Stabilitatea sistemelor liniare

Breviar teoretic

Un sistem fizic realizabil este stabil faţă de o situaţie de echilibru staţionar, dacă sub acţiunea unei perturbaţii externe (ex: impuls Dirac) îşi părăseşte starea de echilibru stabil, tinzând să revină, după un timp finit (dupa ce perturbaţia a disparut), intr-o stare de echilibru staţionar cu sau fără eroare staţionară. Dacă acest lucru nu este realizat, în sensul că mărimea de ieşire are o variaţie cu amplitudine din ce în ce mai mare în timp (oscilant - periodic sau aperodic), se spune ca sistemul este instabil.

Stabilitatea interna a sistemelor

Stabilitatea interna se refera la starea de regim liber a sistemului si vizeaza comportamentul acestuia in situatia in care asupra lui nu actioneaza nici o marime exterioara (comanda sau perturbatie).

Cu alte cuvinte, aceasta notiune se refera la caracterizarea evolutiei marimii de stare atunci cand $u(t) = 0$ si $x_0 = x(0)$.

In aceasta situatie, analiza stabilitatii interne se va realiza asupra ecuatiei 1 din sistemul (1).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \cancel{Bu(t)}, \ t \in \mathbb{R} \\ \cancel{y(t) = Cx(t)} \end{cases} \tag{1}$$

Definiție 1 (Domenii de stabilitate)**.**

$$\begin{cases} \mathbb{C}^- \overset{def}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \backslash \quad Re\lambda < 0\} \\ \overline{\mathbb{C}}^- \overset{def}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \backslash \quad Re\lambda \leq 0\} \\ \mathbb{U}_1(0) \overset{def}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \backslash \quad |\lambda| < 1\} \\ \overline{\mathbb{U}}_1(0) \overset{def}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \backslash \quad |\lambda| \leq 1\} \end{cases} \tag{2}$$

Teoremă 1 (**Teorema de stabilitate interna**).

*Un sistem liniar este **intern stabil** daca si numai daca valorile proprii ale matricii A indeplinesc conditiile $Re\lambda_i \leq 0$ pentru SLN si $|\lambda| \leq 1$ pentru SLD, iar cele care au partea reala egala cu $Re\lambda_i = 0$ si respectiv modulul $|\lambda| = 1$ (valorile proprii de pe frontiera) trebuie sa fie radacini simple de ordin de multiplicitate cel mult egal cu* 1.

$$\sigma(A) \subset \begin{cases} \overline{\mathbb{C}}^{-} & pt.\ SLN \\ \overline{\mathbb{U}}_1(0) & pt.\ SLD \end{cases} \tag{3}$$

*Un sistem liniar este **intern asimptotic stabil** (strict intern stabil) daca si numai daca toate valorile proprii ale matricii A indeplinesc conditia $Re\lambda_i < 0$ pentru SLN si $|\lambda| < 1$ pentru SLD.*

$$\sigma(A) \subset \begin{cases} \mathbb{C}^{-} & pt.\ SLN \\ \mathbb{U}_1(0) & pt.\ SLD \end{cases} \tag{4}$$

unde

$$\sigma(A) \stackrel{def}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \backslash \quad det(\lambda I - A) = 0)\} \tag{5}$$

Stabilitatea externa a sistemelor

Stabilitatea externa se refera la starea de regim fortat a sistemului si vizeaza comportamentul acestuia in situatia in care asupra lui actioneaza o marime exterioara (comanda sau perturbatie).

Cu alte cuvinte, aceasta notiune se refera la caracterizarea evolutiei marimii de iesire atunci cand $u(t) \neq 0$ si $x_0 = 0$.

Teoremă 2 (**Teorema de stabilitatea externa**).

*Un **sistem liniar** este **extern stabil** daca si numai daca polii matricei de transfer indeplinesc conditiile $Re\lambda_i \leq 0$ pentru SLN si $|\lambda| \leq 1$ pentru SLD, iar cei care au partea reala egala cu $Re\lambda_i = 0$ si respectiv modulul $|\lambda| = 1$ (valorile proprii de pe frontiera) trebuie sa fie radacini simple de ordin de multiplicitate cel mult egal cu* 1.

$$\mathcal{P}(T(\lambda)) \subset \begin{cases} \overline{\mathbb{C}}^{-} & pt.\ SLN \\ \overline{\mathbb{U}}_1(0) & pt.\ SLD \end{cases} \tag{6}$$

*Un **sistem liniar** este **strict extern stabil** daca si numai daca polii matricei de transfer indeplinesc conditia $Re\lambda_i < 0$ pentru SLN si $|\lambda| < 1$ pentru SLD.*

$$\mathcal{P}(T(\lambda)) \subset \begin{cases} \mathbb{C}^{-} & pt.\ SLN \\ \mathbb{U}_1(0) & pt.\ SLD \end{cases} \tag{7}$$

*unde $\mathcal{P}(T(\lambda))$ sunt radacinile polinomului **c.m.m.m.c.** al polinoamelor de la numitorii functiilor de transfer din matricea de transfer adusa la forma ireductibila.*

Teoremă 3 (**Legatura dintre stabilitatea interna si stabilitatea externa**). *Un sistem **intern stabil** este si **extern stabil** ($SI \rightarrow SE$). Reciproca nu este valabila.*

$$\mathcal{P}(T(s)) \subset \sigma(A) \tag{8}$$

Criteriul *Routh-Hurwitz*

In situatia in care determinarea radacinilor polinomului caracteristic este dificil de realizat, stabilitatea asimptotica a unui sistem se va aprecia cu ajutorul **criteriului Hurwitz**.

Fie polinomul de forma generala

$$\mu(s) \overset{def}{=} a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{9}$$

ai carui coeficienti sunt strict pozitivi ($a_i > 0$)

Matrice Hurwitz

$$\mathcal{H} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nxn} \tag{10}$$

Teoremă 4 (**Criteriul Routh-Hurwitz**).

Polinomul $\mu(s)$ are toate radacinile in $\mathbb{C}^-$ daca si numai daca toti minorii principali ($H_i \rightarrow \ i = 1, 2, 3, \cdots, n$) matricii $\mathcal{H}$ sunt strict pozitivi.

$$H_1 = \begin{vmatrix} a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$H_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

Observație 1. *Fie polinomul caracteristic al matricei A*

$$\chi_A(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0; \ \ a_i > 0 \tag{11}$$

*Un **sistem liniar** este **asimptotic intern stabil** daca toti minorii matricii $\mathcal{H}$ construita pentru polinomul (11) sunt strict pozitivi ($H_i > 0$)*

*Un **sistem liniar** este **la limita de stabilitate** daca $(\exists)i$ a.i. $H_i = 0$.*

Exemplu. Se consideră funcția de transfer a unui sistem sistem liniar neted:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^3+s^2+s+1}$$

Să se verifice stabilitatea externa a sistemului cu criteriul Routh-Hurwitz.

Pentru a determina stabiliatea externa a unui sistem reprezentat intrare-iesire se analizeaza radacinile polinomului de la numitorul acesteia. In cazul nostru il notam cu $\mu(s)$.

$$\mu(s) = s^3 + s^2 + s + 1$$

Pentru a putea aplica criteriul Routh-Hurwitz se verifica ca toti coeficientii polinomului $\mu(s)$ sa fie strict pozitivi.

Avand in vedere ca toti coeficientii ($c_3 = 1; c_2 = 1; c_1 = 1; c_0 = 1$) indeplinesc aceasta conditie rezulta ca matricea Hurwitz este:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} c_2 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_1 & 0 \\ 0 & c_2 & c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Minorii principali sunt $H_1 = 1$, $H_2 = 0$ si $H_3 = 0$. Intrucat minorii de ordin 2 si 3 sunt egali cu 0, rezultă că **sistemul este la limita de stabilitate**.

Studiu de caz - Pendulul invers atașat unui cărucior în mișcare

Pendulul invers atașat unui cărucior în mișcare reprezintă o aplicație clasică utilizată în prezentarea principalelor concepte din domeniul teoriei sistemelor. O schemă sugestivă a sistemului poate fi vizualizată în Fig. 1.

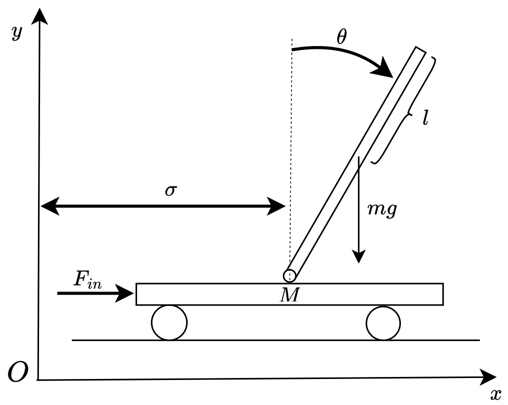

Figure 1: Pendulul invers atașat unui cărucior în mișcare

Astfel, în Fig. 1, putem identifica următoarele mărimi caracteristice ansamblului mecanic:

- masa căruciorului M $[kg]$
- masa pendulului m $[kg]$
- accelerația gravitațională g $[m/s^2]$
- lungimea pendulului $L = 2 * l$ $[m]$

Pentru a simplifica problema și a putea defini mărimile dinamice ale procesului, se consideră că mișcarea pendulului poate avea loc doar în plan bidimensional. Astfel, se consideră un sistem de coordonate xOy, față de care se pot defini următoarele mărimi:

- forța aplicată căruciorului, paralelă cu axa Ox: F_{in} $[N]$
- unghiul determinat de pendul față de axa verticală Oy: θ $[rad]$
- distanța față de originea sistemului de coordonate: σ $[m]$

Obiectivul problemei de control este de a menține pendulul în poziție verticală ($\theta = 0$), dat fiind faptul că pendulul poate să cadă fie spre dreapta, fie spre stânga, în funcție de forța aplicată căruciorului sau în funcție de alte perturbații ce pot influența unghiul θ.

Dat fiind natura didactică a acestui exemplu, dar și caracterul neliniar al acestui sistem, vom considera un model liniar al pendulului în jurul zonei de echilibru definite de axa verticală. Acest model va fi valid doar pentru mici variații alte lui θ, în așa fel încât $\sin\theta = \theta$ și $\cos\theta = 1$.

O altă ipoteză pe care o considerăm pentru a simplifica modelul matematic este că momentul de inerție al pendulului față de centrul său gravitațional este neglijabil.

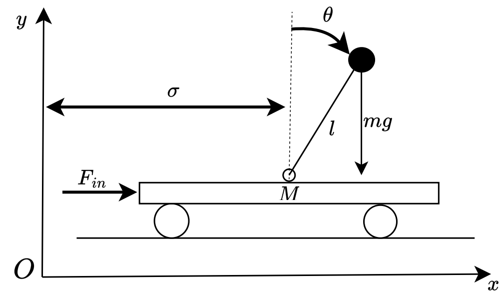

Figure 2: Pendulul invers atașat unui cărucior în mișcare, cu masa concentrată în jurul centrului gravitațional

Concret, pendulul pe care îl considerăm are masa concentrată în jurul punctului gravitațional (Fig. 2).

Cu aceste simplificări, modelul matematic liniarizat al pendulului devine:

$$\begin{aligned} Ml\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} &= (M+m)g\theta(t) - F_{in}(t) \\ M\frac{d^2\sigma(t)}{dt^2} &= F_{in}(t) - mg\theta(t) \end{aligned} \tag{12}$$

Modelul în reprezentare pe stare

Pentru a modela acest sistem în reprezentare pe stare, trebuie să alegem un vector de stare reprezentativ, mărimile de intrare, precum și mărimile de ieșire.

Ținând cont de faptul că dorim să menținem pendulul în echilibru, vom alege aceste mărimi astfel:

- intrarea sistemului este forța aplicată căruciorului F_{in}
- vectorul de ieșire este dat de unghiul θ și deplasarea față de origine

$$y = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \sigma(t) \end{bmatrix} \tag{13}$$

- vectorul de stare este definit atât în funcție de θ și σ, cât și în funcție de derivatele lor.

$$x = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} \\ \sigma(t) \\ \frac{d\sigma(t)}{dt} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Cu aceste mărimi, modelul în reprezentare pe stare devine:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{Ml} \\ 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Chestiuni de studiat

Se da sistemul liniar neted (modelul matematic) al *pendulului invers atașat unui cărucior în mișcare* descris de matricele (A, B, C, D) din sectiunea de mai sus unde

- $M = 2$ - masa căruciorului $[kg]$
- $m = 0.1$ - masa pendulului $[kg]$
- $g = 9.81$ - accelerația gravitațională $[m/s^2]$
- $l = 0.5$ - lungimea pendulului $[m]$

1. Sa se determine valorile proprii ale pendulului invers si sa se analizeze stabilitatea interna a acestuia.

   Indicații.

   - Valorile proprii ale unei matrici se determina folosid functia *eig*.

     ```
     lambda=eig(A);
     ```

   - Partea reala a unui numar complex se va extrage cu functia Matlab *real*

     ```
     coef_reali=real(coef_complexi);
     ```

     unde in vectorul *coef_reali* se va memora partea reala a elementelor din vectorul *coef_complexi*.

2. Sa se analizeze (dacă este posibil) stabilitatea interna a pendulului invers folosind criteriul Routh-Hurwitz.

   Pentru acest lucru, se va realiza un script cu urmatoarele functionalitati:

   - Se determină polinomul caracterstic pe baza eq. 5 și cu ajutorul funcției MATLAB *det*.
   - Se vor extrage intr-un vector coeficientii polinomului caracterisitic folosind functia *sym2poly*

     ```
     coeficienti=sym2poly(r);
     ```

     unde in vectorul "*coeficienti*" sunt coeficientii polinomului r.
   - Se va verifica daca se poate aplica criteriul Hurwitz (polinom complet si cu coeficientii pozitivi) si afiseaza un mesaj in acest sens.
   - Daca se poate aplica criteriul se calculeaza matricea Hurwitz (H) si minorii principali ai acesteia (vectorul *delta*) folosind functia "hurwitz" din Anexa 1.
   - Analizand vectorul *delta*, se stabileste daca sistemul este asimpotic intern stabil intern, la limita de stabilitate sau instabil intern (se afiseaza un mesaj corespunzator).

   Indicații.

   Constructia matricei Hurwitz si determinarea minorilor principali se va realiza cu ajutorul functiei Matlab din Anexa 1.

3. Sa se determine polii pendulului invers si sa se analizeze stabilitatea externa a acestuia.

   Indicatii

   Pentru analiza stabilitatii externe se va realiza un script cu urmatoarele functionalitati:

   - Se trece sistemul din spatiul starilor in reprezentarea intrare-iesire folosind funcția $ss2tf$.

     ```
     [num, den] = ss2tf(A,B,C,D,1);
     ```

     unde in $[num, den]$ vor fi memorati coeficientii functiilor de transfer ce depind de intrarea 1 $\left(H_{11}(s) = \dfrac{y_{f1}(s)}{u_1(s)}, H_{12}(s) = \dfrac{y_{f2}(s)}{u_1(s)} \cdots\cdots\right)$.

   - Se calculeaza polii matricei de transfer folosind functia *roots*. Acestia sunt radacinile polinomului **c.m.m.m.c.** al polinoamelor de la numitorii functiilor de transfer din matricea de transfer.

     ```
     c=roots(p);
     ```

     unde in vectorul c se vor memora radacinile polinomului cu coeficientii din vectorul p.

   - Se stabileste daca sistemul este extern stabil (se afiseaza un mesaj corespunzator).

4. Sa se analizeze stabilitatea externa a pendulului invers folosind criteriul Routh-Hurwitz.

5. Sa se analizeze stabilitatea externa a următorului sistem folosind criteriul Routh-Hurwitz.

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{s-2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Anexa 1

```
function [H,delta] = hurwitz(p)
%HURWITZ  Hurwitz matrix.
%   [H,delta] = HURWITZ(p) returns the Hurwitz matrix H
%   for the polynomial p. The optional output argument delta
%   contains all the principal minors.
%
%   Example:
%      syms K
%      p = [1,K,2,5];
%      [H,delta] = hurwitz(p)

n = numel(p)-1;
p1 = p(2:2:end);
p2 = p(1:2:end);
if isnumeric(p)
    H = zeros(n,n);
    delta = zeros(n,1);
else
    H = sym(zeros(n,n));
    delta = sym(zeros(n,1));
end
i = 0;
for k = 1:n
    if mod(k,2)
        H(k,i+[1:numel(p1)]) = p1;
    else
        H(k,i+[1:numel(p2)]) = p2;
        i = i + 1;
    end
end
for k = 1:n
    delta(k) = det(H(1:k,1:k));
end
```