

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
образования
«Национальный исследовательский технологический университет
«МИСиС» Кафедра инженерной кибернетики

Лабораторная работа №3
Моделирование линейных динамических систем

по дисциплине
«Математическое моделирование»

Направление подготовки:

01.03.04 Прикладная математика

Выполнил:

Студент группы БПМ-19-2

Богданов Артем Андреевич

Проверил:

Доцент кафедры ИК

Добриборщ Дмитрий Эдуардович

Москва, 2021

Исследование математических моделей

Цель работы:

Исследовать математические модели, полученные методом балансовых соотношений в пакете прикладных программ MATLAB/Simulink.

Ход работы:

1. Простой цилиндрический резервуар с жидкостью

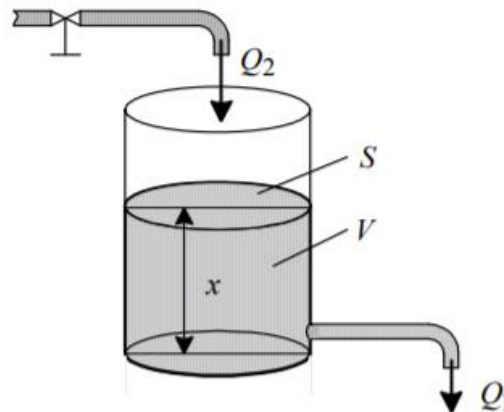


Рис. 1 Простой цилиндрический резервуар с жидкостью

Введем следующие обозначения:

V – объём жидкости;

S – площадь поверхности жидкости;

Q_1, Q_2 – объёмные расходы жидкости;

F – площадь проходного отверстия сливной трубы. Расход Q_2 принимается в качестве управляющего воздействия.

Уравнение материального баланса жидкости для данного резервуара имеет вид:

$$\Delta V + Q_1 * \Delta t = Q_2 * \Delta t$$

Предположим, что $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta V \rightarrow 0$ и разделим на Δt :

$$\dot{V} + Q_1 = Q_2;$$

Объём жидкости V выражается через её уровень x :

$$V = S * x,$$

$$\dot{V} = S * \dot{x}$$

$$\frac{\rho * v_0^2}{2} + \rho * g * x + P_1 = \frac{\rho * v^2}{2} + \rho * g * x_0 + p_2$$

v – скорость истечения жидкости из сливного отверстия;

v_0 – скорость изменения уровня жидкости в резервуаре;

$x - x_0$ – перепад высот жидкости в резервуаре; p_1, p_2 – статические давления над жидкостью в резервуаре и за сливным отверстием; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения

$\frac{\rho * v_0^2}{2}$ – динамическое или скоростное давление

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2 * g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (x - x_0)$$

$\gamma = \rho * g$ – удельный вес

В предположении, что $v_0 \gg v$, $x_0 = 0$, $p_1 = p_2$, скорость истечения жидкости будет определяться выражением $v = \sqrt{2 * g * x}$. При умножении левой и правой частей этого выражения на площадь проходного сечения F , получается:

$$F * v = Q_1 = F * \sqrt{2 * g * x}$$

С помощью поправочного коэффициента μ , часто определяемого экспериментально, может быть учтена форма и состояние поверхности сливного отверстия.

$$Q_1 = \mu * F * \sqrt{2 * g * x}$$

Таким образом получено уравнение материального баланса для истечения жидкости в цилиндрическом резервуаре:

$$S * \dot{x} + \mu * F * \sqrt{2 * g * x} = Q_2$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q_2}{S} - \frac{\mu F \sqrt{2gx}}{S}$$

При $\frac{dx}{dt} = 0$ можно записать уравнение статического (стационарного) режима резервуара:

$$\mu * F * \sqrt{2 * g * x} = Q_2$$

Итак, математическая модель данной системы:

$$S * \dot{x} + \mu * F * \sqrt{2 * g * x} = Q_2$$

Взяв в качестве переменных состояния $v_1 = Q_2, v_2 = x$, получим уравнение системы в форме вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = b_1 * u, \\ \dot{v}_2 = \frac{1}{S} * v_1 - \frac{\mu * F * \sqrt{2 * g}}{S} * \sqrt{v_2}, \\ y = v_2; \end{cases}$$

Структурная схема модели представлена на рисунке 2.

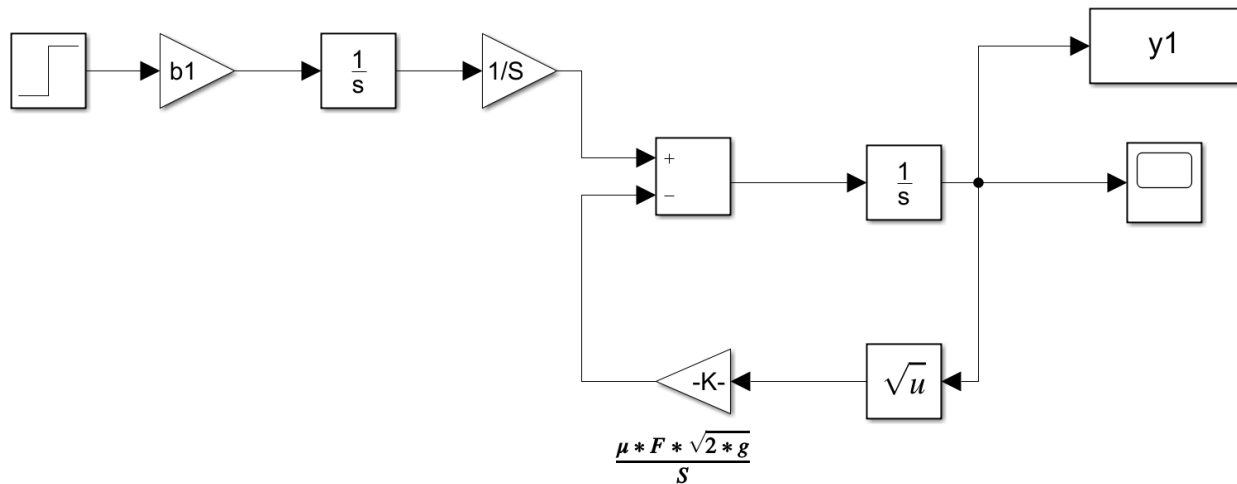


Рис. 2 Схема простого цилиндрического резервуара с жидкостью

Зададим следующие значения величин, участвующих в процессе:

$$S = 2 \text{ м}^2$$

$$F = 0.006 \text{ м}^2$$

$$g = 9.81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\mu = 0.6$$

$$b_1 = 1$$

$$Q_2 = 0.001 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$$

Получившийся график зависимости высоты столба жидкости x от времени t представлен на рисунке 3.

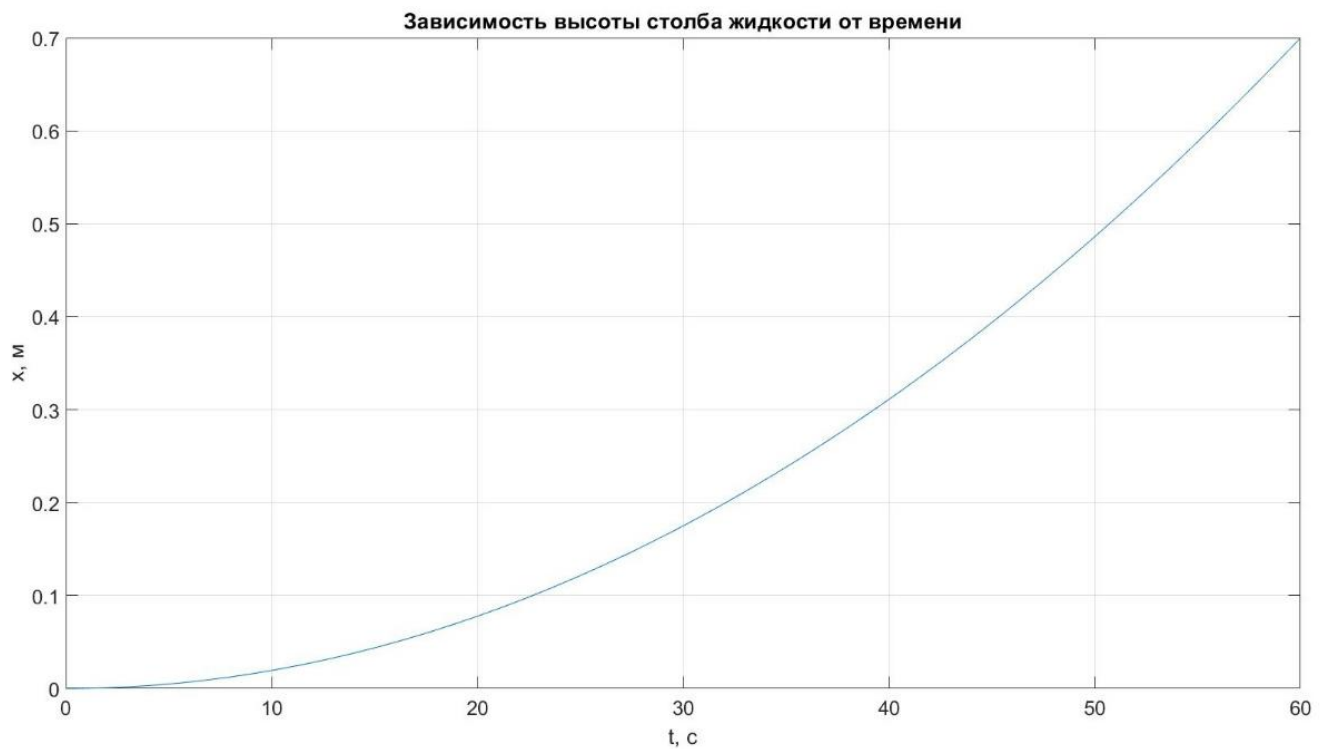


Рис. 3 График зависимости высоты столба жидкости x от времени t

2. Резервуар, имеющий форму усеченного конуса

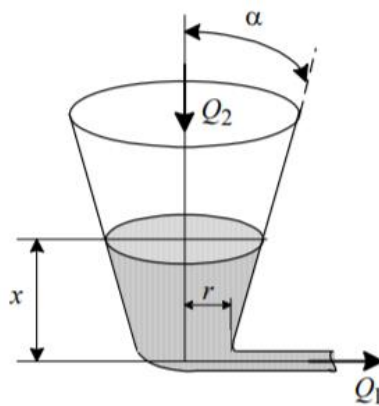


Рис. 4 Резервуар с усеченным конусом

В данном случае коэффициент S при производной равен (определяется геометрическими размерами резервуара):

$$S = S(x) = \pi(r^2 + 2 * r * x * \tan \alpha + \tan^2 \alpha * x^2)$$

Система вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = b_1 * u, \\ \dot{v}_2 = \frac{v_1 - \mu * F * \sqrt{2 * g} * \sqrt{v_2}}{\pi(r^2 + 2 * r * v_2 * \tan \alpha + \tan^2 \alpha * v_2^2)}, \\ y = v_2; \end{cases}$$

Структурная схема модели представлена на рисунке 5.

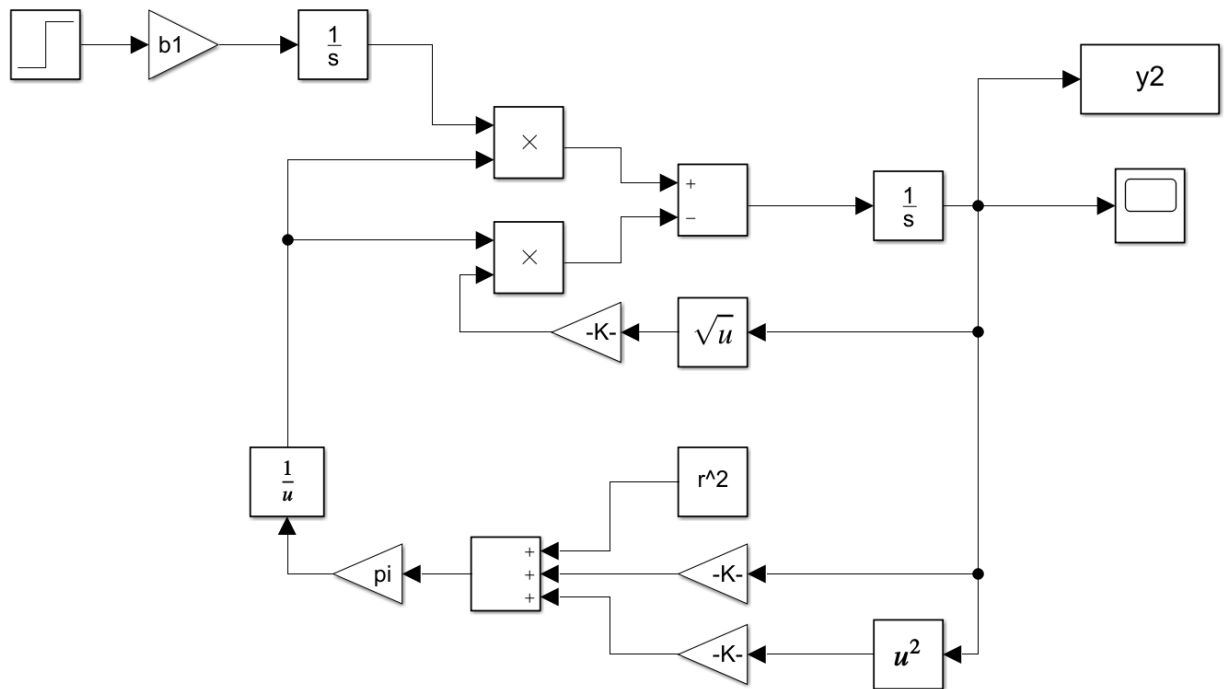


Рис. 5 Схема резервуара, представленного усеченным конусом

Зададим следующие значения величин, участвующих в процессе:

$$F = 0.006 \text{ м}^2$$

$$g = 9.81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\mu = 0.6$$

$$b_1 = 1$$

$$Q_2 = 0.001 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$$

$$r = 0.8 \text{ м}$$

$$\alpha = 0.5 \text{ рад}$$

Получившийся график зависимости высоты столба жидкости x от времени t представлен на рисунке 6.

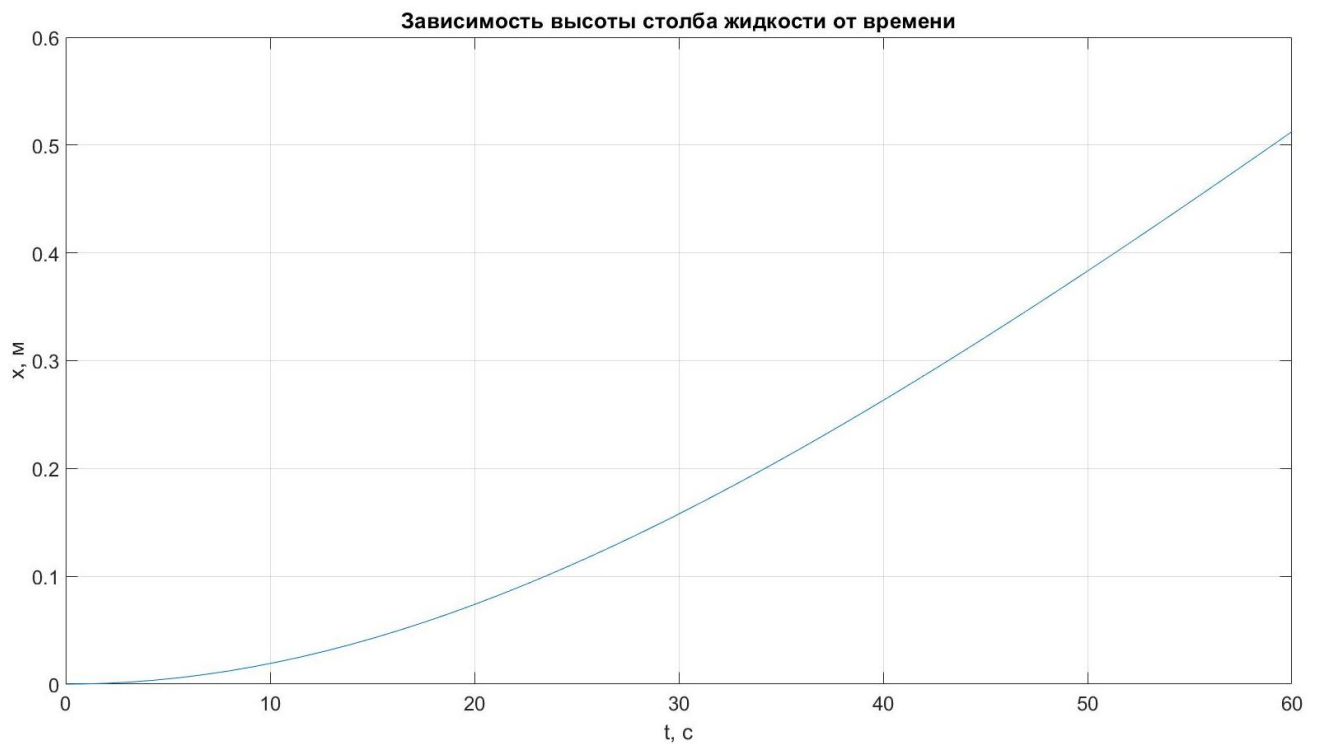


Рис. 6 График зависимости высоты столба жидкости x от времени t

3. Резервуар сферической формы

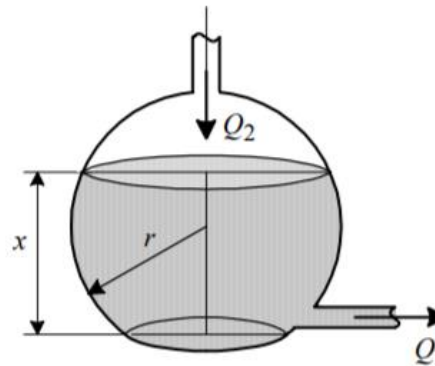


Рис. 7 Резервуар сферической формы

В данном случае коэффициент S при производной равен (определяется геометрическими размерами резервуара):

$$S = S(x) = \pi(2 * r * x - x^2)$$

Система вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = b_1 * u, \\ \dot{v}_2 = \frac{v_1 - \mu * F * \sqrt{2 * g * v_2}}{\pi(2 * r * v_2 - v_2^2)}, \\ y = v_2; \end{cases}$$

Структурная схема модели представлена на рисунке 8.

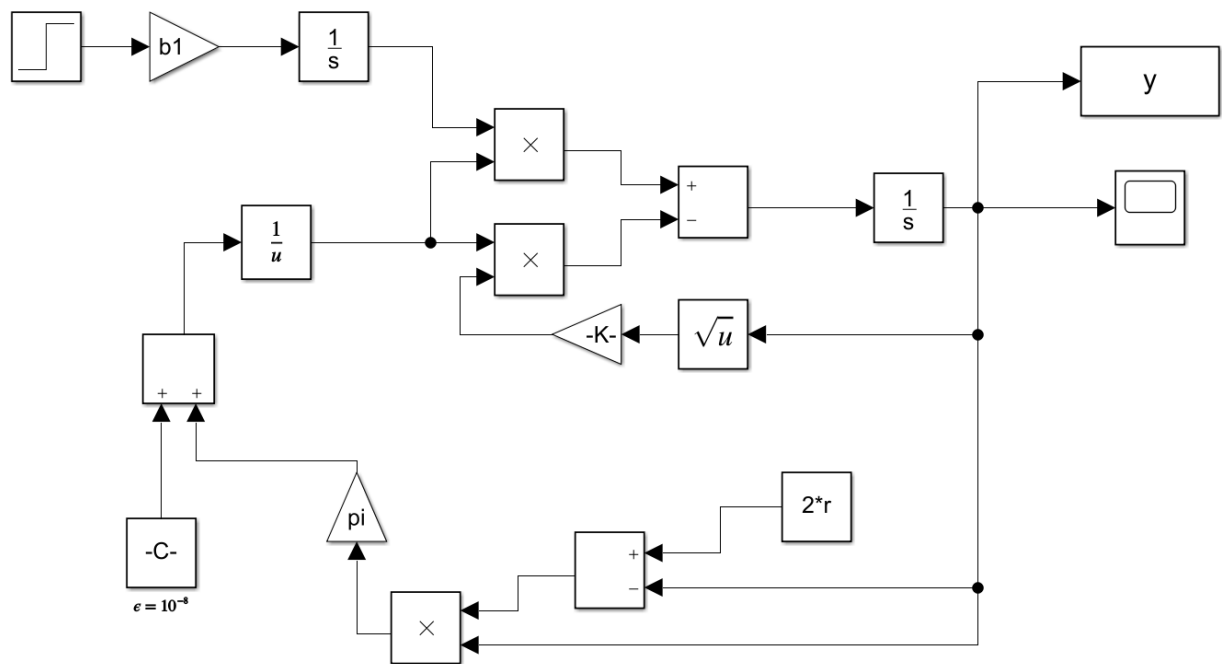


Рис. 8 Схема резервуара сферической формы

Зададим следующие значения величин, участвующих в процессе:

$$F = 0.006 \text{ м}^2$$

$$g = 9.81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\mu = 0.6$$

$$b_1 = 1$$

$$Q_2 = 0.001 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$$

$$r = 0.8 \text{ м}$$

Получившийся график зависимости высоты столба жидкости x от времени t представлен на рисунке 9.

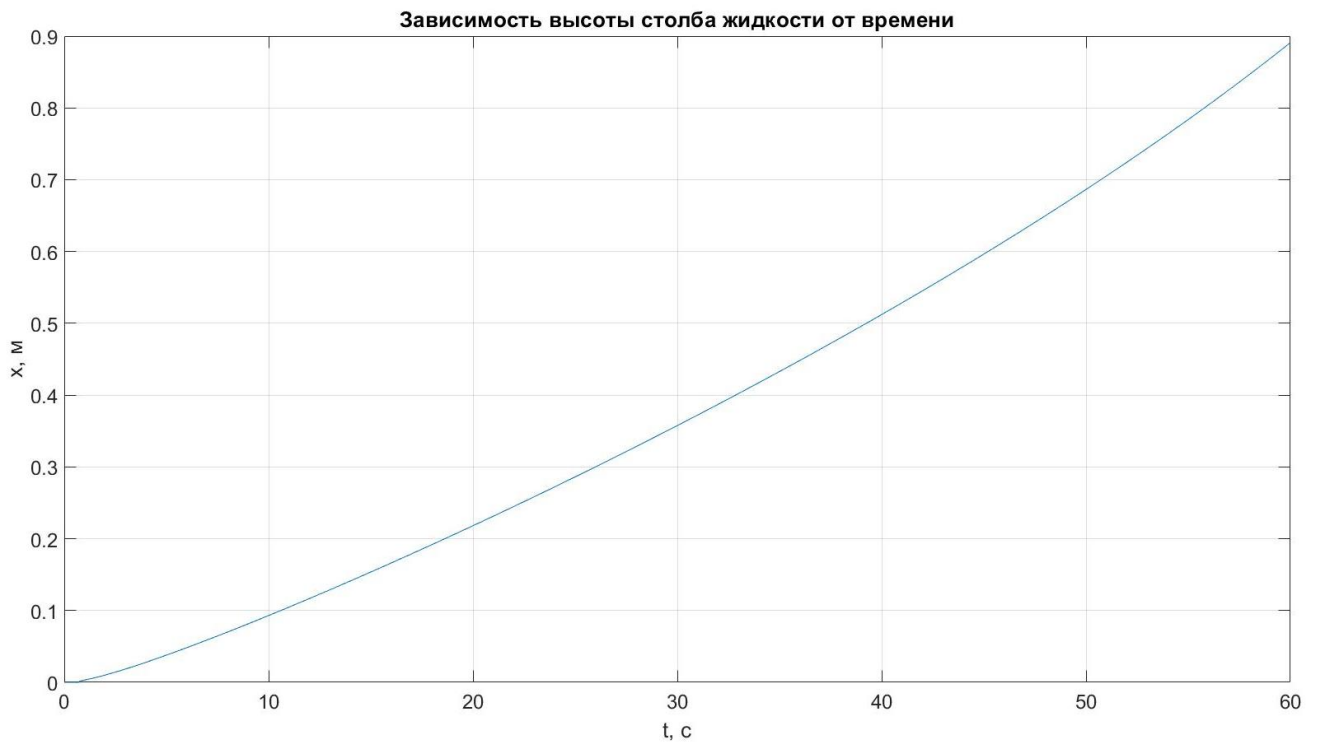


Рис. 9 График зависимости высоты столба
жидкости x от времени t

4. Флотационная машина

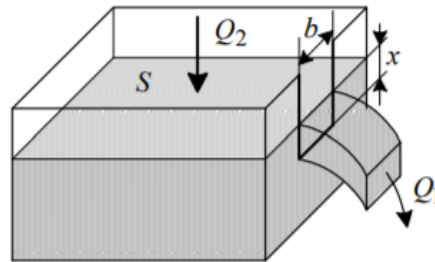


Рис. 10 Флотационная машина

Математическая модель флотационной машины:

$$S * \dot{x} + \left(0.465 + \frac{0.003}{x}\right) * b * x * \sqrt{2 * g * x} = Q_2$$

Система вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = b_1 * u, \\ \dot{v}_2 = \frac{1}{S} * v_1 - \frac{b * (0.465 * v_2 + 0.003) * \sqrt{2 * g}}{S} * \sqrt{v_2}, \\ y = v_2; \end{cases}$$

Структурная схема модели представлена на рисунке 11.

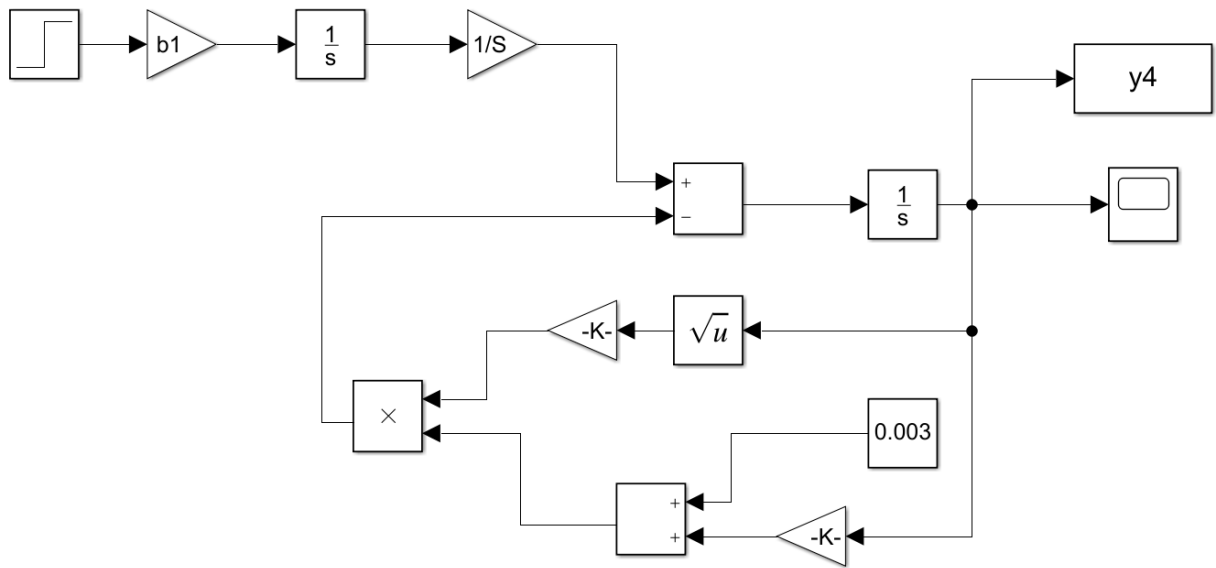


Рис. 11 Схема флотационной машины

Зададим следующие значения величин, участвующих в процессе:

$$S = 2 \text{ м}^2$$

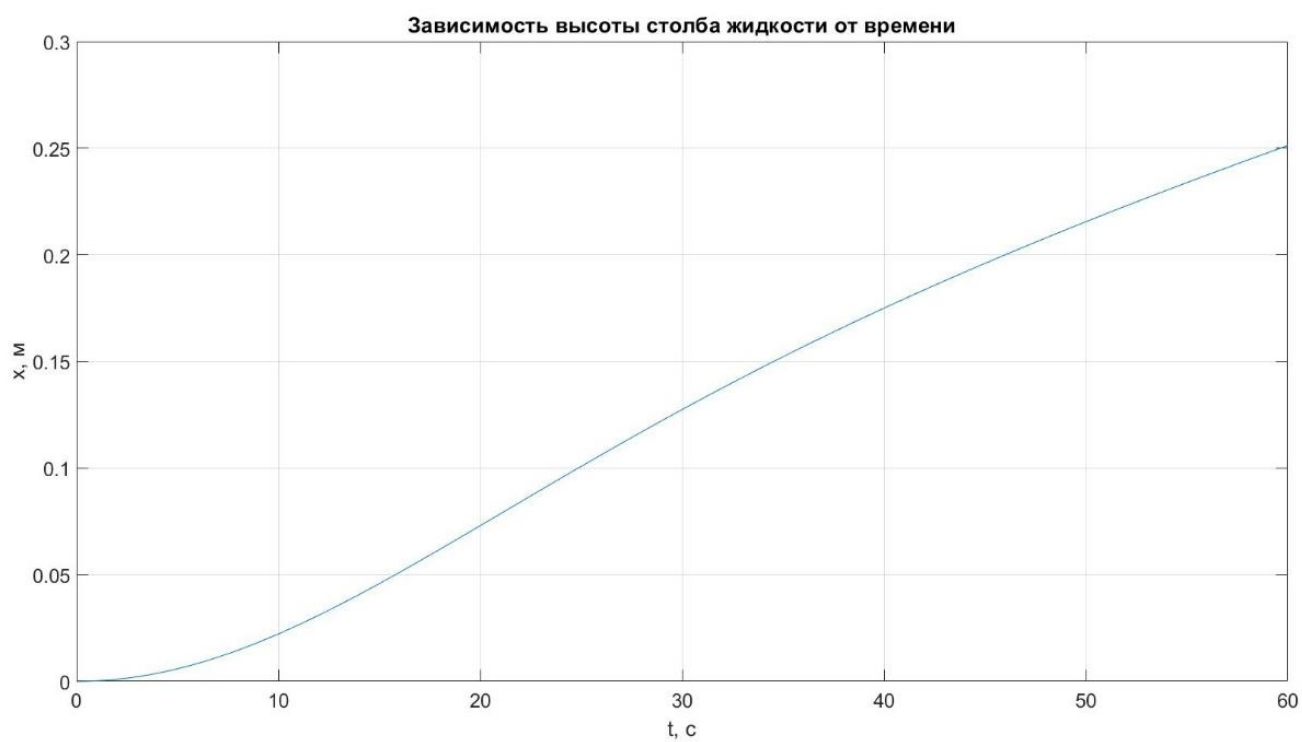
$$g = 9.81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$b_1 = 1$$

$$Q_2 = 0.001 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$$

$$b = 0.2 \text{ м}$$

Получившийся график зависимости высоты столба жидкости x от времени t представлен на рисунке 12.



*Рис. 12 График зависимости высоты столба
жидкости x от времени t*