Curs 8

Cristian Niculescu

1 Covarianţă şi corelaţie

1.1 Scopurile învăţării

1. Să înţeleagă covarianţa şi corelaţia.
2. Să poată calcula covarianţa şi corelaţia a 2 variabile aleatoare.

1.2 Covarianţa

Covarianţa este o măsură a cât de mult 2 variabile aleatoare variază împreună. De exemplu, înălţimea şi greutatea girafelor au covarianţa pozitivă deoarece, când una este mare, cealaltă tinde de asemenea să fie mare.
Definiţie. Presupunem că X şi Y sunt variabile aleatoare cu mediile μ_X şi μ_Y. Covarianţa lui X şi Y este

$$Cov(X,Y) = E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right).$$

1.2.1 Proprietăţile covarianţei

1. $Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y), \forall a,b,c,d$ constante.
2. $Cov(X_1+X_2, Y) = Cov(X_1,Y) + Cov(X_2,Y)$.
3. $Cov(X,X) = Var(X)$.
4. $Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y$.
5. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y), \forall X,Y$.
6. Dacă X şi Y sunt independente, atunci $Cov(X,Y) = 0$.

Avertizare. Reciproca este falsă: covarianţă 0 nu implică totdeauna independenţă.
Observaţii. 1. Proprietatea 4 este ca proprietatea similară pentru dispersie. Într-adevăr, dacă $X = Y$, este exact acea proprietate:
$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2$.
Proprietatea 6 reduce formula din proprietatea 5 la formula anterioară
$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ când X şi Y sunt independente.
2. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X), \forall X,Y$.

1.2.2 Sume şi integrale pentru calculul covarianţei

Deoarece covarianţa este definită ca o medie, o calculăm ca de obicei ca o sumă sau integrală.
Cazul discret. Dacă X şi Y are pmf $p(x_i, y_j)$ atunci

$$Cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)(x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)\, x_i y_j\right) - \mu_X \mu_Y.$$

Cazul continuu. Dacă X şi Y au pdf comună $f(x,y)$ pe domeniul $[a,b] \times [c,d]$, atunci

$$Cov(X,Y) = \int_c^d \int_a^b (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f(x,y)dxdy = \left(\int_c^d \int_a^b xyf(x,y)dxdy\right) - \mu_X \mu_Y.$$

1.2.3 Exemple

Exemplul 1. Aruncăm o monedă corectă de 3 ori. Fie X numărul de aversuri în primele 2 aruncări şi Y numărul de aversuri din ultimele 2 aruncări (astfel încât este o suprapunere peste aruncarea din mijloc). Calculaţi $Cov(X,Y)$.
Răspuns. Metoda I (folosind tabelul probabilităţilor comune şi definiţia covarianţei).
Cu 3 aruncări sunt doar 8 rezultate $\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$, deci putem face direct tabelul de probabilitate comună.

$X \backslash Y$	0	1	2	$p(x_i)$
0	1/8	1/8	0	1/4
1	1/8	2/8	1/8	1/2
2	0	1/8	1/8	1/4
$p(y_j)$	1/4	1/2	1/4	1

Din marginale calculăm $E(X) = 1 = E(Y)$. Acum folosim definiţia:

$$Cov(X,Y) = E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) = \sum_{i,j} p(x_i, y_j)(x_i - 1)(y_j - 1).$$

Scriem suma eliminând termenii care sunt 0, i.e. toţi termenii unde $x_i = 1$ sau $y_j = 1$ sau probabilitatea este 0.

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{8}(0-1)(0-1) + \frac{1}{8}(2-1)(2-1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Metoda II (folosind tabelul probabilităţilor comune şi proprietatea 4).
Ca la metoda I se calculează tabelul probabilităţilor comune şi mediile lui X şi Y. Din tabel calculăm

$$E(XY) = \sum_{i,j} p(x_i, y_j) x_i y_j = 1 \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Din proprietatea 4,

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}.$$

Metoda III (folosind proprietăţile covarianţei). Ca de obicei, fie X_i rezultatul celei de-a i-a aruncări, deci $X_i \sim \text{Bernoulli}(0.5)$. Avem

$$X = X_1 + X_2 \;\text{ şi }\; Y = X_2 + X_3.$$

Ştim că $E(X_i) = 1/2$ şi $Var(X_i) = 1/4, \forall i = 1, 2, 3$. De aceea, folosind proprietatea 2 a covarianţei şi observaţia 2, avem

$$Cov(X,Y) = Cov(X_1+X_2, X_2+X_3) = Cov(X_1, X_2)+Cov(X_1, X_3)+Cov(X_2, X_2)+Cov(X_2, X_3).$$

Deoarece aruncările diferite sunt independente, din proprietatea 6,

$$Cov(X_1, X_2) = Cov(X_1, X_3) = Cov(X_2, X_3) = 0.$$

Deci, din proprietatea 3,

$$Cov(X,Y) = Cov(X_2, X_2) = Var(X_2) = \frac{1}{4}.$$

Exemplul 2. (Covarianţă 0 nu implică independenţa.) Fie $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$.
Fie $Y = X^2$. Arătaţi că avem $Cov(X,Y) = 0$, dar X şi Y nu sunt independente.
Răspuns. Facem un tabel de probabilitate comună

$Y \backslash X$	-2	-1	0	1	2	$p(y_j)$
0	0	0	1/5	0	0	1/5
1	0	1/5	0	1/5	0	2/5
4	1/5	0	0	0	1/5	2/5
$p(x_i)$	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1

Folosind marginalele calculăm $E(X) = 0$ şi $E(Y) = 2$.
Calculăm covarianţa folosind proprietatea 4:

$$Cov(X,Y) = \sum_{i,j} p(x_i, y_j) x_i y_j - \mu_X \mu_Y = \frac{1}{5}(-8 - 1 + 1 + 8) - 0 \cdot 2 = 0.$$

Arătăm că Xşi Y nu sunt independente. Pentru a face asta, trebuie să găsim un loc unde regula produsului eşuează, i.e. unde $p(x_i, y_j) \neq p(x_i)p(y_j)$:

$$P(X = -2, Y = 0) = 0 \text{ dar } P(X = -2)P(Y = 0) = (1/5)(1/5) = 1/25.$$

Deoarece acestea nu sunt egale, X şi Y nu sunt independente.
Discuţie. Acest exemplu arată $Cov(X,Y) = 0$ nu implică X şi Y sunt independente. De fapt, X şi X^2 sunt atât de dependente cât pot fi variabilele aleatoare: dacă ştim valoarea lui X, atunci ştim valoarea lui X^2 cu 100% certitudine.
$Cov(X,Y)$ măsoară relaţia liniară dintre X şi Y. În exemplul de mai sus X şi X^2 au o relaţie pătratică complet pierdută de $Cov(X,Y)$.

1.2.4 Demonstraţiile proprietăţilor covarianţei

Proprietăţile 1 şi 2 rezultă din proprietăţile similare pentru medie.
3.

$$Cov(X,X) = E((X - \mu_X)(X - \mu_X)) = E((X - \mu_X)^2) = Var(X).$$

4.

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) \\ &= E(XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y) \\ &= E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + \mu_X \mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y + \mu_X \mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y. \end{aligned}$$

5. Folosind proprietăţile 3 şi 2 şi observaţia 2 obţinem

$$\begin{aligned} Var(X+Y) = Cov(X+Y, X+Y) &= Cov(X,X) + 2Cov(X,Y) + Cov(Y,Y) \\ &= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y). \end{aligned}$$

6. Reamintim că $E(X-\mu_X)=0$. Dacă X şi Y sunt independente, atunci $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. De aceea

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \int\int (x-\mu_X)(y-\mu_Y)f_X(x)f_Y(y)dxdy \\ &= \int (x-\mu_X)f_X(x)dx \int (y-\mu_Y)f_Y(y)dy \\ &= E(X-\mu_X)E(Y-\mu_Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

1.3 Corelaţia

Unităţile de măsură ale covarianţei $Cov(X,Y)$ sunt "unităţile lui X ori unităţile lui Y". Aceasta face grea compararea covarianţelor: dacă schimbăm scalele, atunci se schimbă şi covarianţa. Corelaţia este un mod de a elimina scala din covarianţă.

Definiţie. Coeficientul de corelaţie între X şi Y este definit de

$$Cor(X,Y)=\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

1.3.1 Proprietăţi ale corelaţiei

1. ρ este covarianţa standardizărilor lui X şi Y.
2. ρ este fără dimensiune.
3. $-1\le\rho\le 1$. Mai mult,
$\rho=1 \iff Y=aX+b$ cu $a>0$,
$\rho=-1 \iff Y=aX+b$ cu $a<0$.

Proprietatea 3 arată că ρ măsoară relaţia liniară între variabile. Când corelaţia este pozitivă, atunci, dacă X este mare, Y va tinde să fie mare de asemenea. Când corelaţia este negativă, atunci, dacă X este mare, Y va tinde să fie mic.

Exemplul 2 de mai sus arată că relaţiile de ordin mai mare pot fi ratate complet de corelaţie.

1.3.2 Demonstraţia proprietăţii 3 a corelaţiei

$0\le Var\left(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}\right)=Var\left(\frac{X}{\sigma_X}\right)+Var\left(\frac{Y}{\sigma_Y}\right)-2Cov\left(\frac{X}{\sigma_X},\frac{Y}{\sigma_Y}\right)=2-2\rho \implies \rho\le 1$.

Analog $0\le Var\left(\frac{X}{\sigma_X}+\frac{Y}{\sigma_Y}\right) \implies \rho\ge -1$.

$\rho=1 \iff Var\left(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}\right)=0 \iff \frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}=c \iff Y=aX+b$ cu

$a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} > 0$ şi $b = -c\sigma_Y$.
Analog $\rho = -1 \iff Y = aX + b$ cu $a = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} < 0$.
Exemplu. Continuăm exemplul 1. Pentru a calcula corelaţia împărţim covarianţa la deviaţiile standard. În exemplul 1 am aflat $Cov(X,Y) = 1/4$ şi $Var(X) = 2Var(X_j) = 1/2$. Deci, $\sigma_X = 1/\sqrt{2}$. Analog $\sigma_Y = 1/\sqrt{2}$. Astfel,

$$Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

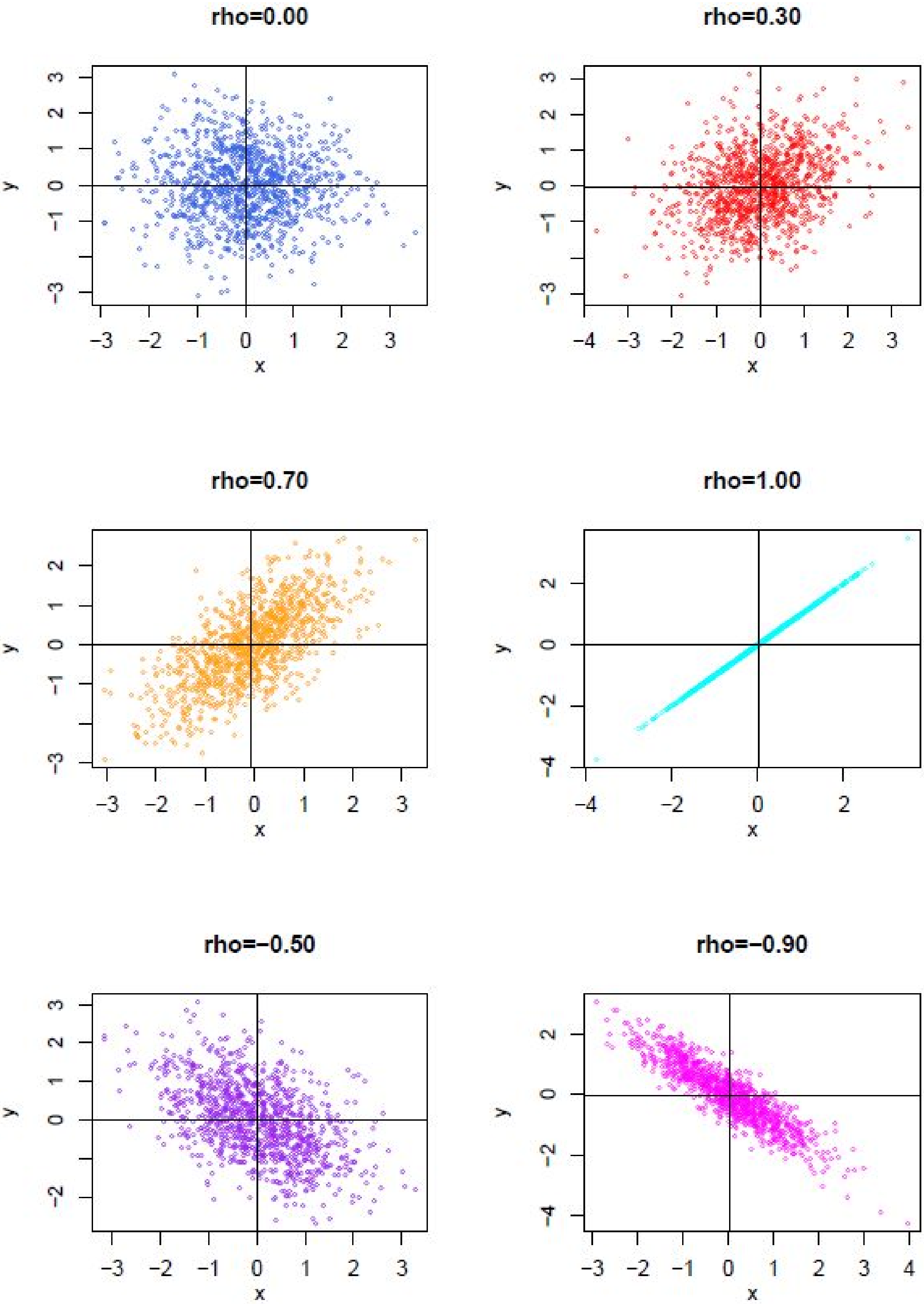
Vedem o corelaţie pozitivă, ceea ce înseamnă că X mai mare tinde să meargă cu Y mai mare şi X mai mic cu Y mai mic. În exemplul 1 aceasta se întâmplă deoarece aruncarea 2 este inclusă atât în X cât şi în Y, deci contribuie la mărimea ambelor.

1.3.3 Repartiţii normale bivariate

Repartiţia normală bivariată are densitatea

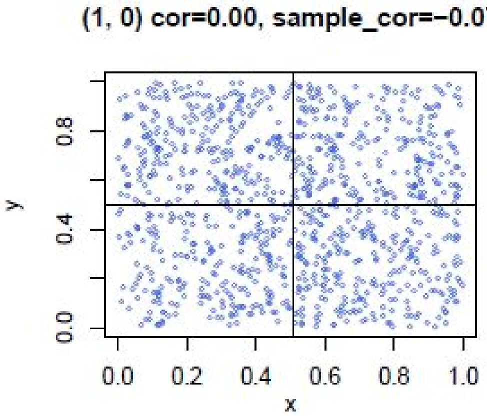
$$f(x,y) = \frac{e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\right]}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}.$$

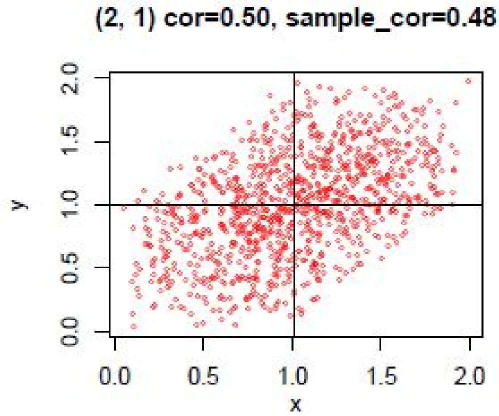
Pentru această repartiţie, repartiţiile marginale pentru X şi Y sunt normale şi corelaţia între X şi Y este ρ.
În figurile de mai jos a fost utilizat R pentru a simula repartiţia pentru diferite valori ale lui ρ. Individual X şi Y sunt normale standard, i.e. $\mu_X = \mu_Y = 0$ şi $\sigma_X = \sigma_Y = 1$. Figurile arată reprezentările rezultatelor.
Aceste reprezentări şi setul următor arată o proprietate importantă a corelaţiei. Împărţim datele în cadrane desenând o linie orizontală la media datelor y şi una verticală la media datelor x. O corelaţie pozitivă corespunde tendinţei datelor de a se afla în cadranele 1 şi 3. O corelaţie negativă corespunde tendinţei datelor de a se afla în cadranele 2 şi 4. Putem vedea datele adunându-se de-a lungul unei linii când ρ devine apropiat de ± 1.

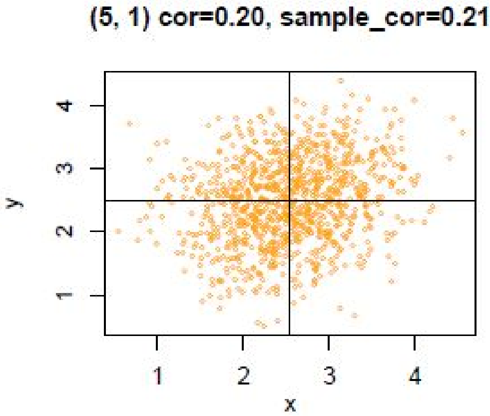

rho=0.00
rho=0.30
rho=0.70
rho=1.00
rho=−0.50
rho=−0.90
x
y

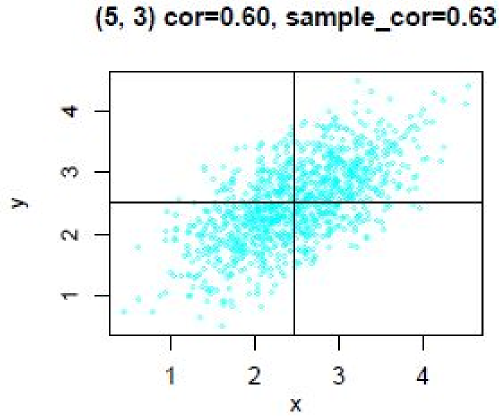
1.3.4 Suprapunerea repartiţiilor uniforme

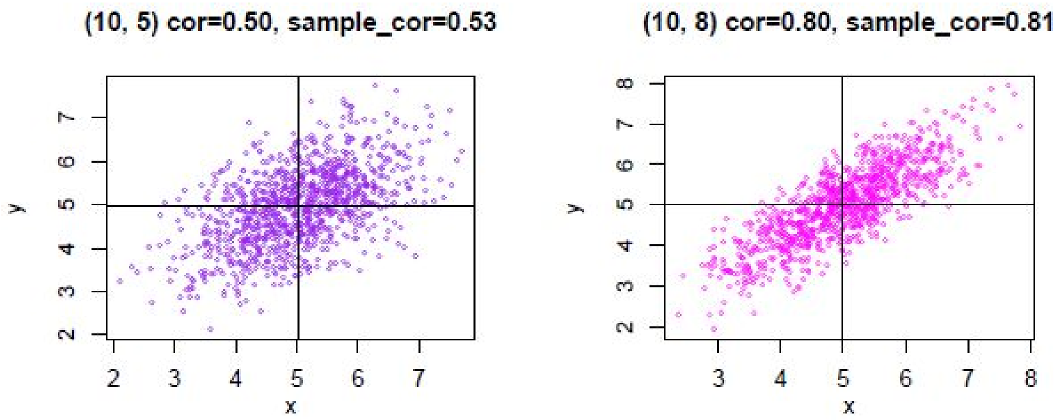
Fie $X_1, X_2, ..., X_{20}$ i.i.d repartizate $U(0, 1)$. X şi Y sunt ambele sume de acelaşi număr de X_i-uri. Numim numărul de X_i-uri comune lui X şi Y suprapunerea. Notaţia din figurile de mai jos indică numărul de X_i-uri adunate şi numărul care se suprapun. De exemplu, 5,3 arată că X şi Y erau fiecare sumă de 5 X_i-uri şi că 3 dintre X_i-uri erau comune ambelor sume. (Datele au fost generate în R folosind `rand(1,1000);`.)
Folosind liniaritatea covarianţei se calculează corelaţia teoretică. Pentru fiecare reprezentare sunt date atât corelaţia teroretică, cât şi corelaţia datelor din eşantionul simulat.











2 Probleme recapitulative

2.1 Numărare şi probabilităţi

1) a) În câte moduri putem aranja literele cuvântului STATISTICS? (De exemplu, SSSTTTIIAC este un aranjament).
b) Dacă toate aranjamentele sunt egal posibile, care este probabilitatea ca "I"-urile să fie unul după altul?

2.2 Probabilitate condiţionată şi teorema lui Bayes

2) Corupt de puterea lui, juriul showului tv *Următorul matematician de top al Americii* a luat mită de la unii participanţi. În fiecare episod, fiecare participant rămâne în show sau este eliminat.
Dacă un participant a mituit juriul, rămâne în show cu probabilitatea 1. Dacă un participant nu a mituit juriul, rămâne în show cu probabilitatea 1/3.
De-a lungul a 2 episoade, presupunem că 1/4 dintre participanţi au mituit juriul. Aceiaşi participanţi mituiesc juriul în ambele runde, i.e., dacă un participant dă mită în prima rundă, dă mită şi în a 2-a (şi viceversa).
a) Dacă alegem aleator un participant care a rămas în show după primul episod, care este probabilitatea să fi mituit juriul?
b) Dacă alegem aleator un participant, care este probabilitatea să rămână în show după ambele episoade?
c) Dacă alegem aleator un participant care a rămas în show după primul episod, care este probabilitatea să fie eliminat în al 2-lea episod?

2.3 Independenţă

3) Aruncăm un zar corect cu 20 de feţe, numerotate de la 1 la 20. Determinaţi dacă următoarele perechi de evenimente sunt independente.
a) "Număr par" şi "Număr ≤ 10".
b) "Număr par" şi "Număr prim".

2.4 Medie şi dispersie

4) Fie $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/8 & 1/4 & 5/8 \end{pmatrix}$.
a) Calculaţi $E(X)$.
b) Daţi pmf pentru $Y = X^2$ şi folosiţi-o pentru a calcula $E(Y)$.
c) În loc de aceasta, calculaţi $E(X^2)$ direct dintr-un tabel extins.
d) Calculaţi Var(X).
5) Calculaţi media şi dispersia unei variabile aleatoare Bernoulli(p).
6) Presupunem că 100 de oameni îşi aruncă pălăria într-o cutie şi apoi aleg aleator câte o pălărie din cutie. Care este media numărului de oameni care îşi iau înapoi pălăria proprie?
Indicaţie: Exprimaţi numărul de oameni care îşi iau înapoi propria pălărie ca o sumă de variabile aleatoare a căror medie este uşor de calculat.

2.5 Funcţii masă de probabilitate, funcţii densitate de probabilitate şi funcţii de repartiţie

7) a) Presupunem că X are funcţia densitate de probabilitate $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pentru $x \geq 0$. Calculaţi cdf, $F_X(x)$.
b) Dacă $Y = X^2$, calculaţi pdf şi cdf ale lui Y.
8) Presupunem că aruncăm un zar corect de 100 de ori (independent) şi primim 3 dolari de fiecare dată când dăm 6. Fie X_1, numărul de dolari primiţi în aruncările de la 1 la 25.
Fie X_2, numărul de dolari primiţi în aruncările de la 26 la 50.
Fie X_3, numărul de dolari primiţi în aruncările de la 51 la 75.
Fie X_4, numărul de dolari primiţi în aruncările de la 76 la 100.
Fie $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, numărul de dolari primiţi în 100 de aruncări.
a) Care este funcţia masă de probabilitate a lui X?
b) Care este media şi dispersia lui X?
c) Fie $Y = 4X_1$. (Deci, în loc să aruncăm de 100 de ori, aruncăm doar de 25 de ori şi înmulţim câştigurile cu 4.)
i) Care sunt media şi dispersia lui Y?

ii) Cum sunt media şi dispersia lui Y în comparaţie cu ale lui X? (I.e., sunt mai mari, mai mici, sau egale?) Explicaţi pe scurt de ce aceasta are sens.

2.6 Probabilitate comună, covarianţă, corelaţie

9) (**Puzzle aritmetic**) Pmf-urile comune şi marginale ale lui X şi Y sunt parţial date în următoarul tabel.

$X \backslash Y$	1	2	3	
1	1/6	0	...	1/3
2	...	1/4	...	1/3
3	...	...	1/4	...
	1/6	1/3	...	1

a) Completaţi tabelul.
b) Sunt X şi Y independente?
10) **Covarianţă şi independenţă**
Fie $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$.
Fie $Y = X^2$.
a) Completaţi următorul tabel dând funcţia de frecvenţă comună pentru X şi Y. Includeţi probabilităţile marginale.

$Y \backslash X$	-2	-1	0	1	2	total
0						
1						
4						
total						

b) Aflaţi $E(X)$ şi $E(Y)$.
c) Arătaţi că X şi Y nu sunt independente.
d) Arătaţi $Cov(X, Y) = 0$.
Acesta este un exemplu de variabile aleatoare necorelate dar dependente. Motivul pentru care aceasta se poate întâmpla este că doar dependenţa liniară este măsurată de corelaţie. În acest caz, X şi Y nu sunt legate liniar.
11) **Repartiţii comune continue.** Presupunem că X şi Y sunt variabile aleatoare continue cu funcţia de densitate comună $f(x, y) = x+y$ pe pătratul unitate $[0, 1] \times [0, 1]$.
a) Fie $F(x, y)$ cdf comună. Calculaţi $F(1, 1)$. Calculaţi $F(x, y)$.

b) Calculaţi densităţile marginale pentru X şi Y.
c) Sunt X şi Y independente?
d) Calculaţi $E(X), E(Y), E(X^2 + Y^2), Cov(X, Y)$.

2.7 Legea numerelor mari, teorema limită centrală

12) Presupunem că $X_1, ..., X_{100}$ sunt i.i.d. cu media 1/5 şi dispersia 1/9. Utilizaţi teorema limită centrală pentru a estima $P\left(\sum X_i < 30\right)$.
13) (Mai mult cu teorema limită centrală)
IQ-ul mediu al unei populaţii este 100 cu deviaţia standard 15 (prin definiţie, IQ-ul este normalizat, deci aşa este şi aici). Care este probabilitatea ca un grup de 100 de oameni selectat aleator să aibă un IQ mediu peste 115?

Tabel standard normal al probabilităţilor cozii stângi.

$\Phi(z) = P(Z \leq z)$ pentru $N(0,1)$. *(Folosiţi interpolarea pentru a estima valorile pentru a 3-a zecimală a lui z.)*

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
-4.00	0.0000	-2.00	0.0228	0.00	0.5000	2.00	0.9772
-3.95	0.0000	-1.95	0.0256	0.05	0.5199	2.05	0.9798
-3.90	0.0000	-1.90	0.0287	0.10	0.5398	2.10	0.9821
-3.85	0.0001	-1.85	0.0322	0.15	0.5596	2.15	0.9842
-3.80	0.0001	-1.80	0.0359	0.20	0.5793	2.20	0.9861
-3.75	0.0001	-1.75	0.0401	0.25	0.5987	2.25	0.9878
-3.70	0.0001	-1.70	0.0446	0.30	0.6179	2.30	0.9893
-3.65	0.0001	-1.65	0.0495	0.35	0.6368	2.35	0.9906
-3.60	0.0002	-1.60	0.0548	0.40	0.6554	2.40	0.9918
-3.55	0.0002	-1.55	0.0606	0.45	0.6736	2.45	0.9929
-3.50	0.0002	-1.50	0.0668	0.50	0.6915	2.50	0.9938
-3.45	0.0003	-1.45	0.0735	0.55	0.7088	2.55	0.9946
-3.40	0.0003	-1.40	0.0808	0.60	0.7257	2.60	0.9953
-3.35	0.0004	-1.35	0.0885	0.65	0.7422	2.65	0.9960
-3.30	0.0005	-1.30	0.0968	0.70	0.7580	2.70	0.9965
-3.25	0.0006	-1.25	0.1056	0.75	0.7734	2.75	0.9970
-3.20	0.0007	-1.20	0.1151	0.80	0.7881	2.80	0.9974
-3.15	0.0008	-1.15	0.1251	0.85	0.8023	2.85	0.9978
-3.10	0.0010	-1.10	0.1357	0.90	0.8159	2.90	0.9981
-3.05	0.0011	-1.05	0.1469	0.95	0.8289	2.95	0.9984
-3.00	0.0013	-1.00	0.1587	1.00	0.8413	3.00	0.9987
-2.95	0.0016	-0.95	0.1711	1.05	0.8531	3.05	0.9989
-2.90	0.0019	-0.90	0.1841	1.10	0.8643	3.10	0.9990
-2.85	0.0022	-0.85	0.1977	1.15	0.8749	3.15	0.9992
-2.80	0.0026	-0.80	0.2119	1.20	0.8849	3.20	0.9993
-2.75	0.0030	-0.75	0.2266	1.25	0.8944	3.25	0.9994
-2.70	0.0035	-0.70	0.2420	1.30	0.9032	3.30	0.9995
-2.65	0.0040	-0.65	0.2578	1.35	0.9115	3.35	0.9996
-2.60	0.0047	-0.60	0.2743	1.40	0.9192	3.40	0.9997
-2.55	0.0054	-0.55	0.2912	1.45	0.9265	3.45	0.9997
-2.50	0.0062	-0.50	0.3085	1.50	0.9332	3.50	0.9998
-2.45	0.0071	-0.45	0.3264	1.55	0.9394	3.55	0.9998
-2.40	0.0082	-0.40	0.3446	1.60	0.9452	3.60	0.9998
-2.35	0.0094	-0.35	0.3632	1.65	0.9505	3.65	0.9999
-2.30	0.0107	-0.30	0.3821	1.70	0.9554	3.70	0.9999
-2.25	0.0122	-0.25	0.4013	1.75	0.9599	3.75	0.9999
-2.20	0.0139	-0.20	0.4207	1.80	0.9641	3.80	0.9999
-2.15	0.0158	-0.15	0.4404	1.85	0.9678	3.85	0.9999
-2.10	0.0179	-0.10	0.4602	1.90	0.9713	3.90	1.0000
-2.05	0.0202	-0.05	0.4801	1.95	0.9744	3.95	1.0000