

Министерство образования и науки РФ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»  
Кафедра инженерной кибернетики

**Лабораторная работа №2**  
Моделирование механических систем

по дисциплине  
**«Математическое моделирование»**

Направление подготовки:  
01.03.04 Прикладная математика

Выполнил:  
Студент группы БПМ-19-2  
Богданов Артем Андреевич  
Проверил:  
Доцент кафедры ИК  
Добриборщ Дмитрий Эдуардович

Москва, 2021

## 1. Моделирование механической системы масса-пружина

Уравнение системы:

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (1)$$

- 1.1. Применив преобразование Лапласа (с нулевыми начальными условиями) найти передаточную функцию модели:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \dots$$

С нулевыми начальными условиями имеем:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(0) = 0$$

Применим преобразования Лапласа:

$$x(t) \doteq X(s)$$

$$\dot{x}(t) \doteq sX(s) - x(0) = sX(s)$$

$$\ddot{x}(t) \doteq s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2X(s)$$

Подставив в уравнение (1), получим:

$$Ms^2X(s) + BsX(s) + kX(s) = F(s)$$

$$X(s)(Ms^2 + Bs + k) = F(s)$$

Искомая передаточная функция:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + k} \quad (2)$$

- 1.2. Переписать уравнение (1) в форму вход-состояние-выход.  
М – масса  $\Rightarrow M \neq 0$ . Разделим уравнение (1) на М:

$$\ddot{x}(t) + \frac{B}{M}\dot{x}(t) + \frac{k}{M}x(t) = \frac{1}{M}f(t)$$

Отсюда:

$$a_1 = \frac{B}{M}, \quad b_1 = 0,$$

$$a_2 = \frac{k}{M}; \quad b_2 = \frac{1}{M};$$

Форма вход-состояние-выход в общем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3)$$

При этом:

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad C = (1 \quad 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -\frac{B}{M} & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}; \quad C = (1 \quad 0) \quad (4)$$

- 1.3. Составить структурную схему моделирования, опираясь на уравнение (1) и результат, полученный в задании 1.2.

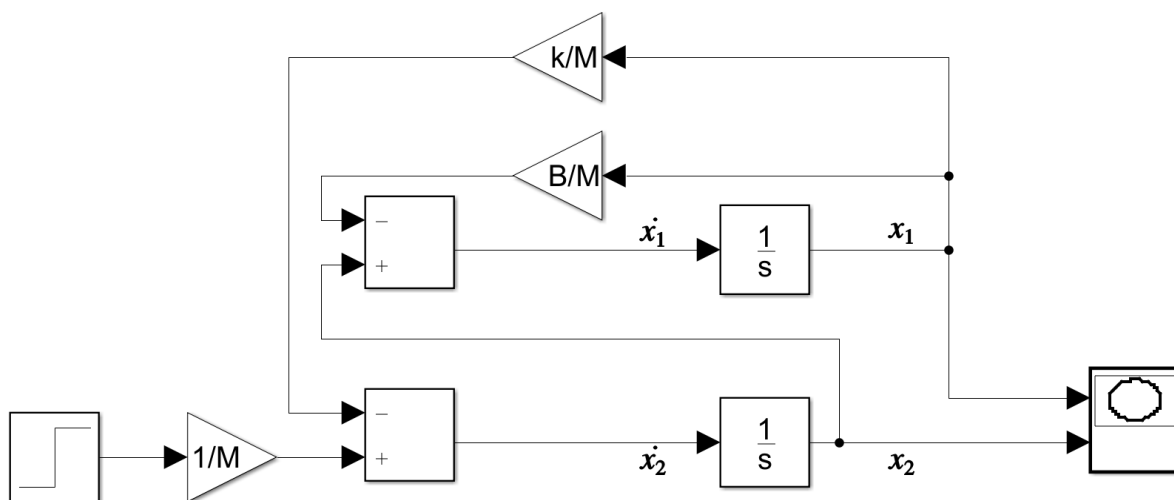


Рисунок 1. Структурная схема

- 1.4. Результаты моделирования задания 1.4 можно увидеть на рисунках 2 и 3.

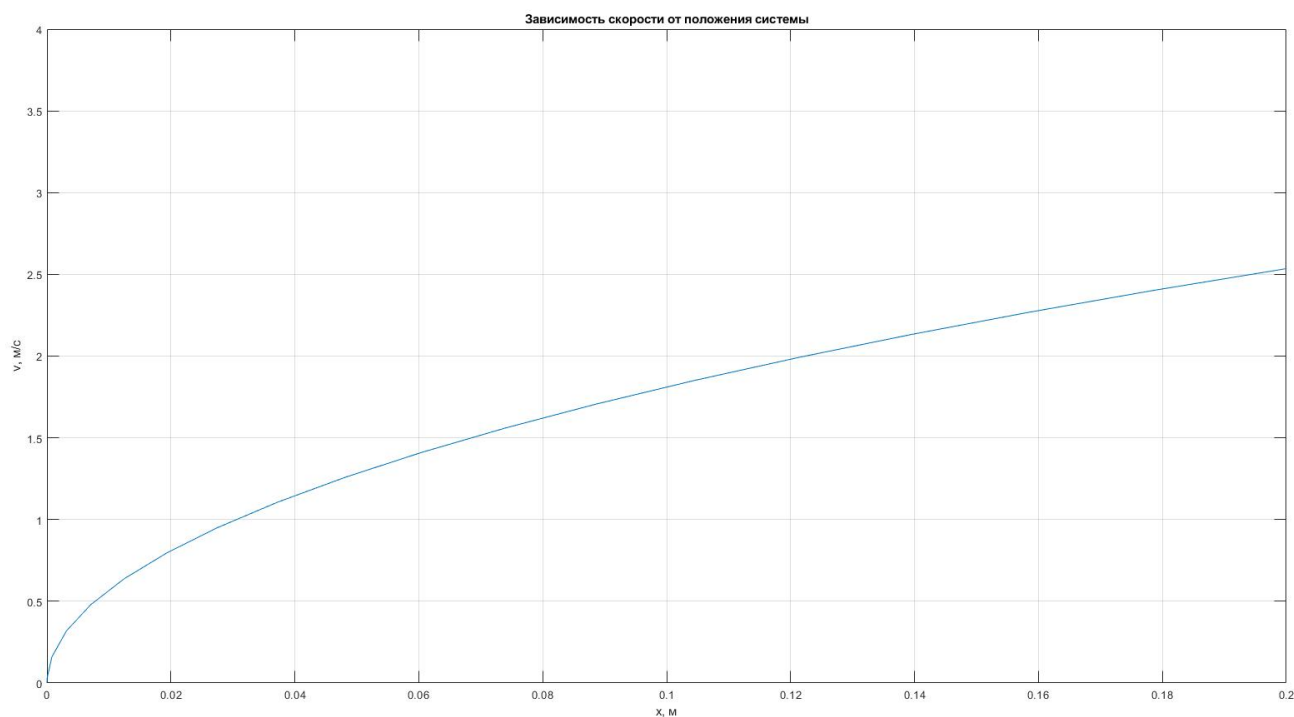


Рисунок 2. Зависимость скорости от положения системы

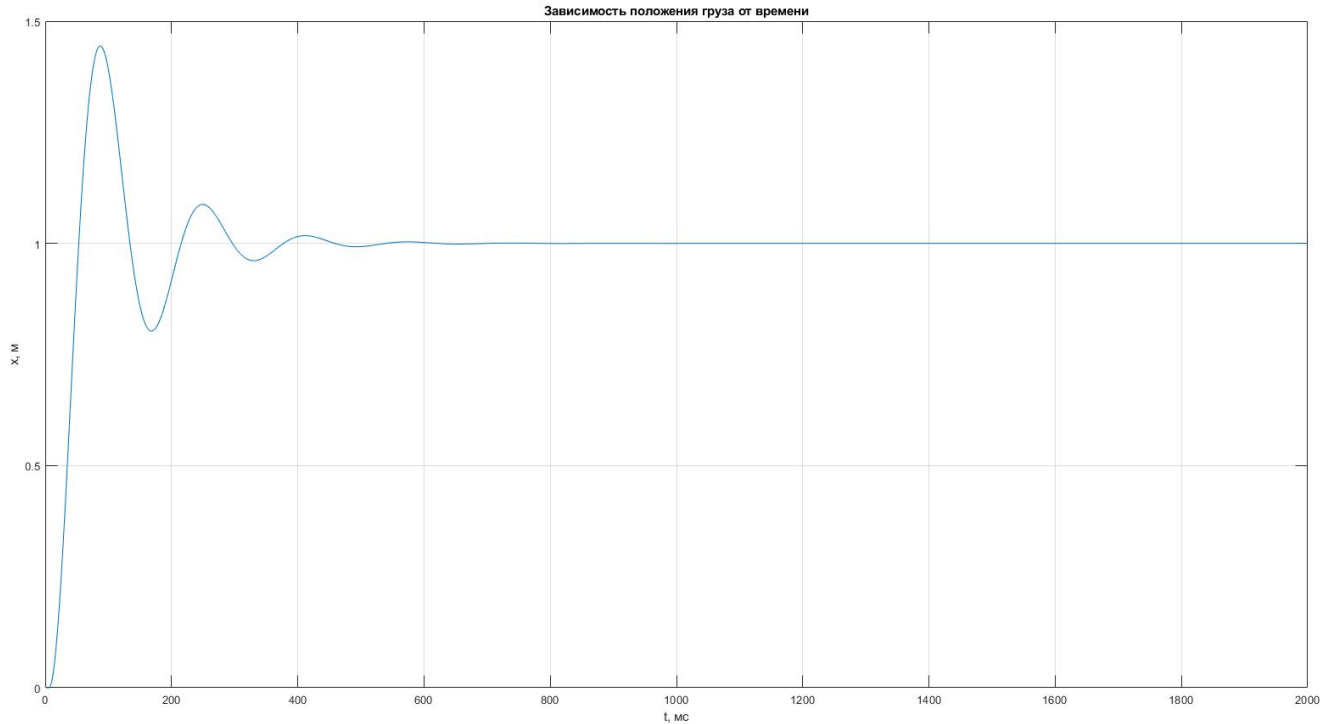


Рисунок 3. Зависимость положения груза от времени

## 2. Моделирование механической системы масса-пружина

Уравнение системы:

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \quad (5)$$

2.1. Переписать уравнение (5) в форму вход-состояние-выход.

Так как колебания малые:  $\sin(\theta) \approx \theta$

Перепишем уравнение (5) и применим это допущение:

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

По аналогии с пунктом 1.2 получим:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{B}{M} & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C = (1 \quad 0) \quad (6)$$

2.2. На рисунке 4 изображена структурная схема для задания 2.2.

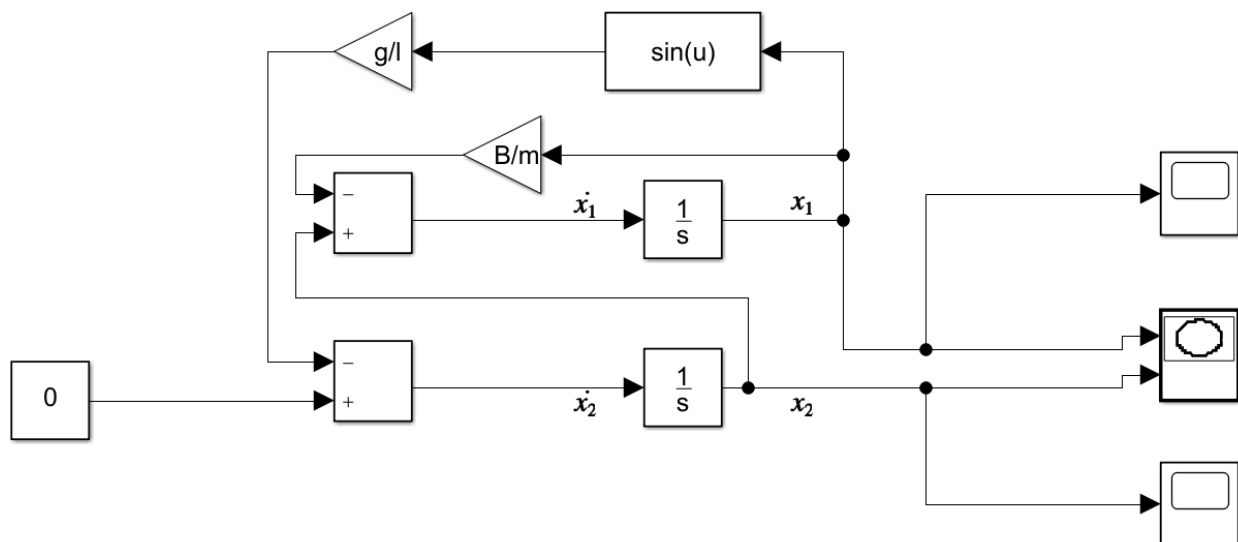


Рисунок 4. Структурная схема

2.3. Далее приведены результаты моделирования.

На рисунках 5–7 приведены графики для случая  $B = 0.05 \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}}$

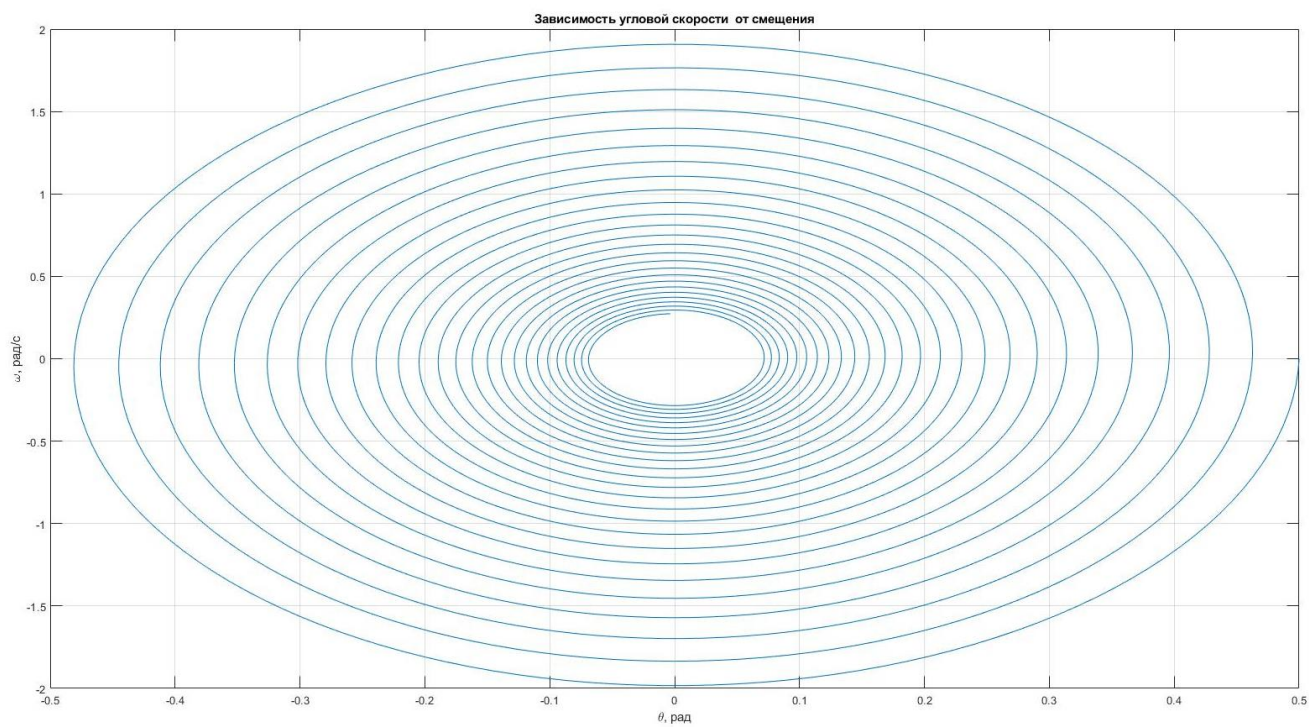


Рисунок 5. Зависимость угловой скорости от смещения

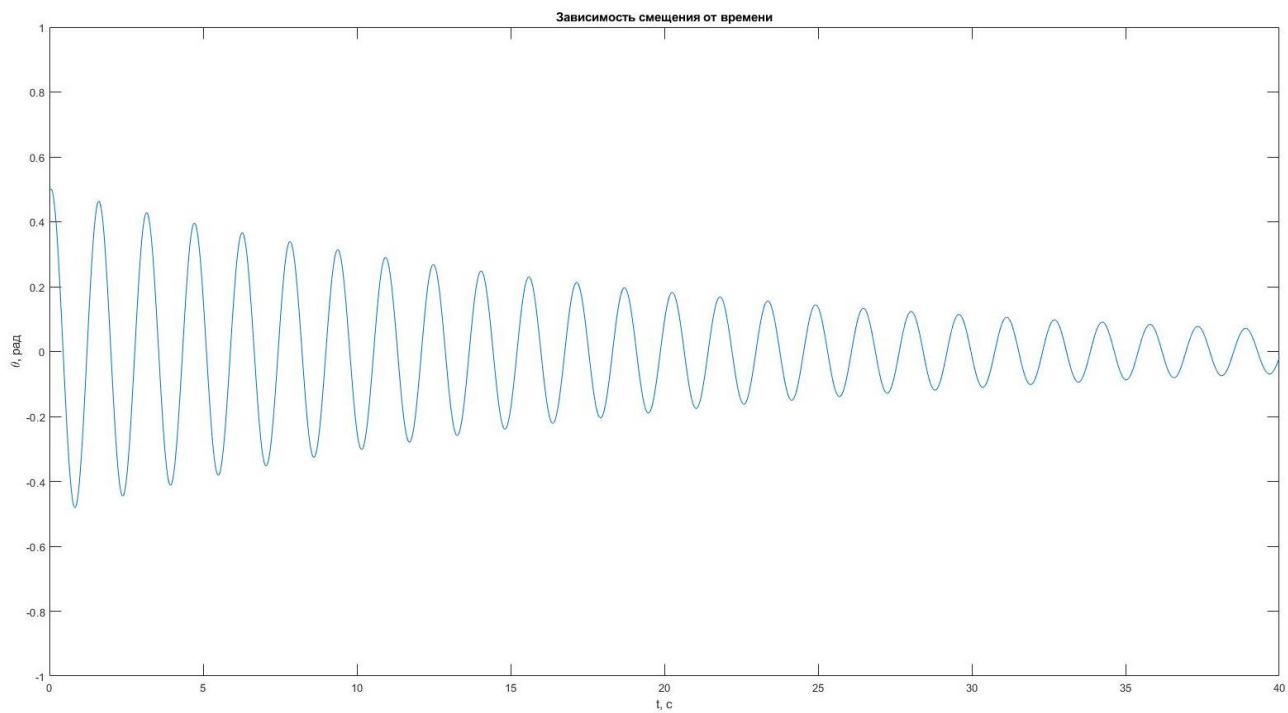


Рисунок 6. Зависимость смещения от времени

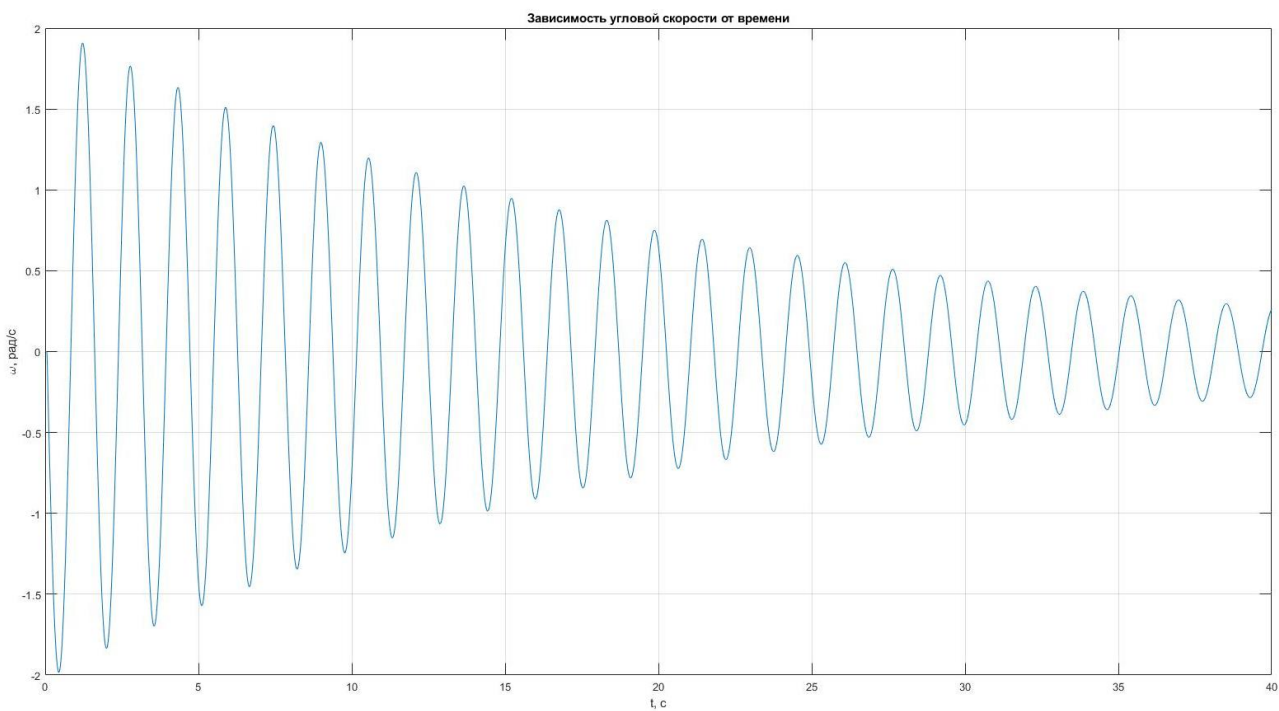


Рисунок 7. Зависимость угловой скорости от времени

На рисунках 8–10 приведены графики для случая  $B = 0.4 \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}}$

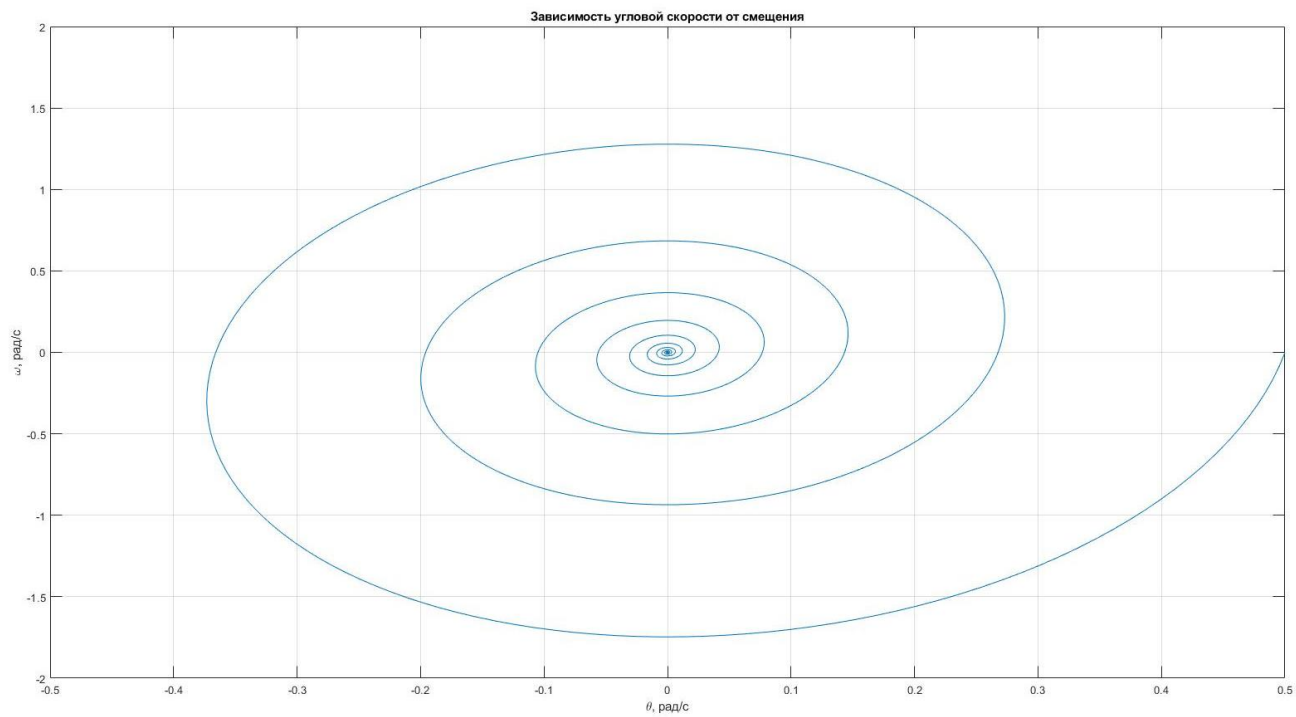


Рисунок 8. Зависимость угловой скорости от смещения

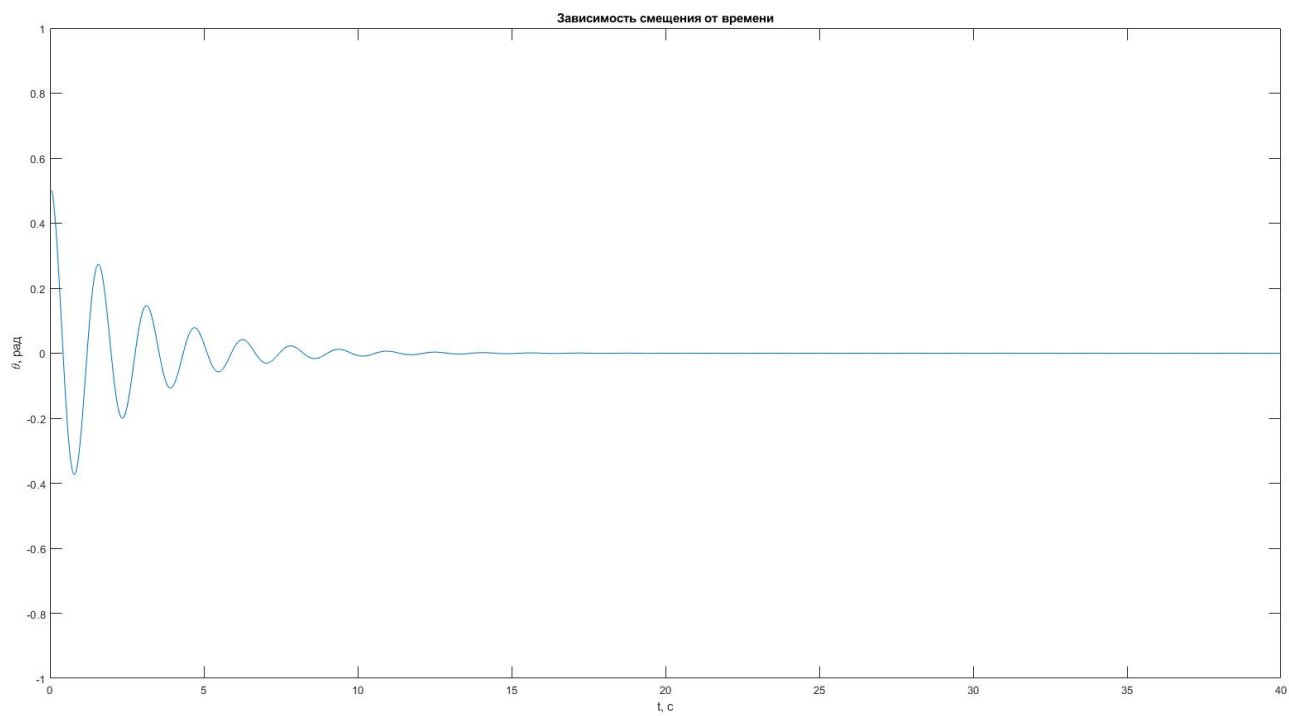
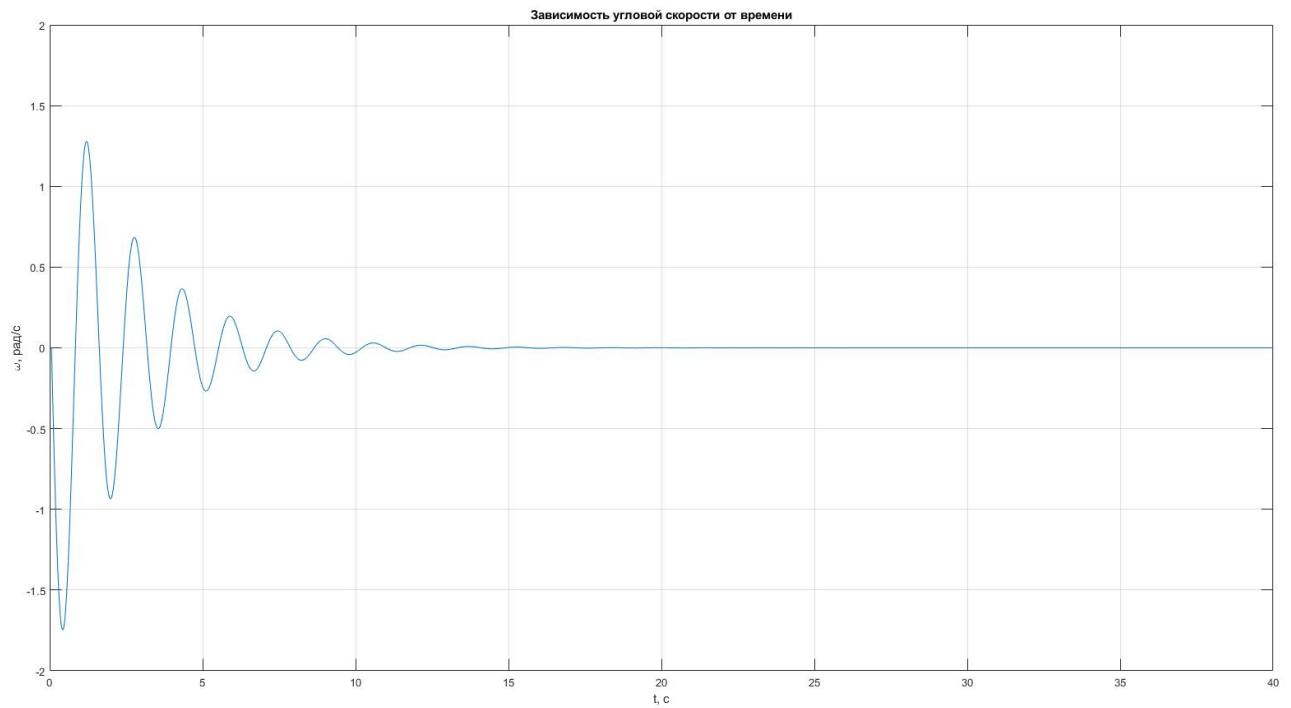


Рисунок 9. Зависимость смещения от времени



*Рисунок 10. Зависимость угловой скорости от времени*

Вывод: продолжил знакомство с Simulink, узнал как оформлять красивые графики в Matlab, смоделировал физический процесс и построил его структурную схему, вывел на экран различные графики.