Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
Кафедра инженерной кибернетики

Лабораторная работа №2
Моделирование механических систем

по дисциплине
«Математическое моделирование»

Направление подготовки:
01.03.04 Прикладная математика

Выполнил:
Студент группы БПМ-19-2
Богданов Артем Андреевич
Проверил:
Доцент кафедры ИК
Добриборщ Дмитрий Эдуардович

Москва, 2021

1. Моделирование механической системы масса-пружина

Уравнение системы:

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \qquad (1)$$

1.1. Применив преобразование Лапласа (с нулевыми начальными условиями) найти передаточную функцию модели:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \ldots$$

С нулевыми начальными условиями имеем:

$$x(0) = 0,\ \ \dot{x}(0) = 0,\ \ \ddot{x}(0) = 0$$

Применим преобразования Лапласа:

$x(t) \risingdotseq X(s)$

$\dot{x}(t) \risingdotseq sX(s) - x(0) = sX(s)$

$\ddot{x}(t) \risingdotseq s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2X(s)$

Подставив в уравнение (1), получим:

$\mathrm{M}s^2X(s) + BsX(s) + kX(s) = F(s)$

$X(s)(Ms^2 + Bs + k) = F(s)$

Искомая передаточная функция:

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{X(s)}}{\mathrm{F(s)}} = \frac{1}{\mathrm{Ms^2 + Bs + k}} \qquad (2)$$

1.2. Переписать уравнение (1) в форму вход-состояние-выход.

М – масса ⇒ $\mathrm{M} \neq 0$. Разделим уравнение (1) на М:

$$\ddot{x}(t) + \frac{B}{M}\dot{x}(t) + \frac{k}{M}t = \frac{1}{M}f(t)$$

Отсюда:

$$a_1 = \frac{B}{M}, \qquad b_1 = 0,$$

$$a_2 = \frac{k}{M}; \qquad b_2 = \frac{1}{M};$$

Форма вход-состояние-выход в общем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \ \ y = Cx \end{cases} \qquad (3)$$

При этом:

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad C = (1 \quad 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -\frac{B}{M} & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}; \quad C = (1 \quad 0) \quad (4)$$

1.3. Составить структурную схему моделирования, опираясь на уравнение (1) и результат, полученный в задании 1.2.

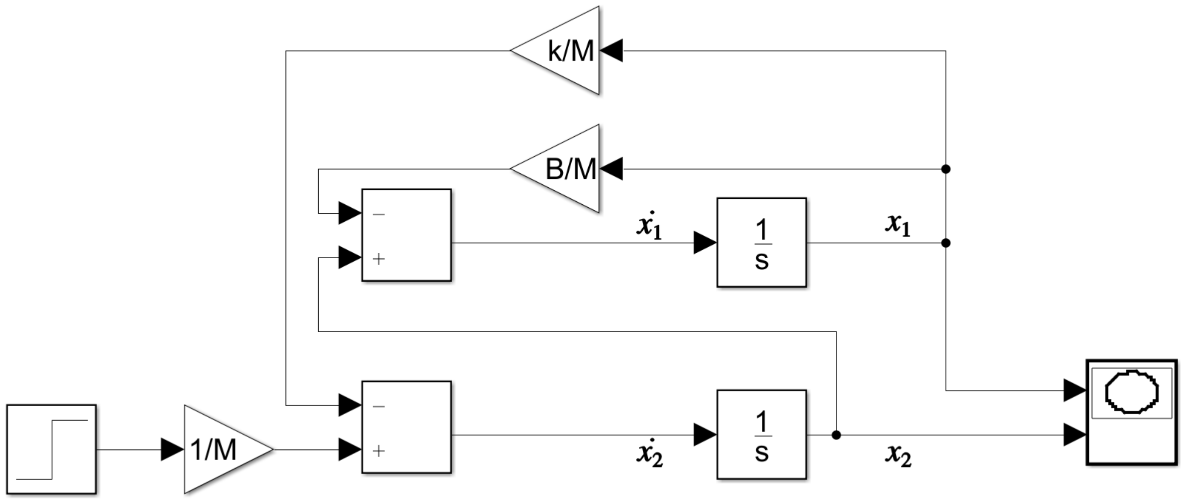

Рисунок 1. Структурная схема

1.4. Результаты моделирования задания 1.4 можно увидеть на рисунках 2 и 3.

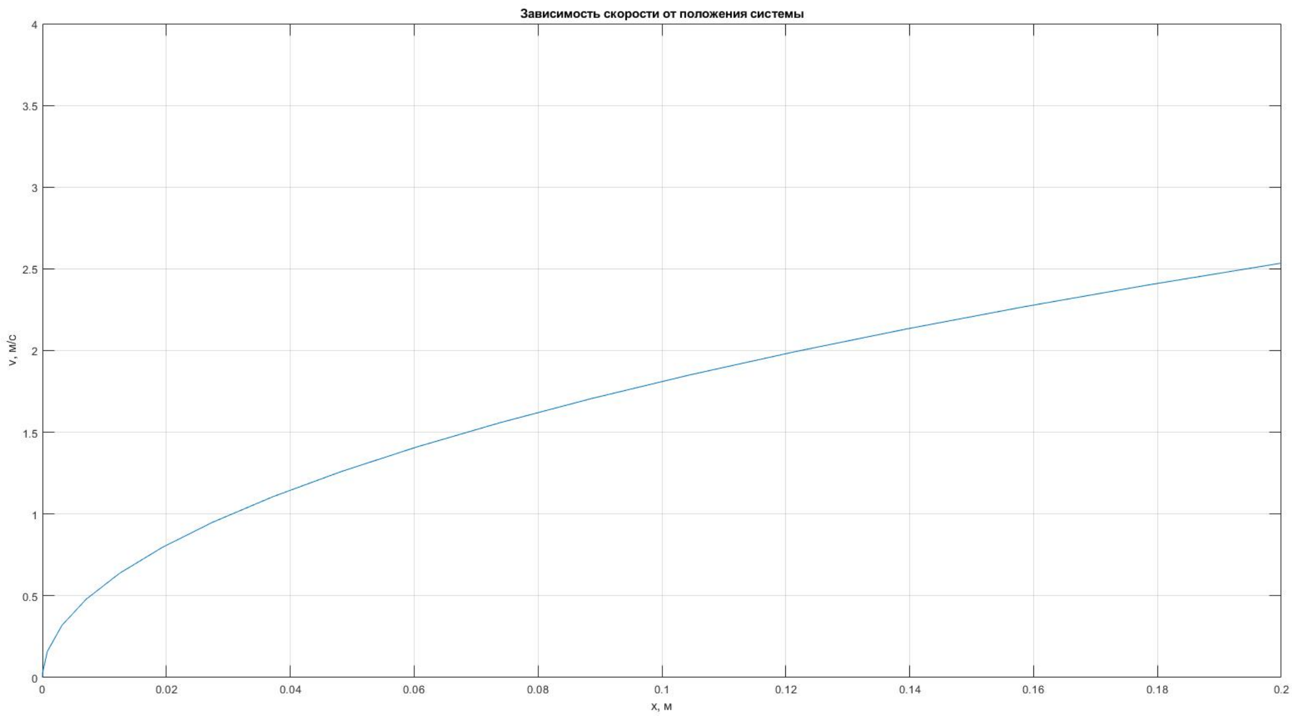

Рисунок 2. Зависимость скорости от положения системы

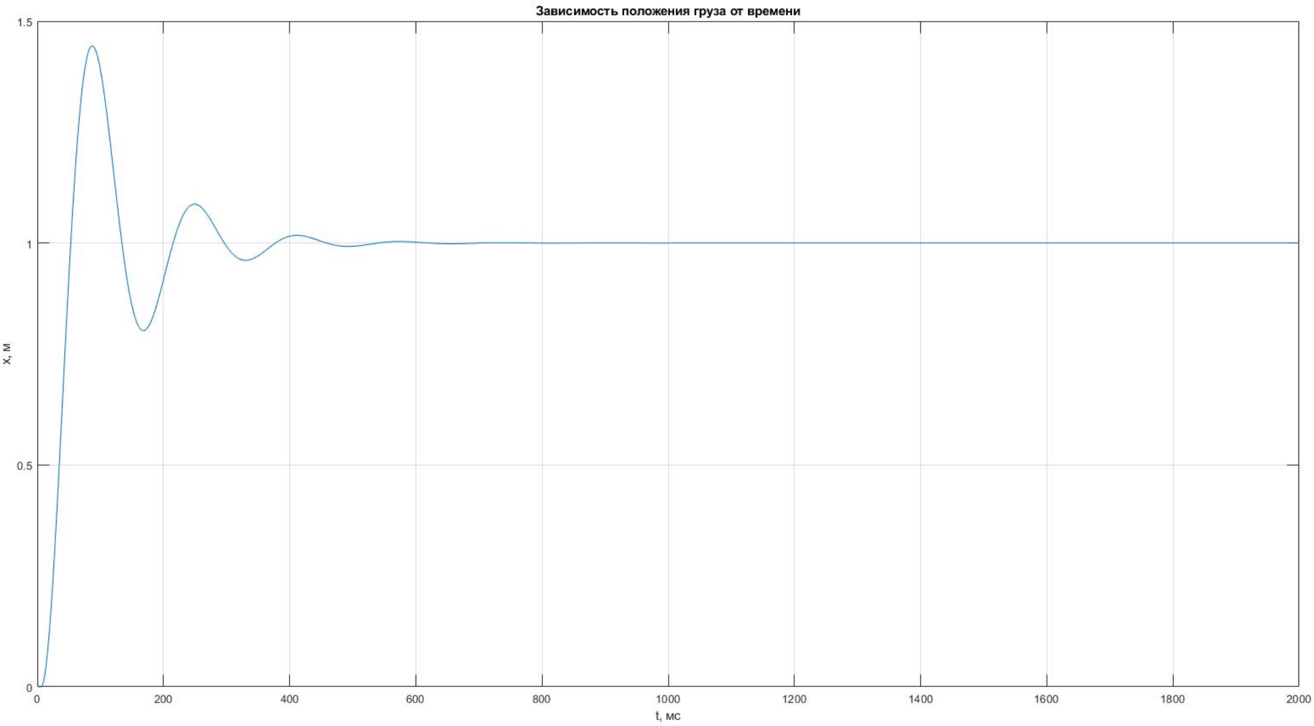

Рисунок 3. Зависимость положения груза от времени

2. Моделирование механической системы масса-пружина

Уравнение системы:

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}sin(\theta) = 0 \qquad (5)$$

2.1. Переписать уравнение (5) в форму вход-состояние-выход.

Так как колебания малые: $sin(\theta) \approx \theta$

Перепишем уравнение (5) и применим это допущение:

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

По аналогии с пунктом 1.2 получим:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{B}{M} & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

2.2. На рисунке 4 изображена структурная схема для задания 2.2.

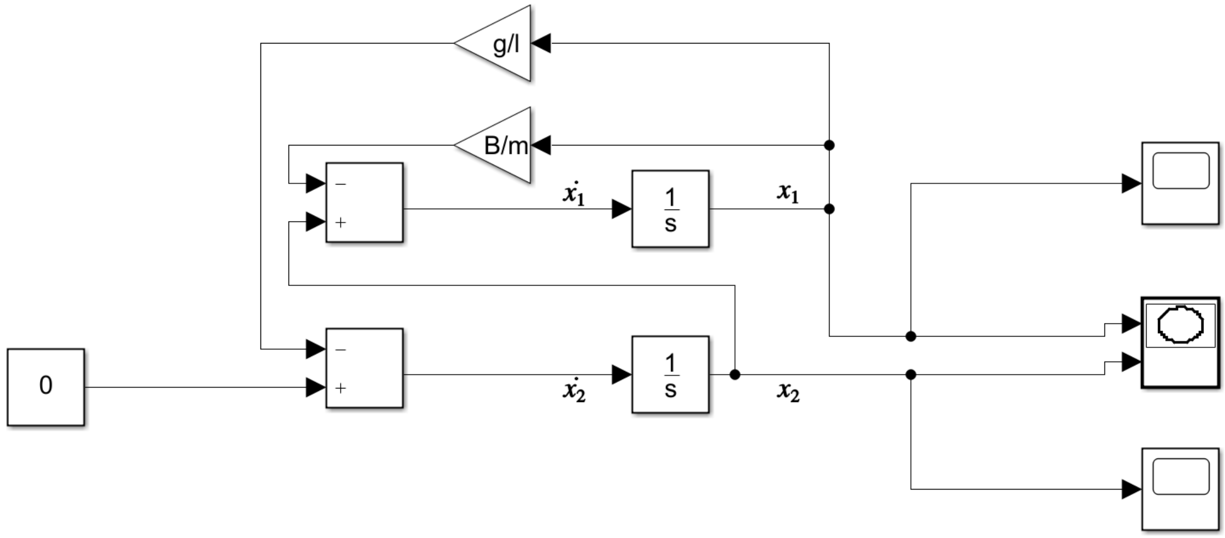

Рисунок 4. Структурная схема

2.3. Далее приведены результаты моделирования.

На рисунках 5–7 приведены графики для случая $B = 0.05\,\frac{\text{кг}*\text{с}}{\text{м}}$

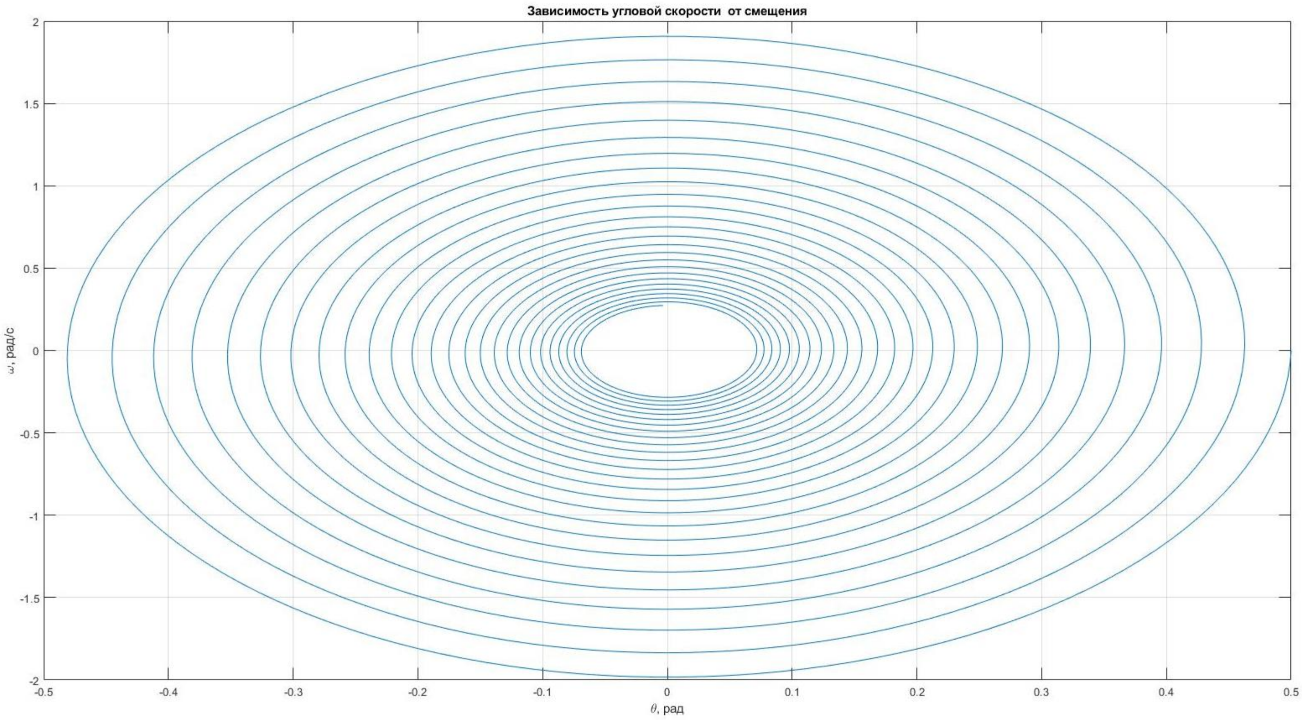

Рисунок 5. Зависимость угловой скорости от смещения

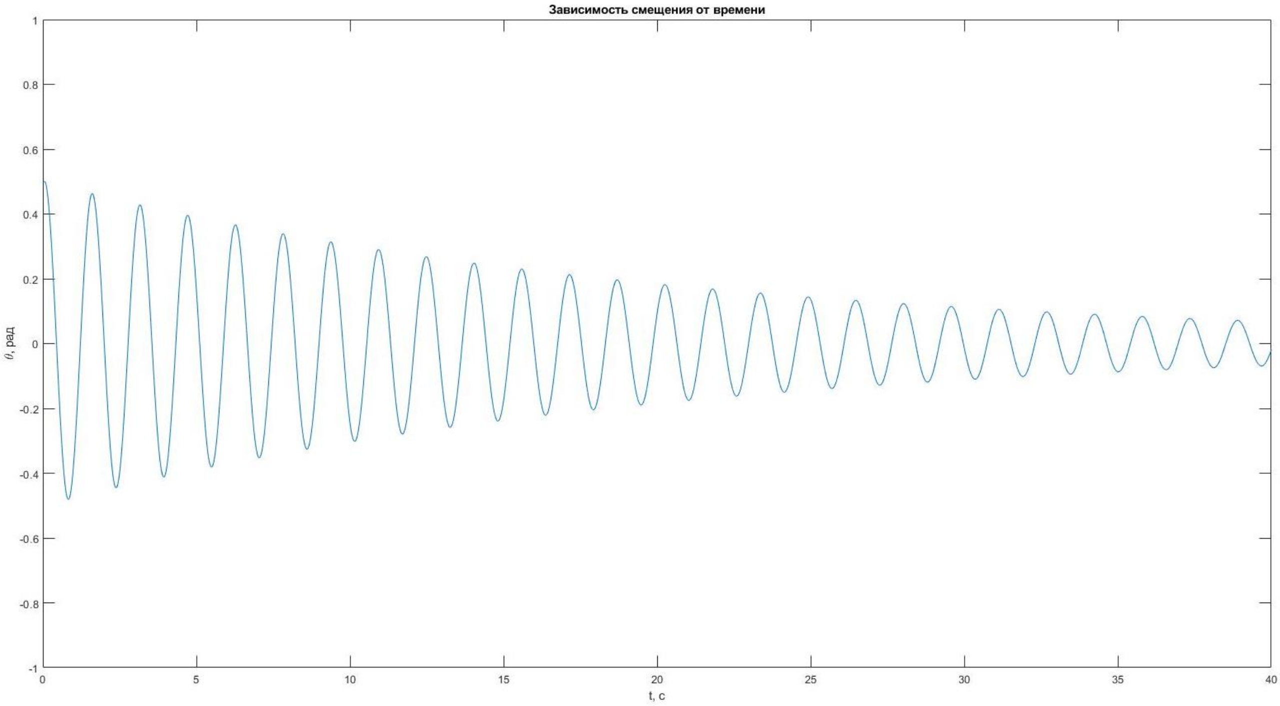

Рисунок 6. Зависимость смещения от времени

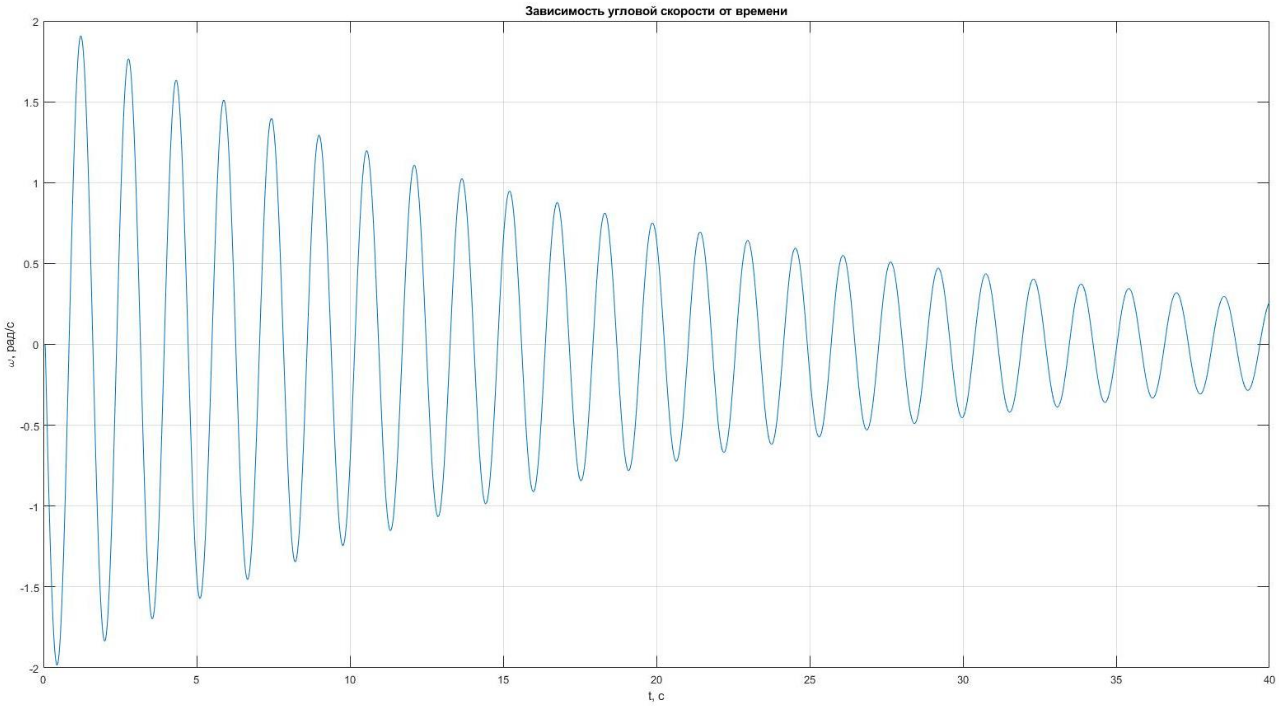

Рисунок 7. Зависимость угловой скорости от времени

На рисунках 8–10 приведены графики для случая $B = 0.4\frac{кг*с}{м}$

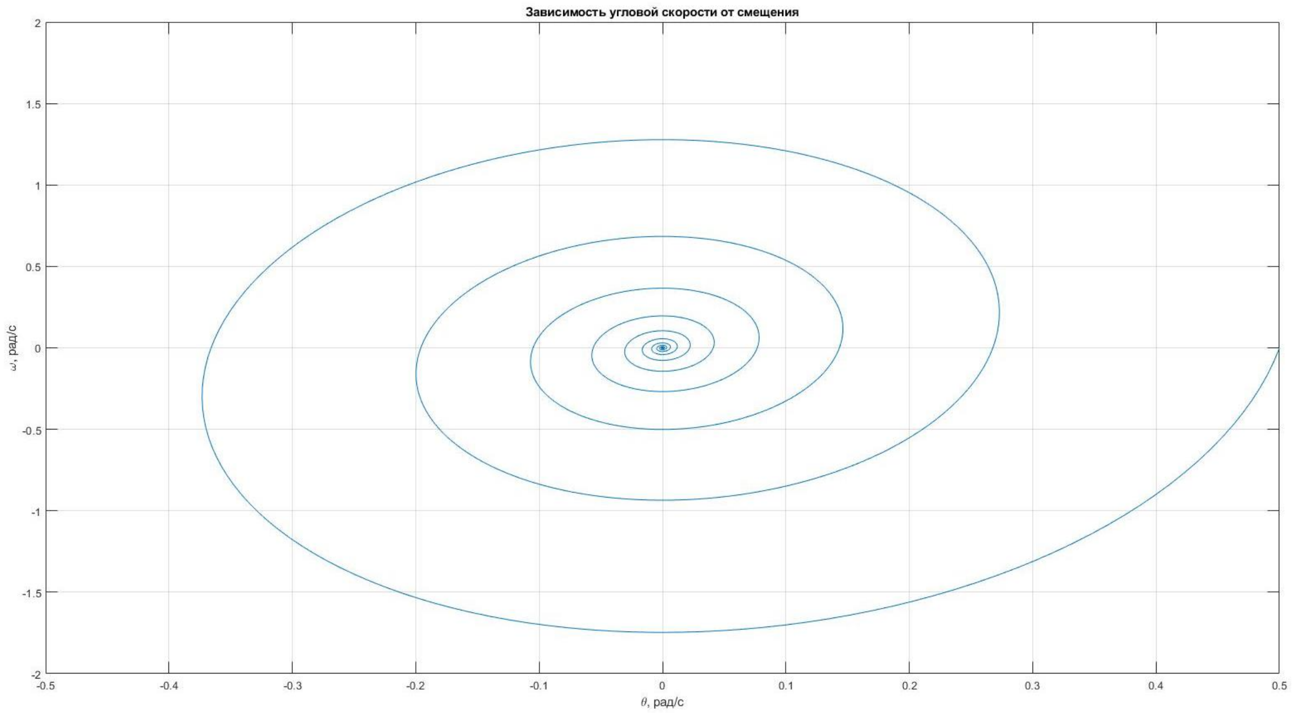

Рисунок 8. Зависимость угловой скорости от смещения

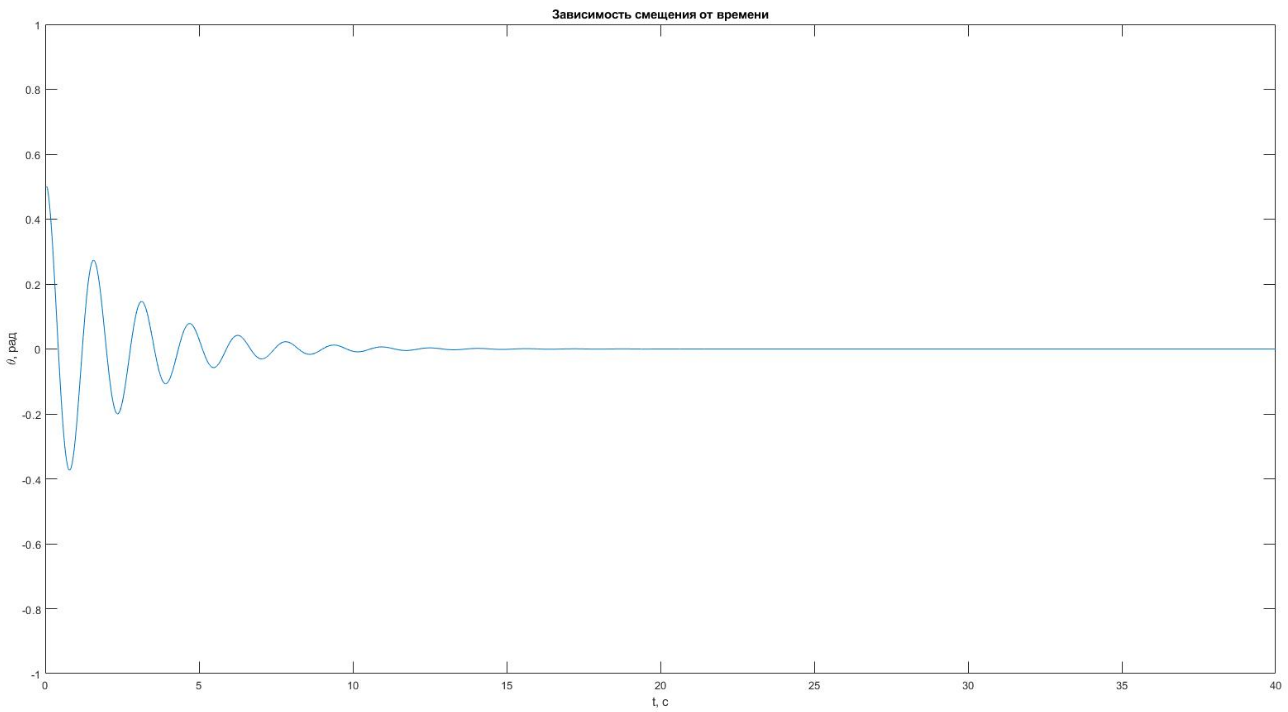

Рисунок 9. Зависимость смещения от времени

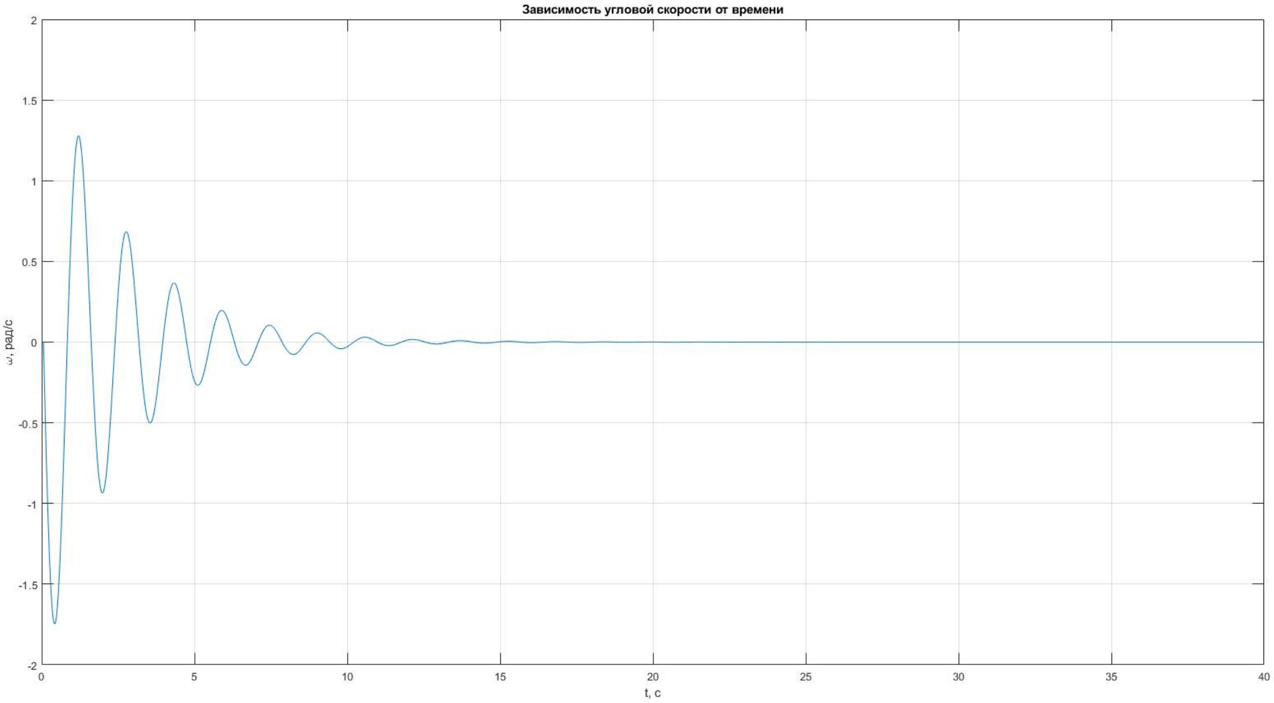

Рисунок 10. Зависимость угловой скорости от времени

Вывод: продолжил знакомство с Simulink, узнал как оформлять красивые графики в Matlab, смоделировал физический процесс и построил его структурную схему, вывел на экран различные графики.