Tema 3 Algoritmi Fundamentali

Buhai Darius

January 21, 2021

Exercitiul 1

Dându-se dimensiunile pentu K matrice $M_1, M_2, ...M_k$ ($1 \leq K \leq 10^6$), determinați (dacă există) o ordine în care acestea ar putea fi aranjate, astfel încât produsul celor K matrice (în ordinea aleasă) să aibă sens.

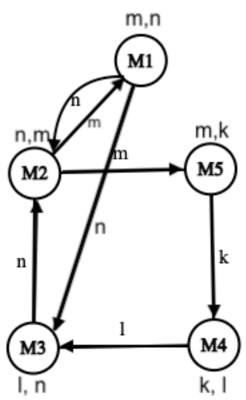

Figure 1: lanț hamiltonian

1. Pentru a modela problema ca una de găsire a unui lanț hamiltonian, putem considera graful orientat din figura de mai sus, unde fiecare matrice este un vârf, iar arcele fac legătura între matricile ce se pot înmulți (astfel, pentru două matrici M_1 și M_2, există un arc doar dacă $m_1 = n_2$). Problema poate fi rezolvată folosind algoritmul Dinamicii pe stări exponențiale, cu o complexitate $O(n^2 \cdot 2^n)$.

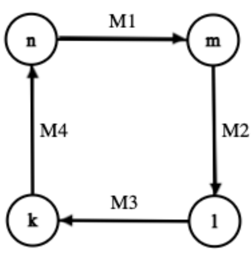

Figure 2: lanț eulerian

2. De asemenea problema dată poate fi modelată și ca una de găsire a unui lanț eulerian într-un graf orientat. Astfel, vârfurile vor reprezenta mărimile rândurilor sau coloanelor matricelor,

iar arcele reprezentă matricile propriu-zise. Prin aplicarea algoritmului lui Hierholzer, putem găsi (dacă există) într-un mod eficient (complexitate O(m)), un lanț eulerian ce ne va indica ordinea de înmulțire a matricelor.

Exercitiul 2

Verificați care dintre relațiile: $\chi(G)[\leq; =; \geq]c(G)$ se respectă pentru orice graf G.

Pentru orice subgraf G' complet din G, numărul său cromatic $\chi(G')$ este egal cu n (numărul de noduri din subgraf), deoarece toate nodurile sunt conectate între ele.

Prin urmare, $\chi(G)$ va fi întotdeauna mai mare sau egal cu numărul maxim cromatic din subgrafurile complete din G, respectiv cu dimensiunea subgrafului complet maxim din G, $c(G)$.

În concluzie, putem afirma că pentru orice graf G, $\chi(G) \geq c(G)$.

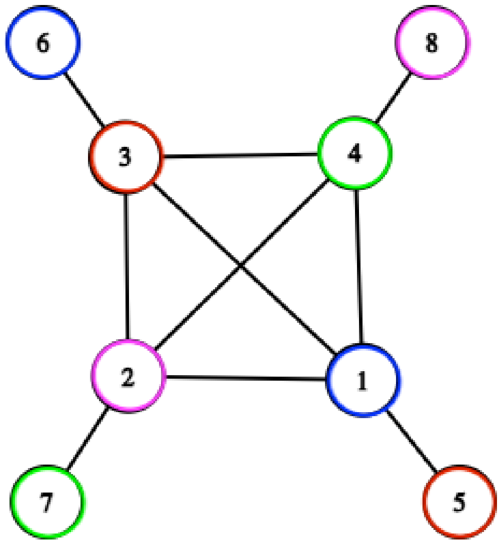

Figure 3: Graf 4-colorabil

Exercitiul 3

Demonstrați că, în general, pentru orice graf G (nu neapărat bipartit) avem că: MIN-VC(G)≥ MAX-MTC(G).

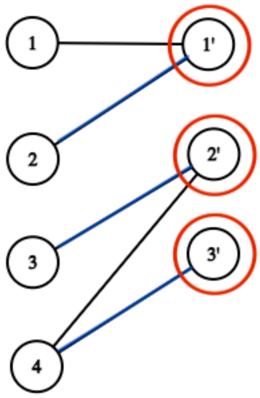

Figure 4: graf bipartit

Pentru început, vom porni de la graful bipartit descris în figura de mai sus, unde nodurile de acoperire minime au fost subliniate. Conform teoriei Kőnig, dimensiunea celei mai mici acoperiri de noduri este egală cu dimensiunea cuplajului maxim, respectiv **3**.

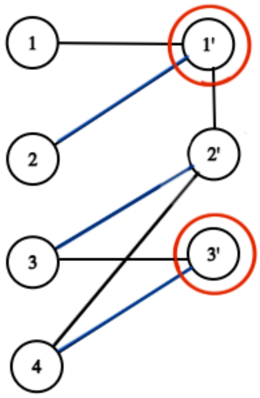

Figure 5: graf normal

Cu toate acestea, orice graf are un subgraf bipartit, în care conform teoremei lui Kőnig, dimensiunea celei mai mici acoperiri de noduri este egală cu dimensiunea cuplajului maxim. Eliminând constrângerile grafului bipartit, vom putea evident să micșorăm numărul de noduri de acoperire din graf, conectându-le la noduri din aceeași mulțime (mulțime definită în graful inițial bipartit). Exemplul de mai sus descrie o astfel de modificare în care MIN-VC(G) > MAX-MTC(G).

În concluzie, eliminând constrângerile de graf bipartit, orice graf G are MIN-VC(G)≥ MAX-MTC(G).

Exercitiul 5

Fie graful neorientat G = (V, E) unde $V = 1, 2, ..., 10^5$ și E = {(i,j) | i divide j}.

1. Pentru a verifica dacă G este un graf planar, vom extrage un subgraf al lui, respectiv subgraful G' cu V' = {1, 2, ... 6}.

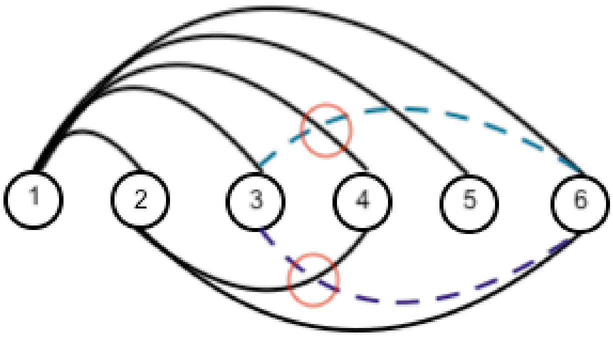

Figure 6: subgraful G'

Conform teoriei grafului planar, acesta trebuie să admită o reprezentare în plan astfel încât muchiilor să le corespundă segmente de curbe continue care nu se intersectează în interior unele pe altele.

Cu toate acestea, putem observa în figura de mai sus că muchia de legătură dintre 3 și 6 nu poate fi trasă în niciunul dintre cele 2 moduri fără se intersecta cu alte muchii. Prin urmare, graful G' nu este un graf planar, iar evident nici graful G nu este un graf planar.

2. Graful descris reprezintă o variantă vizuală a ciurului lui eratostene, unde toate nodurile cu gradul de intrare 0 conțin numere prime. Astfel, cu ajutorul complexității determinării ciurului lui Eratostene, vom putem afla și numărul cromatic al lui G, care este $log_2(10^5) = \ 17$.

Prin urmare, $\chi(G) = 17$.