*Algebra nu este decat o geometrie scrisa, geometria nu este decat o algebra figurata.*

Sophie Germain

# 1

# Limbajul matricial

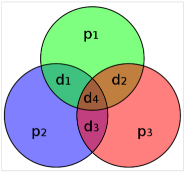
## ***Coduri Hamming***

Codurile Hamming sunt coduri liniare bloc, proiectate pentru a detecta si corecta erori aparute in transmiterea semnalelor mesajelor (sub forma de biti) de la un capat la celalalt printr-un canal de telecomunicatie. Scopul codurilor introduse de Richard Hamming era sa detecteze erori de pana la doi biti si sa corecteze o eroare de un singur bit. Avantajul lor este dat de faptul ca se realizeaza usor codarea si decodarea. Codurile Hamming au aplicatii in domenii ca si serviciile de telecomunicatii, de exemplu comunicarile prin satelit, in constructia modemurilor, a procesoarelor incorporate. In codurile Hamming mesajele sunt codate cu ajutorul bitilor redundanti, numiti si biti de paritate. Acesti biti se adauga mesajului, fiind plasati pe diferite poziti printre bitii mesajului.

In continuare vom discuta despre descrierea matriciala a unui caz concret: **codul Hamming** $(7, 4)$. Acesta reprezinta un cod de corectare a erorilor care codifica 4 biti de date in 7 biti prin adaugarea a 3 biti de paritate (sau de control). Avem pe pagina urmatoare o reprezentare grafica a celor patru biti de date, notati $d_1, d_2, d_3, d_4$, si a trei biti de paritate $p_1, p_2, p_2$, aratand ce biti de paritate au fost aplicati caror biti de date.

Matricea

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$




se numeste **matrice generatoare de cod** a codului liniar $(7, 4)$ iar matricea

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

este **matrice detectoare a paritatii**. O proprietate interesanta a matricei $H$ este data de faptul ca daca ii citim coloanele de jos in sus obtinem o scriere in binar a sirului $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Spre exemplu, coloana a treia citita astfel este 011 iar $3 = 011_{(2)} = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

Bitii de **d**ate pot fi reprezentati sub forma unui vector coloana

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

Bitii de date vor fi codati prin intermediul matricei $G$ urmand a obtine bitii **c**odati, prin metoda Hamming (7,4)

$$\boldsymbol{c} = G^t \cdot \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 + d_2 + d_4 \\ d_1 + d_3 + d_4 \\ d_1 \\ d_2 + d_3 + d_4 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ d_1 \\ p_3 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

si se observa aparitia pe pozitiile corespunzatoare lui $2^0, 2^1$ si $2^2$ a expresiilor: $d_1 + d_2 + d_4$ care va fi notata cu $p_1$ (primul bit de paritate), $d_1 + d_3 + d_4$ care va fi notata cu $p_2$ (al doilea bit de paritate), respectiv $d_2 + d_3 + d_4$ care va fi notata cu $p_3$ (al treilea bit de paritate).

Bitii codati sunt apoi transmisi printr-un canal de telecomunicatie. Sa presupunem ca bitii **r**eceptionati dupa o codare Hamming (7,4) sunt $\boldsymbol{r}$ care s-ar putea sa fie $\boldsymbol{c}$ sau s-ar putea sa nu coincida (apar erori de transmitere). Asadar

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}$$

unde $\boldsymbol{e}$ este un vector coloana care contine informatii despre eroarea de transmitere. *Detectarea erorilor* presupune doar verificarea paritatii prin aplicarea matricei de paritate $H$

$$\boldsymbol{s} = H\boldsymbol{r}.$$

Coloana $\boldsymbol{s}$ se numeste **s**indrom si se refera la faptul ca $\boldsymbol{s} = H\boldsymbol{e}$ reflecta eroarea in mesajul receptionat.

Se verfica usor ca $H\boldsymbol{c} = \bar{\mathbf{0}}$ pentru orice cuvant de cod, deci doar $H\boldsymbol{e}$ poate genera coloane nenule (am notat cu $\bar{\mathbf{0}}$ coloana formata doar cu zerouri). Pentru aceasta se vor folosi regulile de adunare si inmultire ale claselor de resturi modulo 2 si anume

$$1 + 0 = 0 + 1 = 1 \;\text{ si }\; 0 + 0 = 1 + 1 = 0$$

$$0 \cdot 0 = 0, \;\; 1 \cdot 1 = 1 \;\text{ si }\; 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

Vom nota cu $\boldsymbol{e}_i$ matricea coloana care are un 1 pe pozitia a $i$-a si in rest zeroruri. Sa investigam ce se intampla cand eroarea de transmitere consta intr-un singur bit transmis gresit, mai precis cand $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_i$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s} &= H\boldsymbol{r} = H(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_i) = H\boldsymbol{c} + H\boldsymbol{e}_i \\ &= \bar{\mathbf{0}} + H\boldsymbol{e}_i = col_i \qquad\qquad \textit{coloana } i \textit{ a lui } H \end{aligned}$$

Pentru a intelege mai bine ultimul rand va trebui sa parcurgeti sectiunea despre matrice partitionate din acest caiet de seminar. Pe baza argumentarii matematice de mai sus, atunci cand avem o eroare de un singur bit, putem sa corectam eroarea in felul urmator: in mesajul receptionat $\boldsymbol{r}$ schimbam valoarea aflata pe pozitia a $i$-a (din 1 in 0 si din 0 in 1).

Avem si o alternativa la descrierea matriciala realizata pana acum, mai precis prin identificarea sirului $p_3p_2p_1$ al paritatilor putem sa detectam unde apare eroarea si sa o corectam. Sa presupunem ca vrem sa transmitem semnalul

$$\boldsymbol{d} = 1011$$

scris acum ca si vector linie, pe care il vizualizam ca un cuvant de lungime 4. La codare (realizata cu matricea G anterior), de fapt doar trebuie sa calculam paritatile si sa le adaugam pe pozitiile corespunzatoare intr-un nou "cuvant" de lungime 7. Evident $p_1 = d_1 + d_2 + d_4 = 0$, $p_2 = d_1 + d_3 + d_4 = 1$ si $p_3 = d_2 + d_3 + d_4 = 0$ si formam cuvantul de cod

$$\boldsymbol{c} = 0110011$$

Sa presupunem ca am receptionat

$$\boldsymbol{r} = 0100011$$

deci s-a scurs o eroare. Calculam din nou paritatile si pentru ce am receptionat obtinem $p_1 = 1, p_2 = 0$ si $p_3 = 0$. Deoarece valorile nu sunt toate nule, putem sa concluzionam ca s-a scurs o eroare. Mai mult, prin aceasta abordare putem localiza eroarea in felul urmator: suita $p_3p_2p_1 = 001$ reprezinta scrierea lui 1 in binar, deci pe pozitia $d_1$ avem eroarea. Schimband valoarea 0 de pe pozitia $d_1$, a lui $\boldsymbol{r}$, cu 1 se observa ca se obtine exact cuvantul de cod corect, cel transmis.

Din punct de vedere computational rationarea cu blocuri de informatie, la fel ca si in cazul matricelor, reprezinta un avantaj. In acelasi timp, descrierea matriciala ofera o structura clara intregului algoritm, evidentiind fenomene care par lipsite de logica in formularea nematriciala.

### Ce trebuie sa stii deja

In aceste prime doua seminarii unele cunostinte vor fi reluate, altele doar prezentate dintr-o alta perspectiva. Se presupune ca deja sunt cunoscute urmatoarele notiuni sau tehnici

- matrice, operatii algebrice cu matrice, minori, complementi algebrici
- calculul rangului, determinantilor, calculul inversei unei matrice inversabile, dezvoltarea unui determinant dupa o linie sau o coloana
- metode de rezolvare a sistemelor liniare

### Obiective

La finalul acestei unitati studentii vor fi capabili

$O_1$: sa identifice si sa exploateze rangul unei matrice
$O_2$: sa manevreze matrice partitionate
$O_3$: sa testeze liniar independenta/dependenta unor linii sau coloane
$O_4$: sa rezolve sisteme voluminoase de ecuatii liniare si sa interpreteze rezultatele obtinute

## Liniar independenta liniilor/coloanelor

Prin vector $n$-dimensional vom intelege momentan un $n$-tuplu format din $n$ numere reale, urmand ca in seminariile urmatoare sa studiem mai detaliat acest obiect si aplicatiile sale. Vom reprezenta un vector cu $n$ componente fie sub forma de vector linie

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

fie sub forma de vector coloana

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Astfel, orice matrice poate fi vizualizata ca fiind o colectie de vectori linie sau o colectie de vectori coloana

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\ell}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\ell}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\ell}_3 = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Daca ne gandim din perspectiva sistemelor de ecuatii liniare, fiecare linie a matricei sistemului reprezinta o ecuatie a sistemului. Este important ca fiecare ecuatie sa aduca informatii noi, care nu pot fi recuperate din informatiile inmagazinate in celelalte ecuatii. Mai jos vom presupune ca toti vectorii au acelasi numar de componente.

▶ o **combinatie liniara** a unor vectori linie/coloana $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ este o expresie de forma

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \boldsymbol{v}_k$$

unde coeficientii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sunt numere reale.

▶ o colectie $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ de vectori linie/coloana este **liniar dependenta** daca *unul dintre vectori este o combinatie liniara din ceilalti vectori.*

▶ o colectie de vectori linie/coloana $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ este **liniar independenta** daca *niciunul dintre vectori nu poate fi obtinut ca o combinatie liniara din ceilalti vectori.*

Este important sa remarcam ca liniar independenta unei colectii de vectori este echivalenta cu *proprietatea de identificare a coeficientilor*: $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ este **liniar independenta** daca si numai daca

▷ interpretarea geometrica va fi discutata in seminariile urmatoare

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \boldsymbol{v}_k = \beta_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \beta_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \beta_k \cdot \boldsymbol{v}_k$$

implica $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_k = \beta_k$.

Proprietatea de liniar dependenta/liniar independenta se refera la o multime de vectori chiar daca uneori prin abuz de limbaj vom spune ca vectorii sunt liniar independenti, referindu-ne la faptul ca multimea din care face parte are aceasta proprietate.

Vectorii linie $\boldsymbol{v} = (1 \ \ 2)$ si $\boldsymbol{w} = (1 \ \ -1)$ sunt liniar independenti pentru ca daca am avea $\alpha_1 \cdot \boldsymbol{v} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{w} = \beta_1 \cdot \boldsymbol{v} + \beta_2 \cdot \boldsymbol{w}$ prin inlocuire

$$\alpha_1 \cdot (1 \ \ 2) + \alpha_2 \cdot (1 \ \ -1) = \beta_1 \cdot (1 \ \ 2) + \beta_2 \cdot (1 \ \ -1)$$

gasim

$$(\alpha_1 + \alpha_2 \ \ 2\alpha_1 - \alpha_2) = (\beta_1 + \beta_2 \ \ 2\beta_1 - \beta_2)$$

care va conduce la $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ si $2\alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta_1 - \beta_2$ si in cele din urma obtinem $\alpha_1 = \beta_1$ si $\alpha_2 = \beta_2$. In schimb vectorii $\boldsymbol{v} = (1 \ \ 2)$ si $\boldsymbol{u} = (-2 \ \ -4)$ nu sunt liniar independenti deoarece din $\alpha_1 \cdot \boldsymbol{v} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{u} = \beta_1 \cdot \boldsymbol{v} + \beta_2 \cdot \boldsymbol{u}$ nu putem deduce decat ca $\alpha_1 + 2\beta_1 = \alpha_2 + 2\beta_2$.

Orice vector nenul este liniar independent iar doi vectori $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ sunt liniar independenti daca nu sunt proportionali, adica nu exista un numar real $\alpha$ astfel ca $\boldsymbol{v} = \alpha \cdot \boldsymbol{w}$ sau $\boldsymbol{w} = \alpha \cdot \boldsymbol{v}$. Cu cat sunt mai multi vectori intr-o colectie cu atat este mai greu pentru vectori sa nu depinda liniar de ceilalti vectori ai colectiei.

***Rangul unei matrice*** reprezinta numarul maxim de linii, sau coloane, liniar independente

Asadar rangul ofera indicii despre continutul informational al matricei. Cu cat rangul este mai mic cu atat mai saraca informational este matricea. Doar matricea nula are rangul 0. Matricele $\boldsymbol{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ de rang 1 sunt toate de forma

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}^t,$$

pemtru doi vectori coloana $\boldsymbol{u} \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ si $\boldsymbol{v} \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$. Acestea sunt usor de recunoscut pentru ca liniile si coloanele acestora sunt proportionale. In cazul matricelor de rang 1 se poate observa ca toate informatiile sale pot fi recuperate din $m + n$ elemente (componentele celor doi vectori coloana) in conditiile in care matricea poseda $m \times n$ elemente. Mai mult de atat, am putea spune ca o submatrice care livreaza rangul contine **esenta informationala** a intregii matrice. O astfel de submatrice nu este unica in general. Toate celelalte linii sau coloane pot fi obtinute din liniile si coloanele corespunzatoare acestei submatrice, prin combinatii liniare.

Plecand de la acesta interpretare a rangului deducem imediat o prima proprietate importanta. Rangul nu poate depasi minimul dintre numarul liniilor si numarul coloanelor

$$rang(\boldsymbol{A}) \leq min\{m, n\}$$

Ne intereseaza sa stim cum interactioneaza rangul cu operatiile elementare ale matricelor: inmultirea cu un numar real, transpusa, suma, produsul matricelor.

► prin inmultire cu un numar real nenul, nu se modifica rangul, deoarece informatiile liniilor nu sunt alterate

$$rang(c\boldsymbol{A}) = rang(\boldsymbol{A}), \qquad \forall c \neq 0.$$

► *rangul sumei* este mai mic decat suma rangurilor, un fel de inegalitatea triunghiului

$$rang(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leq rang(\boldsymbol{A}) + rang(\boldsymbol{B})$$

▷ problema este ca prin insumare cu o alta matrice $\boldsymbol{B}$ putem distruge toate informatiile inmagazinate in matricea $\boldsymbol{A}$, rangul sumei poate fi orice numar cuprins intre 0 si suma rangurilor

▷ daca inlocuim $\boldsymbol{A}$ cu $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ obtinem

$$rang(\boldsymbol{A}) - rang(\boldsymbol{B}) \leq rang(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$$

o estimare a rangului diferentei, utila doar cand rangurile sunt distincte

► *rangul produsului poate* fi estimat prin cea mai complexa informatie despre rang, si anume **inegalitatea lui Sylvester**

$$rang(\boldsymbol{A}) + rang(\boldsymbol{B}) - n \leq rang(\boldsymbol{AB}) \leq min\{rang(\boldsymbol{A}), rang(\boldsymbol{B})\}$$

pentru oricare doua matrice $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si $\boldsymbol{B} \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

► *rangul transpusei* este egal cu rangul matricei

$$rang(\boldsymbol{A}^t) = rang(\boldsymbol{A})$$

adica numarul maxim de linii liniar independente este egal cu numarul maxim de coloane liniar independente, ceea ce este evident conform noii interpretari data rangului unei matrice

► si rangul are o problema cu matricele care nu comuta, in general $rang(\boldsymbol{AB})$ nu este egal cu $rang(\boldsymbol{BA})$ daca $\boldsymbol{A}$ si $\boldsymbol{B}$ nu comuta

► o matrice $\boldsymbol{P} \in M_n(\mathbb{R})$ este inversabila daca si numai daca toate liniile/ coloanele ei sunt liniar independente, prin urmare

$$rang(\boldsymbol{P}) = n$$

altfel determinantul sau ar fi 0.

▶ inmultirea la dreapta sau la stanga cu o matrice inversabila nu schimba rangul unei matrice

$$rang(\boldsymbol{A}) = rang(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}) = rang(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})$$

pentru orice matrice $P$ inversabila

▷ putem deduce acest fenomen din inegalitatea Sylvester, inlocuind $\boldsymbol{B}$ cu $\boldsymbol{P}$ si tinand cont de $rang(\boldsymbol{B}) = n$

Avem o teorema de structura a matricelor de rang $k$, al carei continut este optional si este prezentata mai jos.

> O matrice $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ are rangul $k$ daca si numai daca exista doua seturi de $k$ vectori coloana liniar independenti $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$, respectiv $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, astfel ca
>
> $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1^t + \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2^t + \ldots + \boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{v}_k^t$$

Putem sa privim rangul unei matrice si dintr-o alta perspectiva, ca fiind pragul de la care toti minorii devin nuli. Vom defini **rangul minorilor** unei matrice $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ca fiind acel numar $k$ pentru care exista un minor nenul de ordin $k$ al matricei iar toti minorii de ordin mai mare decat $k$ sunt nuli. **Rangul matricei este egal cu rangul minorilor** si in acest fel se explica de ce matricele de rang 0 au toate elementele nule. Intrucat 0 este pragul de la care minorii devin nuli, orice minor de ordin 1 va fi nul iar un minor de ordin 1 este un determinant format cu un element al matricei. Prin urmare toate elementele matricei sunt nule.

## ▶ *Reguli de calcul si determinanti*

Inmultirea matricelor este distributiva fata de adunare, la dreapta si la stanga

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} \quad \text{si} \quad (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$$

Reamintim faptul ca inmultirea in general nu este comutativa. Doar matricele diagonale de tipul $c \cdot \boldsymbol{I}$ vor comuta cu orice matrice data si in consecinta

$$\boldsymbol{A}(c\boldsymbol{B}) = c\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \quad \forall\, c \in \mathbb{R},$$

o regula care poate fi interpretata si sub forma: coeficientii ies in fata. Preferam sa utilizam notatia internationala $adj(\boldsymbol{A})$ pentru adjuncta unei matrice patratice $\boldsymbol{A}$, legatura dintre cele doua fiind

$$adj(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot adj(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{I}$$

▷ $A^*$ este notatia pentru conjugata matricei transpuse

iar in cazul in care $det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ va implica formula de calcul a inversei

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{adj(\boldsymbol{A})}{\det(\boldsymbol{A})}$$

Inversa produsului a doua matrice se calculeaza cumva contraintutiv

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

datorita modului in care transpusa este obtinuta $(\boldsymbol{AB})^t = \boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t$.

Ca si caz particular al relatiei de mai sus, ar fi de retinut

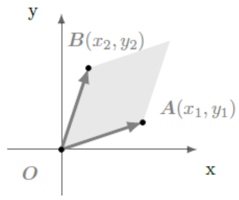
$$(c\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad \forall\, c \neq 0.$$

▷ am evidentiat doar reguli de calcul contraintuitive

Mai amintim si faptul ca transpusa inversei este inversa transpusei

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^t = \left(\boldsymbol{A}^t\right)^{-1}$$

Sa discutam putin despre **geometria matricelor**, urmand sa revenim in seminariile urmatoare asupra acestui subiect. Exista o *semnificatie geometrica a valorii returnate de determinantul unei matrice* patratice. Mai precis, **aria unui paralelogram** cu varfurile in $O(0,0)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ este modulul determinantului (aria trebuie sa fie pozitiva) format cu coordonatele punctelor, exceptand originea reperului

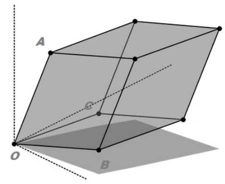



$$\mathcal{A}_{paralelogram} = \left| det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right| = |x_1y_2 - x_2y_1|$$

Vectorii $\overline{OA}$ si $\overline{OB}$ au coordonatele egale cu coordonatele punctelor $A$, respectiv $B$. Putem spune ca paralelogramul de mai sus este paralelogramul care *se sprijina* pe vectorii $\overline{OA}$ si $\overline{OB}$ si atunci intelegem de ce e nevoie de modul in formula de mai sus: aria nu se schimba daca modificam orientarea unui vector dar se schimba determinantul.

Orice punct din spatiu va avea trei coordonate iar **volumul paralelipipedului** cu varfuri in $O(0,0,0)$, $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ si $C(x_3,y_3,z_3)$, sau care se sprijina pe vectorii $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$, se obtine intr-un mod asemanator

$$\mathcal{V}_{paralelipiped} = \left| det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right|$$




Acest fenomen se repeta si pentru mai mult de trei dimensiuni.

`Cum sa privim un determinant ?`

Un instrument folosit pentru testarea liniar dependentei liniilor/ coloanelor? Un aparat utilizat pentru a masura arii sau volume ? Un tipar aparut in rezolvarea sistemelor liniare ? Este surprinzator faptul ca determinantii au aparut inaintea matricelor. Matematicianul Arthur Cayley nu a avut cum sa intuiasca la inceputurile teoriei matricelor faptul ca un secol mai tarziu matricele vor deveni modele matematice pentru varii fenomene, castigandu-si astfel un loc important in domeniul siintei si ingineriei. Am putea spune ca matricele si determinantii sunt portalurile noastre spre universuri multi-dimensionale.

Sa amintim ca in general

$$det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \neq det(\boldsymbol{A}) + det(\boldsymbol{B})$$

singura situatie cand determinantul interactioneaza bine cu o suma este oferita de **descompunerea unei singure linii/coloane**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + d_1 & c_2 + d_2 & c_3 + d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Este permis sa extragem **factorii de scalare ai liniilor/coloanelor**. Spunem factor de scalare (si nu factor de scara) pentru ca preferam sa vizualizam fiecare matrice ca pe o imagine.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \lambda \cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda \cdot a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Daca intreaga matrice este inmultita cu o constanta $\lambda$

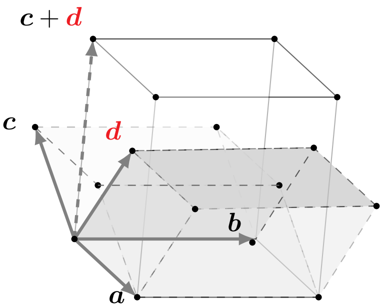
$$det(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda^n \cdot det(\boldsymbol{A}), \qquad pentru \;\; \boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R}),$$

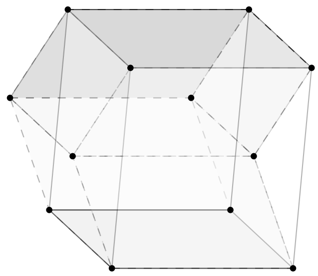
deoarece acum toate cele $n$ linii sunt scalate la fel.

Toate proprietatile anterioare pot fi argumentate geometric, pornind de la ideea ca un determinant evalueaza volume sau arii. Imaginati-va un dreptunghi, spre exemplu, ale carui laturi sunt marite de $\lambda = 2$ ori. Aria dreptunghiului va creste de $\lambda^2 = 4$ ori. Daca in schimb, marim laturile unui paralelipiped dreptunghic de $\lambda = 2$ ori, volumul sau va creste de $\lambda^3 = 8$ ori. Daca marim doar o singura latura de $\lambda = 2$ ori, volumul sau va creste doar de $\lambda = 2$ ori.

Daca vom considera vectorii $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ respectiv $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, d_3)$ in asa fel alesi incat determinantii formati cu acestia sa aiba acelasi semn, atunci putem forma paralelipipedele care se sprijina pe vectorii $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}$. Se poate observa grafic ca suma volumelor acestor paralelipipede este egala cu volumul paralelipipdedului care se sprijin pe vectorii $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$. Prin urmare avem o argumentare grafica a proprietatii de descompunere a unei linii/coloane

$$det(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{c}) + det(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{d}) = det(\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}).$$



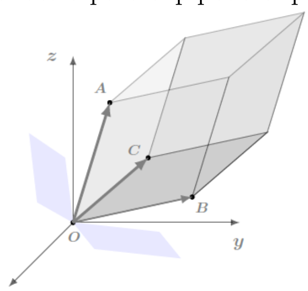



Dezvoltarea Laplace a unui determinant dupa o linie/coloana se realizeaza inmultind fiecare element al liniei/coloanei cu complementul sau algebric

$$det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = x_1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

`Ce semnifica cei trei minori din formula de dezvoltare dupa o linie ?`

Fiind determinanti ai unor matrice $2\times 2$ e de asteptat sa fie conectati la ariile unor paralelograme. Despre ce paralelograme este vorba ? Vom demonstra pe parcursul seminariilor urmatoare ca modulul acestor minori reprezinta de fapt ariile paralelogramelor care se formeaza proiectand o fata a paralelipipedului pe cele trei plane de coordonate.




In cazul dezvoltarii dupa prima linie, complementii algebrici afisati contin coordonatele punctelor $B$ si $C$. Prin urmare modulul lor reprezinta aria celor trei proiectii ale fetei $(OBC)$ pe "peretii" reperului de coordonate. Proiectia, umbra, pe planul Oxy va fi un paralelogram cu aria egala cu modulul determinantului $\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$. Analog proiectia pe "peretele" Oxz va fi un paralelogram cu aria egala cu modulul determinantului $\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}$, iar modulul lui $\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ are legatura cu proiectia pe Oyz care nu e sesizabila in desen.

*Intelegerea nu este secventiala. Suntem deseori obligati sa lasam spatii libere pe care le vom umple mai tarziu.*

Scrisul este secvential, incepem din partea stanga si ne deplasam inspre dreapta fara a lasa goluri, cand scriem un cuvant. Intelegerea noastra asupra lucrurilor este total diferita. Oricat de motivati suntem vor aparea goluri in cunoastere, goluri care vor fi umplute peste o zi, o luna, un an, sau niciodata. O parte dintre spatiile libere aparute acum in intelegerea interpretarii geometrice a determinantilor vor fi completate dupa parcurgerea capitolului urmator, o alta parte dupa parcurgerea capitolului trei... sau niciodata.

### ▶ *Matrice partitionate*

In cateva studii faimoase [Chase, Simon-Perception in chess], [DeGroot-Perception and memory versus thought], efectuate pe jucatori de sah de diferite nivele, printre care si cel de mare maestru, s-a observat ca marii maestrii nu cerceteaza mai multe mutari decat cei de nivel mai scazut, ci elimina mutari neesentiale bazandu-se pe experienta, vezi si [Robertson-Problem solving]. In acelasi timp, cand sarcina era sa refaca din memorie o pozitie aparuta intr-un meci si aratata pe o tabla, marii maestrii aveau o acuratete medie mult mai buna, concluzia fiind ca marii maestrii *"codificau" configuratii mai mari de piese*. Intr-un alt experiment, in care tabla era tot timpul vizibila si apoi pozitia trebuia refacuta pe o tabla goala, s-a urmarit miscarea ochilor si s-a observat ca marii maestrii memorau mai multe piese per privire aruncata decat cei de nivel mai scazut. In mod surprinzator si in alte domenii s-a ajuns la concluzii asemanatoare, marii performeri gandesc folosind **chunks (blocuri) de informatii** si aceste blocuri sunt cu atat mai mari cu cat nivelul de expertiza atins este mai mare.

Cuvintele sunt organizate in blocuri de informatie in mintea noastra, deja le recunoastem dupa forma, putem citi corect urmatorul text

0D474 1N7R-0 21 D3 V4R4 574734M P3 PL4J4

Intrucat suntem *experti in a citi*, mintea noastra recunoaste tipare si poate lucra destul de rapid cu blocuri mari de litere. Putem chiar inlocui literele cu anumite cifre si tot vom recunoaste tiparul. Un copil, care acum invata tainele literelor, nu va avea aceasta abilitate si nici nu va putea sa inteleaga textul afisat.

In TRIZ, teoria inventicii si inovatiei, al doilea dintre cele 40 de principii enuntate este **2. Taking out (extragere)**. In conformitate cu cele scrise mai sus am formulat acest principiu sub forma unei strategii de problem-solving.

▷ theory of inventive problem-solving (TIPS)

*Invata sa manevrezi blocuri de informatie. Identifica si extrage tipare care au potential de reutilizare intr-un alt context.*

Acest principiu atrage atentia asupra a doua aspecte: importanta rationarii cu blocuri de informatie, nu doar cu micile piese ale puzzle-ului, dar si importanta identificarii unor tipare care pot fi extrase si reutilizate. Atunci cand efectuam inmultirea $138 \cdot 121$ nu adunam repetat pe 138 sau pe 121 (piesele mici ale puzzle-ului) ci manevram blocuri intregi de informatie dupa o metoda invatata in clasele primare. La originea acestor tehnici se afla partitionarile

$$138 = 100 + 30 + 8 \quad \text{respectiv} \quad 121 = 100 + 20 + 1$$

In acest mod reusim sa afisam rezultatul in cateva secunde. Sunetele pasarilor rapitoare sunt inregistrate si folosite de catre agricultori pentru a proteja livezile de ciresi de grauri. Un exemplu de extragere a unui tipar (bloc de informatie) si de reutilizare intr-un alt context.

Algebra ne ofera oportunitatea de a rationa folosind blocuri de informatie, prin intermediul teoriei matricelor partitionate, numite si matrice bloc. Pana acum am vizualizat o matrice ca pe o colectie de vectori linie sau coloana, de acum ne vom concentra pe posibilitatea de a partitiona matricea in blocuri de elemente de diverse marimi si forme. In continuare vom partitiona o matrice $\boldsymbol{M}$ sub forma

▷ pentru alte partitionari posibile ideea de baza este aceeasi

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

unde $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ vor fi submatrice (blocuri) de diferite marimi. Spre exemplu

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{poate fi vizualizata ca} \quad \boldsymbol{M} = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ \hdashline -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

pentru $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$ si $\boldsymbol{D} = (1)$.

Transpusa unei matrice bloc

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \quad \text{este} \quad \boldsymbol{M}^t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^t & \boldsymbol{C}^t \\ \boldsymbol{B}^t & \boldsymbol{D}^t \end{pmatrix}.$$

Cand doua matrice

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix}$$

sunt in asa fel partitionate incat blocurile corespunzatoare sunt compatibile la inmultire atunci produsul $\boldsymbol{MN}$ se calculeaza in cel mai natural mod, cu mare atentie la faptul ca matricele in general nu comuta

$$\boldsymbol{MN} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{BZ} & \boldsymbol{AY} + \boldsymbol{BW} \\ \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{DZ} & \boldsymbol{CY} + \boldsymbol{DW} \end{pmatrix}$$

adica $\boldsymbol{AX}$ nu poate fi inlocuita cu $\boldsymbol{XA}$ ca si in cazul numerelor reale.

Sunt cateva cazuri particulare care decurg din aceasta regula generala si merita atentia noastra. Vom considera ca $\boldsymbol{M}$ si $\boldsymbol{N}$ sunt matrice patrate de ordin $n$. Matricea $\boldsymbol{M}$ este vizualizata ca o colectie de vectori linie iar $\boldsymbol{N}$ ca o colectie de vectori coloana

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell}_1 \\ \boldsymbol{\ell}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\ell}_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \vdots \boldsymbol{c}_2 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{c}_n \end{pmatrix}$$

• produsul $\boldsymbol{MN}$ poate fi calculat din perspectiva coloanelor

$$\boldsymbol{MN} = \left(\boldsymbol{Mc}_1 \vdots \boldsymbol{Mc}_2 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{Mc}_n\right)$$

adica

$$\text{coloana } i \text{ a lui } \boldsymbol{MN} = \boldsymbol{M} \cdot (\text{coloana } i \text{ a lui } \boldsymbol{N})$$

• daca privim din perspectiva liniilor

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{\ell}_2 \cdot \boldsymbol{N} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\ell}_n \cdot \boldsymbol{N} \end{pmatrix}$$

$$\text{linia } i \text{ a lui } \boldsymbol{MN} = (\text{linia } i \text{ a lui } \boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{N}$$

• daca inmultim pe $\boldsymbol{N}$ cu un vector coloana, descoperim ca rezultatul este o *combinatie liniara din coloanele lui* $\boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{N} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{c}_1 \vdots \boldsymbol{c}_2 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{c}_n\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \boldsymbol{c}_1 + x_2 \cdot \boldsymbol{c}_2 + \ldots x_n \cdot \boldsymbol{c}_n$$

• daca inmultim pe $\boldsymbol{M}$ cu $\boldsymbol{N}$, folosind tehnica matricelor bloc, redescoperim cunoscuta regula: *liniile se inmultesc cu coloanele*

$$\boldsymbol{MN} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell}_1 \\ \boldsymbol{\ell}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\ell}_n \end{pmatrix} \cdot \left(\boldsymbol{c}_1 \vdots \boldsymbol{c}_2 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{c}_n\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \boldsymbol{c}_2 & \ldots & \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \boldsymbol{c}_n \\ \boldsymbol{\ell}_2 \cdot \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{\ell}_2 \cdot \boldsymbol{c}_2 & \ldots & \boldsymbol{\ell}_2 \cdot \boldsymbol{c}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\ell}_n \cdot \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{\ell}_n \cdot \boldsymbol{c}_2 & \ldots & \boldsymbol{\ell}_n \cdot \boldsymbol{c}_n \end{pmatrix}$$

adica elementul de pe pozitia $ij$ se obtine inmultind linia $i$ a primei matrice cu coloana $j$ a celei de a doua.

• in schimb daca inmultim pe $\boldsymbol{N}$ cu $\boldsymbol{M}$ rezultatul este putin surprinzator

$$\boldsymbol{NM} = \left(\boldsymbol{c}_1 \vdots \boldsymbol{c}_2 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{c}_n\right) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell}_1 \\ \boldsymbol{\ell}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\ell}_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{c}_1 \cdot \boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{c}_2 \cdot \boldsymbol{\ell}_2 + \ldots \boldsymbol{c}_n \cdot \boldsymbol{\ell}_n$$

insa aminteste de modul in care elementele unei linii se inmutesc cu elementele unei coloane, doar ca acum inmultim blocuri de elemente

• daca

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \text{pozitia } i$$

este vectorul coloana cu elementul 1 pe pozitia a $i$-a si in rest zerouri atunci elementul $m_{ij}$ de pe pozitia $ij$ corespunzator matricei $\boldsymbol{M}$ se afla prin

$$m_{ij} = {\boldsymbol{e}_i}^t \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{e}_j$$

• de remarcat ca vectorii coloana $\boldsymbol{e}_i$ sunt coloanele matricei identitate iar cei linie $\boldsymbol{e}_i^t$ sunt liniile acesteia

▷ matricea identitate

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{I} = \left( \boldsymbol{e}_1 \vdots \boldsymbol{e}_2 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{e}_n \right) \qquad \text{sau} \qquad \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \boldsymbol{e}_2^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix}$$

prin urmare linia a i-a a lui $\boldsymbol{M}$ se obtine prin inmultire cu $\boldsymbol{e}_i^t$ iar coloana a i-a prin inmultire cu $\boldsymbol{e}_i$

$$\boldsymbol{\ell}_i = {\boldsymbol{e}_i}^t \cdot \boldsymbol{M} \qquad \boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{e}_i$$

Pentru o matrice $\boldsymbol{M}$ partitionata ca la inceputul sectiunii ne intereseaza sa calculam determinantul sau folosind determinantii submatricelor continute

• daca $\boldsymbol{A}$ este inversabila avem

$$det(\boldsymbol{M}) = det\boldsymbol{A} \cdot det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$$

iar daca $\boldsymbol{D}$ este inversabila

$$det(\boldsymbol{M}) = det\boldsymbol{D} \cdot det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C})$$

• daca $\boldsymbol{A}$ si $\boldsymbol{C}$ comuta atunci

$$det(\boldsymbol{M}) = det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B})$$

▷ restul situatiilor se reduc la acestea prin considerarea transpusei $\boldsymbol{M}^t$

adica un fel de recuperare a unui rezultat clasic

• daca $\boldsymbol{C}$ si $\boldsymbol{D}$ comuta atunci

$$det(\boldsymbol{M}) = det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$$

## ▶ *Sisteme de ecuatii liniare*

Vom exemplifica intregul algoritm de rezolvare a sistemelor liniare pentru un sistem de forma

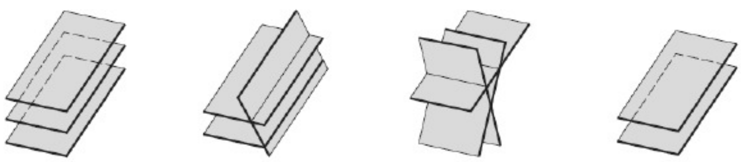
$$\begin{cases} x - y + \ z & = \ \ 1 \\ 2x - y + \ 2z & = -1\,, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}. \\ x - 2y + \ z & = \ \ 4 \end{cases}$$

care in forma comprimata matriciala se rescrie ca

$$\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}$$

unde $\boldsymbol{M}$ este matricea coeficientilor, $\bar{\boldsymbol{x}}$ este vectorul coloana al necunoscutelor si $\boldsymbol{c}$ este vectorul coloana al termenilor liberi.

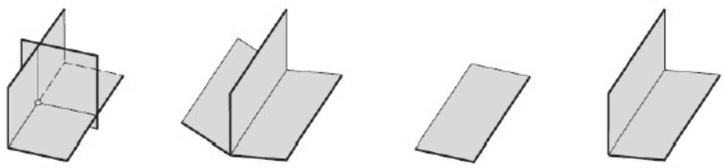
Pentru inceput este util sa privim sistemele de ecuatii liniare din *perspectiva geometrica*. In cazul de fata fiecare ecuatie reprezinta un plan, deoarece avem trei necunoscute. In cazul in care am fi avut doar doua necunoscute fiecare ecuatie reprezenta o dreapta. Pentru $n \geq 4$ necunoscute, fiecare ecuatie reprezinta un hiperplan, generalizarea notiunilor de plan si dreapta. A rezolva sistemul inseamna a afla daca planele corespunzatoare ecuatiilor au puncte comune. Cu cat sunt mai multe ecuatii in sistem cu atat este mai greu pentru obiectele geometrice reprezentate de acestea sa aiba puncte comune. Daca reusim sa intelegem situatia in care ecuatiile au trei necunoscute, atunci va fi destul de clar de ce unele sisteme au o infinitate de solutii (compatibil nedeterminate), altele nu admit solutii (incompatibile) sau altele admit o unica solutie (compatibil unic determinate).



In toate cazurile de mai sus cele trei plane nu au puncte comune. Eventual doar doua cate doua admit puncte comune. Toate situatiile descrise corespund unor *sisteme incompatibile*.

`De unde provine incompatibilitatea ?`

Spre exemplu, daca luam in considerare primul desen, prima ecuatie afirma ca toate solutiile sunt puncte situate in primul plan, a doua ecuatie afirma ca toate solutiile sunt puncte situate in al doilea plan. Insa cele doua plane nu se intersecteaza, deci deja se remarca o contradictie intre informatiile codificate in ecuatiile sistemului.



In situatii prezentate mai sus avem puncte comune ale celor trei plane (imaginile ecuatiilor). In primul caz observam existenta unui unic punct comun (sistem compatibil unic determinat), este vorba despre cazul corespunzator situatiei

$\Delta \neq 0$. In al doilea si patrulea caz avem o infinitate de puncte comune, toate situate pe o dreapta (sistem compatibil simplu nedeterminat). In cazul al treilea avem o infinitate de puncte comune, toate situate intr-un plan (sistem compatibil dublu nedeterminat). O astfel de abordare geometrica esueaza cand numarul necunoscutelor creste, doarece omul nu percepe decat trei dimensiuni. Este greu de vizualizat un hiperplan intr-un spatiu 4-dimensional, spre exemplu.

Sunt **doua fenomene** de care trebuie sa tinem cont in rezolvarea unui sistem de ecuatii liniare. Este posibil ca unele informatii sa se repete, adica sa apara *ecuatii redundante*, care pot fi deduse din celelalte ecuatii existente. In acelasi timp, deoarece coeficientii ecuatiilor sunt mai degraba aproximati in practica, exista sansa sa apara *ecuatii care se contrazic.*

▷ redundant=inutil

Cele doua probleme sunt abordate in felul urmator: intai se inmagazineaza toate informatiile despre sistem in **matricea extinsa**

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \left( \boldsymbol{M} \vdots \boldsymbol{c} \right)$$

unde $M$ este **matricea sistemului**, formata cu coeficientii necunoscutelor, si $\boldsymbol{c}$ este matricea coloana a termenilor liberi.

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 2 & \vdots & -1 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

**?** `Cum identificam ecuatiile redundante ?`

- se determina rangul matricei sistemului si o submatrice care livreaza rangul
- submatricea care livreaza rangul contine *esenta informationala* a sistemului
- ecuatiile corespunzatoare liniilor care nu apartin acestei submatrice sunt *ecuatii redundante* si vor fi eliminate
- ecuatiile corespunzatoare liniilor acestei submatrice vor forma *sistemul redus* care ulterior va da solutiile sistemului (atunci cand ele exista)
- necunoscutele ai caror coeficienti se afla in submatricea respectiva vor fi numite *necunoscute principale*
- necunoscutele ai caror coeficienti nu se afla in submatricea respectiva devin *necunoscute secundare* sau *variabile libere* si in general se renoteaza cu litere grecesti $\alpha, \beta, \gamma$

In cazul sistemului considerat nu este clar daca fiecare ecuatie aduce ceva nou sau daca unele ecuatii contin informatii ce pot fi recuperate din celelalte ecuatii. Vom determina rangul matricei sistemului $rang(\boldsymbol{M})$. Folosim tehnica lui Rouche, cu bordarea unor minori (determinanti) nenuli gasiti la pasul anterior

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \\ \boxed{2} & \boxed{-1} & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Minorul $|1|$ format cu elementul de pe pozitia 11 este evident nenul, deci

$$rang(\boldsymbol{M}) \geq 1$$

deoarece am gasit o submatrice de ordin 1 cu determinantul nenul. Bordam minorul gasit, adaugand elemente de pe liniile sau coloanele ramase. Putem de exemplu sa formam minorul $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, care fiind nenul implica

$$rang(\boldsymbol{M}) \geq 2$$

continuam apoi si obsevam ca putem forma un singur minor de ordin trei prin bordarea celui anterior

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Prin urmare

$$rang(\boldsymbol{M}) \neq 3.$$

In concluzie, $rang(\boldsymbol{M}) = 2$ si o submatrice care livreaza rangul este $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Dupa cum am declarat anterior aceasta matrice contine esenta informationala a sistemului. Pornind de la informatiile codificate in aceasta putem afirma ca

• ecuatia $x - 2y + z = 4$ este redundanta pentru ca ai sai coeficienti nu se regasesc in submatricea care livreaza rangul

• primele doua ecuatii sunt cele care conteaza

• necunoscuta $z$ este variabila secundara, pentru ai sai coeficienti nu se afla printre elementele submatricei, deci notam $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

• necunoscutele $x, y$ vor fi considerate de acum necunoscute principale

• sistemul redus este

$$\begin{cases} x - y + z &= 1 \\ 2x - y + 2z &= -1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x - y &= 1 - \alpha \\ 2x - y &= -1 - 2\alpha \end{cases}$$

`Cum testam daca exista contradictii ?`

• chiar daca am reusit sa identificam sistemul redus si ecuatiile redundante este posibil sa existe contradictii intre ecuatiile sistemului

• un sistem in care unele ecuatii se contrazic va fi numit *sistem incompatibil*

• pentru a testa daca sistemul este compatibil (admite solutii) putem utiliza teorema Kronecker-Capelli care afirma ca

$$\text{sistemul e compatibil} \quad \Longleftrightarrow \quad rang(\boldsymbol{M}) = rang(\overline{\boldsymbol{M}})$$

si poate fi redusa la forma mult mai practica

$$\text{sistemul e compatibil} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{toti minorii caracteristici sunt nuli}$$

In cazul nostru, daca tinem cont de definitia unui minor caracteristic (acel minor format din submatricea care livreaza rangul si elemente din coloana termenilor liberi) observam ca se poate forma un singur minor caracteristic

$$m_c = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \\ \boxed{2} & \boxed{-1} & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

deci conform Kronecker-Capelli sistemul este compatibil. Prin urmare putem trece **abia acum** la rezolvarea sistemului redus gasit

$$\begin{cases} x - y &= 1 - \alpha \\ 2x - y &= -1 - 2\alpha \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad x = -\alpha - 2, \; y = -3, \; z = \alpha$$

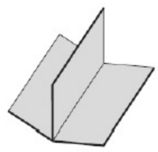
si multimea solutiilor va fi

$$S = \{(-\alpha - 2, -3, \alpha) \;:\; \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Sa analizam putin rolul necunoscutelor secundare (variabilelor libere) in cazul unui sistem compatibil. Numarul necunoscutelor secundare ofera informatii despre interpretarea geometrica a multimii solutiilor:

• spre exemplu, daca avem o singura necunoscuta secundara, toate solutiile sistemului sunt coordonate ale unor puncte *situate pe aceeasi dreapta*

• daca avem doua necunoscute secundare, toate solutiile sistemului sunt coordonate ale unor puncte *situate in acelasi plan*, etc.



Vom discuta despre drepte si plane in $3D$ in capitolele urmatoare. In cazul investigat, avand o singura variabila secundara, toate solutiile pot fi interpretate ca fiind puncte situate pe o dreapta. De fapt, daca am reprezenta grafic cele trei ecuatii ale sistemului, am obtine configuratia alaturata, in care coordonatele tuturor punctelor situate pe dreapta de intersectie a planelor reprezinta solutiile sistemului.

Alta perspectiva asupra teoremei Kronecker-Capelli

• pentru un sistem cu $m$ ecuatii si $n$ necunoscute

$$\boldsymbol{M} \cdot \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{M} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \; \boldsymbol{c} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$$

- ▷ inmagazineaza informatiile in matricea extinsa a sistemului $\left(\boldsymbol{M} \,\vdots\, \boldsymbol{c}\right)$
- ▷ daca $rang\ \boldsymbol{M} \neq rang\ \left(\boldsymbol{M} \,\vdots\, \boldsymbol{c}\right)$, atunci sistemul este incompatibil
- ▷ daca $rang\ \boldsymbol{M} = rang\ \left(\boldsymbol{M} \,\vdots\, \boldsymbol{c}\right) = n$, atunci sistemul este compatibil si are solutie unica
- ▷ daca $rang\ \boldsymbol{M} = rang\ (\boldsymbol{M} \,\vdots\, \boldsymbol{c}) = k < n$, atunci sistemul este compatibil nedeterminat si solutiile depind de $n - k$ parametri (numiti variabile libere sau necunoscute secundare)

### ▶ *Studiul sistemelor voluminoase*

Pentru sistem cu un numar mare de ecutatii este destul de incomod sa utilizam determinanti in rezolvarea acestora. Prin urmare avem o abordare adaptata situatiei bazata pe transformari elementare efectuate liniilor. Vom discuta mai jos *tehnica Gauss* de rezolvare a sistemelor liniare voluminoase, pentru sistemul

$$\begin{cases} y + z - 2t + 3 &= 0 \\ x + 2y - 2 - z &= 0 \\ 2x + 4y + z - 3t &= -2 \\ x - 4y - 7z - t &= -19 \end{cases}$$

In principiu Gauss si-a imaginat un caz particular in care sistemele sunt usor de rezolvat, o tehnica obisnuita de problem-solving. Acest caz corespunde situatiei in care matricea extinsa a sistemului are doar zerouri sub diagonala principala

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & \vdots & * \\ 0 & * & * & * & \vdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \vdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \vdots & * \end{pmatrix}$$

Orice sistem poate fi adus la forma superior triunghiulara de mai sus printr-o combinatie de **transformari elementare asupra liniilor**

**1.** schimbarea a doua linii intre ele

**2.** inmultirea unei linii cu un numar real nenul

**3.** adunarea unei linii inmultite cu un numar la o alta linie

Intai aducem sistemul la *forma standard* in care necunoscutele sunt plasate in stanga semnului egal iar termenii liberi in dreapta

$$\begin{cases} y + z - 2t & = & -3 \\ x + 2y - z & = & 2 \\ 2x + 4y + z - 3t & = & -2 \\ x - 4y - 7z - t & = & -19 \end{cases}$$

Vom inmagazina toate informatiile oferite de sistem in matricea extinsa a sistemului

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19 \end{pmatrix}$$

Algoritmul lui Gauss incepe prin obtinerea valorii 1 pe pozitia 11 si vom numi aceast element **pivot**, intrucat vom ”pivota” in jurul lui. Daca nu exista niciun element 1 pe prima coloana, putem pur si simplu sa impartim o linie la valoarea nenula situata pe prima pozitie. Putem in acelasi timp sa schimbam pozitiile a doua linii pentru a obtine un pivot 1 in pozitia dorita.

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19 \end{pmatrix}$$

*schimba $L_1$ cu $L_2$ pentru ca prima coloana sa aiba 1 pe diagonala principala a matricei*

Urmatorul pas consta in obtinerea de zerouri sub **pivotul** obtinut. Vom scadea sau aduna, la celelalte linii, linia intai (linia pivotului) inmultita eventual cu o constanta. Este avantajos sa utilizezi o linie pe care ai obtinut valoarea 1.

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & \vdots & -21 \end{pmatrix}$$

*realizeaza operatii elementare pe linii astfel ca prima coloana sa contina doar* 0*-uri sub pivotul* 1

Trecem acum la a doua coloana, unde observam ca deja exista un 1 pe diagonala principala. Avand pivotul perfect, vom incerca sa obtinem zerouri sub el folosindu-ne de linia pivotului, aici fiind vorba de linia a doua.

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \rightarrow L_4 + 6L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -39 \end{pmatrix}$$

*singurul element nenul de sub pivot este anihilat rapid printr-o transformare elementara, folosind* $L_2$

Pe urmatoarea coloana, nu avem un element 1 pe diagonala principala. De retinut ca de fiecare data nu folosim decat linia pivotului sau linii aflate sub aceasta. Daca am folosi linii situate deasupra pivotului, am risipi munca depusa riscand sa generam valori nenule acolo unde acum avem zerouri. In acest moment avem nevoie de valoarea 1 in pozitia 33 si singurele linii pe care le putem manevra sunt linia a treia si a patra. Singurul mod in care putem obtine pivotul dorit este sa impartim linia a treia la elementul situat pe diagonala principala, anume 3.

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \rightarrow \frac{1}{3}L_3 \\ L_4 \rightarrow -\frac{1}{13}L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

*obtinem un pivot prin impartire la* 3 *si altul pe linia urmatoare prin impartire la* $-13$

Se poate intampla ca pe o anumita coloana sa nu putem obtine valoarea 1 pe diagonala principala si atunci valoarea va fi 0 atat pe pozitia de pe diagonala principala cat si sub aceasta. Matricea de **forma scara** obtinuta aici corespunde sistemului

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 2 \\ \quad y + z - 2t & = -3 \\ \qquad z - t & = -2 \\ \qquad\quad t & = 3 \end{cases}$$

**Numarul pivotilor** obtinuti in forma scara este egal cu rangul matricei sistemului. Ideea de baza a metodei Gauss este ca transformarile elementare efectuate asupra liniilor conduc la obtinerea unui sistem echivalent cu cel dat. Putem spune ca metoda Gauss este un fel de *metoda reducerii generalizata*. Sistemul se rezolva de jos in sus si se obtine solutia unica $x = -1, y = 2, z = 1$ si $t = 3$.

Interpretarea rezultatelor reprezinta singura dificultate tehnica a acestei metode. Va trebui sa invatam cum sa ”citim” informatiile obtinute cu ajutorul metodei Gauss. Oferim in continuare cateva indicii.

• daca o linie intreaga este formata din 0-uri dar termenul liber este nenul atunci sistemul este incompatibil

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

*aceasta forma scara contine o ultima linie care conduce la ecuatia $0 = 4$, **contradictie**, deci sistemul este incompatibil*

• prezenta unei linii formata in totalitate din 0-uri semnaleaza **redundanta unor informatii** si conduce in general la necesitatea de a introduce variabile secundare pentru a fi in stare sa rezolvam sistemul

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

*daca notam necunoscutele cu $x, y, z, u, v, w$ se observa din start ca avem insuficiente informatii si apoi mai pierdem una in ultima linie*

Linia a treia ne livreaza informatia $w = 2$ iar linia a doua reprezinta ecuatia $z+2u = 0$ adica $z = -2u$ si apare necesitatea de a nota $u = \alpha$, asadar $z = -2\alpha$. Despre $v$ nu avem in acest moment nicio informatie. Prima linie se traduce prin $x + 3y + u + 2v = 0$ si tot ce putem face este sa extragem pe $x$ pentru a obtine

$$x = -3y - u - 2v = -3y - \alpha - 2v$$

apoi sa notam $v = \beta$ si $y = \gamma$. Deci in final gasim

$$\begin{cases} x = -3\gamma - \alpha - 2\beta \\ y = \gamma \\ z = -2\alpha \\ u = \alpha \\ v = \beta \\ w = 2 \end{cases}$$

Solutia exprimata mai sus poate varia ca forma. In ecuatia

$$x + 3y + u + 2v = 0$$

avem libertatea de a alege variabila pe care o vom extrage si implicit variabilele care vor capata un rol secundar. De exemplu $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}u - \frac{2}{3}v$ si se impune sa notam $x = \gamma, v = \beta$.

Folosind principiul

*"Cand vezi o mutare buna... cauta alta mai buna." - Emanuel Lasker* ▷ rafineaza ideile bune

ideea de reducere la forma scara poate fi imbunatatita si transformata intr-o strategie de reducere la **forma scara redusa** (**r**educed **r**ow **e**chelon **f**orm). Comanda **rref()** in Matlab returneaza aceasta forma daca introducem matricea dorita. O matrice este in forma scara redusa daca are urmatoarele proprietati:

**1.** daca o linie nu contine doar zerouri, atunci primul element nenul este 1 si va fi numit pivot

**2.** liniile care contin doar zerouri sunt grupate la urma

**3.** daca doua linii succesive nu contin doar zerouri atunci pivotul celei de-a doua linii se afla inspre dreapta pivotului de pe linia de deasupra

**4.** fiecare coloana care contine un pivot are restul elementelor zero

Primele trei proprietati corespund formei scara. Forma scara redusa este unica, spre deosebire de forma scara care nu este unica. Urmatoarele matrice reprezinta exemple de matrice in forma scara redusa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

***Lista de formule*** corespunzatoare acestui capitol poate fi accesata mai jos si o puteti folosi pentru ghidare in sectiunile urmatoare.

## Probleme rezolvate si discutate

**Problema 1**

Calculati rangul matricei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

si studiati liniar independenta liniilor sale.

*Solutie*: *Prin aceasta problema dorim sa evidentiam legatura dintre pivoti si rang, dar si conexiunea cu liniar independenta vectorilor.*

Daca folosim metoda Rouché de calcul a rangului. Se observa ca

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

deci $rang(\boldsymbol{A}) \geq 2$. Bordam minorul gasit cu alte elemente ale matricei. Sunt trei minori de ordin 3 care se pot forma prin bordarea acestuia.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \boxed{3} & 1 & 2 \\ -1 & 1 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{-4} & \boxed{1} & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \boxed{1} & 2 \\ -1 & 1 & 1 & \boxed{0} & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{-4} & 1 & \boxed{1} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & \boxed{2} \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{-4} & 1 & 1 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

Calculand cei trei determinanti obtinuti, observam ca toti vor fi 0, prin urmare $rang(\boldsymbol{A}) \neq 3$. In concluzie $rang(\boldsymbol{A}) = 2$ si o submatrice care livreaza rangul este $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Daca am fi inceput cu minorul nenul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

spre exemplu, am fi obtinut intr-un mod asemanator $rang(\boldsymbol{A}) = 2$ doar ca acum submatricea care livreaza rangul va fi diferita.

Plecand de la definitia rangului putem trage urmatoarele concluzii: colectia formata din primele doua linii este liniar independenta iar a treia linie depinde liniar de celelalte doua. Evident, colectia formata cu toate liniile va fi liniar dependenta. Daca utilizam cealalata submatrice putem spune ca ultimele doua linii formeaza o colectie liniar independenta si prima linie depinde liniar de acestea. Practic, in acest caz, oricare doua linii formeaza o colectie liniar independenta si linia ramasa va depinde liniar de acestea. Pornind de la modul in care am definit rangul unei matrice putem sa obtinem un criteriu de studiu a liniar independentei unei colectii de vectori.

> O colectie formata din $k$ vectori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ este liniar independenta daca si numai daca matricea formata cu acesti vectori are rangul $k$
>
> $$rang\left(\boldsymbol{v}_1 \vdots \boldsymbol{v}_2 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{v}_k\right) = k = nr.\ vectori$$

In matricea de mai sus am asezat **coordonatele vectorilor pe coloane** dar la fel de bine putem sa le asezam pe linii. Putem studia rangul si liniar independenta liniilor folosind transformari elementare, prin aducere la forma scara sau forma scara redusa. Vom aduce matricea data la forma scara.

Dupa transformarile elementare $L_2 \to L_2 + L_1$ si $L_3 \to L_3 - 3L_1$ obtinem matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -8 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

care are acelasi rang cu matricea $\boldsymbol{A}$, deoarece o transformare elementara nu modifica rangul. Apoi dupa transformarea $L_3 \to L_3 + 2L_2$ ajungem la forma scara

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

▷ prin pivot intelegem aici un element nenul situat pe diagonala principala in forma scara

In acelasi timp, am putea spune ca *pivotii detecteaza colectia liniar independenta maximala*. Liniile fara pivoti vor depinde liniar de cele din colectia liniar independenta maximala, care este formata din toate liniile cu pivoti. Deci primele doua linii sunt liniar independente, a treia depinde liniar de prima si $rang(\boldsymbol{A})$=nr. pivoti=2.

Daca ar fi avut mai multe linii decat coloane, am fi aplicat tehnica cu pivoti pentru $\boldsymbol{A}^t$ care va avea mai multe coloane decat linii si sunt mai putine calcule de facut. Nu uitati ca $rang(\boldsymbol{A}) = rang(A^t)$.

**Problema 2 (Algoritm Gauss pentru aflarea inversei)**

Aflati inversa matricei pintr-o metoda Gauss

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

*Solutie: Prin aceasta problema vrem sa oferim o noua aplicatie a transformarilor elementare asupra liniilor.*

Vom aplica o tehnica Gauss-Jordan de aflare a inversei, prin transformari elementare asupra liniilor. Vom atasa matricea identitate $\boldsymbol{I}$ matricei date si vom forma o noua matrice

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 7 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vom aplica transformari elementare asupra liniilor intregii matrice, nu doar asupra lui $\boldsymbol{A}$. Algoritmul are doi pasi: intai vom incerca sa obtinem o matrice superior triunghiulara in locul matricei $\boldsymbol{A}$, iar apoi vom folosi pivotii pentru a forma zerouri si deasupra diagonalei principale. In acest fel in stanga se va forma matricea identitate si in dreapta isi va face aparitia matricea inversa

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I}) \quad \rightsquigarrow \quad (\boldsymbol{I} \vdots \boldsymbol{A}^{-1})$$

Va fi ca un truc de magie, in care iepurele tinut de urechi si introdus in joben isi va face aparitia in alta parte a salii, iesind dintr-un alt joben tinut de picioare. Ar fi de remarcat aici ca pentru o matrice inversabila nu vor exista elemente nenule pe diagonala principala. Daca nu putem obtine un element nenul pe o pozitie a diagonalei principale, atunci matricea nu e inversabila, trucul de magie nu va functiona.

Identificam rapid primul pivot care are valoarea 2. Deoarece restul elementelor de pe coloana sa sunt proportionale cu 2, putem lucra cu acesta, fara sa mai impartim intreaga linie intai la 2. Vom forma zerouri sub pivot prin transformarile evidente $L_2 \to L_2 - 2L_1$ si $L_3 \to L_3 + L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Remarcam aparitia norocoasa a lui 1 pe urmatoarea pozitie de pe diagonala principala. Formam un zero sub acest pivot.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Iar acum impartim la 4 ultima linie si la 2 prima.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{4}L_3]{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

Acum trecem la faza a doua si formam zerouri pe coloana a doua si a treia, deasupra pivotilor. Lucram cu liniile pivotilor de fiecare data.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 + L_3 \\ L_1 \to L_1 - 2L_2}]{L_2 \to L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 27/4 & -11/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -11/4 & 5/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

In concluzie, algoritmul Gauss a condus la urmatoarea inversa

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -11 & 3 \\ -11 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Numim **matrice elementara** o matrice obtinuta din matricea identitate $\boldsymbol{I}$ prin cele trei tipuri de transformari elementare asupra liniilor. Orice transformare elementara efectuata reprezinta de fapt o inmultire la stanga cu matricea elementara corespunzatoare transformarii. Spre exemplu daca dorim sa facem transformarea $L_2 \to L_2 - 3L_1$ va trebui sa inmultim la stanga matricea data cu matricea elementara

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtinuta efectuand aceeasi transformare asupra matricei identitate $\boldsymbol{I}$.

Din aceasta perspectiva, la fiecare pas in cadrul algoritmului Gauss prezentat anterior am inmultit la stanga ambele matrice cu o matrice elementara corespunzatoare transformarii elementare realizate. Dupa $s$ transformari elementare efectuate

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I}) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\boldsymbol{E}_s \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{A} \ \vdots \ \boldsymbol{E}_s \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{I}\right) \quad \rightsquigarrow \quad (\boldsymbol{I} \vdots \boldsymbol{A}^{-1})$$

am obtinut inversa matricei in partea dreapta. Tinand cont ca inversa unei matrice elementare este tot o matrice elementara obtinem urmatorul rezultat care poate fi gandit ca o teorema de structura a matricelor inversabile.

> O matrice $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R})$ este inversabila daca si numai daca se poate descompune ca produs a unor matrice elementare
>
> $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{E}_s$$

Trecem acum la o problema care are un continut ceva mai practic.

**Problema 3 (Nutritie)**

Un nutrionist trebuie sa creeze o dieta unei persoane care are un deficit de calciu, vitamina A si magneziu. In aceasta dieta are de gand sa includa laptele, sucul de portocale si broccoli-ul. Necesarul zilnic este de 105 mg de calciu, 30 mg de vitamina A si 300 mg magneziu. Mai jos avem continutul de calciu, vitamina A si magneziu raportat la 100 de grame din fiecare aliment mai sus amintit.
Dupa ce formula va compune o dieta care sa acopere necesarul zilnic?
Daca o persoana are o usoara intoleranta la lactoza e de preferat sa nu consume mai mult de 100 de grame lapte intr-o zi. Cum realizeaza nutritionistul o dieta pentru astfel de persoane ?

| Continut mg/100 grame | | | |
|---|---|---|---|
| Lapte | 75 Ca | 20 vit. A | 210 Mg |
| Suc | 50 Ca | 10 vit. A | 130 Mg |
| Broccoli | 25 Ca | 40 vit. A | 170 Mg |

*Solutie: Prin aceasta problema incercam sa evidentiem rolul necunoscutelor secundare in rezolvarea, interpretarea si manevrarea solutiilor unui sistem liniar.*

Prima sarcina a nutrionistului este sa realizeze o dieta tinand cont de necesarul zilnic de Ca, Mg si vit. A. Notam cu $x$ cantitatea de lapte raportata la

100 de grame. De exemplu 220 de grame va corespunde lui $x = 2,2$. Notam la fel $y$ cantitatea de suc de portocale si cu $z$ pe cea de broccoli, raportate la 100 de grame. Atunci obtinem urmatoarele ecuatii

Necesarul de calciu

$$105 = 75x + 50y + 25z$$

Necesarul de vitamina A

$$30 = 20x + 10y + 40z$$

Necesarul de magneziu

$$300 = 210x + 130y + 170z$$

Sistemul rezultat este

$$\begin{cases} 75x + 50y + 25z = 105 \\ 20x + 10y + 40z = 30 \\ 210x + 130y + 170z = 300 \end{cases}$$

care va livra urmatoarea formula de calcul a dietei

$$x = \frac{9}{5} - 7\alpha, \quad y = 10\alpha - \frac{3}{5} \quad \text{si} \quad z = \alpha.$$

Pentru a tine cont de intoleranta la lactoza trebuie sa impunem conditia $x \leq 1$, caci ne raportam la 100 de grame, care conduce la $\alpha \geq \frac{4}{35}$.

**Problema 4**

Notam cu $\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2, \boldsymbol{\ell}_3$ liniile matricei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si cu $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$ coloanele matricei

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aratati ca produsul $\boldsymbol{AB}$ se poate obtine folosind regula

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \boldsymbol{c}_3 \\ \boldsymbol{\ell}_2 \cdot \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{\ell}_2 \cdot \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{\ell}_2 \cdot \boldsymbol{c}_3 \\ \boldsymbol{\ell}_3 \cdot \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{\ell}_3 \cdot \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{\ell}_3 \cdot \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}$$

iar produsul $\boldsymbol{BA}$ se poate obtine folosind regula

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{c}_1 \cdot \boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{c}_2 \cdot \boldsymbol{\ell}_2 + \boldsymbol{c}_3 \cdot \boldsymbol{\ell}_3$$

*Solutie:* Conform enuntului daca ne imaginam cele doua matrice partitionate sub forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell}_1 \\ \boldsymbol{\ell}_2 \\ \boldsymbol{\ell}_3 \end{pmatrix} \quad \text{respectiv} \quad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{c}_1 \vdots \boldsymbol{c}_2 \vdots \boldsymbol{c}_3)$$

teoria matricelor partitionate ne spune ca cele doua produse se pot calcula in modurile afisate mai sus pentru ca submatricele bloc corespunzatoare sunt compatibile la inmultire. Vom verfica prin calcul aceste reguli, intai manevram piesele mici ale puzzle-ului si calculam in mod natural produsele

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 8 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{respectiv} \quad \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Liniile si coloanele la care se face referire sunt

$$\boldsymbol{\ell}_1 = (1 \quad -1 \quad 1), \quad \boldsymbol{\ell}_3 = (2 \quad 4 \quad 2) \quad \text{si} \quad \boldsymbol{\ell}_3 = (0 \quad 0 \quad -1)$$

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{si} \quad \boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Cu partitionarile afisate anterior $\boldsymbol{AB}$ se calculeaza in mod natural inmultind linii cu coloane. In calculul produsului $\boldsymbol{BA}$ expresia propusa este foarte naturala prin prisma partitionarilor alese dar nu la fel de naturala prin prisma modului in care suntem obisnuiti sa inmultim matricele. Regula este insa valida

$$\boldsymbol{c}_1 \cdot \boldsymbol{\ell}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_2 \cdot \boldsymbol{\ell}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c}_3 \cdot \boldsymbol{\ell}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si insumand

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{c}_1 \cdot \boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{c}_2 \cdot \boldsymbol{\ell}_2 + \boldsymbol{c}_3 \cdot \boldsymbol{\ell}_3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

**Problema 5***

Aratati ca daca $\boldsymbol{P} \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice inversabila, atunci pentru orice matrice $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R})$ avem

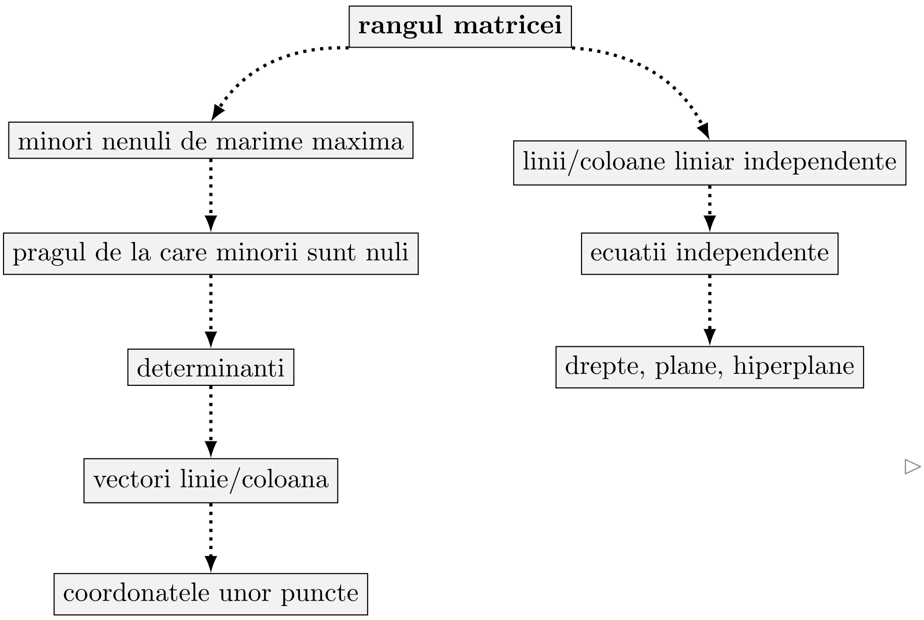
$$rang(\boldsymbol{AP}) = rang(\boldsymbol{PA}) = rang(\boldsymbol{A})$$

*Solutie*: *Dorim sa demonstram un rezultat enuntat in acest caiet de seminar si in acelasi timp atragem atentia asupra unei foarte utile tehnici de problem-solving.*

Teoria matricelor reprezinta mediul ideal pentru a exersa rationarea cu blocuri de informatie (chunking) dar multe alte tehnici care stimuleaza creativitatea pot fi exemplificate in limbaj matricial. Pentru a contracara faptul ca mintea noastra aranjeaza intr-un mod reflex si uneori irational informatia se recomanda *fragmentarea*. Fragmentand obiectele, conceptele, ideile in partile componente avem o sansa sa rearanjam informatia intr-un mod util.

*Fragmenteaza. Descompune un obiect mai general prin obiecte mai simple sau obiecte cu proprietati speciale.*

Ce putem fragmenta aici ? Ce fragmentare este utila ? Putem incepe cu fragmentarea notiuniilor: rang si matrice inversabila. Aceasta fragmentare se recomanda a fi continuata pana cand partile nu mai par a fi legate direct de obiectul descompus.




▷ ultimele "fragmente" nu par direct legate de notiunea de rang

Mai departe, daca ne concentram asupra obiectelor matematice $\boldsymbol{A}$ si $\boldsymbol{P}$, cum pot fi ele *fragmentate in obiecte mai simple sau cu proprietati speciale ?* Sa presupunem ca $\boldsymbol{A}$ are rangul $k$, conform teoremei de structura a matricelor de rang $k$, matricea are rangul $k$ daca si numai daca exista doua colectii liniar independente $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_k \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ si $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_k \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, de vectori coloana, astfel ca

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1^t + \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2^t + \ldots + \boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{v}_k^t$$

Matricea $\boldsymbol{P}$ fiind inversabila ar putea fi fragmentata in matrice elementare

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{E}_p$$

Cand evaluam produsul $\boldsymbol{AP}$ observam ca

▷ *deoarece* $\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{v})^t$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP} &= (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1^t + \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2^t + \ldots + \boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{v}_k^t)P \\ &= \boldsymbol{u}_1 \cdot (\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{v}_1)^t + \boldsymbol{u}_2 \cdot (\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{v}_2)^t + \ldots + \boldsymbol{u}_k \cdot (\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{v}_k)^t\end{aligned}$$

Se pare ca prin inmultire cu $\boldsymbol{P}$ colectia de vectori coloana $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ se transforma in vectorii coloana $\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{P}^t\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{P}^t\boldsymbol{v}_k$. Daca am reusi sa aratam ca aceasta colectie este liniar independenta atunci conform teoremei de structura am avea

▷ in general $rang(\boldsymbol{AB}) \neq rang(\boldsymbol{BA})$

$$rang(\boldsymbol{AP}) = k = rang(\boldsymbol{A})$$

Daca tinem cont de descompunerea lui $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{v} = \boldsymbol{E}_p^t \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{E}_2^t \cdot \boldsymbol{E}_1^t \cdot \boldsymbol{v},$$

si de faptul ca transpusa unei matrice elementare este matrice elementara, va fi suficient sa aratam ca pentru o matrice elementara $\boldsymbol{E}$ oarecare si o colectie de vectori coloana liniar independenti $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ colectia $\boldsymbol{Ev}_1, \boldsymbol{Ev}_2, \ldots, \boldsymbol{Ev}_k$ este liniar independenta. Ideea de baza consta in faptul ca oricare matrice elementara realizeaza asupra unei matrice transformari care fie nu schimba determinantul fie multiplica determinantul cu o constanta nenula.

Daca spre exemplu $\boldsymbol{E}$ este matricea care inmulteste linia a $i$-a cu o constanta $\lambda$ atunci $\boldsymbol{Ev}_1$ va avea elementul de pe acea linie inmultit cu $\lambda$, etc. Daca folosim criteriul practic de studiu a liniar independentei si asezam vectorii coloana $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ intr-o matrice, va exista un minor de ordin $k$ nenul. Sunt doua situatii posibile: linia $i$ sa faca parte din acest minor sau nu. Daca face parte atunci cand aplicam acelasi criteriu pentru colectia $\boldsymbol{Ev}_1, \boldsymbol{Ev}_2, \ldots, \boldsymbol{Ev}_k$, vom redescoperi acelasi minor dar acum are linia respectiva inmultita cu $\lambda$. Din proprietatile determinantilor (extragerea factorului de scalare) deducem ca minorul ramane in continuare nenul. Daca nu face parte din minor, acesta este neschimbat in noua matrice. Deci rangul matricei formate cu vectorii $\boldsymbol{Ev}_1, \boldsymbol{Ev}_2, \ldots, \boldsymbol{Ev}_k$ este tot $k$ si conform criteriului vectorii sunt liniar independenti. Analog se argumenteaza $rang(\boldsymbol{PA}) = rang(\boldsymbol{A})$.

Prin utilizarea fragmentarilor in obiecte mai simple am ajuns sa trebuiasca sa manevram doar aceste obiecte, simplificand mult rationamentul. In acelasi timp am reusit sa gasim indicii care ne-au condus la o solutie.

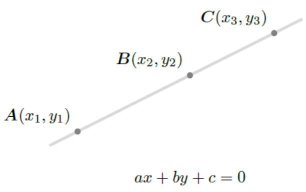
**Problema 6 (Coliniaritatea a trei puncte)**

Trei puncte distincte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ si $C(x_3, y_3)$ sunt coliniare daca si numai daca

$$det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

*Solutie: Urmarim obtinerea unui criteriu de coliniaritate a punctelor prin aplicarea teoriei sistemelor de ecuatii liniare.*

Punctele $A, B, C$ sunt coliniare daca si numai daca exista o dreapta




$$d: \quad ax + by + c = 0$$

care contine cele trei puncte.

Stim ca un punct se afla pe o dreapta daca si numai daca coordonatele punctului satisfac ecuatia dreptei.

$$A(x_1, y_1) \in d \iff ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$B(x_2, y_2) \in d \iff ax_2 + by_2 + c = 0$$

$$C(x_3, y_3) \in d \iff ax_3 + by_3 + c = 0$$

Intrucat coordonatele punctelor sunt presupuse cunoscute iar $a, b, c$ sunt necunoscute, vom interpreta ecuatiile de mai sus ca pe un sistem de ecuatii liniare cu necunoscutele $a, b, c$

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

Determinantul matricei sistemului este

$$\Delta = det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Orice solutie $(a, b, c)$ a sistemului de mai sus va duce la obtinerea unei ecuatii pentru dreapta $d$ si reciproc. Insa trebuie remarcat ca daca

$$d: \quad ax + by + c = 0$$

este ecuatia unei drepte, atunci prin inmultire cu o constanta se obtine o ecuatie echivalenta

$$d: \quad 2ax + 2by + 2c = 0$$

adica vor exista o infinitate de coeficienti de tipul $(ka, kb, kc)$ care vor genera aceeasi ecuatie pentru $d$. Prin urmare sistemul liniar de mai sus trebuie sa admita o infinitate de solutii (compatibil nedeterminat).

Orice sistem omogen este compatibil. Sistemul de mai sus are o infinitate de solutii daca si numai daca $\Delta = 0$, altfel admite doar solutia $a = b = c = 0$.

**Problema 7 (Conciclicitatea a patru puncte)**

Patru puncte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ si $D(x_4, y_4)$, dintre care oricare trei sunt necoliniare, sunt situate pe acelasi cerc daca si numai daca

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

*Solutie*: *Prin aceasta problema urmarim obtinerea unui criteriu de conciclicitate a punctelor prin aplicarea teoriei sistemelor de ecuatii liniare.*

Pentru un cerc $\mathcal{C}$ de centru $O(a, b)$ si raza $r$ stim ca distanta de la un punct oarecare al sau $P(x, y)$ la centrul $O$ este egala cu $r$. Prin urmare ecuatia cercului este

$$PO = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

sau

$$\mathcal{C}: \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

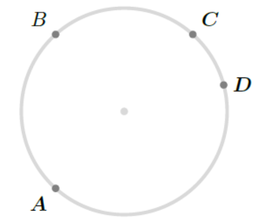
care se poate rescrie intotdeauna desfasurat sub forma

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

pentru anumite constante $m, n, p$.

In practica vom sti coordonatele celor patru puncte si va trebui sa decidem daca exista un cerc care sa le contina. Daca cele patru puncte date se afla pe un cerc, atunci coordonatele sale verifica ecuatia cercului. Sa presupunem ca cercul pe care se afla cele patru puncte este chiar

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$




$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$

Atunci

$$\begin{aligned}
A(x_1, y_1) \in \mathcal{C} &\iff x_1^2 + y_1^2 + mx_1 + ny_1 + p = 0 \\
B(x_2, y_2) \in \mathcal{C} &\iff x_1^2 + y_1^2 + mx_1 + ny_1 + p = 0 \\
C(x_3, y_3) \in \mathcal{C} &\iff x_1^2 + y_1^2 + mx_1 + ny_1 + p = 0 \\
D(x_4, y_4) \in \mathcal{C} &\iff x_1^2 + y_1^2 + mx_1 + ny_1 + p = 0
\end{aligned}$$

Problema trebuie privita tradusa in urmatorul fel: daca exista un cerc $\mathcal{C}$ pe care se afla cele patru puncte, atunci exista necunoscutele $m, n, p$ care sa satisfaca sistemul de ecuatii

$$\begin{cases}
x_1^2 + y_1^2 + mx_1 + ny_1 + p = 0 \\
x_1^2 + y_1^2 + mx_1 + ny_1 + p = 0 \\
x_1^2 + y_1^2 + mx_1 + ny_1 + p = 0 \\
x_1^2 + y_1^2 + mx_1 + ny_1 + p = 0
\end{cases}$$

adica sistemul trebuie sa fie compatibil. De remarcat ca in acest sistem coeficientii sunt coordonatele punctelor iar necunoscutele sunt numerele reale $m, n, p$ din ecuatia cercului cautat. Prin urmare matricea sistemului $\boldsymbol{M}$ si matricea extinsa $\overline{\boldsymbol{M}}$ vor fi

▷ provin din scrierea in forma standard

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad \overline{\boldsymbol{M}} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & -x_1^2 - y_1^2 \\ x_2 & y_2 & 1 & -x_2^2 - y_2^2 \\ x_3 & y_3 & 1 & -x_3^2 - y_3^2 \\ x_4 & y_4 & 1 & -x_4^2 - y_4^2 \end{pmatrix}$$

Conditia de compatibilitate este

$$rang\ \boldsymbol{M} = rang\ \overline{\boldsymbol{M}}$$

Intrucat oricare trei puncte sunt necoliniare, spre exemplu A,B,C, atunci conform problemei anterioare se obtine

$$det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

adica $rang\ \boldsymbol{M} = 3$. Stim ca un sistem este compatibil daca si numai daca toti minorii caracteristici sunt nuli.

In situatia de fata exista un singur minor caracteristic

$$m_c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & -x_1^2 - y_1^2 \\ x_2 & y_2 & 1 & -x_2^2 - y_2^2 \\ x_3 & y_3 & 1 & -x_3^2 - y_3^2 \\ x_4 & y_4 & 1 & -x_4^2 - y_4^2 \end{vmatrix}$$

otinut prin adaugarea coloanei termenilor liberi submatricei care da rangul. In concluzie, exista un cerc care sa contina cele patru puncte daca si numai daca

$$m_c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & -x_1^2 - y_1^2 \\ x_2 & y_2 & 1 & -x_2^2 - y_2^2 \\ x_3 & y_3 & 1 & -x_3^2 - y_3^2 \\ x_4 & y_4 & 1 & -x_4^2 - y_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Egalitatea dintre cei doi determinanti este obtinuta dupa ce efectuam operatiile $C_4 \to -C_4$ care va schimba semnul determinantului, $C_4 \leftrightarrow C_3$ care din nou schimba semnul, $C_3 \leftrightarrow C_2$ si in final $C_2 \leftrightarrow C_1$. In final rezultand patru schimbari de semn.

**Problema 8***

Calculati puterea a n-a a matricei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

*Solutie*: *Prin aceasta problema evidentiem o tehnica posibila de calcul a puterilor unei matrice.*

Avem nevoie de puterile unei matrice in anumite modele matematice in care urmarim evolutia unui sistem in timp, de exemplu vremea. In astfel de situatii elementele matricei vor reprezenta probabilitati si in consecinta vor fi numere cuprinse in intervalul $[0, 1]$, unde 1 reprezinta 100%.

*Cauta un invariant. Ce nu se modifica, ce ramane invariant ?*
*Ce transformare poate fi aplicata unor relatii fara a le altera ?*

Prima parte: *Ce nu se modifica, ce ramane invariant ?* se refera la prezenţa discretă a unei transformari care nu modifica o anumita cantitate sau relatie (spre exemplu arie, distanta, determinant, rang). A doua parte se refera la gasirea unei astfel de transformari.

Acest principiu a fost folosit de cateva ori pana acum fara a fi evidentiat in mod special. *Valoarea determinantului* este un invariant la anumite transformari realizate asupra liniilor/coloanelor sale, spre exemplu la o transformare $L_i \to L_i + cL_j$. *Inversabilitatea* matricelor este un invariant la toate tipurile de transformari elementare: matricea ramane inversabila dupa orice transformare elementara realizata asupra liniilor sale. *Rangul* este un invariant la inmultirea cu matrice inversabile si tocmai acest fenomen ne-a permis sa construim metoda Gauss de rezolvare a sistemelor liniare. Prin transformari elementare asupra matricei extinse a sistemului obtinem o matrice superior triunghiulara cu acelasi rang si in esenta nu alteram informatiile codificate in ecuatiile sistemului. Din aceasta perspectiva intrebarea cheie pare a fi:

▷ Ce relatie sau cantitate este invarianta la ridicarea la putere ?

Spunem ca doua matrice $\boldsymbol{A}$ si $\boldsymbol{B}$ sunt *similare* daca exista o matrice inversabila $\boldsymbol{P}$ astfel ca

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

In mod surprinzator prin ridicare la o putere matricele raman similare, caci

$$\boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1})^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^n P^{-1}$$

Adica *similaritatea* ***(relatia)*** *matricelor este invarianta la ridicarea la putere* ***(transformarea)***.

▷ Cum putem exploata acest invariant gasit ?

Daca am gasi o matrice $\boldsymbol{B}$, similara cu matricea $\boldsymbol{A}$, astfel incat $\boldsymbol{B}^n$ sa se calculeze foarte usor atunci am putea obtine $\boldsymbol{A}^n$ indirect, calculand $\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{P}^{-1}$. Spre exemplu, puterile matricelor diagonala

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

se determina usor

$$\boldsymbol{B}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, o strategie ar fi sa incercam sa aratam ca exista o matrice diagonala care este similara cu matricea data, adica

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}.$$

Pentru a gasi matricea diagonala si a afla matricea $\boldsymbol{P}$ care asigura similaritatea, sa consideram ca $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{c}_1 \vdots \boldsymbol{c}_2)$, unde $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$ sunt coloanele lui $\boldsymbol{P}$. Deoarece $\boldsymbol{P}$ este inversabila aceste coloane trebuie sa fie vectori coloana liniar independenti, prin urmare niciunul nu are voie sa fie vectorul nul. Rescriem relatia de mai sus

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{c}_1 \vdots \boldsymbol{c}_2\big) = \big(\boldsymbol{c}_1 \vdots \boldsymbol{c}_2\big) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Daca folosim tehnicile de manevrare a matricelor bloc, ultima relatie devine

$$\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_1 \vdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_2\big) = \big(a \cdot \boldsymbol{c}_1 \vdots b \cdot \boldsymbol{c}_2\big)$$

si astfel obtinem doua sisteme de ecuatii din care vom incerca sa obtinem matricea $\boldsymbol{B}$ si matricea $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_1 = a \cdot c_1 \quad \text{si} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_2 = b \cdot c_2$$

Sa remarcam ca ambele sisteme sunt de tipul $\boldsymbol{Ac} = \lambda \cdot \boldsymbol{c}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Vom rezolva sistemul $\boldsymbol{Ac} = \lambda \cdot \boldsymbol{c}$ notand $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Obtinem prin inlocuire

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

adica

$$\begin{cases} 0x + 2y = \lambda x \\ -x + 3y = \lambda y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -\lambda x + 2y = 0 \\ -x + (3 - \lambda) y = 0 \end{cases}$$

Daca $\Delta \neq 0$ am avea doar solutia $x = y = 0$ adica $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, imposibil pentru o matrice $\boldsymbol{P}$ inversabila. Prin urmare

$$\Delta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(3 - \lambda) - 2 = 0$$

si gasim imediat ca $\lambda = 1$ sau $\lambda = 2$. Daca $\boldsymbol{Ac} = 1 \cdot \boldsymbol{c}$ atunci

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

cu solutiile $x = 2\alpha,\ y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Putem considera una dintre solutii si gasim $\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Analog, daca $\boldsymbol{Ac} = 2 \cdot \boldsymbol{c}$ atunci

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

cu solutiile $x = \alpha,\ y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Putem considera oricare dintre solutii si gasim $\boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Prin urmare

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & \vdots & 1 \\ 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

si putem scrie

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Datorita similaritatii cu o matrice diagonala obtinem puterea a $n$-a exprimata ca

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 1 - 2^n & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}.$$

**Problema 9**

Aratati folosind matrice bloc ca

$$det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{AB}) = det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{BA})$$

pentru orice matrice patrate $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{R})$ si orice numar real nenul $\lambda$.

*Solutie Aceasta problema evidentiaza un rezultat fundamental, care va fi reluat intr-un capitol urmator, cu importante aplicatii in statistica: ecuatia Cayley-Hamilton satisfacuta de matricea* $\boldsymbol{AB}$ *coincide cu ecuatia satisfacuta de matricea* $\boldsymbol{BA}$*, cand ambele matrice sunt patrate.*

Ideea problemei este sa construim o matrice bloc care sa aiba ca determinant una dintre cele doua expresii. Daca avem in minte expresia $ad - bc$ a determinantului unei matrice de ordin 2, gasim usor doi candidati

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} \cdot \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \sqrt{\lambda} \cdot \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \quad sau \quad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \sqrt{\lambda} \cdot \boldsymbol{I} \\ \sqrt{\lambda} \cdot \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

Prima este mai avantajoasa intrucat blocurile de pe diagonala principala sunt inversabile. Teoria matricelor bloc spune ca daca

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

are submatricea $\boldsymbol{A}$ inversabila, atunci

$$det(\boldsymbol{M}) = det(\boldsymbol{A}) \cdot det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B})$$

iar cand $\boldsymbol{D}$ este inversabila

$$det(\boldsymbol{M}) = det(\boldsymbol{D}) \cdot det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C})$$

Daca aplica prima formula matricei

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} \cdot \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \sqrt{\lambda} \cdot \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

obtinem relatia

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{M}) &= det(\sqrt{\lambda}\boldsymbol{I}) \cdot det\left(\sqrt{\lambda}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}(\sqrt{\lambda}\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}\right) = (\sqrt{\lambda})^n \cdot det\left(\sqrt{\lambda}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\boldsymbol{IA}\right) \\ &= (\sqrt{\lambda})^n \cdot det\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{BA})\right) = (\sqrt{\lambda})^n \cdot \frac{1}{(\sqrt{\lambda})^n} det\left(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{BA}\right) \\ &= det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{BA}) \end{aligned}$$

iar pentru a doua formula obtinem

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{M}) &= det(\sqrt{\lambda}\boldsymbol{I}) \cdot det\left(\sqrt{\lambda}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(\sqrt{\lambda}\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}\right) = (\sqrt{\lambda})^n \cdot det\left(\sqrt{\lambda}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\boldsymbol{IB}\right) \\ &= (\sqrt{\lambda})^n \cdot det\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{AB})\right) = (\sqrt{\lambda})^n \cdot \frac{1}{(\sqrt{\lambda})^n} det\left(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{AB}\right) \\ &= det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{AB}) \end{aligned}$$

In final, am argumentat ca $det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{AB}) = det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{BA})$.

Dintr-o alta perspectiva, putem sa tinem cont de faptul ca intr-o matrice bloc de forma

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

daca $\boldsymbol{A}$ si $\boldsymbol{C}$ comuta

$$det(\boldsymbol{M}) = det(\boldsymbol{AD} - \boldsymbol{CB})$$

iar daca $\boldsymbol{C}$ si $\boldsymbol{D}$ comuta atunci

$$det(\boldsymbol{M}) = det(\boldsymbol{AD} - \boldsymbol{BC})$$

si ambele relatii pot fi aplicate oricaror dintre cei doi candidati amintiti la inceput, obtinand o a doua argumentare a concluziei.

**Problema 10**

Aratati ca determinantul unei matrice Vandermonde

$$\boldsymbol{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

este

$$\det \boldsymbol{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{j>i} (x_j - x_i)$$

pentru orice $n \geq 2$.

*Solutie: Reamintim un rezultat clasic si sa exersam proprietatile determinantilor. Vom avea nevoie de determinanti Vandermonde cand vom incerca sa aproximam o functie oarecare printr-o functie polinomiala.*

Spre exemplu, cand cautam o functie polinomiala de grad trei

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

care sa aproximeze functia $f(x) = \cos x$ pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ putem cauta acele necunoscute $a, b, c, d$ pentru care

$$\begin{aligned} p(0) &= 1 && \text{deoarece} \quad \cos 0 = 1 \\ p\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} && \text{deoarece} \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ p\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} && \text{deoarece} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ p\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 && \text{deoarece} \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

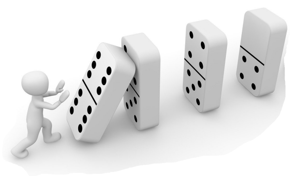
Inlocuind obtinem sistemul

$$\begin{cases} a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 1\\ a\cdot \frac{\pi}{6}^3 + b\cdot \frac{\pi}{6}^2 + c\cdot \frac{\pi}{6} + d = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ a\cdot \frac{\pi}{3}^3 + b\cdot \frac{\pi}{3}^2 + c\cdot \frac{\pi}{3} + d = \frac{1}{2}\\ a\cdot \frac{\pi}{2}^3 + b\cdot \frac{\pi}{2}^2 + c\cdot \frac{\pi}{2} + d = 0 \end{cases}$$

al carui determinant $\Delta$ este determinantul Vandermonde

$$\Delta = det\begin{pmatrix} 0^3 & 0^2 & 0 & 1\\ \frac{\pi}{6}^3 & \frac{\pi}{6}^2 & \frac{\pi}{6} & 1\\ \frac{\pi}{3}^3 & \frac{\pi}{3}^2 & \frac{\pi}{3} & 1\\ \frac{\pi}{2}^3 & \frac{\pi}{2}^2 & \frac{\pi}{2} & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{V}\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$$

*Foloseste efectul de domino: principiul inductiei matematice.*



Pentru valorile $n = 2$ si $n = 3$ se poate argumenta usor ca primele piese de domino vor cadea (afirmatia este adevarata). Mai trebuie doar sa argumentam ca daca a $k$-a piesa cade, atunci aceasta va provoca prabusirea celei de a $(k+1)$-a piese, adica

$$P(k) \implies P(k+1), \qquad k \geq 3.$$

In final, conform principiului inductiei matematice, enuntul va fi demonstrat pentru orice $n$ mai mare decat cea mai mica valoare verificata, adica $n = 2$.

Asadar, prima piesa de domino

$$\boldsymbol{V}(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1\\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

este jos. Urmeaza

$$\boldsymbol{V}(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2\\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2\\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \qquad \textit{am scazut prima linie}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2\\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \qquad \textit{dezvoltare dupa prima coloana}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)\\ x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_1) \end{vmatrix} \qquad \textit{matematica este stiinta tiparelor}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1\\ 1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} \qquad \textit{extras factorii de scalare a liniilor}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \qquad \textit{Bingo !}$$

Puteam sa calculam ultimul determinant folosind descompunerea ultimei coloane

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 \\ 1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2) + 0$$

Cele doua experimente facute ne ajuta sa capatam un feeling al problemei. *Intelegi mai usor o problema daca parcurgi o faza de testare a afirmatiei.*

Vom presupune acum ca afirmatia este adevarata pentru orice $k \geq 3$

$$\boldsymbol{V}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{k} (x_j - x_i)$$

Pentru a estima $\boldsymbol{V}(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$ putem folosi strategia din cazul $k = 3$, insa la fel de bine am putea partitiona matricea Vandermonde sub forma

$$\boldsymbol{V}(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^k \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \ldots & x_k^k \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \ldots & x_{k+1}^k \end{pmatrix}$$

adica $\boldsymbol{A} = (1)$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^k \end{pmatrix}$, respectiv

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^k \\ x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k & x_k^2 & \ldots & x_k^k \\ x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \ldots & x_{k+1}^k \end{pmatrix}$$

Este clar ca matricea $\boldsymbol{A}$ este inversabila, deci am putea folosi una dintre formulele de calcul a determinantului matricei partitionate

$$det\, \boldsymbol{V}(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) = det(\boldsymbol{A}) \cdot \det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$$

Constatam ca $det(\boldsymbol{A}) = 1$ si

$$det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^k - x_1^k \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & \ldots & x_3^k - x_1^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k - x_1 & x_k^2 - x_1^2 & \ldots & x_k^k - x_1^k \\ x_{k+1} - x_1 & x_{k+1}^2 - x_1^2 & \ldots & x_{k+1}^k - x_1^k \end{vmatrix}$$

este exact tipul de determinant obtinut in cazul $k = 3$ dupa scaderea repetata a primei linii si dezvoltarea dupa prima coloana.

*Relaxeaza o constrangere. Ce constrangere poate fi relaxata ?*

Mintea noastra ne impune in mod reflex si inconstient bariere care de fapt nu exista. Faptul ca $P(k)$ este adevarata nu inseamna doar ca determinantul Vandermonde $V(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ se calculeaza cu formula de mai sus pentru valorile $x_1, x_2, \ldots, x_k$, ci pentru orice $k$ valori distincte. Prin urmare putem sa aplicam aceeasi formula pentru $x_2, x_3, \ldots, x_{k+1}$ care sunt tot $k$ valori distincte, adica

$$det\ V(x_2, x_3, \ldots, x_{k+1}) = \prod_{\substack{i,j=2 \\ j>i}}^{k+1}$$

Observam ca se repeta tiparul $a^p - b^p$ in expresia lui $det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CB})$, deci poate ar fi bine sa-l investigam

$$\det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CB}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^k - x_1^k \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & \ldots & x_3^k - x_1^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k - x_1 & x_k^2 - x_1^2 & \ldots & x_k^k - x_1^k \\ x_{k+1} - x_1 & x_{k+1}^2 - x_1^2 & \ldots & x_{k+1}^k - x_1^k \end{vmatrix}$$

Avem identitatile

$$a^p - b^p = (a - b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + ab^{p-2} + b^{p-1})$$

Daca am aplica acesta formula fiecarei coloane am avea avantajul de a putea extrage factorii de scalare $(x_j - x_1)$ care se vor forma. Din pacate vom ramane cu expresii de tipul $x_j^{putere} x_1^{putere}$. Neplacut, reconfigurare traseu. E clar ca dorim sa obtinem diferentele $x_j - x_1$ pe fiecare linie, dar cum ?

*Relaxeaza o constrangere, uita de formula $a^p - b^p$.*

De la expresii de tipul $a^p - b^p$ cum s-ar putea ajunge la $a - b$ ? Cum interactioneaza doua expresii vecine ? Nu prea bine, *dar* daca tinem cont de asemanari si diferente...

$$a^p - b^p - b(a^{p-1} - b^{p-1}) = (a - b)a^{p-1}$$

Deci daca vom scadea din coloana a doua coloana intai inmultita cu $x_1$, din coloana a treia coloana a doua inmultita cu $x_1$, etc, vom obtine

$$det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{CB}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & \ldots & (x_2 - x_1)x_2^{k-1} \\ x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)x_3 & \ldots & (x_3 - x_1)x_3^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k - x_1 & (x_k - x_1)x_k & \ldots & (x_k - x_1)x_k^{k-1} \\ x_{k+1} - x_1 & (x_{k+1} - x_1)x_{k+1} & \ldots & (x_{k+1} - x_1)x_{k+1}^{k-1} \end{vmatrix}$$

din care extragem factorii de scalare a liniilor si apoi descoperim relatia

$$\begin{aligned}
det\ \boldsymbol{V}(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}) &= det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CB}) \\
&= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k+1}-x_1)\cdot det\ \boldsymbol{V}(x_2,x_3,\ldots,x_{k+1}) \\
&= \prod_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{k+1}(x_j > x_i)
\end{aligned}$$

pentru ca determinantul din dreapta completeaza produsul cu diferentele de tipul $(x_j - x_i)$, $j > i$, care lipsesc.

Calatoria a fost lunga dar experienta acumulata este extrem de importanta.

**Problema 11**

Fie $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice patratica, daca $rang(\boldsymbol{A}) \leq n-2$ atunci matricea adjuncta $adj(\boldsymbol{A})$ este matricea nula $\boldsymbol{O}_n$. Daca $rang(\boldsymbol{A}) \leq n-1$ atunci matricea $\boldsymbol{A}$ nu este inversabila.

*Solutie*: *Prin aceasta problema vrem sa atragem atentia asupra celor doua interpretari posibile ale rangului.*

Vom tine cont de faptul ca rangul unei matrice este *rangul minorilor* si *numarul maxim* de linii/coloane liniar independente. Sa presupunem intai ca $rang(\boldsymbol{A}) \leq n-2$. Daca interpretam numarul $rang(\boldsymbol{A})$ ca fiind rangul minorilor, atunci $rang(\boldsymbol{A}) \leq n-2$ spune ca toti minorii de ordin $n-1$ sau $n$ sunt zero. Matricea $adj(\boldsymbol{A})$ se obtine inlocuind fiecare element al transpusei cu complementul sa algebric, care este un minor obtinut prin eliminarea unei linii si a unei coloane, deci de ordin $n-1$

$$\boldsymbol{A}^t = \begin{pmatrix} & & \vdots & \\ \ldots & \ldots & * & \ldots \\ & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Prin urmare toate elementele lui $adj(\boldsymbol{A})$ vor fi nule pentru ca provin din minori de ordin $n-1$.

Daca interpretam $rang(\boldsymbol{A})$ ca fiind numarul maxim de linii/coloane liniar independente, atunci $rang(\boldsymbol{A}) \leq n-2$ spune ca sunt cel mult $n-2$ linii/coloane liniar independente. Daca $adj(\boldsymbol{A})$ ar fi diferita de matricea nula, ar exista un element al ei diferit de zero. Sa presupunem ca elementul de pe linia $i$ si coloana $j$ este nenul. Tinand cont de modul in care a fost obtinut acest element, inseamna ca determinantul format cu liniile $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ si coloanele $1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ din $\boldsymbol{A}^t$ este nenul. Adica aceste $n-1$ linii sunt liniar independente conform criteriului practic de studiu a liniar independentei vectorilor. Prin urmare am gasit $n-1$ linii liniar independente in matricea $\boldsymbol{A}^t$. Insa liniile lui $\boldsymbol{A}^t$ corespund coloanelor lui $\boldsymbol{A}$. Dar in $\boldsymbol{A}$ pot exista cel mult $n-2$ coloane liniar independente, contradictie.

Analog se va rationa pentru partea a doua a problemei.

## Probleme propuse

Atat problemele rezolvate cat si cele propuse vor sa va atraga atentia asupra motto-ului acestui capitol: *Algebra nu este decat o geometrie scrisa, geometria nu este decat o algebra figurata.* Pe de alta parte incercam sa pregatim terenul pentru capitolele urmatoare: vectori in $n$ dimensiuni si aplicatii liniare.

### A. Consolidare cunostinte

**Problema A.1.** *(Paradoxul coliniaritatii ?)*
*"Demonstrati" prin inductie matematica ca oricare $n$ puncte aflate intr-un plan sunt coliniare.*

Indiciu: Aratati ca $p(1)$, $p(2)$ sunt adevarate si apoi $p(k) \implies p(k+1)$. Unde e greseala ?

**Problema A.2.** *Completati urmatoarele afirmatii*

- *transpusa matricei*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*este matricea*

$$\boldsymbol{A}^t = \boxed{\phantom{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}}$$

*determinantul sau este* $det(\boldsymbol{A}) = \boxed{\phantom{0}}$ *si* $rang(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^t) = \boxed{\phantom{0}}$

- *daca* $\boldsymbol{A}$ *este matricea de mai sus atunci* $tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^t) = \boxed{\phantom{00}}$ *si are loc relatia* $rang(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^t)\ \boxed{\phantom{00}}\ rang(\boldsymbol{A})$

**Problema A.3.** *Daca* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{R})$ *atunci este adevarat sau fals ?*

*i)* $det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = det(\boldsymbol{A}) \cdot det(\boldsymbol{B})$

*ii)* $det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = det(\boldsymbol{A}) + det(\boldsymbol{B})$

*iii)* $tr(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A}) \cdot tr(\boldsymbol{B})$

*iv)* $tr(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B})$

*v)* $tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$

**Problema A.4.** *Adevarat sau fals ? Justificati.*

- *daca numarul de ecuatii ale unui sistem liniar depaseste numarul de necunoscute atunci sistemul este incompatibil.*

- *o ecuatie liniara cu doua sau mai multe necunoscute are o infinitate de solutii*
- *o matrice* $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *de rang 1 are liniile proportionale*
- *daca matricea extinsa a sistemului* $\overline{\boldsymbol{M}}$ *are mai multe coloane decat linii atunci sistemul este compatibil*
- *un sistem omogen cu mai multe variabile decat ecuatii are o infinitate de solutii*

**Problema A.5.** *Care dintre afirmatii este falsa ?*

*i)* *daca* $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}_n$ *atunci* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}_n$ *sau* $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}_n$

*ii)* $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^p = \boldsymbol{A}^p \cdot \boldsymbol{B}^p$ *pentru oricare doua matrice patrate si* $p \in \mathbb{N}$

*iii)* $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{AY}$ *implica* $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$

*iv)* *daca* $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}_n$ *atunci* $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O}_n$

**Problema A.6.** *Gasiti matrice* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_2(\mathbb{R})$ *pentru care*

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \neq \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$$

**Problema A.7.** *Alege la intamplare doi vectori cu doua componente*

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \quad si \quad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$$

*Eu aleg la intamplare vectorul* $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$. *Indiferent ce vectori alegi colectia* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ *va fi liniar dependenta. De ce ?*

**Problema A.8.** *Construiti doua matrice* $\boldsymbol{A}$ *si* $\boldsymbol{B}$ *pentru care*

$$rang(\boldsymbol{AB}) \neq rang(\boldsymbol{BA}).$$

**Problema A.9.** *Rezolvati sistemul cu o ecuatie liniara*

$$x - y + z - t = 1.$$

*Construiti un sistem de ecuatii liniare compatibil simplu nedeterminat care sa aiba patru necunoscute.*

**Problema A.10.** *Daca* $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *si* $\boldsymbol{B} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ *de ce obtinem*

$$det(\boldsymbol{AB}) = 0$$

*cand* $m > n$ *?*

Indiciu: Testati rezultatul pe cateva cazuri particulare. Ce se ascunde in spatele fenomenului prezentat ?

**Problema A.11.** *Daca $\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}$ este un sistem cu $n$ ecuatii liniare si $n$ necunoscute, stabiliti care dintre afirmatiile urmatoare sunt adevarate*

*i)* *numarul de necunoscute secundare este $n -$ rang $\boldsymbol{M}$*

*ii)* *daca $\det(\boldsymbol{M}) = 0$ sistemul are o infinite de solutii*

*iii)* *daca coloana termenilor liberi $\mathbf{c}$ este formata doar cu zerouri, atunci sistemul are solutie*

*iv)* *daca $\mathbf{c}$ este suma coloanelor lui $\boldsymbol{M}$, atunci sistemul admite solutii*

*v)* *daca sistemul are $n-1$ necunoscute secundare, atunci liniile lui $\mathbf{c}$ sunt proportionale*

**Problema A.12.** *(Adevarat sau fals ?)*
*Un sistemul liniar, scris sub forma matriciala ca*

$$\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c},$$

*este compatibil daca si numai daca coloana termenilor liberi $\mathbf{c}$ este o combinatie liniara din coloanele lui $\boldsymbol{M}$. Argumentati.*

**Problema A.13.** *Calculati produsul $\boldsymbol{AB}$ al matricelor*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad si \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*apoi calculati acelasi produs folosind pe rand partitionarile de mai jos*

$$A = \left(\begin{array}{c:c:c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad si \qquad B = \left(\begin{array}{ccc} 3 & -3 & 1 \\ \hdashline 1 & -1 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

*respectiv*

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ \hdashline -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad si \qquad \boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{cc:c} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

**Problema A.14.** *(Matricele deformeaza vectorii coloana)*
*Pentru un vector coloana dat*

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

*aflati matricea* $\boldsymbol{P} \in M_3(\mathbb{R})$ *care la inmultirea cu* $\boldsymbol{v}$ *schimba intre ele elementele* $x$ *si* $z$*. Aflati matricea* $\boldsymbol{Q}$ *care prin inmultire cu* $\boldsymbol{v}$ *permuta elementele lui* $\boldsymbol{v}$ *in felul urmator*

$$\boldsymbol{Qv} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

**Problema A.15.** *Argumentati faptul ca matricea*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

*nu poate fi transformata in matricea*

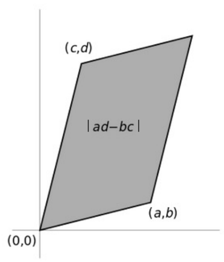
$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

*prin transformari elementare asupra liniilor.*

Indiciu: Priveste lucrurile din cat mai multe perspective. E nevoie de exploatarea gandirii laterale pentru a rezolva aceasta problema, care are o argumentare relativ scurta.

**Problema A.16.** *Intr-un reper* $Oxy$ *consideram in primul cadran punctele* $A(a,b)$ *si* $B(c,d)$*. Argumentati faptul ca aria paralelogramului format de originea reperului si cele doua puncte este*

$$\mathcal{A}_{paralelogram} = \left| det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = |ad - bc|.$$




Indiciu: Aflati coordonatele celuilalt varf al paralelogramului. Construiti proiectiile varfurilor pe axele de coordonate.

## B. Tehnica de calcul

**Problema B.1.** *Argumentati faptul ca orice matrice de forma*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}^t,$$

$\boldsymbol{u} \in M_{m\times 1}$, $\boldsymbol{v} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *vectori coloana nenuli, este o matrice de rang* 1.

**Problema B.2.** *Gasiti rangul matricelor de tip sah*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad si \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} t & c & n & d & r & n & c & t \\ p & p & p & p & p & p & p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & p & p & p & p & p & p & p \\ t & c & n & d & r & n & c & t \end{pmatrix}$$

*si rezolvati sistemul* $\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{0}}$.

**Problema B.3.** *(Inversa unei matrice de ordin* 2*)*
*Aratati ca daca* $ad - bc \neq 0$, *atunci inversa matricei*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

*este matricea*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Problema B.4.** *(Inversa sumei inverselor)*
*Daca* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{R})$ *sunt doua matrice inversabile gasiti o formula pentru inversa matricei* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$, *presupunand ca toate matricele intalnite sunt inversabile.*

Indiciu: Studiati intai cazul $n = 1$, cand matricele $\boldsymbol{A}$ si $\boldsymbol{B}$ sunt numere reale, apoi cautati posibili candidati pentru $\boldsymbol{C}^{-1}$. Este expresia gasita unica ?

**Problema B.5.** *Identificati rangul matricei*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

*prin doua metode. Care linii formeaza o colectie maximala liniar independenta?*

**Problema B.6.** *(Limbajul matricial)*

*Sirul lui Fibonacci este dat prin*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \qquad n \geq 1, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

*iar numarul de petale ale unei flori se afla deseori printre termenii acestui sir. Daca rescriem relatia de recurenta in limbaj matricial*

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad n \geq 1, \quad \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

*apare posibilitatea de a afla termenul general al sirului utilizand puterea a $n$-a a matricei $\boldsymbol{A}$. Aflati expresia lui $F_n$.*

**Problema B.7.** *(Descompunerea functiilor rationale)*

*Aflati $a, b, c, d$ pentru care*

$$\frac{x^3 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$$

**Problema B.8.** *Rezolvati sistemul liniar*

$$\begin{cases} x - 3y + z - s + t = 3 \\ -2z - x + y + 2t - 2s = 2 \\ 3x - 5y - 3t + 5z + 3s = -2 \end{cases}$$

**Problema B.9.** *Studiati daca urmatoarele sisteme sunt compatibile si in caz afirmativ aflati multimea solutiilor. Ce reprezinta din punct de vedere geometric aceasta multime, in fiecare caz ?*

$$i) \begin{cases} x - 3y + z + u + 2v = 2 \\ -x + 5y + 2z + 2u - 2v = 0 \\ 2x - 6y + 2z + 2u + 4v = 4 \\ -x + 3y - z + v = -3 \end{cases} \qquad ii) \begin{cases} 2x - z + y + t = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 2 - 3t = 0 \\ 2x - y + z - 3t = 4 \\ 5x + y - z + 2t = -1 \end{cases}$$

*Verificati rezultatele folosind un software matematic, de exemplu Matlab.*

**Problema B.10.** *Construiti un sistem cu patru ecuatii liniare si necunoscutele $x, y, z$ care sa admita solutia*

$$S = \{x = 1 - a, \quad y = 2a - 3, \quad z = a + 2 \quad : \quad a \in \mathbb{R}\}.$$

**Problema B.11.** *Rezolvati sistemele liniare*

$$a) \begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -2 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

**Problema B.12.** *Aflati inversa matricei, folosind eventual metoda Gauss de aflare a inversei*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

**Problema B.13.** *Sa se rezolve in prin metoda Gauss, sistemele a caror matrice extinsa este*

*i)*

$$(\boldsymbol{M} \vdots \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 & \vdots & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & \vdots & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & \vdots & -8 \end{pmatrix}$$

*ii)*

$$(\boldsymbol{M} \vdots \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & \vdots & 2 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & \vdots & 1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

*iii)*

$$(\boldsymbol{M} \vdots \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & \vdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & \vdots & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & \vdots & 7 \end{pmatrix}$$

**Problema B.14.** *(Aproximare polinomiala)*

*Aflati functia polinomiala $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ al carei grafic trece prin punctele*

$$A(1,2), \quad B(2,3), \quad C(3,4) \quad si \quad D(4,1).$$

**Problema B.15.** *(Sisteme binare)*

*Rezolvati urmatorul sistem liniar in $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$*

$$\begin{cases} x + y \phantom{{}+z} + w &= 1 \\ x \phantom{{}+y} + z + w &= 0 \\ x + y + z + w &= 1 \\ \phantom{x+{}} y + z + w &= 0 \end{cases}$$

Sugestie: Generati singuri alte sisteme cu coeficienti in $\mathbb{Z}_2$, pe care apoi incercati sa le rezolvati. Concluzia ?

**Problema B.16.** *Dreptele*

$$d_1 : \quad ax + by + c = 0$$

$$d_2 : \quad bx + cy + a = 0$$

$$d_3 : \quad cx + ay + b = 0$$

*se intersecteaza intr-un punct daca si numai daca* $a + b + c = 0$.

**Problema B.17.** *(Cercul circumscris triunghiului)*
*Folosind ecuatia generala a unui cerc*

$$x^2 + y^2 + mx + nx + p = 0$$

*aratati ca pentru oricare trei puncte necoliniare* $A, B, C$ *exista un cerc care trece prin aceste puncte.*

**Problema B.18.** *Pentru matricea* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *construiti doua matrice nenule* $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M_3(\mathbb{R})$ *cu proprietatea*

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{O}_3.$$

*Aratati apoi ca pentru orice matrice neinversabila* $\boldsymbol{A} \in M_3(\mathbb{R})$ *exista matrice nenule* $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M_3(\mathbb{R})$ *cu proprietatile de mai sus.*

Comentariu: De ce e important ca $\boldsymbol{A}$ sa fie neinversabila ?

**Problema B.19.** *Aratati ca pentru orice matrice* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{R})$ *avem*

$$det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \cdot det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$$

Indiciu: Folositi tranformari elementare pentru blocuri intregi, argumentati cum pot fi folosite.

**Problema B.20.** *(Matricele de rotatie)*
*Aratati ca urmatoarele matrice*

$$\boldsymbol{R}_{Ox}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_{Oy}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad si \quad \boldsymbol{R}_{Oz}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

*satisfac relatiile*

$$\boldsymbol{R}(\theta)^{-1} = \boldsymbol{R}(-\theta) = \boldsymbol{R}(\theta)^t$$
$$\boldsymbol{R}(\theta) \cdot \boldsymbol{R}(\phi) = \boldsymbol{R}(\theta + \phi), \qquad \forall\ \theta, \phi \in \mathbb{R}.$$

*dar nu comuta intre ele.*

**Problema B.21.** *(Matricele circulare comuta)*

*Matricele ale caror linii se obtin prin permutari circulare comuta intre ele.*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Sugestie: Utilizati descompunerea (fragmentarea)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = a \cdot I + b \cdot \boldsymbol{P} + c \cdot \boldsymbol{P}^2 \ \text{ pentru } \ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Problema B.22.** *(Matricele de translatie)*

*Argumentati, preferabil folosind tehnica de inmultire a matricelor partitionate, ca matricele*

$$\boldsymbol{T}(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},$$

*satisfac relatia*

$$\boldsymbol{T}(a, b, c) \cdot \boldsymbol{T}(a', b', c') = \boldsymbol{T}(a + a', b + b', c + c')$$

*Identificati, prin aceeasi tehnica, inversa matricei* $\boldsymbol{T}(a, b, c)$.

**Problema B.23.** *(Matricele Householder)*

*Fie* $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ *un vector coloana cu proprietatea* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

*Aratati ca matricea*

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}^t$$

*este inversabila si aflati inversa sa.*

Sugestie: Dupa ce identificati inversa matricei cautati o cale mai rapida de a rezolva problema

**Problema B.24.** *Aratati ca pentru orice vector coloana*

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

*avem*

$$det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^t) = 1 + \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{u}$$

Indiciu: Construiti o matrice bloc si folositi tehnica de calcul a determinantilor matricelor bloc. Comparati cu alte metode de calcul.

**Problema B.25.** *Pentru doua matrice de ordin* 3

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 \vdots \boldsymbol{a}_2 \vdots \boldsymbol{a}_3\right) \quad si \quad \boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 \vdots \boldsymbol{b}_2 \vdots \boldsymbol{b}_3\right)$$

*unde* $\boldsymbol{a}_i$ *si* $\boldsymbol{b}_i$, $i = \overline{1,3}$, *sunt coloanele celor doua matrice, aratati ca*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^t = \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{b}_k^t$$

*si*

$$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^t \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1^t \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1^t \cdot \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_2^t \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2^t \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2^t \cdot \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_3^t \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3^t \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3^t \cdot \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix}$$

**Problema B.26.** *Consideram doua matrice de ordinul trei*

$$\boldsymbol{U} = \left(\boldsymbol{u}_1 \vdots \boldsymbol{u}_2 \vdots \boldsymbol{u}_3\right) \quad si \quad \boldsymbol{V} = \left(\boldsymbol{v}_1 \vdots \boldsymbol{v}_2 \vdots \boldsymbol{v}_3\right)$$

*unde* $\boldsymbol{u}_i$ *si* $\boldsymbol{v}_i$, $i = \overline{1,3}$, *sunt coloanele celor doua matrice. Aratati ca pentru orice matrice diagonala* $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ *avem relatia*

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^t = d_1 \cdot \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^t + d_2 \cdot \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^t + d_3 \cdot \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_3^t$$

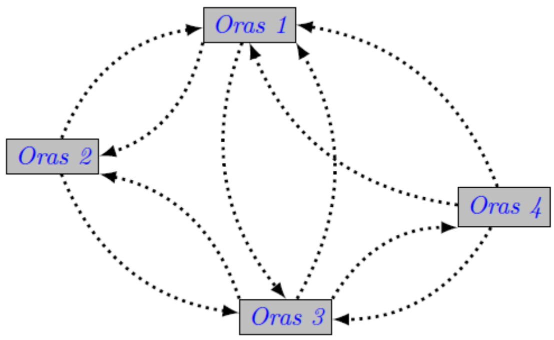
*Sugestie:* Preferabil, folositi tehnica de inmultire a matricelor bloc.

## C. Probleme cu caracter practic-aplicativ

**Problema C.1.** *Am receptionat mesajul* $\boldsymbol{r} = 1100011$ *criptat prin intermediul codului Hamming* $(4,7)$. *Stim ca s-a scurs cel mult o eroare in transmisia sa. Aflati mesajul original.*

**Problema C.2.** *(Rute aeriene)*

*Graful orientat de mai jos schiteaza rutele aeriene existente intre patru orase ale tarii.*




*Vom asocia acestui graf matricea de conexiune* $\boldsymbol{R}$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{daca exista o legatura directa intre orasul } i \textit{ si orasul } j \\ 0, & \textit{in rest} \end{cases}$$

*Afisati matricea* $\boldsymbol{R}$. *Ce interpretare practica are elementul de pe pozitia* $ij$ *din matricea* $\boldsymbol{R}^2$ *? Acceasi intrebare pentru matricea* $\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^2 + \ldots + \boldsymbol{R}^n$ *?*

**Problema C.3.** *(Retele de telefonie mobila)*

*Sunt doua companii de telefonie a caror retele acopera orasul* $T$, *le vom nota cu* $O$ *si* $D$. *In prezent compania* $D$ *detine* $20\%$ *dintre clienti iar* $O$ *restul de* $80\%$. *In fiecare an exista o tendinta constanta de portare dintr-o retea in alta. Mai precis,* $90\%$ *dintre cei care apeleaza la serviciile companiei* $O$ *raman in retea iar* $10\%$ *se porteaza in reteaua* $D$, *respectiv* $50\%$ *dintre cei care apeleaza la serviciile companiei* $D$ *raman in retea iar* $50\%$ *se porteaza in reteaua* $O$.

*Afisati matricea* $\boldsymbol{P}$ *de portare. Cati clienti vor utiliza serviciile companiei* $O$ *peste 2 ani ? Care va fi distributia pietei peste 30 de ani ?*

*Indiciu*: Folositi un vector $\boldsymbol{v} = (0.8 \;\; 0.2)$ pentru a descrie distributia pietei in prezent si eventual utilizati tehnica din problema rezolvata numarul 9.

**Problema C.4.** *Testele de inteligenta contin des itemi in care se cere sa gasiti urmatorul termen al unui sir, sa spunem*

$$1, \quad 4, \quad 3, \quad 8, \quad 7, \quad \boxed{\phantom{00}}$$

*Cu ajutorul softurilor matematice construiti o functie polinomiala de grad patru care sa satisfaca proprietatile*

$$p(1) = 1, \quad p(2) = 4, \quad p(3) = 3, \quad p(4) = 8, \quad p(5) = 7$$

*si oferiti un raspuns neconventional acestui item calculand* $p(6)$.