Análise Matemática II | Engenharia Informática

Trabalho Prático Nº2

Métodos Numéricos para resolução de Sistemas de ED

André Amando Rodrigues Lopes a2019139754
Nuno Gabriel Tavares Honório a2019126457
Rafaela Oliveira Carvalho a2019127935
Samuel Pires Tavares a2019126468

2019/2020

Índice

Índice de Imagens

1. Introdução

Este trabalho foi realizado no âmbito da Unidade Curricular de Análise Matemática II, como avaliação do "Ensino à Distância". Pretende-se que os alunos obtenham soluções aproximadas de problemas de aplicação, através da redefinição e adaptação das funções implementadas na atividade01, para a resolução de sistemas de equações diferenciais de 1º ordem com condições iniciais. Neste relatório, vamos apresentar o código dos diferentes métodos numéricos utilizados para a resolução dos diversos problemas, assim como os gráficos que lhes são respetivos. É possível obter estes gráficos através da GUI criada, onde o utilizador introduz uma função, os parâmetros da entrada e o método que pretende usar.

2. Métodos Numéricos para resolução de sistemas de ED

2.1. Método de Euler

Fórmula:

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i, v_i)$$
$$v_{i+1} = v_i + hg(t_i, u_i, v_i)$$

Algoritmo/Função:

```
function y = NEuler(f,a,b,n,y0)
h     = (b-a)/n;
t(1)  = a;
y(1)  = y0;
for i=1:n
    y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i));
    t(i+1)=t(i)+h;
end
end
```

2.2. Método de Euler Melhorado

Fórmula:

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i, v_i)$$
$$v_{i+1} = v_i + hg(t_i, u_i, v_i)$$
$$u_{i+1} = u_i + \left(\frac{h}{2}\right) * \left(f(t_i, u_i, v_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1}, v_{i+1})\right)$$
$$v_{i+1} = u_i + \left(\frac{h}{2}\right) * \left(g(t_i, u_i, v_i) + g(t_{i+1}, u_{i+1}, v_{i+1})\right)$$

Algoritmo/Função:

```
function y = NEulerMelh(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/n;
```

```
t=a:h:b;
t(1) =a;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=y0;
for i=1:n
    %y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i));
    y(i+1)=
    y(i)+h/2*(f(t(i),y(i))+h*f(t(i+1),y(i)));
    t(i+1) = t(i)+h;
end
end
```

2.3. Método de Runge-Kutta de ordem 2

Fórmula:

$$k_{1_u} = hf(t_i, u_i, v_i)$$
$$k_{1_v} = hg(t_i, u_i, v_i)$$
$$k_{2_u} = hf\left(t_{i+1}, u_i + k_{1_u}\ ,\ v_i + k_{1_v}\right)$$
$$k_{2_v} = hg\left(t_{i+1}, u_i + k_{1_u}\ ,\ v_i + k_{1_v}\right)$$
$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{2}(k_{1_u} + k_{2_u})$$
$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{2}\left(k_{1_v} + k_{2_v}\right)$$

Algoritmo/Função:

```
function y = NRK2(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=y0;
for i=1:n
    k1=h*f(t(i),y(i));
    k2=h*f(t(i+1),y(i)+k1);
    y(i+1)=y(i)+(k1+k2)/2;
end
```

2.4. Método de Runge-Kutta de ordem 4

Fórmula:

$$k_{1_u} = hf(t_i, u_i, v_i)$$
$$k_{1_v} = hg(t_i, u_i, v_i)$$
$$k_{2_u} = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_{1_u}}{2}, v_i + \frac{k_{1_v}}{2}\right)$$
$$k_{2_v} = hg\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_{1_u}}{2}, v_i + \frac{k_{1_v}}{2}\right)$$
$$k_{3_u} = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_{2_u}}{2}, v_i + \frac{k_{2_v}}{2}\right)$$
$$k_{3_v} = hg\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_{2_u}}{2}, v_i + \frac{k_{2_v}}{2}\right)$$
$$k_{4_u} = hf\left(t_i + h, u_i + k_{3_u}, v_i + k_{3_v}\right)$$
$$k_{4_v} = hg\left(t_i + h, u_i + k_{3_u}, v_i + k_{3_v}\right)$$
$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}(k_{1_u} + 2k_{2_u} + 2k_{3_u} + k_{4_u})$$
$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}\left(k_{1_v} + 2k_{2_v} + 2k_{3_v} + k_{4_v}\right)$$

Algoritmo/Função:

```
function y = NRK4(f,a,b,n,y0)

h = (b-a)/n;
t=a:h:b;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=y0;



for i=1:n
    k1 = f(t(i), y(i));
    k2 = f(t(i)+(h/2), y(i)+(h*k1)/2);
    k3 = f(t(i)+(h/2), y(i)+h*(k2/2));
    k4 = f(t(i)+h, y(i)+(h*k3));
```

```
        y(i+1)=y(i)+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
        t(i+1)=t(i)+h;

    end
```

3. Problemas de Aplicação e Testes de Método

3.1. Problema do Pêndulo

Problema Inicial:

$$\theta'' + \frac{C}{mL}\theta' + \frac{g}{L}\, sen(\theta) = 0$$

, sendo:

m -> massa

l -> comprimento

C -> coeficiente de amortecimento

g -> constante de gravidade

1ºPasso:

Trocar variável

$y = \theta$

sabendo que:

$$\frac{g}{L} = 1$$
$$\frac{C}{mL} = 0{,}3$$
$$t \in [0{,}15]$$
$$y(0) = \frac{\pi}{2}$$
$$y'(0) = 0$$

2ºPasso:

Substituir na equação

$$y'' + \frac{C}{mL}y' + \frac{g}{L}\, sen(y) = 0 <=> y'' + 0{,}3y' + sen(y) = 0 <=>$$
$$y'' = -sen(y) - 0{,}3y'$$

3ºpasso:

Transformar a ED num sistema de Equações (SED)

-> Introduzir duas novas variáveis

u=y

v=y'

u' = v

u' = y'

v' = y''

$v' = -sen(u) - u,3v$

-> Fazer um sistema

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -sen(u) - 0{,}3v \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0u + 1v \\ v' = -sen(u) - 0{,}3v \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases}$$

PVI:

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -sen(u) - 0{,}3v \end{cases} \\ t \in [0{,}15] \\ u(0) = \frac{\pi}{2} \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

GUI:

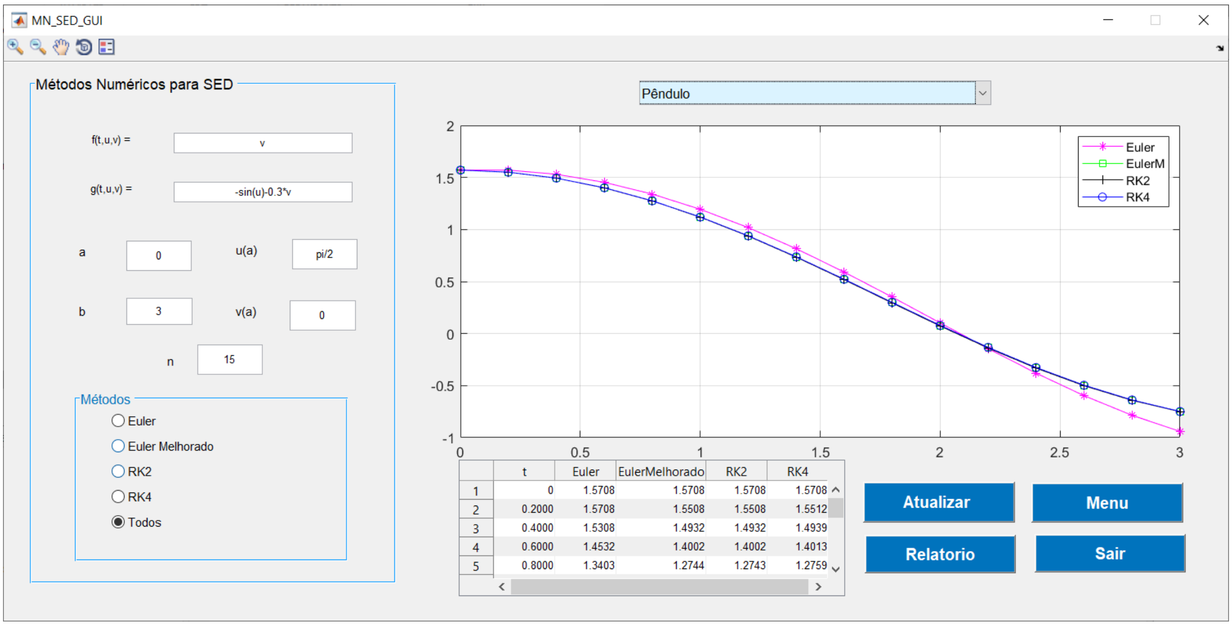

Figura 1 Pendulo

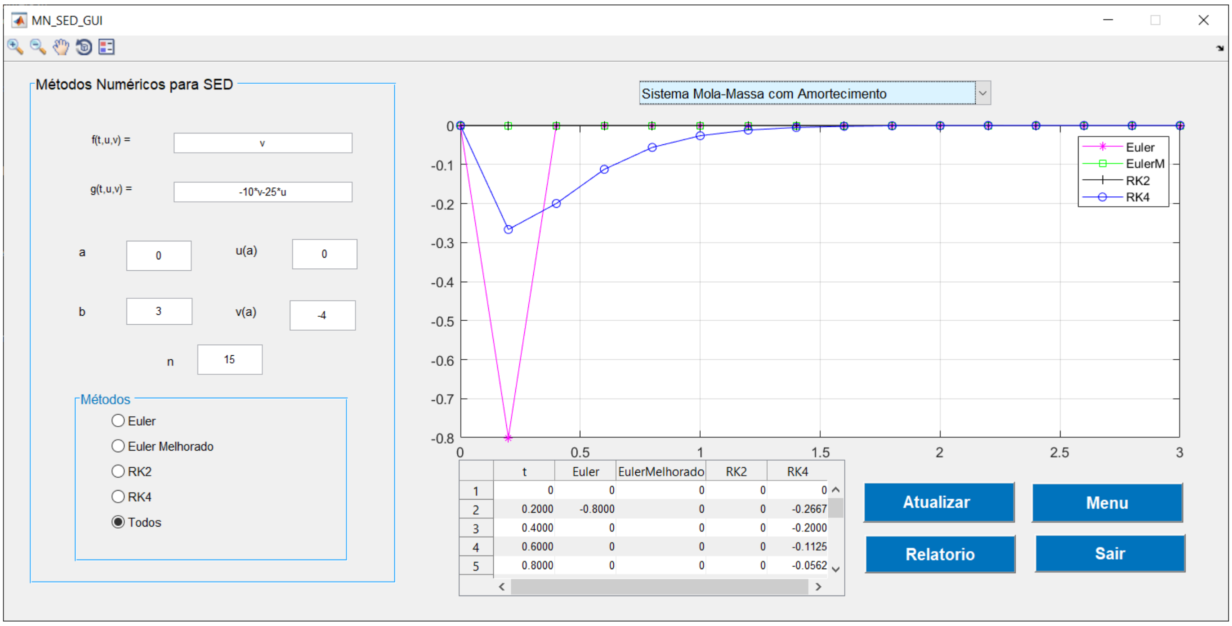

Figura 2 Sistema Mola-Massa com Amortecimento

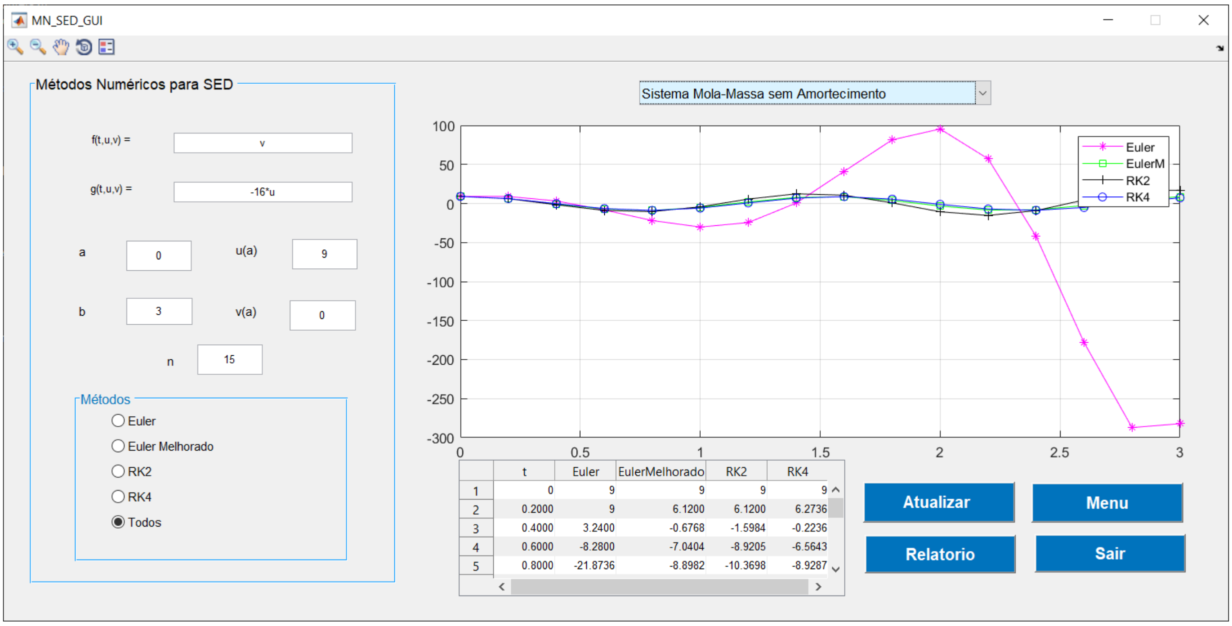

Figura 3 Sistema Mola-Massa sem Amortecimento

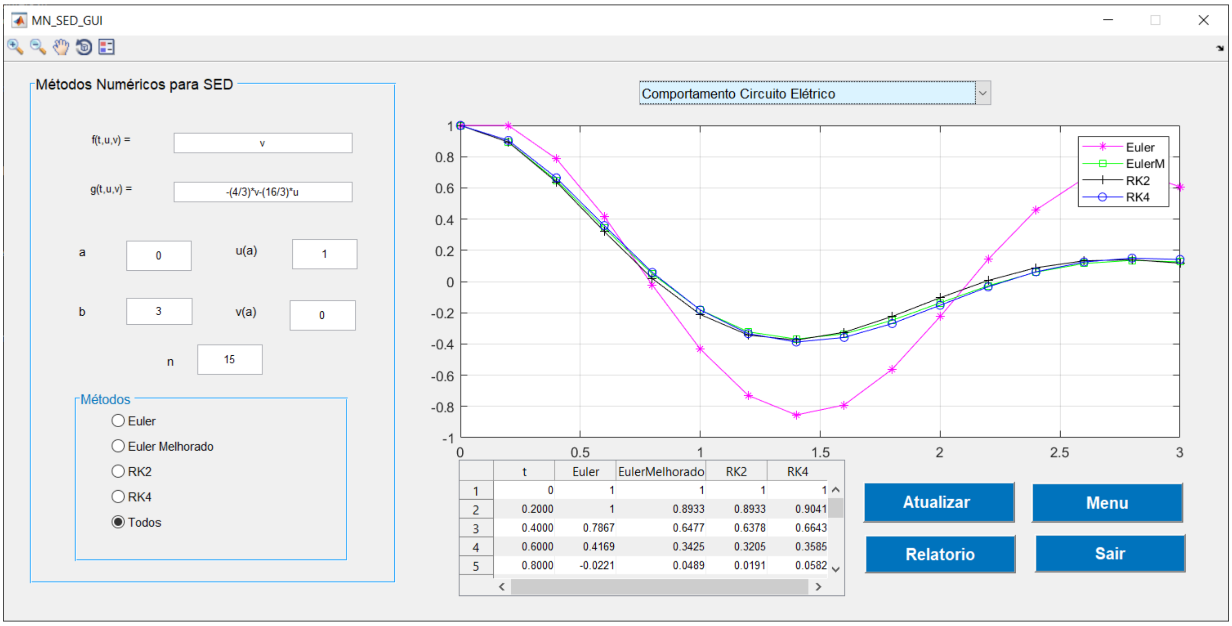

Figura 4 Comportamento Circuito Elétrico

3.2. Problema do sistema massa-mola sem amortecimento

Movimento harmónico simples (movimento livre não amortecido) é descrito através da equação $mx' + kx = 0$,que está sujeita às condições iniciais $x(0) = a$ e $x'(0) = b$, representando a medida de deslocamento inicial e a velocidade inicial.

Equação diferencial de ordem 2

$$x'' + 16x = 0$$
$$\Leftrightarrow x'' = -16x$$

Condições iniciais:

$$x(0) = 9$$
$$x'(0) = 0$$

Sendo:

$$u = x$$
$$v' = x''$$

Então:

$$v' = -16u\,, u(0) = 9\,, v(0) = 0$$

3.3. Problema do sistema massa-mola com amortecimento

-> Um peso de 6.4 lb provoca um alongamento de 1.28 ft numa mola;

-> A força amortecedora é o dobro da velocidade instantânea;

-> O peso desloca-se da posição de equilíbrio com uma velocidade de 4 ft/s orientada para cima.

Tendo em conta:

->$W = ks$ – lei de Hooke, sendo $k = 5$ lb/ft

->$W = mg$, sendo $m = 0.2$

Equação do movimento livre amortecido:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - b\frac{dx}{dt}$$

Onde:

-> b é uma constante;

-> O sinal "-" indica que as forças amortecidas atuam numa direção oposta à do movimento.

Equação diferencial de peso:

$$-0.2x" = -5x - 2x'$$
$$x" + 10x' + 25x = 0$$
$$x" = -10x' - 25x$$

Condições iniciais:

-> $x(0) = 0$

-> $x'(0) = -4$

Sendo:

-> $u = x$

-> $v' = x"$

Então:

$$v' = x" \ \rightarrow \ v' = -10v - 25u\,, u(0) = 0\,, v(0) = -4$$

3.4. Problema do circuito elétrico

$$L\frac{di}{dt} + RC\, i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau = 0$$

Condições iniciais:

-> $i(0) = 1$

-> $i'(0) = 1$

Passo 1:

Simplificar a expressão

Dividindo a equação por L, obtemos:

$$i''(t) + \frac{R}{L} i'(t) + \frac{1}{CL} i(t) = 0$$

Passo 2:

Trocar a variável:

$-y = i(t)$

$$y'' + \frac{R}{L} y' + \frac{1}{CL} y = 0 \Leftrightarrow y'' = -\frac{R}{L} y' - \frac{1}{CL} y$$

$u = v$

$v = y'$

$u' = v$

$v' = y'' => v' = -\frac{R}{L} v - \frac{1}{CL} u$

$u(0) = 1$

$v(0) = 0$

Considerando:

-> $\frac{R}{L} = \frac{4}{3}$

-> $\frac{1}{CL} = \frac{16}{3}$

Então:

$$v' = -\frac{4}{3} v - \frac{16}{3} u$$

4. Conclusão

Concluindo, com este trabalho foi possível resolver problemas tais como: sistemas mecânicos mola-massa com amortecimento e sem amortecimento, circuitos elétricos de uma maneira mais rápida e eficiente. Com o gráfico apresentado na GUI, é possível verificar que o método com maior precisão é o método RK4, tendo em conta que a linha deste método é a mais próxima à solução exata. Pelo contrário, o método com menor precisão é o método de Euler, pois a linha que lhe corresponde é a mais afastada da linha de solução exata.