一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1、 设 $A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^3(\lambda-1) & & \\ & \lambda^2(\lambda-1)^2 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$，则 $A(\lambda)$ 的不变因子为________________

______________，$A(\lambda)$ 的行列式因子为______________________________

2、 设 α,β 是 C^3 中的两个单位向量，且 $\beta^H\alpha=0$. 令 $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩为__________，A 的奇异值为_________________.

3、 已知实数域 R 上的线性空间 $R^{n\times n}$，令 $V=\left\{A\in R^{n\times n}\,\middle|\,\mathrm{Tr}(A)=0\right\}$，则 V 的维数是____________.

4、 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & i \\ -4 & i & 2 \end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1=$_____, , $\|A\|_\infty=$_____, $\|A\|_F=$______ .

其中 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 分别是由向量的 1-范数和 $\infty-$范数诱导出来的矩阵范数（也称算子范数），$\|\cdot\|_F$ 是矩阵的 Frobenius 范数，i 是虚数单位，$i^2=-1$.

5、 已知函数矩阵 $A(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & t^2 \\ te^t & -e^{2t} \end{bmatrix}$ 则 $\dfrac{d^2A(t)}{dt^2}=$_________________________

$\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2}A(t)dt\right)=$_________________________

二、（10 分）已知 $A=\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，求矩阵 A 的奇异值分解表达式，这里 i 为虚数单位，$i^2=-1$.

三、（15 分）已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$,

（1）求矩阵的 Jordan 标准形和最小多项式；

（2）计算矩阵函数 e^{tA}, $\sin \pi A$.

四、（10 分）已知正规矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$， 求矩阵 A 的谱分解。

五、（10 分） 已知 Hermite 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3\overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_2 x_2 + \overline{x}_3 x_3 + i\,\overline{x}_2 x_3 - i\,\overline{x}_3 x_2,$$

这里 i 是虚数单位，$i^2 = -1$.

(1) 求酉变换 $X = UY$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 Hermite 二次型的标准形;

(2) 判断 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的定性.

六、（10 分）设 A 为一个 $n\times n$ 型的正定 Hermite 矩阵，证明：

$$\|x\|=(x^H Ax)^{\frac{1}{2}},\qquad \forall x\in C^n,$$

是 C^n 上的向量范数。

七、（10 分）已知矩阵 $A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$.

（1）证明 $\sum_{k=1}^{\infty} kA^k$ 收敛.

（2）计算矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} kA^k$ 的收敛和.

八、（5 分）设 A,B 是两个 n 阶矩阵，证明 $\left|e^{A+B}\right|=\left|e^{A}\right|\cdot\left|e^{B}\right|$，其中 $|X|$ 表示矩阵 X 的行列式的值。