

NOM : DABERT	Prénoms : Darius
Classe : MP 1	
Lycée : Michel Montaigne	Numéro de candidat : 17062
Ville : Bordeaux	

Concours auxquels vous êtes admissible, dans la banque MP inter-ENS (les indiquer par une croix) :

ENS Cachan	MP - Option MP		MP - Option MPI	X
	Informatique			
ENS Lyon	MP - Option MP		MP - Option MPI	X
	Informatique - Option M		Informatique - Option P	
ENS Rennes	MP - Option MP		MP - Option MPI	X
	Informatique			
ENS Paris	MP - Option MP		MP - Option MPI	X
	Informatique			

Matière dominante du TIPE (la sélectionner d'une croix inscrite dans la case correspondante) :

Informatique		Mathématiques	X	Physique	
--------------	--	---------------	----------	----------	--

Titre du TIPE : **Analyse multi-résolution et base d'ondelettes**

Nombre de pages (à indiquer dans les cases ci-dessous) :

Texte	5	Illustration	1	Bibliographie	1/2
-------	----------	--------------	----------	---------------	------------

Résumé ou descriptif succinct du TIPE (6 lignes, maximum) :

Ce travail a pour but d'étudier et de comprendre la théorie de la décomposition sur une base orthogonale d'ondelettes très utilisée notamment en traitement du signal.

À Bordeaux	Signature du professeur responsable de la classe préparatoire dans la discipline	Cachet de l'établissement
Le 09/06/2021	Denis Fournier	
Signature du (de la) candidat(e)		
D. Dabert		

LYCÉE MICHEL MONTAIGNE226 rue Sainte Catherine
33075 BORDEAUX Cedex

Analyse multi-résolution et base d'ondelettes

Darius Dabert

Mai 2021

Table des matières

1	Décomposition en ondelette, analyse multi-résolution	3
1.1	Généralités sur la transformée de Fourier	3
1.2	Transformée en ondelettes continue	4
1.3	Transformée en ondelettes discrètes et bases d'ondelettes	6
1.4	Analyse Multirésolution, outil de construction des bases orthogonales d'ondelettes	6
1.5	Exemples d'ondelette	7
2	Application à la décomposition d'un signal	8
2.1	Algorithme rapide de transformée en ondelette de Mallat	8
2.2	Réduction de la dimensionalité de représentation des données	8

Introduction

La transformée en ondelette est un outil de traitement numérique très sophistiqué et efficace qui rend compte des avancées profondes en mathématiques analytiques. Elle permet de stocker à moindre coût la quasi-totalité des informations nécessaires à la représentation d'un signal. Dans ce rapport, on traitera le cas particulier de l'ondelette unidimensionnelle. En particulier, on posera le cadre théorique de conception des ondelettes, on reliera les informations portées par les composantes en ondelettes aux propriétés de régularité du signal dans le but d'aboutir à des stratégies performantes d'utilisation de ces dernières. Enfin, on expliquera comment utiliser l'outil informatique pour implémenter la transformée en ondelette afin de présenter des applications en résolution des problèmes de représentation du signal.

1 Décomposition en ondelette, analyse multi-résolution

On s'attachera dans cette partie à poser les bases théoriques du traitement du signal. En particulier, nous verrons en quoi consiste la transformée en ondelettes, on étudiera ses propriétés puis nous nous intéresserons aux manières de construire des familles d'ondelettes particulièrement efficaces pour l'analyse numérique de signaux.

1.1 Généralités sur la transformée de Fourier

La transformée de Fourier est un outil mathématique fondamental en traitement d'image. En effet, elle offre la possibilité de représenter fréquemment une image ou un son selon sa décomposition dans une base qui facilite son traitement numérique, elle permet aussi d'aisément localiser en fréquence les irrégularités (bruit, dégradation) de l'échantillon. Mathématiquement, on peut la définir comme ci-dessous :

Définition 1.1 : On définit l'opérateur \mathcal{F} qui à une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ associe sa transformée de Fourier définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{C}) \text{ avec } \forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\xi t} dt \\ f &\longmapsto \mathcal{F}(f) \end{aligned}$$

Cet outil permet notamment de quantifier l'impact de chaque composantes au signal global. En outre on dispose des propriétés classiques suivantes :

Propriété 1.1 :

(i) \mathcal{F} est linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} continues et de limite nulle en l'infini (Lemme 1.1)

(ii) (Translation) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et que l'on note $\forall k \in \mathbb{R} \quad f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \longmapsto f(t-k)$, alors $\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f_k)(\xi) = e^{-ik\xi} \mathcal{F}(f)(\xi)$

(iii) (Dilatation) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et que l'on note $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad f^\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \longmapsto f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$, alors $\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f^\alpha)(\xi) = \alpha \mathcal{F}(f)(\xi\alpha)$

(iv) (dérivation) Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^p(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f^{(p)})$ est définie et $\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f^{(p)}) = (i\xi)^p \mathcal{F}(f)(\xi)$

(v) (dérivation) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et vérifie \forall entier $0 \leq k \leq p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto t^k f(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} ,

alors $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^p et

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f)^{(p)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-it)^p f(t) e^{-i\xi t} dt$$

Il apparaît ainsi un lien fort entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel, les dilatations temporelles du signal ont pour effet de comprimer le spectre de la transformée de Fourier du signal. De plus les propriétés de régularité de f ont un impact immédiat sur la décroissance des amplitudes du spectre de f , c'est à dire que plus f est régulière, plus la décroissance de $\mathcal{F}(f)$ est forte au voisinage de l'infini.

Pour que ce processus de représentation soit efficace, il faut pouvoir revenir à la description temporelle à partir d'une description fréquentielle, ceci est possible sous certaines hypothèses.

Théorème 1.1 :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et telle que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, on dispose de la formule de réciprocity :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

On a alors la formule de **Parseval** :

$$\forall (f, g) \in L^2(\mathbb{R})^2 : \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) \overline{\mathcal{F}(g)(\xi)} d\xi$$

Ainsi que la formule de **Plancherel** : (conservation de l'énergie)

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi$$

1. on peut étendre le domaine de définition à $L^2(\mathbb{R})$ (qui est l'espace des signaux de puissance finie et qui a donc un sens physique) en définissant la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et en raisonnant par densité

Cependant le principal inconvénient de la transformée de Fourier est qu'elle n'offre pas d'information sur le comportement local d'une fonction. On peut avoir alors l'idée d'effectuer une transformée de Fourier sur une fenêtre de taille constante localisée temporellement sur le signal, cependant le principe d'incertitude d'Heisenberg ci-dessous montre que l'on ne pourra jamais localiser précisément à la fois en temps et en fréquence les signaux étudiés.

Théorème 1.2 : Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$ On définit la valeur temporelle moyenne et la valeur fréquentielle moyenne de f par :

$$\bar{f} = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega$$

On définit alors les variances autour de ces moyennes par :

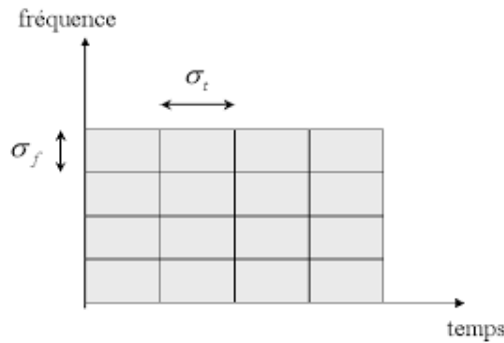
$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (t - \bar{f})^2 |f(t)|^2 dt$$

$$\sigma_{\omega}^2 = \frac{1}{2\pi\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (\omega - \bar{\omega})^2 |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega$$

On a alors :

$$\sigma_t \sigma_{\omega} \geq 1/2$$

Avec égalité si et seulement si f est une gaussienne.



1.2 Transformée en ondelettes continue

Une ondelette est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ qui correspond à une courte « impulsion ». Elle permet de générer une famille d'ondelettes qui seront des fonctions à la fois localisées dans le temps et en fréquence.

Ainsi une ondelette est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ / $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$ et $\|\psi\| = 1$

On définit à partir de cette ondelette appelés "ondelette-mère" une famille d'ondelettes analysantes par :

$$\left\{ \psi_{x,s} \right\}_{s>0}^{x \in \mathbb{R}} = \left\{ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-x}{s}\right) \end{array} \right\}_{s>0}^{x \in \mathbb{R}}$$

Définition 2.1 :

On définit pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ sa transformée en ondelette continue au point $x \in \mathbb{R}$ et à l'échelle $s > 0$ par :

$$W_f(x, s) = \langle f, \psi_{x,s} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-x}{s}\right) dt$$

Remarquons par ailleurs que l'on peut écrire cette transformation en ondelette comme un produit de convolution, rappelons tout d'abord la définition du produit de convolution qui sera adopté par la suite :

Définition 2.2 :

Soit $(f, g) \in (L^2(\mathbb{R}))^2$, on définit le produit de convolution de f et g , noté $f * g$, par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-u) g(u) du$$

Ainsi, la transformée en ondelette s'apparente à un filtrage passe-bande d'une portion du signal centrée sur la fréquence de l'ondelette analysante.

On dispose de plus des propriétés suivantes :

Propriétés 2.1 :

- (i) $\forall (f, g) \in (L^2(\mathbb{R}))^2, f * g = g * f$
- (ii) $\forall (f, g) \in (L^2(\mathbb{R}))^2, \mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$

Ainsi peut remarquer en notant $\psi_s^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que

$$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{-t}{s}\right)$$

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall (x, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, W_f(x, s) = f * \psi_s^*(x)$$

Tout comme la transformée de Fourier, on peut inverser la transformée en ondelettes continue sous certaines hypothèses :

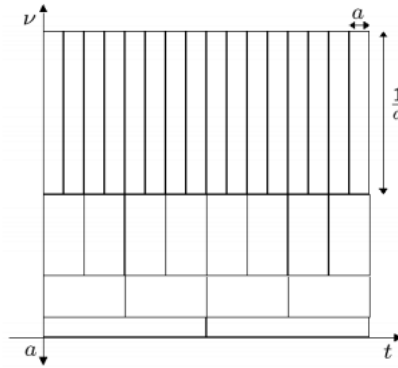
Théorème 2.1 : Soit ψ une ondelette , on dit de ψ qu'elle est admissible lorsque :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\mathcal{F}(\psi)(\xi)|}{\xi} d\xi < +\infty$$

Si c'est le cas, alors $\forall f \in L^2(\mathbb{R}),$

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(x, s) \psi_{x,s}(t) dx ds$$

Observons à présent les différences avec la transformée de Gabor (ou transformée de Fourier fenestrée). Si on s'intéresse au pavage du plan temps-fréquence, on s'aperçoit que bien que les aires des boîtes soient toujours minorées par une constante en vertu de l'inégalité d'Heisenberg, elle ne sont plus de formes carrées, ainsi on peut avoir accès via différentes ondelettes à des informations qui sont très bien localisées dans le temps ou en fréquence comme le montre le schéma ci-dessous :



En outre, on peut faire le lien entre la régularité d'une fonction (du point de vue de la α lipschitzianité), et la décroissance des amplitudes des composantes de la décomposition en ondelette du signal.

Pour cela on dispose des outils suivants :

Définition 2.3 :

Une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est ponctuellement Lipschitzienne d'ordre $\alpha \geq 0$ au point x_0 , s'il existe une constante C_{x_0} et un polynôme P de degré $m = \lfloor \alpha \rfloor$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t) - P(t)| \leq C_{x_0} |t - x_0|^\alpha$$

Définition 2.4 :

On dit d'une ondelette $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ qu'elle a $n \in \mathbb{N}^*$ moments nuls si pour tout entier $0 \leq k \leq n$:

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = 0$$

On dispose alors du résultat suivant permettant de quantifier la décroissance des coefficients en ondelettes de la transformée en ondelettes continue selon la régularité Lipschitzienne de f en un point.

Théorème 2.2 :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ une fonction Lipschitzienne d'ordre $\alpha \geq 0$ au point $x_0 \in \mathbb{R}$, et ψ une ondelette possédant $n = \lfloor x \rfloor$ moments nuls, alors :

$$\exists \beta \in \mathbb{R}_+^* / |W_f(x_0, s)| \leq C_{x_0} \beta s^{\alpha + \frac{1}{2}}$$

1.3 Transformée en ondelettes discrètes et bases d'ondelettes

Les informations données par la transformée en ondelettes continues sont redondantes. En effet en observant le plan temps-fréquence par exemple, on constate que les "boîtes" se chevauchent et apportent donc des informations redondantes. Il est ainsi naturel de chercher à discrétiser la famille d'ondelettes pour éliminer cette redondance et calculer de manière plus performante les coefficients en ondelettes d'un signal. On considère ainsi la famille d'ondelettes définies par :

$$\left\{ \psi_{j,n} \right\}_{j \in \mathbb{Z}} = \left\{ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-n}{2^j}\right) \end{array} \right\}_{j \in \mathbb{Z}}$$

Il vient alors deux interrogations :

- Peut-on à partir de ces coefficients reconstituer le signal d'origine ?
- Les informations apportées par deux ondelettes différentes sont elles différentes, c'est à dire peut on avoir une famille orthogonale d'ondelettes ?

On peut répondre positivement à ces deux questions en considérant la notion de base hilbertienne :

Définition 3.1 :

Soit H un espace de Hilbert, on appelle base hilbertienne de H toute famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de H telle que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}$$

$$\text{vect}\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ est dense dans } H$$

Les éléments d'une telle famille permettent alors de reconstituer l'intégralité de l'information et leur orthogonalité assure que l'information portée par chacun des vecteurs est différente. La question sous-jacente est- alors : comment construire de telles bases ?

1.4 Analyse Multirésolution, outil de construction des bases orthogonales d'ondelettes

On a déjà fait le lien entre décomposition en ondelettes et filtrage, comment donc à partir d'un modèle de filtrage peut-on construire une base d'ondelettes ? La notion d'analyse multi-résolution apporte une réponse à cette question.

Définition 4.1 :

Une analyse multirésolution (AMR) de $L^2(\mathbb{R})$ est une succession de sous espace fermés $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ qui satisfait les 6 propriétés suivantes :

- (i) $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$
- (ii) $\forall j \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), f(\cdot) \in V_j \Leftrightarrow f(\frac{\cdot}{2}) \in V_{j+1}$
- (iii) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- (iv) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
- (v) $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), f(\cdot) \in V_j \Leftrightarrow f(\cdot - k2^j) \in V_j$
- (vi) $\exists \phi \in V_0 / \{\phi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_0

Interprétons brièvement ces propriétés : La propriété (i) signifie que que l'approximation d'une fonction au niveau j , est plus précise que celle au niveau $j+1$, la propriété (ii) impose même que l'approximation au niveau j soit deux fois plus précise que l'approximation au niveau $j + 1$, c'est pourquoi l'on parle d'analyse multi-résolution. Au niveau d'approximation le plus précis (j tend vers $-\infty$), on obtient le signal initial f .

A chaque AMR définie par une fonction d'échelle ϕ , on peut associer un filtre discret qui sous certaines conditions spécifiées ci-dessous caractérise la fonction d'échelle et son AMR associée.

2. on l'appelle fonction d'échelle associé à l'AMR

Théorème 4.1 :

Soit $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction d'échelle d'une AMR, alors la transformée de Fourier du filtre défini par $h_k = \langle 2^{-\frac{1}{2}}\phi(\frac{\cdot}{2}), \phi(\cdot - k) \rangle$ vérifie

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, |\mathcal{F}(h)(\omega)|^2 + |\mathcal{F}(h)(\omega + \pi)|^2 = 2, \text{ et } \mathcal{F}(h)(0) = \sqrt{2}$$

Réciproquement si $\mathcal{F}(h)$ est une fonction 2π -périodique et continument dérivable au voisinage de 0, alors si $\mathcal{F}(h)$ vérifie les propriétés ci-dessus et si

$$\inf_{\omega \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} > 0,$$

Alors le produit :

$$\mathcal{F}(\phi)(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(h)(2^{-j}\omega)}{\sqrt{2}}$$

est la transformée de Fourier d'une fonction d'échelle définissant une AMR.

Il reste à présent à faire le lien entre une AMR et une base orthogonale d'ondelettes. Pour ce faire on introduit les notations suivantes :

Définition 4.2 :

Soient $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une AMR de $L^2(\mathbb{R})$ et $j \in \mathbb{Z}$,

Puisque l'on a $V_j \subset V_{j-1}$, on peut définir le sous-espace de détail W_j comme l'espace supplémentaire orthogonal du sous-espace fermé V_j dans V_{j-1}

On peut alors déduire des propriétés d'une AMR un procédé de construction de base hilbertienne des sous-espaces de détails W_j

Propriétés 4.1 :

- (i) $\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2$, si $i \neq j$ alors $W_i \perp W_j$
- (ii) $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = L^2(\mathbb{R})$
- (iii) $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $f(\cdot) \in W_j \Leftrightarrow f(\frac{\cdot}{2}) \in W_{j+1}$
- (iv) $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $f(\cdot) \in W_j \Leftrightarrow f(\cdot - k2^j) \in W_j$

Ainsi que le théorème suivant :

Théorème 4.2 :

Soit $\mathcal{F}(g) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ où h est définie en (4.1) On définit :

$$\omega \longmapsto e^{i\omega} \overline{\mathcal{F}(h)(\omega + \pi)}$$

$$\mathcal{F}(\psi) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\omega \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{F}(g)(\frac{\omega}{2}) \mathcal{F}(\phi)(\frac{\omega}{2})$$

On pose enfin, $\left\{ \psi_{j,n} \right\}_{j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}} = \left\{ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \right\}_{j \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}}$

$$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-n}{2^j}\right)$$

Alors, $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\left\{ \psi_{j,n} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de W_j et $\left\{ \psi_{j,n} \right\}_{j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$, ψ est appelée ondelette mère de l'AMR.

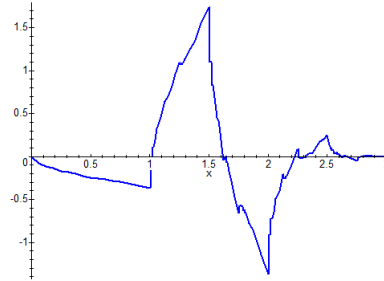
1.5 Exemples d'ondelette

Le premier exemple historique de bases orthogonales d'ondelette est celui des ondelettes de Haar. Ces ondelettes sont associés à l'AMR des fonctions constantes par morceaux sur chaque intervalles de la forme $\{I_{j,k} = [2^j k, 2^j(k+1)]\}$ L'ondelette mère associée à cette AMR est définie de la manière suivante : $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie bien que la famille d'ondelette engendré par ψ définie bien une base orthogonal de $L^2(\mathbb{R})$

Ingrid Daubechies propose une nouvelle manière de décomposer les signaux de manière discrète s'appuyant sur des ondelettes qui possèdent un nombre maximal de moments nuls pour un support compact donné. Elles sont donc, d'après théorème (2.2) très utiles pour décomposer efficacement un signal. La construction de ces ondelettes est particulière en ce qu'elle ne propose pas d'expressions finies pour l'ondelette-mère ni pour la fonction d'échelle. Elle se fonde en effet sur la caractérisation par les filtres miroirs conjugués liés intrinsèquement à la structure de l'AMR correspondante.

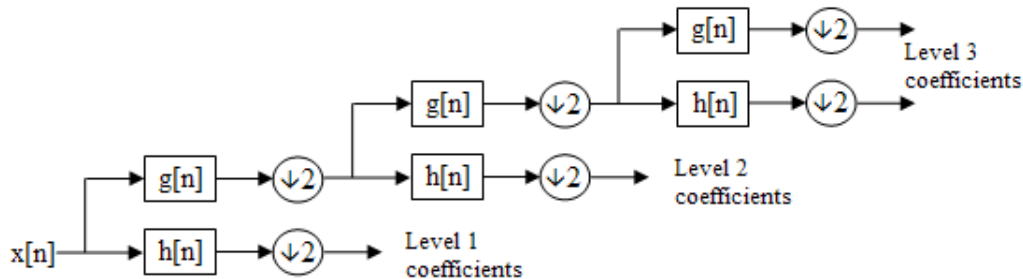


2 Application à la décomposition d'un signal

À présent, nous allons nous intéresser brièvement à l'application de la transformée en ondelette dans la représentation des signaux.

2.1 Algorithme rapide de transformée en ondelette de Mallat

Le principe de cet algorithme est le suivant : On met en cascade une série de filtres de deux types : le premier sert à suréchantillonner pour obtenir les coefficients de haute précision tandis que le second permet de sous-échantillonner pour obtenir les coefficients de basse précision. Mathématiquement, on matérialise ça dans le cadre d'une AMR par des projections successives sur deux sous-espaces orthogonaux. L'un des deux est un espace d'approximation (il s'agit de V_j) tandis que l'autre est un sous-espace de détail (il s'agit du supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j-1}).



2.2 Réduction de la dimensionalité de représentation des données

Lorsque l'on décompose un signal selon ses coefficients de Fourier, et qu'on ne garde qu'un certain nombre des coefficients pour réduire le volume occupé par la donnée, on approxime la signal avec un niveau de précision uniforme sur l'ensemble du signal. Ainsi, les zones où il y a de nombreux détails ont autant de coefficients de représentation que les zones où la fonction est très régulière. L'avantage offert par la transformée en ondelette est la possibilité de différencier les zones où il y a une irrégularité (et donc il y a des coefficients en ondelettes non nuls pour une ondelette comprimée avec un facteur grand) des zones très régulières pour adapter le nombre de coefficients. Ainsi, on obtient une représentation plus fidèle du signal à moindre coût.

Références

- [BIG] Jérémie BIGOT. *Analyse par ondelettes*. URL : https://www.math.u-bordeaux.fr/~jbigot/Site/Enseignement_files/ondelettesIMAT.pdf.
- [GIL] Jérôme GILLE. *LES BASES DE L'ANALYSE HARMONIQUE*. URL : https://jegilles.sdsu.edu/doc/cours_ondelettes.pdf.
- [Ste98] Mallat STEPHANE. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1998. ISBN : 0123743702.
- [THO] Nicolas THOME. *analyse Multi-Résolution et Ondelettes (AMO) Représentations des signaux 1D et 2D*. URL : <http://webia.lip6.fr/~thomen/Teaching/TADI/cours2.pdf>.