课程编号：1700002　　　　　　北京理工大学 2023-2024 学年第一学期

# 2023 级硕士研究生矩阵分析期末试题

座号_________学院___________学号___________姓名____________

（试卷共 7 页, 八道大题. 解答题必须有解题过程, 试卷后面空白页撕下做稿纸, 试卷不得拆散）

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |
| 签名 | | | | | | | | | |

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1、 我们用$\mathbb{R}[x]_n$表示所有次数小于$n$的多项式构成的线性空间，那么线性空间$\mathbb{R}[x]_n$的维数为__________.线性映射$\mathcal{D}: \mathbb{R}[x]_4 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_3$表示由$\mathcal{D}\big(f(x)\big) = \frac{d}{dx}f(x)$定义的微分映射， 则$\mathcal{D}$在$\mathbb{R}[x]_4$的一个基$1, x, x^2, x^3$和$\mathbb{R}[x]_3$的一个基$1, x, x^2$下的矩阵表示为_______________，$\mathcal{D}$的核子空间为__________________.

2、 设 $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-4 \end{pmatrix}$，则 $A(\lambda)$ 的不变因子为________________________, $A(\lambda)$的初等因子为__________________________.

3、 已知矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，则矩阵$A$的 Frobenius 范数$\|A\|_F =$______，矩阵$AV$ 的 Frobenius 范数 $\|AV\|_F =$ ______，矩阵函数 $e^{i\pi I}$ 的行列式值$\left|e^{i\pi I}\right| =$______，这里$V$为$3\times3$的酉矩阵，$i^2 = -1$, $I$为$3\times3$的单位矩阵.

4、 已知函数矩阵$A(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & cost \\ t & -t^2 \end{pmatrix}$，则$\frac{d^2A(t)}{dt^2} =$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，$\frac{d}{dx}(\int_0^x A(t)dt) =$__________________________.

二、（14 分）已知矩阵 $A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

（1）求矩阵$A$的 Jordan 标准形和最小多项式.

（2）求矩阵函数$sin\pi A$和$e^{tA}$.

三、(10 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的奇异值分解表达式，这里$i^2=-1$.

四、（10 分）已知正规矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

求矩阵$A$的谱分解.

五、（10 分）已知 Hermitian 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2+i & 0 \\ 2-i & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，与之相对应的 Hermitian 二次型为$f(X)=X^HAX$，这里 $X=[x_1,x_2,x_3]^T$.

（1） 用酉变换将 Hermitian 二次型$f(X)=X^HAX$化成标准形，并写出所做的酉变换.

（2）判断$f(X)=X^HAX$的定性.

六、（10 分）（1）证明：对于任意的$n \times n$复矩阵$A$，其谱半径$\rho(A)$小于等于它的任何一种范数$\|A\|$.

（2）证明：$\|B\|_2^2 \le \|B\|_1 \|B\|_\infty$，这里$B$是任意的$m \times n$复矩阵.

七、（10 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{8} & \frac{3}{8}\\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$. 证明：矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(2k+3)A^k$ 收敛，并求其收敛和.

八、（6 分）我们用$\mathbb{R}^{2\times 2}$表示实数域$\mathbb{R}$上所有$2\times 2$矩阵构成的线性空间，定义$\mathbb{R}^{2\times 2}$上的双线性函数

$$\sigma:\ \mathbb{R}^{2\times 2}\times\mathbb{R}^{2\times 2}\longrightarrow\mathbb{R}^{2\times 2},\ \ \sigma(X,Y)=Tr(X^TAY),$$

这里$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, 证明：$\sigma(X,Y)=Tr(X^TAY)$是线性空间$\mathbb{R}^{2\times 2}$上的一种内积.