凸优化课程实验

58121124_张博彦

一、 实验目标

注水。考虑如下凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha_i + x_i) \\ \text{subject to} & x \succeq 0, \quad \mathbf{1}^T x = 1, \end{array}$$

理解该题，并编程实现

二、 实验过程及分析

由于很多数学符号电脑上打不出来，因此将具体的分析解答过程手写后拍照粘贴于此。

解：$\because f_i(x) = -x_i$

$h(x) = 1^T x - 1$

$\therefore$ KKT条件为：

$$\begin{cases} -x^* \preceq 0 \\ 1^T x^* - 1 = 0 \\ \lambda^* \succeq 0 \\ \lambda_i^* \cdot (-x_i^*) = 0 \\ -\frac{1}{\alpha_i + x_i^*} + \lambda_i^* (-1) + \nu^* \cdot 1 = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

化简得
$$\begin{cases} x^* \succeq 0, \ 1^T x^* = 1, \ \lambda^* \succeq 0 \\ \lambda_i^* x_i^* = 0, \quad ① \\ -\frac{1}{\alpha_i + x_i^*} - \lambda_i^* + \nu^* = 0 \quad ②, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

由②变形得 $\lambda_i^* = -\frac{1}{\alpha_i + x_i^*} + \nu^*$ ③，$i = 1, 2, \cdots, n$

③代入①得 $x_i^* (\nu^* - \frac{1}{\alpha_i + x_i^*}) = 0$ ④，$i = 1, 2, \cdots, n$

又对 $\lambda_i^* \geq 0$

$\therefore \nu^* \geq \frac{1}{\alpha_i + x_i^*}$

根据④式知 $x_i^* = 0$ 或 $\nu^* - \frac{1}{\alpha_i + x_i^*} = 0$

1) 当 $x_i^* = 0$ 时 $\nu^* \geq \frac{1}{\alpha_i}$

2) 当 $\nu^* - \frac{1}{\alpha_i + x_i^*} = 0$ 时

则 $x_i^* = \frac{1}{\nu^*} - \alpha_i > 0$.

即 $\nu^* < \frac{1}{\alpha_i}$

$\therefore x_i^* = \max\{0, \frac{1}{\nu^*} - \alpha_i\}$

$\therefore$ 由 $1^T x = 1$ 得 $\sum_{i=1}^{n} \max\{0, \frac{1}{\nu^*} - \alpha_i\} = 1$

三、 实验结果及分析

3.1 实验结果

Microsoft Visual Studio 调试控制台

```
a[0] = 0.113060
a[1] = 0.246460
a[2] = 0.063800
a[3] = 0.138790
a[4] = 0.302260
a[5] = 0.263700
a[6] = 0.234510
a[7] = 0.237420
a[8] = 0.238050
a[9] = 0.122810

   x[0] = 0.182340
   x[1] = 0.048940
   x[2] = 0.231600
   x[3] = 0.156610
   x[4] = 0.000000
   x[5] = 0.031700
   x[6] = 0.060890
   x[7] = 0.057980
   x[8] = 0.057350
   x[9] = 0.172590

total water is 1.000000
water_volume = 0.295400

   minimize = 12.171292
```

3.2 实验分析

该程序能够根据随机给出的 alpha 数组，得到准确的 water_volume 和 Xi，虽然在具体实现的代码中，逼近所用的方法可能不是最优方法，但经过多次运行，该代码能够在 15-20 次的逼近次数得到稳定的准确结果。同时由于随机数产生默认为 5 位，达不到精度为 6 位，因此，在将随机数变化为（0,1）之间的 6 位小数时，所有小数的第六位都为 0，这样精度可能比原来的要求低了一些，但对最终结果以及代码的具体实现并没有多大的影响，因此也就没有再专门去找寻其他实现 6 位随机数产生的方法。