unui eveniment dacă avem informaţie suplimentară".
Exemplul 1. Aruncăm o monedă corectă de 3 ori.
(a) Care este probabilitatea a 3 aversuri?
Răspuns: Spaţiul probelor $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$.
Toate cazurile sunt egal probabile, deci $P(3 \text{ aversuri}) = 1/8$.
(b) Presupunem că ni se spune că prima aruncare a fost avers. Fiind dată această informaţie, cum ar trebui să calculăm probabilitatea a 3 aversuri?
Răspuns: Avem un nou spaţiu al probelor (redus): $\Omega' = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$.
Toate cazurile sunt egal probabile, deci

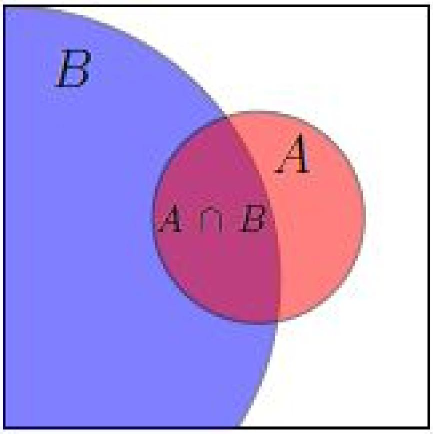
$$P(3 \text{ aversuri dat fiind că prima aruncare este avers}) = 1/4.$$

Aceasta este numită probabilitate condiţionată, deoarece ia în considerare condiţii suplimentare. Pentru a dezvolta notaţia, reformulăm (b) în termeni de *evenimente*.
(b) reformulat. Fie A evenimentul "toate 3 aruncările sunt aversuri" $= \{HHH\}$.
Fie B evenimentul "prima aruncare este avers" $= \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$.
Probabilitatea condiţionată a lui A cunoscând că B a avut loc este scrisă

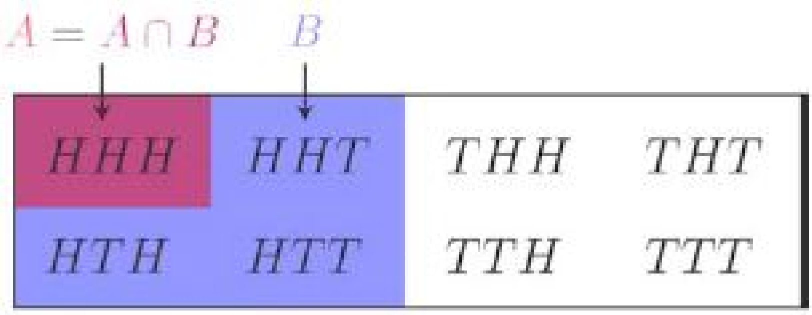
$$P(A|B).$$

Aceasta se citeşte "probabilitatea condiţionată a lui A dat fiind B" sau "probabilitatea lui A condiţionată de B" sau, mai simplu, "probabilitatea lui A

dat fiind B".
Putem vizualiza probabilitatea condiţionată după cum urmează. Gândiţi $P(A)$ ca proporţia ariei ocupată de A din *tot* spaţiul probelor. Pentru $P(A|B)$ ne restrângem atenţia la B. Adică, $P(A|B)$ este proporţia ocupată de A din aria lui B, i.e. $P(A \cap B)/P(B)$.



Probabilitatea condiţionată: vizualizare abstractă



Probabilitatea condiţionată: exemplul cu moneda

Observăm că $A \subset B$ în ultima figură, deci apar doar 2 culori.
Definiţia formală a probabilităţii condiţionate prinde esenţa exemplului şi vizualizărilor de mai sus.

Definiţia formală a probabilităţii condiţionate

Fie A şi B evenimente. Definim probabilitatea condiţionată a lui A dat fiind B ca

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ dacă } P(B) \neq 0. \tag{1}$$

În continuare, când scriem o probabilitate condiţionată, presupunem implicit că probabilitatea evenimentului care condiţionează este nenulă, fără a mai

scrie aceasta.
Să refacem exemplul cu aruncarea monezii folosind definiţia din relaţia (1). Reamintim că $A =$ "3 aversuri" şi $B =$ "prima aruncare este avers". Avem $P(A) = 1/8$ şi $P(B) = 1/2$. Deoarece $A \cap B = A$, avem de asemenea $P(A \cap B) = 1/8$. Acum, din (1), $P(A|B) = \frac{1/8}{1/2} = 1/4$, la fel ca răspunsul din exemplul 1b.

2.3 Regula multiplicării

Următoarea formulă este numită regula multiplicării.

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B). \tag{2}$$

Aceasta este doar o rescriere a definiţiei din relaţia (1) a probabilităţii condiţionate. Regula multiplicării este doar o versiune a regulii produsului.
Începem cu un exemplu simplu unde putem verifica direct toate probabilităţile numărând.
Exemplul 2. Tragem 2 cărţi fără revenire dintr-un pachet de cărţi de joc fără jokeri. Definim evenimentele: $S_1 =$ "prima carte este o pică" şi $S_2 =$ "a 2-a carte este o pică". Cât este $P(S_2|S_1)$?
Răspuns: Putem face asta direct prin numărare: dacă prima carte este o pică, atunci din cele 51 de cărţi rămase, 12 sunt pici.

$$P(S_2|S_1) = 12/51 = 4/17.$$

Acum, să recalculăm asta folosind formula (1). Trebuie să calculăm $P(S_1)$, $P(S_2)$ şi $P(S_1 \cap S_2)$. Ştim că $P(S_1) = 1/4$ deoarece sunt 52 de moduri egal posibile de a trage prima carte şi 13 din ele sunt pici. Aceeaşi logică spune că sunt 52 de moduri egal posibile de a trage a 2-a carte, deci $P(S_2) = 1/4$.
Comentariu: Probabilitatea $P(S_2) = 1/4$ poate părea surprinzătoare deoarece valoarea primei cărţi afectează cu siguranţă probabilităţile pentru a 2-a carte. Dar, dacă ne uităm la *toate* secvenţele posibile de 2 cărţi, vom vedea că fiecare carte din pachet are probabilitate egală de a fi a 2-a carte. Deoarece 13 din cele 52 de cărţi sunt pici obţinem $P(S_2) = 13/52 = 1/4$. Un alt fel de a spune asta este: dacă nu avem dată valoarea pentru prima carte, atunci trebuie să considerăm toate posibilităţile pentru a 2-a carte.
Continuând, vedem că

$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} = 1/17.$$

(Aceasta a fost aflată numărând modurile de a trage o pică urmată de a 2-a pică şi împărţind prin numărul de moduri de a trege orice carte urmată de orice altă carte.) Acum, folosind (1) obţinem

$$P(S_2|S_1) = \frac{P(S_2 \cap S_1)}{P(S_1)} = \frac{1/17}{1/4} = 4/17.$$

În sfârşit, verificăm regula multiplicării calculând ambii membri din (2).

$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} = \frac{1}{17} \text{ şi } P(S_2|S_1) \cdot P(S_1) = \frac{4/17}{1/4} = \frac{1}{17}, \text{ q.e.d.}$$

Gândiţi: Pentru S_1 şi S_2 din exemplul precedent, cât este $P(S_2|S_1^c)$?

2.4 Legea probabilităţii totale

Legea probabilităţii totale ne permite să folosim regula multiplicării pentru a afla probabilităţi în exemple mai interesante. Necesită multă notaţie, dar ideea este destul de simplă. Enunţăm legea când spaţiul probelor este împărţit în 3 părţi. Este o chestiune simplă a extinde regula când sunt mai mult de 3 părţi.

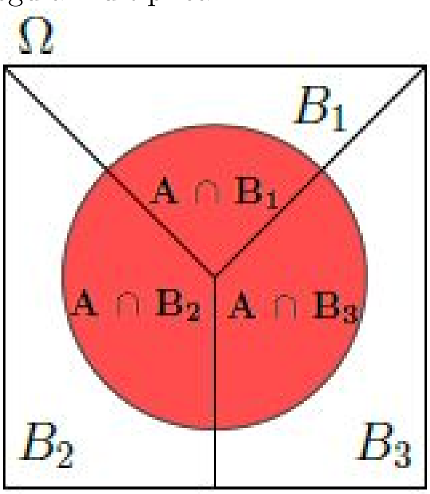
Legea probabilităţii totale

Presupunem că spaţiul probelor Ω este împărţit în 3 evenimente disjuncte 2 câte 2 B_1, B_2, B_3 (vezi figura de mai jos). Atunci pentru orice eveniment A:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3);$$

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3). \qquad (3)$$

Prima relaţie spune "dacă A este împărţit în 3 părţi disjuncte 2 câte 2, atunci $P(A)$ este suma probabilităţilor părţilor". Relaţia (3) se numeşte legea probabilităţii totale. Ea este doar o rescriere a relaţiei de deasupra folosind regula multiplicării.



Spaţiul probelor Ω şi evenimentul A sunt fiecare împărţite în 3 părţi disjuncte 2 câte 2.

Legea este valabilă dacă împărţim Ω în orice număr de evenimente, atât timp cât ele sunt *disjuncte 2 câte 2* şi *acoperă* tot Ω (adică reuniunea lor este Ω). O astfel de împărţire este numită adesea o *partiţie* a lui Ω.
Primul nostru exemplu va fi unul unde ştim deja răspunsul şi putem verifica legea.
Exemplul 3. O urnă conţine 5 bile roşii şi 2 bile verzi. 2 bile sunt scoase una după alta, fără revenire. Care este probabilitatea ca a 2-a bilă să fie roşie?
Răspuns: Spaţiul probelor este $\Omega = \{rr, rg, gr, gg\}$. (Am pus "r" pentru roşu şi "g" pentru verde.)
Fie R_1 evenimentul "prima bilă este roşie", G_1 = "prima bilă este verde", R_2 = "a 2-a bilă este roşie", G_2 = "a 2-a bilă este verde". Ni se cere să aflăm $P(R_2)$.
Modul rapid de a calcula aceasta este la fel ca $P(S_2)$ din exemplul cu cărţi de joc de mai sus. Fiecare bilă este egal probabilă să fie a 2-a bilă. Deoarece 5 din 7 bile sunt roşii, $P(R_2) = 5/7$.
Să calculăm această valoare folosind legea probabilităţii totale (3). Întâi, aflăm probabilităţile condiţionate. Acesta este un exerciţiu simplu de numărare.

$$P(R_2|R_1) = 4/6 = 2/3, \quad P(R_2|G_1) = 5/6.$$

Deoarece R_1 şi G_1 partiţionează Ω, legea probabilităţii totale spune

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_2|R_1)P(R_1) + P(R_2|G_1)P(G_1) \qquad (4) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7} + \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{7} = \frac{10}{21} + \frac{5}{21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

Urne de probabilitate
Exemplul precedent a folosit urne de probabilitate. Utilizarea lor se întoarce la începutul subiectului şi am fi neglijenţi dacă nu le-am introduce. Acest model didactic este foarte util.
În probabilităţi şi statistică, o problemă a urnei este un exerciţiu mental idealizat în care unele obiecte de real interes (ca atomi, oameni, maşini, etc.) sunt reprezentate ca bile colorate într-o urnă sau alt container. Se pretinde a se extrage una sau mai multe bile din urnă; scopul este a se determina probabilitatea extragerii unei culori sau a alteia, sau alte proprietăţi. Un parametru cheie este dacă fiecare bilă este returnată în urnă sau nu după fiecare extragere.

Nu ne ia mult să facem un exemplu unde (3) este într-adevăr cel mai bun mod de a calcula probabilitatea. Iată un joc cu reguli puţin mai complicate.
Exemplul 4. O urnă conţine 5 bile roşii şi 2 bile verzi. O bilă este extrasă. Dacă este verde, o bilă roşie este adăugată în urnă, iar dacă este roşie, o bilă verde este adăugată în urnă. (Bila originală nu este returnată în urnă.) Apoi o a 2-a bilă este extrasă. Care este probabilitatea ca a 2-a bilă să fie roşie?
Răspuns. Cu notaţiile de la exemplul 3, legea probabilităţii totale spune că $P(R_2)$ poate fi calculată folosind relaţia (4). Doar valorile probabilităţilor condiţionate se schimbă. Avem

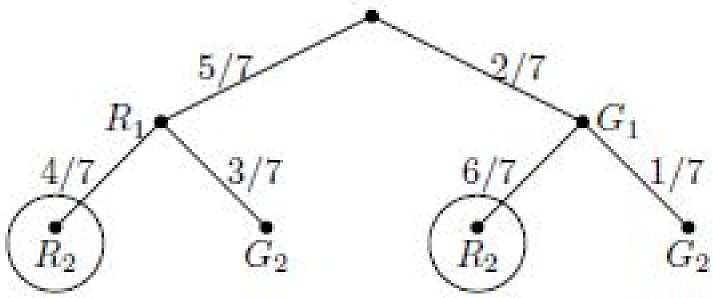
$$P(R_2|R_1) = 4/7, \quad P(R_2|G_1) = 6/7.$$

De aceea,

$$P(R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) + P(R_2|G_1)P(G_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{32}{49}.$$

2.5 Utilizarea arborilor pentru a organiza calculul

Arborii sunt o metodă grozavă de a organiza calcule cu probabilităţi condiţionate şi legea probabilităţii totale. Figurile şi exemplele vor clarifica ce înţelegem printr-un arbore. Ca la regula produsului, cheia este să organizăm procesul de bază într-o secvenţă de acţiuni.
Începem refăcând exemplul 4. Secvenţa de acţiuni este: întâi extragem bila 1 (şi adăugăm bila corespunzătoare în urnă) şi apoi extragem bila 2.



Interpretăm arborele după cum urmează. Fiecare punct este numit nod. Arborele este organizat pe nivele. Nodul de la vârf (nodul rădăcină) este la nivelul 0. Următorul strat de mai jos este nivelul 1 şi aşa mai departe. Fiecare nivel arată cazurile la un stadiu al jocului. Nivelul 1 arată cazurile posibile la prima extragere. Nivelul 2 arată cazurile posibile la a 2-a extragere, plecând din fiecare nod din nivelul 1.
Probabilităţile sunt scrise de-a lungul ramurilor. Probabilitatea lui R_1 (bilă roşie la prima extragere) este 5/7. Ea este scrisă de-a lungul ramurii de la nodul rădăcină la nodul etichetat R_1. La următorul nivel punem probabilităţile condiţionate. Probabilitatea de-a lungul ramurii de la R_1 la R_2 este

$P(R_2|R_1) = 4/7$. Ea reprezintă probabilitatea de a merge în nodul R_2 dat fiind că suntem deja în R_1.
Regula multiplicării spune că probabilitatea de a ajunge în orice nod este tocmai produsul probabilităţilor aflate de-a lungul drumului de a ajunge acolo din nodul rădăcină. De exemplu, nodul etichetat R_2 din extrema stângă reprezintă în realitate evenimentul $R_1 \cap R_2$ deoarece vine din nodul R_1. Regula multiplicării spune acum

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2|R_1) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7},$$

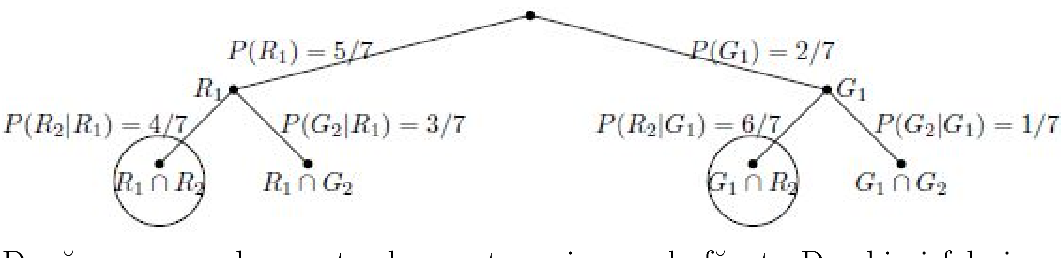
ceea ce este exact înmulţirea probabilităţilor aflate de-a lungul drumului de la nodul rădăcină la nodul R_2 din extrema stângă.
Legea probabilităţii totale este chiar afirmaţia că $P(R_2)$ este suma probabilităţilor tuturor drumurilor conducând de la nodul rădăcină la R_2 (cele 2 noduri încercuite din figură). În acest caz,

$$P(R_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{32}{49},$$

exact ca în exemplul precedent.

2.5.1 Arbori prescurtaţi vs. precişi

Arborele dat mai sus implică o prescurtare. De exemplu, nodul marcat R_2 din extrema stângă reprezintă în realitate evenimentul $R_1 \cap R_2$, deoarece termină drumul de la rădăcină prin R_1 la R_2. Iată acelaşi arbore cu totul etichetat precis.



După cum se vede, acest arbore este mai greu de făcut. De obicei folosim versiunea prescurtată a arborilor.

2.6 Independenţă

2 evenimente sunt independente dacă informaţia că unul a avut loc nu schimbă probabilitatea ca celălalt să fi avut loc. Informal, evenimentele sunt independente dacă ele nu se influenţează unul pe celălalt.

Exemplul 5. Aruncăm o monedă de 2 ori. Ne aşteptăm ca rezultatele celor 2 aruncări să fie independente unul faţă de celălalt. În experimentele reale acest lucru trebuie totdeauna verificat. Dacă moneda mea aterizează în miere şi nu mă deranjez s-o curăţ, atunci a 2-a aruncare poate fi afectată de rezultatul primei aruncări.

Mai serios, independenţa experimentelor poate fi subminată de eşecul curăţării sau recalibrării echipamentului între experimente, sau al izolării observatorilor presupuşi independenţi unul faţă de altul sau de o influenţă comună. Toţi am experimentat aflarea aceluiaşi "fapt" de la oameni diferiţi. Aflându-l din surse diferite tindem să-i dăm crezare până aflăm că toţi l-au aflat de la o sursă comună. Adică, sursele noastre nu erau independente.
Traducerea descrierii verbale în simboluri dă

$$A \text{ este independent de } B \Longleftrightarrow P(A|B) = P(A). \tag{5}$$

Adică, cunoaşterea faptului că B a avut loc nu schimbă probabilitatea ca A să fi avut loc. În termeni de evenimente ca submulţimi, cunoaşterea faptului că rezultatul realizat este în B nu schimbă probabilitatea că el este în A.
Dacă A şi B sunt independente în sensul de mai sus, atunci regula multiplicării dă $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$. Aceasta justifică următoarea definiţie tehnică a independenţei.
Definiţia formală a independenţei: 2 evenimente A şi B sunt independente $\Longleftrightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{6}$$

Această definiţie simetrică clarifică faptul că A este independent de $B \Longleftrightarrow B$ este independent de A. Spre deosebire de relaţia (5), această definiţie are sens şi când $P(B) = 0$. În termeni de probabilităţi condiţionate, avem:
1. Dacă $P(B) \neq 0$, atunci A şi B sunt independente $\Longleftrightarrow P(A|B) = P(A)$.
2. Dacă $P(A) \neq 0$, atunci A şi B sunt independente $\Longleftrightarrow P(B|A) = P(B)$.
Evenimentele independente apar de obicei ca probe diferite într-un experiment, ca în exemplul următor.
Exemplul 6. Aruncăm o monedă corectă de 2 ori. Fie $H_1 =$ "avers la prima aruncare" şi $H_2 =$ "avers la a 2-a aruncare". Sunt H_1 şi H_2 independente?
Răspuns. Deoarece $H_1 \cap H_2$ este evenimentul "ambele aruncări sunt aversuri", avem

$$P(H_1 \cap H_2) = 1/4 = (1/2) \cdot (1/2) = P(H_1)P(H_2).$$

De aceea evenimentele H_1 şi H_2 sunt independente.

Putem întreba despre independenţa oricăror 2 evenimente, ca în următoarele 2 exemple.
Exemplul 7. Aruncăm o monedă corectă de 3 ori. Fie $H_1 =$ ”avers la prima aruncare” şi $A =$ ”2 aversuri în total”. Sunt H_1 şi A independente?
Răspuns. Ştim că $P(A) = 3/8$. Deoarece $P(H_1) = 1/2 \neq 0$, putem verifica dacă formula din relaţia (5) este îndeplinită. Acum, $H_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$ conţine exact 2 cazuri (HHT, HTH) din A, deci avem $P(A|H_1) = 2/4 = 1/2$. Deoarece $P(A|H_1) \neq P(A)$, evenimentele H_1 şi A nu sunt independente.
Exemplul 8. Tragem o carte dintr-un pachet de cărţi de joc standard (adică fără jokeri). Să examinăm independenţa 2 câte 2 a 3 evenimente: ”cartea este as”, ”cartea este cupă” şi ”cartea este roşie”.
Notăm evenimentele $A =$ ”as”, $H =$ ”cupă”, $R =$ ”roşie”.
a) Ştim că $P(A) = 4/52 = 1/13$, $P(A|H) = 1/13$. Deoarece $P(A) = P(A|H)$, A este independent de H.
b) $P(A|R) = 2/26 = 1/13 = P(A)$. Deci A este independent de R.
c) În sfârşit, ce putem spune despre H şi R? Deoarece $P(H) = 13/52 = 1/4$ şi $P(H|R) = 13/26 = 1/2$, avem $P(H) \neq P(H|R)$, deci H şi R nu sunt independente. Puteam de asemenea vedea asta invers: $P(R) = 26/52 = 1/2$ şi $P(R|H) = 13/13 = 1$, deci $P(R) \neq P(R|H)$, de aceea H şi R nu sunt independente.

2.6.1 Paradoxurile independenţei

Un eveniment A cu probabilitatea 0 este independent de el însuşi, deoarece în acest caz ambii membri ai relaţiei (6) sunt 0. Aceasta apare paradoxal, deoarece cunoaşterea faptului că A a avut loc sigur dă informaţie despre faptul dacă A a avut loc. Rezolvăm paradoxul observând că deoarece $P(A) = 0$, afirmaţia ”A a avut loc” este fără sens.
Gândiţi: Pentru ce altă valoare a lui $P(A)$ este A independent de el însuşi?

2.7 Teorema lui Bayes

Teorema lui Bayes este foarte importantă pentru probabilităţi şi statistică. Pentru 2 evenimente A şi B, teorema lui Bayes (de asemenea numită regula lui Bayes şi formula lui Bayes) spune

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}. \tag{7}$$

Comentarii: 1. Regula lui Bayes ne spune cum să ”inversăm” probabilităţile condiţionate, i.e. să aflăm $P(B|A)$ din $P(A|B)$.
2. În practică, $P(A)$ este adesea calculată folosind legea probabilităţii totale.

Demonstraţia regulii lui Bayes
Punctul cheie este că $A \cap B$ este simetrică în A şi B. Deci regula multiplicării spune

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Acum împărţim cu $P(A)$ pentru a obţine regula lui Bayes.

O greşeală obişnuită este a confunda $P(A|B)$ cu $P(B|A)$. Ele pot fi foarte diferite. Aceast fapt este ilustrat în următorul exemplu.
Exemplul 9. Aruncăm o monedă corectă de 5 ori. Fie H_1 = "prima aruncare este avers" şi H_A = "toate cele 5 aruncări sunt aversuri". Atunci $P(H_1|H_A) = 1$, dar $P(H_A|H_1) = 1/16$.
Pentru practică, să folosim teorema lui Bayes pentru a calcula $P(H_1|H_A)$ din $P(H_A|H_1)$. Avem $P(H_A|H_1) = 1/16, P(H_1) = 1/2, P(H_A) = 1/32$. Deci,

$$P(H_1|H_A) = \frac{P(H_A|H_1)P(H_1)}{P(H_A)} = \frac{(1/16) \cdot (1/2)}{1/32} = 1,$$

de acord cu calculul nostru anterior.

2.7.1 Eroarea ratei de bază

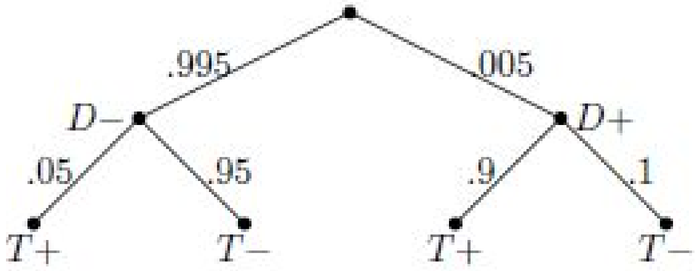
Eroarea ratei de bază este unul din multele exemple care arată că este uşor de confundat semnificaţia lui $P(B|A)$ cu $P(A|B)$ când o situaţie este descrisă în cuvinte. Acesta este unul din exemplele cheie în probabilităţi. Ar trebui să vă străduiţi să-l înţelegeţi complet.
Exemplul 10. Eroarea ratei de bază
Considerăm un test de rutină pentru o boală. Presupunem că frecvenţa bolii în populaţie (rata de bază) este 0.5%. Testul este extrem de exact cu o rată "fals pozitiv" de 5% şi o rată "fals negativ" de 10%.
Faceţi testul şi iese pozitiv. Care este probabilitatea să aveţi boala?
Răspuns. Vom face calculul de 3 ori: folosind arbori, tablele şi simboluri.
Vom utiliza următoarele notaţii pentru evenimentele relevante:
$D+$ = "aveţi boala",
$D-$ = "nu aveţi boala",
$T+$ = "aţi fost testat pozitiv",
$T-$ = "aţi fost testat negativ".
Avem dat $P(D+) = 0.005$ şi de aceea $P(D-)$=0.995. Ratele "fals pozitiv" şi "fals negativ" sunt (prin definiţie) probabilităţi condiţionate.

$P(\text{fals pozitiv}) = P(T+|D-) = 0.05$ şi $P(\text{fals negativ}) = P(T-|D+) = 0.1$.

Probabilităţile complementare sunt cunoscute ca ratele "adevărat negativ" şi "adevărat pozitiv":

$P(T-|D-) = 1-P(T+|D-) = 0.95$ şi $P(T+|D+) = 1-P(T-|D+) = 0.9$.

Arbori: Toate aceste probabilităţi pot fi prezentate într-un arbore.



Se cere probabilitatea să aveţi boala dat fiind că aţi fost testat pozitiv, i.e. $P(D+|T+)$. Nu avem dată această valoare, dar ştim $P(T+|D+)$, deci putem utiliza teorema lui Bayes.

$$P(D+|T+) = \frac{P(T+|D+) \cdot P(D+)}{P(T+)}.$$

Cele 2 probabilităţi de la numărător sunt date. Calculăm numitorul folosind legea probabilităţii totale. Folosind arborele, trebuie doar să adunăm probabilităţile pentru fiecare din nodurile etichetate $T+$

$$P(T+) = 0.995 \cdot 0.05 + 0.005 \cdot 0.9 = 0.05425.$$

Astfel,

$$P(D+|T+) = \frac{0.9 \cdot 0.005}{0.05425} \approx 0.08294931 \approx 8.3\%.$$

Observaţii. Aceasta este numită eroarea ratei de bază deoarece rata de bază a bolii în populaţie este atât de mică încât marea majoritate a oamenilor care fac testul sunt sănătoşi şi chiar cu un test precis majoritatea celor testaţi pozitiv vor fi oameni sănătoşi.

Pentru a rezuma eroarea ratei de bază cu numere particulare *faptul că 95% din toate testele sunt precise nu implică faptul că 95% din testele pozitive sunt precise.*

Alte moduri de a lucra exemplul 10

Tabele: Alt truc util pentru a calcula probabilităţi este a face un tabel. Să refacem exemplul precedent folosind un tabel construit pentru un total de 10000 de oameni împărţiţi conform probabilităţilor din acest exemplu.

Construim tabelul după cum urmează. Alegem un număr, să zicem 10000 de oameni, şi îl plasăm ca marele total în dreapta jos. Folosind $P(D+) = 0.005$ calculăm că 50 din cei 10000 de oameni sunt bolnavi $(D+)$. Analog 9950 de oameni sunt sănătoşi. În acest moment tabelul arată aşa:

	$D+$	$D-$	total
$T+$			
$T-$			
total	50	9950	10000

Folosind $P(T+|D+) = 0.9$ putem calcula că numărul oamenilor bolnavi care au fost testaţi pozitiv este 90% din 50, adică 45. Celelalte date sunt similare. În acest moment tabelul arată aşa:

	$D+$	$D-$	total
$T+$	45	498	
$T-$	5	9452	
total	50	9950	10000

În sfârşit, adunăm elementele de pe liniile $T+$ şi $T-$ pentru a completa coloana din dreapta.

	$D+$	$D-$	total
$T+$	45	498	543
$T-$	5	9452	9457
total	50	9950	10000

Folosind tabelul complet putem calcula

$$P(D+|T+) = \frac{|D+\cap T+|}{|T+|} = \frac{45}{543} \approx 8.3\%.$$

Simboluri: Pentru completitudine, arătăm soluţia scrisă direct cu simboluri.

$$\begin{aligned} P(D+|T+) &= \frac{P(T+|D+)\cdot P(D+)}{P(T+)} \\ &= \frac{P(T+|D+)\cdot P(D+)}{P(T+|D+)\cdot P(D+) + P(T+|D-)\cdot P(D-)} \\ &= \frac{0.9\cdot 0.005}{0.9\cdot 0.005 + 0.05\cdot 0.995} \\ &\approx 8.3\%. \end{aligned}$$

Vizualizare: Figura de mai jos ilustrează eroarea ratei de bază. Aria albastră mare reprezintă toţi oamenii sănătoşi. Aria roşie mult mai mică reprezintă oamenii bolnavi. Dreptunghiul mai închis reprezintă oamenii care au fost testaţi pozitiv. Aria mai închisă acoperă cea mai mare parte a ariei roşii şi doar o mică parte din aria albastră. Chiar şi aşa, cea mai mare parte a ariei mai închise este peste albastru. Adică, cele mai multe teste pozitive sunt ale oamenilor sănătoşi.