Media și dispersia v.a. discrete

Fie X o v.a. discretă cu repartiția:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \overset{def.}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}$$

media v.a. X (expected value / espérance mathématique)

$$\boxed{Var(X) \overset{def.}{=} \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)}$$

dispersia v.a. X (varianta) (variance)

Obs. În practică, pentru calculul dispersiei folosim formula:

$$\boxed{Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

Proprietăți

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$

2. $\mathbb{E}(aX \pm bY) = a\mathbb{E}(X) \pm b \cdot \mathbb{E}(Y)$

3. $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$ numai dacă X, Y IND.

$\boxed{\text{OBS}}$: $E(c) = c$

1. $Var(X) \geq 0$

OBS. $Var(X) = 0 \Leftrightarrow X = \text{const.}$ $\quad X : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $Var(aX \pm bY) = a^2 \cdot Var(X) + b^2 \cdot Var(Y)$ numai dacă X, Y IND.

OBS : 1) $Var(X \pm c) = Var(X)$

2) $Var(a \cdot X) = a^2 \cdot Var(X)$

3) $Var(c) = 0$

Obs. 1) Deseori, în practică se folosește notația $\mathbb{E}(X) = m$ sau $\mathbb{E}(X) = \mu$ și $Var(X) = \sigma^2$

2) O noțiune utilă în continuare este $\boxed{\sigma = \sqrt{Var(X)}}$ numită abaterea medie pătratică / deviație standard

Momente inițiale și centrate de ordin r

$$\boxed{\begin{gathered} m_r = \mathbb{E}(X^r) \\ \mathbb{E}(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \cdot p_i \end{gathered}}$$

moment inițial de ordin r al v.a. X

$$\boxed{\begin{gathered} \mu_r = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^r\right) \\ \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^r\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^r \cdot p_i \end{gathered}}$$

moment centrat de ordin r al v.a. X

$$\boxed{A_s(X) = \frac{\mu_3(X)}{\mu_2^{3/2}(X)}}$$

coeficient de asimetrie

$$\boxed{e(X) = \frac{\mu_4(X)}{\mu_2^2(X)} - 3}$$

coeficient de exces

Variabile aleatoare bidimensionale

Fie X și Y două v.a. discrete. Atunci $Z=(X,Y)$ este o v.a. bidimensională discretă.

Repartiția comună a v.a. X și Y:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	....	y_j	......	y_m	p_i
x_1	π_{11}	π_{12}	....	π_{1j}	......	π_{1m}	p_1
x_2	π_{21}	...	...	...	...	...	p_2
$\vdots$							$\vdots$
x_i	...	...	...	π_{ij}	...	...	p_i
$\vdots$							$\vdots$
x_n	π_{n1}	...	...	...	...	π_{nm}	p_n
q_j	q_1	q_2	...	q_j	......	q_m	1

→ probabilitățile repartiției comune

$$\boxed{\pi_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}$$

repartiții marginale

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \qquad Y: \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}$$

OBS: X, Y independente $\iff \pi_{ij} = p_i \cdot q_j \quad \forall i,j$

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X\cdot Y) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)}$$ → covarianța

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}} \in [-1,1]$$

→ coeficientul de corelație Pearson

$\boxed{\text{OBS}}$: 1) Semnul lui ρ ne spune tipul de legătură dintre X și Y (+ → directă , − → inversă)

2) Dacă :
- $\rho = 0 \Rightarrow$ X, Y sunt NECORELATE
- $|\rho| \in (0, 0{,}25) \Rightarrow$ X, Y sunt SLAB CORELATE
- $|\rho| \in [0{,}25, 0{,}75] \Rightarrow$ X, Y sunt CORELATE
- $|\rho| \in (0{,}75, 1] \Rightarrow$ X, Y sunt PUTERNIC CORELATE

Operații cu v.a. discrete dependente

$$X \pm Y : \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 & x_1 \pm y_2 & \dots & x_1 \pm y_m & \dots & x_n \pm y_m \\ \pi_{11} & \pi_{12} & & \pi_{1m} & \dots & \pi_{nm} \end{pmatrix}$$

→ probabilitățile date de repartiția comună