Compensatorul dinamic stabilizator

Breviar teoretic

Definiție 1. ***(Legea de comandă după stare)***
Se numeşte lege de comandă prin reacţie după stare

$$u(t) = Fx(t) + Gv(t) \tag{1.1}$$

unde $F \in \mathbb{R}^{mxn}$*;* $G \in \mathbb{R}^{mxm}$*;* G *- nesingulara;* $u(\cdot),\ v(\cdot) \in \mathbb{R}^m$*;* $Fx(t)$ *- reacţia după stare;* $v(t)$ *- noua mărime de intare în sistem.*

Observație 1. ***(Interpretare lege de comandă prin reacţie după stare)***

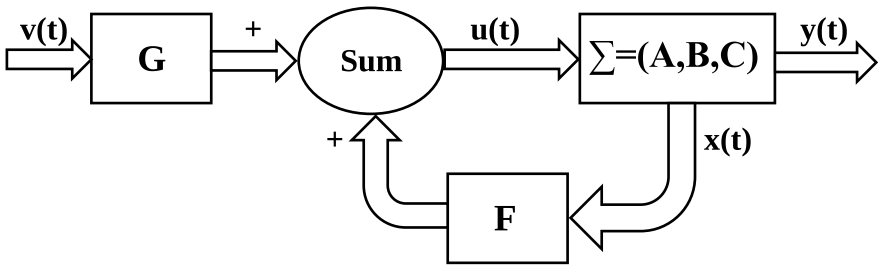

Figure 1.1: Structura de reglare prin reacţie după stare

Structura 1.1 reprezintă sistemul în circuit închis cu reacţie după stare.

Legea de comandă prin reacţie după stare , reprezintă cea mai simplă metodă de conducere, având la bază starea procesului. Astfel este generată o comandă $u(t)$, aplicată într-o structură de tipul celei din Figura 1.1, care să-i confere sistemului un comportament impus.

Algoritm 1 (Alocare m = 1)

Date: (A, b) şi $\Lambda_d \subset \mathbb{C}$ simetrică.

Pas 0. Se verifică (A, b) controlabilă. Dacă **DA** $\rightarrow$ *Pasul 1.*, dacă **NU** $\rightarrow$ *STOP*

Pas 1. Se calculează q^T soluţie a ecuaţiei $q^T R = e_n^T$

Pas 2. $f^T = -q^T \chi_d(A)$

Alogoritm 2 (Alocare m > 1)

Date: (A, B) şi $\Lambda_d \subset \mathbb{C}$ simetrică.

Pas 0. Se verifică dacă perechea (A, B) este controlabilă, $A \in R^{nxn}, B \in R^{nxm}$.
Dacă **DA** $\rightarrow$ *Pasul 1.*, dacă **NU** $\rightarrow$ **STOP**. **Pas 1.** Se generează aleator $g \in R^m$ şi $F_0 \in R^{mxn}$.

Pas 2. Se calculează $A_0 = A + B \cdot F_0$ şi $b_0 = B \cdot g$.

Pas 3. Se verifică dacă perechea (A_0, b_0) este controlabilă.
Dacă **DA** $\rightarrow$ *Pasul 4*, dacă **NU** $\rightarrow$ *Pasul 1.*

Pas 4. Se calculează f^T care alocă Λ_d perechii (A_0, b_0)
$f^T = -q^T \cdot \chi_d(A_0)$, unde q^T reprezintă ultima linie din matricea R_0^{-1}.

Pas 5. $F = F_0 + g \cdot f^T$.

unde

- $R = [B \; AB \; ... \; A^{n-1}B \;] \rightarrow$ matricea de controlabilitate
- $\chi_d(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)... \rightarrow$ polinomul carateristic impus
- Funcţia Matlab $ctrb(A, B)$ returnează matricea de controlabilitate asociată perechii (A, B).
- Funcţia Matlab $rank(A)$ returnează rangul matricei A.

Observație 2. *În general verificarea de la Pasul 0 este inutilă. Realizarea succesivă a paşilor 1 şi 2 şi eşecul de mai multe ori în a găsi perechi (A_0, b_0) necontrolabile duce cu certitudine la concluzia că perechea (A, B) este necontrolabilă. Pe de altă parte, succesul la pasul 2 dovedeşte că perechea (A, B) este controlabilă.*

Teoremă 1. ***Compensatorul dinamic stabilizator:*** *Un compensator dinamic stabilizator se calculează conform algoritmului de mai jos. .*

Algoritm compensator dinamic stabilizator

Pas 0. Se verifică dacă perechea (A, B) este controlabilă, respectiv (C, A) observabilă - $A \in \mathbb{R}^{nxn}, B \in \mathbb{R}^{nxm}, C \in \mathbb{R}^{pxn}$. Dacă **DA** $\rightarrow$ *Pasul 1*, dacă **NU** $\rightarrow$ *STOP*.

Pas 1. Se calculează F care alocă Λ_d.

Pas 2. Se determină un estimator de stare unitar

1. Se calculează L astfel încât $\sigma(A + LC) = \Lambda_e$
   - $A^* = A^T$, $B^* = C^T$
   - alocare pentru $(A^*, B^*) \Rightarrow (F^*)^T = L^T$
   - $L = (L^T)^T$
2. Se calculează matricele estimatorului unitar 1.2
   $J = A + LC$, $K = -L$, $H = B$, $M = I_n$, $N = O^{nxp}$, $n_e = n$

$$\begin{cases} \dot{z} = Jz + Ky + Hu \\ w = Mz + Ny \end{cases} \tag{1.2}$$

Pas 4. Se determină compensatorului dinamic stabilizator

$$\begin{cases} n_c = n_e \\ A_c \overset{def}{=} J + HFM \\ B_c \overset{def}{=} K + HFN \\ F_c \overset{def}{=} FM \\ G_c \overset{def}{=} FN \end{cases} \tag{1.3}$$

Funcţii Matlab:

- $ctrb(A, B)$ returnează matricea de controlabilitate asociată perechii (A, B).
- $obsv(A, C)$ returnează matricea de observabilitate asociată perechii (C, A).
- $rank(A)$ returnează rangul matricei A.

Pasul 1 al algoritmului este realizabil daca perechea (A, B) este stabilizabila (controlabilă), iar **Pasul 2** are soluţie dacă perechea (C, A) este detectabilă (observabilă).

Operaţia de găsire a matricelor A_c, B_c, F_c şi G_c se numeşte redistribuirea elementelor compensatorului şi constă în rearanjarea schemei din Figura 1.2 astfel încât să fie echivalentă cu schema din Figura 1.3, adică în rearanjarea elementelor din zona punctată sub forma unui sistem cu intrare doar y şi ieşire pe u.

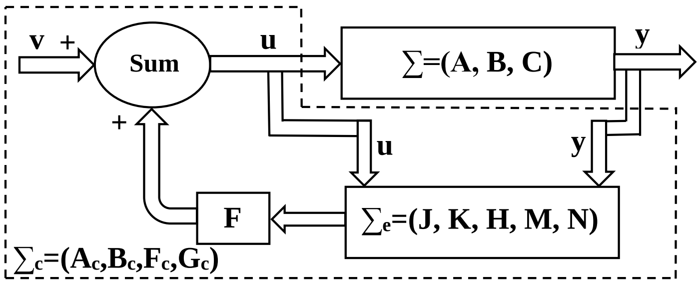

Figure 1.2: Compensator dinamic stabilizator

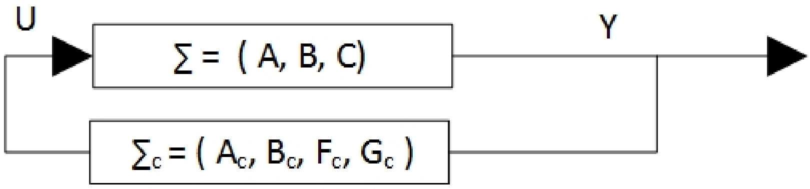

Figure 1.3: Conexiunea în reacţie a compensatorului dinamic stabilizator

Observație 3. *Algoritmul de construcţie a compensatorului stabilizator bazat pe schema din*
Figura 1.3 este în fapt un algoritm general de construcţie a unui compensator dinamic (CD). Algoritmul nu depinde de performanţele pe care le asigură legea de comandă $u = Fx$ *sau tipul de estimator folosit, fapt care îi dă un grad mare de generalitate.*

Chestiuni de studiat

Fie sistemul liniar neted (SLN) descris de 1.4:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\Lambda_d = \{-1, -1, -1\} \tag{1.5}$$

$$\Lambda_e = \{-2, -2, -2\} \tag{1.6}$$

1. Să se implementeze în MATLAB o funcție denumită *alocare* care să determine matricea de reacție F pe baza unui sistem în reprezentare pe stare și a unui vector de valori proprii λ_d.

2. Să se realizeze un script Matlab care să calculeze un compensator dinamic stabilizator (CDS), folosind un estimator de stare unitar Kalman.

3. Să se implementeze în Simulink compensatorul dinamic stabilizator obţinut la punctul precendet (a se vedea Figura 1.4). Să se afişeze pe un osciloscop răspunsul forţat al sistemului atunci când îi este aplicată comanda $\mathbf{v}(t)$. .

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} 1(t) \\ -2 \cdot 1(t) \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

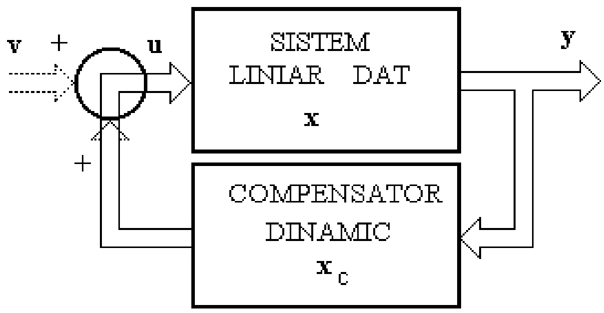

Figure 1.4: Structura primară de conducere cu ajutorul unui compensator dinamic

Studiu de caz - Determinarea unui compensator stabilizator pentru pendulul invers atașat unui cărucior în mișcare

Se da sistemul liniar neted (modelul matematic) al *pendulului invers atașat unui cărucior în mișcare* descris de matricele (A, B, C, D)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

unde

- $M = 2$ - masa căruciorului $[kg]$
- $m = 0.1$ - masa pendulului $[kg]$
- $g = 9.81$ - accelerația gravitațională $[m/s^2]$
- $l = 0.5$ - lungimea pendulului $[m]$

Ținând cont de faptul că dorim să menținem pendulul în echilibru, vom alege aceste mărimi astfel:

- intrarea sistemului este forța aplicată căruciorului F_{in}
- vectorul de ieșire este dat de unghiul θ și deplasarea față de origine

$$y = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \sigma(t) \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

- vectorul de stare este definit atât în funcție de θ și σ, cât și în funcție de derivatele lor.

$$x = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} \\ \sigma(t) \\ \frac{d\sigma(t)}{dt} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

O aplicație tipică pentru un astfel de sistem instabil este determinarea unui compensator stabilizator.

Se va aplica pe iesirea sistemului o perturbatie aditiva asupra unghiului θ, pentru a demonstra capabilitatea compensatorului de a rejecta perturbatiile la iesire.

Perturbația este aplicată sub forma unui tren de impulsuri de amplitudine 0.01, cu o perioadă de 20 de secunde.