Rio, 18/04/23

Produto Escalar (visão algébrica)

dado $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$$

"algébrico" "geométrico"

Seja no $\mathbb{R}^2$

$\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2) \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{2} u_i v_i$

Ex: $\vec{u} = (1,2)$
$\vec{v} = (3,4)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$

Repare que é sempre uma coisa do tipo

$\cdot \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow k$

$n = 2$ ou 3

Obs Sempre podemos descobrir o ângulo entre dois vetores pois
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \rightsquigarrow \arccos \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

obs: $|\vec{w}| = \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}$

$\vec{c} \cdot \vec{c} = |\vec{c}||\vec{c}| = |\vec{c}|^2$

Ex $\vec{v_1} = (1,0)$
$\vec{v_2} = (0,1)$

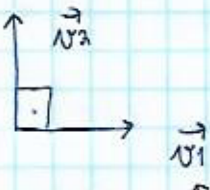
$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

$|\vec{v_1}| = \sqrt{\vec{v_1} \cdot \vec{v_1}} = \sqrt{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = 1$

$|\vec{v_2}| = \sqrt{\vec{v_2} \cdot \vec{v_2}} = \sqrt{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} = 1$

$\cos\theta = \dfrac{0}{1 \cdot 1} = 0$

$\theta = 90°$ ou $270°$
↳ menor



Obs $\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

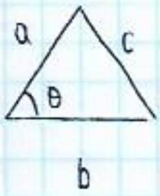
Obs2: $\vec{a} \parallel \vec{b} \leftrightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| = 1 \leftrightarrow \theta = 0°$ ou $\theta = 180°$

Conceito Geométrico é equivalente ao algébrico

Quero mostrar que

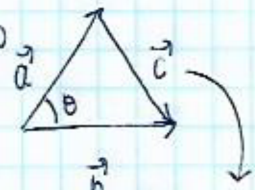
$$\sum a_i b_i = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Relembrando - Lei dos Cossenos



$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta$
↳ se $\cos 90°$
$2 \cdot a \cdot \cos 90° = 0$
$c^2 = a^2 + b^2$
Pitágoras!!

Dado



$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = |\vec{b} - \vec{a}|$ (*)

mas $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a}$

$= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2$ (**)

Como (*) = (**) $\rightarrow |\vec{b} - \vec{a}| = \cancel{|\vec{a}|^2} + \cancel{|\vec{b}|^2} - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = \cancel{|\vec{a}|^2} + \cancel{|\vec{b}|^2} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

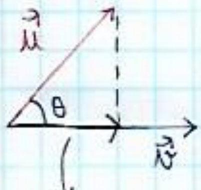
Logo $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

Reflexão: Já pensou que um produto matricial é baseado no produto escalar?

$$\begin{array}{cc} \vec{v_1} & \vec{v_2} \end{array}$$
ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $1 \cdot 5 + 2 \cdot 7$

Pesquisar+

Projeção Ortogonal (dos vetores)



$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$

note $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} \parallel \vec{v} \leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$
tq $\alpha \cdot \vec{v} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ ✓visto

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta =$

$= |\vec{u}||\vec{v}| \dfrac{|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

$= |\vec{v}||\alpha \vec{v}| = \alpha |\vec{v}|^2$

Logo $\vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha |\vec{v}|^2$

$\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}$

$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$

Ex $\vec{u} = (2,-1,3)$

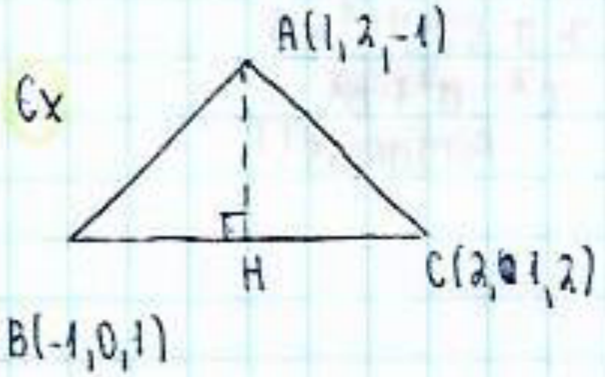
$\vec{v} = (4,-1,2)$

$proj_{\vec{v}}\, \vec{u} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}\,(4$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\,4 + (-1)(-1) + 3\,2 = 15$

$|\vec{v}|^2 = 21$

Ex



(a) Prove que $B\hat{A}C = 90^\circ$

(b) Ache o pé da altura relativa ao vértice.
↘ coord. de H