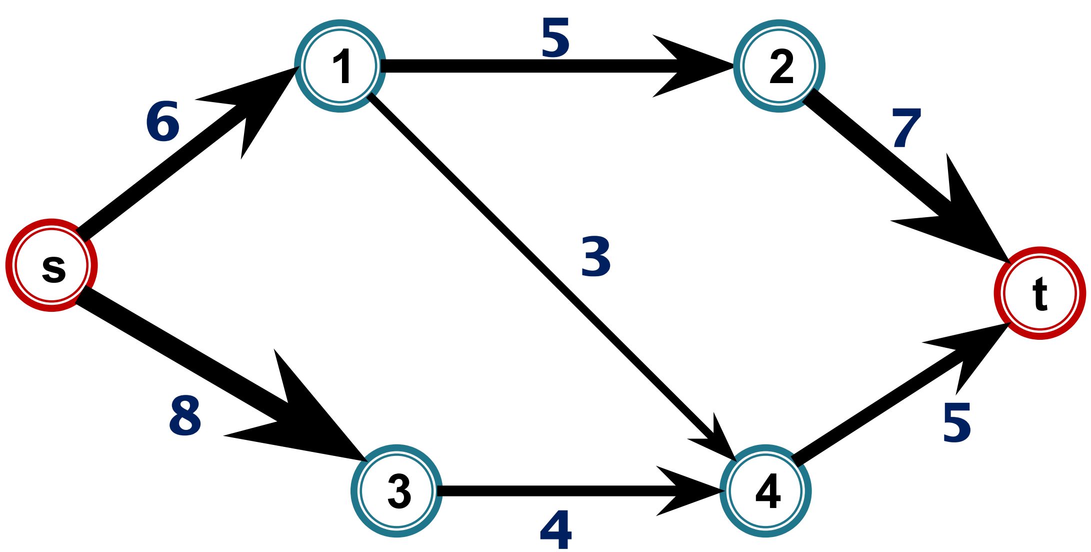
Fluxuri maxime
în rețele de transport

- Avem o reţea în care
  - arcele au limitări de capacitate
  - nodurile = joncţiune

Care este cantitatea maximă care poate fi transmisă prin reţea de la surse la destinaţii?

(în unitatea de timp)



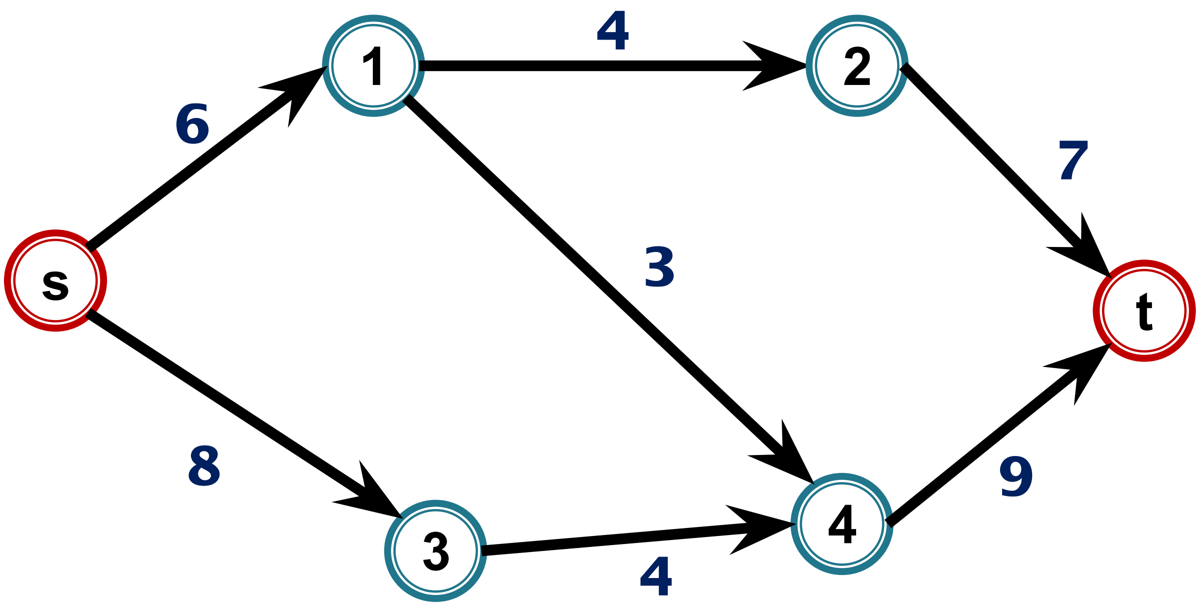
Fluxuri în rețele de transport

- **Rețea de comunicare**
  - **Transferul de informații - limitat de lățimea de bandă**

- **Rețele de transport / evacuare în caz de urgențe**
  - **Limitare - număr de mașini/persoane în unitatea de timp**

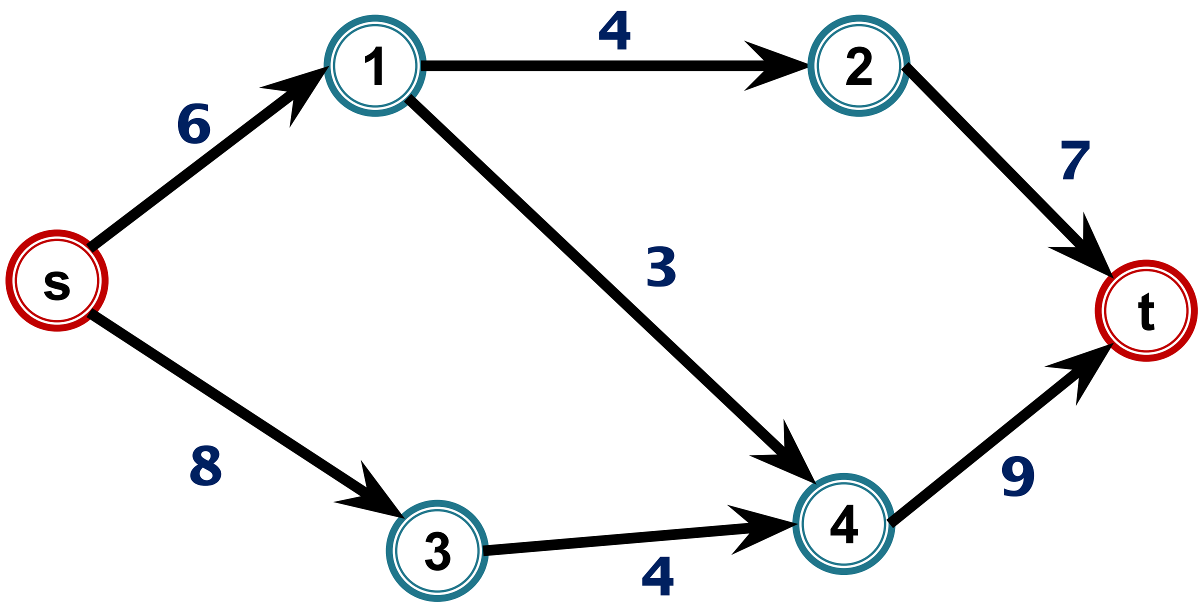
- **Rețele de conducte**
- ...

Fluxuri în rețele de transport

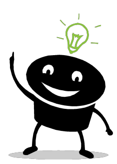


Încercăm să trimitem marfă (flux) de la vârful sursă s la destinaţia t

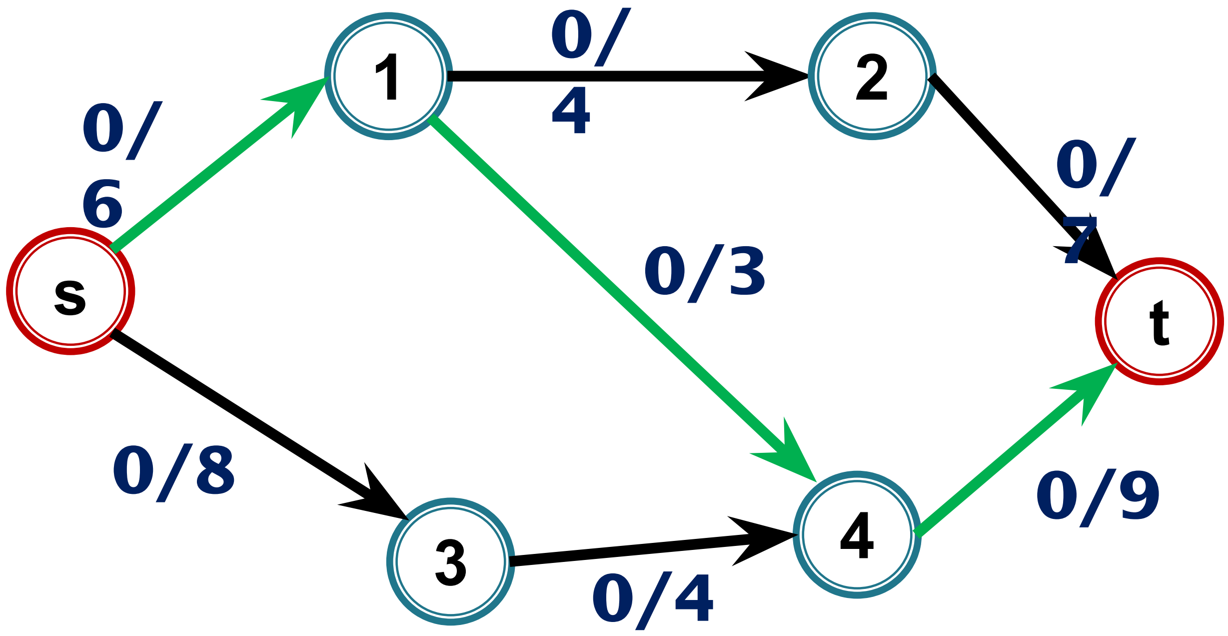
Fluxuri în rețele de transport



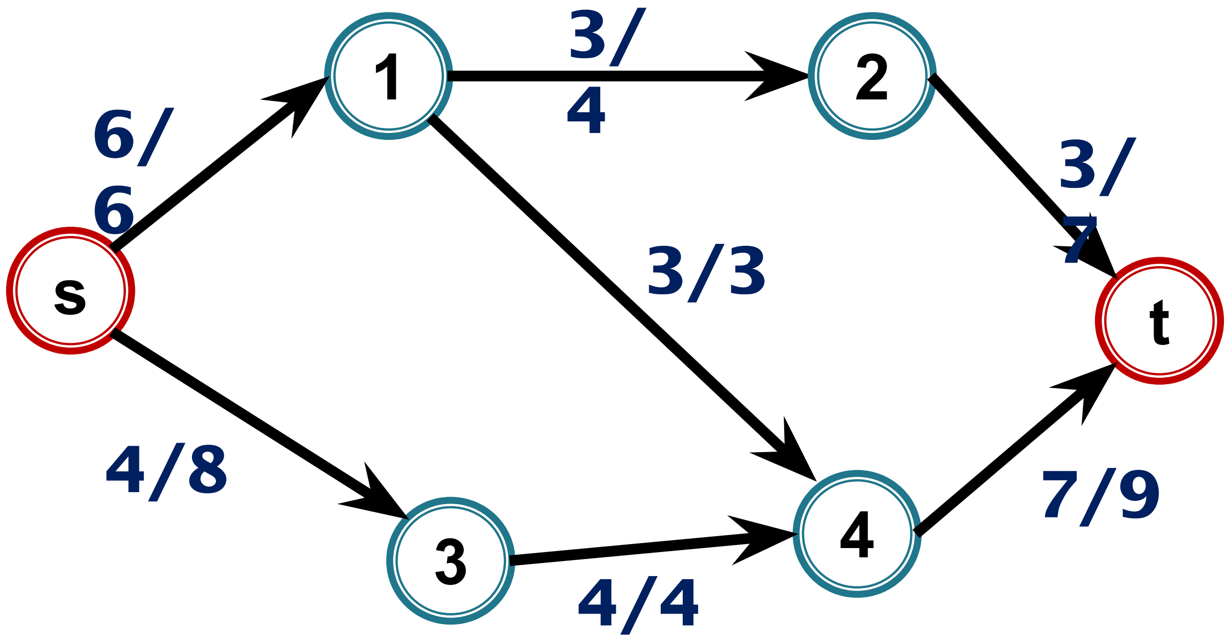
Încercăm să trimitem marfă (flux) de la vârful sursă s la destinaţia t



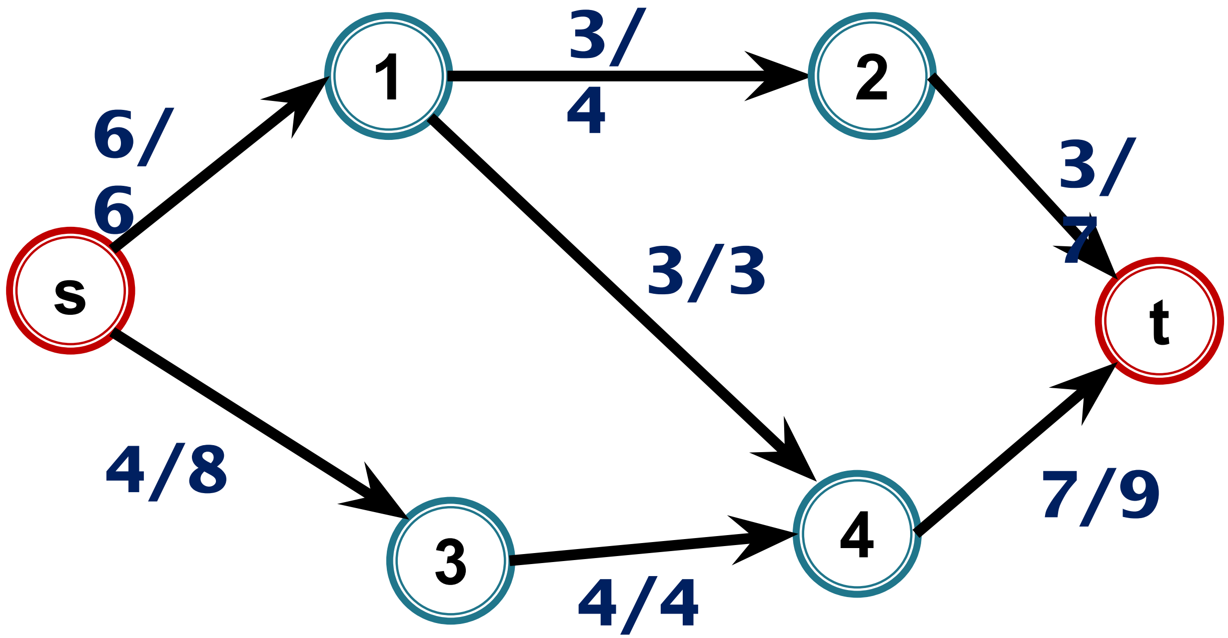
Determinăm drumuri de la s la t pe care mai putem trimite marfă



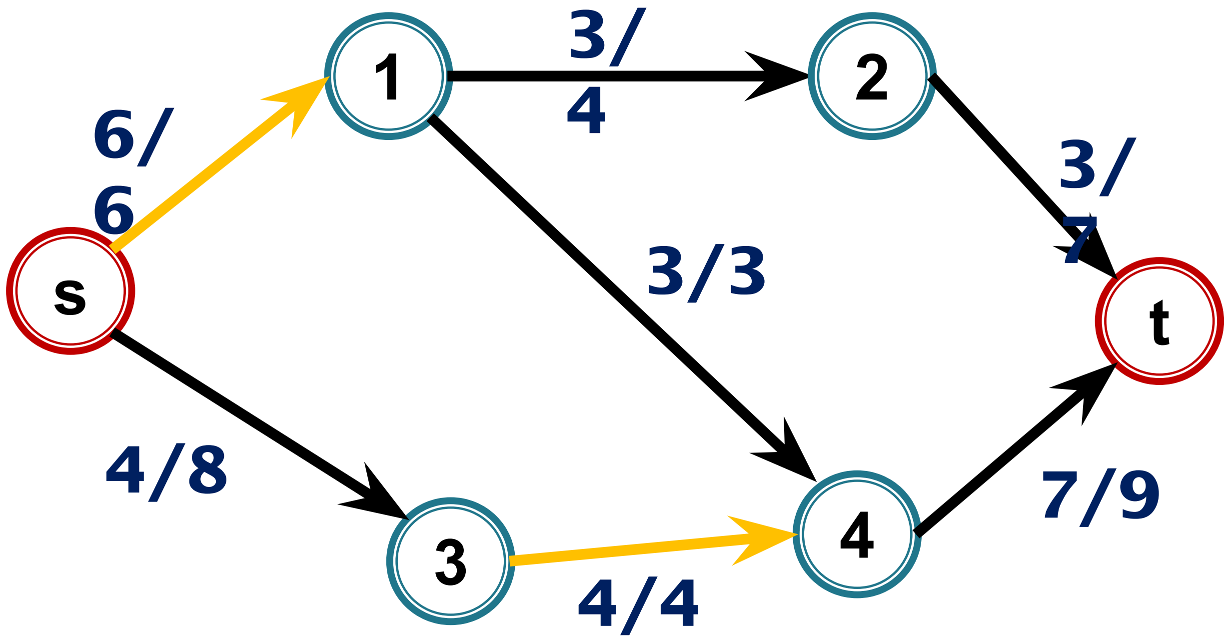
s
1
2
3
4
t
0/6
0/4
0/7
0/3
0/8
0/4
0/9



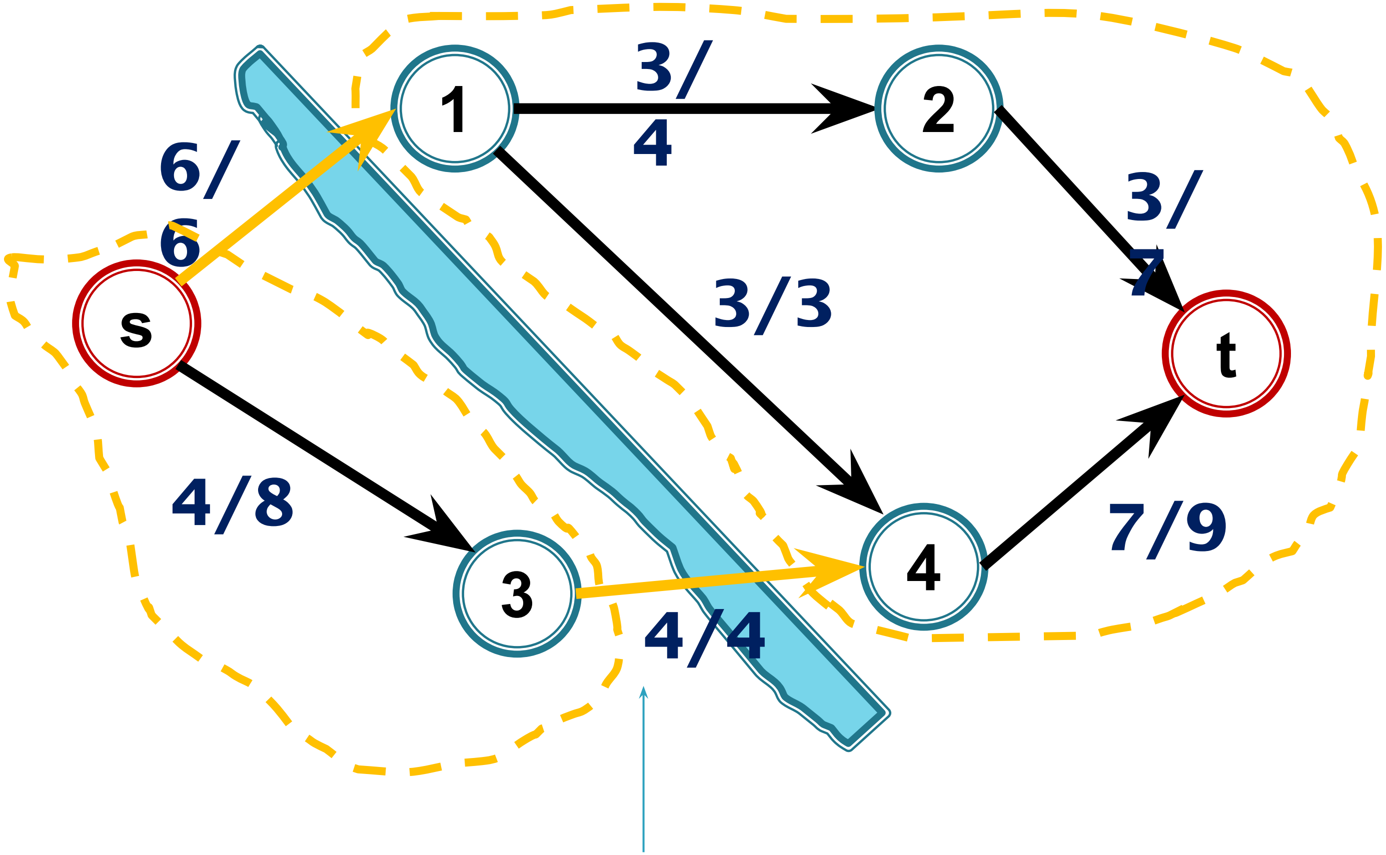
Nu mai există drumuri de la s la t pe care mai putem trimite flux



Este maxim fluxul?



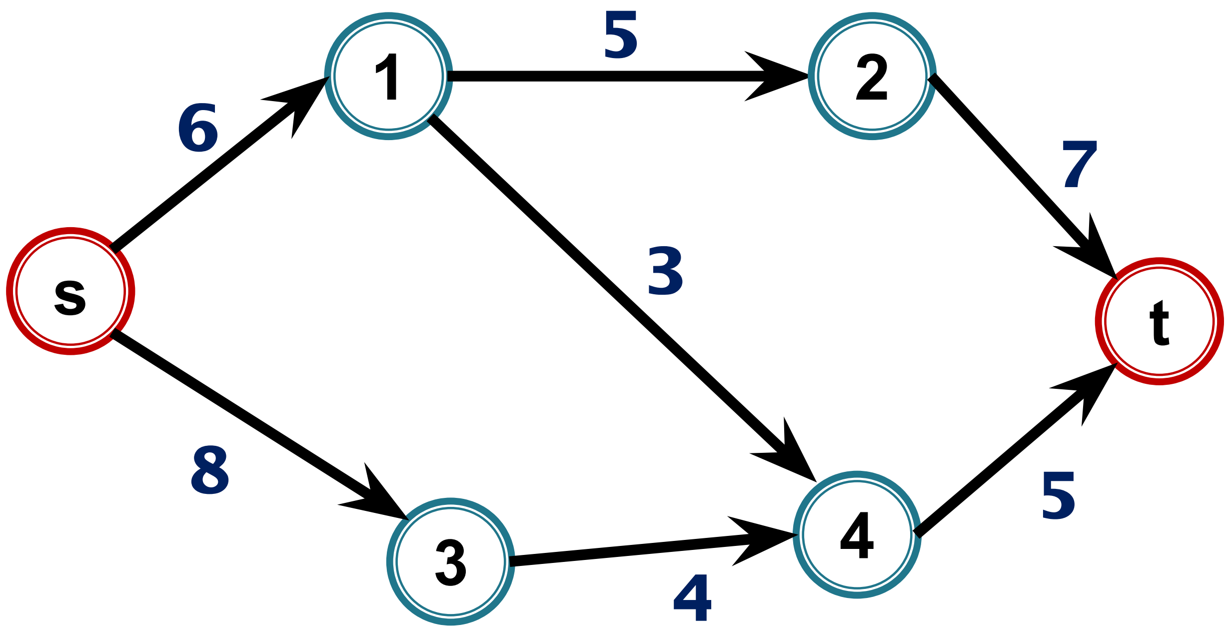
s
1
2
3
4
t
6/6
3/4
3/3
3/7
4/8
4/4
7/9



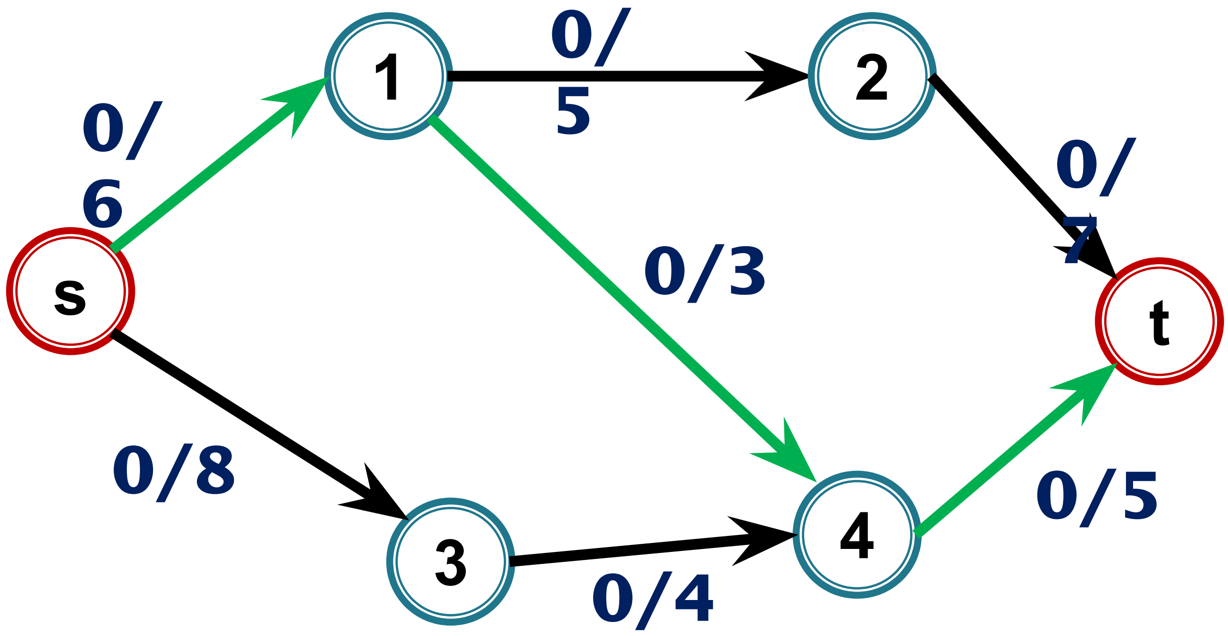
- **singurele arce ("poduri ") care trec din regiunea lui s în cea a lui t nu mai pot fi folosite pentru a trimite flux (au fluxul = capacitatea) ⇒**
  fluxul este maxim

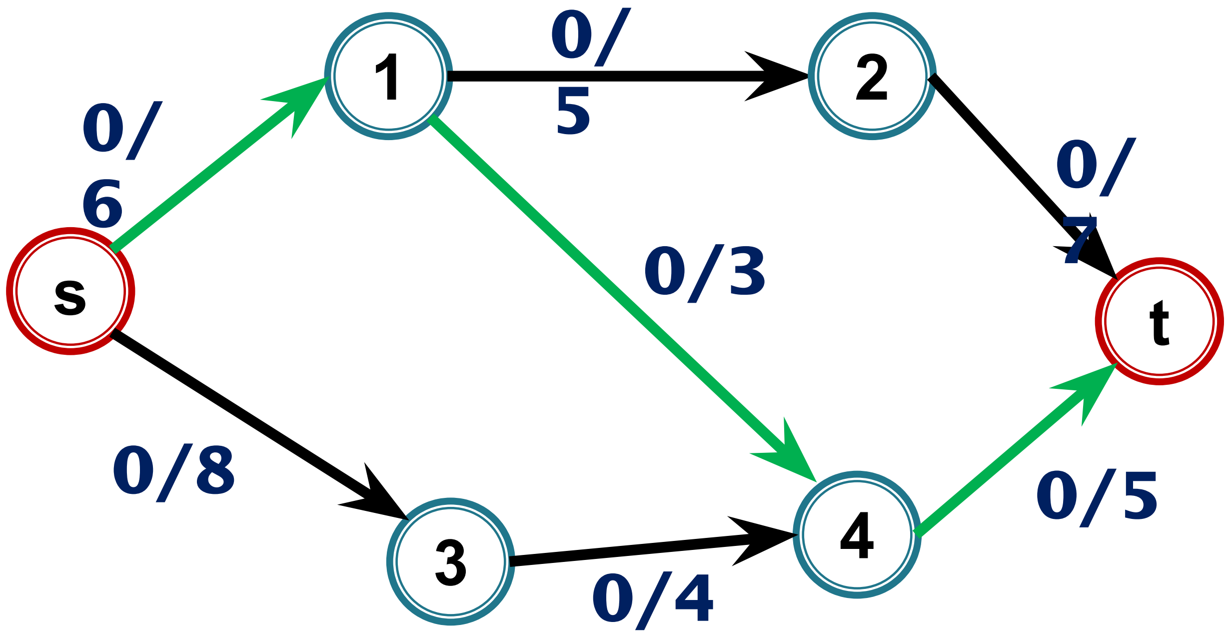
- **s-t tăietură**

Alt exemplu

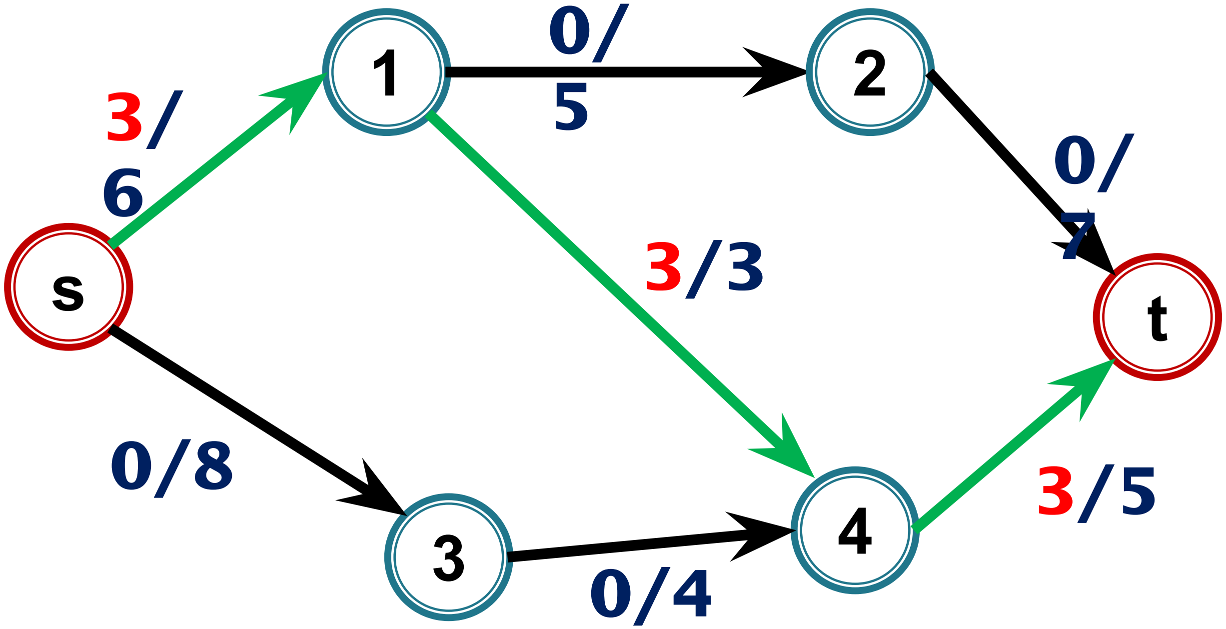


s
1
2
3
4
t
6
5
3
7
8
4
5

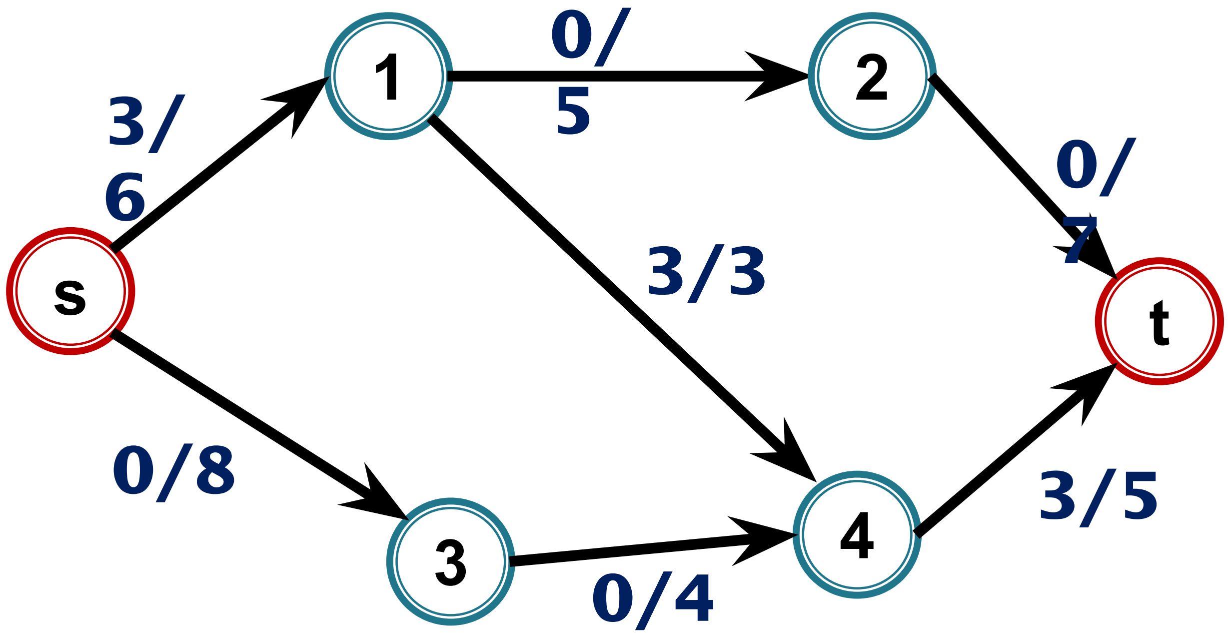

s
1
2
3
4
t
0/6
0/5
0/7
0/3
0/8
0/4
0/5



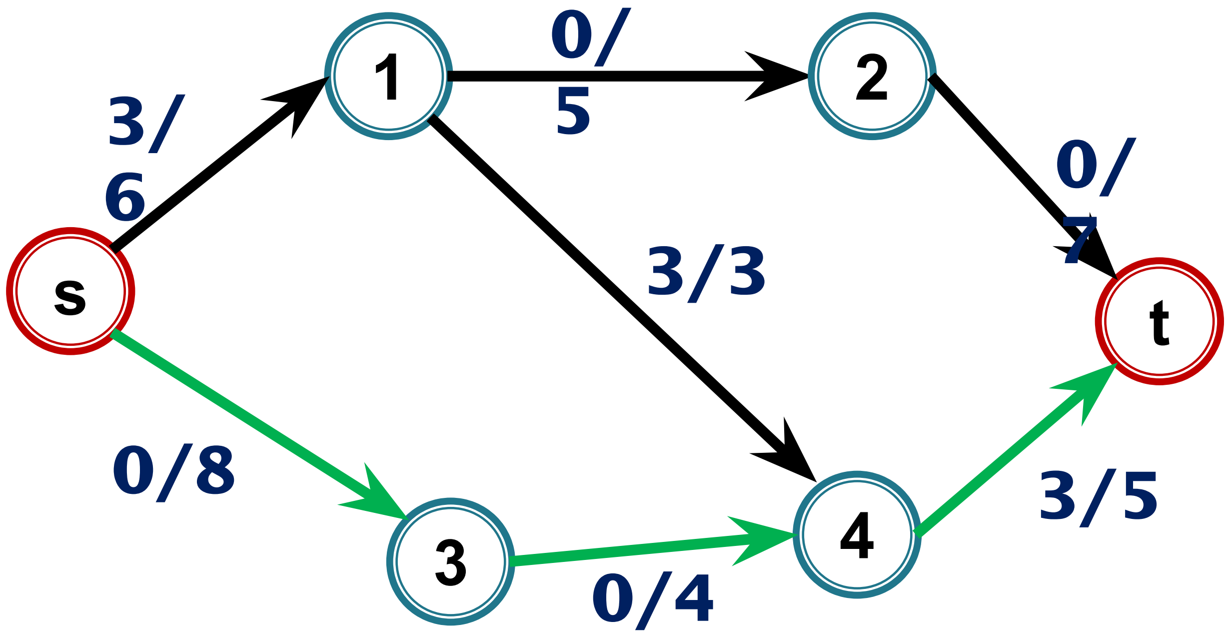
Putem trimite 3 unităţi de-a lungul întregului drum

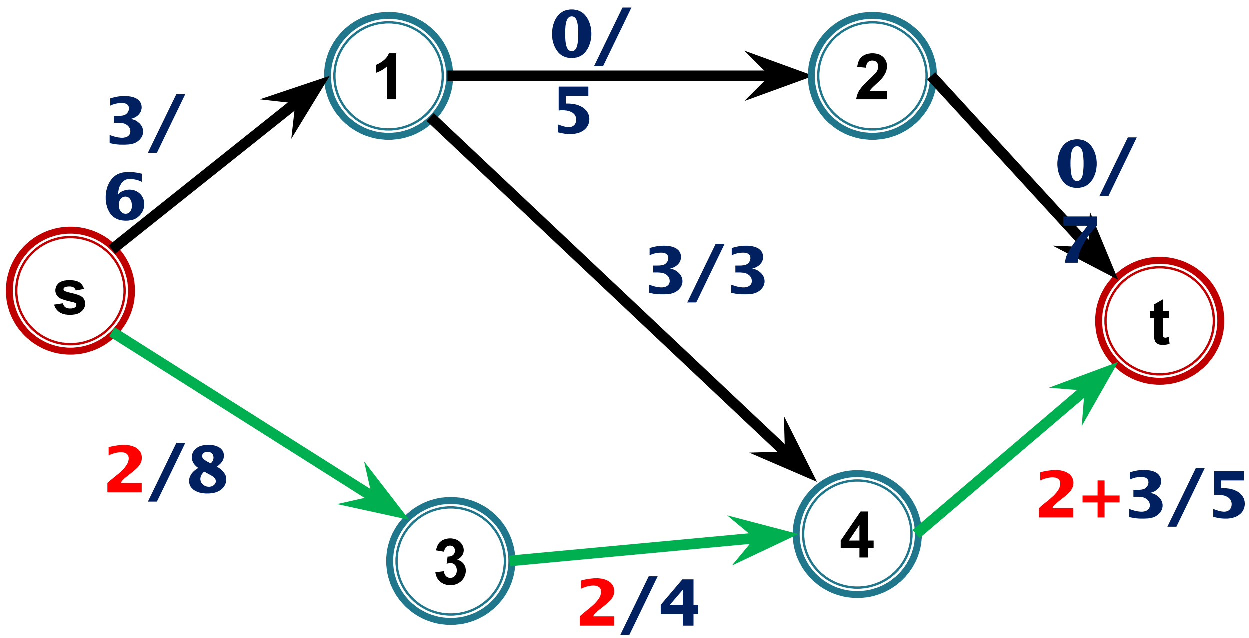


s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
0/8
0/4
3/5

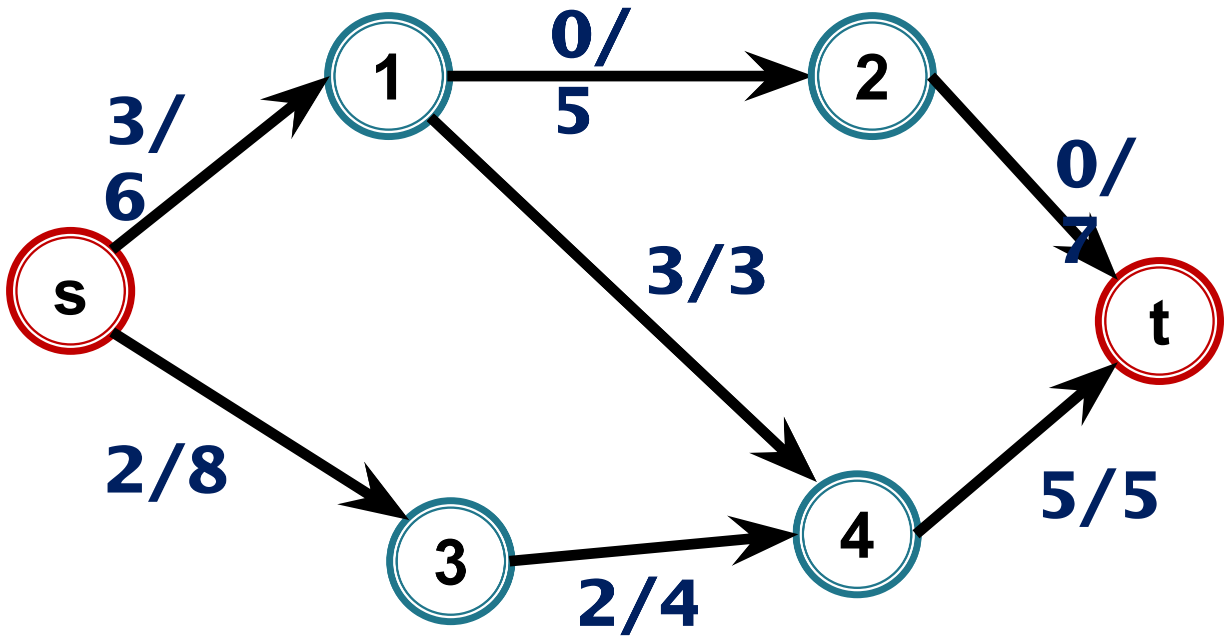


s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
3/3
0/7
0/8
0/4
3/5

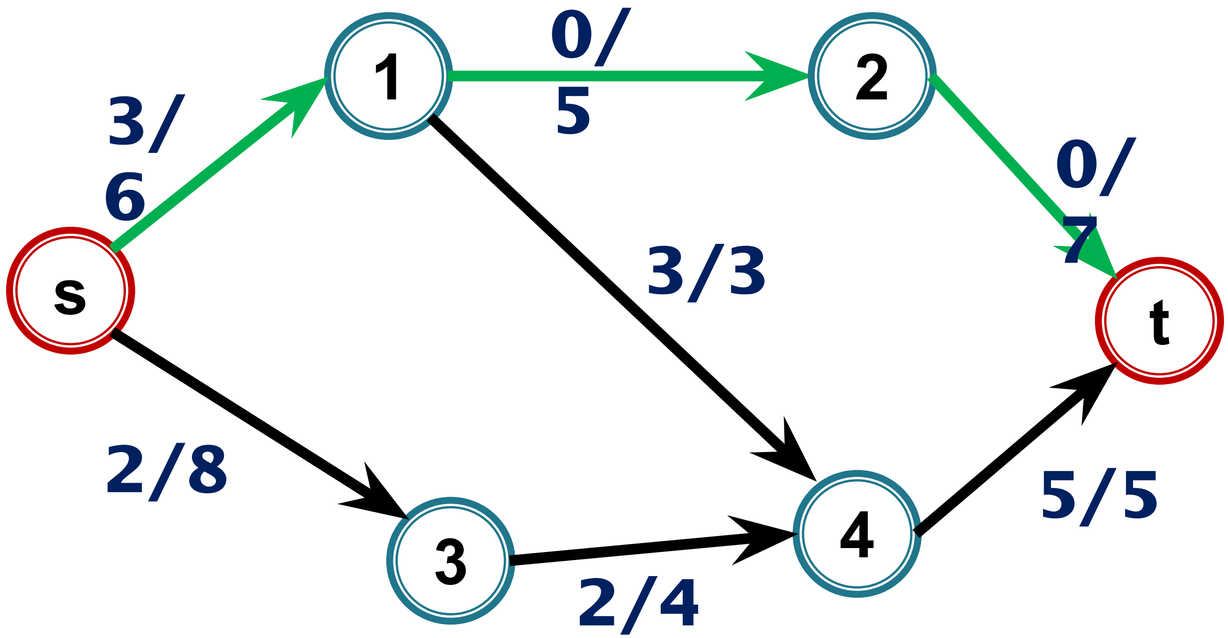

s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
3/3
0/7
0/8
0/4
3/5

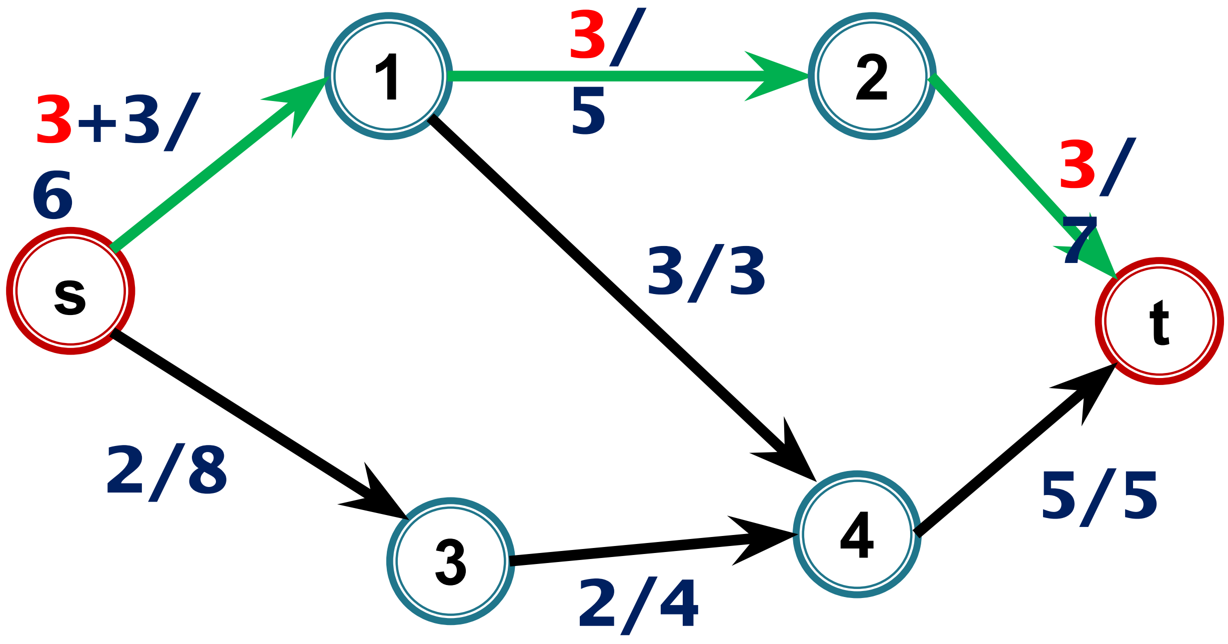


s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
2/8
2/4
2+3/5

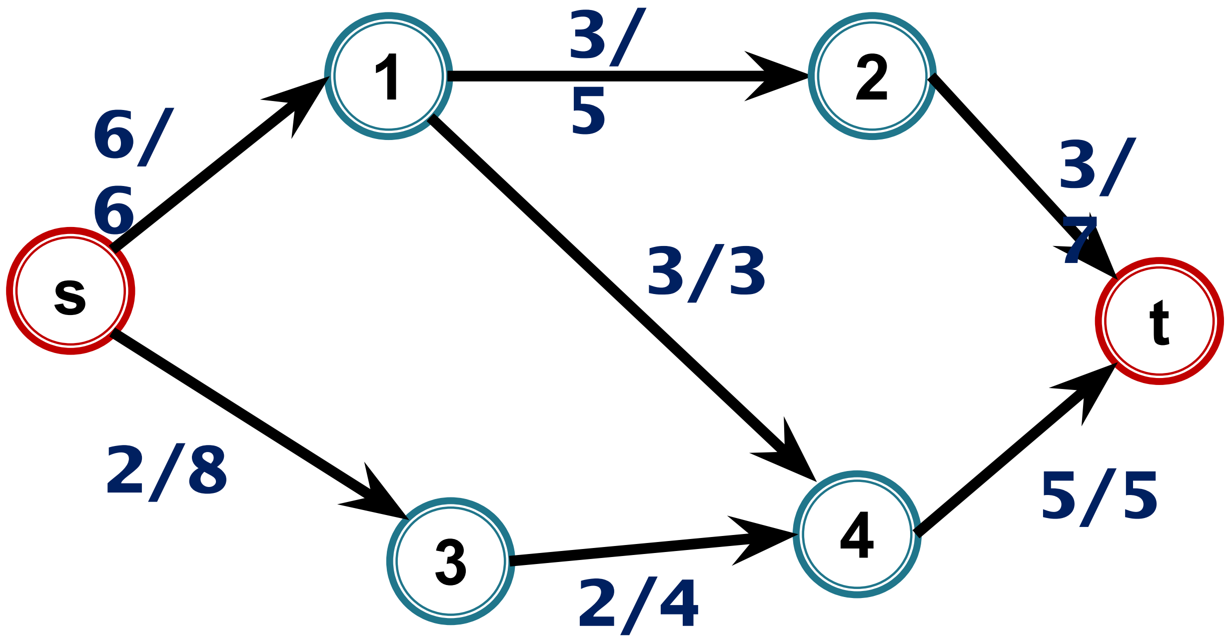


s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
3/3
0/7
2/8
2/4
5/5

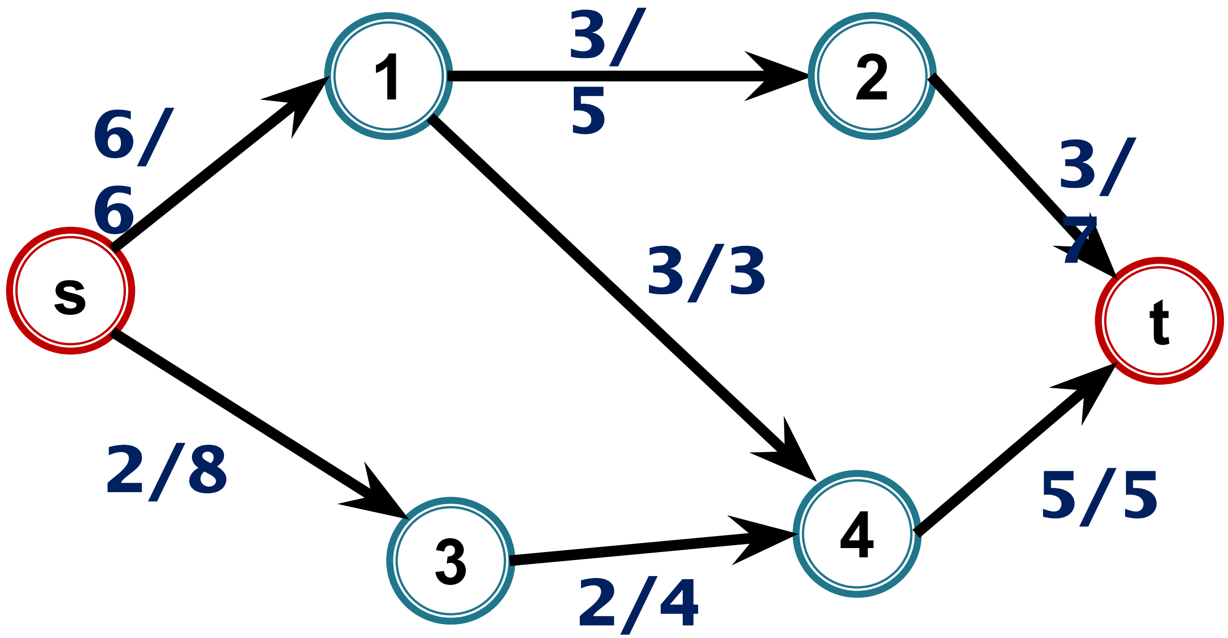

s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
2/8
2/4
5/5



1
2
s
t
3
4
3+3/
6
3/
5
3/
7
3/3
2/8
2/4
5/5

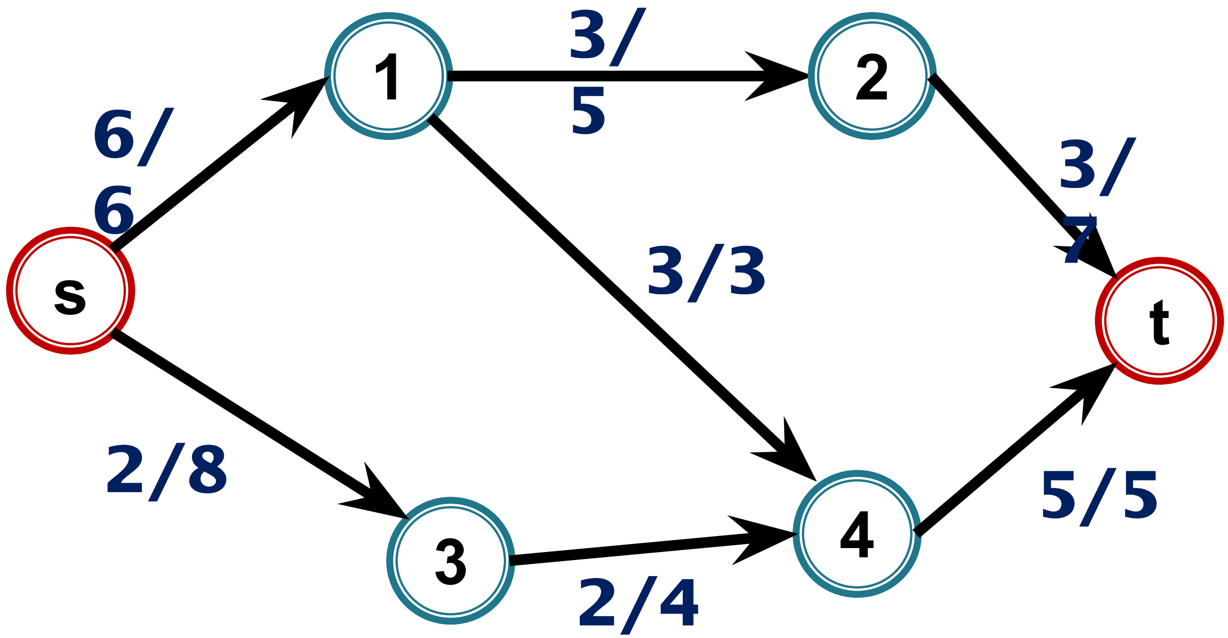


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5

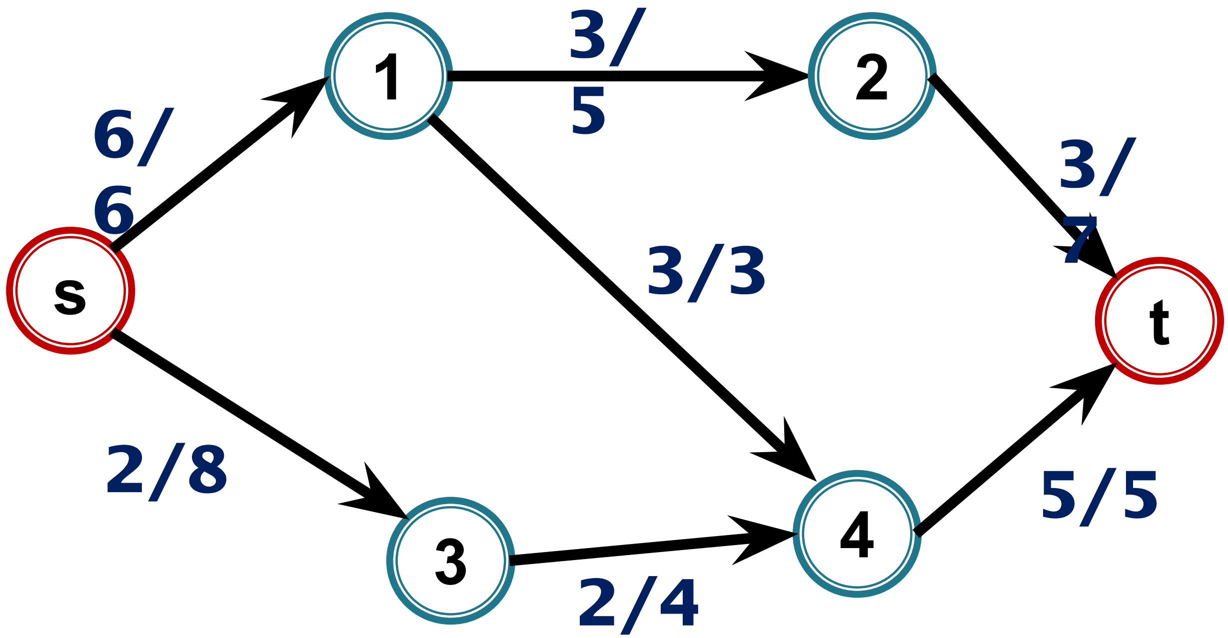


Nu mai există drumuri de la s la t pe care putem crește fluxul

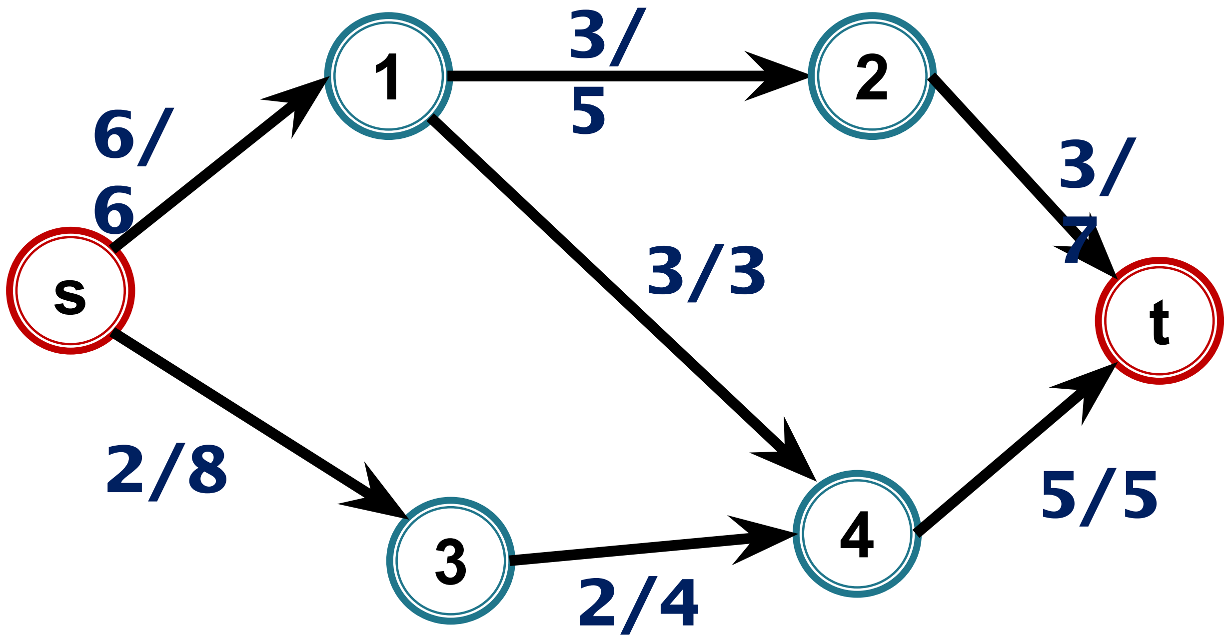
Este maxim fluxul?

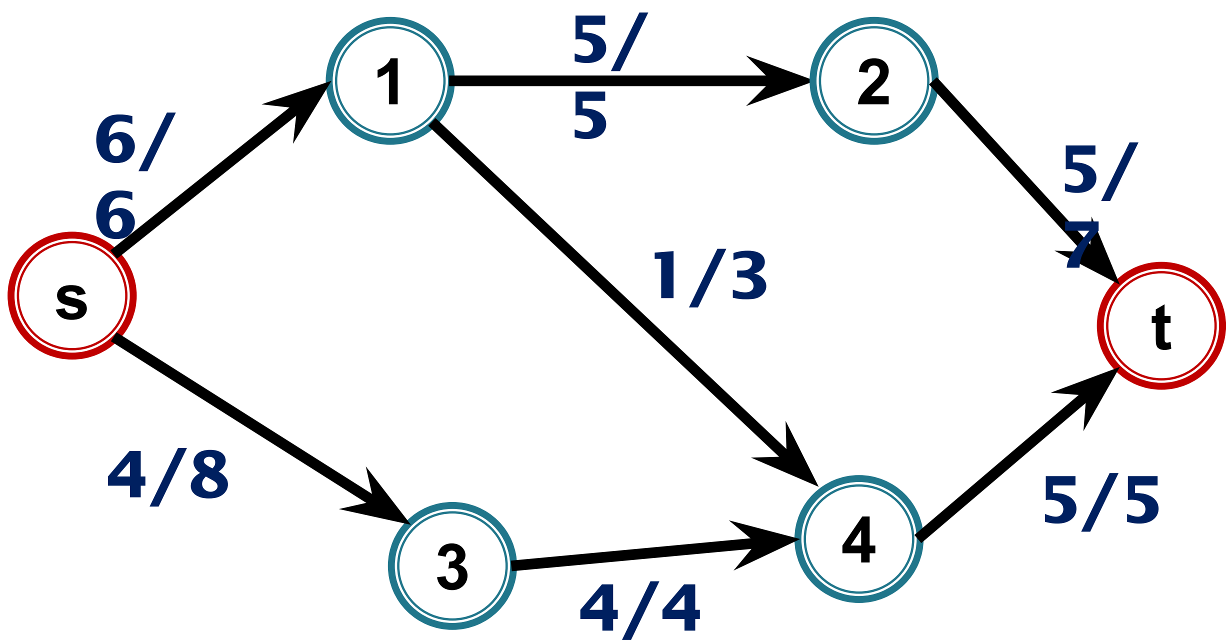


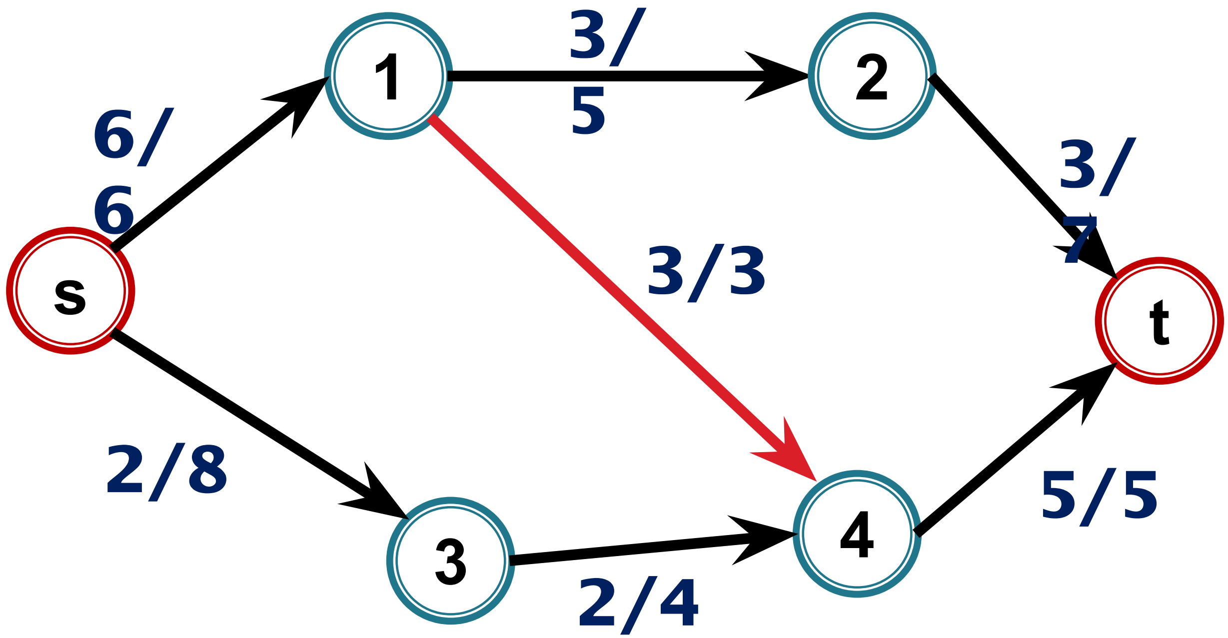
Este maxim fluxul?



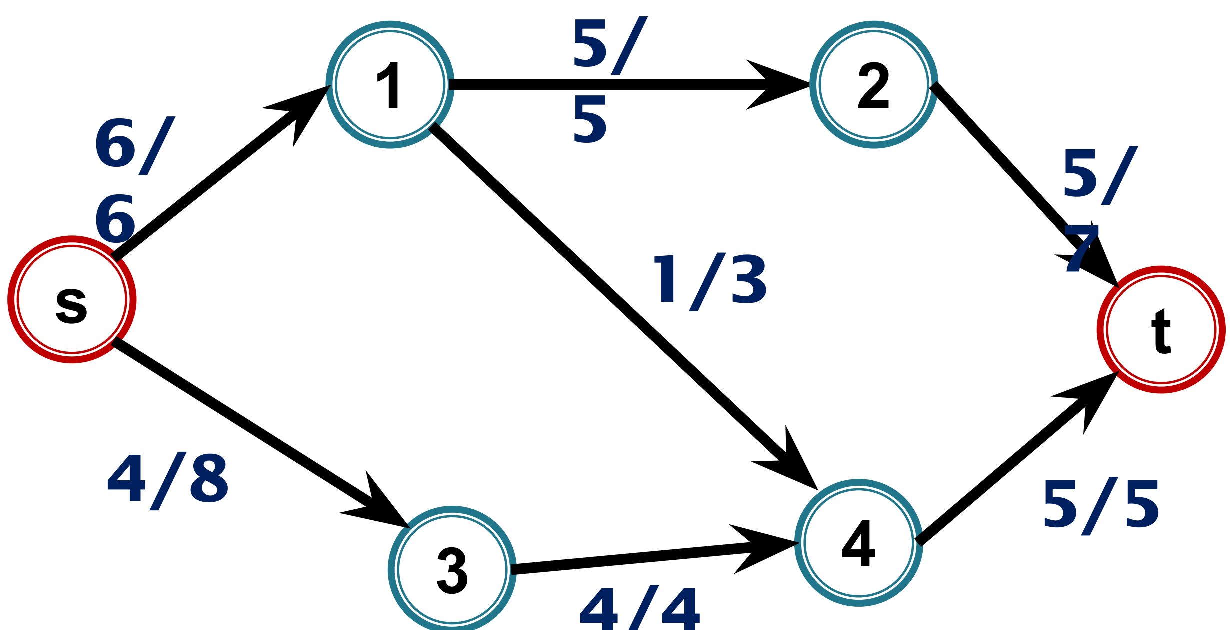
Nu este cantitatea maximă pe care o putem trimite, am trimis greşit pe arcul (1,4) (pe drumul [s, 1, 4, t])


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5

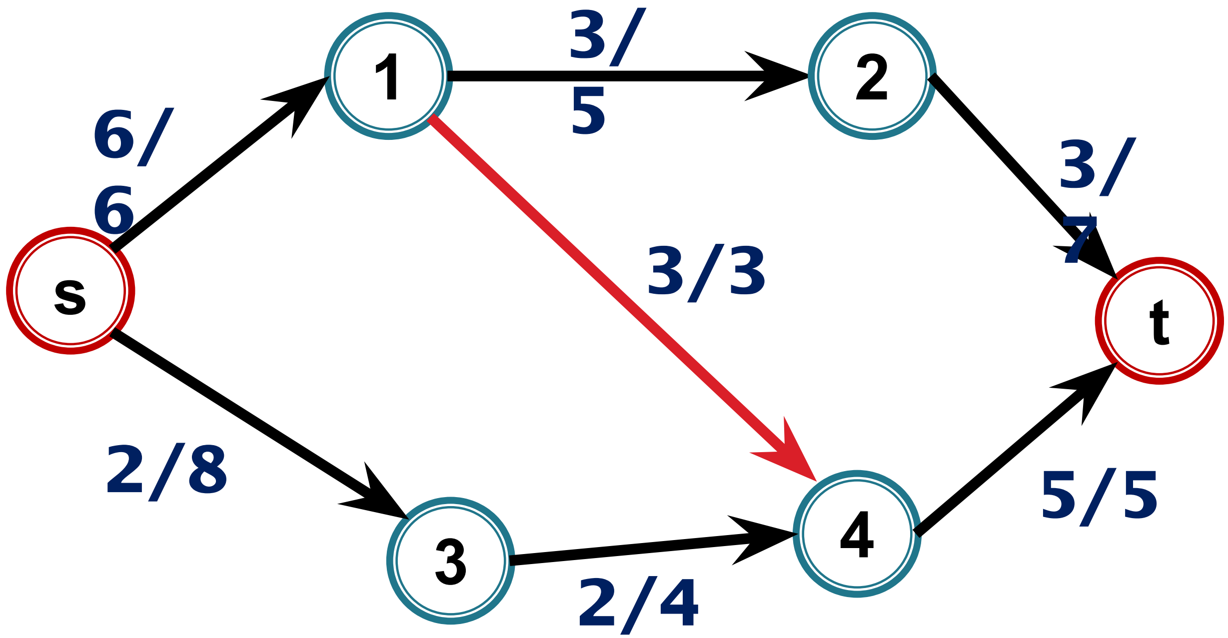

s
1
2
3
4
t
6/6
5/5
5/7
1/3
4/8
4/4
5/5

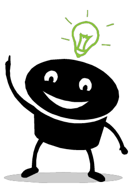


fluxul obținut

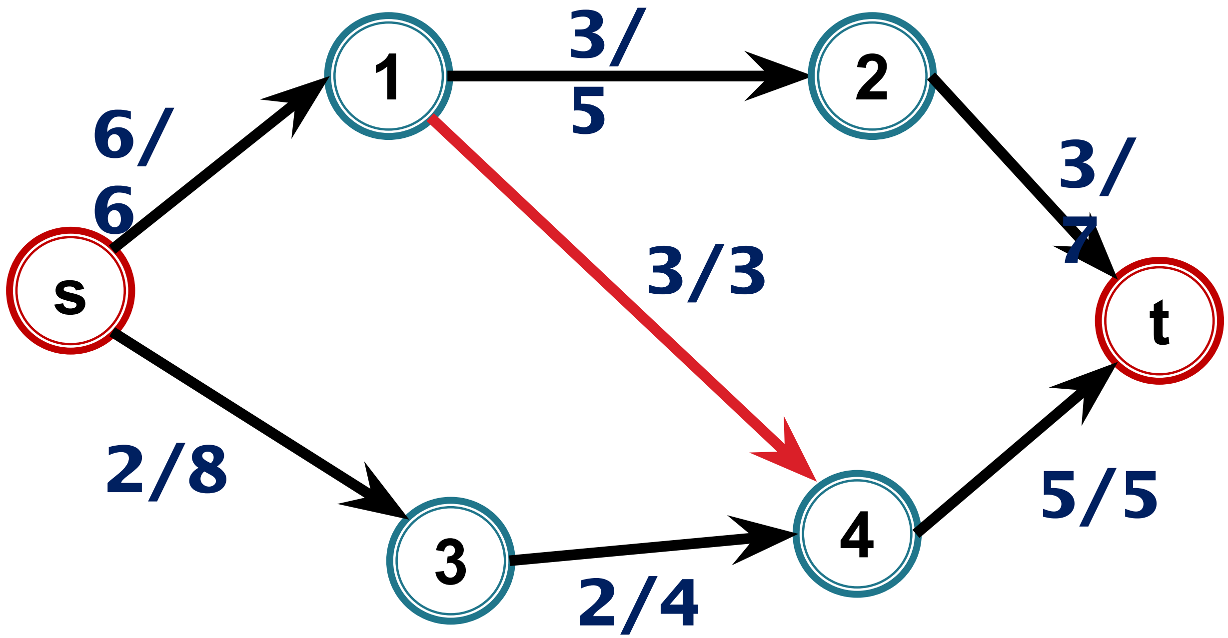


un flux "*mai mare*"

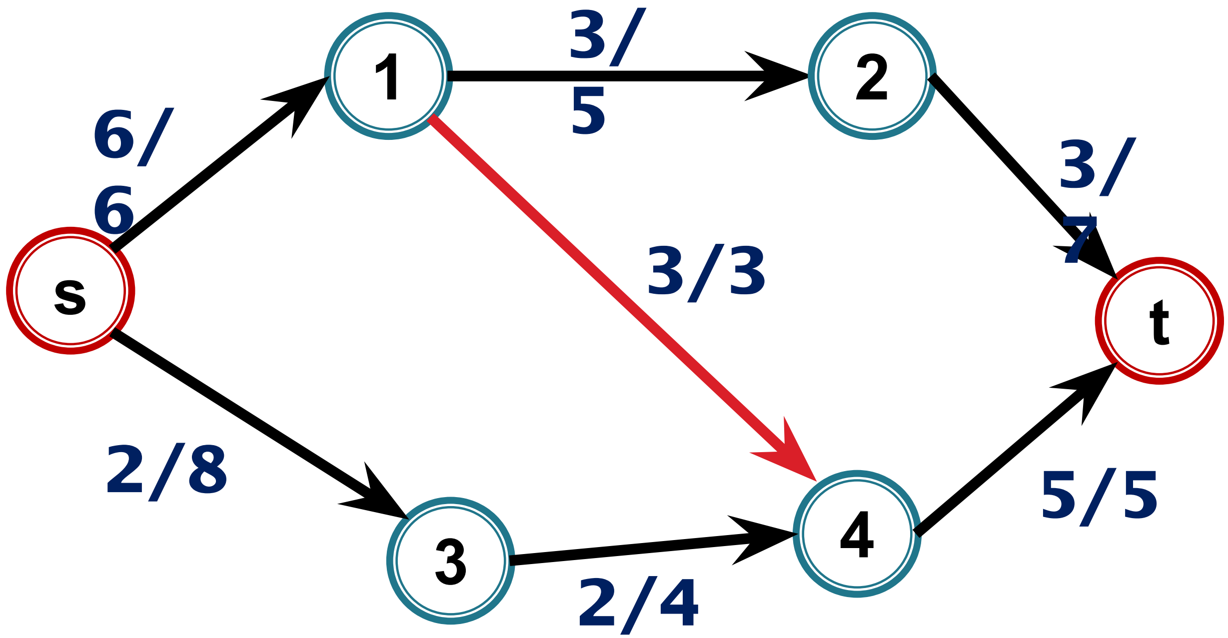


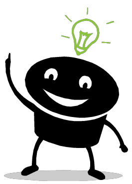


Trebuie să putem corecta (să trimitem flux înapoi pe un arc, pentru a fi direcţionat prin alte arce către destinaţie)



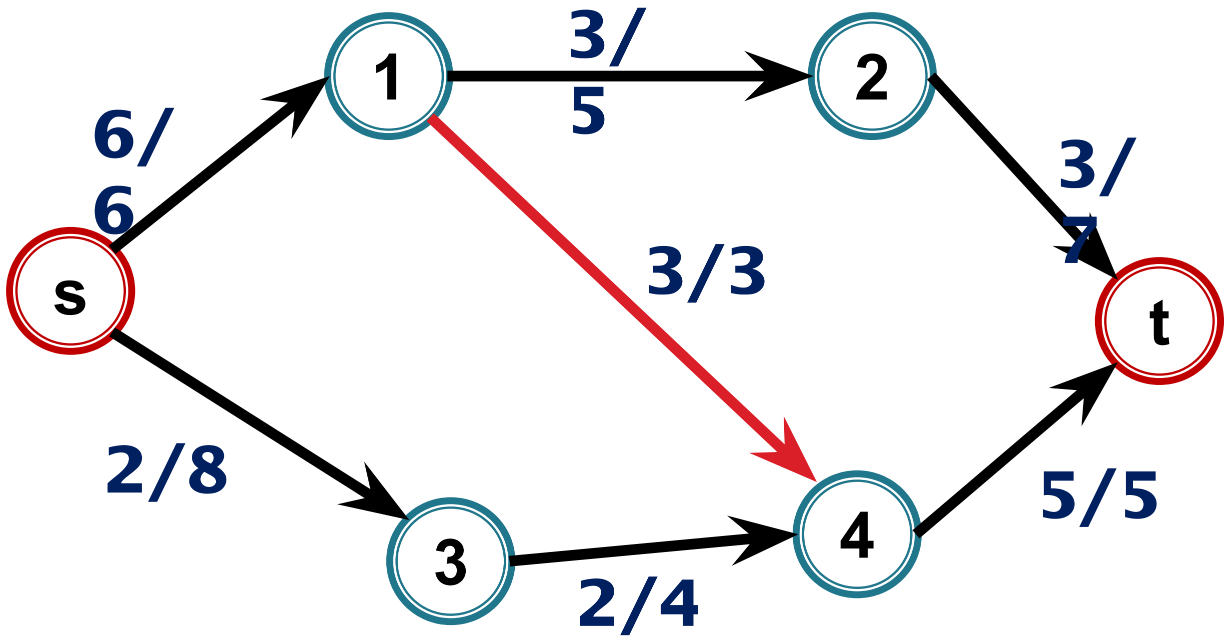
- **Trimitem unităţi de flux înapoi pe arcul (1,4)**



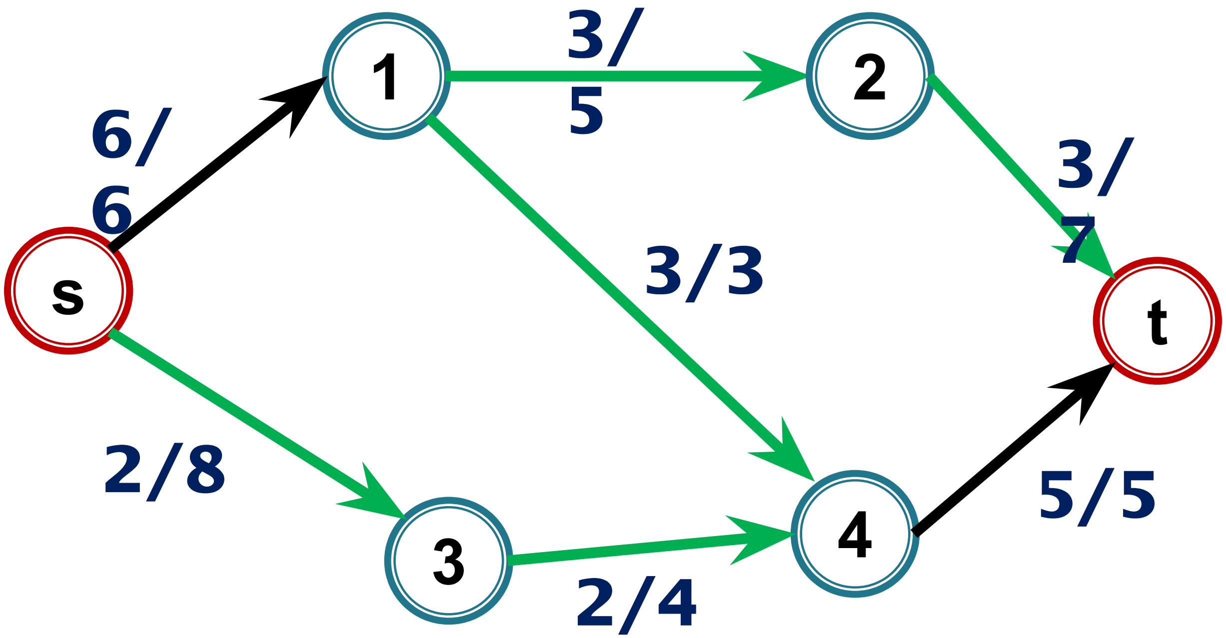


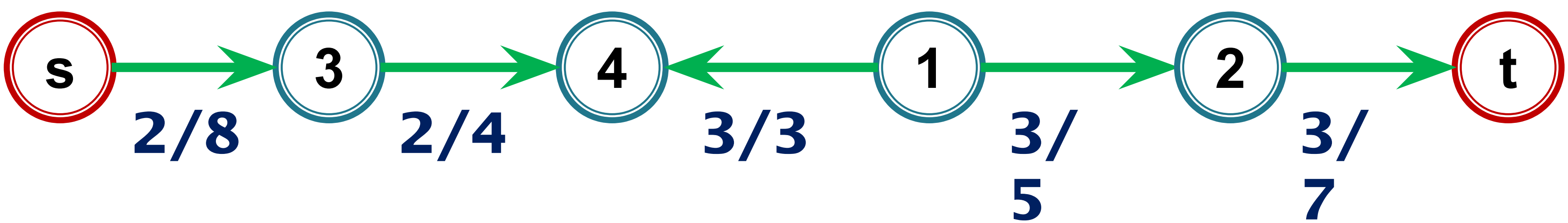
- **Trimitem unităţi de flux înapoi pe arcul (1,4)**
- **Corecția trebuie făcută pe un lanț de la s la t, nu doar pe un arc, altfel fluxul (marfa) va rămâne într-un vârf intermediar**

Determinăm un LANȚ (nu drum) de la s la t pe care putem modifica fluxul

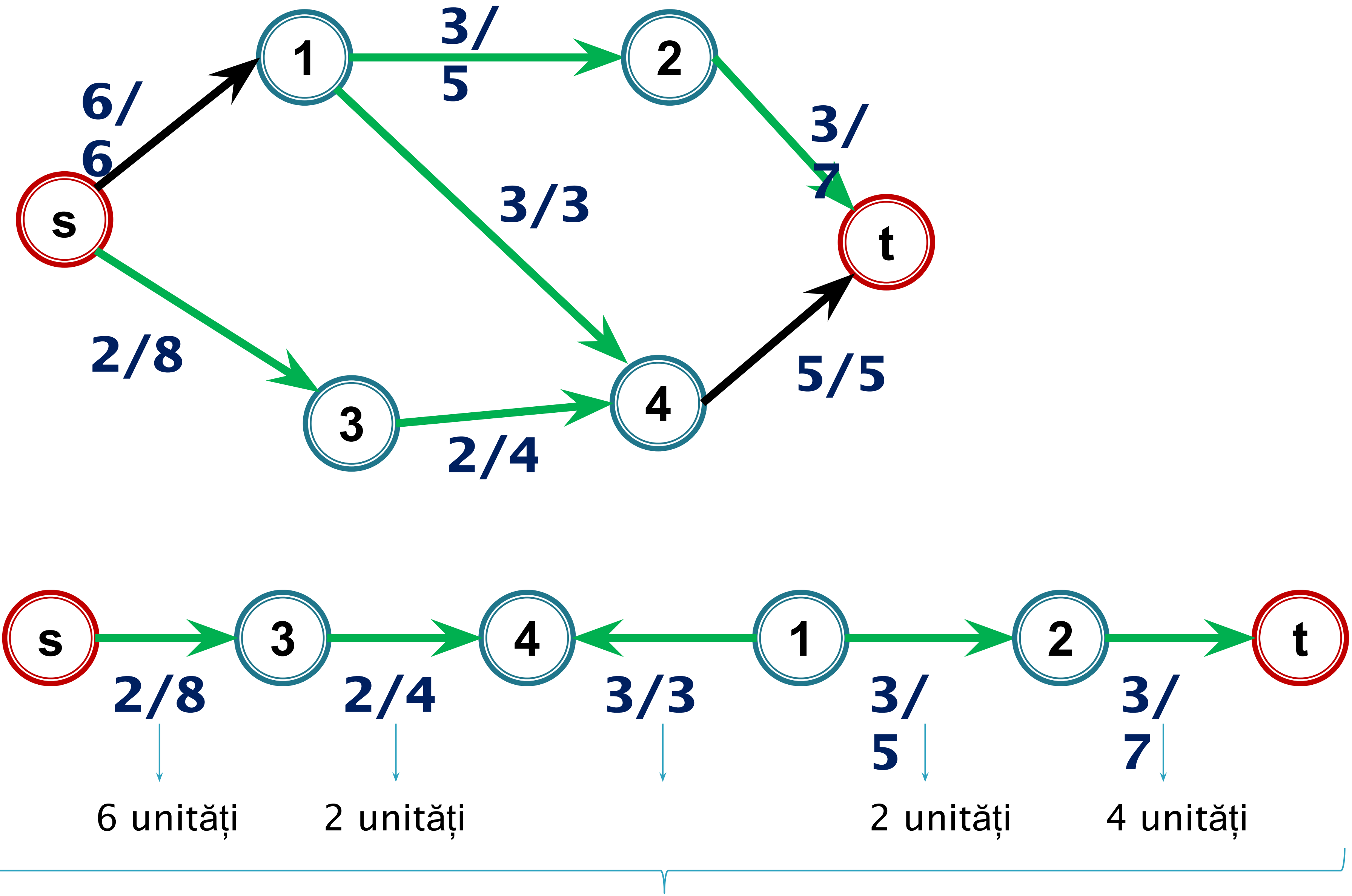


Determinăm un LANȚ (nu drum) de la s la t pe care putem modifica fluxul

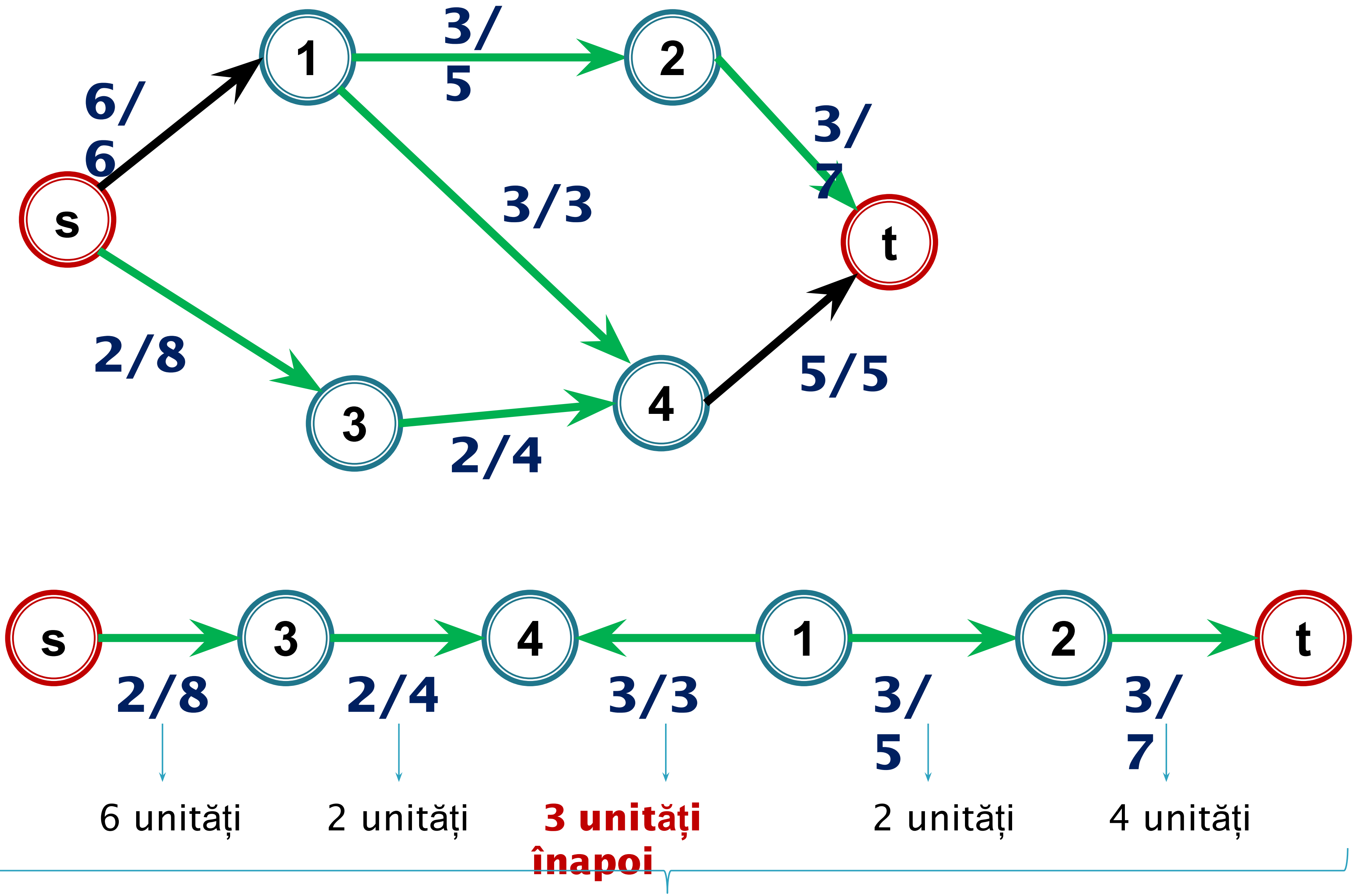




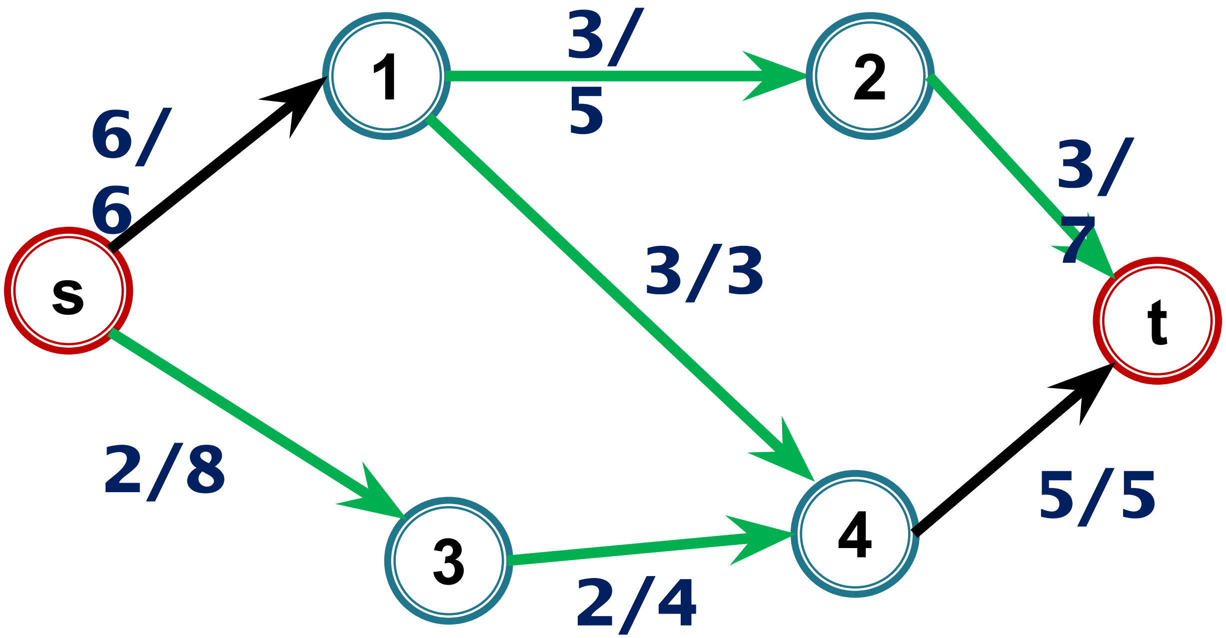
Cu cât putem modifica fluxul pe acest lanț?

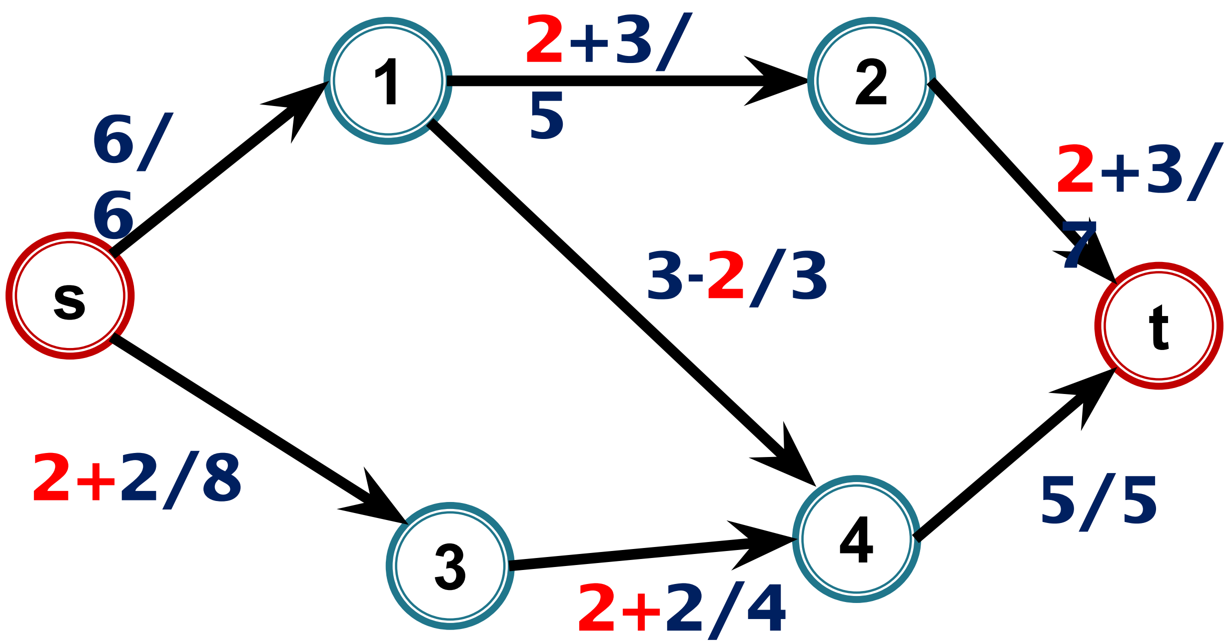


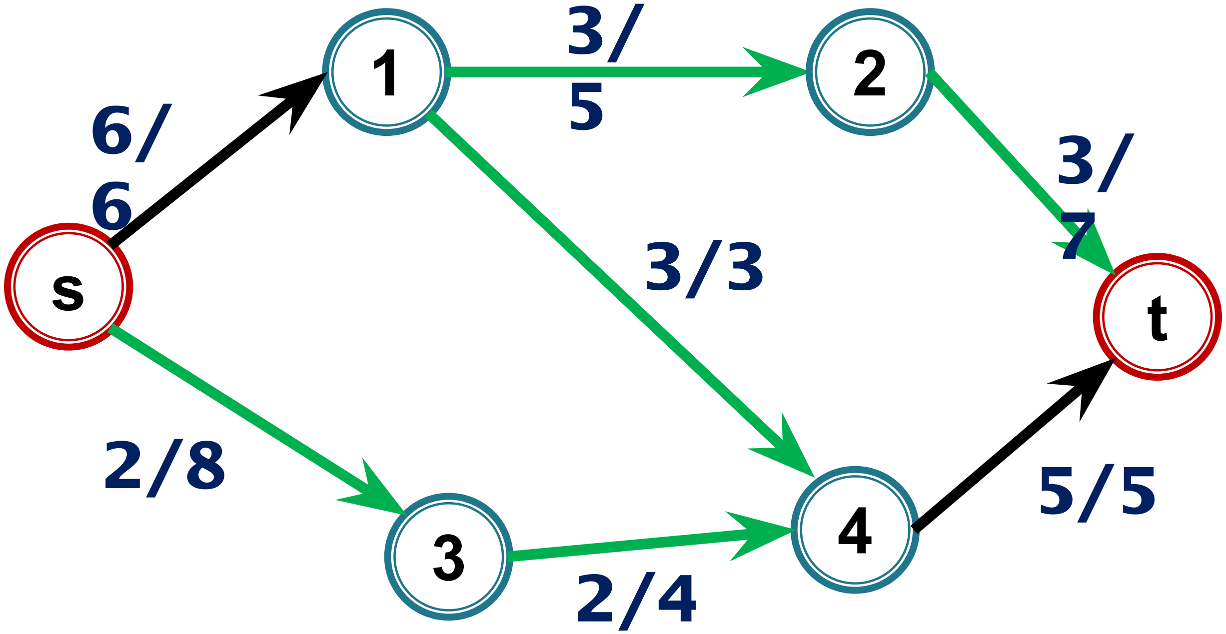
s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5
s
3
4
1
2
t
2/8
2/4
3/3
3/5
3/7
6 unități
2 unități
2 unități
4 unități



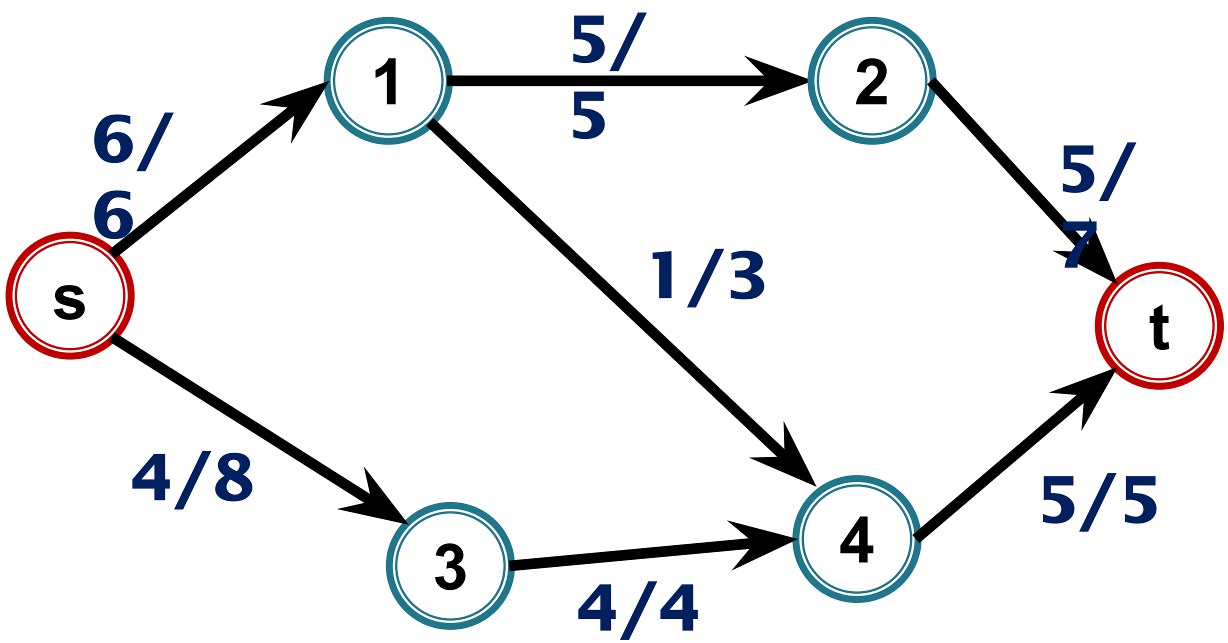
2 unităţi de-a lungul întregului drum


s
1
2
3
4
t
6/
6
3/
5
3/
7
3/3
2/8
2/4
5/5

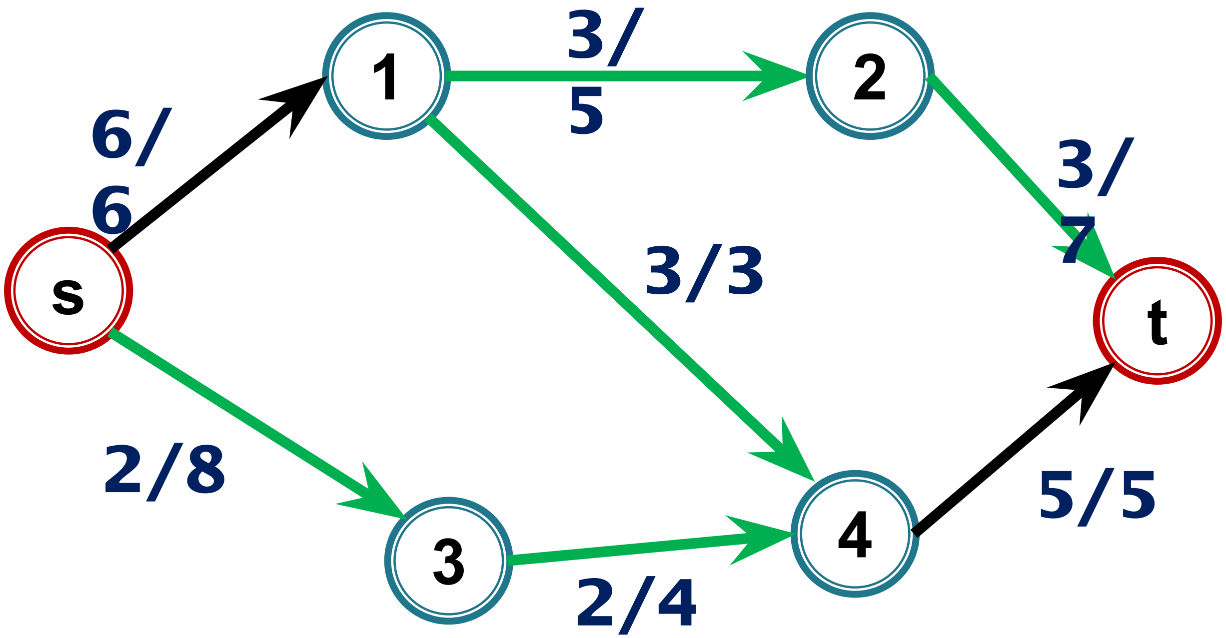

s
1
2
3
4
t
6/
6
2+3/
5
2+3/
7
3-2/3
2+2/8
2+2/4
5/5

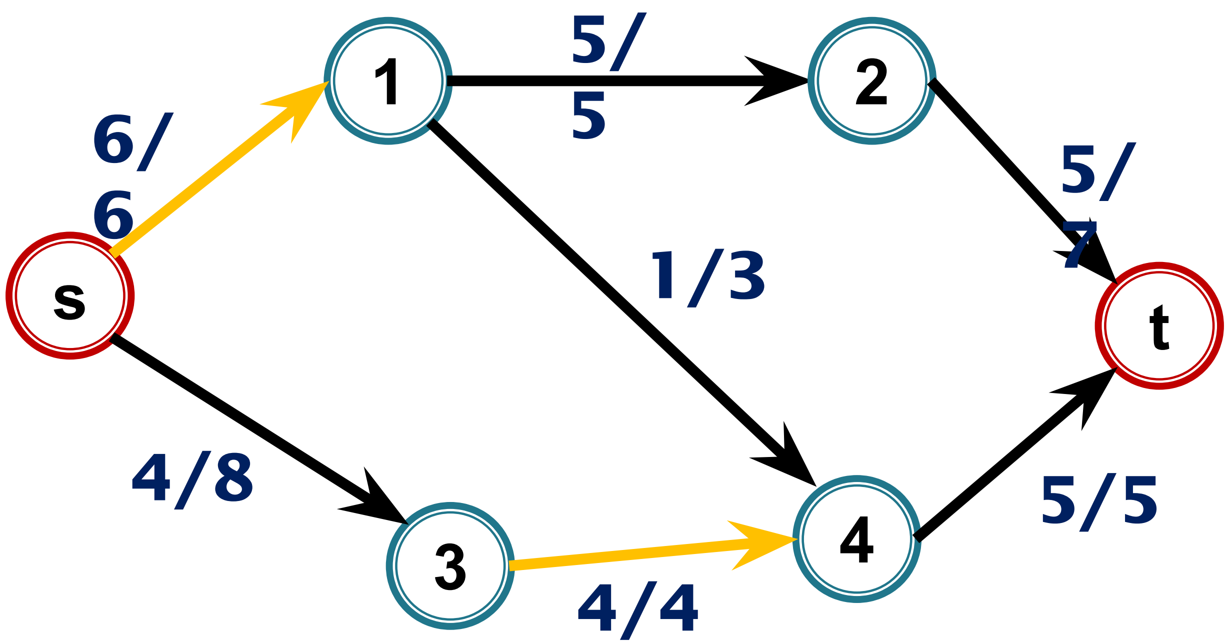


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5



s
1
2
3
4
t
6/6
5/5
5/7
1/3
4/8
4/4
5/5


1
2
s
t
3
4
6/
6
3/
5
3/
7
3/3
2/8
2/4
5/5


1
2
s
t
3
4
6/
6
5/
5
5/
7
1/3
4/8
4/4
5/5

Definiţii

- **Reţea de transport** N = (G, S, T, I, c) unde
  - G = (V, E) – graf orientat cu
    - V = **S** ∪ **I** ∪ **T**

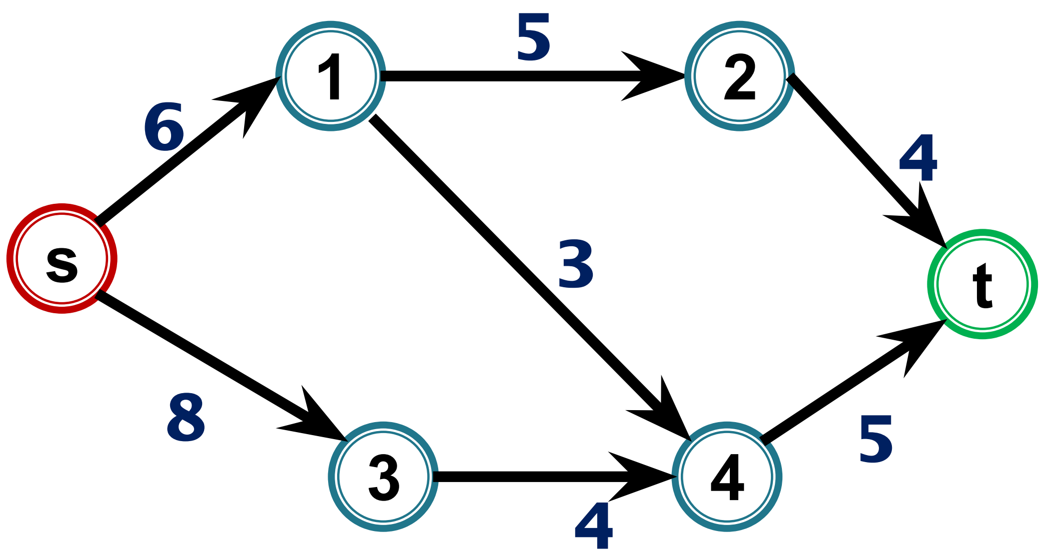
- **Reţea de transport** N = (G, S, T, I, c) unde
  - G = (V, E) – graf orientat cu
    - V = **S** U **I** U **T**
    - S, I , T disjuncte, nevide
    - S - **mulţimea surselor** (**intrărilor**)
    - T - **mulţimea destinaţiilor** (**ieşiri**)
    - I - **mulţimea vârfurilor intermediare**

Fluxuri în rețele de transport

- **Reţea de transport** $N = (G, S, T, I, c)$ unde
  - $G = (V, E)$ – graf orientat cu
    - $V = \mathbf{S} \cup \mathbf{I} \cup \mathbf{T}$
      - S, I , T disjuncte, nevide
      - S - **mulţimea surselor** (**intrărilor**)
      - T - **mulţimea destinaţiilor** (**ieşiri**)
      - I - **mulţimea vârfurilor intermediare**
  - $c : E \to \mathbb{N}$ funcţia **capacitate** (cantitatea maximă care poate fi transportată prin fiecare arc)

Ipoteze pentru rețeaua N

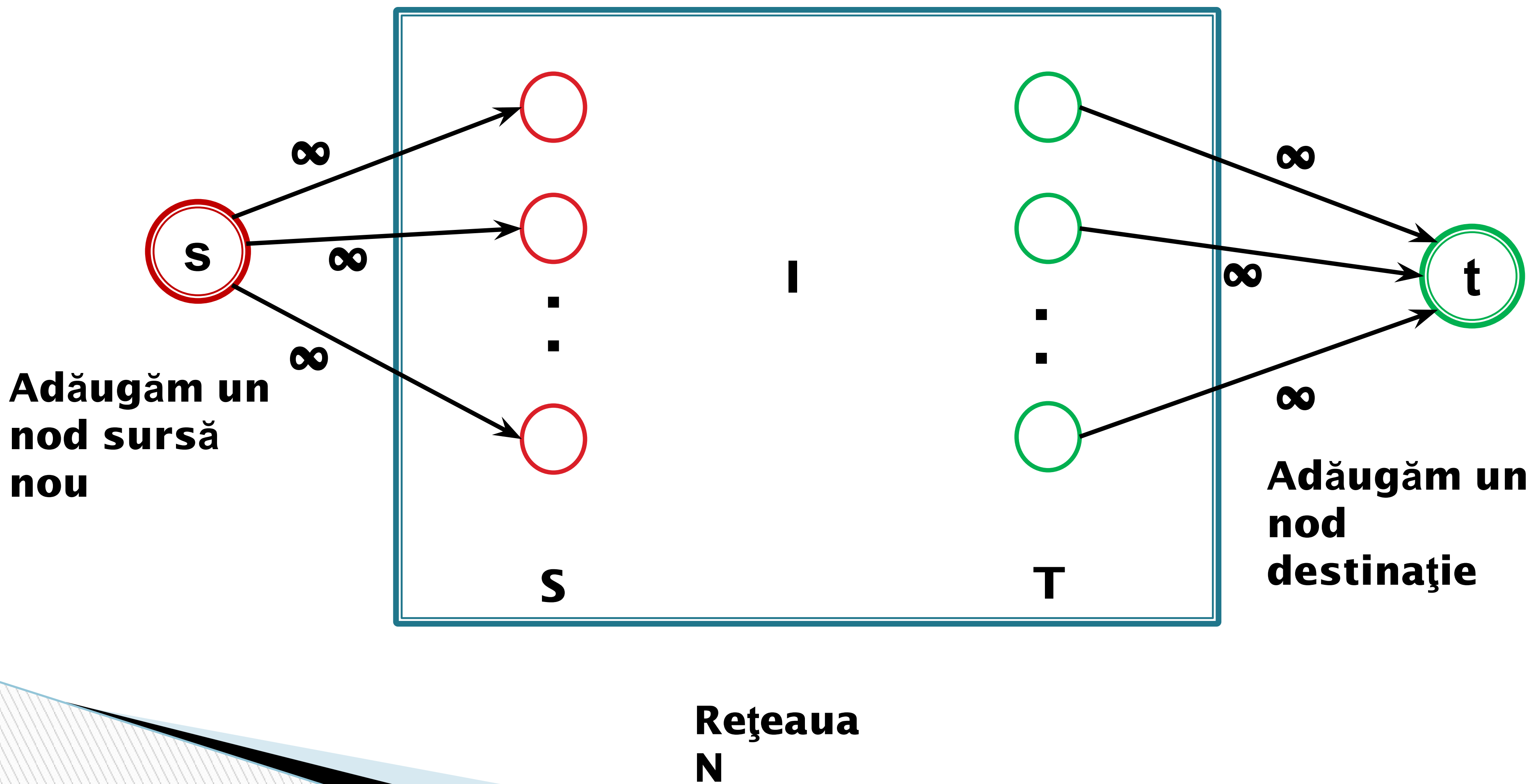
- $S = \{s\}$ – **o singură sursă**
- $T = \{t\}$ – **o singură destinație**
- $d^-(s) = 0$ – **în sursă nu intră arce**
- $d^+(t) = 0$ – **din destinație nu ies arce**



- **Ipoteze pentru rețeaua N**
  - $S = \{s\}$ – **o singură sursă**
  - $T = \{t\}$ – **o singură destinație**
  - $\mathbf{d^-(s) = 0}$ – **în sursă nu intră arce**
  - $\mathbf{d^+(t) = 0}$ – **din destinație nu ies arce**

- **Ipotezele nu sunt restrictive** - vom arăta că studiul fluxului într-o rețea cu mai multe surse și destinații se poate reduce la studiul fluxului într-o rețea de acest tip

- **Ipotezele nu sunt restrictive**, orice reţea poate fi transformată într-o reţea echivalentă de acest tip (din punct de vedere al valorii fluxului)



Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ – **o singură sursă**
- $T = \{t\}$ – **o singură destinație**
- **$d^-(s) = 0$ – în sursă nu intră arce**
- **$d^+(t) = 0$ – din destinație nu ies arce**
- **orice vârf este accesibil din s**

- Un **flux** într-o reţea de transport N = (G, S, T, I, c) este o funcţie $f : E \to \mathbb{N}$ cu proprietăţile

- Un **flux** într-o reţea de transport N = (G, S, T, I, c) este o funcţie f : E → ℕ cu proprietăţile

  1) $0 \le f(e) \le c(e), \ \forall\ e \in E(G)$ *condiţia de **mărginire***

- Un **flux** într-o reţea de transport N = (G, S, T, I, c) este o funcţie $f: E \to \mathbb{N}$ cu proprietăţile

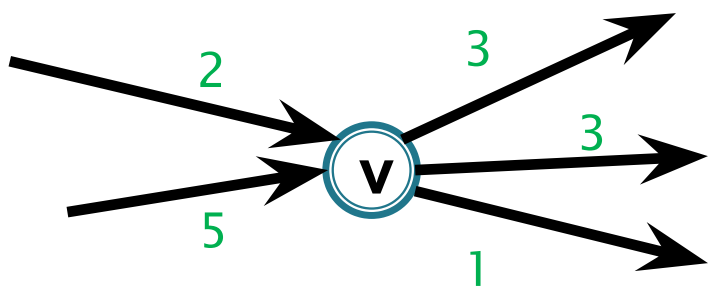
1) $0 \le f(e) \le c(e), \ \forall \ e \in E(G)$ *condiţia de **mărginire***

2) Pentru orice vârf **intermediar** $v \in I$

$$\sum_{uv \in E} f(uv) = \sum_{vu \in E} f(vu)$$

*condiţia de **conservare a fluxului***

(fluxul total care intră în v = fluxul total care iese din v)



- **Notaţii**
  - $\overline{X}$
  - $f^-(v), f^+(v)$
  - $f(X,Y)$, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V}$
  - $f^+(X)$, $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{V}$

În general, pentru orice funcție g : E → ℕ **vom folosi notaţii similare**

- Notaţie

$$f^{+}(v)=\sum_{vu\in E} f(vu)$$ = fluxul care iese din v

$$f^{-}(v)=\sum_{uv\in E} f(uv)$$ = fluxul care intră în v

- Notaţie

$$f^{+}(v) = \sum_{vu \in E} f(vu)$$ = fluxul care iese din v

$$f^{-}(v) = \sum_{uv \in E} f(uv)$$ = fluxul care intră în v

- Condiţia de **conservare a fluxului** devine:

$$f^{-}(v) = f^{+}(v), \forall v \in I$$

- Pentru X, Y ⊆ V disjuncte

$$f(X,Y)=\sum_{\substack{uv\in E\\ u\in X,\, v\in Y}} f(uv)$$ = fluxul de la X la Y

(pe arcele care ies din X către Y)

- Pentru X ⊆ V

$$f^{+}(X) = \sum_{\substack{uv \in E \\ u \in X, v \notin X}} f(uv)$$ = fluxul care iese din X (din vârfurile din X)

$$f^{-}(X) = \sum_{\substack{vu \in E \\ u \in X, v \notin X}} f(vu)$$

- Pentru X, Y ⊆ V

$$f(X,Y)=\sum_{\substack{uv\in E\\ u\in X,\, v\in Y}} f(uv)$$ = fluxul de la X la Y (pe arcele care ies din X către Y)

- Avem

$$f^{+}(X)=f(X,V-X)=f(X,\overline{X})$$

$$f^{-}(X)=f(\overline{X},X)$$

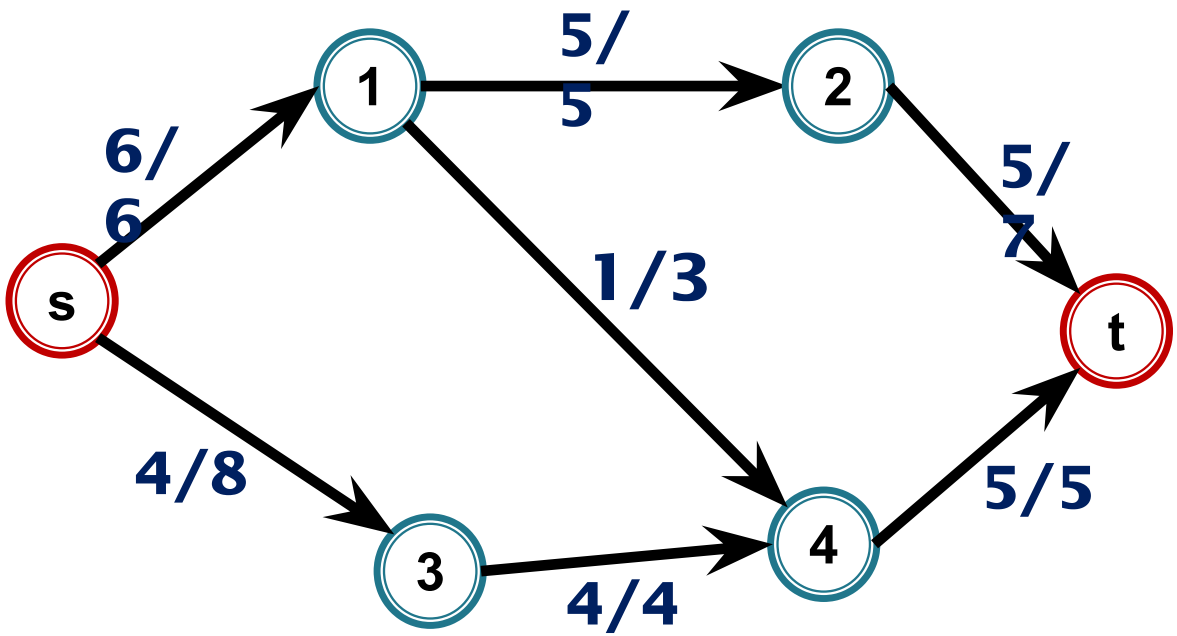
- În general, pentru orice funcție $g : E \to \mathbb{N}$ **vom folosi notaţii similare**

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s) = \sum_{su \in E} f(su)$$

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

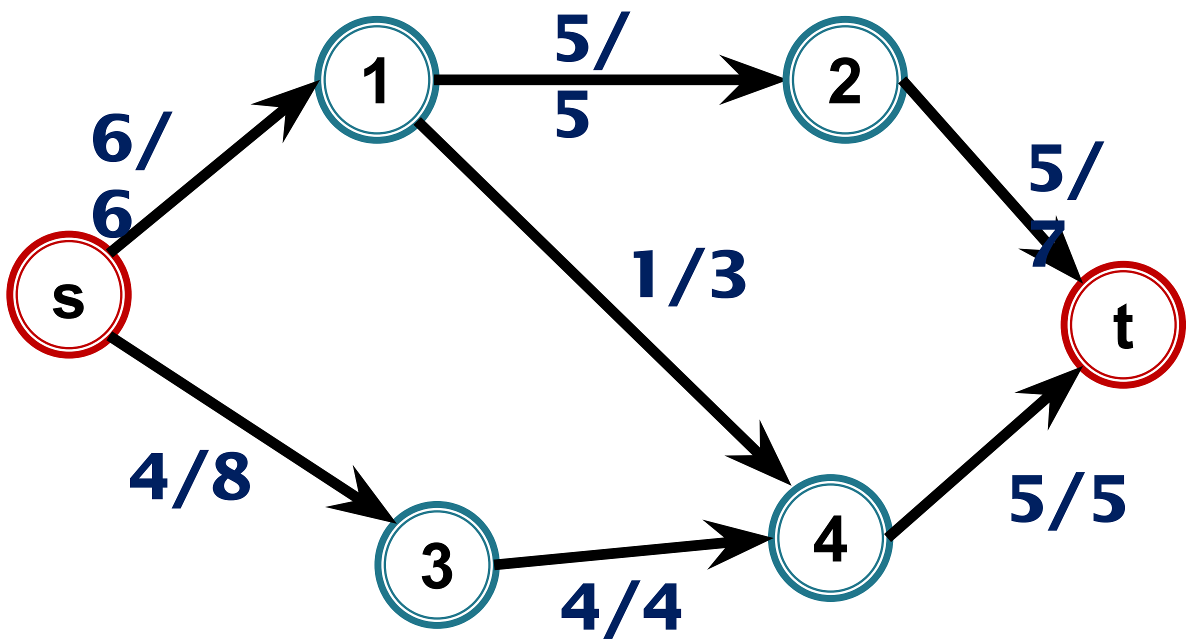
$$val(f) = f^{+}(s) = \sum_{su \in E} f(su)$$



val(f) = ?

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

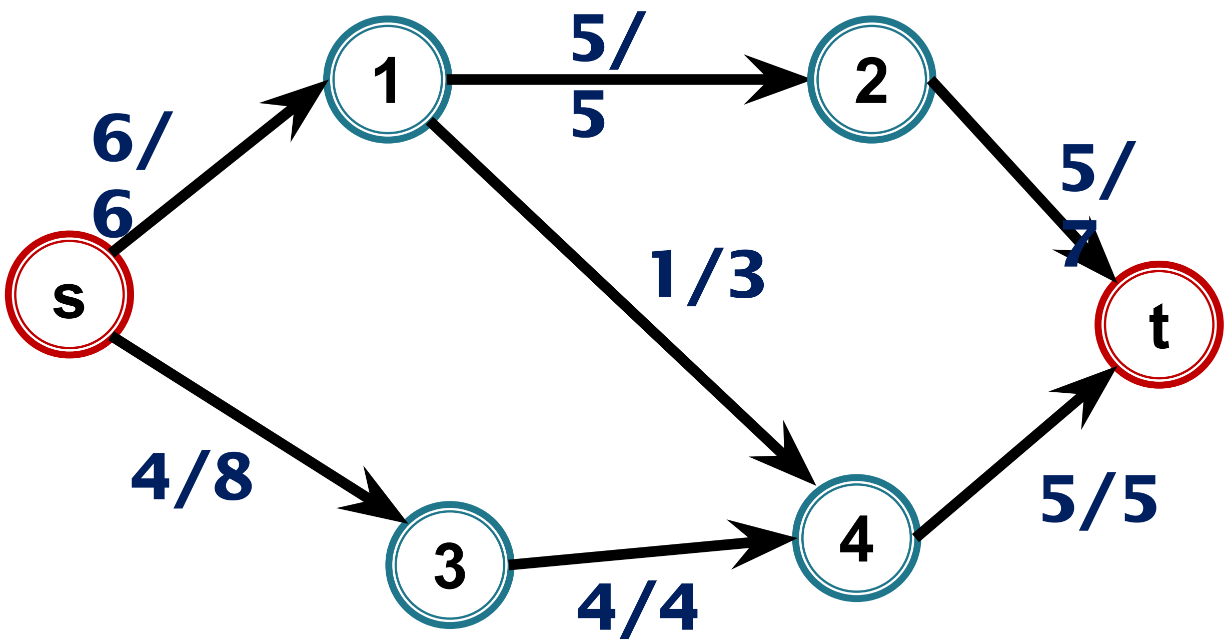
$$val(f) = f^{+}(s) = \sum_{su \in E} f(su)$$



val(f) = f(s,1) + f(s,3) = 6 + 4 = 10

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s) = \sum_{su \in E} f(su)$$



val(f) = f(s,1) + f(s,3) = 6 + 4 = 10

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s)$$

- Vom demonstra ulterior că are loc relaţia

$$val(f) = f^{+}(s) = f^{-}(t)$$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

  Un flux f* se numeşte **flux maxim în N** dacă

$$val(f^*) = \max\{val(f) \mid f \text{ este flux în N}\}$$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

  Un flux f* se numeşte **flux maxim în N** dacă

$$val(f^*) = \max\{val(f) \mid f \text{ este flux în N}\}$$

- **Observaţie**: Orice reţea admite cel puţin un flux, spre exemplu fluxul vid:

  $f(e) = 0, \ \forall e \in E$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

  Să se determine f* un **flux maxim în N**

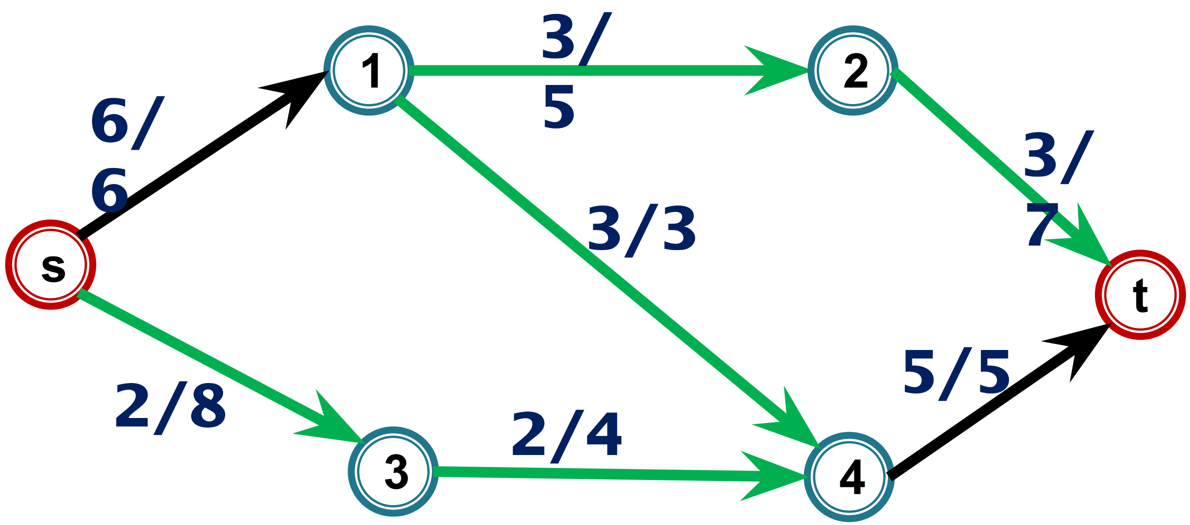
Algoritmul FORD-FULKERSON

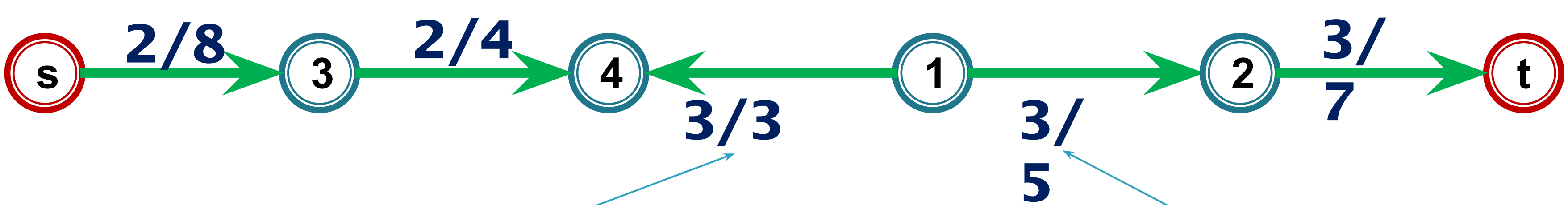
de determinare a unui flux maxim

+ a unei tăieturi minime

Algoritmul Ford-Fulkerson

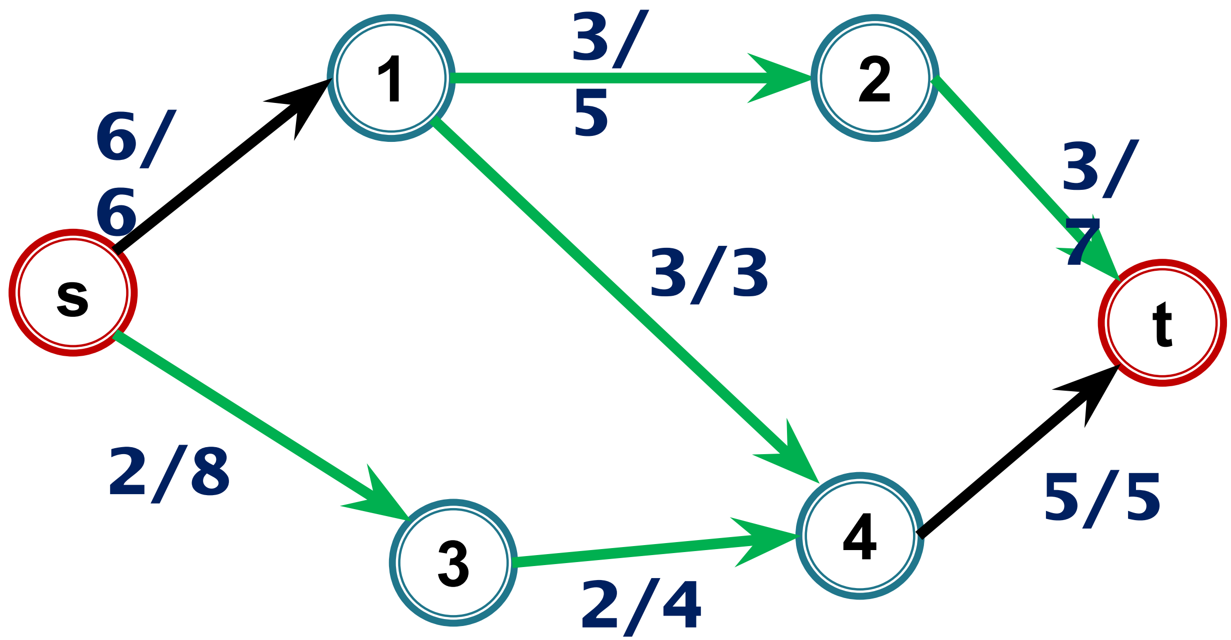
Amintim din exemplele anterioare:

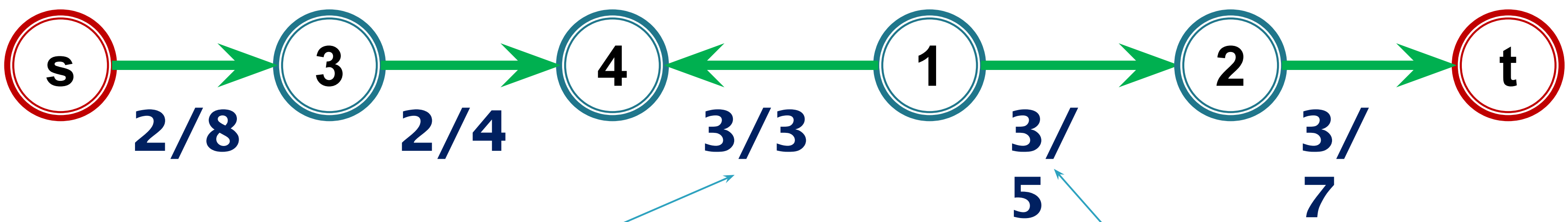




arc în sens invers,
putem trimite înapoi 3 unități de flux

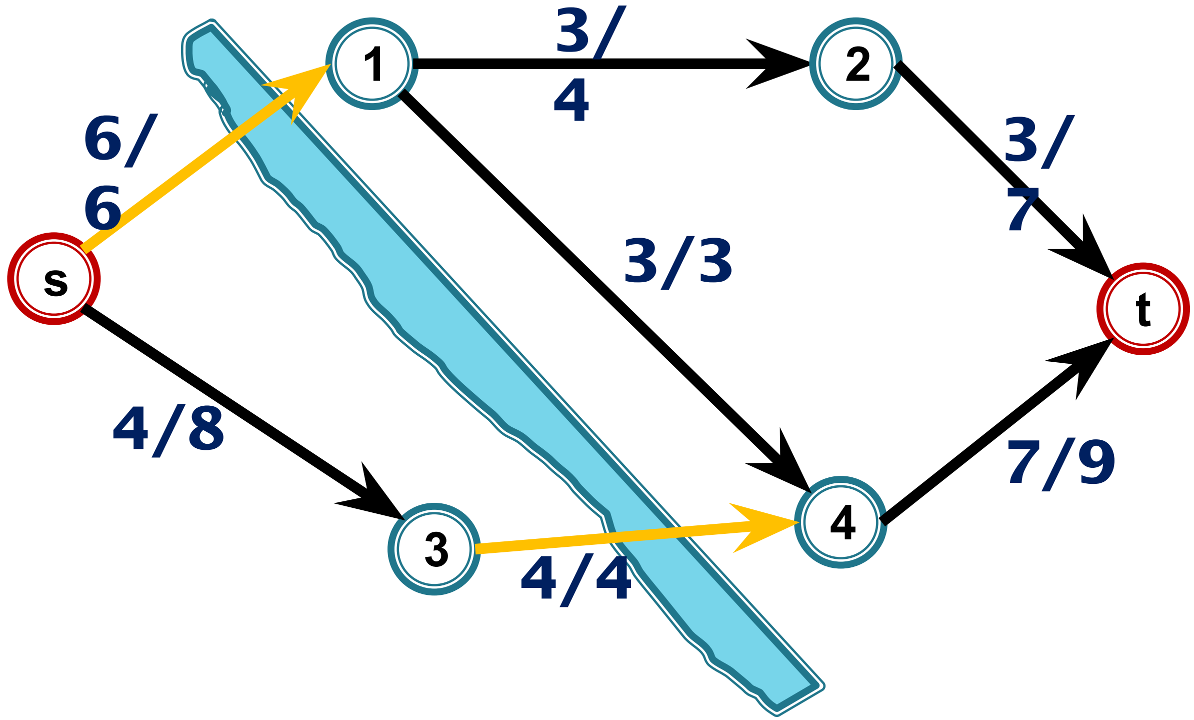
arc în sens direct,
mai putem trimite 5-3=2 unități





arc în sens invers, putem trimite înapoi 3 unități de flux

arc în sens direct, mai putem trimite 5-3=2 unități



Fluxul este maxim - în mulțimea de arce evidențiată toate arcele au flux=capacitate și nu putem construi drumuri de la s la t care nu conțin arce din această mulțime (s-t tăietură)

Algoritmul Ford-Fulkerson

Definim noțiunile necesare descrierii și studiului algoritmului:

- **s-t lanț f-nesaturat**
  - arc direct
  - arc invers
  - capacitate reziduală arc, lanţ
- Operația de **revizuire a fluxului** de-a lungul unui s-t lanț *f-nesaturat*
- **Tăietură în rețea**
  - capacitatea unei tăieturi

Fie N = (G, {s}, {t}, l, c) o reţea

- Un s-t **lanţ** este o succesiune de vârfuri **distincte** și arce din G

$$P = [s=v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k=t]$$

unde arcul e_i este fie $v_{i-1}v_i$, fie v_iv_{i-1}

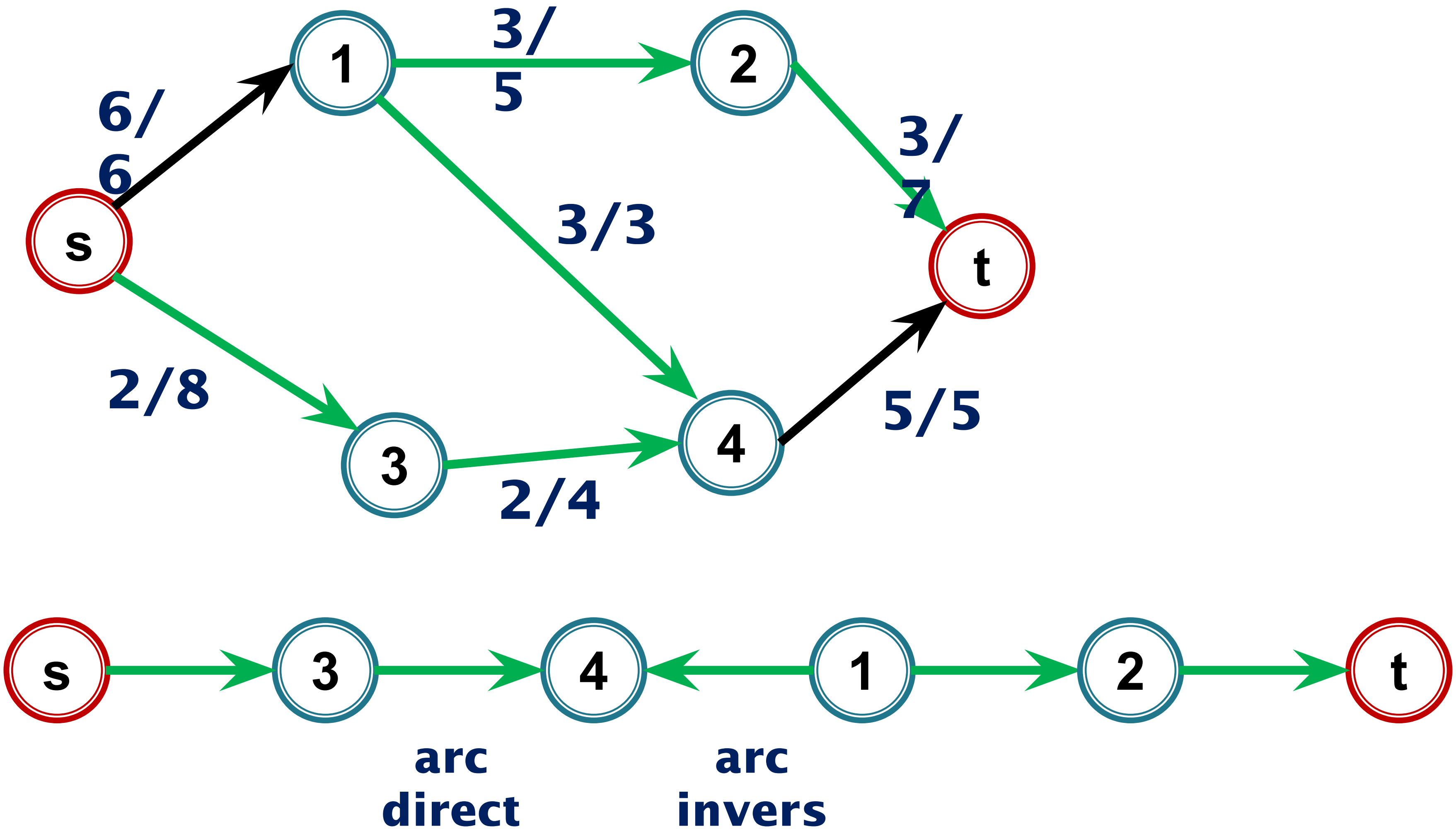
(P este lanț elementar în graful neorientat asociat lui G)

Dacă

- $e_i = v_{i-1}v_i \in E(G)$, e_i s.n **arc direct** (**înainte**) în P
- $e_i = v_iv_{i-1} \in E(G)$, e_i s.n **arc invers** (**înapoi**) în P

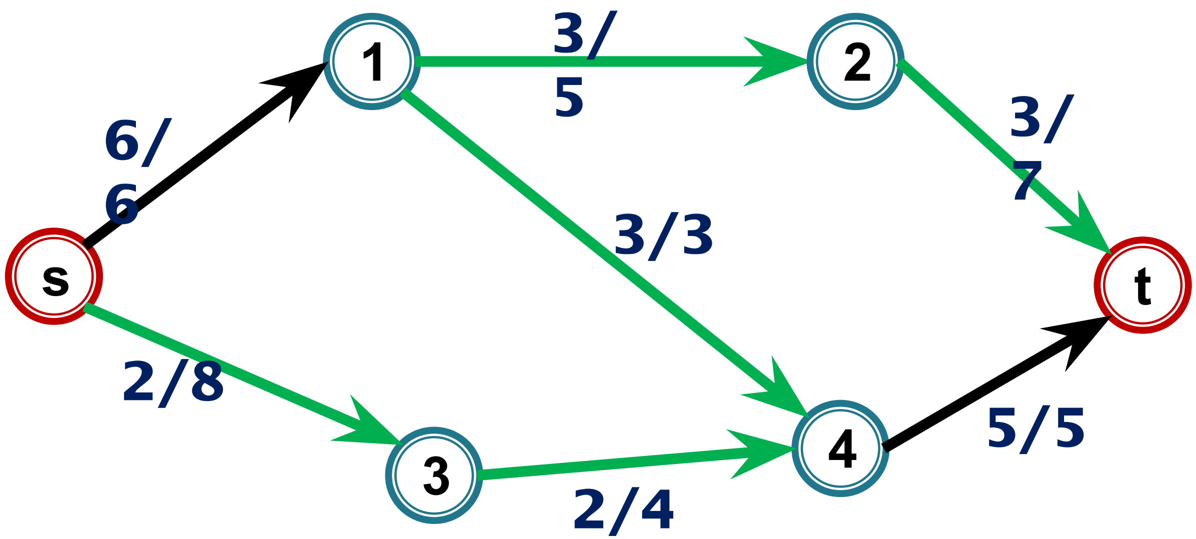
- **Dacă nu există confuzii vom omite arcele în scrierea lanţului P**

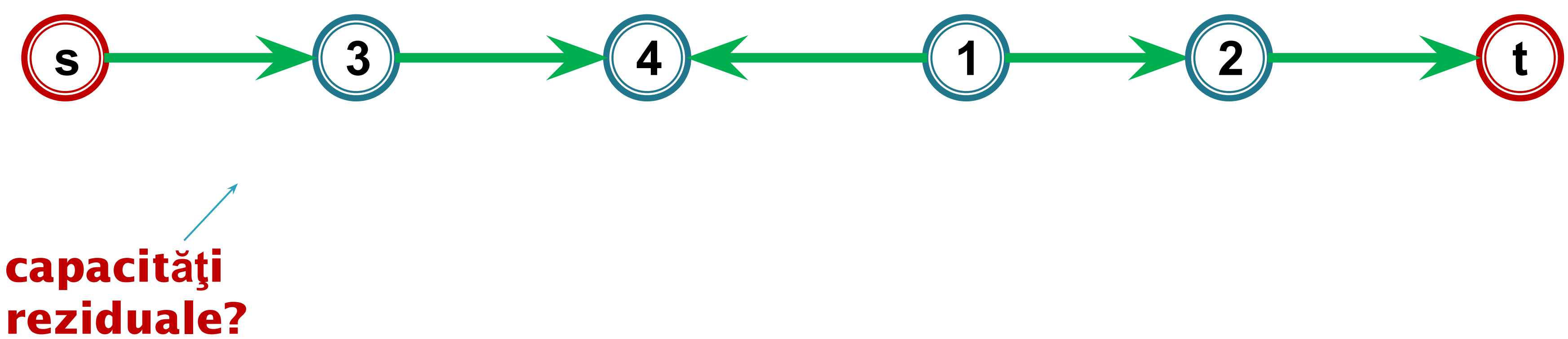
$$P = [s=v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k=t]$$



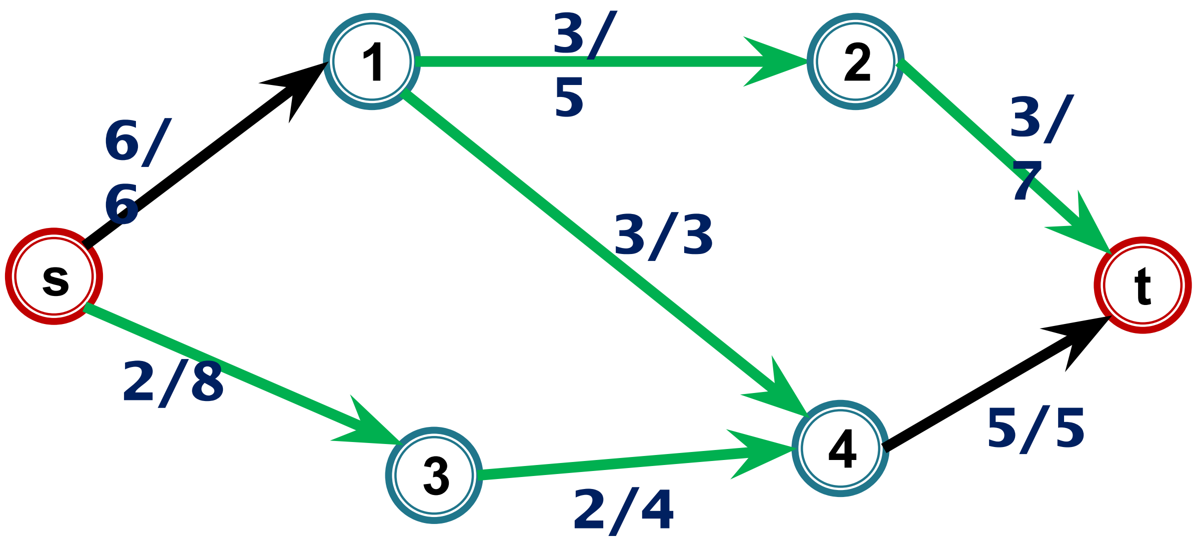
s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5
s
3
4
1
2
t
arc direct
arc invers

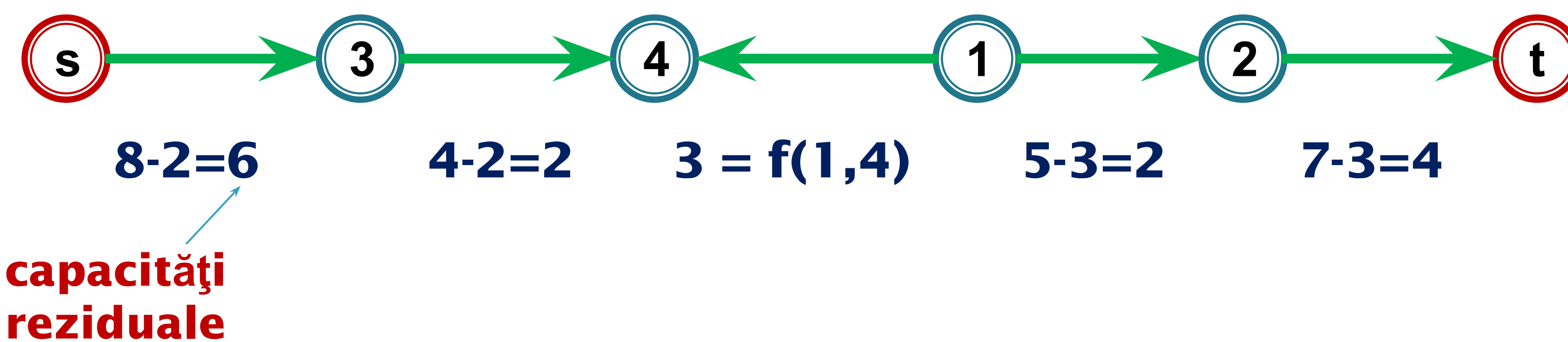
- Fie N reţea, f flux în N, P un s-t lanţ
- Asociem fiecărui arc *e* din P o pondere, numită **capacitate reziduală** în P





- Fie N reţea, f flux în N, P un s-t lanţ
- Asociem fiecărui arc *e* din P o pondere, numită **capacitate reziduală** în P



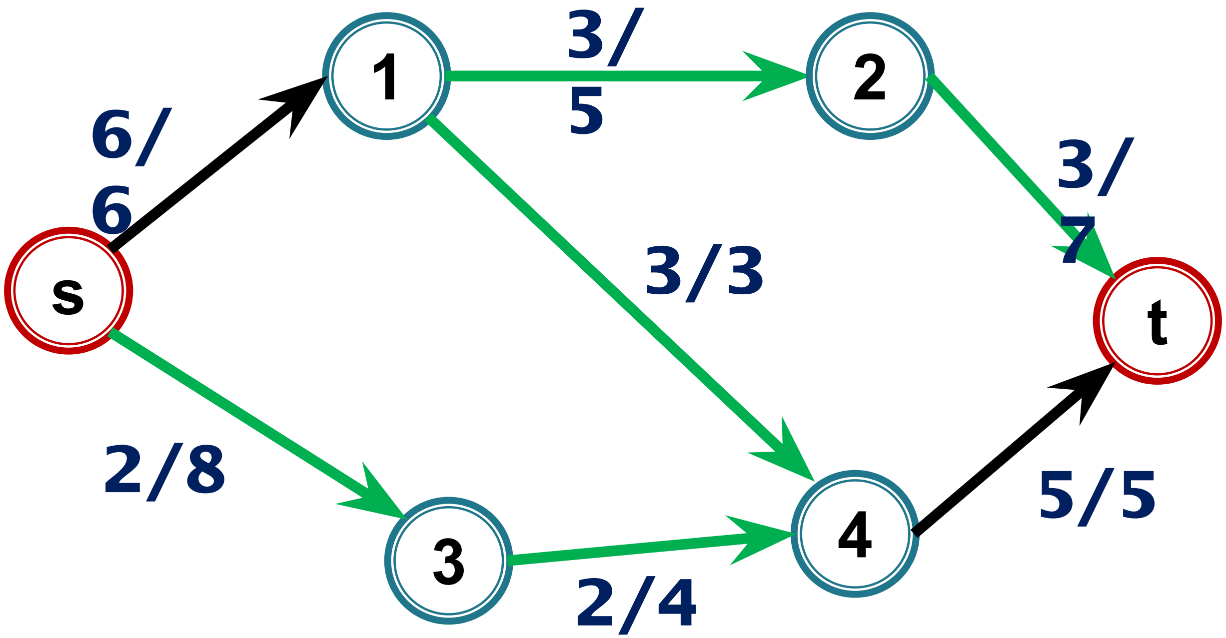


- Fie N reţea, f flux în N, P un s-t lanţ

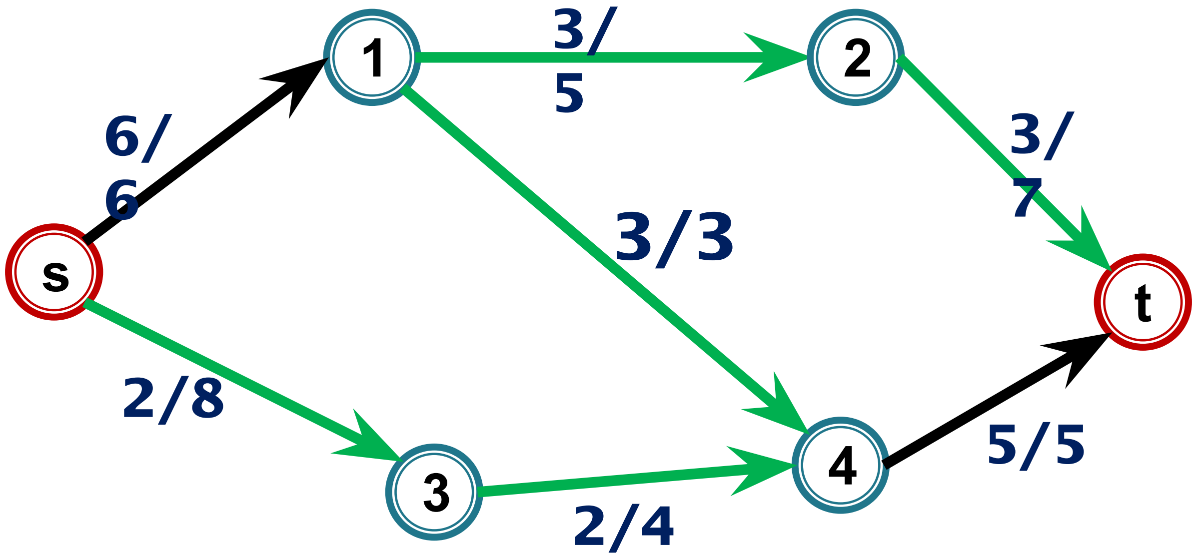
- Asociem fiecărui arc *e* din P o pondere, numită **capacitate reziduală** în P:

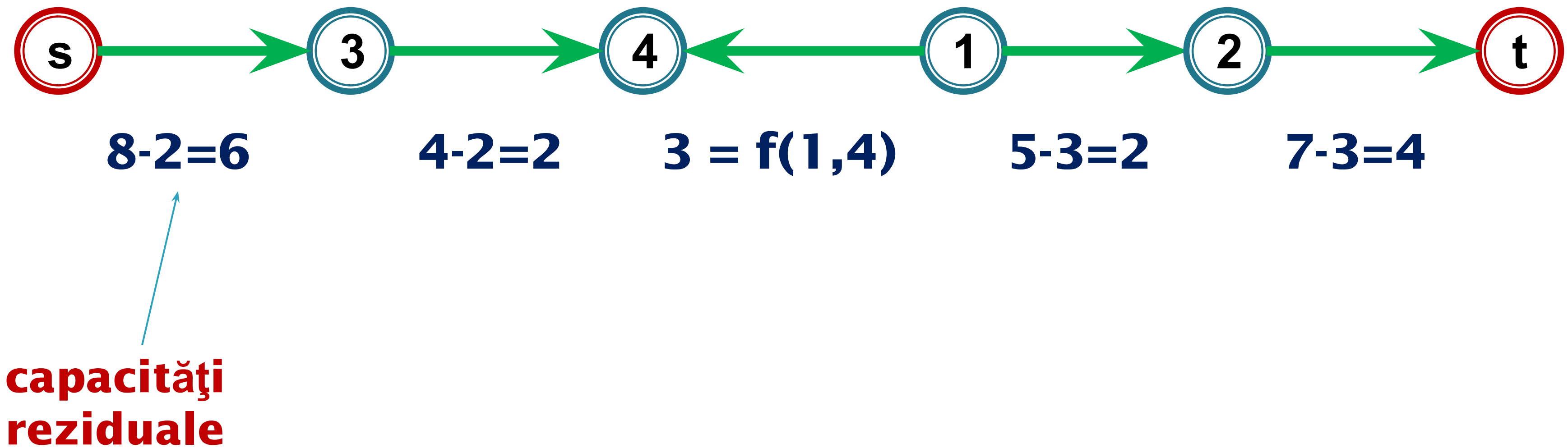
$$i_P(e) = \begin{cases} c(e) - f(e), & \text{dacă } e \text{ este arc direct în } P \\ f(e), & \text{dacă } e \text{ este arc invers în } P \end{cases}$$

= cu cât mai poate fi modificat fluxul pe arcul e, de-a lungul lanţului P

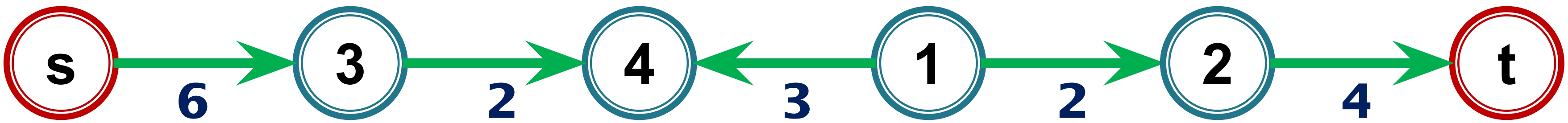


capacităţi
reziduale?


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5


s
3
4
1
2
t
8-2=6
4-2=2
3 = f(1,4)
5-3=2
7-3=4
capacităţi reziduale

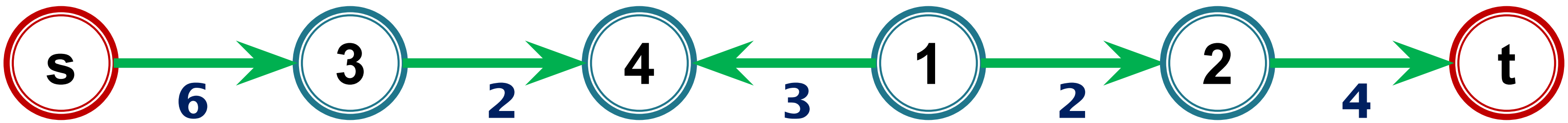
- **Capacitatea reziduală** a lanţului P



i(P) = ?

= cu cât putem revizui maxim fluxul de-a lungul lui P

- **Capacitatea reziduală** a lanţului P



i(P) = min{6, 2, 3, 2, 4} = 2

- **Capacitatea reziduală** a lanţului P este

$$i(P) = \min\{i_P(e) \mid e \in E(P)\}$$

= cu cât mai poate fi modificat fluxul de-a lungul lanţului P

- P se numeşte
  - **f-saturat** dacă i(P) = 0
  - **f-nesaturat** dacă i(P) ≠ 0

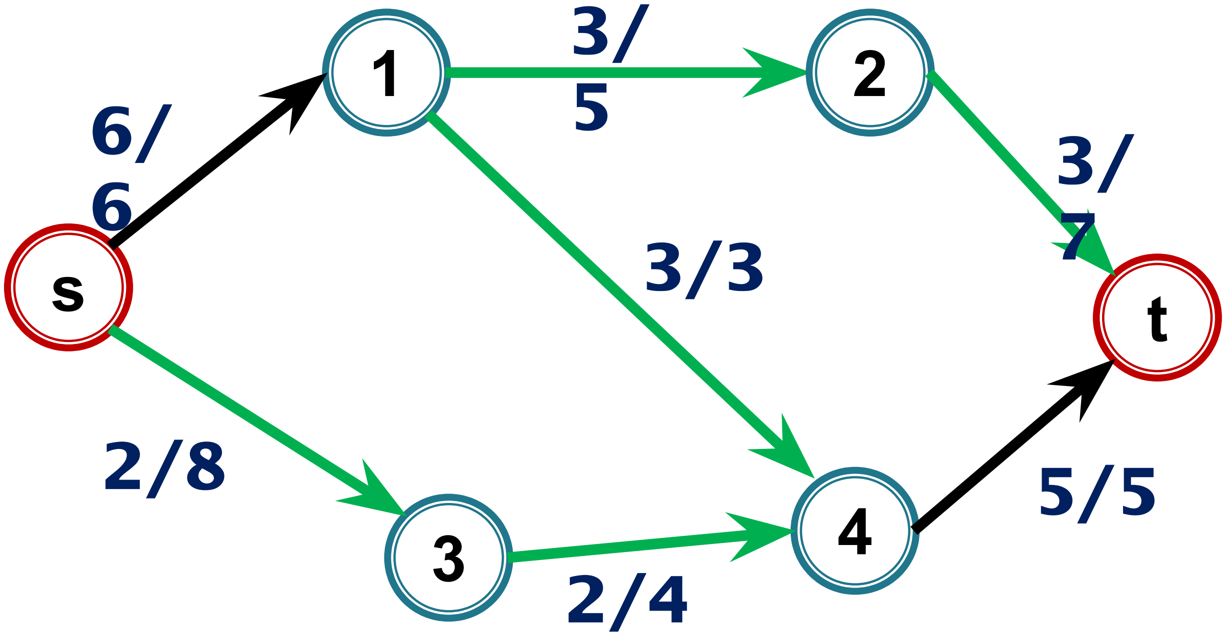
- Fie N- rețea, f flux în N, P un s-t lanţ **f-nesaturat**.
- **Fluxul revizuit de-a lungul lanţului P** se definește ca fiind f' : $E \to \mathbb{N}$,

Fluxuri în rețele de transport

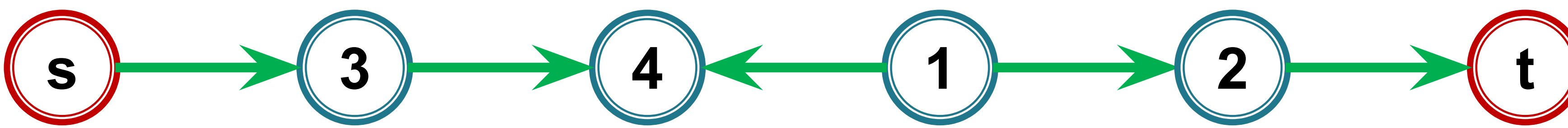
- Fie N- rețea, f flux în N, P un s-t lanţ **f-nesaturat**.

- **Fluxul revizuit de-a lungul lanţului P** se defineşte ca fiind $f_P : E \to \mathbb{N}$,

$$f_P(e) = \begin{cases} f(e) + i(P), & \text{dacă } e \text{ este arc direct în } P \\ f(e) - i(P), & \text{dacă } e \text{ este arc invers în } P \\ f(e), & \text{altfel} \end{cases}$$

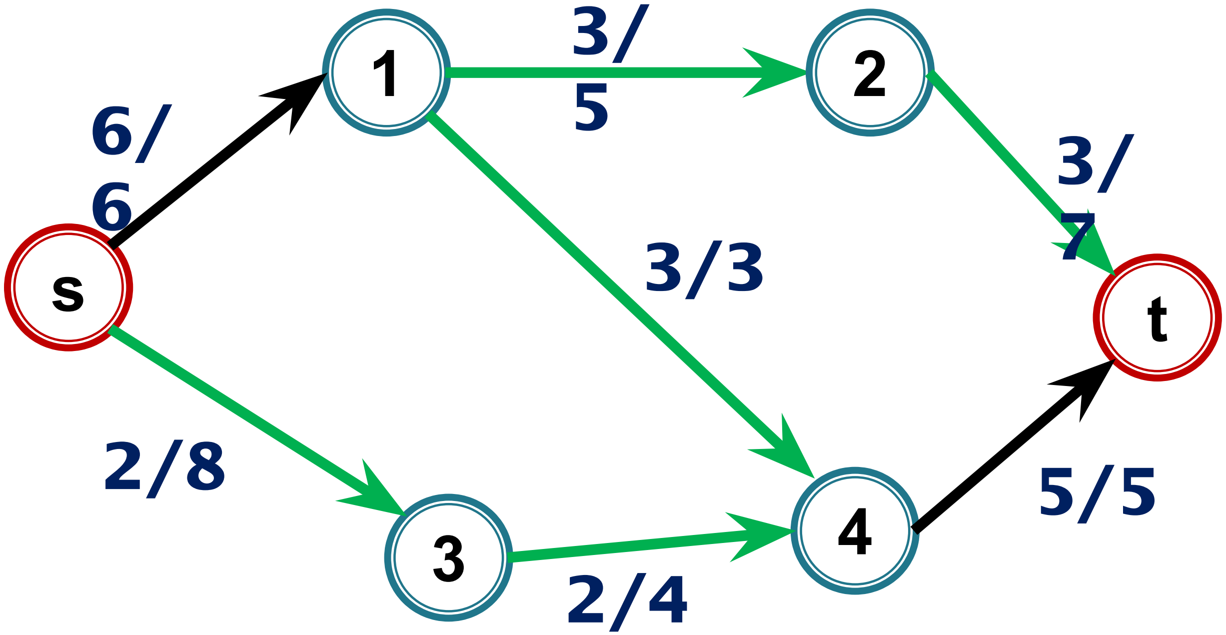


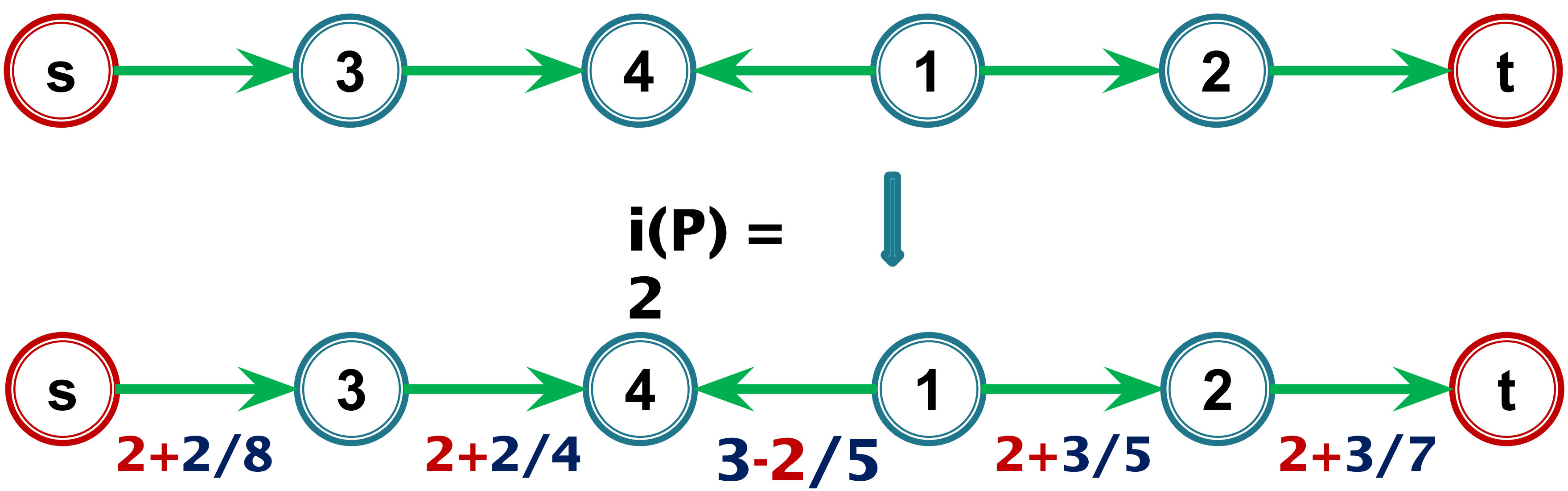
Considerăm s-t lanţul P evidenţiat

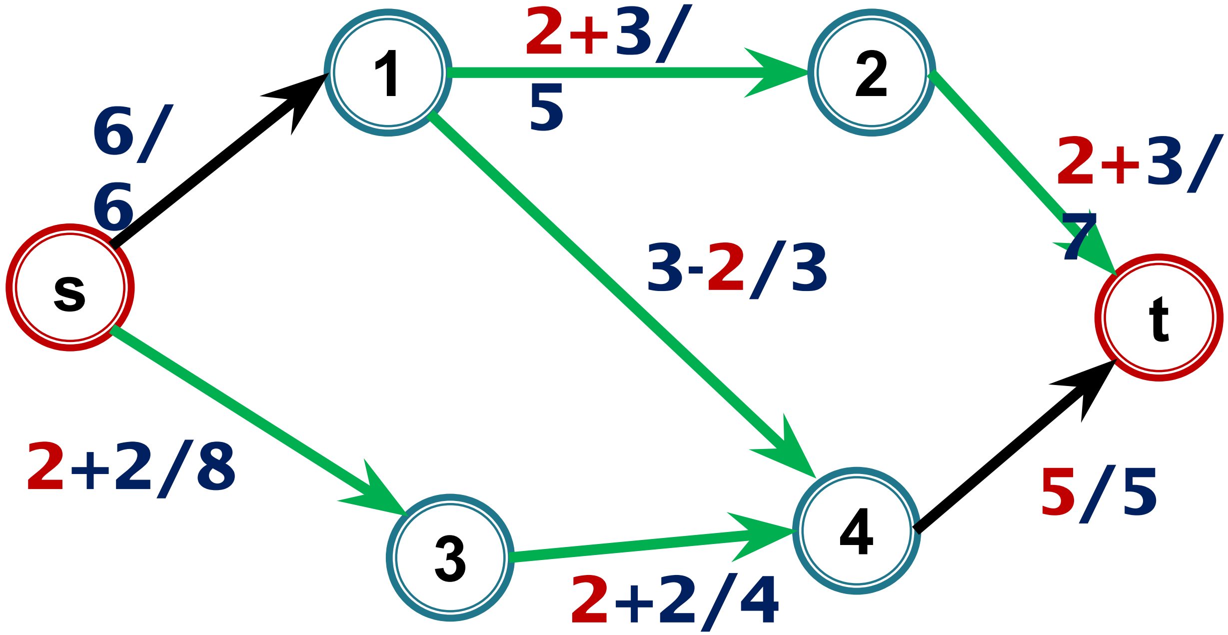


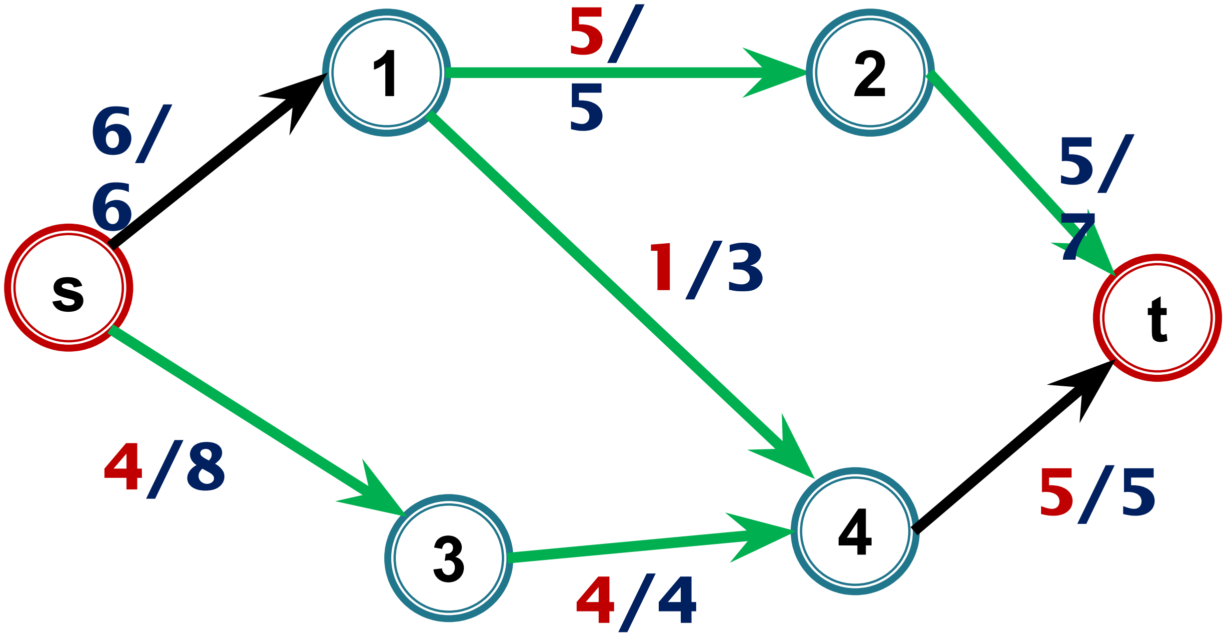
i(P) = 2

Considerăm s-t lanţul P evidenţiat și revizuim fluxul






s
1
2
3
4
t
6/6
2+3/5
2+3/7
3-2/3
2+2/8
2+2/4
5/5



Fluxul după revizuirea de-a lungul lanţului P

Proprietăţi ale fluxului revizuit

Fie N = (G, {s}, {t}, I, c) o reţea și f flux în N.

Fie P un s-t lanţ f-nesaturat în G și f' fluxul revizuit de-a lungul lanţului P. Atunci

- f' este flux în G

și

- $val(f') = val(f) + i(P) \geq val(f) + 1$

Proprietăţi ale fluxului revizuit

Fie N = (G, {s}, {t}, I, c) o reţea și f flux în N.

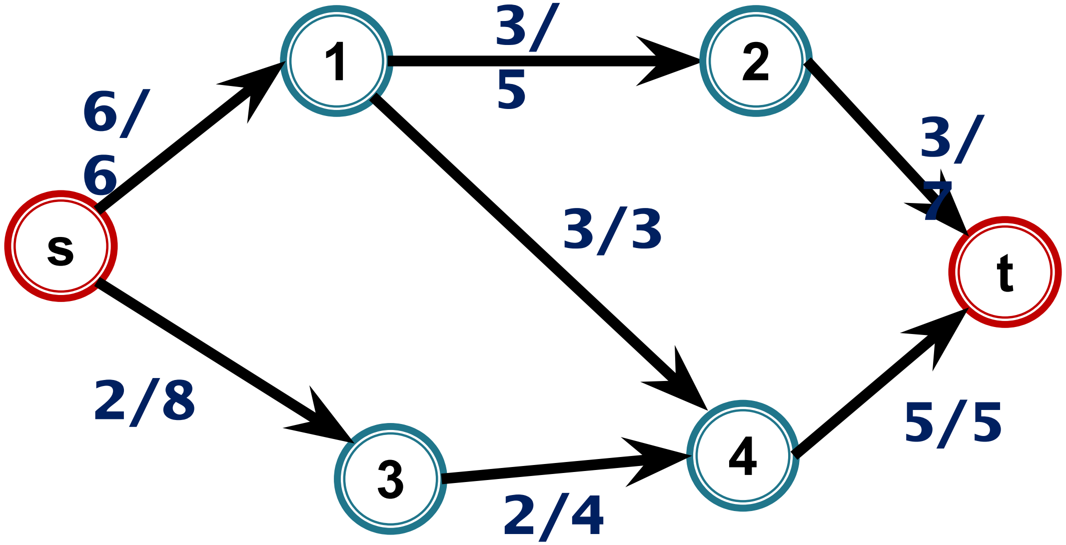
Fie P un s-t lanţ f-nesaturat în G și f_P fluxul revizuit de-a lungul lanţului P. Atunci

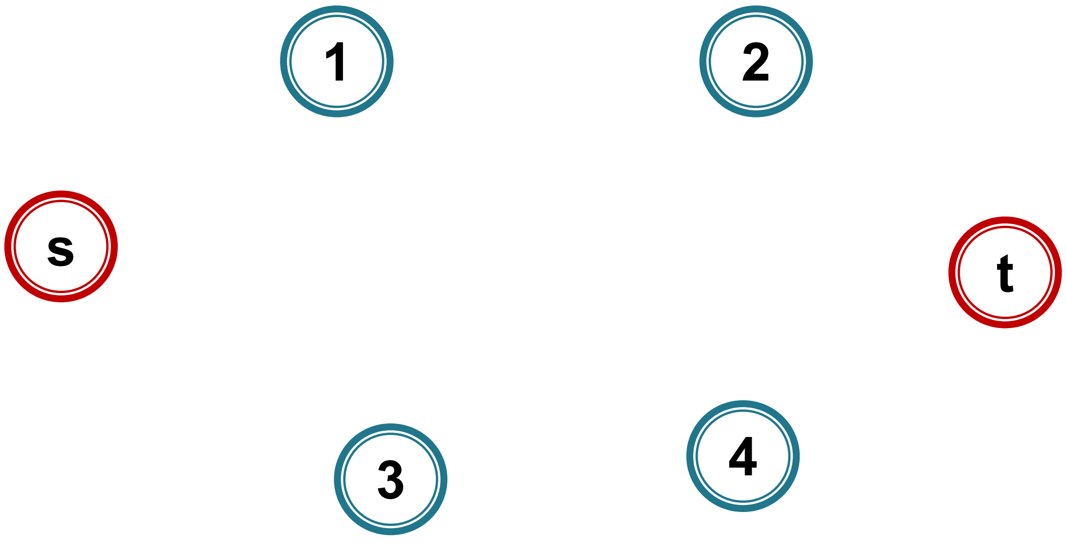
- f_P este flux în G

și

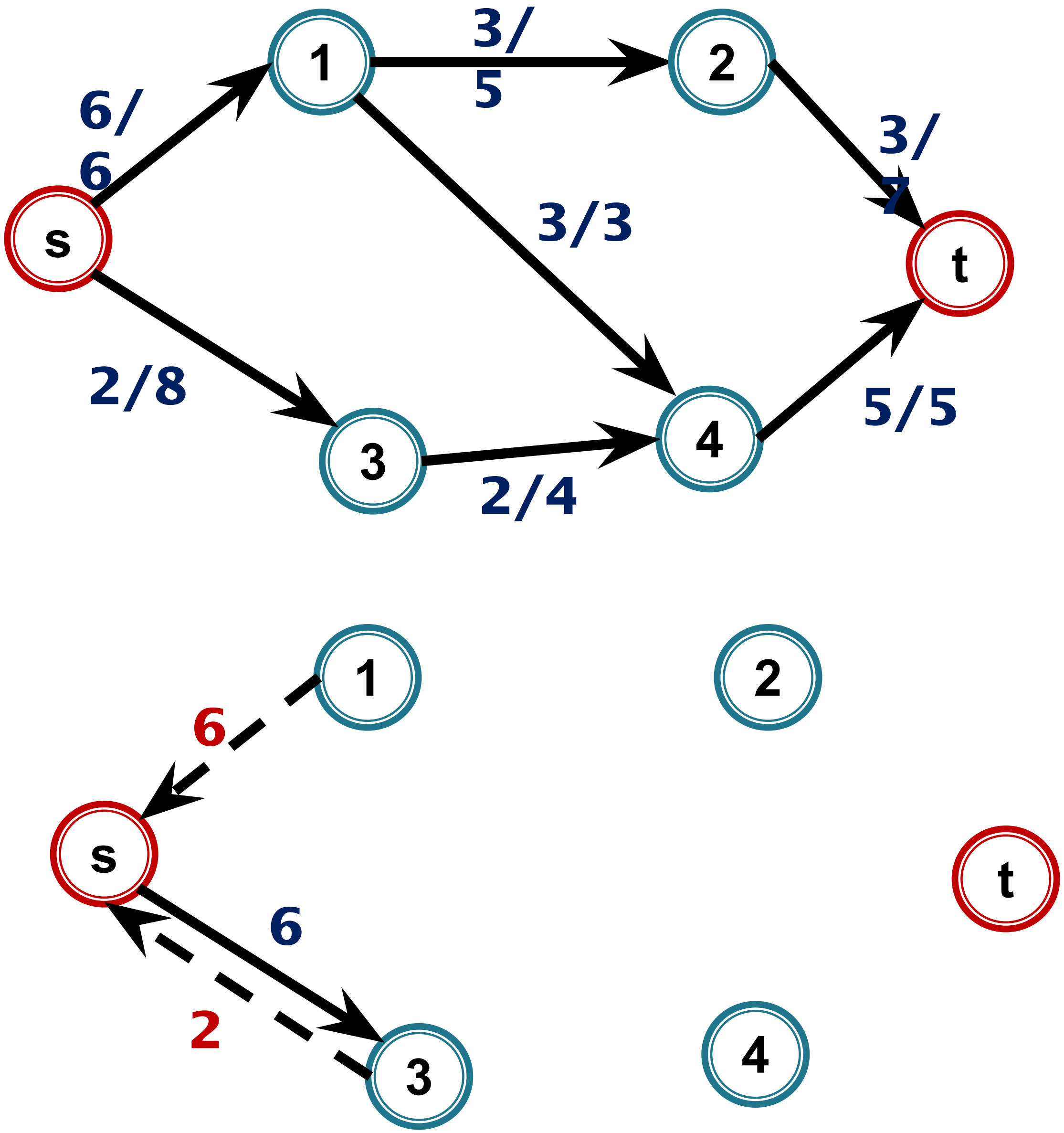
- $val(f_P) = val(f) + i(P) \geq val(f) + 1$

Graf rezidual

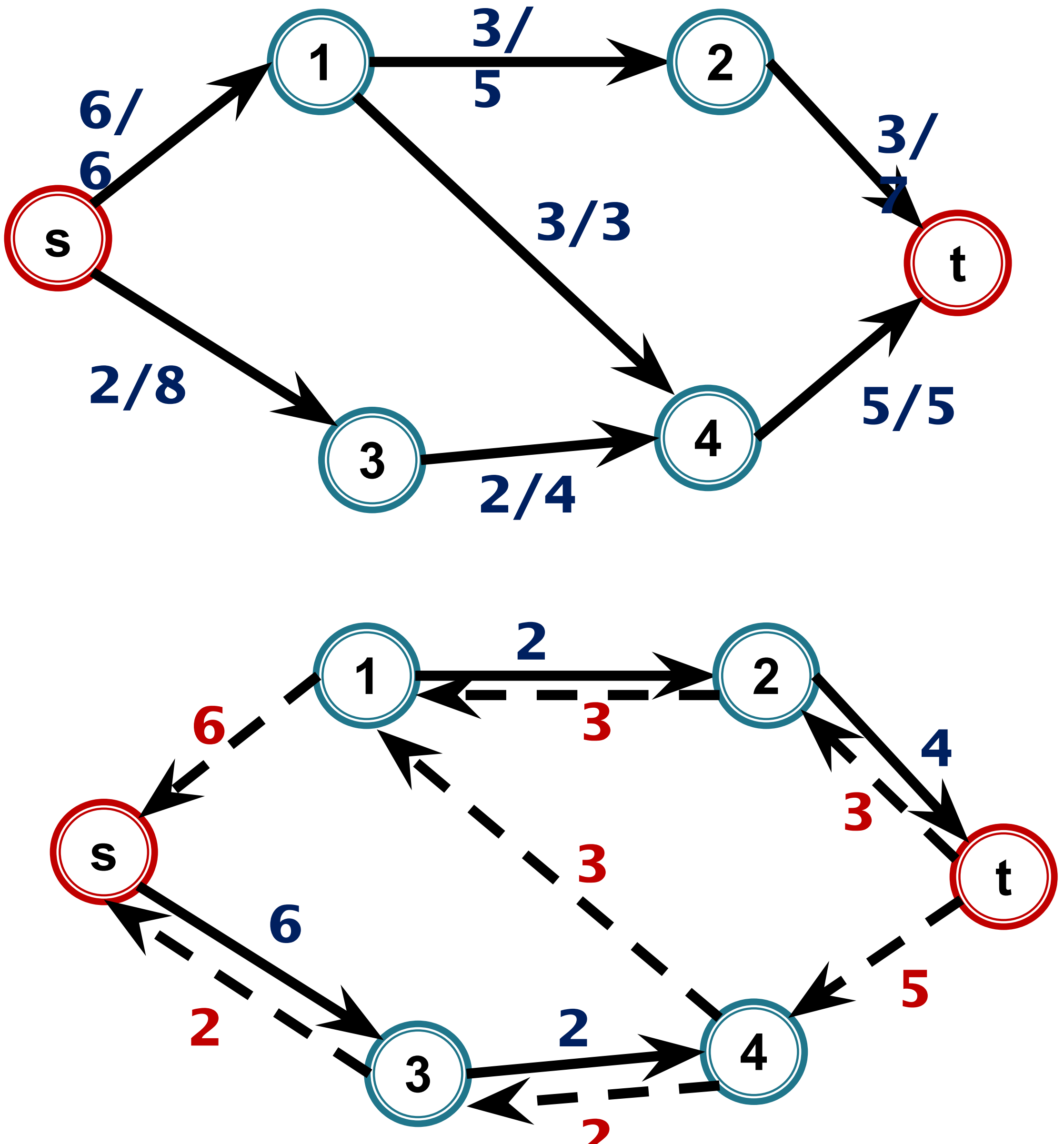




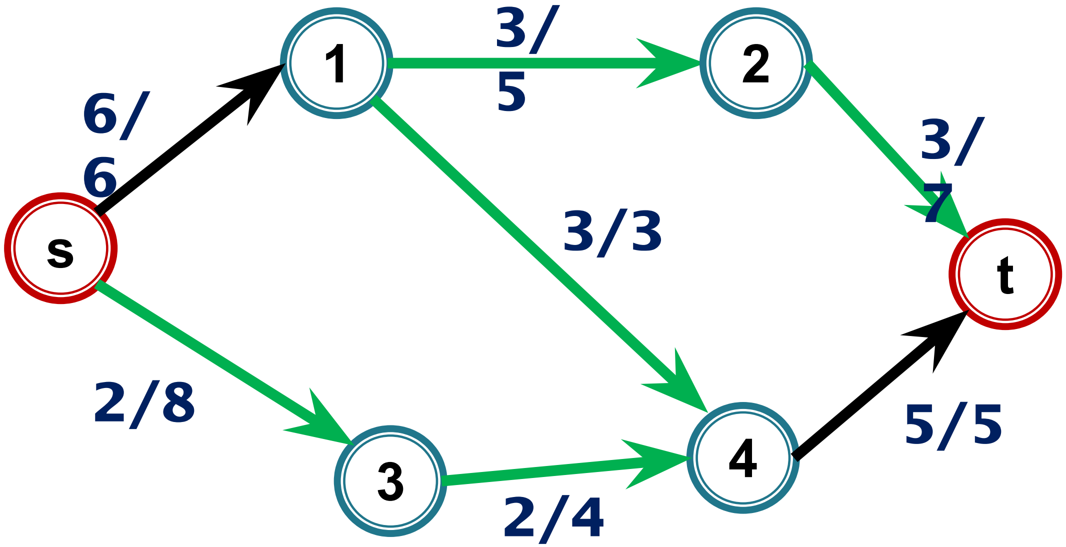
Graf rezidual



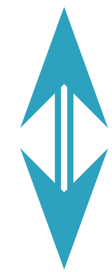
Graf rezidual

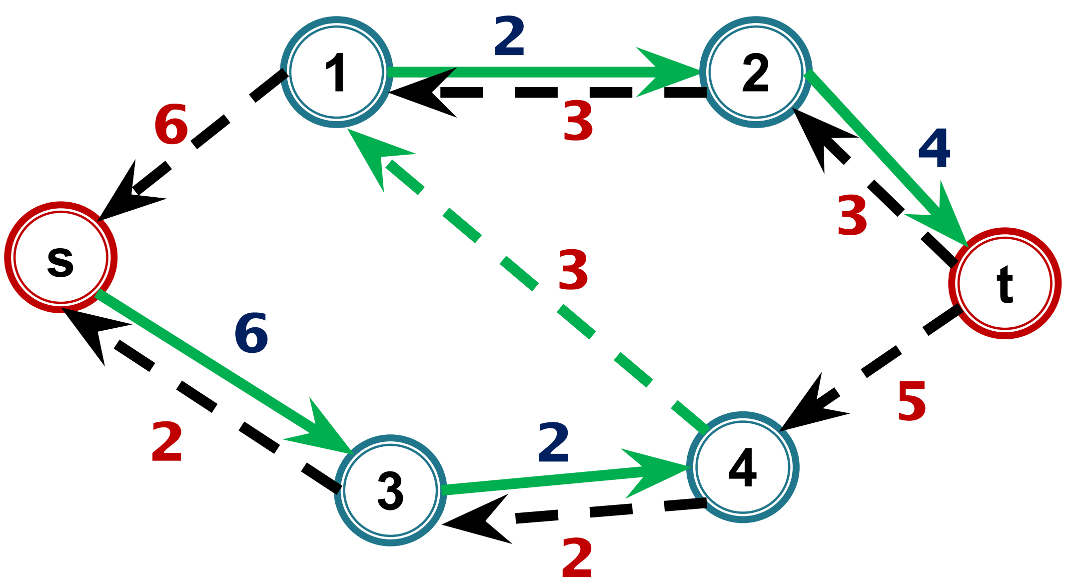


Graf rezidual



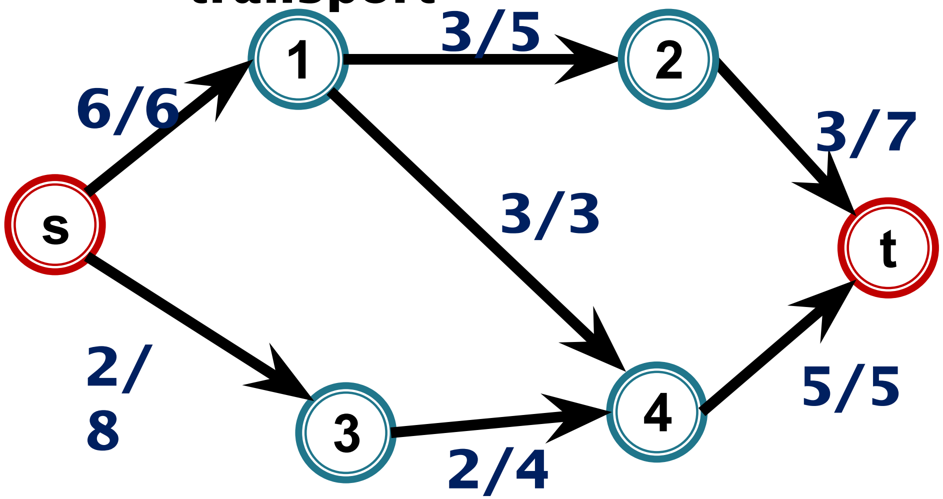
s-t lanț f-nesaturat



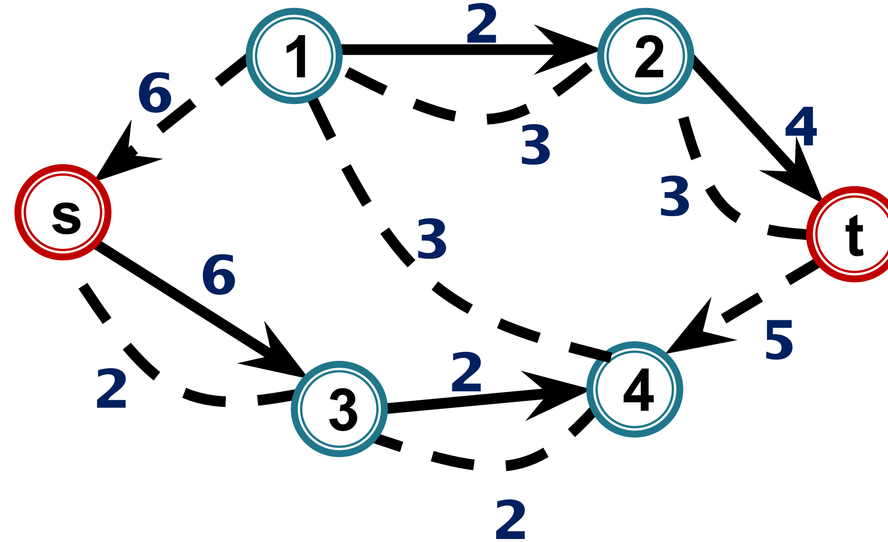


s-t drum în graful rezidual

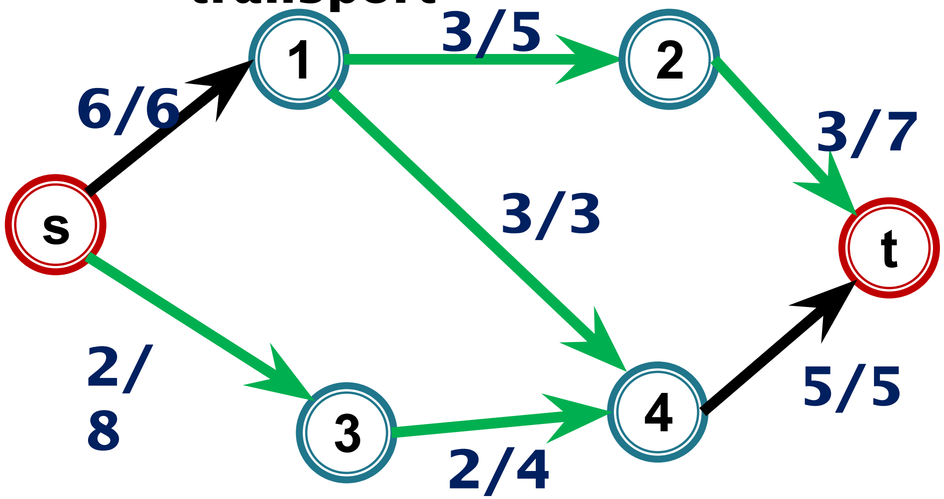
Rețeaua de transport



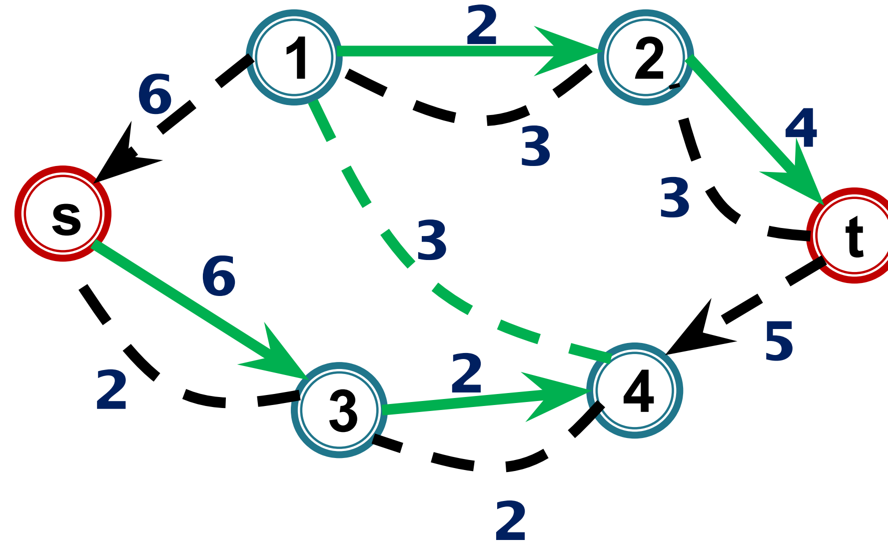
Graful rezidual

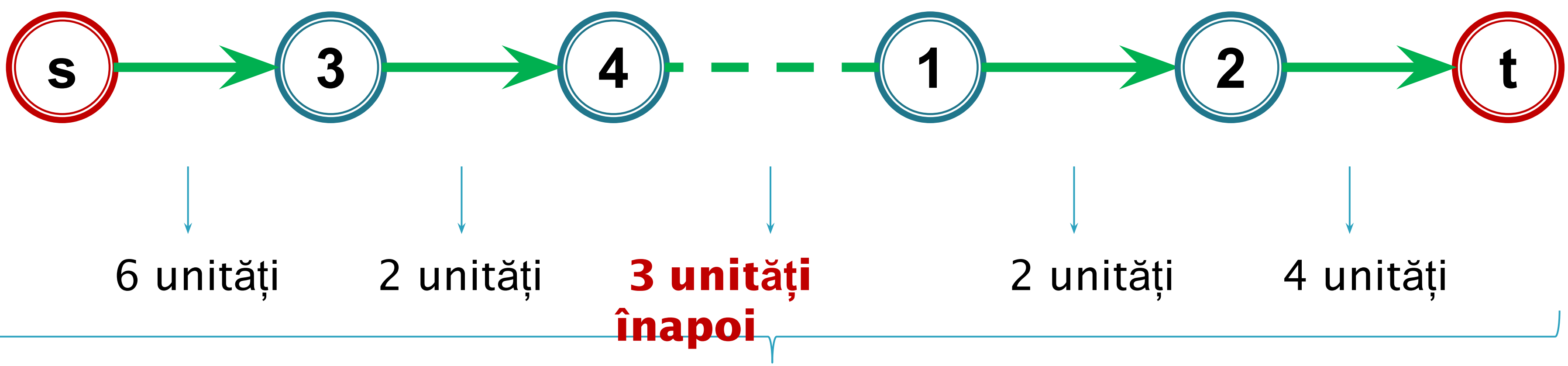


Rețeaua de transport

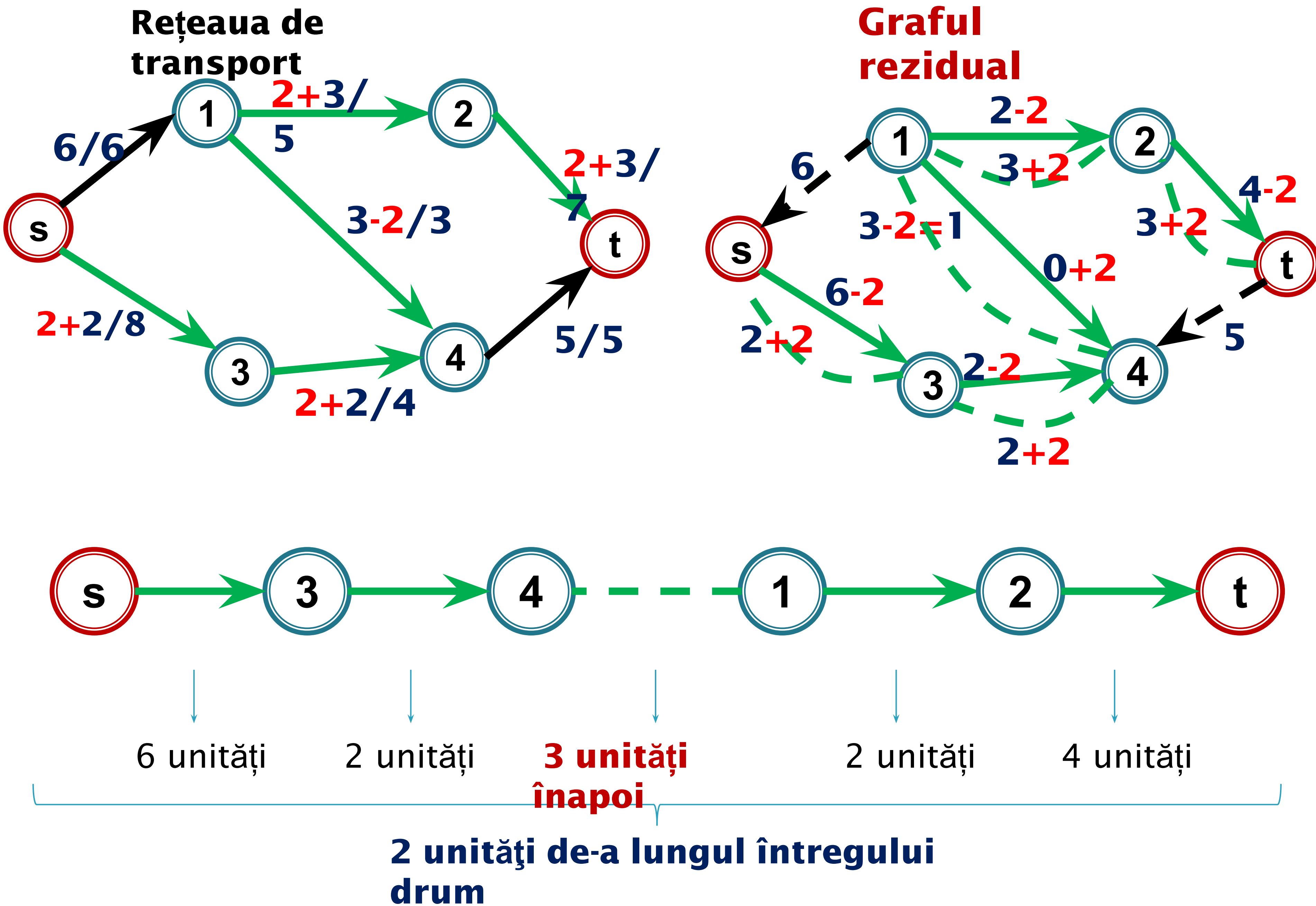


Graful rezidual

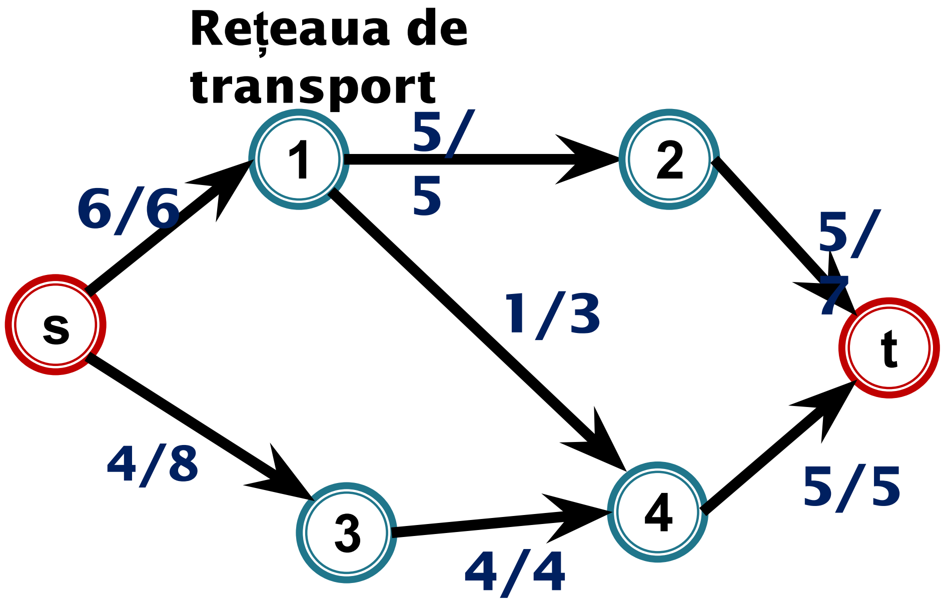


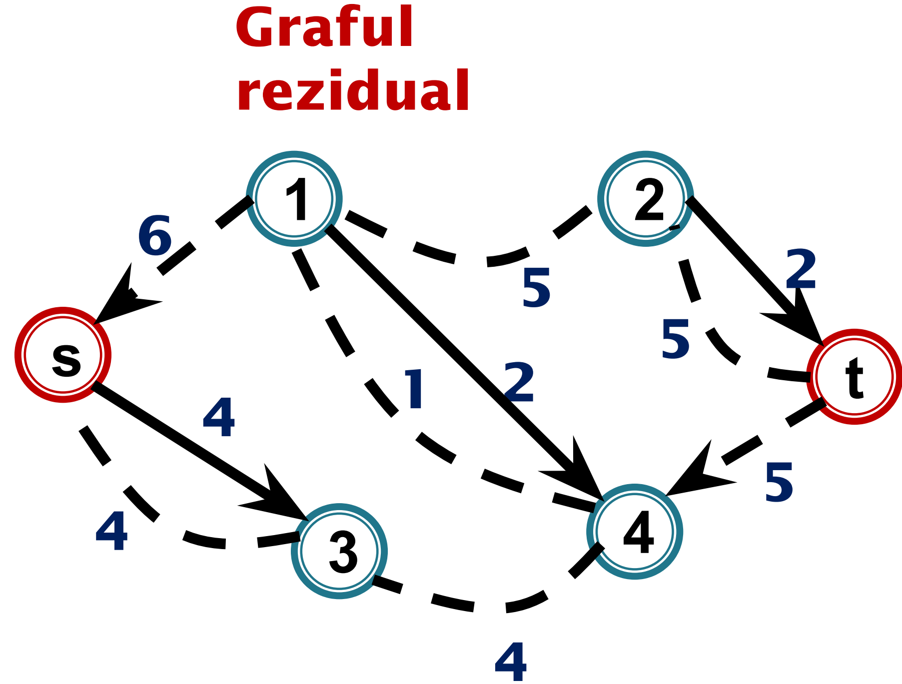


2 unităţi de-a lungul întregului drum



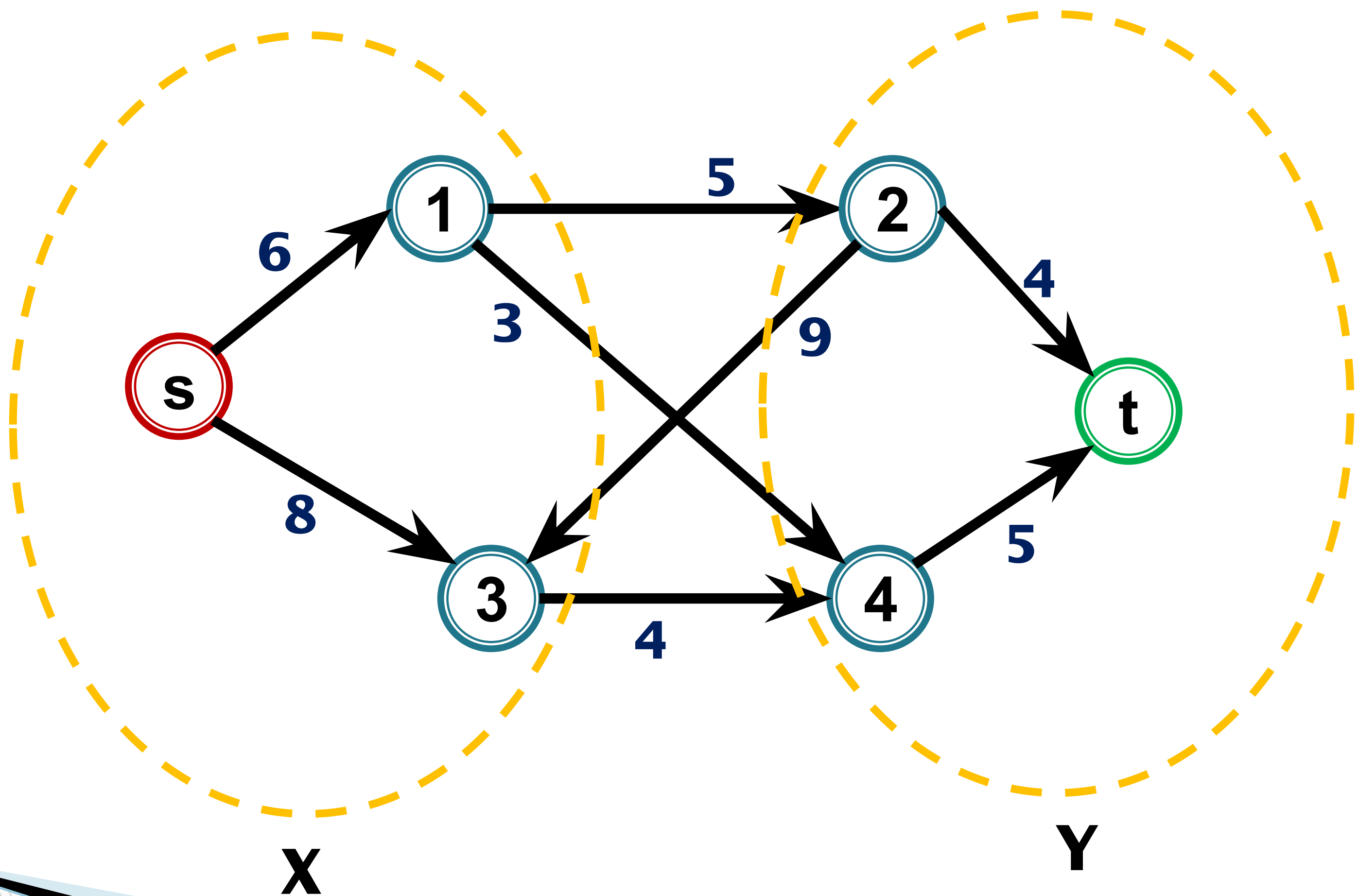
Rețeaua de transport
6/6
2+3/5
3-2/3
2+3/7
2+2/8
2+2/4
5/5
Graful rezidual
2-2
3+2
6
4-2
3-2=1
3+2
0+2
6-2
2+2
2-2
5
2+2
s
3
4
1
2
t
6 unități
2 unități
3 unități înapoi
2 unități
4 unități
2 unităţi de-a lungul întregului drum


Rețeaua de transport
1
2
s
t
3
4
6/6
5/5
5/7
1/3
4/8
4/4
5/5


Graful rezidual
1
2
s
t
3
4
6
5
2
5
1
2
4
4
5
4

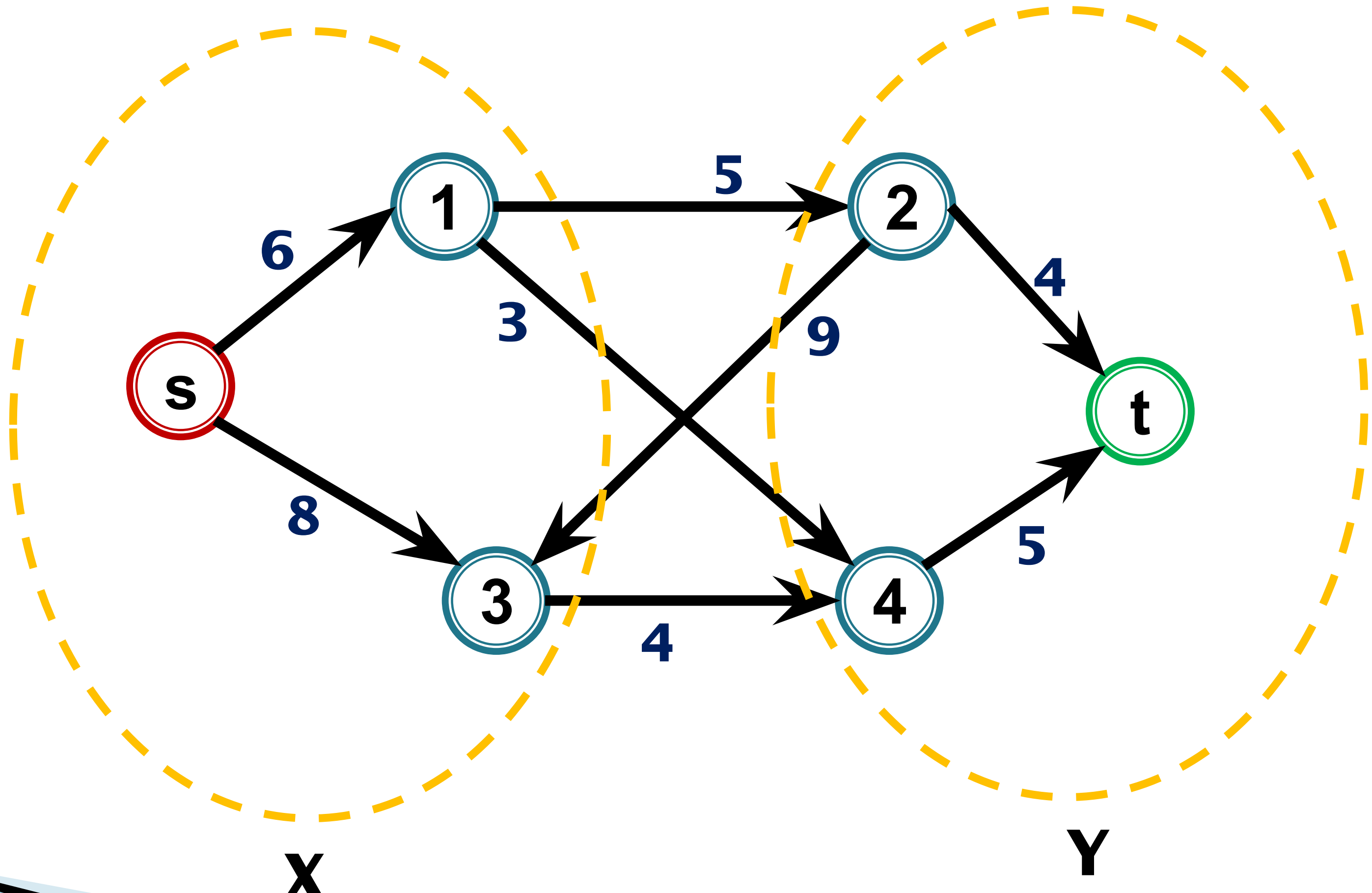
Fie N = (G, {s}, {t}, I, c) o reţea

- O **tăietură** K= (X, Y) în reţea



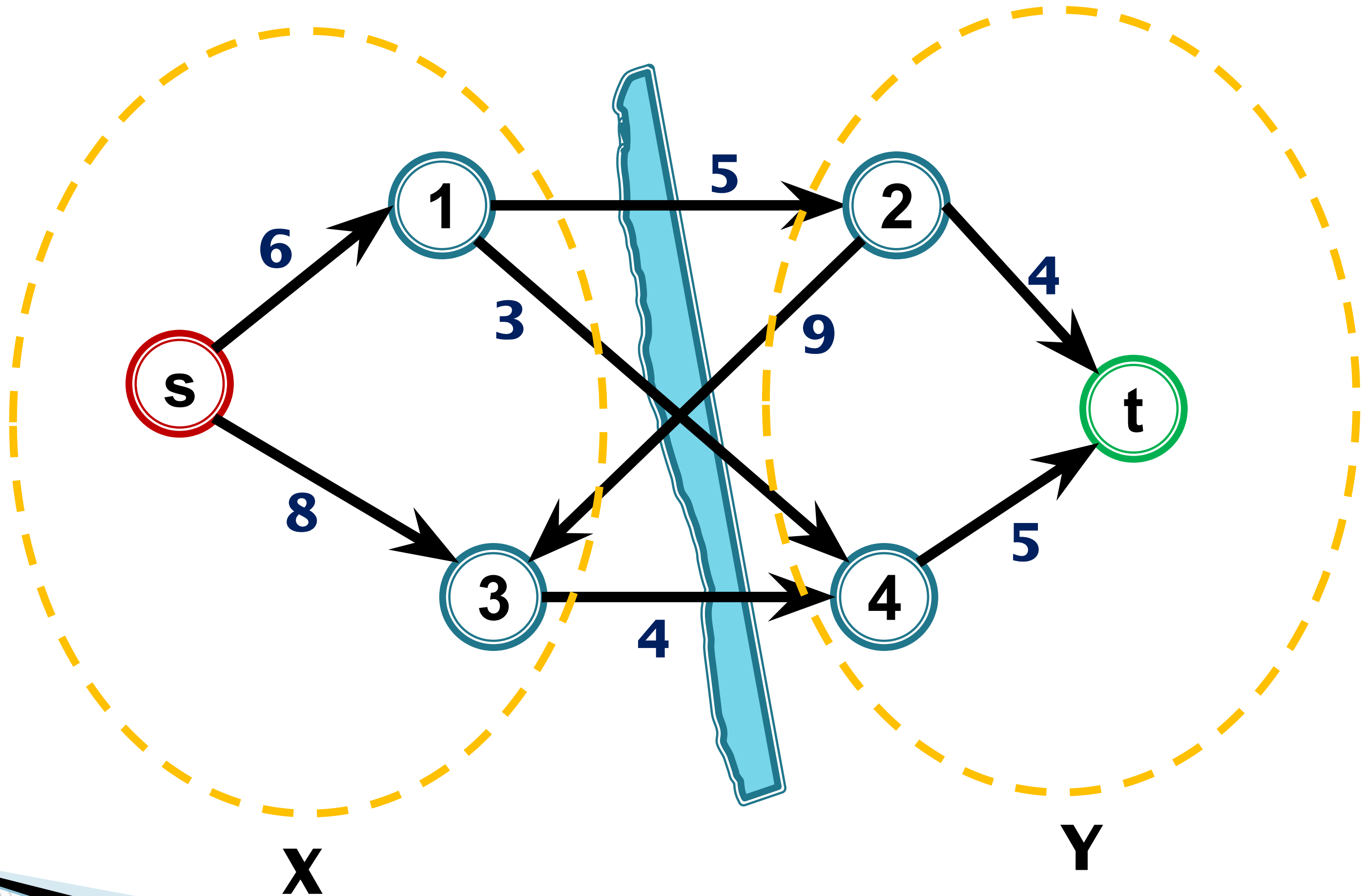
Fie N = (G, {s}, {t}, I, c) o reţea

- O **tăietură** K= (X, Y) în reţea este o (bi)partiţie (X, Y) a mulţimii vârfurilor V astfel încât s ∈ X şi t ∈ Y



Fie N = (G, {s}, {t}, I, c) o reţea

- O **tăietură** K= (X, Y) în reţea este o bipartiţie (X, Y) a mulţimii vârfurilor V astfel încât s ∈ X şi t ∈ Y



Fie K= (X, Y) o tăietură

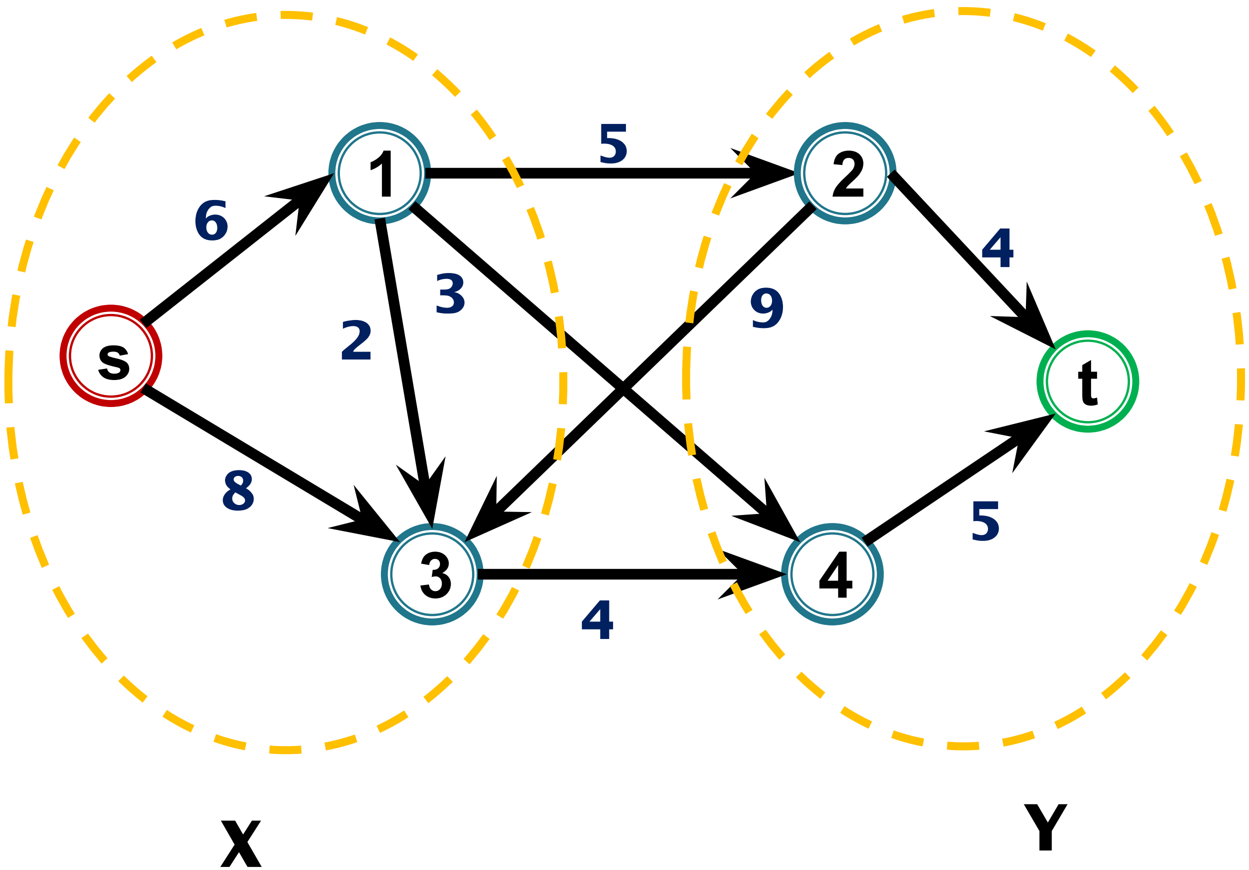
- **Capacitatea tăieturii** K = (X, Y)

$$c(K) = c(X,Y) = \sum_{\substack{x \in X, y \in Y \\ xy \in E}} c(xy)$$

= suma capacităţilor arcelor care ies din X către Y

Fie K= (X, Y) o tăietură

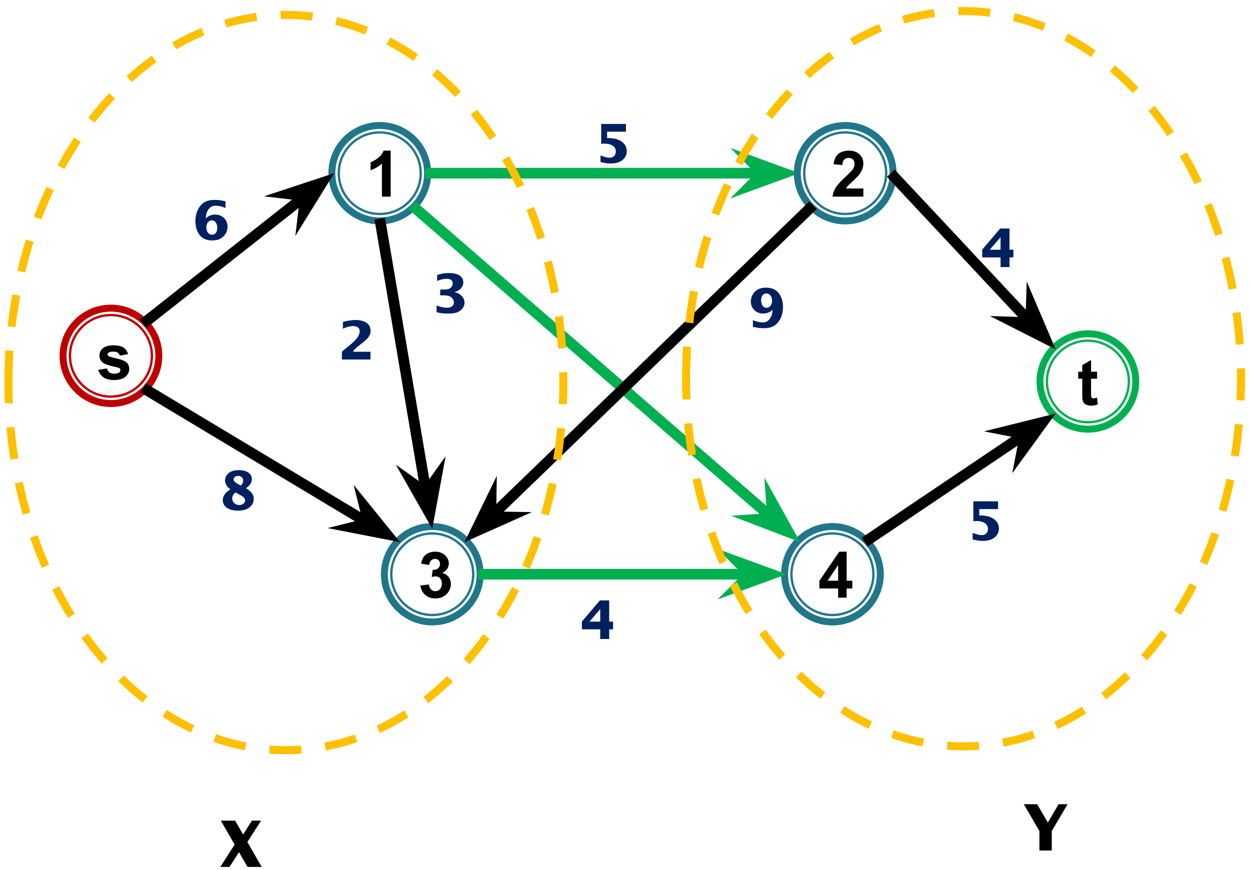
- **Capacitatea tăieturii** K = (X, Y)



$$c(K) = c(X, Y) = ?$$

Fie K= (X, Y) o tăietură

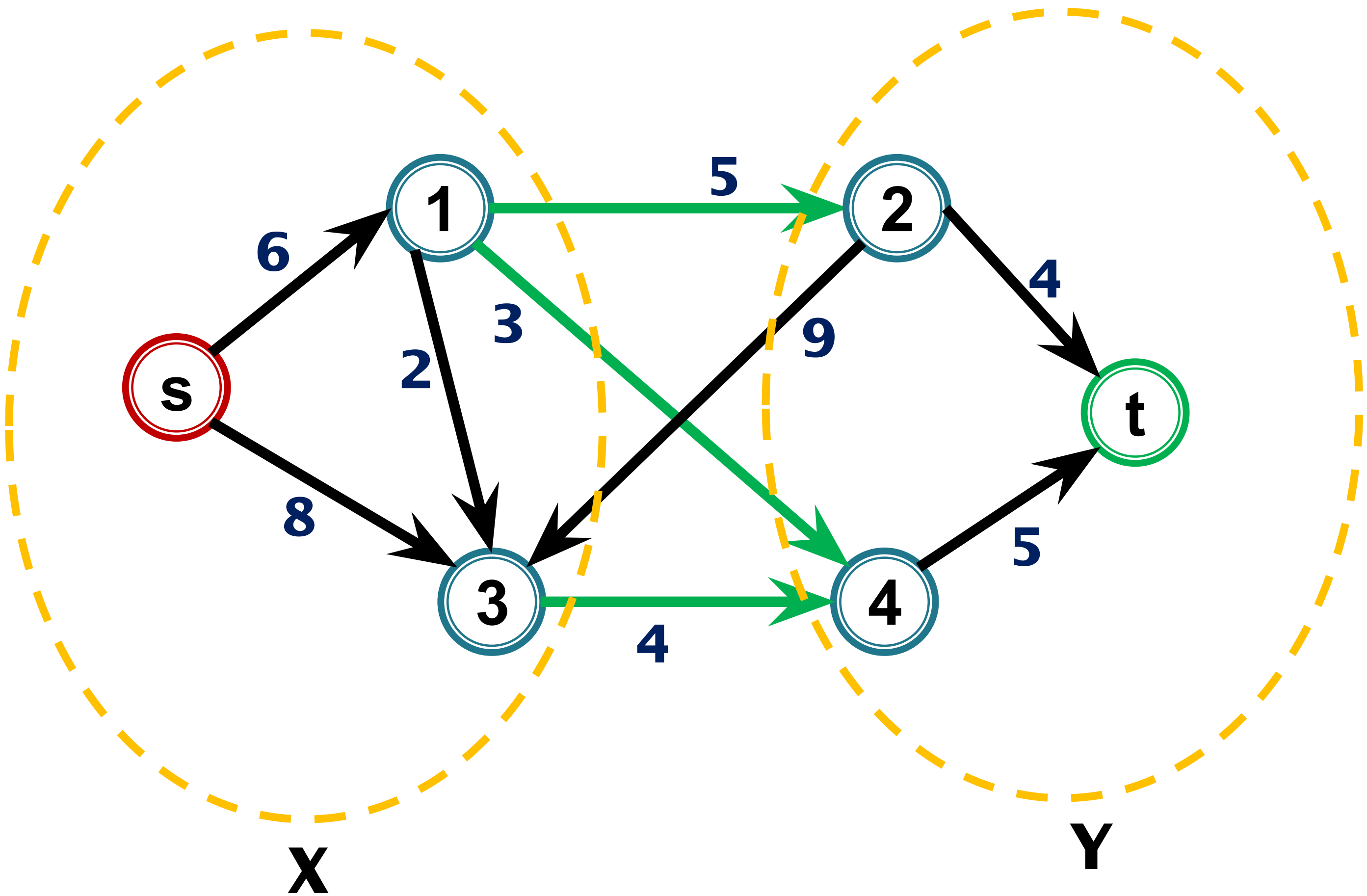
- **Capacitatea tăieturii** K = (X, Y)



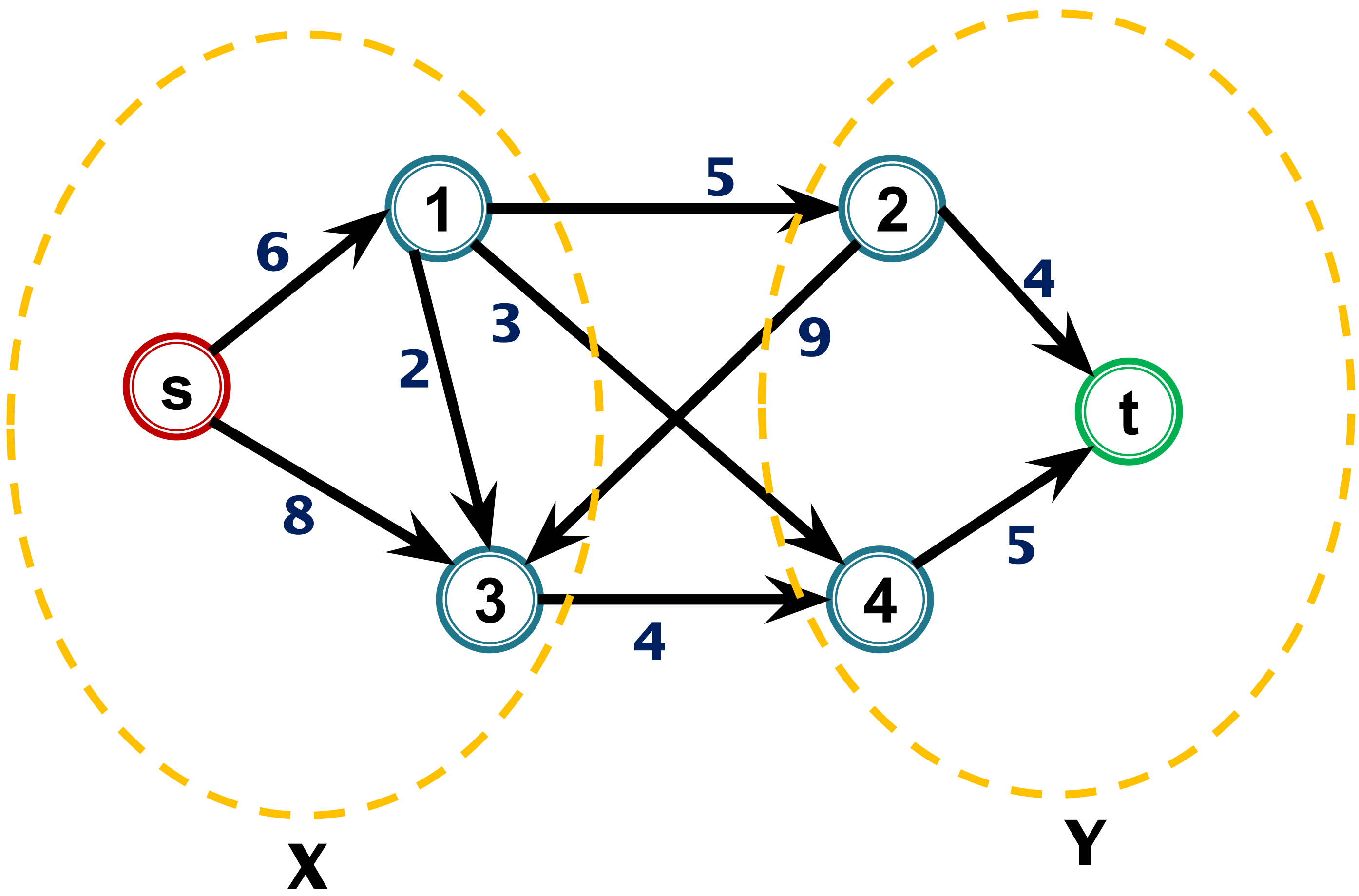
$$c(K) = c(X,Y) = 5 + 3 + 4 = 12$$

Fie K= (X, Y) o tăietură

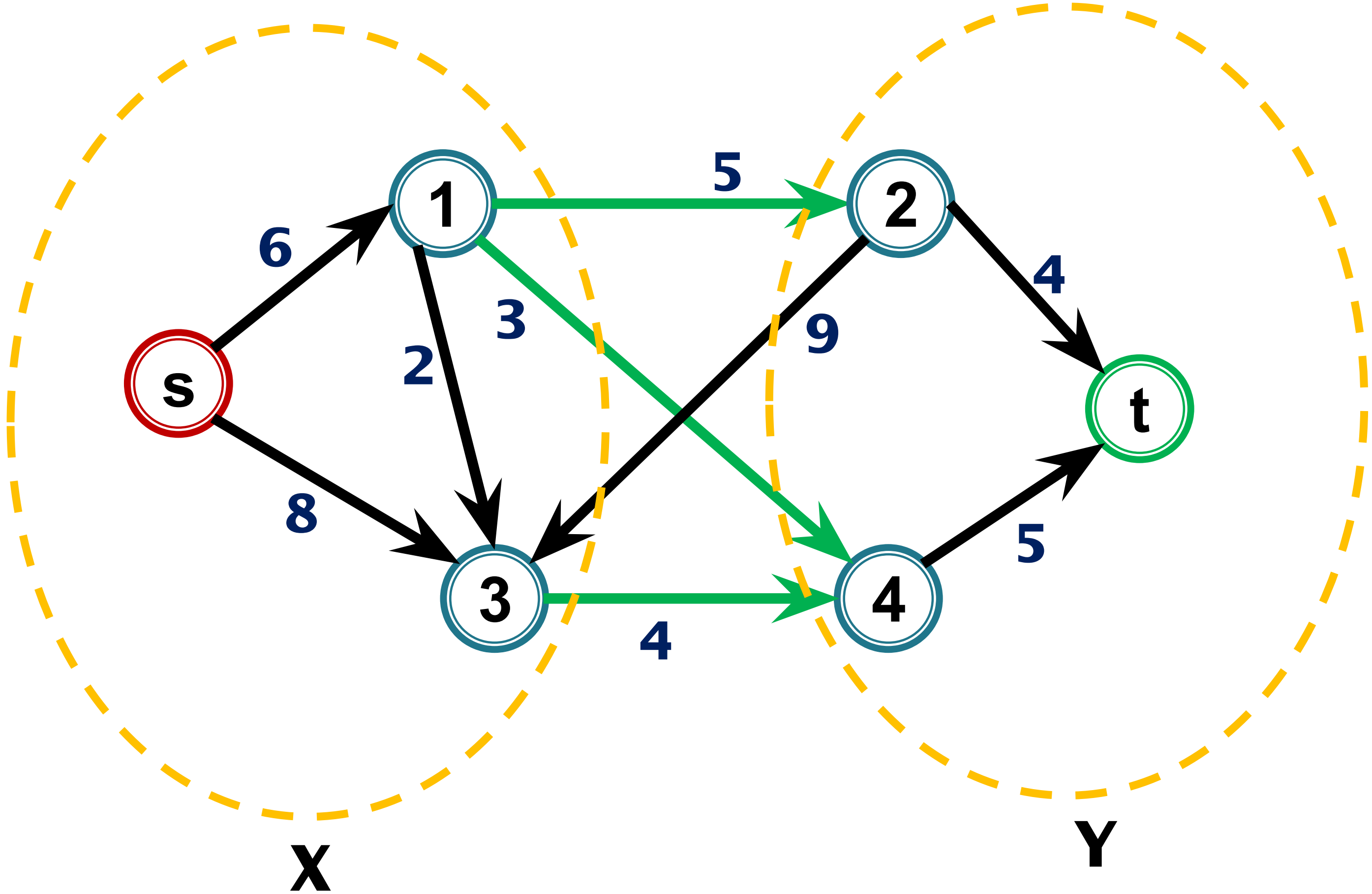
- **Capacitatea tăieturii** K = (X, Y)



$$c(K) = c(X,Y) = 5 + 3 + 4 = 12$$



c(X, Y) = ?



$$c(X, Y) = 5 + 3 + 4 = 12$$

Fie K= (X, Y) o tăietură

- **Capacitatea tăieturii** K = (X, Y)

$$c(K) = \sum_{\substack{x\in X, y\in Y \\ xy\in E}} c(xy)$$

= suma capacităţilor arcelor care ies din X

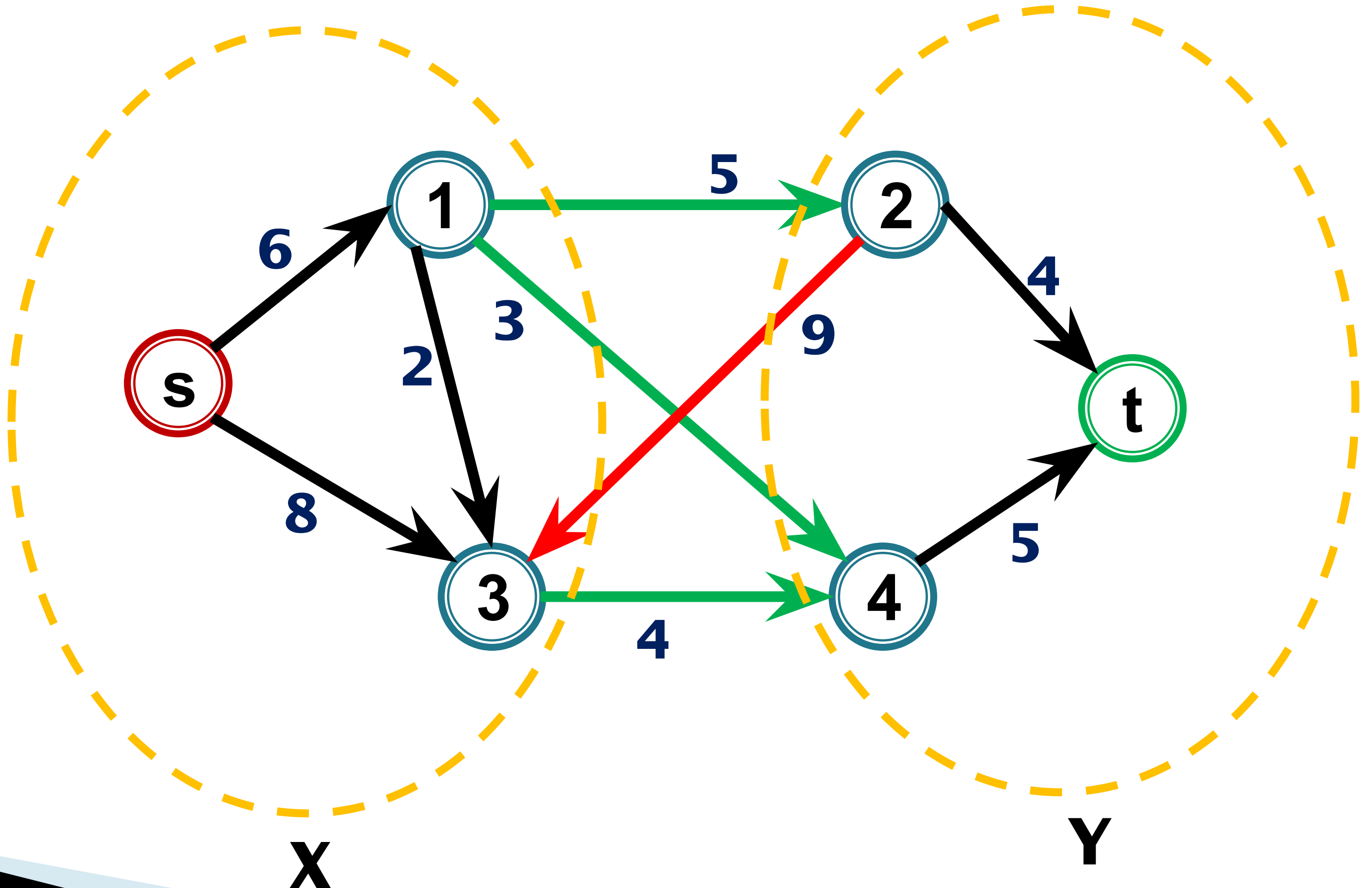
- Notăm
  - $E^+(K)$ = mulţimea arcelor de la X la Y

    = {xy ∈ E | x∈X, y∈Y} = **arce directe** ale lui K
  - $E^-(K)$ = mulţimea arcelor de la Y la X

    = {yx ∈ E | x∈X, y∈Y} = **arce inverse** ale lui K

Fie K= (X, Y) o tăietură

- $xy \in E$ cu $x \in X, y \in Y$ = **arc direct** al lui K
- $yx \in E$ cu $x \in X, y \in Y$ = **arc invers** al lui K



Fie K= (X, Y) o tăietură

- Notăm
  - $E^+(K)$ = mulţimea arcelor de la X la Y

    = $\{xy \in E \mid x\in X, y\in Y\}$ = **arce directe** ale lui K
  - $E^-(K)$ = mulţimea arcelor de la Y la X

    = $\{yx \in E \mid x\in X, y\in Y\}$ = **arce inverse** ale lui K

- Atunci avem

$$c(K) = c(E^+(K))$$

Tăietură minimă

- Fie N o reţea.

  O tăietură $\widetilde{K}$ se numeşte **tăietură minimă în N** dacă

$$c(\tilde{K}) = \min\{c(K) \mid K \text{ este tăietură în N}$$

Tăietură minimă

- Vom demonstra

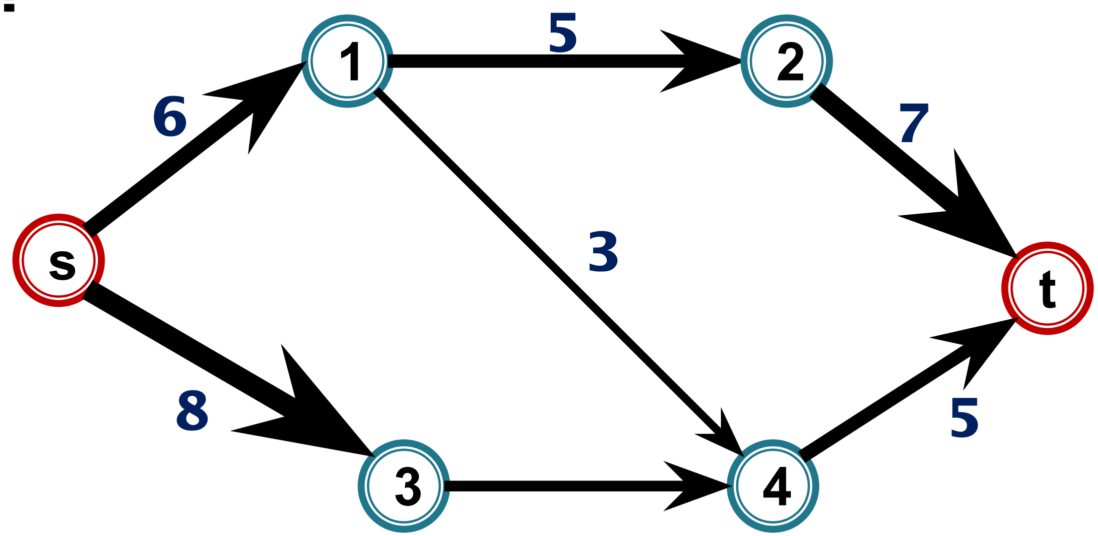
$$val(f) \le c(K)$$

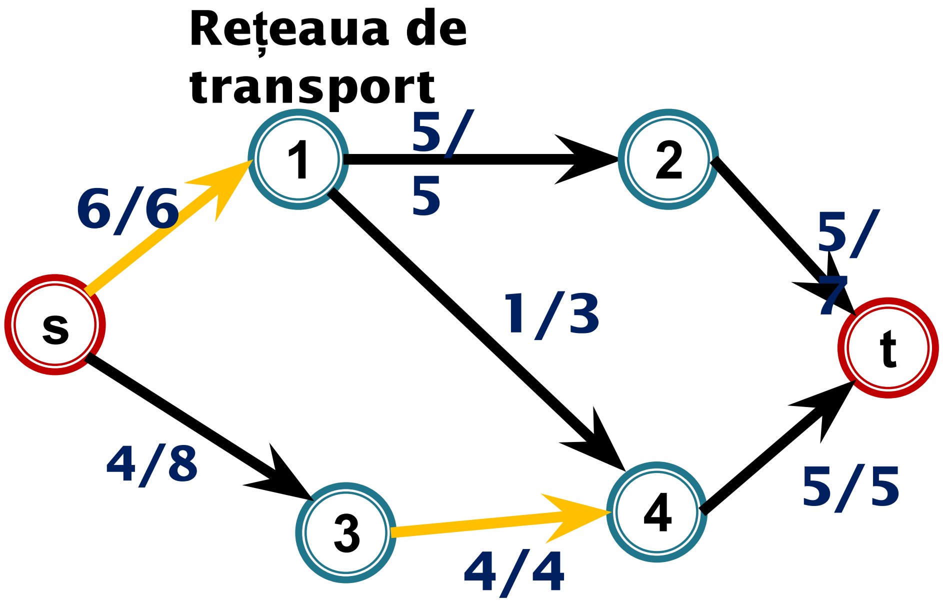
- Dacă avem egalitate ⇒ f flux maxim, K tăietură minimă

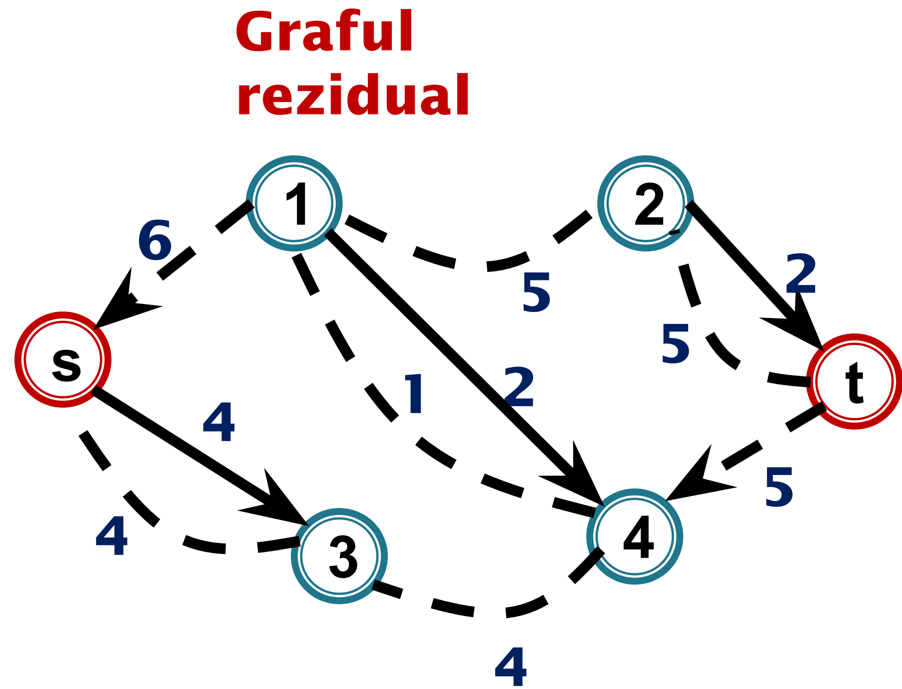
Tăietură minimă

- Determinarea unui flux maxim ⇒ determinarea unei tăieturi minime
- **Aplicații**
  - **Arce = poduri, capacitate = costul dărâmării podului.**

Ce poduri trebuie dărâmate a.î. teritoriul sursă să nu mai fie conectat cu destinația și costul distrugerilor să fie minim?







s-t tăietură saturată ⇔ nu mai există s-t drum în graful rezidual

⇔ s-t flux maxim

Tăietură minimă

- Determinarea unui flux maxim ⇒ determinarea unei tăieturi minime

- **Aplicații**
  - **Fiabilitatea rețelelor**
  - **Probleme de proiectare, planificare**
  - **Segmentarea imaginilor**

Algoritmul FORD-FULKERSON

Pseudocod

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim - **algoritmul** FORD – FULKERSON

- Fie f ≡ 0 fluxul vid ($f(e) = 0, \forall\ e \in E$)
- Cât timp **există un s-t lanţ f-nesaturat P în G**
  -
  -
-

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim - **algoritmul** FORD – FULKERSON

- Fie $f \equiv 0$ fluxul vid ($f(e) = 0, \ \forall \ e \in E$)
- Cât timp **există un s-t lanţ f-nesaturat P în G**
  - determină un astfel de lanţ P
  -
-

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim - algoritmul FORD – FULKERSON

- Fie f un flux în N (de exemplu $f \equiv 0$ fluxul vid:

  $$f(e) = 0,\ \forall\ e \in E\ )$$)
- Cât timp **există un s-t lanţ f-nesaturat P în G**
  - determină un astfel de lanţ P
  - revizuieşte fluxul f de-a lungul lanţului P
- returnează f

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim - algoritmul FORD – FULKERSON

- Pentru a determina și o s-t tăietură minimă, la finalul algoritmului considerăm

X = mulțimea vârfurilor accesibile din s prin lanțuri f-nesaturate și

K = (X, V-X)

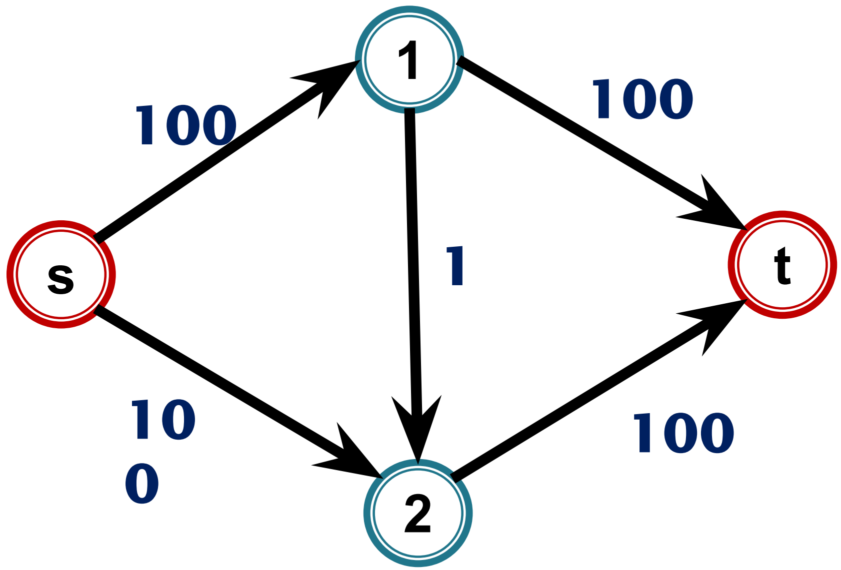
Algoritmul FORD-FULKERSON

Complexitate

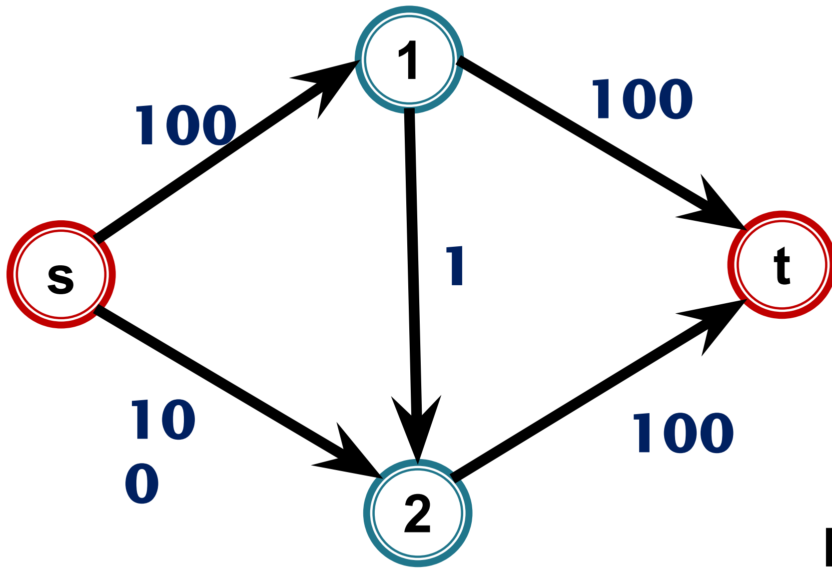
Algoritmul Ford-Fulkerson

- **Algoritmul se termină?**
- **De ce este necesară ipoteza că fluxul are valori întregi?**
- **Care este numărul maxim de etape?**
  - **Cum determinăm un lanţ f-nesaturat?**
  - **Criteriul după care construim lanţul f-nesaturat influenţează numărul de etape (iteraţii cât timp)?**

Criteriul după care construim lanţul f-nesaturat influenţează numărul de etape



Criteriul după care construim lanţul f-nesaturat influenţează numărul de etape



Pasul 1: [s, 1, 2, t] – i(P)=1
Pasul 2: [s, 2, 1, t] – i(P)=1
Pasul 3: [s, 1, 2, t] – i(P)=1
Pasul 4: [s, 2, 1, t] – i(P)=1

Algoritm FORD – FULKERSON

- **Complexitate**

Algoritm FORD – FULKERSON

Complexitate

- **O(mL), unde**

$$L = \text{ăapacitatăaieturiim} \quad (\quad) \quad \leq \sum_{su \in E} c \;\; su$$

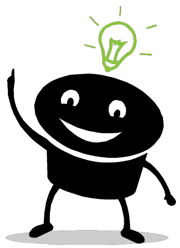
- **O(nmC) unde**

$$C = \max\{c(e) \mid e \in E(G)\}$$

Algoritmul Ford-Fulkerson

- **Cum determinăm un lanţ f-nesaturat?**

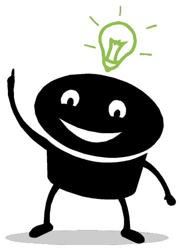
Algoritmul Ford-Fulkerson



Spre exemplu prin parcurgerea grafului pornind din vârful s şi considerând doar arce cu capacitatea reziduală pozitivă (în raport cu lanţurile construite prin parcurgere, memorate cu vectorul tata)

= **s-t drum în graful reziudal**

Algoritmul Ford-Fulkerson



Spre exemplu prin parcurgerea grafului pornind din vârful s şi considerând doar arce cu capacitatea reziduală pozitivă (în raport cu lanţurile construite prin parcurgere, memorate cu vectorul tata)

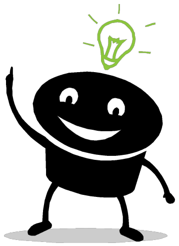
- **Parcurgerea BF ⇒**

  determinăm s-t lanțuri f-nesaturate de lungime minimă

⇒ **Algoritmul EDMONDS-KARP** =

Ford-Fulkerson în care lanțul P ales la un pas are lungime minimă

Algoritmul Ford-Fulkerson



Spre exemplu prin parcurgerea grafului pornind din vârful s şi considerând doar arce cu capacitatea reziduală pozitivă (în raport cu lanţurile construite prin parcurgere, memorate cu vectorul tata)

- **Alte criterii de construcţie lanţ ⇒ alţi algoritmi**

Algoritm FORD – FULKERSON

- **Complexitate $O(mC)$, unde**

  $$C = c(\{s\}, V\text{-}\{s\}) = c^{+}(s)$$

Algoritmul FORD-FULKERSON

Corectitudine

Algoritmul Ford-Fulkerson

- **Fluxul determinat de algoritm are valoare maximă, sau putem determina un flux de valoare mai mare prin alte metode?**

  - **Trebuie să arătăm că**

    $\nexists$ s-t lanţ f-nesaturat $\Rightarrow$ f flux maxim

Algoritmul Ford-Fulkerson

- **Vom demonstra că**
  - **val(f) $\leq$ c(K) pentru orice f flux, K tăietură**
  -

Algoritmul Ford-Fulkerson

- **Vom demonstra că**
  - **val(f) $\leq$ c(K) pentru orice f flux, K tăietură**
  - **$\nexists$ s-t lanţ f-nesaturat $\Rightarrow$ $\exists$ K cu val(f) = c(K) $\Rightarrow$**

    $\Rightarrow$ f flux maxim

Implementarea algoritmului FORD-FULKERSON
Varianta cu drumuri minime
⇒ Algoritmul Edmonds-Karp

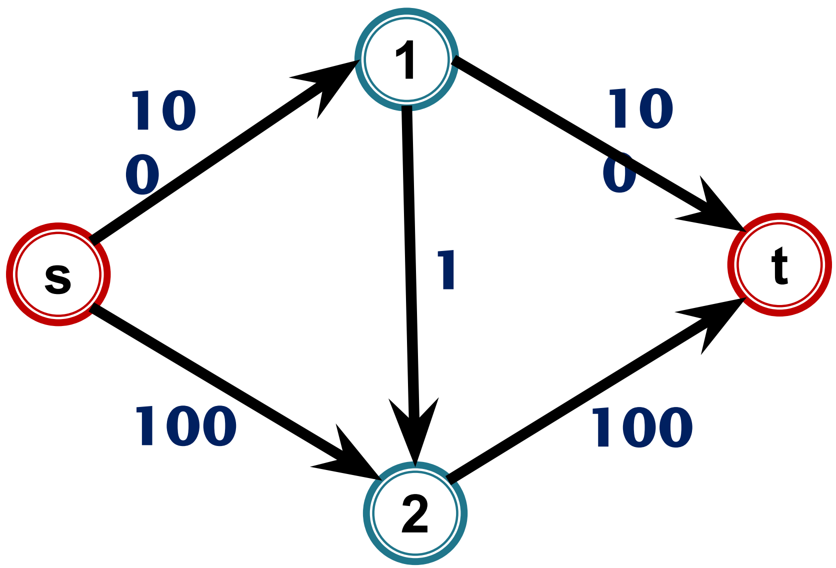
Algoritmul FORD-FULKERSON

Complexitate

Algoritmul Ford-Fulkerson

- **Algoritmul se termină?**
- **De ce este necesară ipoteza că fluxul are valori întregi?**
- **Care este numărul maxim de etape?**
  - **Cum determinăm un lanţ f-nesaturat?**
  - **Criteriul după care construim lanţul f-nesaturat influenţează numărul de etape (iteraţii cât timp)?**

Metoda prin care construim drumul de creștere influenţează numărul de etape (de revizuri ale fluxului)



Pasul 1: [s, 1, 2, t] ;

$c_f(P)=1$

Pasul 2: [s, 2, 1, t] ;

$c_f(P)=1$

Pasul 3: [s, 1, 2, t] ;

$c_f(P)=1$

Pasul 4: [s, 2, 1, t] ;

$c_f(P)=1$

Algoritm FORD – FULKERSON

- **Complexitate**

Algoritm FORD – FULKERSON

- **Complexitate O(mL), unde**

$$L = \sum_{su \in E} c(su)$$

Algoritm FORD – FULKERSON

- **Complexitate $O(mC)$, unde**

  $$C = c(\{s\}, V-\{s\}) = c^+(s)$$

Algoritmul FORD-FULKERSON

Corectitudine

Algoritmul Ford-Fulkerson

- **Fluxul determinat de algoritm are valoare maximă, sau putem determina un flux de valoare mai mare prin alte metode?**

Algoritmul Ford-Fulkerson

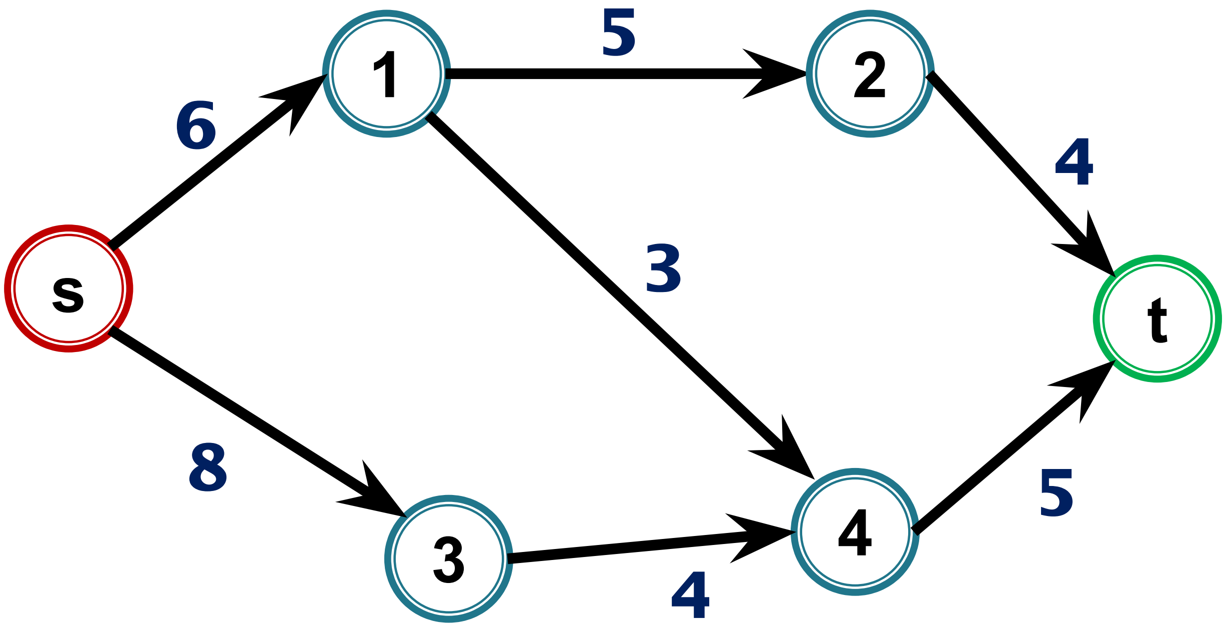
- **Modul în care construim lanţul f-nesaturat influenţează numărul de etape?**
- **Fluxul determinat are valoare maximă, sau îl mai putem creşte prin alte metode?**
- **De ce este necesară pentru terminare ipoteza că fluxul are valori întregi?**

Detalii de implementare + complexitate + corectitudine

Algoritmul Ford-Fulkerson

- **Cum determinăm un lanţ f-nesaturat?**
- **Algoritmul se termină?**
- **Dacă da, câte etape are maxim?**
- **Este necesară pentru terminare ipoteza că fluxul are valori întregi?**
- **Fluxul determinat are valoare maximă, sau îl mai putem creşte prin alte metode?**

⇒ Detalii de implementare + complexitate + corectitudine



s
1
2
3
4
t
6
8
5
3
4
4
5

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = \sum_{s \in S} \left[f^{+}(s) - f^{-}(s) \right]$$

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = \sum_{s \in S} \left[f^+(s) - f^-(s) \right]$$

- Are loc relaţia

$$val(f) = \sum_{s \in S} \left[f^+(s) - f^-(s) \right] = \sum_{t \in T} \left[f^-(t) - f^+(t) \right]$$

(rezultă din condiţia de conservare a fluxului)

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s)$$

- Are loc relaţia

$$val(f) = f^{+}(s) = f^{-}(t)$$

Ipoteze pentru reţeaua N

- O singură sursă **S = {s}**
- O singură destinaţie **T = {t}**
- $\mathbf{d^-(s) = 0}$ – în sursă nu intră arce
- $\mathbf{d^+(t) = 0}$ – din destinaţie nu ies arce

- **Ipoteze pentru reţeaua N**
  - O singură sursă **S = {s}**
  - O singură destinaţie **T = {t}**
  - **$d^-(s) = 0$** – în sursă nu intră arce
  - **$d^+(t) = 0$** – din destinaţie nu ies arce
- În acest caz avem

$$val(f) = f^+(s) = f^-(t)$$