# Лабораторная работа №2

**Оценка параметров линейного стационарного объекта методом наименьших квадратов – рекуррентная форма.**

Цель работы: исследование свойств рекуррентной формы метода наименьших квадратов применительно к оценкам параметров линейного регрессионного объекта, исследование точности и скорости сходимости оценок к истинным значениям параметров в зависимости от задания начального приближения ковариационной матрицы ошибки оценки и начального приближения оценок параметров объекта.

### Основные теоретические сведения

Решение задач оценивания в реальном масштабе времени, как правило, требует сокращения времени вычислений, которое может быть достигнуто как за счет совершенствования вычислительной техники, так и за счет модернизации алгоритмов оценивания в смысле уменьшения объема вычислений. Особенно трудоемкими операциями при использовании явных методов идентификации являются операции перемножения и обращения матриц большой размерности.

Учитывая это, можно заключить, что разработка методов оценивания, позволяющих снизить объем запоминаемой информации и уменьшить время вычислений, является актуальной задачей.

Во многих случаях, когда составляющие вектора измерений поступают последовательно с течением времени, рационально находить оценку $\vec{\hat{c}}$ имеющейся в данный момент информации, последовательно уточняя ее, по мере поступления новых данных. При этом алгоритм совместной обработки результатов измерений заменяется рекуррентным алгоритмом вида:

$$\vec{\hat{c}}(i+1) = \vec{\hat{c}}(i) + K(i+1)(\vec{y'}(i+1) - U'(i+1))\vec{\hat{c}}(i), \tag{1}$$

в правую часть этого уравнения входит не весь вектор измерений «входов» $U(i+1)$ и «выхода» $\vec{y}^T(i+1) = (\vec{y'}(1), \vec{y'}(2), ..., \vec{y'}(i+1))$ лишь матрица «входов» $U'(i+1)$ и вектор «выхода» $\vec{y'}(i+1)$, поступившие на интервале $[t_i; t_{i+1}]$ и имеющие размерность (n x p) и p, соответственно. Здесь использованы следующие обозначения: n – размер оцениваемого параметра $\vec{\hat{c}}$, p – объем информации, поступающей на интервале $[t_i; t_{i+1}]$.

Такой процесс получения последовательно уточняемых оценок называется рекуррентным оцениванием. Подробный вывод рекуррентных соотношений приведен в работе [1] для произвольного значения p≥1. В лабораторной работе принимается p=1, т.е. уточнение оценок происходит при каждом новом поступлении измеряемых значений «входов» и «выхода».

Учитывая, что в лабораторной работе проводится идентификация параметров линейного регрессионного объекта (1.1), рекуррентные соотношения принимают вид:

$$\vec{\hat{c}_{LS}}(i+1) = \vec{\hat{c}_{LS}}(i) + K(i+1)(y(i) - \vec{u}^T(i)\vec{\hat{c}_{LS}}(i)) \tag{2}$$

$$K(i+1) = P(i)\vec{u}(i)\frac{1}{\frac{1}{r(i)} + \vec{u}^T(i)P(i)\vec{u}(i)} \tag{3}$$

$$P(i+1) = P(i) - \frac{1}{\frac{1}{r(i)} + \vec{u}^T(i)P(i)\vec{u}(i)}P(i)\vec{u}(i)\vec{u}^T(i)P(i) \tag{4}$$

Для инициализации рекуррентного процесса необходимо задать начальные приближения - $\vec{\hat{c}_{LS}}(0)$ и $P(0)$. Можно предложить два способа задания начальных приближений [1]:

1. первый способ заключается в использовании выборок $U(0)$, $\vec{y}(0)$ достаточного объема и последующем расчете начальных приближений по формулам обычного метода наименьших квадратов при достаточном числе измерений:

$$\vec{\hat{c}_{LS}}(0) = (U(0))^{-1}\vec{y}(0), P(0) = (U^T(0)R(0)U(0))^{-1}; \tag{5}$$

2. второй способ используется, если никаких предварительных выборок не производится. В этом случае можно предложить следующее правило: чем хуже начальные приближения $\vec{\hat{c}_{LS}}(0)$, тем больше должна быть матрица $P(0)$. Действительно, чем больше значение матрицы $P(0)$, тем больше будет $K(1)$ и, следовательно, с большим весом будет учитываться невязка между «выходом» объекта и модели в формуле (2.1) для коррекции плохой оценки. Вообще, матрицу $P(0)$ можно задать в виде:

$$P(0) = \lambda I, \tag{6}$$

где $\lambda$ — некоторое число, выбираемое в соответствии с пунктом «б», при этом $\vec{\hat{c}_{LS}}(0)$ — любой вектор, размерности m.

В лабораторной работе нужно исследовать сходимость алгоритма в зависимости от задания начальных приближений $\vec{c_{LS}}(0)$ и $P(0)$. Для исследования процесса сходимости можно построить сглаженные по десяти последовательным значениям ошибки оценки, рассчитанные по формуле:

$$err(i) = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}\sum_{j=0}^{n-1}(\hat{c_{LS}}_j(i-k) - c_j))^2} \tag{7}$$

, где $i$ - номер итерации/измерения, $k$ - номер итерации/измерения, $j$ - порядковый номер параметра объекта.

Графики сглаженной ошибки оценки (7), соответствующие различным значениям параметра $\lambda$ в задании начального приближения матрицы $P(0)$ и одних и тех же начальных приближениях оценок параметров имеют вид:

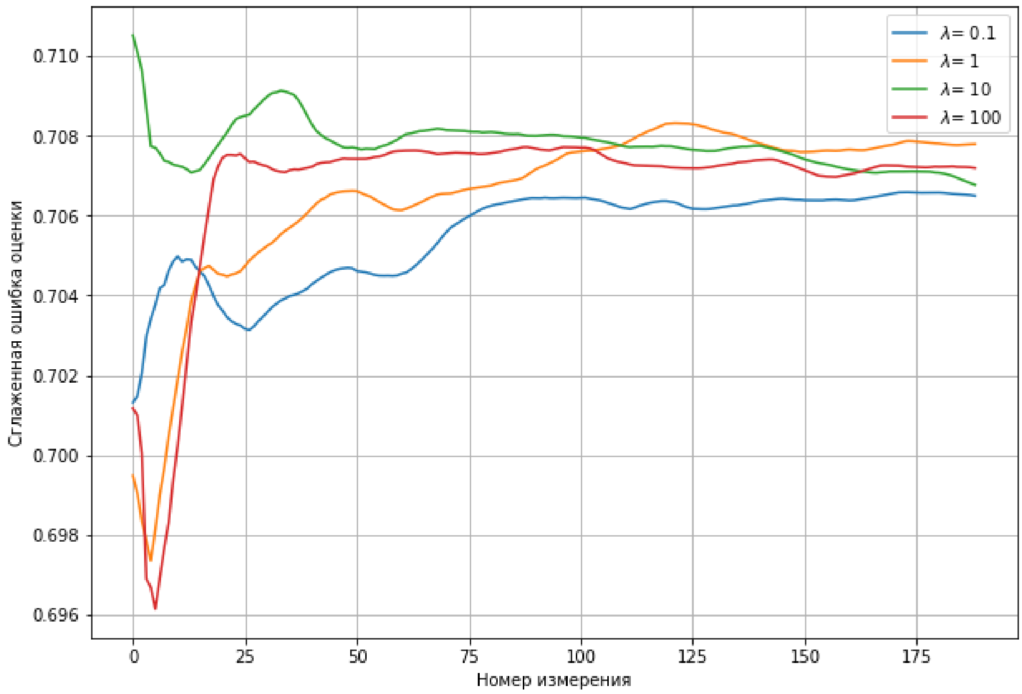


Рис. 1: Сглаженная ошибка оценки

**Задание и порядок выполнения лабораторной работы**

При выполнении лабораторной работы необходимо:

1. Изучить теоретические основы рекуррентной формы метода наименьших квадратов и сформировать план (в виде таблицы) проведения исследований. Примерный вид таблицы изображен ниже.

2. Провести идентификацию коэффициентов $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4$ линейного регрессионного объекта при различных начальных значениях оцениваемых параметров $c_0(0), c_1(0), c_2(0), c_3(0), c_4(0)$ и матрицы $P(0) = \lambda I$ (данные вариантов для тестового моделирования приведены в приложении 1).

3. Построить графики изменения сглаженной ошибки оценки, рассчитанной по формуле (2.7), в зависимости от номера итерации. Рекомендуется на одном листе компоновать графики, имеющие одинаковые начальные приближения оцениваемых параметров $c_0(0), c_1(0), c_2(0), c_3(0), c_4(0)$ и различные значения $P(0) = \lambda I$.

4. Исследовать точность оценки параметров $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4$ в зависимости от начальных приближений оцениваемых параметров $c_0(0), c_1(0), c_2(0), c_3(0), c_4(0)$ и различных значений $P(0) = \lambda I$.

5. Исследовать динамику изменения сглаженной ошибки оценки в зависимости от начальных приближений оцениваемых параметров $c_0(0), c_1(0), c_2(0), c_3(0), c_4(0)$ и различных значений $P(0) = \lambda I$.

6. Полученные результаты необходимо представить в виде графиков, аналогичных изображенным на рис. 2.10.

7. Оформить отчет по лабораторной работе в соответствии с требованиями, изложенными во введении.

### Контрольные вопросы

1. Запишите общий вид рекуррентной последовательности для идентификации параметров объекта.

2. Отметьте, в чем состоят основные достоинства рекуррентного алгоритма по сравнению с методами оценивания по полному объему измерений и, в частности, по методу наименьших квадратов для линейных регрессионных объектов.

3. Когда, на Ваш взгляд, удобнее использовать рекуррентную форму оценивания, а когда лучше применять оценивание по полному объему измерений?

4. Какие способы задания начального приближения Вы знаете?

5. Как связана процедура задания начального приближения с априорными знаниями о параметрах идентифицируемого объекта. Почему при малой априорной информации об объекте рекомендуется задавать $\lambda >> 1$?

6. Покажите, что матрица $P(0)$, рассчитываемая по формуле (2.3) пропорциональна ковариационной матрице ошибки оценки.

7. Какая оценка, вычисленная по N измерениям, на Ваш взгляд будет более точной: рекуррентная оценка или оценка по полному объему измерений.

Приложение 1

# Варианты к лабораторным работам

| № вар. | $c_0$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 2 | 3 | 1 | 4 |
| 2 | 5 | 2 | 10 | 17 | 14 |
| 3 | 1.5 | 2.5 | -3.5 | 4.5 | 5 |
| 4 | 1.9 | -0.9 | 0.8 | 0 | 2.5 |
| 5 | 3.5 | -0.3 | 0 | 6.0 | -2.2 |
| 6 | 1.5 | 0.2 | -0.1 | 0.3 | 1 |
| 7 | 2 | 4 | 7 | 3 | 5 |
| 8 | 5 | 2.5 | 0.1 | -3 | -2.5 |
| 9 | -12.7 | 4.3 | -1.8 | 9.1 | 2.4 |
| 10 | 7 | 8.9 | 4 | 0.5 | -3.5 |
| 11 | 2 | 4 | 1 | 2 | 3 |
| 12 | 7 | 11 | -5 | 2 | -4 |
| 13 | 3 | 1 | 5 | 2 | 7 |
| 14 | 2 | 5 | 7 | -12.7 | 4.3 |
| 15 | -7 | 8 | 6 | 12 | -20 |
| 16 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 17 | 3 | 1 | 4 | 2 | 5 |
| 18 | 1 | -1 | 5 | 3 | 8 |
| 19 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 |
| 20 | 15 | 6 | 8 | 10 | 5 |
| 21 | 1 | 0 | 6 | -1 | 4 |
| 22 | 2 | 6 | 1 | 9 | 3 |

# Уравнение имитируемого объекта:

$$y(i) = c_0 + c_1 u_1(i) + c_2 u_2(i) + c_3 u_3(i) + c_4 u_4(i) + \eta(i)$$
$$i = 1, 2, \ldots, N$$

# Образец плана проведения исследования

<table>
<tr><th rowspan="2">Эксп. №</th><th rowspan="2" colspan="2">Исходные данные для тестового моделирования<br>$\mu_\eta = 0,\ \sigma_\eta^2 = 0.5, \sigma_u^2 = 50$</th><th colspan="6">Ошибки оценки параметров при $t = t_{кон}$</th></tr>
<tr><th>$\lvert\hat{c}_0 - c_0\rvert$</th><th>$\lvert\hat{c}_1 - c_1\rvert$</th><th>$\lvert\hat{c}_2 - c_2\rvert$</th><th>$\lvert\hat{c}_3 - c_3\rvert$</th><th>$\lvert\hat{c}_4 - c_4\rvert$</th><th>$\frac{1}{5} \cdot \sum_{j=0}^{4} (\hat{c}_j - c_j)^2$</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td rowspan="4">$\hat{c}_0(0) =$<br>$\hat{c}_1(0) =$<br>$\hat{c}_2(0) =$<br>$\hat{c}_3(0) =$<br>$\hat{c}_4(0) =$</td><td>λ =0.1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>λ =1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>λ =10</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>λ =100</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.1</td><td rowspan="4">$\hat{c}_0(0) =$<br>$\hat{c}_1(0) =$<br>$\hat{c}_2(0) =$<br>$\hat{c}_3(0) =$<br>$\hat{c}_4(0) =$</td><td>λ =0.1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>λ =1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>λ =10</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>λ =100</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.1</td><td rowspan="4">$\hat{c}_0(0) =$<br>$\hat{c}_1(0) =$<br>$\hat{c}_2(0) =$<br>$\hat{c}_3(0) =$<br>$\hat{c}_4(0) =$</td><td>λ =0.1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>λ =1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>λ =10</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>λ =100</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>