

## Formule

---

### Definiția 2.6

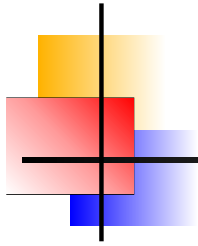
*Formulele atomice* ale lui  $\mathcal{L}$  sunt expresiile de forma:

- ▶  $(s = t)$ , unde  $s, t$  sunt termeni;
- ▶  $(Rt_1 \dots t_m)$ , unde  $R \in \mathcal{R}_m$  și  $t_1, \dots, t_m$  sunt termeni.

### Definiția 2.7

*Formulele* lui  $\mathcal{L}$  sunt expresiile definite astfel:

- (F0) Orice formulă atomică este formulă.
- (F1) Dacă  $\varphi$  este formulă, atunci  $(\neg\varphi)$  este formulă.
- (F2) Dacă  $\varphi$  și  $\psi$  sunt formule, atunci  $(\varphi \rightarrow \psi)$  este formulă.
- (F3) Dacă  $\varphi$  este formulă, atunci  $(\forall x\varphi)$  este formulă pentru orice variabilă  $x$ .
- (F4) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3) sunt formule.



## Formule

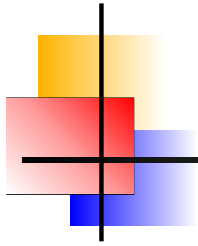
---

### Notatii

- ▶ Mulțimea formulelor se notează  $Form_{\mathcal{L}}$ .
- ▶ Formule:  $\varphi, \psi, \chi, \dots$
- ▶  $Var(\varphi)$  este mulțimea variabilelor care apar în formula  $\varphi$ .

### Convenție

De obicei renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Atunci când nu e pericol de confuzie, scriem  $s = t$  în loc de  $(s = t)$ ,  $Rt_1 \dots t_m$  în loc de  $(Rt_1 \dots t_m)$ ,  $\forall x\varphi$  în loc de  $(\forall x\varphi)$ , etc..



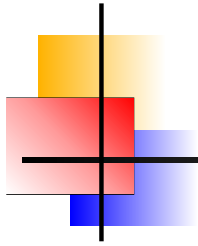
### *Propoziția 2.8 (Inducția pe formule)*

*Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:*

- ▶  *$\Gamma$  conține toate formulele atomice;*
- ▶  *$\Gamma$  este închisă la  $\neg, \rightarrow$  și  $\forall x$  (pentru orice variabilă  $x$ ).*

*Atunci  $\Gamma = \text{Form}_{\mathcal{L}}$ .*

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate  $\mathcal{P}$ : definim  $\Gamma$  ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac  $\mathcal{P}$  și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că  $\Gamma = \text{Form}_{\mathcal{L}}$ .



### Conectori derivați

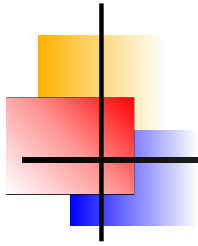
Conectorii  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\leftrightarrow$  și **cuantificatorul existențial**  $\exists$  sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$\varphi \vee \psi \quad := \quad ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

$$\varphi \wedge \psi \quad := \quad \neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi))$$

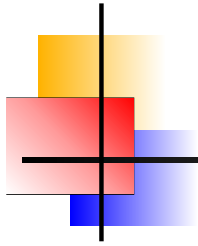
$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad := \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$$

$$\exists x\varphi \quad := \quad (\neg\forall x(\neg\varphi)).$$



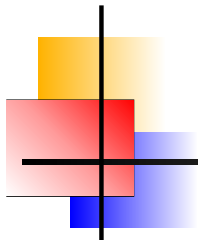
### Convenții

- ▶ În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem  $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi$ , dar scriem  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$ .
- ▶ Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - ▶  $\neg$  are precedență mai mare decât ceilalți conectori;
  - ▶  $\wedge, \vee$  au precedență mai mare decât  $\rightarrow, \leftrightarrow$ .
- ▶ Prin urmare, formula  $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$  va fi scrisă  $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$ .
- ▶ Cuantificatorii  $\forall, \exists$  au precedență mai mare decât ceilalți conectori.
- ▶ Așadar,  $\forall x\varphi \rightarrow \psi$  este  $(\forall x\varphi) \rightarrow \psi$  și nu  $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ .



De multe ori identificăm un limbaj  $\mathcal{L}$  cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și scriem  $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ .

- ▶ Scriem de multe ori  $f(t_1, \dots, t_m)$  în loc de  $ft_1 \dots t_m$  și  $R(t_1, \dots, t_m)$  în loc de  $Rt_1 \dots t_m$ .
- ▶ Pentru simboluri  $f$  de operații binare scriem  $t_1ft_2$  în loc de  $ft_1t_2$ .
- ▶ Analog pentru simboluri  $R$  de relații binare: scriem  $t_1Rt_2$  în loc de  $Rt_1t_2$ .



## $\mathcal{L}$ -structura

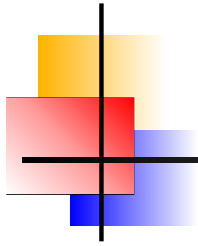
### Definiția 2.9

O  $\mathcal{L}$ -**structură** este un cvadru plu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- ▶  $A$  este o mulțime nevidă;
- ▶  $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$  este o mulțime de operații pe  $A$ ; dacă  $f$  are aritatea  $m$ , atunci  $f^{\mathcal{A}} : A^m \rightarrow A$ ;
- ▶  $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$  este o mulțime de relații pe  $A$ ; dacă  $R$  are aritatea  $m$ , atunci  $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$ ;
- ▶  $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$ .
- ▶  $A$  se numește **universul** structurii  $\mathcal{A}$ . **Notăție:**  $A = |\mathcal{A}|$
- ▶  $f^{\mathcal{A}}$  (respectiv  $R^{\mathcal{A}}$ ,  $c^{\mathcal{A}}$ ) se numește **denotația** sau **interpretarea** lui  $f$  (respectiv  $R$ ,  $c$ ) în  $\mathcal{A}$ .



## Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ , unde

- ▶  $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- ▶ acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- ▶  $\mathcal{L}_=$ -structurile sunt mulțimile nevide

### Exemple de formule:

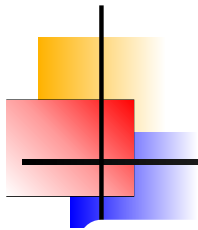
- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$





## Exemple - Limbajul aritmeticii $\mathcal{L}_{ar}$

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ , unde

- ▶  $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}$ ;  $\dot{<}$  este simbol de relație binară, adică are aritatea 2;
- ▶  $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}$ ;  $\dot{+}$ ,  $\dot{\times}$  sunt simboluri de operații binare și  $\dot{S}$  este simbol de operație unar (adică are aritatea 1);
- ▶  $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$ .

Scriem  $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$  sau  $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$ .

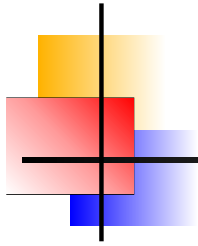
Exemplul natural de  $\mathcal{L}_{ar}$ -structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $S(m) = m + 1$  este funcția succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} = <, \dot{+}^{\mathcal{N}} = +, \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot, \dot{S}^{\mathcal{N}} = S, \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

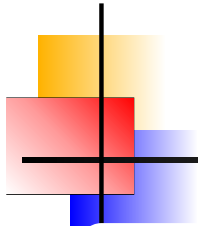
- Alt exemplu de  $\mathcal{L}_{ar}$ -structură:  $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$ .



## *Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binar*

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ , unde

- ▶  $\mathcal{R} = \{R\}$ ;  $R$  simbol binar
- ▶  $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- ▶  $\mathcal{L}$ -structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară
- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate  $(A, \leq)$ , folosim simbolul  $\dot{\leq}$  în loc de  $R$  și notăm limbajul cu  $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$ .
- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate  $(A, <)$ , folosim simbolul  $\dot{<}$  în loc de  $R$  și notăm limbajul cu  $\mathcal{L}_{\dot{<}}$ .
- ▶ Dacă suntem interesați de grafuri  $G = (V, E)$ , folosim simbolul  $\dot{E}$  în loc de  $R$  și notăm limbajul cu  $\mathcal{L}_{\dot{E} \text{ Graf}}$ .
- ▶ Dacă suntem interesați de structuri  $(A, \in)$ , folosim simbolul  $\dot{\in}$  în loc de  $R$  și notăm limbajul cu  $\mathcal{L}_{\dot{\in}}$ .



## Exemple - Limbajul grupurilor $\mathcal{L}_{Gr}$

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ , unde

- ▶  $\mathcal{R} = \emptyset$ ;
- ▶  $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{-}^1\}$ ;  $\dot{*}$  simbol binar,  $\dot{-}^1$  simbol unar
- ▶  $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$ .

Scriem  $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \dot{*}, \dot{-}^1; \dot{e})$  sau  $\mathcal{L}_{Gr} = (\dot{*}, \dot{-}^1, \dot{e})$ .

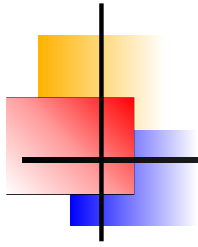
Exemple naturale de  $\mathcal{L}_{Gr}$ -structuri sunt grupurile:  $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, e)$ .

Prin urmare,  $\dot{*}^{\mathcal{G}} = \cdot$ ,  $\dot{-}^1{}^{\mathcal{G}} = ^{-1}$ ,  $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$ .

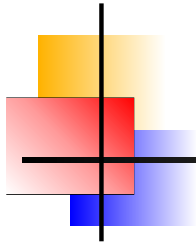
Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul  $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ , unde

- ▶  $\mathcal{R} = \emptyset$ ;
- ▶  $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{-}\}$ ;  $\dot{+}$  simbol binar,  $\dot{-}$  simbol unar;
- ▶  $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$ .

Scriem  $\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$ .



# SEMANTICA



## Interpretare (evaluare)

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul  $I$  și  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură.

### Definiția 2.10

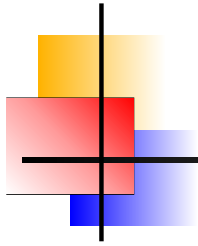
O *interpretare* sau *evaluare* a (variabilelor) lui  $\mathcal{L}$  în  $\mathcal{A}$  este o funcție  $e : V \rightarrow A$ .

În continuare,  $e : V \rightarrow A$  este o interpretare a lui  $\mathcal{L}$  în  $\mathcal{A}$ .

### Definiția 2.11 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește *interpretarea*  $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$  a termenului  $t$  sub evaluarea  $e$ :

- ▶ dacă  $t = x \in V$ , atunci  $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$ ;
- ▶ dacă  $t = c \in \mathcal{C}$ , atunci  $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$ ;
- ▶ dacă  $t = ft_1 \dots t_m$ , atunci  $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$ .



## Interpretarea formulelor

---

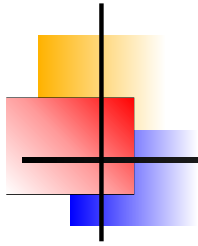
Prin inducție pe formule se definește **interpretarea**

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a formulei  $\varphi$  sub evaluarea  $e$ .

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$



### Negația și implicația

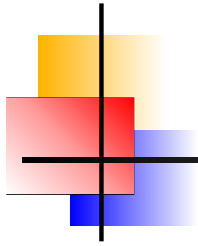
- ▶  $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$ ;
- ▶  $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$ , unde,

$$\rightarrow: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prin urmare,

- ▶  $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$ .
- ▶  $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \text{ sau } \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1)$ .



## Interpretarea formulelor

---

### Notăție

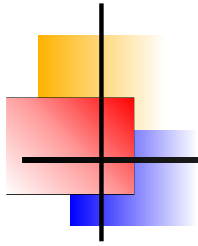
Pentru orice variabilă  $x \in V$  și orice  $a \in A$ , definim o nouă interpretarea  $e_{x \leftarrow a} : V \rightarrow A$  prin

$$e_{x \leftarrow a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

### Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$





## Relația de satisfacere

Fie  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $e : V \rightarrow A$  o interpretare a lui  $\mathcal{L}$  în  $\mathcal{A}$ .

### Definiția 2.12

Fie  $\varphi$  o formulă. Spunem că:

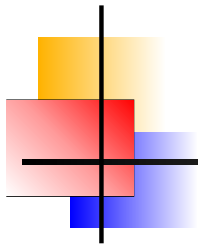
- ▶  $e$  **satisface**  $\varphi$  în  $\mathcal{A}$  dacă  $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$ . **Notăție:**  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .
- ▶  $e$  **nu satisface**  $\varphi$  în  $\mathcal{A}$  dacă  $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$ . **Notăție:**  $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ .

### Corolar 2.13

Pentru orice formule  $\varphi, \psi$  și orice variabilă  $x$ ,

- (i)  $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ .
- (ii)  $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ implică } \mathcal{A} \models \psi[e]$   
 $\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e]$ .
- (iii)  $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e] \iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ .

**Dem.:** Exercițiu ușor.



## Relația de satisfacere

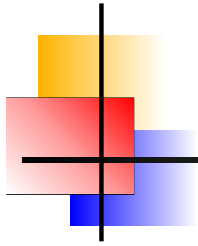
Fie  $\varphi, \psi$  formule și  $x$  o variabilă.

### Propoziția 2.14

- (i)  $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e);$
- (ii)  $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e);$
- (iii)  $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e);$
- (iv)  $(\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

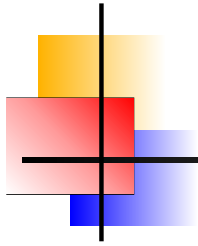
**Dem.:** Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

$$\begin{aligned} (\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 & \iff (\neg \forall x \neg \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\forall x \neg \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\ & \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg \varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 0 \\ & \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1. \end{aligned}$$



### Corolar 2.15

- (i)  $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (ii)  $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (iii)  $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ ddacă } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (iv)  $\mathcal{A} \models (\exists x \varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}].$



Fie  $\varphi$  formulă a lui  $\mathcal{L}$ .

### Definiția 2.16

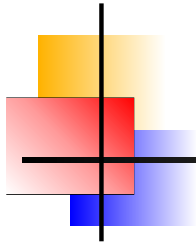
Spunem că  $\varphi$  este **satisfiabilă** dacă există o  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și o evaluare  $e : V \rightarrow A$  a.î.

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că  $(\mathcal{A}, e)$  este un **model** al lui  $\varphi$ .

**Atenție!** Este posibil ca atât  $\varphi$  cât și  $\neg\varphi$  să fie satisfiabile.

Exemplu:  $\varphi := x = y$  în  $\mathcal{L}_=$ .



Fie  $\varphi$  formulă a lui  $\mathcal{L}$ .

### Definiția 2.17

Spunem că  $\varphi$  este **adevărată** într-o  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  dacă pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că  $\mathcal{A}$  **satisfacă**  $\varphi$  sau că  $\mathcal{A}$  este un **model** al lui  $\varphi$ .

**Notăție:**  $\mathcal{A} \models \varphi$

### Definiția 2.18

Spunem că  $\varphi$  este formulă **universal adevărată** sau **(logic) validă** dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi.$$

**Notăție:**  $\models \varphi$

Fie  $\varphi, \psi$  formule ale lui  $\mathcal{L}$ .

### Definiția 2.19

$\varphi$  și  $\psi$  sunt **logic echivalente** dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \models \psi[e].$$

**Notăție:**  $\varphi \models \psi$

### Definiția 2.20

$\psi$  este **consecință semantică** a lui  $\varphi$  dacă pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow A$ ,

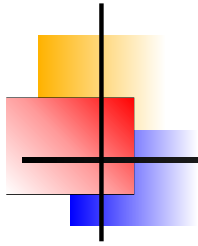
$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[e].$$

**Notăție:**  $\varphi \models \psi$

### Observație

(i)  $\varphi \models \psi$  ddacă  $\models \varphi \rightarrow \psi$ .

(ii)  $\varphi \models \psi$  ddacă  $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$  ddacă  $\models \psi \leftrightarrow \varphi$ .



## *Echivalențe și consecințe logice*

Pentru orice formule  $\varphi$ ,  $\psi$  și orice variabile  $x, y$ ,

$$\neg \exists x \varphi \models \forall x \neg \varphi \quad (1)$$

$$\neg \forall x \varphi \models \exists x \neg \varphi \quad (2)$$

$$\forall x (\varphi \wedge \psi) \models \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \quad (3)$$

$$\forall x \varphi \wedge \forall x \psi \models \forall x (\varphi \wedge \psi) \quad (4)$$

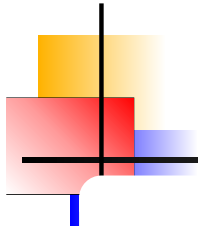
$$\exists x (\varphi \wedge \psi) \models \exists x \varphi \wedge \exists x \psi \quad (5)$$

$$\exists x (\varphi \vee \psi) \models \exists x \varphi \vee \exists x \psi \quad (6)$$

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi \quad (7)$$

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \models \exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi \quad (8)$$

$$\forall x \varphi \models \exists x \varphi \quad (9)$$



## Echivalențe și consecințe logice

$$\varphi \models \exists x\varphi \quad (10)$$

$$\forall x\varphi \models \varphi \quad (11)$$

$$\forall x\forall y\varphi \models \forall y\forall x\varphi \quad (12)$$

$$\exists x\exists y\varphi \models \exists y\exists x\varphi \quad (13)$$

$$\exists y\forall x\varphi \models \forall x\exists y\varphi. \quad (14)$$

**Dem.:** Exercițiu.

### Propoziția 2.21

Pentru orice termeni  $s, t, u$ ,

$$(i) \models t = t;$$

$$(ii) \models s = t \rightarrow t = s;$$

$$(iii) \models s = t \wedge t = u \rightarrow s = u.$$

**Dem.:** Exercițiu ușor.