Curs Nr. 2

Serii numerice

Lector Dr. ADINA JURATONI
Departamentul de Matematică
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

0.1 Serii numerice

1. Serii convergente. Serii divergente. Serii absolut convergente. Condiţii de convergenţă.

Noţiunea de sumă finită (a unui număr finit de termeni) poate fi extinsă prin atribuirea sumei oricărui şir infinit de termeni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a unui număr unic folosind noţiunea de sumă a unei serii convergente. În realitate nu se pune problema calculului sumei unui număr infinit de termeni, ci de atribuirea a acestei sume unui număr bine determinat.

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale căruia i se asociază şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ având termenul general

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

numit **şirul sumelor parţiale asociat şirului** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definiţia 2.1. Perechea de şiruri $(a_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, în care $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este definit de egalitatea (1), se numeşte **serie de termen general** a_n.

Seria se va nota prin unul din simbolurile: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\quad a_0 + a_1 + ... + a_n + ...$, $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, etc.

Definiţia 2.2. Se spune că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ este convergentă, dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent în $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, iar limita sa, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ se numeşte sumă a seriei şi se scrie $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă, dacă şirul sumelor parţiale este divergent sau nu are limită.

Dacă şirul sumelor parţiale nu are nici limită finită nici infinită, atunci seria se numeşte **oscilantă**. O serie oscilantă este divergentă.

Exemplul 1. Studiaţi cu ajutorul definiţiei natura seriei $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-3)!(n^2-n)}$.

Soluţie. Se observă că termenul general al seriei poate fi scris astfel:

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{(n-3)!(n^2-n)} = \frac{2^{n-1}}{(n-3)!(n^2-n)} \cdot \frac{n-2}{n-2} = \frac{2^{n-1}(n-2)}{n!} = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{2^n}{n!}.$$

Astfel, şirul sumelor parţiale devine

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{2^k}{k!} = 2 - \frac{2^n}{n!}.$$

Rezultă prin trecere la limită

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2,$$

deci seria $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-3)!(n^2-n)}$ este convergentă şi are suma 2.

Exemplul 2. Se consideră seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, cu a şi $q \in \mathbb{R}$. În funcţie de parametrul q să se studieze convergenţa acestei serii.

Soluţie. Se observă că termenii acestei serii sunt în progresie geometrică, de unde şi numele de serie geometrică. Deoarece $S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1}$, $qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^n$, rezultă egalitatea, $S_n - qS_n = a - aq^n$, de unde $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$. Se observă că limita şirului (S_n) depinde de numărul real q.

a) Pentru $|q| < 1$, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, $S = \frac{a}{1-q}$.

b) Pentru $|q| > 1$, $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, seria este divergentă.

c) Pentru $q = 1$, avem $S_n = a + a + a + ... + a = na$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, după cum $a > 0$, sau $a < 0$.

d) Pentru $q = -1$, rezultă $S_n = a - a + a - a + ... + (-1)^{n-1} a$ şi astfel $S_{2m} = 0, S_{2m+1} = a$, ceea ce înseamnă că şirul sumelor parţiale nu are limită, deci seria este divergentă. Prin urmare, seria geometrică este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$ şi are suma $S = \frac{a}{1-q}$ şi divergentă dacă $|q| \geq 1$.

Prin urmare am obţinut următorul rezultat

Seria geometrică este

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{este convergentă pentru } |q| < 1 \\ \text{este divergentă pentru } |q| \geq 1 \end{cases}}$$

Remarcă. Un număr finit de termeni nu influenţează natura unei serii. (Dacă adăugăm sau înlăturăm un număr finit de termeni dintr-o serie aceasta îşi păstrează natura).

Teorema 2.3. (condiţia necesară de convergenţă)

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstraţie. Presupunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. Conform definiţiei unei serii convergente rezultă că şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty} S_n = s \in \mathbb{R}$. Atunci $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $S_{n-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$, deci $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$.

Consecinţă. (criteriu de divergenţă) Dacă termenul general al unei serii **nu** converge la zero atunci seria e divergentă.

Exemplul 3. (Seria armonică)

Să se demonstreze că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (numită seria armonică) este divergentă.

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este convergentă. Din definiţie rezultă că şirul sumelor parţiale $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ este convergent, deci $\exists S \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Rezultă, de asemenea, că $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$, deci $\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$.

Pe de altă parte, avem

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Am obţinut o contradiţie, deci presupunerea făcută este falsă şi prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă. Criteriul care urmează stabileşte **o condiţie necesară şi suficientă** de convergenţă a seriilor numerice.

Teorema 2.4 (Criteriul general al lui Cauchy). Pentru ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ să fie convergentă, este necesar şi suficient ca pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon, \ \forall \ n \geq n_0, \ \forall \ p \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Demonstraţie. Presupunem că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, deci şirul sumelor parţiale (S_n) este convergent, deci fundamental. Această afirmaţie este echivalentă cu faptul că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ încât oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$ să avem $|S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon$.

Exemplul 4. Studiaţi cu ajutorul criteriului general de convergenţă al lui Cauchy natura seriei: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Soluţie. Şirul sumelor parţiale este

$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$

Rezultă inegalitatea $|S_{2n} - S_n| > \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$, care demonstrează că şirul sumelor parţiale (S_n) nu este fundamental, deci divergent, aşa că seria este divergentă.

Definiţia 2.5. Se spune că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă, dacă seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă; dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă iar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este semiconvergentă (condiţionat convergentă).

Remarcă. Orice serie absolut convergentă este convergentă, dar reciproca în general nu este valabilă.

Definicţia 2.6. O serie de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte **alternantă,** dacă şi numai dacă produsul oricăror doi termeni consecutivi este negativ: $a_n a_{n+1} < 0, n \in \mathbb{N}$.

Criteriul lui Leibniz. Dacă seria alternantă $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,\ a_n > 0$ are şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton descrescător şi convergent la zero, atunci seria este convergentă.

Exemplul 5. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ este semiconvergentă.

Soluţie. Cum şirul $a_n = \frac{1}{n}$ este descrescător cu limita zero, conform criteriului lui Leibniz rezultă că seria alternantă $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ este convergentă. De asemenea seria modulului termenului general este $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă, (fiind seria armonică), deci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ nu e absolut convergentă. Rezultă că această serie este semiconvergentă.

Teorema 2.7. Criteriul lui Abel. Dacă $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale monoton descrescător şi convergent la zero, iar $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ este o serie de numere reale având şirul sumelor parţiale (s_n) mărginit, atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n u_n$ este convergentă.

Demonstraţie. Şirul (S_n) fiind mărginit, rezultă că există $M > 0$ astfel ca $|S_n| \leq M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Potrivit criteriului lui Cauchy, este uşor de observat că $\forall\ n, p \in \mathbb{N}$ avem $|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + ... + \alpha_{n+p}u_{n+p}| =$
$|\alpha_{n+1}(S_{n+1} - S_n) + \alpha_{n+2}(S_{n+2} - S_{n+1}) + ... + \alpha_{n+p}(S_{n+p} - S_{n+p-1})| =$
$|-\alpha_{n+1}S_n + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) S_{n+1} + ... + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) S_{n+p-1} + \alpha_{n+p}S_{n+p}| \leq$
$\alpha_{n+1}|S_n| + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})|S_{n+1}| + ... + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})|S_{n+p-1}| + \alpha_{n+p}|S_{n+p}| \leq$
$M(\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+2} - \alpha_{n+3} + ... + \alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p} + \alpha_{n+p}) \leq 2M\alpha_{n+1}.$

Prin ipoteză $\alpha_{n+1} \overset{(\mathbb{R},|\cdot|)}{\to} 0$, ceea ce înseamnă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un rang $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha_{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ pentru orice $n \geq n_0(\varepsilon)$ şi orice $p \in \mathbb{N}$. Rezultă că putem scrie

$|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + ... + \alpha_{n+p}u_{n+p}| \leq 2M\alpha_{n+1} < 2M\dfrac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$

deci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n u_n$ satisface criteriul lui Cauchy, deci este convergentă.

Teorema 2.8. Criteriul lui Dirichlet. Dacă $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale monoton şi mărginit, iar seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ este convergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ este convergentă.

Demonstraţie. Şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fiind monoton şi mărginit, el este convergent. Dacă, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, atunci şirul $\beta_n = \alpha_n - \alpha$ are limita zero. Dacă (α_n) este un şir descrescător de numere reale pozitive, atunci (β_n) este un şir de numere pozitive monoton descrescător şi convergent la zero.

Deoarece $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, rezultă că şirul sumelor sale parţiale este mărginit. Atunci potrivit criteriului lui Abel, seria

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha) u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$, este convergentă, din care rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} [(\alpha_n - \alpha) u_n + \alpha u_n]$ este convergentă.