ENONCE

1. Le graphe G est *eulérien* s'il existe un cycle en empruntant exactement une fois chaque arête du graphe G. Écrire le problème de décision qui lui est associé. La réponse devra suivre ce formalisme :

   Données : *Les données d'entrée*

   Question : *Une question dont la réponse est* oui *ou* non

2. Le graphe G est *hamiltonien* s'il existe un cycle en empruntant exactement une fois chaque sommet du graphe G. Écrire le problème de décision qui lui est associé.

3. Le problème du plus court chemin entre deux sommets dans un graphe s'exprime de la manière suivante :

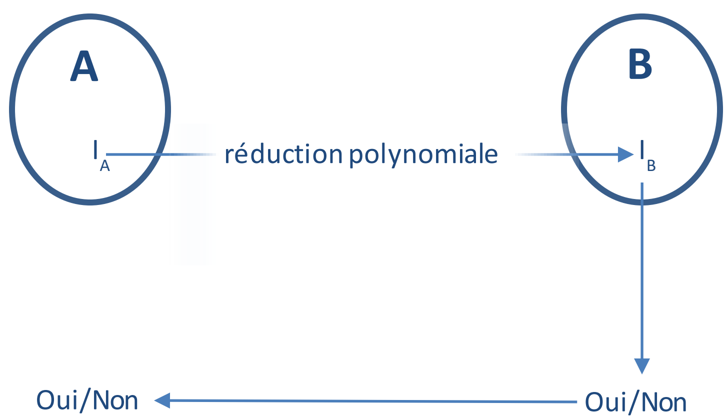
   Données : Un graphe $G=(U, E)$, deux sommets $u, v \in U$

   Question : Quel est le plus court chemin dans G de u à v ?

   a. Écrivez le problème de décision correspondant, dans lequel on cherche un chemin de u à v d'une longueur inférieure à une valeur k donnée en paramètre du problème.
   b. Reformulez le problème d'optimisation de manière à utiliser le problème de décision du dessus.

4. Le problème de la coloration d'un graphe G consiste à affecter une couleur à chaque sommet de G, en interdisant à deux sommets voisins d'avoir la même couleur, en utilisant un nombre minimum de couleurs.
   a. Écrivez le problème d'optimisation.
   b. Écrivez le problème de décision associé.
   c. Reformulez le problème d'optimisation de manière à utiliser le problème de décision du dessus.

5. Soient A, et B des problèmes de décision. Considérons que A se réduit polynômialement à B :



Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, et pourquoi :

   a. B au moins aussi difficile que A.
   b. B au plus aussi difficile que A.

6. Soient A, et B des problèmes de décision. Supposons que A est dans $\mathcal{P}$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, et pourquoi :
   a. Si A se réduit polynômialement à B, alors B est dans $\mathcal{P}$
   b. Si B se réduit polynômialement à A, alors B est dans $\mathcal{P}$

7. Considérons les deux problèmes Cycle Hamiltonien et Chaine Hamiltonienne.

   Cycle Hamiltonien

   Données : un graphe non orienté G.

   Question : G contient-il un cycle hamiltonien ?

   Chaine Hamiltonienne

   Données : un graphe non orienté G, deux sommets u et v distincts de G.

   Question : G contient-il une chaine hamiltonienne entre u et v ?

   Supposons que le problème Cycle Hamiltonien est $\mathcal{NP}$-Complet. Il faut prouver que Chaine Hamiltonienne l'est aussi. Pour cela, il faut montrer que le problème Chaine Hamiltonienne est dans $\mathcal{NP}$ (donc que la validité d'une solution peut être vérifiée en temps polynomial), et qu'il est $\mathcal{NP}$-Difficile (au moins aussi difficile que n'importe quel problème de $\mathcal{NP}$). Puisqu'il est parmi les problèmes les plus durs de $\mathcal{NP}$, il est $\mathcal{NP}$-Complet.

   Rappel : La différence entre une chaine et un cycle est qu'un cycle revient à son point de départ.

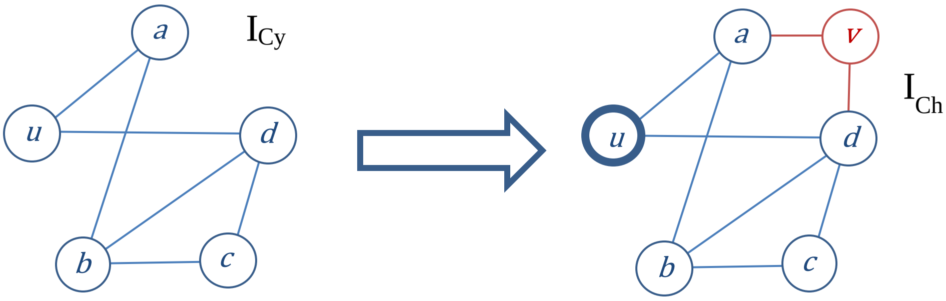
   a. Montrer que le problème Chaine Hamiltonienne est dans $\mathcal{NP}$:
      Considérez :
      - une instance I_{CH} du problème Chaine Hamiltonienne, constituée du graphe G=(V, E)
      - une suite de sommets $S_{Ch} = \{u_1,..., u_n\}$ de V.

      Proposez un algorithme qui prend en entrée I_{Ch} et S_{Ch}, et qui vérifie si S_{Ch} est une chaine hamiltonienne. Prouvez que la complexité asymptotique de cet algorithme est un polynôme de la taille de I_{Ch}.

   b. Montrez que le problème Cycle Hamiltonien se réduit polynômialement au problème Chaine Hamiltonienne :

      Considérez un algorithme qui prend en entrée une instance I_{Cy} du problème Cycle Hamiltonien, constituée du graphe G=(V, E), et qui retourne l'instance I_{Ch} du problème Chaine Hamiltonienne constituée :
      - du graphe G' obtenu en ajoutant à G un sommet v, et en le connectant à tous les voisins d'un sommet u choisi arbitrairement dans G
      - des deux sommets u et v

      Dans l'exemple suivant, le sommet choisi pour transformer I_{Cy} en I_{Ch} est u :



i. Montrez que la complexité asymptotique de cet algorithme est polynômiale.
ii. Montrez que s'il existe une chaine hamiltonienne de u à v dans G', alors il existe un cycle hamiltonien dans G.

Dans l'exemple précédent, une solution possible à l'instance $\mathrm{I_{Ch}}$ du chemin hamiltonien entre u et v est (u, a, b, c, d, v), et une solution possible à l'instance $\mathrm{I_{Cy}}$ du cycle hamiltonien est (u, a, b, c, d, u), qui est obtenu en remplaçant v par u dans la solution de $\mathrm{I_{Ch}}$.

Attention : Cet exemple sert à illustrer le raisonnement, le but n'est pas de démontrer l'existence d'un cycle dans ce graphe en particulier, mais dans tout graphe obtenu par la transformation présentée au-dessus à partir d'un graphe quelconque.

iii. Montrez que s'il n'existe pas de chaine hamiltonienne de u à v dans G', alors il n'existe pas de cycle hamiltonien dans G.

Concluez que le problème est $\mathcal{NP}$-Difficile.

REFERENCE DE LA CORBEILLE

Version	Date	Concepteurs	Relecteurs	Commentaire
1.0	13/03/2022	Benjamin COHEN BOULAKIA		Contenu récupéré du début du Workshop Ajout de questions simples Correction de l'exercice Chaine Hamiltonienne plus détaillée

SOLUTION

1. Données : un graphe G
   Question : Existe-t-il un cycle eulérien dans G ?

2. Données : un graphe G
   Question : Existe-t-il un cycle hamiltonien dans G ?

3. Problème de décision :
   Données : un graphe G, deux sommets distincts u et v, un entier k
   Question : Existe-t-il un chemin entre u et v dans G de longueur inférieure à k ?

   Problème d'optimisation :
   Données : un graphe G, deux sommets distincts u et v, un entier k
   Question : Quelle est la plus petite valeur de k pour laquelle la réponse au problème de décision est *oui* ?

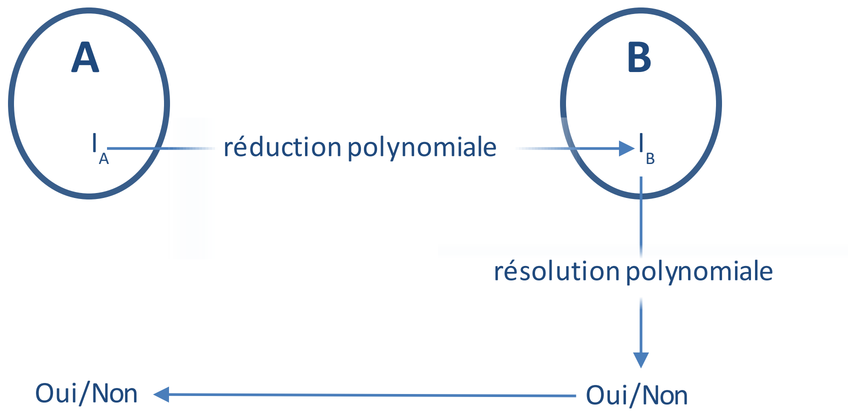
4.
   a. Problème d'optimisation :
   Données : Un graphe $G=(U, E)$
   Question : Quel est le plus petit nombre de couleurs k avec lequel on peut colorier G, de manière à avoir $(u, v) \in E \Rightarrow k(u) \neq k(v)$

   b. Problème de décision :
   Données : Un graphe $G=(U, E)$, un entier k
   Question : Peut-on colorier G avec k couleurs, de manière à avoir $(u, v) \in E \Rightarrow k(u) \neq k(v)$

   c. Reformulation du problème d'optimisation :
   Données : Un graphe $G=(U, E)$, un entier k
   Question : Peut-on colorier G avec k couleurs, de manière à avoir $(u, v) \in E \Rightarrow k(u) \neq k(v)$

5. « A se réduit polynômialement à B » signifie qu'il existe un algorithme polynomial qui transforme une instance I_A de A en instance I_B de B, tel que la réponse à I_A est la même que la réponse à I_B. Plus formellement, on dit que $I_A \in$ OUI(A)[1] si et seulement si $I_B \in$ OUI(B).

   On montre que si B peut se résoudre en temps polynomial, alors A peut se résoudre en temps polynomial :



- On transforme une instance I_A de A en instance I_B de B en temps polynomial (avec l'algorithme de la réduction polynomiale)
- On résout l'instance I_B en temps polynomial (puisqu'on a posé l'hypothèse que B peut se résoudre en temps polynomial)

Symétriquement, on démontre aussi que si A ne peut pas se résoudre en temps polynomial, B ne peut pas non plus se résoudre en temps polynomial (si un algorithme résolvant B existait, on pourrait l'utiliser pour résoudre A)

En conclusion, si on peut résoudre B, on peut résoudre A, et si on ne peut pas résoudre A, on ne peut pas non plus résoudre B. B est au moins aussi *difficile* que A (la réponse a. est juste, et par conséquent la réponse b. est fausse).

6.

   a. Si A se réduit polynômialement à B, alors B est dans $\mathcal{P}$: Faux.
   Si A $\in \mathcal{P}$ se réduit polynômialement à B, cela veut dire que B est au moins aussi difficile que A, donc potentiellement plus. On ne peut rien déduire de particulier.

   b. Si B se réduit polynômialement à A, alors B est dans $\mathcal{P}$: Vrai.
   Si B se réduit polynômialement à A, alors A est au moins aussi difficile que B. Comme A est dans $\mathcal{P}$, B est aussi dans $\mathcal{P}$.

7.

   a. On doit construire un algorithme vérifiant si S_{CH} est une chaine hamiltonienne dans I_{CH}.
   Cet algorithme aura trois étapes :

[1] L'ensemble des instances de *A* pour lesquelles la réponse est *oui*

1. Vérifier si S_{CH} est bien une chaine du graphe de I_{CH}, c'est-à-dire s'il existe dans I_{CH} une arête entre chaque paire de sommets successifs de S_{CH}.
2. Parcourir S_{CH} pour vérifier que chaque sommet de I_{CH} n'y apparait qu'une fois.
3. Vérifier si S_{CH} a pour extrémités u et v.

Déterminons la complexité de cet algorithme. On considère que la vérification d'existence d'une arête dans I_{CH} peut se faire en $O(1)$ pour la structure de données considérée[1]. On considère aussi que la lecture d'un élément dans S_{CH} peut se faire en $O(1)$ pour la structure de données considérée[2].

Remarque : dans la plupart des preuves de $\mathcal{NP}$-Complétude, cette étape d'hypothèses sur les performances d'accès est ignorée, l'accès en temps constant pour les opérations nécessaires est sous-entendu et admis. Cela doit malgré tout rester un point de vigilance.

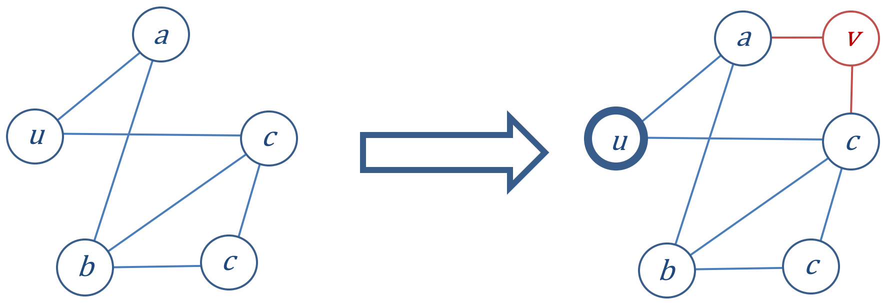
Soit n le nombre de sommets du graphe de I_{CH}. La complexité asymptotique de chaque étape est la suivante :

1. La première étape se fait en $O(n)$. En effet, il y a au plus n-1 arêtes dans une solution valide. S'il y a plus de n-1 arêtes, on sait que la solution est invalide.
2. La deuxième étape se fait en $O(n)$. Il suffit d'implémenter un dictionnaire associant à chaque sommet le fait qu'il a été visité pendant le parcours de S_{CH}.
3. La troisième étape se fait en $O(1)$.

Chaque étape étant de complexité polynomiale, l'algorithme de vérification est lui-même polynomial.

b.

i. L'instance I_{Cy} du problème <u>Cycle Hamiltonien</u> est constituée du graphe $G=(V, E)$. L'instance I_{Ch} du problème <u>Chaine Hamiltonienne</u> est constituée :
   - du graphe $G' = (V', E')$ avec
     - $V' = V + \{v\}$ avec $v \notin V$
     - $E' = E \cup \{(v, l) : l$ est un voisin de u dans $G\}$ avec u un sommet aléatoire de G
   - des deux sommets u et v



On suppose que l'ajout du sommet v se fait en $O(1)$ pour la structure de données considérée[3]. L'ajout des arêtes vers les voisins de u se fait au plus en n-1 opérations (si

[1] C'est le cas pour la matrice d'adjacence, et pour la liste d'adjacence lorsqu'elle est implémentée avec un dictionnaire.

[2] C'est le cas d'une structure contigüe simple (tableau en C, tuple en Python…) ou une structure optimisée (Set en Python).

[3] C'est le cas pour la matrice d'adjacence.

u est relié à tous les autres sommets de G). La complexité de cette transformation est donc $O(n)$.

ii. Supposons qu'il existe une chaine hamiltonienne dans G' allant de u à v. Cette chaine est de la forme $(u, l_1, \ldots, l_{n-1}, v)$. En effet, les sommets $\{l_i\}$ sont les voisins de u dans G, et ce sont dans G' les seuls sommets reliés à v, par construction de G'.
On en déduit qu'il existe forcément un cycle hamiltonien dans G. Ce cycle est constitué de la chaine précédente, dans laquelle on a remplacé le sommet final v par le sommet u, de manière à constituer un cycle (ce qui est faisable puisque dans la chaine, le prédécesseur de v est aussi un voisin de u). Ce cycle passe une et une fois par chaque sommet de G (à part v puisqu'il s'agit d'un cycle), puisque la chaine dont il est issu passe une et une fois par chaque sommet de G'.

iii. Supposons qu'il n'existe pas de chaine hamiltonienne de u à v dans G'. Il ne peut exister de cycle hamiltonien dans G. Si ce cycle existait, on pourrait, par la transformation inverse de celle présentée au-dessus, obtenir une chaine dans G'.
S'il existait un algorithme capable de résoudre polynômialement Chaine Hamiltonienne, on pourrait l'utiliser pour résoudre polynômialement Cycle Hamiltonien. Donc, Cycle Hamiltonien $\leqslant$ Chaine Hamiltonienne, et Chaine Hamiltonienne est donc $\mathcal{NP}$-Difficile.

Comme Chaine Hamiltonienne est dans $\mathcal{NP}$, Chaine Hamiltonienne est $\mathcal{NP}$-Complet.