Propoziția 1.52

Pentru orice mulțime de formule Γ *și orice formule* φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \ \text{ și } \ \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.:

(1)	$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash \psi \to \varphi$	Teorema deducției
(3)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi$	ipoteză
(4)	$\Gamma \vdash \neg\psi \to \varphi$	Teorema deducției
(5)	$\Gamma \vdash (\psi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	(42) și P.1.39.(ii)
(6)	$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	(MP): (2), (5)
(7)	$\Gamma \vdash \neg\varphi \to \varphi$	(6), (4) și P. 1.48
(8)	$\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	(45) și P.1.39.(ii)
(9)	$\Gamma \vdash \varphi$	(MP): (7), (8).

Propoziția 1.53

Pentru orice formule φ, ψ,

$$
\begin{aligned}
\{\varphi \wedge \psi\} &\quad \vdash \quad \varphi && (46)\\
\{\varphi \wedge \psi\} &\quad \vdash \quad \psi && (47)\\
\{\varphi, \psi\} &\quad \vdash \quad \varphi \wedge \psi && (48)\\
\{\varphi, \psi\} \vdash \chi &\quad \textit{ddacă} \quad \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi && (49)\\
&\quad \vdash \quad \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi && (50)
\end{aligned}
$$

Dem.: Exercițiu.

SINTAXA și SEMANTICA

Teorema 1.54 (Teorema de corectitudine (Soundness Theorem))

Orice Γ-teoremă este consecință semantică a lui Γ, adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$ și $\Gamma \subseteq Form$.

Dem.: Fie

$$\Sigma := \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după Γ-teoreme.

- Axiomele sunt în Σ (exercițiu).
- Evident, $\Gamma \subseteq \Sigma$.
- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma$, adică, $\Gamma \vDash \varphi$ și $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$. Conform Propoziției 1.28.(i), obținem că $\Gamma \vDash \psi$, adică, $\psi \in \Sigma$.

$\square$

Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare și $v \in V$ o variabilă.

Definim

$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Așadar, $e^+(v^e) = 1$.
Pentru orice mulțime $W = \{x_1, \ldots, x_k\}$ de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \ldots, x_k^e\}.$$

Pentru orice $a \in \{0, 1\}$, definim evaluarea $e_{v \leftarrow a} : V \to \{0, 1\}$ prin

$$e_{v \leftarrow a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{daca } x \neq v \\ a & \text{daca } x = v. \end{cases}$$

Propoziția 1.55

Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare. Pentru orice formulă φ,

(i) *Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.*

(ii) *Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.*

Dem.: Suplimentar - nu trebuie citită pentru examen Prin inducție după formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $Var(\varphi)^e = \{v^e\}$ și $e^+(v) = e(v)$.
  Dacă $e(v) = 1$, atunci $v^e = v$, deci, $\{v^e\} \vdash v$.
  Dacă $e(v) = 0$, atunci $v^e = \neg v$, deci, $\{v^e\} \vdash \neg v$.
- $\varphi = \neg\psi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi)$, deci $Var(\varphi)^e = Var(\psi)^e$.
  Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.
  Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \psi$.
  Deoarece $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$ ((41) din Propoziția 1.51), putem aplica (MP) pentru a obține $Var(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi = \neg\varphi$.

- $\varphi = \psi \to \chi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi) \cup Var(\chi)$, deci $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$.

  Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$ și $e^+(\chi) = 0$. Avem

$Var(\psi)^e \vdash \psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\chi)^e \vdash \neg\chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$	$Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 1.39.(i)
$\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \to \chi)$	(43) din Propoziția 1.51
$Var(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \to \chi)$	Propoziția 1.39.(iv).

Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 1$, atunci fie $e^+(\psi) = 0$, fie $e^+(\chi) = 1$.

În primul caz, obținem

$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$	(38) din P. 1.51 și P. 1.39.(ii)
$Var(\psi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 1.39.(i).

În al doilea caz, obținem

$Var(\chi)^e \vdash \chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\chi)^e \vdash \chi \to (\psi \to \chi)$	(A1) și Propoziția 1.37.(i)
$Var(\chi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 1.39.(i). $\square$

Demonstrația propoziției anterioare ne dă o construcție efectivă a unei demonstrații a lui φ sau $\neg\varphi$ din premizele $Var(\varphi)^e$.

Teorema 1.56 (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Dem.: "$\Rightarrow$" Se aplică Teorema de corectitudine 1.54 pentru $\Gamma = \emptyset$.
"$\Leftarrow$" Fie φ o tautologie și $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Demonstrăm prin inducție după k următoarea proprietate:

$$(*) \quad \text{pentru orice } k \leq n, \text{ pentru orice } e : V \to \{0,1\}, \\ \{x_1^e, \ldots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi.$$

Pentru $k = n$, (*) ne dă $\vdash \varphi$.

$k = 0$. Fie $e : V \to \{0, 1\}$. Deoarece φ este tautologie, $e^+(\varphi) = 1$. Aplicând Propoziția 1.55, obținem că

$$Var(\varphi)^e = \{x_1^e, \ldots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$

$k \Rightarrow k+1$. Presupunem că (*) este adevărată pentru k și fie $e : V \to \{0,1\}$. Trebuie să arătăm că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. Considerăm evaluarea $e' := e_{x_{n-k} \leftarrow \neg e(x_{n-k})}$. Așadar, $e'(v) = e(v)$ pentru orice $v \neq x_{n-k}$ și

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

Rezultă că $x_i^{e'} = x_i^e$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n-k-1\}$ și

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din (*) pentru e și e', obținem

$$\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}\} \vdash \varphi \text{ și } \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziția 1.52 cu $\Gamma := \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\}$ și $\psi := x_{n-k}$ pentru a conclude că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. $\square$

Consecință utilă

Propoziția 1.57

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$*. Presupunem că* $\varphi \sim \psi$*. Atunci*

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Observăm că

$\varphi \sim \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \models \varphi \rightarrow \psi$ și $\models \psi \rightarrow \varphi$

Propoziția 1.17

$\Longleftrightarrow \quad \vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $\vdash \psi \rightarrow \varphi$

Teorema de completitudine.

"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Deoarece $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, rezultă din Propoziția 1.39.(ii) că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Aplicăm acum (MP) pentru a obține că $\Gamma \vdash \psi$.

"$\Leftarrow$" Similar. $\square$

Notații

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă.

Notații

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma \nvdash \varphi & :\Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este } \Gamma\text{-teoremă} \\
\nvdash \varphi & :\Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este teoremă} \\
\Gamma \not\models \varphi & :\Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este consecință semantică a lui } \Gamma \\
\not\models \varphi & :\Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este tautologie.}
\end{array}
$$

Mulțimi consistente

Definiția 1.58

Fie Γ o mulțime de formule.

- *Γ este consistentă dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash \varphi$.*
- *Γ este inconsistentă dacă nu este consistentă, adică, $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ.*

Observație

Fie Γ, Δ mulțimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- Dacă Δ este consistentă, atunci și Γ este consistentă.
- Dacă Γ este inconsistentă, atunci și Δ este inconsistentă.

Mulțimi consistente

Propoziția 1.59

(i) $\emptyset$ *este consistentă.*

(ii) *Mulțimea teoremelor este consistentă.*

Dem.:

(i) Dacă $\vdash \bot$, atunci, conform Teoremei de corectitudine 1.54, ar rezulta că $\vDash \bot$, o contradicție. Așadar $\not\vdash \bot$, deci $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Aplicând Propoziția 1.39.(iv) pentru $\Gamma = \emptyset$, obținem că $Thm = Thm(Thm)$, adică, pentru orice φ,

$$\vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad Thm \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că *Thm* este consistentă. $\square$

Propoziția 1.60

Pentru o mulțime de formule Γ *sunt echivalente:*

(i) Γ *este inconsistentă.*

(ii) *Pentru orice formulă* ψ, $\Gamma \vdash \psi$ *și* $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iii) *Există o formulă* ψ *a.î.* $\Gamma \vdash \psi$ *și* $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iv) $\Gamma \vdash \bot$.

Dem.: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ și $(i) \Rightarrow (iv)$ sunt evidente.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Fie φ o formulă. Conform (38) din Propoziția 1.51,

$$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi).$$

Aplicând (iii) și de două ori modus ponens, rezultă că $\Gamma \vdash \varphi$.
$(iv) \Rightarrow (iii)$. Presupunem că $\Gamma \vdash \bot$. Avem că $\bot = \neg\top$. Deoarece $\top$ este tautologie, aplicăm Teorema de completitudine pentru a conclude că $\vdash \top$, deci și $\Gamma \vdash \top$. $\square$

Propoziția 1.61

Fie Γ *o mulțime de formule și* φ *o formulă.*

(i) $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *este inconsistentă.*

(ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ *este inconsistentă.*

Dem.:

(i) Avem

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \\
& & \text{Propoziția 1.60} \\
& \iff & \Gamma \vdash \neg\varphi \to \bot \\
& & \text{Teorema deducției} \\
& \iff & \Gamma \vdash \varphi \\
& & \neg\varphi \to \bot \sim \varphi \text{ și P. 1.57.}
\end{array}
$$

(ii) Similar. $\square$

Propoziția 1.62

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *o mulțime finită de formule.*

(i) *Pentru orice formulă* ψ, $\Gamma \vdash \psi$ *ddacă* $\vdash \varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n \to \psi$ *ddacă* $\{\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n\} \vdash \psi$.

(ii) Γ *este consistentă ddacă* $\{\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n\}$ *este consistentă.*

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.63

Fie Γ o mulțime de formule. Γ este inconsistentă ddacă Γ are o submulțime finită inconsistentă.

Dem.: "$\Leftarrow$" este evidentă.
"$\Rightarrow$" Presupunem că Γ este inconsistentă. Atunci, conform Propoziției 1.60.(iv), $\Gamma \vdash \perp$. Aplicând Propoziția 1.44, obținem o submulțime finită $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \perp$. Prin urmare, Σ este inconsistentă.

Un rezultat echivalent:

Propoziția 1.64

Fie Γ o mulțime de formule. Γ este consistentă ddacă orice submulțime finită a lui Γ este consistentă.

Consecință a Teoremei de completitudine

Teorema 1.65

Pentru orice formulă φ,

$$\{\varphi\} \text{ este consistentă } \iff \{\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: Avem

$$\begin{array}{lll} \{\varphi\} \text{ este inconsistentă} & \iff & \vdash \neg\varphi \\ & & \text{Propoziția 1.61.(ii)} \\ & \iff & \models \neg\varphi \\ & & \text{Teorema de completitudine} \\ & \iff & \{\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ & & \text{Propoziția 1.30.(ii).} \end{array}$$

Așadar, $\{\varphi\}$ este consistentă $\iff$ $\{\varphi\}$ este satisfiabilă. $\square$

Teorema 1.66 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)

Pentru orice mulțime de formule Γ,

$$\Gamma \text{ este consistentă} \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: "$\Leftarrow$" Presupunem că Γ este satisfiabilă, deci are un model $e : V \to \{0, 1\}$. Presupunem că Γ nu este consistentă. Atunci $\Gamma \vdash \bot$ și, aplicând Teorema de corectitudine 1.54, rezultă că $\Gamma \vDash \bot$. Ca urmare, $e \vDash \bot$, ceea ce este o contradicție.

"$\Rightarrow$" Presupunem că Γ este consistentă. Demonstrăm că Γ este finit satisfiabilă și aplicăm apoi Teorema de compacitate 1.34 pentru a conclude că Γ este satisfiabilă.

Fie $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o submulțime finită a lui Γ. Atunci Σ este consistentă, conform Propoziției 1.64. Din Propoziția 1.62.(ii), rezultă că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă. Aplicând acum Teorema 1.65 obținem că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este satisfiabilă. Deoarece, conform Propoziției 1.31.(i), $\Sigma \sim \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$, avem că Σ este satisfiabilă. $\square$

Teorema 1.67 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$$

Dem.:

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma \vdash \varphi & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} \\
 & & \text{Propoziția 1.61.(i)} \\
 & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\
 & & \text{Teorema de completitudine tare - versiunea 1} \\
 & \iff & \Gamma \vDash \varphi \\
 & & \text{Propoziția 1.30.(i).}
\end{array}
$$

□

Observație

Am demonstrat Teorema de completitudine tare - versiunea 2 folosind Teorema de completitudine tare - versiunea 1. Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente (exercițiu).