Elementos de Lógica: Notas de Aula

Profa. Christina Fraga Esteves Maciel Waga

Depto II.IME.UERJ

junho 2022

Sumário

Introdução

Este é um curso introdutório de Lógica Matemática. Os seguintes tópicos serão abordados:

- Cálculo Proposicional: conectivos lógicos, tabelas verdade, tautologias, regras de inferência, formas normais e argumentos: demonstração direta e indireta,
- Álgebra de Conjuntos,
- Lógica de primeira ordem: aspectos básicos,
- Álgebra de Boole: reticulados, circuitos e mapas de Karnaugh.

Referências bibliográficas importantes:

1. Alencar Filho, E., *Iniciação à Lógica Matemática*, Nobel (2002).
2. Gersting, J.L., *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação*, LTC (1995).

Capítulo 1

Lógica Proposicional

Lógica Proposicional é um formalismo composto por uma linguagem formal e métodos de inferência. É um sistema bivalorado com valores lógicos **Verdadeiro** ou **Falso**.

1.1 Linguagem

1.1.1 Sintaxe: forma

Alfabeto

- Símbolos Proposicionais: $p, q, r, \ldots$ ou $p_1, p_2, p_3, \ldots$.
  Uma proposição simples é qualquer declaração significativa à qual se pode atribuir os valores lógicos Verdadeiro (V) ou Falso (F).
- Símbolos Conectivos:
  - Unário:

Negação	$\neg$	não

  - Binários:

Conjunção	$\wedge$	e
Disjunção	$\vee$	ou
Condicional	$\rightarrow$	se...então...
Bicondicional	$\leftrightarrow$	se e somente se

- Símbolos de parênteses: ( )

Gramática

Definição de fórmulas bem escritas ou bem formadas (**wff** - well-formed formula):

G1 Todo símbolo proposicional é uma wff.

G2 Se α e β são wff's
então $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ também são wff's.

Observação 1.1.1 Alfabeto Grego

α		alfa	η		eta	ν		nü	τ		tau
β		beta	θ	Θ	teta	ξ	Ξ	csi	υ	Υ	úpsilon
γ	Γ	gama	ι		iota	o		omícron	ϕ	Φ	fi
δ	Δ	delta	κ		capa	π	Π	pi	χ		qui
ϵ		epsílon	λ	Λ	lambda	ρ		rô	ψ	Ψ	psi
ζ		zeta	μ		mü	σ	Σ	sigma	ω	Ω	ômega

1.1.2 Semântica: significado

Cada símbolo proposicional pode assumir dois valores lógicos ou valores de verdade, Verdadeiro (V) ou Falso (F). Assim, dados n símbolos proposicionais teremos 2^n casos a serem considerados, isto é, 2^n linhas de uma tabela verdade.

p
V
F

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Os valores lógicos para as wff's obtidas a partir dos conectivos estão determinados nas tabelas verdade a seguir.

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

α	β	$(\alpha \wedge \beta)$	$(\alpha \vee \beta)$	$(\alpha \rightarrow \beta)$	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Em uma wff condicional $(\alpha \rightarrow \beta)$, a wff α é denominada **antecedente**, **primeira componente** ou **condição suficiente** e a wff β é o **consequente**, **segunda componente** ou

condição necessária. Em uma wff bicondicional ($\alpha \leftrightarrow \beta$), α **condição necessária e suficiente** para β e vice-versa.

Além dos conectivos apresentados podemos incluir o símbolo $\veebar$ (**ou exclusivo**) com a tabela verdade abaixo.

α	β	$(\alpha \veebar \beta)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observação 1.1.2 Redução de parênteses

wff original	wff reduzida
$(\neg\alpha)$	$\neg\alpha$
$(\alpha \wedge \beta)$	$\alpha \wedge \beta$
$((\neg\alpha) \wedge \beta)$	$\neg\alpha \wedge \beta$
$(\neg(\alpha \wedge \beta))$	$\neg(\alpha \wedge \beta)$
$(\,(\alpha \vee (\neg\beta)) \rightarrow (\neg\alpha)\,)$	$(\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$
$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$
$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma)$	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$

Exercício 1.1.3 Faça tabela verdade para cada uma das wff's.

1. $p \vee \neg p$
2. $p \wedge \neg p$
3. $\neg(p \vee q)$
4. $(\neg\, p) \wedge (\neg\, q)$
5. $(\neg\, p) \rightarrow q$
6. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
7. $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
8. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$
9. $(p \veebar (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \veebar r)$
10. $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$
11. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
12. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

13. $((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$
14. $((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$
15. $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to \beta$
16. $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$
17. $(((\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta)) \wedge (\alpha \vee \gamma)) \to (\beta \vee \delta)$
18. $((\alpha \to \beta) \wedge ((\gamma \to \delta) \wedge (\neg\beta \vee \neg\delta))) \to (\neg\alpha \vee \neg\gamma)$

1.2 Cálculo Proposicional

1.2.1 Implicações e equivalências lógicas

Uma wff que é sempre verdadeira, isto é, todas as linhas de sua tabela verdade têm o valor lógico V, é denominada uma **tautologia**. Uma **contradição** é uma wff sempre falsa. Já uma fórmula que assume tanto valores verdade quanto valores falso é uma **contingência**.

Considere **V** uma tautologia, **F** uma contradição e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wff's quaisquer.

Existem duas maneiras de se relacionar fórmulas proposicionais. Uma wff α **implica logicamente** a wff β, $\alpha \Rightarrow \beta$ ou $\alpha \vDash \beta$, se sempre que a wff α é verdadeira, a wff β também é, ou equivalentemente, a fórmula condicional $(\alpha \to \beta)$ é uma tautologia.

Implicações Lógicas ou Regras de Inferência

	$\mathbf{F} \Rightarrow \alpha$
	$\alpha \Rightarrow \mathbf{V}$
Simplificação	$\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$
Adição	$\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta$
Conjunção	$\alpha, \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta$
Modus Ponens	$(\alpha \to \beta) \wedge \alpha \Rightarrow \beta$
Modus Tollens	$(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$
Silogismo Disjuntivo	$(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha \Rightarrow \beta$
Silogismo Hipotético	$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \Rightarrow \alpha \to \gamma$
Dilema Construtivo	$(\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \Rightarrow \beta \vee \delta$
Dilema Destrutivo	$(\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta) \wedge (\neg\beta \vee \neg\delta) \Rightarrow \neg\alpha \vee \neg\gamma$

Por exemplo, para verificarmos a regra de **Modus Ponens**, fazemos a tabela verdade de ambas as wff's e comparamos ou podemos fazer a tabela de $((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$ para verificarmos se é uma tautologia.

α	β	$((\alpha \to \beta)$	$\wedge$	$\alpha)$	β
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F

ou

α	β	$((\alpha \to \beta)$	$\wedge$	$\alpha)$	$\to$	β
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F

Observe que, $\alpha \vee \beta \not\Rightarrow \alpha$, vide tabelas a seguir.

α	β	$\alpha \vee \beta$	α
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

ou

α	β	$(\alpha \vee \beta)$	$\rightarrow$	α
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

A wff α é **logicamente equivalente** a wff β, $\alpha \Leftrightarrow \beta$ ou $\alpha \models\!\dashv \beta$, se a wff α é verdadeira, a wff β também é e vice-versa, isto é, $\alpha \Rightarrow \beta$ e $\beta \Rightarrow \alpha$, ou seja, a fórmula bicondicional $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ é uma tautologia.

Equivalências Lógicas

Idempotência	$\alpha \wedge \alpha \Leftrightarrow \alpha$	$\alpha \vee \alpha \Leftrightarrow \alpha$
Comutativa	$\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \beta \wedge \alpha$	$\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \beta \vee \alpha$
	$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow \beta \leftrightarrow \alpha$	$\alpha \veebar \beta \Leftrightarrow \beta \veebar \alpha$
Associativa	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
	$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma \Leftrightarrow \alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)$	$(\alpha \veebar \beta) \veebar \gamma \Leftrightarrow \alpha \veebar (\beta \veebar \gamma)$
Elemento Neutro	$\alpha \wedge \mathbf{V} \Leftrightarrow \alpha$	$\alpha \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow \alpha$
Elemento Zero	$\alpha \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$	$\alpha \vee \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{V}$
Princípio da Não Contradição	$\alpha \wedge \neg\alpha \Leftrightarrow \mathbf{F}$	
Princípio do Terceiro Excluído		$\alpha \vee \neg\alpha \Leftrightarrow \mathbf{V}$
Dupla Negação	$\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$	
Distributiva	$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$	$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$
Absorção	$(\alpha \wedge \beta) \vee \alpha \Leftrightarrow \alpha$	$(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \Leftrightarrow \alpha$
	$\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha \rightarrow \beta$	
Semiabsorção	$(\neg\alpha \wedge \beta) \vee \alpha \Leftrightarrow \alpha \vee \beta$	$(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta$
De Morgan	$\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$	$\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$
Forma Disjuntiva do Condicional (Lei de Filo)	$\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$	
Regra de Clavius	$\neg\alpha \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \alpha$	
Forma Conjuntiva do Bicondicional	$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$	
Forma Conjuntiva do Ou Exclusivo	$\alpha \veebar \beta \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)$	
Fortalecimento da Hipótese	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$	
Redução ao Absurdo	$\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \mathbf{F}$	

Dada uma wff condicional $(\alpha \rightarrow \beta)$, diz-se que a wff $(\beta \rightarrow \alpha)$ é sua **recíproca**, a wff $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ é a **contrapositiva** e $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$ é a sua **contrária**. E se relacionam da seguinte forma:

Contrapositiva	$(\alpha \rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
	$(\beta \rightarrow \alpha) \Leftrightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$

Verificando a equivalência **Forma Disjuntiva do Condicional** usando tabela verdade:

α	β	$\alpha \to \beta$	$\neg\alpha \vee \beta$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

ou

α	β	$(\alpha \to \beta)$	$\leftrightarrow$	$(\neg\alpha \vee \beta)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

A lista (incompleta) de implicações e equivalências lógicas nos fornece um elenco de regras de reescrita, denominadas **regras de dedução**, que preservam o valor verdade das wff.

Assim, para decidirmos se uma wff implica logicamente outra wff β podemos usar duas abordagens, por Tabela Verdade ou por equivalências e/ou implicações lógicas. Por exemplo, vamos mostrar que a regra de Modus Ponens é válida.

- Usando somente equivalências, mostrar que $((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$ é uma tautologia.

wff		justificativa
$((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$	$\Leftrightarrow$	fdc
$\neg((\neg\alpha \vee \beta) \wedge \alpha)) \vee \beta$	$\Leftrightarrow$	semiabs
$\neg(\beta \wedge \alpha) \vee \beta$	$\Leftrightarrow$	DM
$(\neg\beta \vee \neg\alpha) \vee \beta$	$\Leftrightarrow$	assoc e comut $\vee$
$\neg\beta \vee \beta \vee \neg\alpha$	$\Leftrightarrow$	pte
$\mathbf{V} \vee \neg\alpha$	$\Leftrightarrow$	elem. zero $\vee$
$\mathbf{V}$		

- Usando equivalências e implicações

wff		justificativa
$(\alpha \to \beta) \wedge \alpha$	$\Leftrightarrow$	fdc
$(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \alpha$	$\Leftrightarrow$	semiabs
$\beta \wedge \alpha$	$\Rightarrow$	simpl
β		

Analogamente, para decidirmos se uma wff α é logicamente equivalente uma wff β podemos usar tabela verdade ou equivalências lógicas. Por exemplo, vamos mostrar a Forma Disjuntiva do Condicional.

- Usando equivalências, mostrar que $(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$ é uma tautologia.

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta) \underset{fcb}{\Leftrightarrow} ((\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \vee \beta)) \wedge ((\neg\alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)) \underset{fdc}{\Leftrightarrow}$$

$$(\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee (\neg\alpha \vee \beta)) \wedge (\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee (\neg\alpha \vee \beta)) \underset{idemp}{\Leftrightarrow} (\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee (\neg\alpha \vee \beta)) \underset{PTE}{\Leftrightarrow} \mathbf{V}$$

1.2.2 Simplificando uma wff

Simplificar uma wff α é obter uma wff logicamente equivalente β mais simples, usualmente, com respeito ao tamanho (número total de símbolos que a compõem).

wff		justificativa
$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\neg\beta \wedge \gamma)$	$\Leftrightarrow$	fdc
$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee \neg(\neg\beta \wedge \gamma)$	$\Leftrightarrow$	DM
$(\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta) \vee (\neg\neg\beta \vee \neg\gamma)$	$\Leftrightarrow$	dupla neg e assoc
$(\alpha \wedge \beta) \vee \beta \vee \neg\gamma$	$\Leftrightarrow$	abs
$\beta \vee \neg\gamma$	$\Leftrightarrow$	comut e fdc
$\gamma \to \beta$		

Assim, $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\neg\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow \gamma \to \beta$.

1.2.3 Relacionando wff's

Dadas duas wff's α e β, é possível relacioná-las por implicação lógica das seguintes formas:

$\alpha \Rightarrow\Leftarrow \beta$
$\alpha \Rightarrow\not\Leftarrow \beta$
$\alpha \not\Rightarrow\Leftarrow \beta$
$\alpha \not\Rightarrow\not\Leftarrow \beta$

Por exemplo, para relacionarmos $((\alpha \veebar \beta) \to (\alpha \to \neg\gamma))$ e $(\alpha \wedge \beta)$, devemos inicialmente simplificar a maior wff:

$$(\alpha \veebar \beta) \to (\alpha \to \neg\gamma) \underset{fdc}{\Leftrightarrow} \neg(\alpha \veebar \beta) \vee (\neg\alpha \vee \neg\gamma) \underset{fdoe+assoc}{\Leftrightarrow} \neg((\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)) \vee \neg\alpha \vee \neg\gamma \underset{DM}{\Leftrightarrow}$$

$$(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \neg\neg(\alpha \wedge \beta)) \vee \neg\alpha \vee \neg\gamma \underset{DM+dn+assoc}{\Leftrightarrow} (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \beta) \vee \neg\alpha \vee \neg\gamma \underset{comut}{\Leftrightarrow}$$

$$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \vee \neg\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \vee \neg\gamma \underset{abs}{\Leftrightarrow} \neg\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \vee \neg\gamma \underset{semiabs}{\Leftrightarrow} \neg\alpha \vee \beta \vee \neg\gamma$$

Assim, $((\alpha \veebar \beta) \to (\alpha \to \neg\gamma)) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta \vee \neg\gamma$.

Como, $\neg\alpha \vee \beta \vee \neg\gamma \not\Rightarrow \alpha \wedge \beta$ (apresente os detalhes).

E, $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \neg\alpha \vee \beta \vee \neg\gamma$ (apresente os detalhes).

Temos que, $((\alpha \veebar \beta) \to (\alpha \to \neg\gamma)) \not\Rightarrow\Leftarrow (\alpha \wedge \beta)$.

Exercícios 1.2.1

1. Faça tabela verdade para cada uma das wff's bicondicionais associadas às equivalências lógicas.

2. Verifique, usando tabela verdade e as regras, se:

   (a) $\alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
   (b) $\alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
   (c) $\alpha \Rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$
   (d) $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \vee \beta$
   (e) $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \leftrightarrow \beta$
   (f) $\alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta$
   (g) $\alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
   (h) $\alpha \rightarrow \beta \Rightarrow (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow \beta$
   (i) $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \rightarrow \beta$
   (j) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \neg\beta) \Leftrightarrow \neg\alpha$
   (k) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\alpha \vee \gamma) \rightarrow \beta$
   (l) $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\alpha \rightarrow \gamma) \Leftrightarrow \alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)$
   (m) $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\gamma \rightarrow \delta) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \vee \delta)$

3. Responda, usando as regras.

   (a) $\alpha \wedge \neg\alpha \Rightarrow \beta$
   (b) $(\alpha \veebar \beta) \Rightarrow \neg\alpha$
   (c) $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \vee \beta$
   (d) $\neg\alpha \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \alpha$
   (e) $\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha \rightarrow \beta$
   (f) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta \Leftrightarrow \alpha \vee \beta$
   (g) $(\alpha \rightarrow \gamma) \vee (\beta \rightarrow \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$
   (h) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma) \Leftrightarrow \alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$

4. Simplifique as fórmulas.

   (a) $\neg(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$
   (b) $\neg(\alpha \vee \neg\beta)$
   (c) $\neg(\neg\alpha \wedge \beta)$
   (d) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
   (e) $(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha)$
   (f) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\alpha \rightarrow \beta)$
   (g) $\neg(\alpha \vee \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)$
   (h) $(\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) \leftrightarrow \alpha$
   (i) $\alpha \wedge ((\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \alpha)$
   (j) $(\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)) \leftrightarrow \alpha$

(k) $\alpha \vee ((\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \alpha)$

(l) $\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \neg\beta)$

5. Relacione as fórmulas τ e ψ indicando ($\Leftrightarrow$), ($\Rightarrow, \not\Leftarrow$), ($\not\Rightarrow, \Leftarrow$) ou ($\not\Rightarrow, \not\Leftarrow$), usando manipulação.

τ	ψ
$(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$	**V**
$(\alpha \veebar \beta)$	α
$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \gamma)$	$\neg\beta \wedge \neg\gamma$
$\neg(\,(\alpha \vee \gamma) \leftrightarrow (\beta \veebar \gamma)\,)$	$\neg\alpha \wedge \beta$
$(\alpha \rightarrow \beta) \veebar (\neg\alpha \rightarrow \gamma)$	$\neg\beta \vee \neg\gamma$
$(\,(\alpha \veebar \gamma) \rightarrow \neg(\beta \wedge \gamma)\,) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$	$\beta \vee \gamma$
$(\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \vee \gamma$	$\neg\alpha \vee \beta \vee \gamma$
$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$	α
$(\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \varphi)$	$(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow \phi$
$(\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)) \wedge ((\gamma \wedge \phi \wedge \beta) \rightarrow \theta) \wedge (\neg(\alpha \vee \theta) \vee (\gamma \wedge \phi))$	θ

1.2.4 Formas Normais

Dentre os conectivos lógicos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \veebar$ e $\leftrightarrow$, três exprimem-se em termos de apenas dois, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ e $\{\neg, \rightarrow\}$, denominados **conjuntos completos de conectivos**.

Considere o conjunto $\{\neg, \wedge\}$, temos:

$$\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \tag{1.1}$$
$$\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \tag{1.2}$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha) \tag{1.3}$$
$$\alpha \veebar \beta \Leftrightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta) \tag{1.4}$$

Para o conjunto $\{\neg, \vee\}$, temos:

$$\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \tag{1.5}$$
$$\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta \tag{1.6}$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee \neg(\neg\beta \vee \alpha)) \tag{1.7}$$
$$\alpha \veebar \beta \Leftrightarrow \neg(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)) \tag{1.8}$$

E, para $\{\neg, \rightarrow\}$, temos:

$$\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \tag{1.9}$$
$$\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta \tag{1.10}$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow \neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\beta \rightarrow \alpha)) \tag{1.11}$$
$$\alpha \veebar \beta \Leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\beta \rightarrow \alpha) \tag{1.12}$$

Diz-se que uma wff está na **forma normal** (FN) quando contem somente os conectivos $\neg, \wedge$ e $\vee$. Toda wff é logicamente equivalente a um wff na forma normal.

Exemplo 1.2.2 A wff $\neg((\alpha \to \beta) \to \neg(\beta \to \alpha))$ não está na forma normal. Observe que, é possível obter pelo menos três formas normais equivalentes à wff dada.

		justificativa
wff:	$\neg((\alpha \to \beta) \to \neg(\beta \to \alpha)) \Leftrightarrow$	fdc
FN:	$\neg(\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee \neg(\neg\beta \vee \alpha)) \Leftrightarrow$	DM
FN:	$\neg\neg(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \neg\neg(\neg\beta \vee \alpha) \Leftrightarrow$	dupla neg
FN:	$(\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$	

Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Uma wff está na FNC quando:

1. Está na forma normal.
2. Não existem dupla negações.

   Uma negação não tem alcance sobre uma conjunção nem sobre uma disjunção.
3. Uma disjunção não tem alcance sobre uma conjunção.

Dada uma wfff qualquer é sempre possível obter uma wff logicamente equivalente na FNC, bastando seguir os seguintes passos.

Fnc1. Eliminar os conectivos $\to$, $\underline{\vee}$ e $\leftrightarrow$ usando as regras de equivalência Forma Disjuntiva do Condicional e Forma Conjuntiva do Bicondicional.

Fnc2. Aplicar as regras de Dupla Negação e de De Morgan.

Fnc3. Usar a regra Distributiva $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$.

Forma Normal Disjuntiva (FND)

Analogamente, uma wff está na FND quando: Uma wff está na FNC quando:

1. Está na forma normal.
2. Não existem dupla negações.

   Uma negação não tem alcance sobre uma conjunção nem sobre uma disjunção.
3. Uma conjunção não tem alcance sobre uma disjunção.

Obtendo a FND:

Fnd1. Eliminar os conectivos $\rightarrow$, $\veebar$ e $\leftrightarrow$ usando as regras de equivalência Forma Disjuntiva do Condicional e Forma Conjuntiva do Bicondicional.

Fnd2. Aplicar as regras de Dupla Negação e de De Morgan.

Fnd3. Usar a regra Distributiva $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$.

Exercícios 1.2.3

1. Reescreva as fórmulas do item 4 do Exercício 1.2.1 usando:
   (a) $\{\neg, \wedge\}$
   (b) $\{\neg, \vee\}$
   (c) $\{\neg, \rightarrow\}$
2. Determine a Forma Normal Conjuntiva das fórmulas.
   (a) $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$
   (b) $\alpha \vee \beta \vee \gamma$
   (c) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$
   (d) $\neg(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$
   (e) $\neg(\alpha \vee \neg\beta)$
   (f) $\neg(\neg\alpha \wedge \beta)$
   (g) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
   (h) $(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha)$
   (i) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\alpha \rightarrow \beta)$
   (j) $\neg(\alpha \vee \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)$
   (k) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \alpha$
   (l) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \alpha$
   (m) $\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \neg\beta)$
   (n) $\alpha \vee \beta$
   (o) $\alpha \rightarrow \beta$
   (p) $\alpha \leftrightarrow \beta$
   (q) $(\alpha \veebar \beta) \leftrightarrow \alpha$
   (r) $(\neg\alpha \wedge \beta) \veebar \beta$
   (s) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
   (t) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\alpha$
   (u) $(\alpha \rightarrow \beta) \vee \neg\alpha$
   (v) $\alpha \veebar (\beta \veebar \gamma)$

(w) $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$

(x) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

(y) $(\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \wedge \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$

(z) $(\neg(\neg\alpha \rightarrow \neg\gamma)) \vee (\beta \rightarrow \neg\gamma)$

3. Determine a Forma Normal Disjuntiva para as fórmulas do item anterior.

1.2.5 Demonstrações: Direta e Indireta

Agora, estamos interessados em como obter conclusões a partir de um conjunto de wff dadas. Considere um conjunto de wff $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, $n \geqslant 1$, e uma wff β. Denomina-se **argumento** toda afirmação de que o conjunto Γ tem como consequência ou acarreta a wff β, denotamos por $\Gamma \vdash \beta$. Diz-se também que β se deduz, se infere ou decorre de Γ. Assim, Γ é denominado **conjunto de hipóteses** ou **premissas** do argumento e a wff β é denominada **tese** ou **conclusão** do argumento. Um **argumento** $\Gamma \vdash \beta$ é **válido** quando $(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \Rightarrow \beta$, isto é, quando a wff $(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \rightarrow \beta$ é uma tautologia. Um argumento não válido é um **sofisma** ou **falácia**.

Assim, a validade de um argumento pode ser feita mediante o uso de tabelas verdade, como foi visto anteriormente. Uma abordagem mais eficiente para verificar a validade de um argumento consiste em deduzir ou demonstrar a conclusão a partir do conjunto de premissas. Uma **dedução** ou **demonstração direta** da wff β a partir do conjunto de wff Γ é uma sequência finita de wff $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ tal que:

1. Para todo $i = 1, \ldots, m$,
   (a) $\alpha_i \in \Gamma$ ou
   (b) α_i foi obtida por aplicação de alguma das regras de inferência ou equivalência em certas fórmulas α_j, $1 \leqslant j < i$, anteriores.
2. $\alpha_m = \beta$.

Exemplo 1.2.4 Uma demonstração do argumento $\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta\} \vdash \neg\alpha$ é:

α_1	$\alpha \rightarrow \neg\beta$	
α_2	β	
α_3	$\neg\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	cp 1
α_4	$\beta \rightarrow \neg\alpha$	dupla neg 3
α_5	$\neg\alpha$	MP 2,4

Demostrações indiretas usam algumas equivalências lógicas para modificação do enunciado para que seja feita então uma demostração direta.

- **demonstração condicional**

  Outro método para demonstrar a validade de argumentos do tipo $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$ é a **demonstração condicional**, onde o enunciado é modificado. Observe que, $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$ só é válido quando $\Gamma \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \Leftrightarrow \mathbf{V}$, que, pela regra do Fortalecimento da Hipótese, é equivalente a $(\Gamma \wedge \beta) \rightarrow \gamma \Leftrightarrow \mathbf{V}$. Assim, o argumento dado $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$ é válido quando $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \gamma$ é válido.

  Exemplo 1.2.5 Considere o argumento $\{\alpha \vee (\beta \rightarrow \gamma), \neg\gamma\} \vdash \beta \rightarrow \alpha$. Usando demonstração condicional, rescrevemos o enunciado para $\{\alpha \vee (\beta \rightarrow \gamma), \neg\gamma, \beta\} \vdash \alpha$ e apresentamos a demonstração direta para o enunciado fortalecido.

α_1	$\alpha \vee (\beta \rightarrow \gamma)$	
α_2	$\neg\gamma$	
α_3	β	
α_4	$\alpha \vee (\neg\beta \vee \gamma)$	fdc 1
α_5	$(\alpha \vee \neg\beta) \vee \gamma$	assoc 4
α_6	$\alpha \vee \neg\beta$	SD 2,5
α_7	$\neg\neg\beta$	dupla neg 3
α_8	α	SD 6,7

- **demonstração por redução ao absurdo ou por contradição**

  Temos o método da **demostração por redução ao absurdo** ou **por contradição**, que também faz uma modificação no enunciado dado antes de apresentar uma demonstração direta. O argumento $\Gamma \vdash \beta$ só é válido quando $\Gamma \rightarrow \beta \Leftrightarrow \mathbf{V}$, que, pela regra da Redução ao Absurdo, é equivalente a $(\Gamma \wedge \neg\beta) \rightarrow \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{V}$. Desta forma, o argumento dado $\Gamma \vdash \beta$ é válido quando $\Gamma \cup \{\neg\beta\} \vdash \mathbf{F}$ é válido.

  Exemplo 1.2.6 Considere o argumento $\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \gamma \rightarrow \beta\} \vdash \neg(\alpha \wedge \gamma)$. Usando demonstração por redução ao absurdo, rescrevemos o enunciado para $\{\alpha \rightarrow \neg\beta, \gamma \rightarrow \beta, \neg\neg(\alpha \wedge \gamma)\} \vdash \mathbf{F}$ e apresentamos a demonstração para o enunciado modificado.

α_1	$\alpha \rightarrow \neg\beta$	
α_2	$\gamma \rightarrow \beta$	
α_3	$\neg\neg(\alpha \wedge \gamma)$	
α_4	$\alpha \wedge \gamma$	dupla neg 3
α_5	α	simpl 4
α_6	$\neg\beta$	MP 1,5
α_7	γ	simpl 4
α_8	β	MP 2,7
α_9	$\neg\beta \wedge \beta$	conj 6,8
α_{10}	$\mathbf{F}$	pnc 9

Exercícios 1.2.7

1. Verifique a validade dos argumentos apresentando demonstrações.

(a) $\{\gamma \to (\alpha \vee \beta),\ \gamma,\ \neg\alpha\} \vdash \beta$
(b) $\{\alpha \to \neg\beta,\ \neg\neg\beta,\ \neg\alpha \to \gamma\} \vdash \gamma$
(c) $\{\alpha \wedge \beta,\ \alpha \to \gamma,\ \beta \to \delta\} \vdash \gamma \wedge \delta$
(d) $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \neg\gamma,\ \alpha\} \vdash \neg\gamma$
(e) $\{\alpha \to \beta,\ \neg\beta,\ \neg\alpha \to \gamma\} \vdash \gamma$
(f) $\{\alpha \to \beta,\ \alpha \to \gamma,\ \alpha\} \vdash \beta \wedge \gamma$
(g) $\{\alpha \to \beta,\ \neg\beta,\ \alpha \vee \gamma\} \vdash \gamma$
(h) $\{\alpha \vee \neg\beta,\ \gamma \to \neg\alpha,\ \gamma\} \vdash \neg\beta$
(i) $\{\neg\alpha \vee \neg\beta,\ \neg\neg\beta,\ \gamma \to \alpha\} \vdash \neg\gamma$
(j) $\{\alpha \to \beta,\ \alpha \wedge \gamma\} \vdash \beta$
(k) $\{\alpha \wedge \beta,\ (\alpha \vee \gamma) \to \delta\} \vdash \alpha \wedge \delta$
(l) $\{\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha\} \vdash \gamma$
(m) $\{\alpha \to \beta,\ (\alpha \wedge \beta) \to \gamma,\ \neg(\alpha \wedge \gamma)\} \vdash \neg\alpha$
(n) $\{(\alpha \vee \beta) \to \gamma,\ (\gamma \vee \beta) \to (\alpha \to (\delta \leftrightarrow \varphi)),\ \alpha \wedge \delta\} \vdash \delta \leftrightarrow \varphi$
(o) $\{\alpha \to \neg\beta,\ \neg\alpha \to (\gamma \to \neg\beta),\ (\neg\delta \vee \neg\gamma) \to \neg\neg\beta,\ \neg\delta\} \vdash \neg\gamma$
(p) $\{(\alpha \wedge \beta) \to \gamma,\ \gamma \to \delta,\ \varphi \to \neg\psi,\ \varphi,\ \neg\delta \vee \psi\} \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$
(q) $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma,\ \delta \to \varphi,\ \alpha \vee \delta\} \vdash \gamma \vee \varphi$
(r) $\{\alpha \to \beta,\ \neg\gamma \to (\delta \to \varphi),\ \gamma \vee (\alpha \vee \delta),\ \neg\gamma\} \vdash \beta \vee \varphi$
(s) $\{\alpha \to \beta,\ (\alpha \to \gamma) \to (\delta \vee \beta),\ (\alpha \wedge \beta) \to \gamma,\ \neg\delta\} \vdash \beta$
(t) $\{\alpha \to \beta,\ \alpha \vee (\neg\neg\gamma \wedge \neg\neg\beta),\ \delta \to \neg\gamma,\ \neg(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \neg\delta \vee \neg\beta$
(u) $\{\alpha \to \gamma,\ \beta \to \delta,\ \neg\gamma,\ (\alpha \vee \beta) \wedge (\gamma \vee \delta)\} \vdash \delta$
(v) $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma,\ \gamma \to \delta,\ \neg\delta,\ \alpha \vee \varphi\} \vdash \varphi$
(w) $\{(\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta),\ \varphi \to \psi,\ \psi \to \sigma,\ \neg\beta \vee \neg\sigma\} \vdash \neg\alpha \vee \neg\varphi$
(x) $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma,\ \delta \to \neg\gamma,\ \alpha\} \vdash \neg\delta$
(y) $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma,\ \alpha \vee \delta,\ \delta \to \varphi,\ \neg\varphi\} \vdash \gamma$
(z) $\{\alpha \to \beta,\ \neg\alpha \to \gamma,\ \neg\gamma \vee \delta,\ \varphi \wedge \neg\beta\} \vdash \delta$

2. Use demonstração condicional para demonstrar a validade dos argumentos.

   (a) $\{\alpha \to (\beta \vee \gamma), \neg\gamma\} \vdash \alpha \to \beta$
   (b) $\{(\neg\alpha) \vee \beta, \neg\beta, (\neg\delta) \to \varphi, (\neg\alpha) \to (\varphi \to (\neg\gamma))\} \vdash \gamma \to \delta$
   (c) $\{\alpha \to (\neg\beta), \gamma \to \beta\} \vdash \neg(\alpha \wedge \gamma)$

3. Use redução ao absurdo para demonstrar a validade dos argumentos.

   (a) $\{\alpha \to (\neg\beta), \gamma \to \beta\} \vdash \neg(\alpha \wedge \gamma)$
   (b) $\{(\neg\alpha) \to \beta, (\neg\beta) \vee \gamma, \neg\gamma\} \vdash \alpha \vee \delta$
   (c) $\{\alpha \to (\beta \vee \gamma), \neg\gamma\} \vdash \alpha \to \beta$
   (d) $\{(\neg\alpha) \vee \beta, \neg\beta, (\neg\delta) \to \varphi, (\neg\alpha) \to (\varphi \to (\neg\gamma)), \gamma\} \vdash \delta$
   (e) $\{(\neg\alpha) \to \beta, (\neg\beta) \vee \gamma, \neg\gamma\} \vdash \alpha \vee \delta$

1.3 Solução de alguns exercícios

(m)

α_1	$\alpha \to \beta$	
α_2	$(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$	
α_3	$\neg(\alpha \wedge \gamma)$	
α_4	$\neg\alpha \vee \beta$	fdc 1
α_5	$\neg\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$	semiabs 4
α_6	$\alpha \to (\alpha \wedge \beta)$	fdc 5
α_7	$\alpha \to \gamma$	SH 2,6
α_8	$\neg\alpha \vee \gamma$	fdc 7
α_9	$\neg\alpha \vee (\alpha \wedge \gamma)$	semiabs 8
α_{10}	$\alpha \to (\alpha \wedge \gamma)$	fdc 9
α_{11}	$\neg\alpha$	MT 3,10

(s)

α_1	$\alpha \to \beta$	
α_2	$(\alpha \to \gamma) \to (\delta \vee \beta)$	
α_3	$(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$	
α_4	$\neg\delta$	
α_5	$\neg\alpha \vee \beta$	fdc 1
α_6	$\neg\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$	semiabs 5
α_7	$\alpha \to (\alpha \wedge \beta)$	fdc 6
α_8	$\alpha \to \gamma$	SH 3,7
α_9	$\delta \vee \beta$	MP 2,8
α_{10}	β	SD 4,9

(u)

α_1	$\alpha \to \gamma$	
α_2	$\beta \to \delta$	
α_3	$\neg\gamma$	
α_4	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\gamma \vee \delta)$	
α_5	$\alpha \vee \beta$	simp 4
α_6	$\gamma \vee \delta$	DC 1, 2 e 5
α_7	δ	SD 3,6

(v)

α_1	$\alpha \to \beta$	
α_2	$\beta \to \gamma$	
α_3	$\gamma \to \delta$	
α_4	$\neg\delta$	
α_5	$\alpha \vee \varphi$	
α_6	$\alpha \to \gamma$	SH 1,2
α_7	$\alpha \to \delta$	SH 3,6
α_8	$\neg\alpha$	MT 4,7
α_9	φ	SD 5,8

(x)

α_1	$\alpha \to \beta$	
α_2	$\beta \to \gamma$	
α_3	$\delta \to \neg\gamma$	
α_4	α	
α_5	β	MP 1,4
α_6	γ	MP 2,5
α_7	$\neg\delta$	MT 3,6

Capítulo 2

Teoria de Conjuntos

2.1 Conceitos Básicos

Conjuntos podem ser entendidos como coleções de objetos distintos não importando a ordem em que aparecem. Estes objetos são denominados **elementos** do conjunto. Usa-se para os nomes de conjuntos $A, B, C, \dots$ e para os elementos $x, y, z, \dots$.

Se o objeto a é um elemento do conjunto A, diz-se que a **pertence ao conjunto** A, $a \in A$. O símbolo $\in$ denota a relação (binária) existente entre elemento e conjunto, indicando a pertinência do primeiro em relação ao segundo e pode ser lida como *o elemento a pertence ao conjunto A* ou *o elemento a está no conjunto A*. Se um elemento b não pertence a um conjunto A, usa-se $a \notin A$.

Um conjunto especial é o **conjunto vazio**, denotado por $\varnothing$ ou $\{\}$, e é caracterizado pelo fato de não possuir elementos.

Existem dois princípios importantes. O **Princípio da Extensionalidade** trata da igualdade de conjuntos. Um conjunto A é igual a um conjunto B quando todo elemento do conjunto A é um elemento do conjunto B e todo elemento do conjunto B é elemento do conjunto A. A notação é $A = B$ e a relação de igualdade possui as seguintes propriedades:

Reflexiva: $A = A$, para todo conjunto A.

Simétrica: se $A = B$ então $B = A$, para quaisquer conjuntos A e B.

Transitiva: se $A = B$ e $B = C$ então $A = C$, para quaisquer conjuntos A, B e C.

O **Princípio da Especificação** diz respeito à especificação de novos conjuntos a partir de outros. Dados um conjunto A e uma propriedade P sobre os elementos de A, fica determinado o conjunto B dos elementos de A que possuem a propriedade P. Assim, $B = \{x \in A; P(x)\}$.

Exemplo 2.1.1 Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. E as propriedades:

1. $P : x$ é par. O conjunto obtido a partir do conjunto A e da propriedade P é:

$$B = \{x \in A; P(x)\} = \{x \in A; x \text{ é par}\} = \{2, 4, 6, 8\}$$

2. $Q : x$ é primo. Assim, $C = \{2, 3, 5, 7\}$.

3. $R : x$ é múltiplo de 11. Então $D = \varnothing$.

Uma relação (binária) entre conjuntos é a de **subconjunto**. Um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B ou A está contido em B ou B contém A, se todo elemento do conjunto A é também um elemento do conjunto B. A notação é $A \subseteq B$ e a relação de subconjunto é:

Reflexiva: $A \subseteq A$, para todo conjunto A.

Antissimétrica: se se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$, para quaisquer conjuntos A e B.

Transitiva: se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$, para quaisquer conjuntos A, B e C.

Outra relação existente entre conjuntos é a de **subconjunto próprio**. Um conjunto A é um subconjunto próprio de um conjunto B ou A está propriamente contido em B quando existe pelo menos um elemento no conjunto B que não pertence ao conjunto A. A notação é $A \subset B$ e a relação de subconjunto próprio é:

Antissimétrica: se se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$, para quaisquer conjuntos A e B.

Transitiva: se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$, para quaisquer conjuntos A, B e C.

Observação 2.1.2 *Podemos rever as definições da seguinte forma.*

- $A \subseteq B$ *quando para todo elemento* x, *se* $x \in A$ *então* $x \in B$.
- $A = B$ *quando* $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq A$.
- $A \subset B$ *quando* $A \subseteq B$ *e* $A \neq B$ *ou*

  $A \subseteq B$ *e existe* $x \in B$ *tal que* $x \notin A$.

O **conjunto das partes** ou **conjunto potência** de um conjunto A é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A. Este conjunto é denotado por 2^A ou $P(A)$. Assim, $X \in 2^A$ se, e somente se, $X \subseteq A$. Quando os elementos de um conjunto A são eles mesmos conjuntos, A é denominado uma **família** ou uma **classe**. Um conjunto pode ser classificado como **finito** quando possui um número finito de elementos, caso contrário é denominado **infinito**. A cardinalidade de um conjunto finito A indica o número de seus elementos, denota-se por $\sharp A$, $|A|$ ou $\text{card}(A)$. Um conjunto A com um único elemento, isto é, $|A| = 1$, é denominado **conjunto unitário**. Um conjunto é denominado **contável** ou **enumerável** se for finito ou se existir uma correspondência um a um entre seus elementos e os números naturais.

Exemplos 2.1.3

1. Sendo $A = \{0,1,2\}$, temos que $2^A = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$. Observe que, $|A| = 3$ e $|2^A| = 8$.

2. Os conjuntos numéricos são conjuntos infinitos.

	Números
$\mathbb{N}$	naturais
$\mathbb{Z}$	inteiros
$\mathbb{Q}$	racionais
$\mathbb{I}$	irracionais
$\mathbb{R}$	reais
$\mathbb{C}$	complexos

3. O conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ é finito enumerável e $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são infinitos enumeráveis, já os conjuntos $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são infinitos não enumeráveis.

2.2 Operações

As operações (binárias) clássicas em conjuntos são união, interseção, diferença, complemento e produto cartesiano.

A **união** de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \cup B$ que contém todos os elementos do conjunto A e todos os elementos do conjunto B. Assim, $x \in A \cup B$ quando $x \in A$ ou $x \in B$.

A **interseção** de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \cap B$ que contém todos os elementos comuns aos conjuntos A e B, isto é, $x \in A \cap B$ quando $x \in A$ e $x \in B$. Dois conjuntos A e B são denominados **disjuntos** quando sua interseção é o conjunto vazio, ou seja, $A \cap B = \varnothing$.

A **diferença** entre dois conjuntos A e B é o conjunto $A - B$ que contém os elementos que pertencem exclusivamente ao conjunto A. Desta forma, $x \in A - B$ quando $x \in A$ e $x \notin B$.

Sejam conjuntos A e B tais que $A \subseteq B$, o **complemento** do conjunto A em relação ao conjunto B é o conjunto $\complement_B A$ dos elementos que pertencem ao conjunto B mas não pertencem ao conjunto A, i.e, $x \in \complement_B A$ se $x \notin A$ e $x \in B$.

Todos os conjuntos podem ser considerados como subconjuntos de um certo conjunto prefixado denominado **conjunto universo** e denotado por U. Assim, o **complemento** de um conjunto $A \subseteq U$ é o conjunto $\bar{A} = U - A$. Então, $x \in \bar{A}$ se e somente se $x \notin A$.

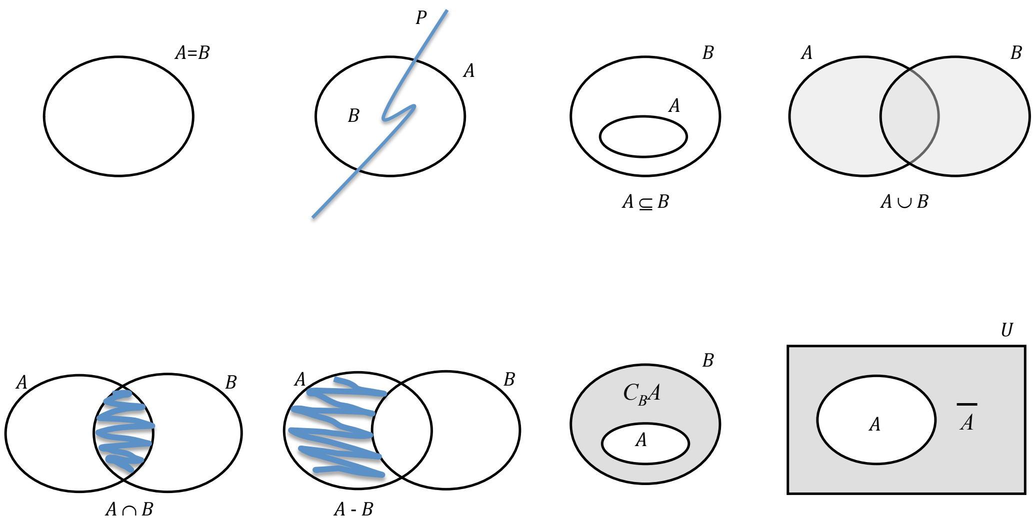
O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos os pares ordenados tais que a primeira ordenada é um elemento do conjunto A e a segunda um elemento do conjunto B. Assim, $(x, y) \in A \times B$ quando $x \in A$ e $y \in B$.

Devemos lembrar que dois pares ordenados são iguais quando as primeiras ordenadas são iguais e as segundas também. Quando temos um produto cartesiano $A \times \cdots \times A$ com n fatores usamos a notação A^n.

Exemplo 2.2.1 Sejam os conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d, e\}$, $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $U = \{a, \ldots, z\}$.

1. $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$
2. $A \cap B = \{b\}$
3. $A - B = \{a\}$ e $B - A = \{c, d, e\}$
4. $B - C = \varnothing$ e $C - B = \{a, f, g\}$
5. $\complement_C A = \{c, d, e, f, g\}$
6. $\bar{A} = \{c, \ldots, z\}$

Os conceitos apresentados podem ser visualizados utilizando-se **Diagramas de Venn** apresentados a seguir.



Observação 2.2.2 *Podemos rever os conceitos da seguinte forma:*

- $x \in A \cup B$ *se, e somente se,* $x \in A$ *ou* $x \in B$.
- $x \in A \cap B$ *se, e somente se,* $x \in A$ *e* $x \in B$.
- $x \in A - B$ *se, e somente se,* $x \in A$ *e* $x \notin B$.
- $A \subseteq B$, $x \in \complement_B A$ *se, e somente se,* $x \in B - A$
  se, e somente se, $x \in B$ *e* $x \notin A$.
- $x \in \bar{A}$ *se, e somente se,* $x \notin A$.
- $(x, y) \in A \times B$ *se, e somente se,* $x \in A$ *e* $y \in B$.
- $(x, y) = (z, t)$ *se, e somente se,* $x = z$ *e* $y = t$.

2.3 Propriedades

Teorema 2.3.1 $\varnothing \subseteq A$, *para todo conjunto* A.

Prova: Para todo elemento x, $x \notin \varnothing$. A wff $(x \in \varnothing)$ é falsa e a wff $(x \in \varnothing) \to (x \in A)$ é verdadeira. Logo, $\varnothing \subseteq A$. ∎

Teorema 2.3.2 *O conjunto vazio é único.*

Prova: (RAA) Vamos supor que existem dois conjuntos vazios $\varnothing \neq \varnothing'$. Pelo teorema anterior, $\varnothing \subseteq \varnothing'$ e $\varnothing' \subseteq \varnothing$. Então, $\varnothing = \varnothing'$. Contradição. Logo, o conjunto vazio é único. ∎

Teorema 2.3.3 *Seja* A *um conjunto finito com* $|A| = n$, *então* $|2^A| = 2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

Teorema 2.3.4 *Sejam* A *e* B *conjuntos finitos. Então* $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Teorema 2.3.5 *Sejam* $|A| = n$ *e* $|B| = m$. *Então* $|A \times B| = nm$.

Teorema 2.3.6 *As operação de união e de interseção possuem as propriedades:*

1. *Associativa: para quaisquer conjuntos* A, B *e* C

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ e } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

2. *Comutativa: para quaisquer conjuntos* A *e* B

$$A \cup B = B \cup A \text{ e } A \cap B = B \cap A$$

3. *Elemento Neutro: para todo conjunto A*

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A \text{ e } A \cap U = U \cap A = A$$

4. *Elemento Zero: para todo conjunto A*

$$A \cup U = U \cup A = U \text{ e } A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$$

5. *Distributivas: para quaisquer conjuntos A, B e C*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \text{ e } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \text{ e } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

6. *Idempotência: para todo conjunto A*

$$A \cup A = A \text{ e } A \cap A = A$$

7. *Absorção: para quaisquer conjuntos A e B*

$$(A \cup B) \cap A = A \text{ e } (A \cap B) \cup A = A$$

8. *Complementaridade: para todo conjunto A*

$$A \cup \bar{A} = U \text{ e } A \cap \bar{A} = \varnothing$$

9. *Involução: para todo conjunto A*

$$\bar{\bar{A}} = A$$

10. *De Morgan: para quaisquer conjuntos A e B*

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ e } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Prova:

1. $x \in (A \cup B) \cup C \therefore x \in (A \cup B) \vee x \in C \therefore (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \therefore x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \therefore$ $x \in A \cup (B \cup C)$.
   $x \in (A \cap B) \cap C \therefore x \in (A \cap B) \wedge x \in C \therefore (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \therefore x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \therefore$ $x \in A \cap (B \cap C)$.

2. $x \in A \cup B \therefore x \in A \vee x \in B \therefore x \in B \vee x \in A \therefore x \in B \cup A$.
   $x \in A \cap B \therefore x \in A \wedge x \in B \therefore x \in B \wedge x \in A \therefore x \in B \cap A$.$\blacksquare$

Leis da Lógica e da Teoria de Conjuntos

Dupla Negação	$\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$	$\bar{\bar{A}} = A$
Idempotência	$\alpha \vee \alpha \Leftrightarrow \alpha \wedge \alpha \Leftrightarrow \alpha$	$A \cup A = A \cap A = A$
Comutativa	$\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \beta \vee \alpha$ $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \beta \wedge \alpha$	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associativa	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Elemento Neutro	$\alpha \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow \alpha \wedge \mathbf{V} \Leftrightarrow \alpha$	$A \cup \varnothing = A \cap U = A$
Elemento Zero	$\alpha \vee \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{V}$ $\alpha \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$	$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Princípio do Terceiro Excluído	$\alpha \vee \neg\alpha \Leftrightarrow \mathbf{V}$	$A \cup \bar{A} = U$
Princípio da Não Contradição	$\alpha \wedge \neg\alpha \Leftrightarrow \mathbf{F}$	$A \cap \bar{A} = \varnothing$
Distributiva	$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$ $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Absorção	$(\alpha \wedge \beta) \vee \alpha \Leftrightarrow \alpha$ $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \Leftrightarrow \alpha$	$(A \cap B) \cup A = A$ $(A \cup B) \cap A = A$
Semiabsorção	$(\neg\alpha \wedge \beta) \vee \alpha \Leftrightarrow \alpha \vee \beta$ $(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta$	$(\bar{A} \cap B) \cup A = A \cup B$ $(\bar{A} \cup B) \cap A = A \cap B$
De Morgan	$\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$ $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Exercícios 2.3.7

1. Apresente demonstrações para os teoremas.

2. Indique Verdadeiro ou Falso.

   (a) $A = \{a, b\}$.
   ( )$\{b\} \in A$ ( )$\{a\} \subseteq A$ ( )$\varnothing \in A$ ( )$a \subset A$

   (b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{b, c, d\}$, $D = \{b\}$ e $E = \{c, d\}$.
   ( )$B \subseteq A$ ( )$D \neq C$ ( )E e D são disjuntos ( )$A = B$ ( )$B \cap C = D$

3. Considere $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$, $D = \{4, 5\}$, $E = \{5, 6\}$ e $F = \{4, 6\}$. Um conjunto G tal que $G \subseteq A$, $G \subseteq B$ e $G \subseteq C$ é algum dos conjuntos dados?

4. Indique os conjuntos vazios.

   (a) $A = \{x \in \mathbb{Z}; x \text{ é ímpar e } x^2 = 4\}$

   (b) $B = \{x \in \mathbb{Z}; x + 9 = 9\}$

   (c) $C = \{x \in \mathbb{Z}; x \geqslant 0 \text{ e } x^2 < 1\}$

   (d) $D = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 < 1\}$

5. Indique o conjunto potência de $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

6. Dê exemplos de famílias.

7. Dê exemplo de um conjunto infinito tal que exista função injetora entre este conjunto e um de seus subconjuntos próprios.

8. Apresente conjuntos enumeráveis infinitos distintos dos apresentados no texto.

9. Seja $A = \{x \in \mathbb{Z}; x \geqslant 0$ e x é múltiplo de $2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z}; x \geqslant 0$ e x é múltiplo de $3\}$. Indique os conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$ e $A - B$.

10. Responda, justificando.

    (a) Todo subconjunto de um conjunto enumerável é finito ou enumerável ?

    (b) A união de conjuntos enumeráveis é enumerável ?

    (c) E o produto cartesiano?

11. Considere $|A| = n$ e $|B| = m$. Para cada um dos itens, apresente condições para que seja possível estabelecer uma expressão matemática.

    (a) $|A \cap B|$

    (b) $|A - B|$

    (c) $|\complement_B A|$

    (d) $|\bar{A}|$

12. Faça diagramas de Venn para os eguintes casos.

    (a) $A \not\subseteq \overline{B}$

    (b) $A \neq B$

    (c) $\overline{A \cup B}$

    (d) $\overline{A} \cap \overline{B}$

    (e) $\overline{A} \cup B$

    (f) $A \cup B = A \cup C$, mas $B \neq C$

    (g) $A \cup B \subset A \cup C$, mas $B \not\subseteq C$

    (h) $A \cap B \subset A \cap C$, mas $B \not\subseteq C$

    (i) $A \cap B = A \cap C$, mas $B \neq C$

13. Demonstre:

    (a) $(A \cup B) \cap \bar{A} = B \cap \bar{A}$

    (b) $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$

    (c) $A - B = A$ se, e somente se, $A \cap B = \varnothing$

    (d) $A \cap B = A - (A - B)$

    (e) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

(f) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

(g) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(h) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

Capítulo 3

Uma Introdução à Interpretação de Fórmulas da Lógica de 1^a Ordem

3.1 Linguagem

3.1.1 Sintaxe

- Alfabeto
  - Símbolos de Parênteses: (e)
  - Símbolos Conectivos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$
  - Símbolo de Igualdade: $=$
  - Símbolos de Variáveis: $x, y, z, \ldots$
  - Símbolos de Constantes: $a, b, c, \ldots$
  - Símbolos de Predicados: Para cada inteiro positivo n, um conjunto de símbolos denominados símbolos de predicado n-ário, $P, Q, R, \ldots$.
  - Símbolos de Funções: Para cada inteiro positivo n, um conjunto de símbolos denominados símbolos de função n-ário, $f, g, h, \ldots$.
  - Símbolos Quantificadores: universal $\forall$ e existencial $\exists$.

Exemplos 3.1.1

1. Linguagem de predicados
   símbolos de constantes: a, b, c
   símbolos de predicados: unário P e binário Q
2. Linguagem de teoria de conjuntos
   símbolo de constante: $\varnothing$
   símbolo de predicado binário: $\in$

3. Linguagem de teoria elementar de números
   símbolo de constante: 0
   símbolo de predicado binário: $<$
   símbolos de funções: unária suc e binárias $+$ e $\cdot$

- Gramática

  Uma expressão é qualquer sequência finita de símbolos. Expressões lógicas são os termos e as fórmulas (wff).

  Os termos são os nomes da linguagem, são as expressões que podem ser interpretadas como nomeando um objeto. Assim, podemos definir os **termos** da seguinte forma:

  T1 Todo símbolo de variável é um termo.

  T2 Todo símbolo de constante é um termo.

  T3 Sejam f um símbolo de função n-ário e $t_1, \ldots, t_n$ termos
  então $f(t_1, \ldots, t_n)$ também é um termo.

  Os fórmulas podem ser entendidas como declarações sobre os objetos. Uma **fórmula atômica** é uma expressão definida por:

  Fa1 Sejam t_1 e t_2 termos então $t_1 = t_2$ é uma fórmula atômica.

  Fa2 Se P é um símbolo de predicado n-ário e $t_1, \ldots, t_n$ são termos
  então $P(t_1, \ldots, t_n)$ é também uma fórmula atômica.

  Fórmulas bem formadas, **fórmulas** ou **wffs** são as seguintes expressões:

  Wff1 Toda fórmula atômica é uma wff.

  Wff2 Se α e β são wffs e x é um símbolo de variável
  então $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, $\forall x\alpha$ e $\exists x\alpha$ também são wffs.

Exemplos 3.1.2 Considere as linguagens dos Exemplos 3.1.1.

1. a, b e c são termos,
   $P(a)$ e $Q(a, c)$ são fórmulas atômicas e
   $(\neg P(b))$, $(P(a) \rightarrow Q(b, c))$ e $\exists x Q(x, a)$ são wffs.
2. $\varnothing$ é um termo,
   $x = \varnothing$ e $x \in y$ são fórmulas atômicas e
   $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y))$ é wff.
3. $0, suc(0), suc(suc(0)), suc(0) + x$ e $suc(suc(0)) \cdot suc(0)$ são termos,
   $x = 0$ e $x < suc(x)$ são fórmulas atômicas e
   $\forall x (x \neq 0 \rightarrow (\exists y \; x = suc(y))$ é wff.

3.1.2 Semântica

Vamos definir quando uma **variável x ocorre livre em** (OLE) **uma wff** γ:

1. Se γ é uma fórmula atômica, x OLE γ quando x é um símbolo de γ.
2. Se γ é $(\neg\alpha)$ então x OLE γ quando x OLE α.
3. Se γ é $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ ou $(\alpha \leftrightarrow \beta)$
   então x OLE γ quando x OLE α ou x OLE β.
4. Se γ é $\forall y\alpha$ ou $\exists y\alpha$
   então x OLE γ quando x OLE α e $x \neq y$.

Se um símbolo de variável não ocorre livre na wff γ, diz-se que a **variável está ligada** ou **amarrada**. Quando uma wff não tem símbolos de variável livres, a wff γ é denominada uma **sentença**. Devemos observar que os quantificadores têm a propriedade de *ligar* as variáveis e deve-se ressaltar a importância da parentetização neste caso, pois eles definem o **escopo** do quantificador.

Exemplo 3.1.3 Considere uma linguagem com dois símbolos de predicados unários P e Q.

As wffs $\forall x(P(x) \to Q(x))$ e $(\forall x P(x)) \to (\forall y\ Q(y))$ são sentenças.

A variável x OLE $(\forall x P(x)) \to Q(x)$.

Uma **estrutura** ou **interpretação** $\mathfrak{A}$ para uma dada linguagem de 1^a ordem é uma função que atribui:

1. Aos símbolos quantificadores um conjunto não vazio A denominado o universo de $\mathfrak{A}$.
2. A cada símbolo de constante c um elemento $c^{\mathfrak{A}}$ do conjunto A.
3. A cada símbolo de predicado n-ário P uma relação n-ária $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$.
4. A cada símbolo de função n-ária f uma função n-ária $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$.

Assim, a estrutura $\mathfrak{A}$ atribui significado aos símbolos da linguagem. Podemos agora estabelecer quando uma wff γ é verdadeira na estrutura $\mathfrak{A}$.

Considere V o conjunto de variáveis e a função $s : V \to A$ que atribui a cada variável (livre) um elemento do conjunto A. Esta função s pode ser estendida ao conjunto de termos T da linguagem. Assim, função $\bar{s} : T \to A$ é tal que:

1. Para cada símbolo x de variável, $\bar{s}(x) = s(x)$.
2. Para cada símbolo c de constante, $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$.
3. Se f é um símbolo de função n-ária e $t_1, \ldots, t_n$ são termos
   então $\bar{s}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n))$.

A **estrutura $\mathfrak{A}$ satisfaz a wff** γ **com** s, $\vDash_{\mathfrak{A}} \gamma\,[s]$, quando a tradução de γ determinada por $\mathfrak{A}$ e por s é **verdade**, de forma mais precisa, temos que:

1. $\vDash_{\mathfrak{A}} t_1 = t_2\,[s]$ quando $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$.
2. $\vDash_{\mathfrak{A}} P(t_1, \ldots, t_n)\,[s]$ quando $(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$.
3. $\vDash_{\mathfrak{A}} \neg\alpha\,[s]$ quando $\nvDash_{\mathfrak{A}} \alpha\,[s]$.
4. $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha \wedge \beta\,[s]$ quando $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha\,[s]$ e $\vDash_{\mathfrak{A}} \beta\,[s]$.
5. $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha \vee \beta\,[s]$ quando $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha\,[s]$ ou $\vDash_{\mathfrak{A}} \beta\,[s]$.
6. $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha \to \beta\,[s]$ quando $\nvDash_{\mathfrak{A}} \alpha\,[s]$ ou $\vDash_{\mathfrak{A}} \beta\,[s]$.
7. $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha \leftrightarrow \beta\,[s]$ quando $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha\,[s]$ se e somente se $\vDash_{\mathfrak{A}} \beta\,[s]$.
8. $\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\;\; \alpha\,[s]$ quando para todo $d \in A$, $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha\,[s(x|d)]$, sendo que $s(x|d)$ é exatamente a função s exceto que a variável x assume o valor d, isto é,

$$s(x|d)(y) = \begin{cases} s(y) & \text{se } y \neq x \\ d & \text{se } y = x \end{cases}$$

9. $\vDash_{\mathfrak{A}} \exists x\;\; \alpha\,[s]$ quando existe $d \in A$, $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha\,[s(x|d)]$.

Uma wff é γ é **válida** quando é verdadeira para todas as estruturas. Um conjunto de wffs Γ **implica logicamente** uma wff α, $\Gamma \vDash \alpha$, quando para toda estrutura $\mathfrak{A}$ para a linguagem e para toda função $s : V \to A$, se $\mathfrak{A}$ satisfaz cada elemento de Γ com s então $\mathfrak{A}$ também satisfaz α com s.

Exemplo 3.1.4

1. Wffs válidas:

$$\begin{array}{l} P(x) \to (Q(x) \to P(x)) \\ \forall x P(x) \to P(c) \\ \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \end{array}$$

2. Relacionando wffs:

$$\begin{array}{l} \forall x P(x) \vDash P(x) \\ \forall x P(x) \vDash \exists x P(x) \\ \neg\forall x P(x) \vDash\!\dashv \exists x \neg P(x) \\ \neg\exists x P(x) \vDash\!\dashv \forall x \neg P(x) \\ \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vDash\!\dashv (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \end{array}$$

Exercícios 3.1.5

1. Para cada uma das especificações, escolha uma linguagem e apresente wffs.
   (a) O conjunto é unitário.
   (b) Um conjunto em que todos os elementos se relacionam entre si.
   (c) Um conjunto no qual nenhum elemento se relaciona.
   (d) Um conjunto em que todos os elementos se relacionam com alguém.
   (e) Um conjunto com uma relação de equivalência.
   (f) Um conjunto com uma relação de ordem.
   (g) Um conjunto com uma relação que descreve uma função.
   (h) Um conjunto com uma função unária injetiva.
   (i) Um conjunto com uma função unária sobrejetiva.
   (j) Um conjunto com uma função unária constante.

2. Considere uma linguagem com os seguintes símbolos: variáveis $v_1, \ldots, v_n$, uma constante c, uma função unária f e um predicado binário P, e a estrutura $\mathfrak{A}$ tal que $A = \mathbb{N}$, $c^{\mathfrak{A}} = 0$, $f^{\mathfrak{A}}(x) = x + 1$, $P^{\mathfrak{A}} :\leqslant$ e $s : V \to \mathbb{N}$ é tal que $s(v_i) = i - 1$. Interprete:
   (a) $f(f(v_3))$
   (b) $f(f(c))$
   (c) $P(c, f(v_1))$
   (d) $\forall v_1 P(c, v_1)$
   (e) $\forall v_1 P(v_2, v_1)$

3. Para cada uma das wffs encontre uma estrutura em que ela é verdadeira e outra em que é falsa.
   (a) $\forall x((P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg(P(x) \wedge Q(x)))$
   (b) $\forall x \forall y(P(x, y) \to P(y, x))$
   (c) $\forall x(P(x) \to \exists y Q(x, y))$
   (d) $\exists x(P(x) \wedge \forall y Q(x, y))$
   (e) $(\forall x P(x) \to \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$

4. Indique condições para que as fórmulas sejam satisfeitas.
   (a) $\forall x P(x)$, $\forall x \neg P(x)$ e $\neg \forall x P(x)$
   (b) $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$, $\forall x(\neg P(x) \wedge Q(x))$, $\neg \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ e $\forall x \neg(P(x) \wedge Q(x))$
   (c) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$, $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$, $\neg \forall x(P(x) \vee Q(x))$ e $\forall x \neg(P(x) \vee Q(x))$
   (d) $\forall x(P(x) \veebar Q(x))$, $\forall x(\neg P(x) \veebar Q(x))$, $\neg \forall x(P(x) \veebar Q(x))$ e $\forall x \neg(P(x) \veebar Q(x))$
   (e) $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $\forall x(\neg P(x) \to Q(x))$, $\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$, $\neg \forall x(P(x) \to Q(x))$ e $\forall x \neg(P(x) \to Q(x))$

(f) $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$, $\neg\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$ e $\forall x\neg(P(x) \leftrightarrow Q(x))$

(g) $\exists xP(x)$, $\exists x\neg P(x)$ e $\neg\exists xP(x)$

(h) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$, $\exists x(\neg P(x) \wedge Q(x))$, $\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ e $\exists x\neg(P(x) \wedge Q(x))$

(i) $\exists x(P(x) \vee Q(x))$, $\exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$, $\neg\exists x(P(x) \vee Q(x))$ e $\exists x\neg(P(x) \vee Q(x))$

(j) $\exists x(P(x) \veebar Q(x))$, $\exists x(\neg P(x) \veebar Q(x))$, $\neg\exists x(P(x) \veebar Q(x))$ e $\exists x\neg(P(x) \veebar Q(x))$

(k) $\exists x(P(x) \to Q(x))$, $\exists x(\neg P(x) \to Q(x))$, $\exists x(P(x) \to \neg Q(x))$, $\neg\exists x(P(x) \to Q(x))$ e $\exists x\neg(P(x) \to Q(x))$

(l) $\exists x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$, $\neg\exists x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$ e $\exists x\neg(P(x) \leftrightarrow Q(x))$

5. Compare as wffs usando $\vDash\dashv$, $\nvDash\dashv$, $\vDash\not\dashv$ ou $\nvDash\not\dashv$.

(a)	$\forall xP(x)$	$\exists xP(x)$
(b)	$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	$(\forall xP(x)) \wedge (\forall xQ(x))$
(c)	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	$(\exists xP(x)) \vee (\exists xQ(x))$
(d)	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	$(\forall xP(x)) \to (\forall xQ(x))$
(e)	$\exists x(P(x) \veebar Q(x))$	$(\exists xP(x)) \veebar (\exists xQ(x))$
(f)	$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$	$(\forall xP(x)) \leftrightarrow (\forall xQ(x))$

6. Indique condições para que as fórmulas sejam satisfeitas.

(a) $\forall xP(x,x)$, $\forall x\neg P(x,x)$, $\neg\forall xP(x,x)$

(b) $\exists xP(x,x)$, $\exists x\neg P(x,x)$ e $\neg\exists xP(x,x)$

(c) $\forall x\forall yP(x,y)$, $\forall x\exists yP(x,y)$, $\exists x\forall yP(x,y)$, $\exists x\exists yP(x,y)$

(d) $\forall x\forall y(P(x,y) \to P(y,x))$

(e) $\forall x\forall y((P(x,y) \wedge P(y,x)) \to x = y)$

(f) $\forall x\forall y\forall z((P(x,y) \wedge P(y,z)) \to P(x,z))$

3.2 Solução de alguns exercícios

1. (a) O conjunto é unitário.

$L = \{c\}$ e $\forall x\ x = c$

(e) Um conjunto com uma relação de equivalência.

$$L = \{P_2\} \quad \begin{array}{l} \forall xP(x,x) \\ \forall x\forall y(P(x,y) \to P(y,x)) \\ \forall x\forall y\forall z((P(x,y) \wedge P(y,z))) \to P(x,z)) \end{array}$$

(i) Um conjunto com uma função unária sobrejetiva.

$L = \{f_1\}$ e $\forall y\exists xf(x) = y$

2. (a) $f(f(v_3))$

   $\bar{s}(f(f(v_3))) = f^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(v_3))) = f^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(s(v_3))) = f^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(2))) = f^{\mathfrak{A}}(2+1) = 4$

   (e) $\forall v_1 P(v_2, v_1)$

$$\begin{array}{ll} \vDash_{\mathfrak{A}} \forall v_1 P(v_2,v_1)\,[s] & \text{quando para todo } d \in \mathbb{N},\ \vDash_{\mathfrak{A}} P(v_2,v_1)\,[s(v_1|d)] \\ & \text{quando para todo } d \in \mathbb{N},\ (\bar{s}(v_1|d)(v_2), \bar{s}(v_1|d)(v_1)) \in P^{\mathfrak{A}} \\ & \text{quando para todo } d \in \mathbb{N},\ (s(v_1|d)(v_2), s(v_1|d)(v_1)) \in P^{\mathfrak{A}} \\ & \text{quando para todo } d \in \mathbb{N},\ (1,d) \in P^{\mathfrak{A}} \\ & \text{quando para todo } d \in \mathbb{N},\ 1 \leq d \end{array}$$

3. (a) $\forall x((P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg(P(x) \wedge Q(x))) \vDash\Dashv \forall x(P(x) \underline{\vee} Q(x))$

   Assim, a fórmula é satisfeita quando $P^{\mathfrak{A}} \cup Q^{\mathfrak{A}} = A$ e $P^{\mathfrak{A}} \cap Q^{\mathfrak{A}} = \varnothing$. Por exemplo, $A = \{2,3,4,8,9\}$ com $P^{\mathfrak{A}}$: múltiplo de 2 e $Q^{\mathfrak{A}}$: múltiplo de 3.

   Já para $A = \mathbb{N}$ com $P^{\mathfrak{A}}$: múltiplo de 2 e $Q^{\mathfrak{A}}$: múltiplo de 3, a wff não é satisfeita.

   (e) $(\forall x P(x) \to \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x)) \vDash\Dashv$

   $\neg(\forall x P(x) \to \forall x Q(x)) \vee \forall x(P(x) \to Q(x)) \vDash\Dashv$

   $\neg(\neg\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \vee \forall x(P(x) \to Q(x)) \vDash\Dashv$

   $(\neg\neg\forall x P(x) \wedge \neg\forall x Q(x)) \vee \forall x(P(x) \to Q(x)) \vDash\Dashv$

   $(\forall x P(x) \wedge \neg\forall x Q(x)) \vee \forall x(P(x) \to Q(x)) \vDash\Dashv$

   $(\forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)) \vee \forall x(P(x) \to Q(x)) \vDash\Dashv$

   Essa wff é satisfeita quando:

   $(P^{\mathfrak{A}} = A$ e $Q^{\mathfrak{A}} \neq A)$ ou $P^{\mathfrak{A}} \subseteq Q^{\mathfrak{A}}$

   E não é satisfeita quando, por exemplo, $Q^{\mathfrak{A}} \subset P^{\mathfrak{A}} \subset A$.

4. (a) $\forall x P(x)$: $P^{\mathfrak{A}} = A$

   $\forall x \neg P(x)$: $P^{\mathfrak{A}} = \varnothing$

   $\neg\forall x P(x) \vDash\Dashv \exists x \neg P(x)$: $\bar{P}^{\mathfrak{A}} \neq \varnothing$

   (f) $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$: $P^{\mathfrak{A}} = Q^{\mathfrak{A}}$

   $\neg\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$: $P^{\mathfrak{A}} \neq Q^{\mathfrak{A}}$

   $\forall x \neg(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vDash\Dashv \forall x(P(x) \underline{\vee} Q(x))$: $P^{\mathfrak{A}} \cup Q^{\mathfrak{A}} = A$ e $P^{\mathfrak{A}} \cap Q^{\mathfrak{A}} = \varnothing$

   (l) $\exists x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$: $P^{\mathfrak{A}} \cap Q^{\mathfrak{A}} \neq \varnothing$ ou $\overline{P^{\mathfrak{A}} \cup Q^{\mathfrak{A}}} \neq \varnothing$

   $\neg\exists x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vDash\Dashv \forall x \neg(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vDash\Dashv \forall x(P(x) \underline{\vee} Q(x))$:

   $P^{\mathfrak{A}} \cup Q^{\mathfrak{A}} = A$ e $P^{\mathfrak{A}} \cap Q^{\mathfrak{A}} = \varnothing$

   $\exists x \neg(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vDash\Dashv \neg\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$: $P^{\mathfrak{A}} \neq Q^{\mathfrak{A}}$

5. (a) $\begin{array}{ccc} \forall x P(x) & \vDash\not\Dashv & \exists x P(x) \\ P^{\mathfrak{A}} = A & & P^{\mathfrak{A}} \neq \varnothing \end{array}$

   (f) $\begin{array}{ccc} \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) & \vDash\not\Dashv & (\forall x P(x)) \leftrightarrow (\forall x Q(x)) \\ P^{\mathfrak{A}} = Q^{\mathfrak{A}} & & P^{\mathfrak{A}} = A \text{ sse } Q^{\mathfrak{A}} = A \end{array}$

Capítulo 4

Álgebra de Boole

4.1 A estrutura

Uma álgebra de Boole (George Boole 1815-1864) é a estrutura $[B, +, \cdot, ']$ sendo

- B é um conjunto com dois elementos distintos 0 e 1,
- $+$ e $\cdot$ são operações binárias em B e
- $'$ é uma operação unária em B.

com as seguintes propriedades das operações, para quaisquer, $x, y, z \in B$,

B1	Associativa:	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
B2	Comutativa:	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
B3	Elemento Neutro:	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
B4	Complemento:	$x + x' = 1$	$x \cdot x' = 0$
B5	Distributiva:	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Exemplos 4.1.1 Álgebras de Boole:

1. $[\{0, 1\}, +, \cdot, ']$ sendo que:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

x	x'
0	1
1	0

2. $[2^A, \cup, \cap, \bar{\ }]$ com $A = \{a, b\}$, $0 = \varnothing$, $1 = \{a, b\}$ e as operações:

$\cup$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$

$\cap$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a, b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$

x	x'
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

3. $[\{1,2,3,5,6,10,15,30\}, mmc, mdc, ']$ tal que:

mmc	1	2	3	5	6	10	15	30
1	1	2	3	5	6	10	15	30
2	2	2	6	10	6	10	30	30
3	3	6	3	15	6	30	15	30
5	5	10	15	5	30	10	15	30
6	6	6	6	30	6	30	30	30
10	10	10	30	10	30	10	30	30
15	15	30	15	15	30	30	15	30
30	30	30	30	30	30	30	30	30

mdc	1	2	3	5	6	10	15	30
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	1	2	2	1	2
3	1	1	3	1	3	1	3	3
5	1	1	1	5	1	5	5	5
6	1	2	3	1	6	2	3	6
10	1	2	1	5	2	10	1	10
15	1	1	3	5	1	5	15	15
30	1	2	3	5	6	10	15	30

x	x'
1	30
2	15
3	10
5	6
6	5
10	3
15	2
30	1

4.2 Propriedades

A partir dos axiomas da álgebra de Boole é possível demonstrar que:

1. Idempotência: $x + x = x$

   $x + x \underbrace{=}_{B3} (x + x) \cdot 1 \underbrace{=}_{B4} (x + x) \cdot (x + x') \underbrace{=}_{B5} x + (x \cdot x') \underbrace{=}_{B4} x + 0 \underbrace{=}_{B3} x$

2. Elemento Zero ou Absorvente $x + 1 = 1$

   $x + 1 \underbrace{=}_{B4} x + (x + x') \underbrace{=}_{B1} (x + x) + x' \underbrace{=}_{Idemp.} x + x' \underbrace{=}_{B4} 1$

3. Unicidade do complemento.

   (RAA) Supor que $x + y = 1$ e $x \cdot y = 0$ com $y \neq x'$.

   $y \underbrace{=}_{B3} 1 \cdot y \underbrace{=}_{B4} (x + x') \cdot y \underbrace{=}_{B5} (x \cdot y) + (x' \cdot y) \underbrace{=}_{hip.} 0 + (x' \cdot y) \underbrace{=}_{B4} (x' \cdot x) + (x' \cdot y) \underbrace{=}_{B5} x' \cdot (x + y) \underbrace{=}_{hip.} x' \cdot 1 \underbrace{=}_{B3} x'$

   Contradição. Logo, o complemento é único.

4. Semiabsorção: $x + (x' \cdot y) = x + y$

   $x + (x' \cdot y) \underbrace{=}_{B5} (x + x') \cdot (x + y) \underbrace{=}_{B4} 1 \cdot (x + y) \underbrace{=}_{B3} x + y$

5. $x \cdot (y + (x \cdot z)) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

   $x \cdot (y + (x \cdot z)) \underbrace{=}_{B5} (x \cdot y) + (x \cdot (x \cdot z)) \underbrace{=}_{B1} (x \cdot y) + (x \cdot x \cdot z) \underbrace{=}_{Idemp.} (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Leis da Lógica e da Álgebra de Boole

Dupla Negação	$\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$	$(x')' = x$
Idempotência	$\alpha \vee \alpha \Leftrightarrow \alpha \wedge \alpha \Leftrightarrow \alpha$	$x + x = x \cdot x = x$
Comutativa	$\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \beta \vee \alpha$ $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \beta \wedge \alpha$	$x + y = y + x$ $x \cdot y = y \cdot x$
Associativa	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	$(x + y) + z = x + (y + z)$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Elemento Neutro	$\alpha \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow \alpha \wedge \mathbf{V} \Leftrightarrow \alpha$	$x + 0 = x \cdot 1 = x$
Elemento Zero	$\alpha \vee \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{V}$ $\alpha \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$	$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$
Princípio do Terceiro Excluído	$\alpha \vee \neg\alpha \Leftrightarrow \mathbf{V}$	$x + x' = 1$
Princípio da Não Contradição	$\alpha \wedge \neg\alpha \Leftrightarrow \mathbf{F}$	$x \cdot x' = 0$
Distributiva	$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$ $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$	$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ $(x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$
Absorção	$(\alpha \wedge \beta) \vee \alpha \Leftrightarrow \alpha$ $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \Leftrightarrow \alpha$	$(x \cdot y) + x = x$ $(x + y) \cdot x = x$
Semiabsorção	$(\neg\alpha \wedge \beta) \vee \alpha \Leftrightarrow \alpha \vee \beta$ $(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta$	$(x' \cdot y) + x = x + y$ $(x' + y) \cdot x = x \cdot y$
De Morgan	$\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$ $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$	$(x + y)' = x' \cdot y'$ $(x \cdot y)' = x' + y'$

Exercício 4.2.1 Mostre que, para quaisquer $x, y, z \in B$:

1. $x \cdot x = x$
2. $x \cdot 0 = 0$
3. Involução: $(x')' = x$
4. De Morgan: $(x + y)' = x' \cdot y'$ e $(x \cdot y)' = x' + y'$
5. Absorção: $x + (x \cdot y) = x$ e $x \cdot (x + y) = x$
6. $x \cdot (x' + y) = x \cdot y$
7. $x + (y \cdot (x + z)) = (x + y) \cdot (x + z)$
8. $(x + y) \cdot (x' + y) = y$ e $(x \cdot y) + (x' \cdot y) = y$
9. $(x + (y \cdot z))' = (x' \cdot y') + (x' \cdot z')$ e $(x \cdot (y + z))' = (x' + y') \cdot (x' + z')$
10. $(x + y) \cdot (x + 1) = x + (x \cdot y) + y$ e $(x \cdot y) + (x \cdot 0) = x \cdot (x + y) \cdot y$
11. $(x + y) + (y \cdot x') = x + y$ e $(x \cdot y) \cdot (y + x') = x \cdot y$
12. $x + ((x' \cdot y) + (x \cdot y))' = x + y'$
13. $((x \cdot y) \cdot z) + (y \cdot z) = y \cdot z$

14. $(y' \cdot x) + x + ((y + x) \cdot y') = x$

15. $((x' + z') \cdot (y + z'))' = (x + y') \cdot z$

16. $(x \cdot y) + (x' \cdot z) + (x' \cdot y \cdot z') = y + (x' \cdot z)$

17. $(x \cdot y') + (y \cdot z') + (x' \cdot z) = (x' \cdot y) + (y' \cdot z) + (x \cdot z')$

18. $x \cdot y' = 0$ se, e somente se, $x \cdot y = x$.

19. $(x \cdot y') + (x' \cdot y) = y$ se, e somente se, $x = 0$.

20. $x + y = 0$ se, e somente se, $x = 0$ e $y = 0$.

21. $x = y$ se, e somente se, $(x \cdot y') + (y \cdot x') = 0$.

4.3 Expressões, Formas e Funções

Uma **expressão booleana** é:

b1. Qualquer símbolo de variável, 0 ou 1.

b2. Se α e β são expressões boolenas então $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ e α' também são.

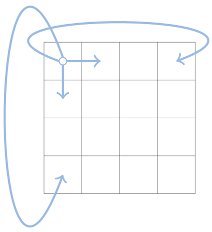
Um **literal** é uma expressão do tipo variável ou variável complementada. Um **produto fundamental** é ou um literal ou um produto de literais em que não apareça um símbolo de variável repetido. Uma expressão booleana é uma expressão em **soma de produtos** ou está na **forma normal** (disjuntiva)quando é um produto fundamental ou a soma de produtos fundamentais.

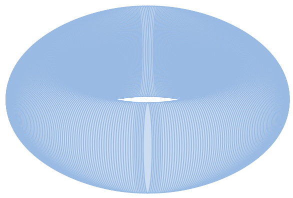
Exemplo 4.3.1 Seja $[B, +, \cdot, ']$ uma álgebra de Boole.

	expressão	literal	produto fundamental	FN
x	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
x'	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$xy'z$	$\surd$		$\surd$	$\surd$
$xy'z + x'yz'$	$\surd$			$\surd$
$(x + y)'z$	$\surd$			
xyx'	$\surd$			

Uma **função booleana** é uma função $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ para algum $n \geq 1$.

As possíveis representações de uma função booleana são por uma tabela ou por um **Mapa de Karnaugh** (Maurice Karnaugh 1924-). O mapa de Karnaugh é uma representação matricial que armazena somente os valores 1 da função de modo que o produto de variáveis de entrada que diferem apenas por um fator sejam adjacentes.





Exemplos 4.3.2 Considere as funções.

1. $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ tal que $f(1,1) = 0$, $f(1,0) = 1$, $f(0,1) = 1$ e $f(0,0) = 0$.

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

	x_1	x_1'
x_2	0	1
x_2'	1	0

2. Seja a função $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ tal que $f(1,1,1) = f(1,1,0) = f(0,1,1) = f(0,0,1) = 1$ e $f(1,0,1) = f(1,0,0) = f(0,1,0) = f(0,0,0) = 0$.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

	x_1x_2	x_1x_2'	$x_1'x_2'$	$x_1'x_2$
x_3	1		1	1
x_3'	1			

Podemos associar a cada função booleana uma expressão. No exemplo anterior item 1, às linhas 2 e 3 ficam associados os produtos fundamentais x_1x_2' e $x_1'x_2$, respectivamente. Assim, a função fica associada à expressão booleana na forma normal

$$f(x_1,x_2) = x_1x_2' + x_1'x_2.$$

No item 2, às linhas 1, 2, 5 e 7 ficam associados os produtos fundamentais $x_1x_2x_3$, $x_1x_2x_3'$, $x_1'x_2x_3$ e $x_1'x_2'x_3$, respectivamente. Então, a função fica associada à expressão booleana na forma normal

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3' + x_1'x_2x_3 + x_1'x_2'x_3.$$

Para funções com um número maior de variáveis, o mapa é a representação mais sintética.

Considere o mapa a seguir.

	x_1x_2	x_1x_2'	$x_1'x_2'$	$x_1'x_2$
x_3x_4		1		
x_3x_4'				
$x_3'x_4'$	1			1
$x_3'x_4$		1		

A função associada é:

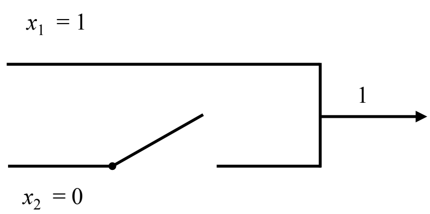
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2'x_3x_4 + x_1x_2x_3'x_4' + x_1'x_2x_3'x_4' + x_1x_2'x_3'x_4.$$

4.4 Circuitos Lógicos

Características gerais:

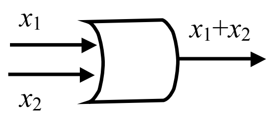
- Descargas elétricas alta e baixa, 1 e 0, respectivamente.
- Flutuações de voltagem são ignoradas.
- O sinal 1 faz com que o interruptores feche e o 0 abra.

- Combinação de interruptores x e y em paralelo.

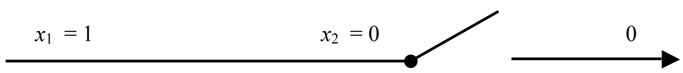


Esta combinação pode ser associada à operação boolena $x + y$ e à porta lógica OU.

x_1	x_2	$x_1 + x_2$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

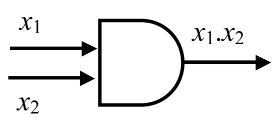


- Combinação de interruptores x e y em série.



Esta combinação pode ser associada à operação boolena $x \cdot y$ e à porta lógica E.

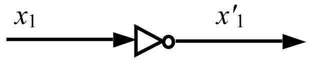
x_1	x_2	$x_1 . x_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0



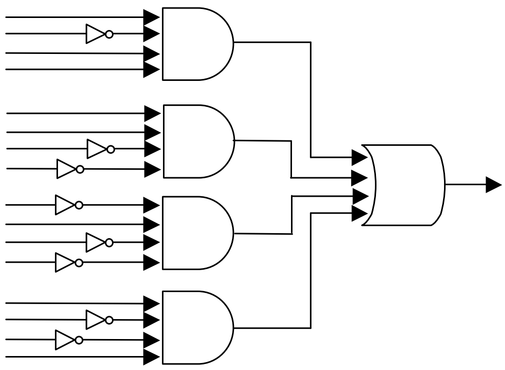
- Um inversor (negação) corresponde à operação unária booleana $'$.

Observe que, circuitos podem ser associados a funções booleanas, isto é, a expressões booleanas.

x_1	x'_1
1	0
0	1



Exemplo 4.4.1 Ao circuito



fica associada a expressão booleana

$$x_1x_2'x_3x_4 + x_1x_2x_3'x_4' + x_1'x_2x_3'x_4' + x_1x_2'x_3'x_4.$$

4.5 Minimização

Considere a expressão do Exemplo 4.4.1

$$x_1x_2'x_3x_4 + x_1x_2x_3'x_4' + x_1'x_2x_3'x_4' + x_1x_2'x_3'x_4$$

e a manipulação algébrica:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1 & x_1x_2'x_3x_4 + x_1x_2x_3'x_4' + x_1'x_2x_3'x_4' + x_1x_2'x_3'x_4 = & \text{B2} \\
\alpha_2 & x_1x_2'x_3x_4 + x_1x_2'x_3'x_4 + x_1x_2x_3'x_4' + x_1'x_2x_3'x_4' = & \text{B5} \\
\alpha_3 & x_1x_2'x_4(x_3 + x_3') + (x_1 + x_1')x_2x_3'x_4' = & \text{B4} \\
\alpha_4 & x_1x_2'x_4\,1\;+\;1\,x_2x_3'x_4' = & \text{B3} \\
\alpha_5 & x_1x_2'x_4 + x_2x_3'x_4' &
\end{array}$$

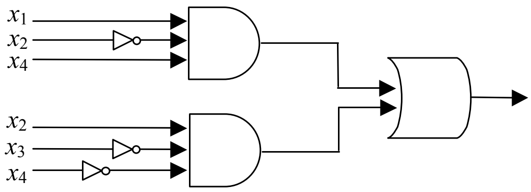
Cada uma das linhas desta manipulação é uma expressão booleana associada à mesma função booleana. Tanto α_1 quanto α_5 estão na forma normal, e α_5 é a forma **simplificada** ou **mínima** de α_1.

Vamos tratar agora de minimização de circuitos através do mapa de Karnaugh. Devemos agrupar todas as ocorrências adjacentes contendo *uns* de forma a obter a maior combinação possível. Assim reduziremos o número de parcelas na expressão.

	x_1x_2	x_1x_2'	$x_1'x_2'$	$x_1'x_2$
x_3x_4		1		
x_3x_4'				
$x_3'x_4'$	1			1
$x_3'x_4$		1		

Observe que, tomar céluas adjacentes corresponde à simplicação algébrica com o uso dos axiomas da distributividade, complementaridade e elemento neutro.

Finalmente, o circuito de Exemplo 4.4.1 é equivalente a um circuito *menor*.



Exemplo 4.5.1 Considere o mapa de Karnaugh com oito produtos fundamentais.

	x_1x_2	x_1x_2'	$x_1'x_2'$	$x_1'x_2$
x_3x_4		1	1	
x_3x_4'			1	1
$x_3'x_4'$		1	1	
$x_3'x_4$			1	1

Dois possíveis agrupamentos de uns.

	x_1x_2	x_1x_2'	$x_1'x_2'$	$x_1'x_2$
x_3x_4		1	1	
x_3x_4'			1	1
$x_3'x_4'$		1	1	
$x_3'x_4$			1	1

	x_1x_2	x_1x_2'	$x_1'x_2'$	$x_1'x_2$
x_3x_4		1	1	
x_3x_4'			1	1
$x_3'x_4'$		1	1	
$x_3'x_4$			1	1

Com cinco e quatro produtos, respectivamente.

$$x_1'x_2' + x_1x_2'x_3x_4 + x_1'x_2x_3x_4' + x_1x_2'x_3'x_4' + x_1'x_2x_3'x_4$$

e

$$x_2'x_3x_4 + x_1'x_3x_4' + x_2'x_3'x_4' + x_1'x_3'x_4.$$

Passos para minimização através de Mapas de Karnaugh.

1. Forma a parcela correspondente as células isoladas contendo 1.
2. Combine as células adjacentes que só podem ser agrupadas de um único modo formando blocos de tamanho 2, se possível.
3. Combine as células adjacentes que só podem ser agrupadas de um único modo formando blocos de tamanho 4, se possível.
4. Combine as células adjacentes que só podem ser agrupadas de um único modo formando blocos de tamanho 8, se possível.
5. Combine as células adjacentes restantes contendo 1 em blocos de maneira mais eficiente possível.

Exercício 4.5.2 *Indique a expressão boolena mínima para cada uma das funções indicadas nos mapas de Karnaugh.*

1	1	1	1

	1	1	
1			1

1	1		
1	1		

1			1
1			1

1		1	
	1	1	

		1	1
1	1		1

1			1
	1		

1	1	1	1
1			1

1			1
	1	1	
	1	1	
1			1

1	1		
1	1		
			1
			1

	1	1	
		1	1
	1	1	
		1	1

1	1	1	
1	1		
	1		

			1
	1	1	1
	1		

1	1		
1	1		
	1	1	1
			1

1	1	1	1
1	1		1
	1	1	1
		1	1

	1		
	1	1	
1	1	1	

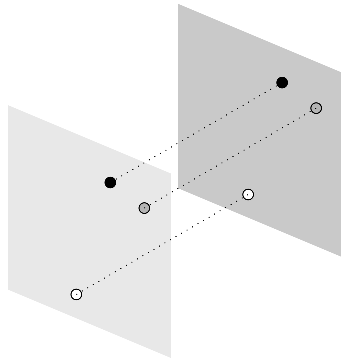
	1		
	1	1	1
1	1	1	
	1		

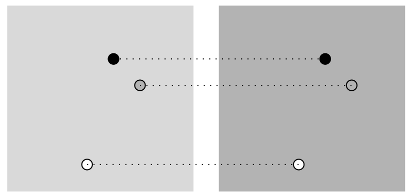
			1
1	1		
	1	1	
		1	

1			1
1	1	1	1
1			1
1			1

1	1		
		1	1
1	1		
		1	1

4.5.1 Adjacência no mapa e sobreposição entre dois (sub)mapas com 5 variáveis





	x_1				x'_1			
	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x'_3$	$x_1x'_2x'_3$	$x_1x'_2x_3$	$x'_1x_2x_3$	$x'_1x_2x'_3$	$x'_1x'_2x'_3$	$x'_1x'_2x_3$
x_4x_5	1		1	1				
$x_4x'_5$		1	1	1	1			
$x'_4x'_5$		1	1	1	1		1	1
x'_4x_5			1	1			1	1

Exemplo 4.5.3 *Blocagem*

	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x'_3$	$x_1x'_2x'_3$	$x_1x'_2x_3$	$x'_1x_2x_3$	$x'_1x_2x'_3$	$x'_1x'_2x'_3$	$x'_1x'_2x_3$
x_4x_5	1		1	1				
$x_4x'_5$		1	1	1	1			
$x'_4x'_5$		1	1	1	1		1	1
x'_4x_5			1	1			1	1

	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x'_3$	$x_1x'_2x'_3$	$x_1x'_2x_3$	$x'_1x_2x_3$	$x'_1x_2x'_3$	$x'_1x'_2x'_3$	$x'_1x'_2x_3$
x_4x_5	1		1	1				
$x_4x'_5$		1	1	1	1			
$x'_4x'_5$		1	1	1	1		1	1
x'_4x_5			1	1			1	1

	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3'$	$x_1x_2'x_3'$	$x_1x_2'x_3$	$x_1'x_2x_3$	$x_1'x_2x_3'$	$x_1'x_2'x_3'$	$x_1'x_2'x_3$
x_4x_5	1		1	1				
x_4x_5'		1	1	1	1			
$x_4'x_5'$		1	1	1	1		1	1
$x_4'x_5$			1	1			1	1

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2' + x_1'x_2x_3x_5' + x_1x_3x_4x_5 + x_1x_3'x_5' + x_2'x_4'$$

Exercício 4.5.4 *Apresente expressões simplificadas para as funções apresentadas nos mapas.*

1			1	1			1
	1	1			1	1	
	1	1			1	1	
1			1	1			1

1	1	1	1				1
1							1
1							1
1				1	1	1	1

1	1	1					
	1	1	1				
		1	1	1			
			1	1	1		

1	1	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1		
	1	1				1	
1						1	1

4.6 Reticulados

Um **conjunto parcialmente ordenado** (**poset**) $[A, \preccurlyeq]$ é composto por um conjunto não vazio A e uma relação binária $\preccurlyeq$ em A reflexiva, antissimétrica e transitiva, isto é, para quaisquer $x, y, z \in A$,

- Reflexiva: $x \preccurlyeq x$.
- Antissimétrica: Se $x \preccurlyeq y$ e $y \preccurlyeq x$ então $x = y$.
- Transitiva: Se $x \preccurlyeq y$ e $y \preccurlyeq z$ então $x \preccurlyeq z$.

Um **conjunto** A **está totalmente ordenado** (**toset**) quando para quaisquer $x, y \in A$, $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$ ou $x = y$.

Considere o poset $[A, \preccurlyeq]$ e $A' \subseteq A$ não vazio.

- $L \in A$ é um **limite superior** de A' se para todo $x \in A'$, $x \preccurlyeq L$.
- $M \in A'$ é um **máximo** ou **maior elemento** de A' se para todo $x \in A'$, $x \preccurlyeq M$.
- $s \in A$ é um **supremo** de A' se s for o mínimo (caso exista) do conjunto de limites superiores de A'.

- $P \in A'$ é um **elemento maximal** de A' se não existir $x \in A'$, $x \neq P$ tal que $P \preccurlyeq x$.
- $\ell \in A$ é um **limite inferior** de A' se para todo $x \in A'$, $\ell \preccurlyeq x$.
- $m \in A'$ é um **mínimo** ou **menor elemento** de A' se para todo $x \in A'$, $m \preccurlyeq x$.
- $i \in A$ é um **ínfimo** de A' se i for o máximo (caso exista) do conjunto de limites inferiores de A'.
- $p \in A'$ é um **elemento minimal** de A' se não existir $x \in A'$, $x \neq p$ tal que $x \preccurlyeq p$.

Proposição 4.6.1 *Sejam $[A, \preccurlyeq]$ um poset e $A' \subseteq A$ não vazio. Se existe um máximo (mínimo) de A' então ele é único.*

Prova: (RAA) Sejam $M \neq M'$ máximos de A'.

$M' \in A' \therefore M' \preccurlyeq M$.

$M \in A' \therefore M \preccurlyeq M'$.

$M = M'$, pela anti-simetria. (Contradição)

Logo, o máximo é único. ■

O supremo e o ínfimo podem ser definidos para dois elementos.

Seja $[A, \preccurlyeq]$ e $x, y \in A$. O **supremo** de x e y é o elemento $s \in A$ tal que

S1. $x \preccurlyeq s$ e $y \preccurlyeq s$.

S2. se existir algum $z \in A$ com $x \preccurlyeq z$ e $y \preccurlyeq z$ então $s \preccurlyeq z$.

O **ínfimo** de x e y é o elemento $i \in A$ tal que

i1. $i \preccurlyeq x$ e $i \preccurlyeq y$.

i2. se existir algum $z \in A$ com $z \preccurlyeq x$ e $z \preccurlyeq y$ então $z \preccurlyeq i$.

Notação: $s = x \vee y = x + y$

$i = x \wedge y = x \cdot y$

Um **reticulado** é um conjunto parcialmente ordenado no qual existe supremo e ínfimo para quaisquer dois elementos.

Assim, supremo e ínfimo podem ser entendidos como operações binárias em A. Denota-se um reticulado por $[A, \preccurlyeq, +, \cdot]$. Um **reticulado** é **complementado** quando

RC1. Existe um menor elemento 0, isto é, para todo $x \in A$, $0 \preccurlyeq x$.

RC2. Existe um maior elemento 1, ou seja, para todo $x \in A$, $x \preccurlyeq 1$.

RC3. Para todo elemento $x \in A$ existe $x' \in A$ tal que $x + x' = 1$ e $x \cdot x' = 0$.

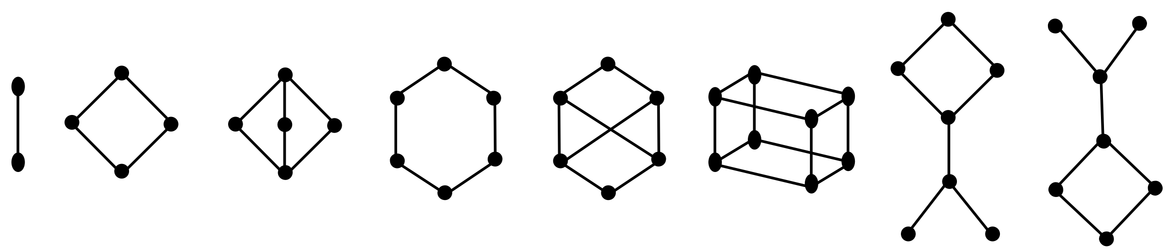
Um **reticulado** é **distributivo** quando para quaisquer $x, y, z \in A$,

RD. $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ e $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

4.7 Álgebra de Boole e reticulados

Um reticulado complementado e distributivo é uma **álgebra de Boole**.

Exercício 4.7.1 Indique os diagramas de Hasse que representam álgebras de Boole, justificando.



4.8 Solução de alguns exercícios

Álgebra de Boole

Itens:

1. $x \cdot x = xx + 0 = xx + xx' = x(x + x') = x1 = x$

5. $x + (x \cdot y) = x1 + xy = x(1 + y) = x1 = x$

9. $(x + (y \cdot z))' = x'(yz)' = x'(y' + z') = (x' \cdot y') + (x' \cdot z')$

13. $((x \cdot y) \cdot z) + (y \cdot z) = (x(yz)) + (yz) = y \cdot z$

21. se $x = y \therefore (x \cdot y') + (y \cdot x') = (xx') + (xx') = 0 + 0 = 0$

    se $(x \cdot y') + (y \cdot x') = 0 \therefore xy' = 0$ e $yx' = 0 \therefore xy = x$ e $yx = y \therefore x = y$

Minimização

1	1	1	1

x_3

1		1	
	1	1	

$x_1x_2x_3 + x_1'x_2' + x_2'x_3'$

1			1
	1	1	
	1	1	
1			1

$x_2x_3x_4 + x_2'x_4' + x_2x_3'x_4$ ou ...

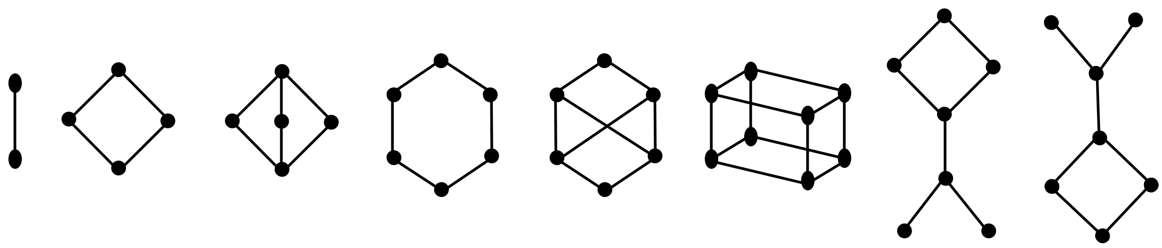
			1
	1	1	1
	1		

$x_1'x_2x_3 + x_2'x_3x_4' + x_1x_2'x_4'$ ou ...

	1		
	1	1	1
1	1	1	
	1		

$x_1x_2' + x_2'x_4' + x_1'x_3x_4' + x_1x_3'x_4'$

Reticulados



Todos os diagramas representam posets. O quinto diagrama não é um reticulado. O quarto, sétimo e oitavo não são complementados. O terceiro não é distributivo. Assim, o primeiro, segundo e o sexto são álgebras de Boole.