Линейная алгебра и геометрия

Slava Boben

September 9, 2019

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Общая информация

1.1.1 Контакты

Авдеев Роман Сергеевич

- suselr@yandex.ru
- ravdeev@hse.ru

1.1.2 О дисциплине

1 – 4 модули
Письменный экзамен: 2, 4 модули

1.1.3 Оценка

1. Экзамен
2. Коллоквиум
3. Контрольная работа
4. Больше ДЗ
5. Работа на семинарах
6. Бонус – Задачи из листков

$$O_{\text{Итог}} = \min(10, \text{Округление}(0.4 * O_{\text{Экз}} + 0.22 * O_{\text{Колл}} + 0.16 * O_{\text{КР}} + 0.16 * O_{\text{ДЗ}} + 0.08 * O_{\text{Сем}} + 0.08 * O_{\text{Л}}), 10)$$

$$\text{Округление}(x) = [x]$$

1.1.4 Содержание курса

1. Начало алгебры — 9 – 10 занятий
   - Матрицы
   - Системы линейных уравнений
   - Определители
   - Комплексные числа
2. Собственно линейная алгебра
   - Вектороное пространство

1.2 Матрицы

Определение 1. Матрица размера $n \times m$ — это прямоугольная таблица высоты m и ширины n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_i j$ – элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца

Краткая запись – $A = (a_{ij})$

Множество всех матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ (множество всех действительных чисел) — $\text{Mat}_{n*m}(\mathbb{R})$ или Mat_{n*m}

Определение 2. Две матрицы $A \in \text{Mat}_{n\times m}$ и $B \in \text{Mat}_{p\times q}$ называются *равными*, если $m = p, n = q$, и соответствующие элементы равны

Пример. $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

1.2.1 Операции над матрицами

$A, B \in \mathrm{Mat}_{m*n}$

- *Сумма* $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$
- *Произведение на скаляр* $\alpha \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij})$

Свойства суммы и произведения на скаляр
$\forall A, B, C \in \mathrm{Mat}_{m*n} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
(1) $A + B = B + A$ (коммутативность)
(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность)
(3) $A + 0 = 0 + A = A$, где $0 =$
(4) $A + (-A) = 0$
$-A$ – Противоположная матрица
(5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
(6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
(7) $\lambda(\mu A) = \lambda\mu A$
(8) $1A = A$

Упражнение. Доказать эти свойства

Примечание. Из свойств (1) – (8) следует, что $\mathrm{Mat}_{n*m}(\mathbb{R})$ является векторным пространством над $\mathbb{R}$

1.2.2 $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \ldots, n\}$
$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ – числовая прямая
$\mathbb{R}^2$ – плоскость
$\mathbb{R}^3$ – трехмерное пространство

Договоримся отождествлять $\mathbb{R}^n$ со столбцами высоты n

$(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — "вектор столбец"

$\mathbb{R}^n \leftrightarrow \mathrm{Mat}_{n*m}(\mathbb{R})$

$$\left[x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\right] \implies [x = y \iff x_i = y_i \forall i]$$

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \ldots)$

1.2.3 Транспонирование

$$A \in \mathrm{Mat}_{m*n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T \in \mathrm{Mat}_{n*m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A^T — Транспонированная матрица
Свойства:
(1) $(A^T)^T = A$
(2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

1.2.4 Умножение матриц

$A = (a_{ij})$
$A_{(i)}$ – i-я строка матрицы A
$A^{(j)}$ – j-й столбец матрицы A

(1) Частный случай: Произведение строки на столбец одинаковой длинны

$$\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = x_1 * y_1 + \cdots + x_n * y_n$$

(2) A - матрица размера $m * n$

B - матрица размера $n * p$

Кол-во строк матрицы A равно кол-ву столбцов матрицы B — условие согласованности матриц

$AB := C \in \mathrm{Mat}_{m*p}$, где $C_{ij} = A_{(i)}B^{(j)}$

Пример. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \ldots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \ldots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_m & \ldots & x_ny_m \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*2+0*0+2*1 & 1*(-1)+0*5+2*1 \\ 0*2+(-1)*0+3*1 & 0*(-1)+(-1)*5+3*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$