



Matrix Analysis



矩阵分析





定义：设 $A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}] \in C^{m \times n}$ ，如果 mn 个常数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

都收敛，则称矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A^{(1)} + A^{(2)} + \dots + A^{(k)} + \dots$$

收敛。如果 mn 个常数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$



都绝对收敛，则称矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

绝对收敛.



例：如果设 $A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}] \in C^{2 \times 2}$ ，其中

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{11}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{12}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{21}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{22}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^k}$$

那么矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

是收敛的.



定理：设 $A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}] \in C^{m \times n}$ ，则矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

绝对收敛的充分必要条件是正项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A^{(k)}\| = \|A^{(1)}\| + \|A^{(2)}\| + \cdots + \|A^{(k)}\| + \cdots$$

收敛，其中 $\|A\|$ 为任意一种矩阵范数。

证明：取矩阵范数



$$\|A^{(k)}\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}^{(k)}|$$

那么对每一对 i, j 都有 $\|A^{(k)}\| \geq |a_{ij}^{(k)}|$

因此, 如果

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A^{(k)}\| = \|A^{(1)}\| + \|A^{(2)}\| + \cdots + \|A^{(k)}\| + \cdots$$

收敛, 则对每一对 i, j 常数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}| = |a_{ij}^{(1)}| + |a_{ij}^{(2)}| + \cdots + |a_{ij}^{(k)}| + \cdots$$



都是收敛的，于是矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

绝对收敛.

反之，若矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

绝对收敛，则对每一对 i, j 都有



$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}| = |a_{ij}^{(1)}| + |a_{ij}^{(2)}| + \cdots + |a_{ij}^{(k)}| + \cdots < \infty$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}^{(k)}| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}| < \infty$$

由此可知部分和数列有上界

$$S_n = \sum_{k=1}^n \|A_k\| < \infty$$

依据正项级数收敛的充要条件可知其收敛.



定理： 对于两个绝对收敛的矩阵级数，它们的 **Cauchy** 积所组成的矩阵级数仍然绝对收敛

$$S_1 : A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots;$$

$$S_2 : B_1 + B_2 + \cdots + B_k + \cdots.$$

$$S_1 \rightarrow A, S_2 \rightarrow B$$

$$S_3 : A_1 B_1 + (A_1 B_2 + A_2 B_1) + (A_1 B_3 + A_2 B_2 + A_3 B_1)$$

$$+ \text{[Redacted]}$$

$$S_3 \rightarrow AB$$



定义：设 $A \in C^{n \times n}$ ，称形如

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k + \cdots$$

的矩阵级数为**矩阵幂级数**。

定理：如果矩阵 A 的某个范数 $\|A\|$ 在幂级数的

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots$$

收敛域内，那么矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛。



Cauchy-Hadamard 定理:

幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, 当 $|x| < R$ 时, 绝对收敛; 当 $|x| > R$ 时, 发散; 当 $|x| = R$ 时, 幂级数收敛与否必须另行判断, 这里 R 为此幂级数的收敛半径.

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$



定理： 设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的收敛半径为 R , A 为 n 阶方阵. 若 $\rho(A) < R$, 则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛; 若 $\rho(A) > R$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散.



证明： 设 A 的Jordan标准形为

$$J = \text{diag}(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_r(\lambda_r))$$

其中

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{d_i \times d_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

于是 $A^k = P \text{diag}(J_1^k(\lambda_1), J_2^k(\lambda_2), \dots, J_r^k(\lambda_r)) P^{-1}$



$$J_i^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$



所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (P J^k P^{-1}) \\&= P \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k \right) P^{-1} \\&= P \operatorname{diag} \left(\sum_{K=0}^{\infty} a_k J_1^k(\lambda_1), \sum_{K=0}^{\infty} a_k J_2^k(\lambda_2), \cdots, \sum_{K=0}^{\infty} a_k J_r^k(\lambda_r) \right) P^{-1}\end{aligned}$$



其中

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_i^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_i^k & \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_i^k \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$



其中
$$c_k^l = \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!} \quad (\text{当 } l \leq k)$$

$$c_k^l = 0 \quad (\text{当 } l > k)$$

当 $\rho(A) < R$ 时, 幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_k^1 \lambda_i^{k-1}, \quad \cdots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_k^{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1}$$

都是绝对收敛的, 故矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 绝对收敛;

当 $\rho(A) > R$ 时, 幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_i^k$ 发散, 所以 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 发散.



初等函数的Taylor展开式:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$+ \frac{x^n}{n!} + \dots, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, x \in (-\infty, +\infty)$$



$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, x \in [-1, 1]$$



$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} +$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad x \in (-1, 1]$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$+ (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$



所以对于任意的 n 阶矩阵 A ，矩阵幂级数

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

$$\begin{aligned} \sin A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} \\ &= A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\cos A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n} \\ &= I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!} + \cdots\end{aligned}$$

都是绝对收敛的.

当矩阵 A 的谱半径 $\rho(A) < 1$ 时, 下面的三个矩阵级数也是绝对收敛的:



$$\begin{aligned}\arctan A &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} A^{2n-1} \\ &= A - \frac{A^3}{3} + \frac{A^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(I + A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} A^n \\ &= A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \frac{A^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{A^n}{n} + \cdots,\end{aligned}$$



$$(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^n A^n + \dots$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^n + \dots$$

定理： 矩阵幂级数

$$I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots$$

绝对收敛的充分必要条件是 $\rho(A) < 1$, 且其和为 $(I - A)^{-1}$.



例：已知

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- (1) 求证：矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 A^k$ 收敛.
- (2) 求矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 A^k$ 的收敛和.



解： (1) 由

$$|\lambda E - A| = (\lambda + \frac{2}{5})(\lambda - \frac{4}{5})$$

可知 A 的特征值为 $\lambda_1 = -\frac{2}{5}$, $\lambda_2 = \frac{4}{5}$, $\rho(A) = \frac{4}{5}$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 A^k$ 的收敛半径为 $R = 1$.



$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}, (\sum_{k=0}^{\infty} x^k)' = (1-x)^{-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = (1-x)^{-2}, \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x(1-x)^{-2}$$

$$(\sum_{k=0}^{\infty} kx^k)' = (x+1)(1-x)^{-3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = x(1+x)(1-x)^{-3}$$



$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 A^k = A(E + A)(E - A)^{-3} = \frac{15}{7^3} \begin{bmatrix} 2057 & 2059 \\ 2059 & 2057 \end{bmatrix}$$