

Variabile legate și libere

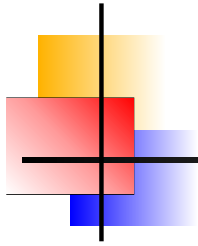
Definiția 2.22

Fie $\varphi = \varphi_0\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui \mathcal{L} și x o variabilă.

- ▶ spunem că variabila x **apare legată pe poziția k** în φ dacă $x = \varphi_k$ și există $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ a.î. (i, j) -subexpresia lui φ este o subexpresie a lui φ de forma $\forall x\psi$;
- ▶ spunem că x **apare liberă pe poziția k** în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în φ ;
- ▶ x este **variabilă legată** (bounded variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ ;
- ▶ x este **variabilă liberă** (free variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ .

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \rightarrow x = z$. Variabile libere: x, y, z . Variabile legate: x .



Variabile legate și libere

Notăție: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ .

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

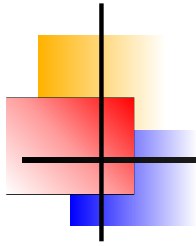
$$FV(\varphi) = Var(\varphi), \quad \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;}$$

$$FV(\neg\varphi) = FV(\varphi);$$

$$FV(\varphi \rightarrow \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi);$$

$$FV(\forall x\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}.$$

Notăție: $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.



Interpretarea termenilor și formulelor

Propoziția 2.23

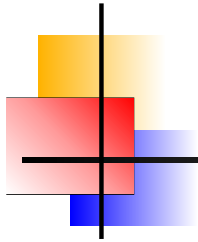
Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$,
pentru orice termen t ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in \text{Var}(t)$, atunci
$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Propoziția 2.24

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} , orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$,
pentru orice formulă φ ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in \text{FV}(\varphi)$, atunci
$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].$$



Echivalențe și consecințe logice

Propoziția 2.25

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \models \exists x\varphi \quad (15)$$

$$\varphi \models \forall x\varphi \quad (16)$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x\psi \quad (17)$$

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \forall x\psi \quad (18)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \exists x\psi \quad (19)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x\psi \quad (20)$$

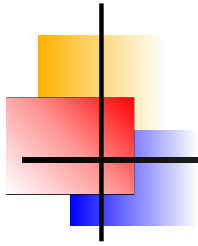
$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (21)$$

$$\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \exists x\psi \quad (22)$$

$$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \models \exists x\psi \rightarrow \varphi \quad (23)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x\psi \rightarrow \varphi \quad (24)$$

Dem.: Exercițiu.



Enunțuri

Definiția 2.26

O formulă φ se numește **enunț** (sentence) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.

Notăție: $Sent_{\mathcal{L}} :=$ mulțimea enunțurilor lui \mathcal{L} .

Propoziția 2.27

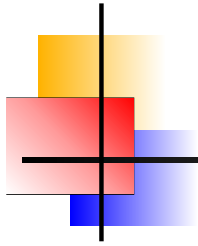
Fie φ un enunț. Pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$$

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 2.24 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. □

Definiția 2.28

O \mathcal{L} -structură \mathcal{A} este un **model** al lui φ dacă $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pentru o (orice) evaluare $e : V \rightarrow A$. **Notăție:** $\mathcal{A} \models \varphi$



Substituția

Fie x o variabilă a lui \mathcal{L} și u termen al lui \mathcal{L} .

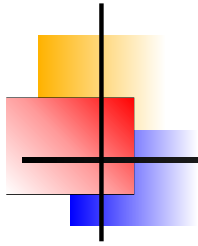
Definiția 2.29

Pentru orice termen t al lui \mathcal{L} , definim

$t_x(u) :=$ *expresia obținută din t prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui x cu u .*

Propoziția 2.30

Pentru orice termen t al lui \mathcal{L} , $t_x(u)$ este termen al lui \mathcal{L} .



Substituția

- ▶ Vrem să definim analog $\varphi_x(u)$ ca fiind expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor **libere** ale lui x cu u .
- ▶ De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

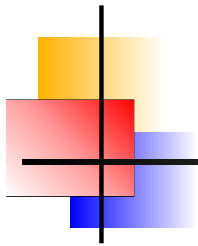
$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie $\varphi := \exists y \neg(x = y)$ și $u := y$. Atunci $\varphi_x(u) = \exists y \neg(y = y)$.

Avem

- ▶ Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} cu $|A| \geq 2$ și pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \forall x\varphi$.
- ▶ $\varphi_x(u)$ nu este satisfiabilă.



Substituția

Fie x o variabilă, u un termen și φ o formulă.

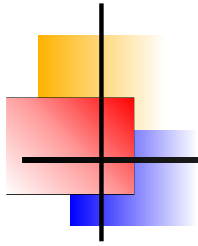
Definiția 2.31

Spunem că x este *liberă pentru u* în φ sau că u este *substituibil pentru x* în φ dacă pentru orice variabilă y care apare în u , nici o subformulă a lui φ de forma $\forall y\psi$ nu conține apariții libere ale lui x .

Observație

x este liberă pentru u în φ în oricare din următoarele situații:

- ▶ u nu conține variabile;
- ▶ φ nu conține variabile care apar în u ;
- ▶ nici o variabilă din u nu apare legată în φ ;
- ▶ x nu apare în φ ;
- ▶ φ nu conține apariții libere ale lui x .



Substituția

Fie x o variabilă, u termen și φ o formulă a.î. x este liberă pentru u în φ .

Definiția 2.32

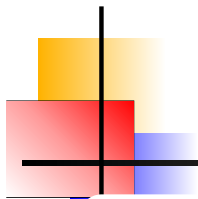
$\varphi_x(u) :=$ expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor *libere* ale lui x cu u .

Spunem că $\varphi_x(u)$ este o *substituție liberă*.

Propoziția 2.33

$\varphi_x(u)$ este formulă a lui \mathcal{L} .

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am aștepta.



Substituția

Propoziția 2.34

Pentru orice termeni u_1 și u_2 și orice variabilă x ,

(i) pentru orice termen t ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

(ii) pentru orice formulă φ a.î. x este liberă pentru u_1 și u_2 în φ ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

Propoziția 2.35

Fie φ o formulă și x o variabilă.

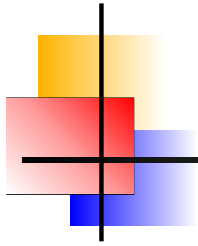
(i) Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u), \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

(ii) $\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi, \quad \models \varphi \rightarrow \exists x\varphi.$

(iii) Pentru orice simbol de constantă c ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(c), \quad \models \varphi_x(c) \rightarrow \exists x\varphi.$$

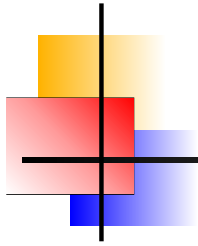


Substituția

În general, dacă x și y sunt variabile, φ și $\varphi_x(y)$ nu sunt logic echivalente: fie \mathcal{L}_{ar} , \mathcal{N} și $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ a.î.
 $e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4$. Atunci

$$\mathcal{N} \models (x < z)[e], \text{ dar } \mathcal{N} \not\models (x < z)_x(y)[e].$$

Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflicte.

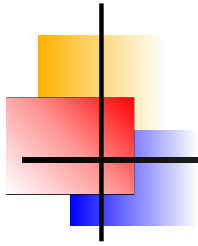


Propoziția 2.36

Pentru orice formulă φ , variabile distincte x și y a.î. $y \notin FV(\varphi)$ și y este substituibil pentru x în φ ,

$$\exists x\varphi \models \exists y\varphi_x(y) \quad \text{și} \quad \forall x\varphi \models \forall y\varphi_x(y).$$

Folosim Propoziția 2.36 astfel: dacă $\varphi_x(u)$ nu este substituție liberă (i.e. x nu este liberă pentru u în φ), atunci înlocuim φ cu o formulă φ' logic echivalentă a.î. $\varphi'_x(u)$ este substituție liberă.



Substituția

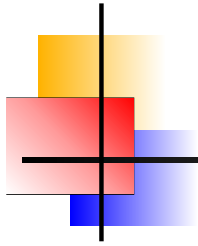
Definiția 2.37

Pentru orice formulă φ și orice variabile y_1, \dots, y_k , **variantea** y_1, \dots, y_k -**liberă** φ' a lui φ este definită recursiv astfel:

- ▶ dacă φ este formulă atomică, atunci φ' este φ ;
- ▶ dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci φ' este $\neg\psi'$;
- ▶ dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, atunci φ' este $\psi' \rightarrow \chi'$;
- ▶ dacă $\varphi = \forall z\psi$, atunci

$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w\psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \dots, y_k\} \\ \forall z\psi' & \text{altfel;} \end{cases}$$

unde w este prima variabilă din șirul v_0, v_1, \dots , care nu apare în ψ' și nu este printre y_1, \dots, y_k .



Substituția

Definiția 2.38

φ' este **variantă** a lui φ dacă este varianta y_1, \dots, y_k -liberă a lui φ pentru anumite variabile y_1, \dots, y_k .

Propoziția 2.39

- (i) Pentru orice formulă φ , dacă φ' este o variantă a lui φ , atunci $\varphi \models \varphi'$;
- (ii) Pentru orice formulă φ și orice termen t , dacă variabilele lui t se află printre y_1, \dots, y_k și φ' este varianta y_1, \dots, y_k -liberă a lui φ , atunci $\varphi'_x(t)$ este o substituție liberă.



Forma normală prenex

Definiția 2.40

O formulă care nu conține cuantificatori se numește **liberă de cuantificatori** ("quantifier-free").

Definiția 2.41

O formulă φ este în **formă normală prenex** dacă

$$\varphi = Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n \psi,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, x_1, \dots, x_n sunt variabile și ψ este formulă liberă de cuantificatori. Formula ψ se numește **matricea** lui φ și $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n$ este **prefixul** lui φ .

Exemple de formule în formă normală prenex:

- ▶ Formulele **universale**: $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \psi$, unde ψ este liberă de cuantificatori
- ▶ Formulele **existențiale**: $\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \psi$, unde ψ este liberă de cuantificatori



Forma normală prenex

Fie φ o formulă și t_1, \dots, t_n termeni care nu conțin variabile din φ . Notăm cu $\varphi_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n)$ formula obținută din φ substituind toate aparițiile libere ale lui x_1, \dots, x_n cu t_1, \dots, t_n respectiv.

Notății: $\forall^c = \exists$, $\exists^c = \forall$.

Teorema 2.42 (Teorema de formă normală prenex)

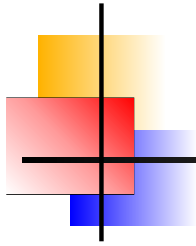
Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \models \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Dem.: Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- φ este formulă atomică. Atunci $\varphi^* := \varphi$.
- $\varphi = \neg\psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă $\psi^* = Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi_0$ în formă normală prenex a.î. $\psi \models \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$. Definim

$$\varphi^* := Q_1^cx_1 \dots Q_n^cx_n \neg\psi_0.$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $\varphi^* \models \neg\psi^* \models \neg\psi = \varphi$ și $FV(\varphi^*) = FV(\psi^*) = FV(\psi) = FV(\varphi)$.



Forma normală prenex

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ și, conform ipotezei de inducție, există formulele în formă normală prenex

$$\psi^* = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi_0, \quad \chi^* = S_1 z_1 \dots S_m z_m \chi_0$$

a.î. $\psi \models \psi^*$, $FV(\psi) = FV(\psi^*)$, $\chi \models \chi^*$ și $FV(\chi) = FV(\chi^*)$.

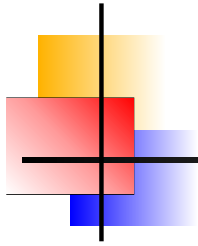
Notăm cu V_0 mulțimea tuturor variabilelor care apar în ψ^* sau χ^* . Fie $\tilde{\psi}^*$ (resp. $\tilde{\chi}^*$) varianta V_0 -liberă a lui ψ^* (resp. χ^*). Atunci

$$\tilde{\psi}^* = Q_1 y_1 \dots Q_n y_n \tilde{\psi}_0, \quad \tilde{\chi}^* = S_1 w_1 \dots S_m w_m \tilde{\chi}_0,$$

unde $y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_m$ sunt variabile care nu apar în V_0 ,

$\tilde{\psi}_0 = \psi_{0_{x_1, \dots, x_n}}(y_1, \dots, y_n)$ și $\tilde{\chi}_0 = \chi_{0_{z_1, \dots, z_m}}(w_1, \dots, w_m)$.

Conform Propoziției 2.39.(i), $\tilde{\psi}^* \models \psi^*$ și $\tilde{\chi}^* \models \chi^*$. De asemenea, $FV(\tilde{\psi}^*) = FV(\psi^*)$ și $FV(\tilde{\chi}^*) = FV(\chi^*)$.



Forma normală prenex

Definim

$$\varphi^* := Q_1^c y_1 \dots Q_n^c y_n S_1 w_1 \dots S_m w_m (\tilde{\psi}_0 \rightarrow \tilde{\chi}_0).$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $FV(\varphi^*) = FV(\varphi)$ și

$$\begin{aligned}\varphi^* &\models \tilde{\psi}^* \rightarrow \tilde{\chi}^* \\ &\models \psi^* \rightarrow \chi^* \\ &\models \psi \rightarrow \chi = \varphi.\end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x \psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă ψ^* în formă normală prenex a.î. $\psi \models \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$.

Definim $\varphi^* := \forall x \psi^*$.





Forma normală prenex

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi care conține

- ▶ două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q ;
- ▶ un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g ;
- ▶ două simboluri de constante c, d .

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \exists y(g(y, z) = c) \wedge \neg \exists x(f(x) = d)$$

Avem

$$\begin{aligned}\varphi &\models \exists y(g(y, z) = c \wedge \neg \exists x(f(x) = d)) \\ &\models \exists y(g(y, z) = c \wedge \forall x \neg (f(x) = d)) \\ &\models \exists y \forall x (g(y, z) = c \wedge \neg (f(x) = d))\end{aligned}$$

Prin urmare, $\varphi^* = \exists y \forall x (g(y, z) = c \wedge \neg (f(x) = d))$ este o formă normală prenex pentru φ .

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg \forall y (S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d).$$

Avem că

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \exists y \neg (S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\equiv \exists y \neg \exists z (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\equiv \exists y \neg \exists z (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\equiv \exists y \forall z \neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\equiv \exists y \forall z (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d)) \\ &\equiv \exists y \forall z \forall x (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d)) \\ &\equiv \exists y \forall z \forall x (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \exists v (P(x, v) \rightarrow f(x) = d)) \\ &\equiv \exists y \forall z \forall x \exists v (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge (P(x, v) \rightarrow f(x) = d))\end{aligned}$$

$\varphi^* = \exists y \forall z \forall x \exists v (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge (P(x, v) \rightarrow f(x) = d))$ este o formă normală prenex pentru φ .