Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное
образовательноеучреждения высшего
образования
«Национальный исследовательский технологический университет
«МИСиС»Кафедра инженерной кибернетики

Лабораторная работа №3
Моделирование линейных динамических систем

по дисциплине
«Математическое моделирование»

Направление подготовки:

01.03.04 Прикладная математика

Выполнил:

Студент группы БПМ-19-2

Богданов Артем Андреевич

Проверил:

Доцент кафедры ИК

Добриборщ Дмитрий Эдуардович

Москва, 2021

Исследование математических моделей

Цель работы:
Исследовать математические модели, полученные методом балансовых соотношений в пакете прикладных программ MATLAB/Simulink.

Ход работы:
1. Простой цилиндрический резервуар с жидкостью

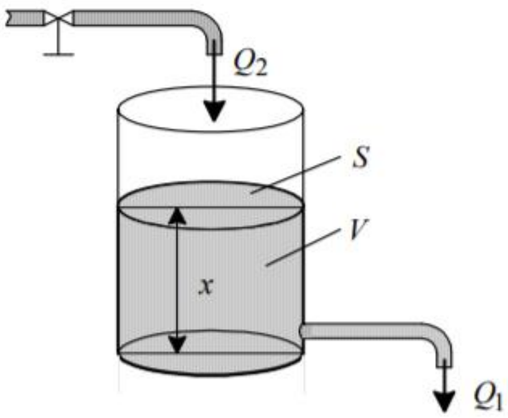

Рис. 1 Простой цилиндрический резервуар с жидкостью

Введем следующие обозначения:
V – объём жидкости;
S – площадь поверхности жидкости;
Q_1, Q_2 – объёмные расходы жидкости;
F – площадь проходного отверстия сливной трубы. Расход Q_2 принимается в качестве управляющего воздействия.

Уравнение материального баланса жидкости для данного резервуара имеет вид:

$$\Delta V + Q_1 * \Delta t = Q_{2*}\Delta t$$

Предположим, что $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta V \rightarrow 0$ и разделим на Δt:

$$\dot{V} + Q_1 = Q_2;$$

Объём жидкости V выражается через её уровень x:

$$V = S * x,$$

$$\dot{V} = S * \dot{x}$$

$$\frac{\rho * v_0^2}{2} + \rho * g * x + P_1 = \frac{\rho * v^2}{2} + \rho * g * x_0 + p_2$$

v – скорость истечения жидкости из сливного отверстия;
v_0 – скорость изменения уровня жидкости в резервуаре;
$x - x_0$ – перепад высот жидкости в резервуаре; p1, p2 – статические давления над жидкостью в резервуаре и за сливным отверстием; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения
$\frac{\rho * v_0^2}{2}$ - динамическое или скоростное давление

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2 * g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (x - x_o)$$

γ = ρ*g – удельный вес

В предположении, что $v_0 >> v,\ x_0 = 0, p_1 = p_2$, скорость истечения жидкости будет определяться выражением $v\ =\ 2 * g * x$. При умножении левой и правой частей этого выражения на площадь проходного сечения F, получается:

$$F * v = Q_1 = F * \sqrt{2 * g * x}$$

С помощью поправочного коэффициента μ, часто определяемого экспериментально, может быть учтена форма и состояние поверхности сливного отверстия.

$$Q_1 = \mu * F * \sqrt{2 * g * x}$$

Таким образом получено уравнение материального баланса для истечения жидкости в цилиндрическом резервуаре:

$$S * \dot{x} + \mu * F * \sqrt{2 * g * x} = Q_2$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q_2}{S} - \frac{\mu F \sqrt{2gx}}{S}$$

При $\frac{dx}{dt} = 0$ можно записать уравнение статического (стационарного) режима резервуара:

$\mu * F * \sqrt{2 * g * x} = Q_2$

Итак, математическая модель данной системы:

$$S * \dot{x} + \mu * F * \sqrt{2 * g * x} = Q_2$$

Взяв в качестве переменных состояния $v_1 = Q_2, v_2 = x$, получим уравнение системы в форме вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{v_1} = b_1 * u, \\ \dot{v_2} = \dfrac{1}{S} * v_1 - \dfrac{\mu * F * \sqrt{2 * g}}{S} * \sqrt{v_2}, \\ y = v_2; \end{cases}$$

Структурная схема модели представлена на рисунке 2.

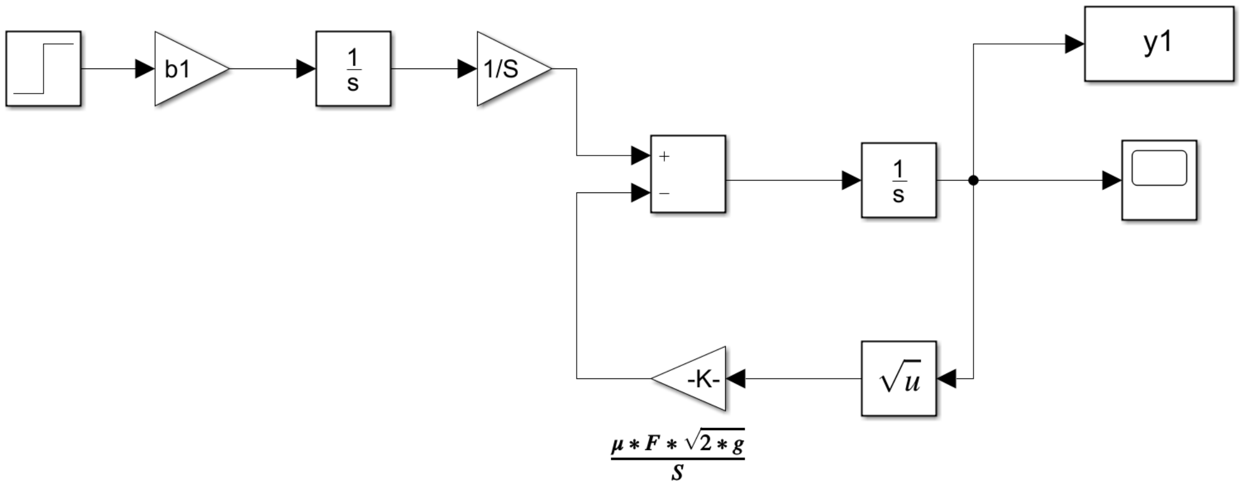

Рис. 2 Схема простого цилиндрического резервуара с жидкостью

Зададим следующие значения величин, участвующих в процессе:

$S = 2$ м^2

$F = 0.006$м^2

$g = 9.81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

$\mu = 0.6$

$b_1 = 1$

$Q_2 = 0.001 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$

Получившийся график зависимости высоты столба жидкости x от времени t представлен на рисунке 3.

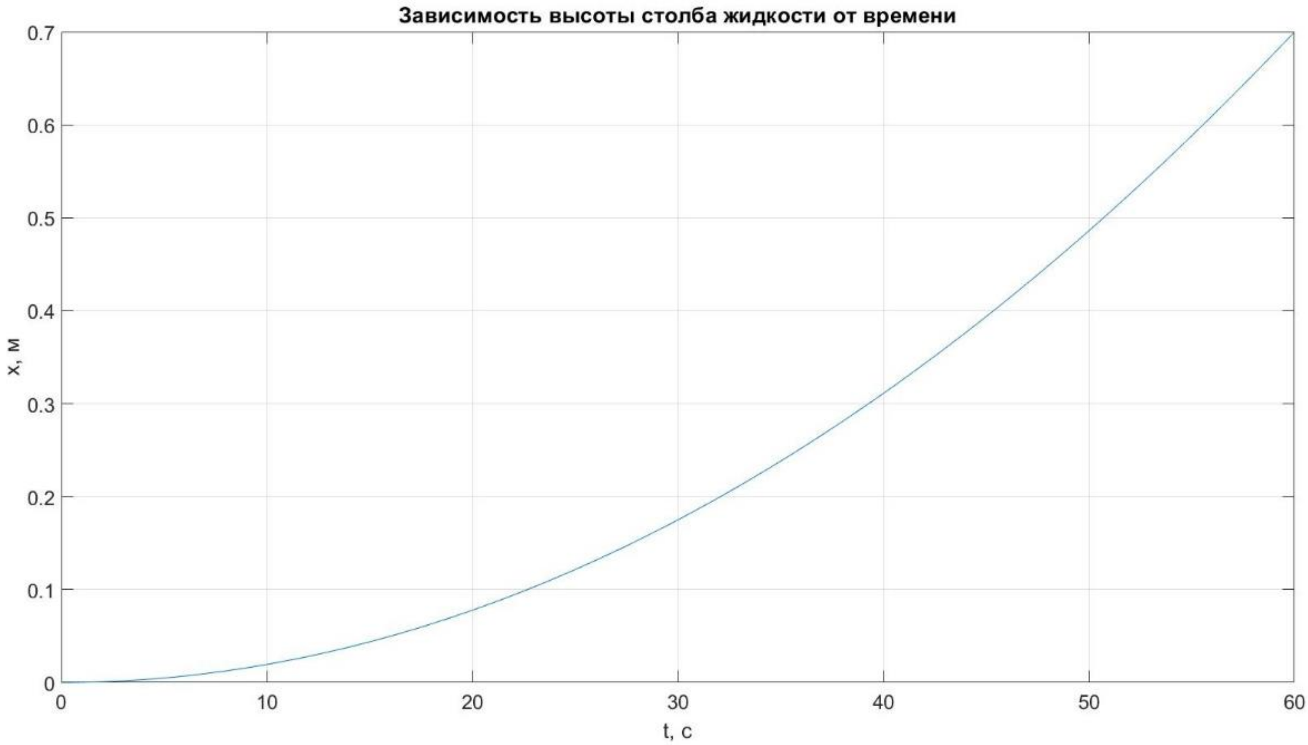

Рис. 3 График зависимости высоты столба жидкости x от времени t

2. Резервуар, имеющий форму усеченного конуса

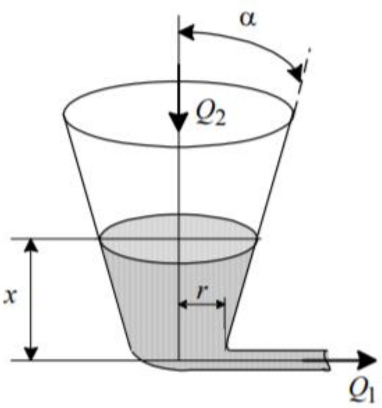

Рис. 4 Резервуар с усеченным конусом

В данном случае коэффициент S при производной равен (определяется геометрическими размерами резервуара):

$$S = S(x) = \pi(r^2 + 2 * r \ * x * tan\,\alpha + tan^2\,\alpha * x^2)$$

Система вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{v_1} = b_1 * u, \\ \dot{v_2} = \dfrac{v_1 - \mu * F * \sqrt{2 * g} * \sqrt{v_2}}{\pi(r^2 + 2 * r * v_2 * tan\,\alpha + tan^2\,\alpha * v_2{}^2)}, \\ y = v_2; \end{cases}$$

Структурная схема модели представлена на рисунке 5.

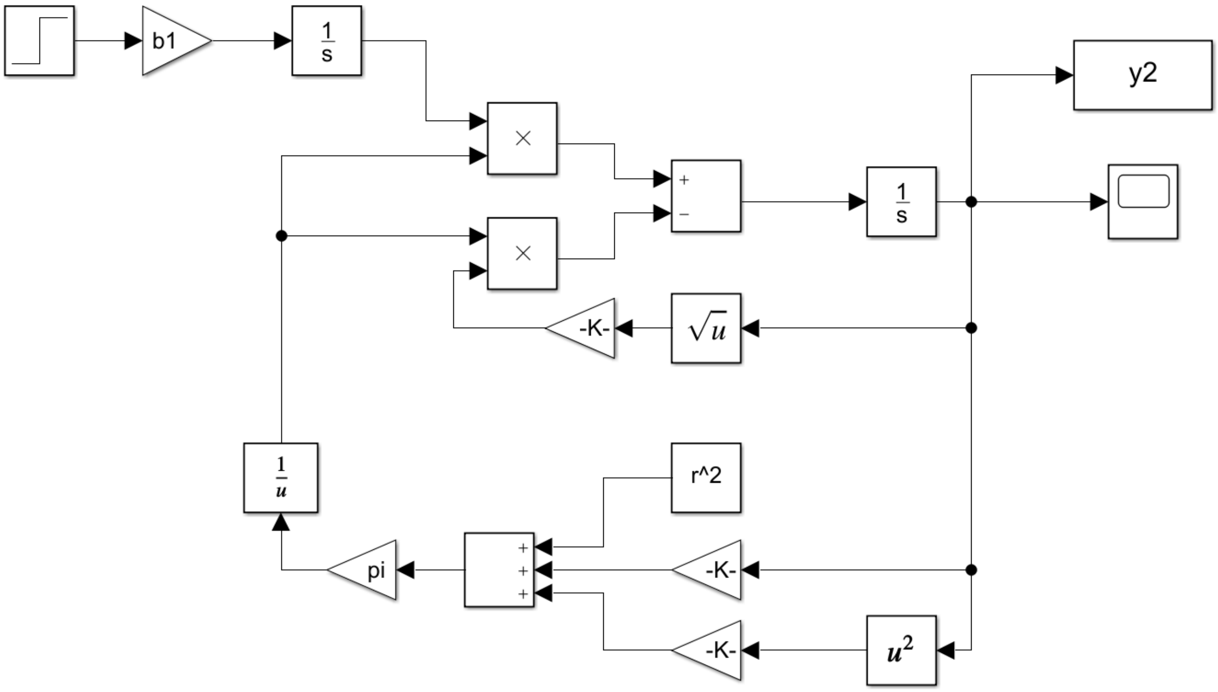

Рис. 5 Схема резервуара, представленного усеченным конусом

Зададим следующие значения величин, участвующих в процессе:

$F = 0.006\text{м}^2$
$g = 9.81\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
$\mu = 0.6$
$b_1 = 1$
$Q_2 = 0.001\frac{\text{м}^3}{\text{с}}$
$r = 0.8$ м
$\alpha = 0.5$ рад

Получившийся график зависимости высоты столба жидкости x от времени t представлен на рисунке 6.

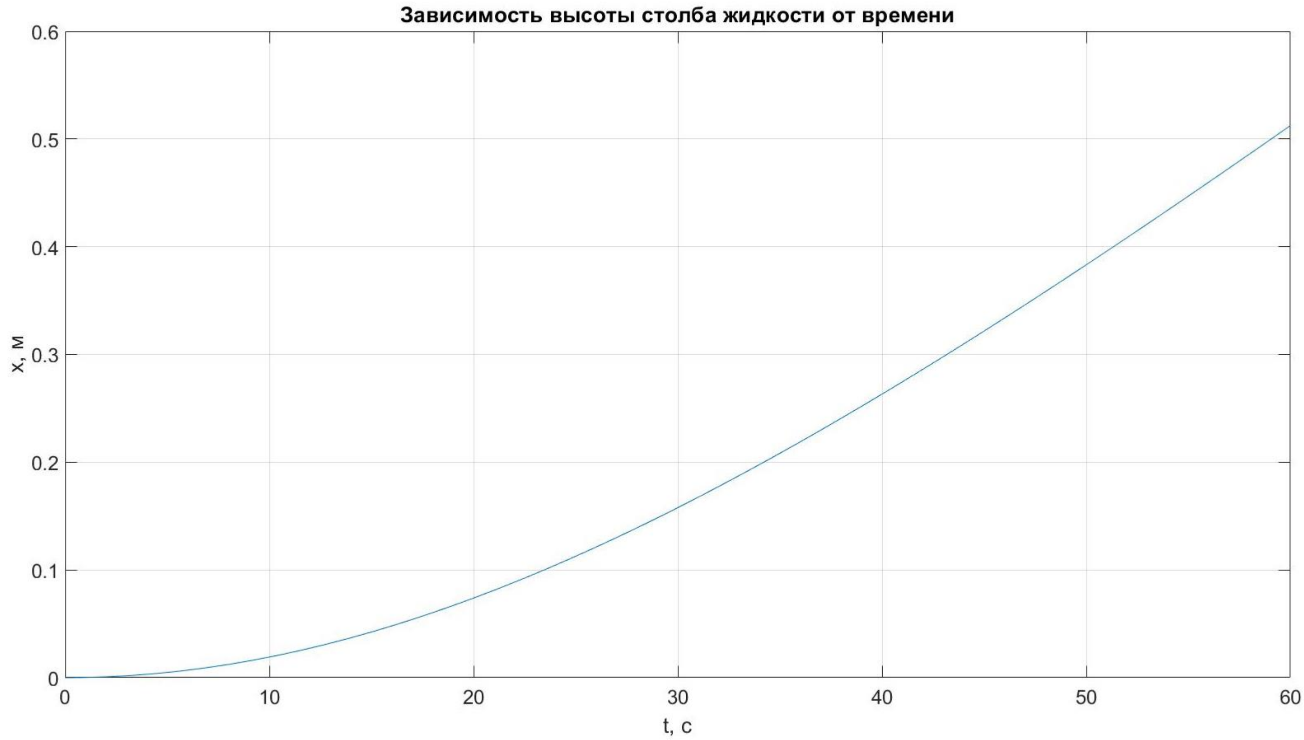

Рис. 6 График зависимости высоты столба жидкости x от времени t

3. Резервуар сферической формы

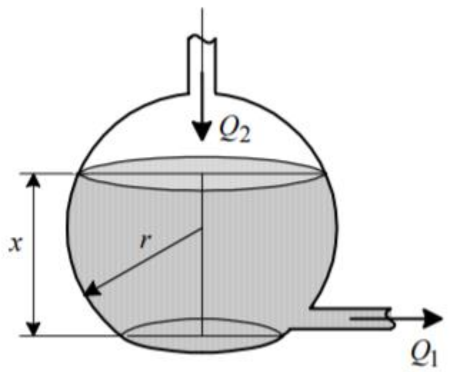

Рис. 7 Резервуар сферической формы

В данном случае коэффициент S при производной равен (определяется геометрическими размерами резервуара):

$$S = S(x) = \pi(2 * r * x - x^2)$$

Система вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{v_1} = b_1 * u, \\ \dot{v_2} = \dfrac{v_1 - \mu * F * \sqrt{2 * g} * \sqrt{v_2}}{\pi(2 * r * v_2 - {v_2}^2)}, \\ y = v_2; \end{cases}$$

Структурная схема модели представлена на рисунке 8.

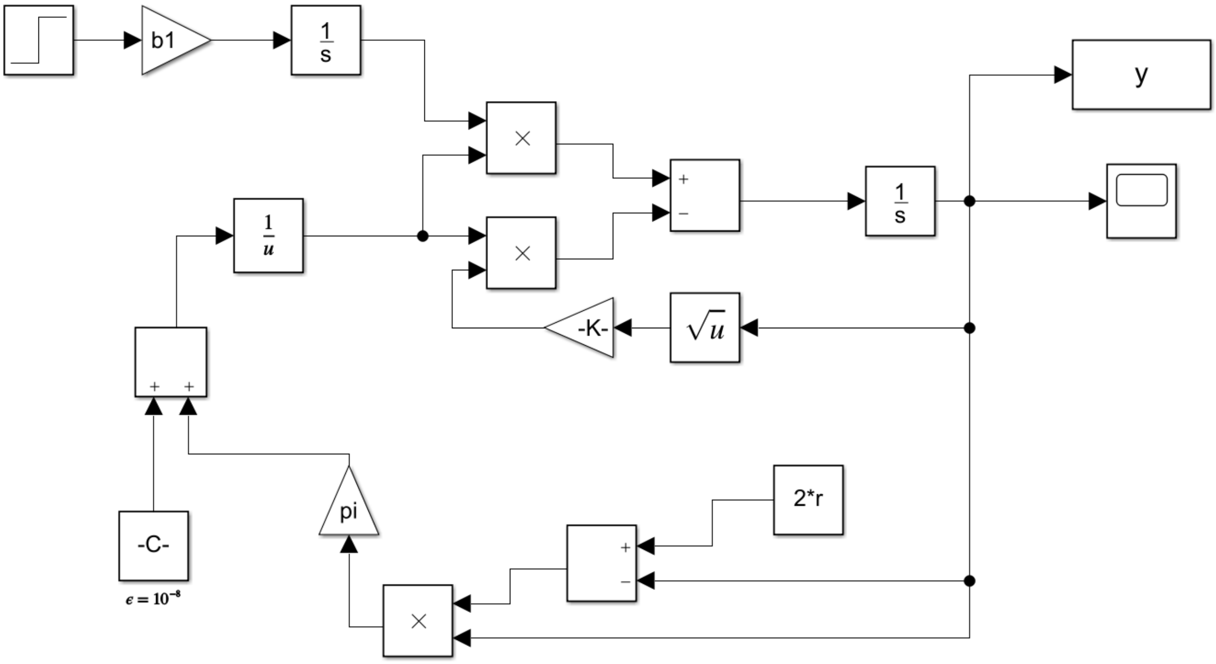

Рис. 8 Схема резервуара сферической формы

Зададим следующие значения величин, участвующих в процессе:

$F = 0.006 \text{м}^2$

$g = 9.81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

$\mu = 0.6$

$b_1 = 1$

$Q_2 = 0.001 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$

$r = 0.8$ м

Получившийся график зависимости высоты столба жидкости x от времени t представлен на рисунке 9.

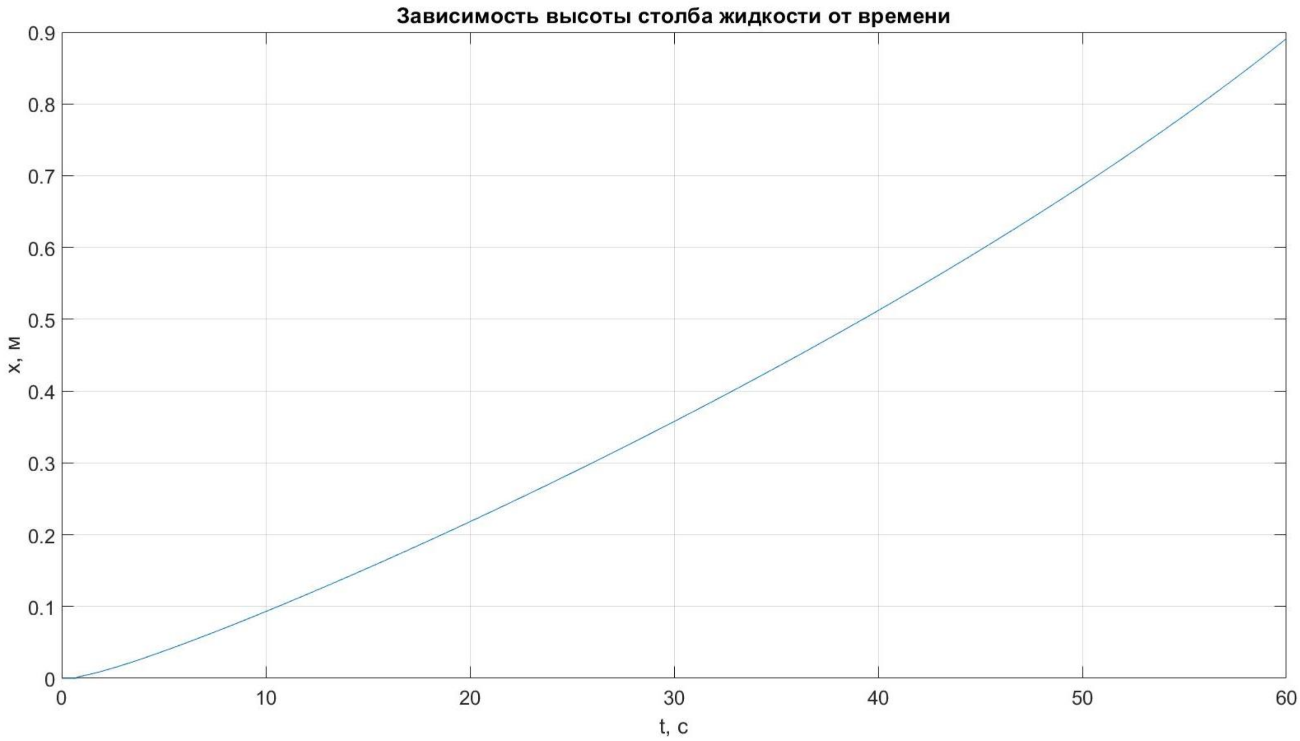

Рис. 9 График зависимости высоты столба жидкости x от времени t

4. Флотационная машина

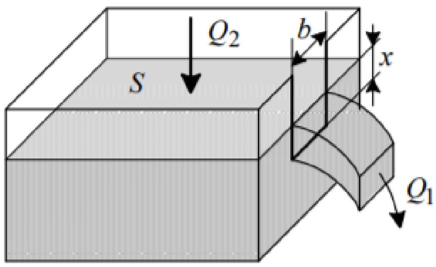

Рис. 10 Флотационная машина

Математическая модель флотационной машины:

$$S * \dot{x} + \left(0.465 + \frac{0.003}{x}\right) * b * x * \sqrt{2 * g * x} = Q_2$$

Система вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{v_1} = b_1 * u, \\ \dot{v_2} = \dfrac{1}{S} * v_1 - \dfrac{\mathrm{b} * (0.465 * v_2 + 0.003) * \sqrt{2 * g}}{S} * \sqrt{v_2}, \\ y = v_2; \end{cases}$$

Структурная схема модели представлена на рисунке 11.

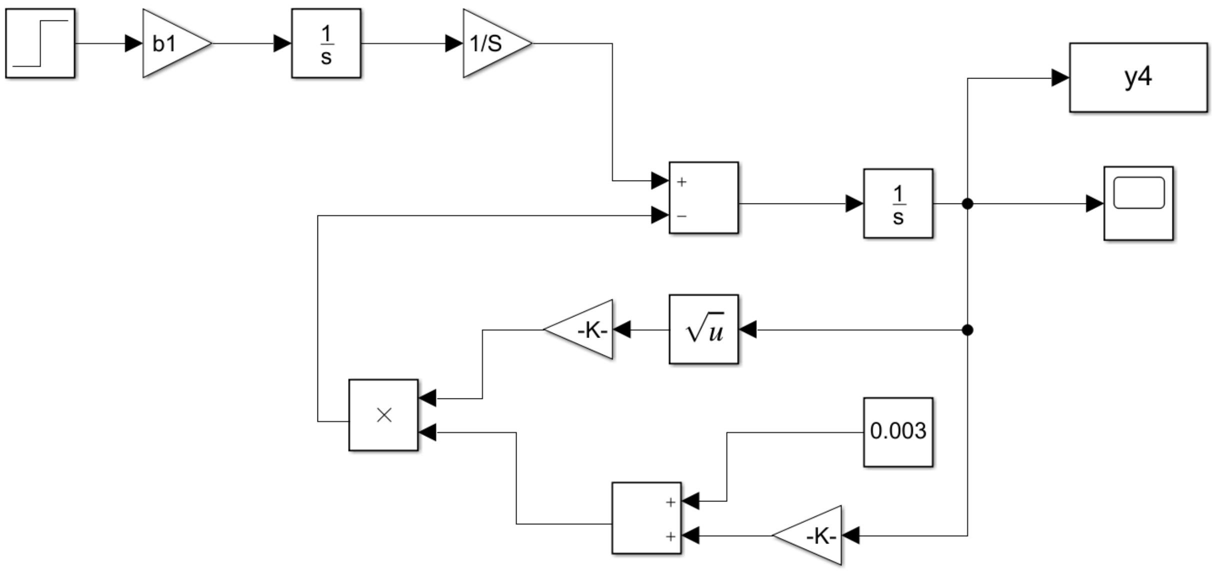

Рис. 11 Схема флотационной машины

Зададим следующие значения величин, участвующих в процессе:

$$S = 2\ \text{м}^2$$
$$g = 9.81\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$
$$b_1 = 1$$
$$Q_2 = 0.001\,\frac{\text{м}^3}{\text{с}}$$
$$b\ =\ 0.2\ \text{м}$$

Получившийся график зависимости высоты столба жидкости x от времени t представлен на рисунке 12.

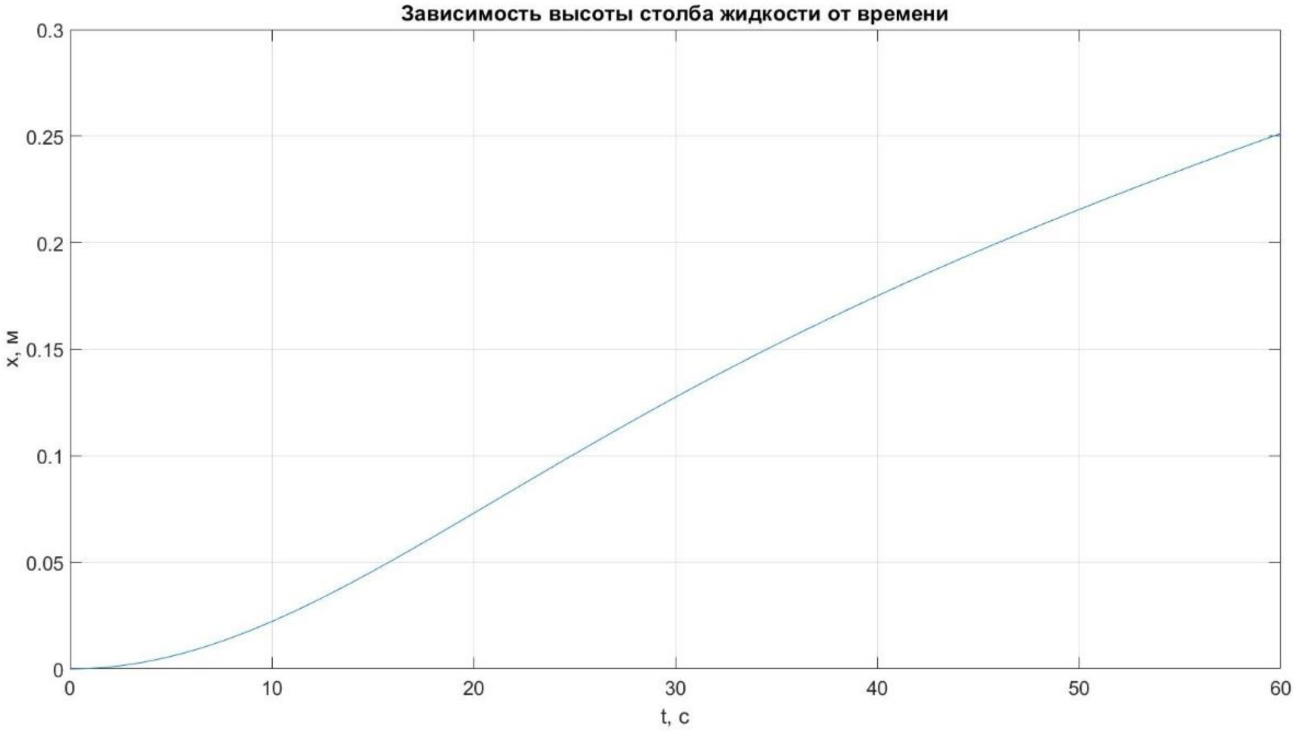

Рис. 12 График зависимости высоты столба жидкости x от времени t

Вывод: построил и исследовал математические модели, полученные методом балансовых соотношений в пакете прикладных программ MATLAB/Simulink. Проверил полученные модели на адекватность.