**EXAMEN GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ**
**30.06.2020**
**VARIANTA 153**

**Fiecare problemă este notată cu 0,5 puncte. Nota este suma notelor problemelor plus un punct din oficiu. Pe foaia de examen trebuie scrise numai răspunsurile. Fiecare problemă are un singur răspuns corect.**

**1.** Care din următoarele afirmaţii NU sunt adevărate pentru $(\forall)A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ CU EXCEPȚIA
**A)** $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$
**B)** $\operatorname{tr}(AB - BA) = n$
**C)** $\det(ABA^{-1}) = \det(B)$
**D)** $A, B$ matrice ortogonale atunci $A \cdot B$ NU este ortogonală

**2.** Considerăm $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea $A = -\,{}^tA$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei $A$. Atunci
**A)** $\operatorname{tr}(A) = 2n$
**B)** $\det(A) = 0$
**C)** $\det(A) = \pm 1$
**D)** $\operatorname{tr}(A) = 0$

**3.** Considerăm $A \in O_{2n}(\mathbb{R})$ şi morfismul $f : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $f(v) = A \cdot v$. Atunci
**A)** $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = n$
**B)** $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n$
**C)** $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0$
**D)** $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 0$.

Pentru problemele **4**, **5**, **6** considerăm pentru fiecare $n \geqslant 2$ matricea $A_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pentru care elementele de pe poziţia $(i, i), 1 \leqslant i \leqslant n$ sunt egale cu 4, cele de pe poziţiile $(i, i+1), 1 \leqslant i \leqslant n-1$ sunt egale cu 3 iar cele de pe poziţiile $(i+1, i), 1 \leqslant i \leqslant n-1$ egale cu 1, şi toate celelalte elemente ale matricei sunt egale cu 0. Notăm cu $\Delta_n = \det(A_n)$.

**4.** Atunci:
**A)** $\Delta_3 = 26$ şi $\Delta_4 = 80$ **B)** $\Delta_3 = -80$ şi $\Delta_4 = -243$ **C)** $\Delta_3 = 13$ şi $\Delta_4 = 40$ **D)** $\Delta_3 = 40$ şi $\Delta_4 = 121$

**5.** Pentru $\Delta_n$ ca mai sus, avem:
**A)** $\Delta_n = 3^n - 1$ **B)** $\Delta_n = 1 - 3^{n+1}$ **C)** $\Delta_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ **D)** $\Delta_n = \frac{3^n-1}{2}$

**6.** Fie $A_n$ ca mai sus. Atunci adjuncta matricei $A_3$ este:

**A)** $A_3^\star = \begin{pmatrix} -13 & 10 & -1 \\ -2 & 9 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ **B)** $A_3^\star = \begin{pmatrix} 13 & -12 & 9 \\ -4 & 16 & -12 \\ 1 & -4 & 13 \end{pmatrix}$ **C)** $A_3^\star = \begin{pmatrix} 13 & 10 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

**D)** $A_3^\star = \begin{pmatrix} -13 & -12 & 9 \\ -4 & 16 & -12 \\ 1 & -4 & -13 \end{pmatrix}$

Pentru problemele **7**, **8**, **9**, **10** considerăm operatorul $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, f(v) = A \cdot v$, pentru $(\forall) v \in \mathbb{R}^4$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**7.** Fie vectorii: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**A)** $\{v_1, v_2\}$ formează bază în $\mathrm{Ker}(f)$
**B)** $\{v_1, v_2\}$ formează bază în $\mathrm{Im}(f)$
**C)** $v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$
**D)**$\{v_2\}$ generează $\mathrm{Im}(f)$.

**8.** Fie subspaţiul $\mathrm{Ker}(f)$, atunci:
**A)** $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$ şi are ecuaţia $x_1 + x_2 \quad - 2x_4 = 0$
**B)** $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$
**C)** $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ şi este definit de ecuaţiile

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

**D)** $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ şi este definit de ecuaţiile

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

**9.** Fie $L_1 = \mathrm{Ker}(f)^\perp \subset \mathbb{R}^4$, atunci

**A)** $\dim(L_1) = 3$ având baza $\{ {}^t(-1,0,1,0),\ {}^t(-1,-1,0,2),\ {}^t(0,0,1,-1)\}$
**B)** $\dim(L_1) = 2$ având baza $\{ {}^t(-1,0,1,0),\ {}^t(-1,-1,0,2)\}$
**C)** $\dim(L_1) = 1$ având baza $\{ {}^t(0,0,1,-1)\}$
**D)** $\dim(L_1) = 0$ având baza $\varnothing$.

**10.** Vectorii $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

**A)** $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ este sistem de generatori liniar-dependent pentru $\mathbb{R}^4$
**B)** $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ este bază pentru $\mathbb{R}^4$
**C)** $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ nu este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^4$ şi este sistem liniar-dependent
**D)** $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ nu este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^4$ şi este sistem liniar-independent

Pentru problemele **11** şi **12** considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**11.** Polinomul caracteristic $P_A(X)$ este
**A)** $X(X+2)(X^2-2X+1)$ **B)** $X(X-2)(X^2+2X+1)$
**C)** $X(X-2)(X^2-2X+1)$ **D)** $X(X+2)(X^2-1)$

**12.** Fie morfismul $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, dat de $f(v) = (A - I_4) \cdot v, (\forall) v \in \mathbb{R}^4$. $\dim(\mathrm{Im}(f))$ este

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4

Pentru problemele **13** şi **14** considerăm forma pătratică

$$Q_\alpha(x, y, z) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + \alpha z^2 + 2xz + 2\alpha yz$$

**13.** Forma pătratică $Q_\alpha(x, y, z)$ este pozitiv definită pentru:

**A)** $\alpha > 1$ **B)** $\alpha > 0$ **C)** $\alpha \in \varnothing$ **D)** $\alpha > -1$

**14.** Pentru $\alpha = 2$ forma canonică, obţinută prin metoda transformărilor ortogonale, a formei pătratice $Q_2(x', y', z')$ este

**A)** $x'^2 + (1-\sqrt{5})y'^2 + (1+\sqrt{5})z'^2$ **B)** $2x'^2 + (1-\sqrt{5})y'^2 + (1+\sqrt{5})z'^2$
**C)** $2x'^2 + (2+\sqrt{5})y'^2 + (2-\sqrt{5})z'^2$ **D)** $2x'^2 + (2-\sqrt{2})y'^2 + (2+\sqrt{2})z'^2$

Pentru problemele **15** şi **16** considerăm hiperplanul
$H = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2\}$ şi punctul $P = {}^t(1, 2, 3, 4)$

**15.** Hiperplanul $H'$ care trece prin $P$ şi este paralel cu $H$ are ecuaţia

**A)** $x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3$ **B)** $x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 6$
**C)** $x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -6$ **D)** $x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 10$

**16.** Distanţa dintre hiperplanele $H$ şi $H'$ este

**A)** $3\sqrt{10}$ **B)** $\sqrt{10}$ **C)** $\frac{5\sqrt{10}}{4}$ **D)** $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

**17.** Pentru ce valori $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ conica de ecuaţie $\alpha x^2 + y^2 - 2xy - 4\beta x + 2y - 3 = 0$ reprezintă o parabolă ?

**A)** $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$ **B)** $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ **C)** $(\alpha, \beta) = (0, 1)$

**D)** $(\alpha, \beta) = (1, \frac{1}{2})$

**18.** Considerăm cuadrica de ecuaţie $x^2 - y^2 - 2pz = 0, p \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Intersecţia cuadricei date cu un plan paralel cu unul din planele de coordonate este o elipsă pentru

**A)** $p = 1$ **B)** $p = -1$ **C)** $p = 2$ **D)** $p \in \emptyset$