

Лекции по математическому анализу

Slava Boben

September 5, 2019

Содержание

1	Лекция 1	2
1.1	Общая информация	2
1.1.1	Контакты	2
1.1.2	Оценка	2
1.1.3	Коллоквиум	2
1.1.4	Экзамен	2
1.1.5	Литература	2
1.2	Теория пределов и непрерывных функций одной переменной	2
1.2.1	Понятие действительного числа	2
2	Семинар 1	4
2.1	Математическая индукция	4
2.2	Неравенство бернулли	4
2.3	Биноминальные коэффициенты	5
2.3.1	Бином Ньютона	5
2.4	Сумма геометрической прогрессии	5
2.5	Рациональные числа с двумя десятичными представлениями	6
3	Понятие предела числовой последовательности	6
4	Семинар 2	6
4.1	Числовые последовательности	6
4.1.1	Общие понятия	6
4.2	Примеры	7
5	Лекция 4	8
6	Семинар 1	10
6.1	Найти предел	10
6.2	Разные штуки	11
7	Семинар 4	12
8	Семинар 5	13
8.1	Золотые пределы	13
8.2	Дааааа	14

1 Лекция 1

1.1 Общая информация

1.1.1 Контакты

Делицын Андрей Леонидович

- delitsyn@mail.ru
- adelistyn@hse.ru

1.1.2 Оценка

$$O_{\text{пром}} = \text{Округление} \left(\frac{1}{10} ДЗ_1 + \frac{1}{10} КР_1 + \frac{3}{10} КК_1 + \frac{5}{10} ЭКЗ_1 \right)$$
$$O_{\text{итог}} = \text{Округление} \left(\frac{1}{20} ДЗ_2 + \frac{1}{20} КР_2 + \frac{3}{20} КК_2 + \frac{5}{20} ЭКЗ_2 + \frac{10}{20} O_{\text{пром}} \right)$$
$$\text{Округление}(x) = [x]$$

1.1.3 Коллоквиум

1 балл Простая задача (например, продифференцировать функцию)

Основная часть

На подготовку к основной части дается 40 минут

1 балл Формулировка теоремы без доказательства или определение некоторого понятия

2 балла Решить задачу

4 балла Доказательство теоремы

2 балла Дополнительные вопросы

1.1.4 Экзамен

То же что и коллоквиум, за исключением первой части (один балл с нее идет в второе задание)

1.1.5 Литература

1. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа: учеб. пособие для вузов, М.: МФТИ, 2000.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, СПб.: Лань, 2001.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов, М.: АСТ: Астрель, 2004.
4. Л. Д. Кудрявцев [и др.]; Под ред. Л. Д. Кудрявцева. Сборник задач по математическому анализу: в 3 т.
5. Зорич, В. А. Математический анализ: учебник, М.: МЦНМО, 2015.

1.2 Теория пределов и непрерывных функций одной переменной

1.2.1 Понятие действительного числа

(а) *Натуральные числа*

$$\mathbb{N} = 1, 2, \dots, n, \dots$$
$$+, \times$$

(б) *Целые числа*

$$\mathbb{Z} = -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$
$$+, -, \times$$

Группа - множество, в котором определена операция, такая что,

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, \quad \exists c \in \mathbb{Z} \\ c = a + b$$

Свойства групп:

1. $(a + b) + d = a + (b + d)$
2. $\exists 0 : a + 0 = a$
3. $\forall a \exists (-a)$
 $a + (-a) = 0$
4. $a + b = b + a$ — Коммутативная или абелевая

(с) *Рациональные числа*

$$\mathbb{Q} = \frac{m}{n} \\ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$$

Операция сложения для рациональных чисел:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + nk}{nl}$$

Пусть есть два числа, $\forall a \in \mathbb{Q}, \forall b \in \mathbb{Q}$, для этих чисел определена операция умножения

5. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
6. $\exists 1 : a \times 1 = a$
7. $\forall a \exists a^{-1}$
 $a \times a^{-1} = 1$
8. $a \times b = b \times a$
9. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Таким образом рациональные числа — это группа по сложению и за исключением нуля по умножению. Если выполняются все 9 свойств — соответствующее множество называется полем. Возникает вопрос, достаточно ли рациональных цифр?

Вспомним теорему Пифагора — $a^2 + b^2 = c^2$. Допустим, $a = 1, b = 1$, тогда $c^2 = 2$. Для нас важно то, что это число c не может быть представлено никакой рациональной дробью, давайте проверим это.

Предположим что есть $c = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$. Можно считать что дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

$$c^2 = 2 \implies \frac{n^2}{m^2} = 2 \implies m^2 = 2n^2$$

m — четное, $m = 2p$

$$4p^2 = 2n^2 \implies n^2 = 2p^2$$

n — тоже четное, $n = 2k$

Тогда поделим n на m : $\frac{m}{n} = \frac{2p}{2k}$, дробь сократима, пришли к противоречию

Получается, множества рациональных чисел не хватает чтобы взять корень из двойки.

И вот теперь, мы сделаем следующее построение, позволяющее ввести понятие вещественных чисел, и вообще говоря, измерить любой отрезок на прямой

Будет ли это множество полем? Будет, и более того, это множество позволит нам решить проблему измерения любого отрезка. А есть ли какие либо поля, которые содержат в себе поле вещественных чисел? Есть, таким полем является поле комплексных чисел. Все ли свойства вещественных чисел имеют место для комплексных чисел? Нет, вещественные числа всегда можно сравнивать.

$\forall a, b$

$$1. \begin{cases} a < b \\ b < a \\ a = b \end{cases}$$

$$2. a < b, b < c \implies a < c$$

$$3. a < b \implies \forall c : a + c < b + c$$

$$4. \forall c > 0 : a * c < b * c$$

2 Семинар 1

2.1 Математическая индукция

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

Если 1) верно, 2) $\forall n : P_n \rightarrow P_{n+1} \implies P_n$ верно $\forall n$

$$P_1 : 3|1^1 - 1 \text{ верно}$$

$$P_n : 3|n^3 - n$$

$$P_{n+1} : 3|(n+1)^3 - (n+1) ?$$

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3(n^2 + n) \end{aligned}$$

Задача 1. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$P_1 : 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$$

Шаг: P_n верно, тогда

$$\begin{aligned} P_{n+1} : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

2.2 Неравенство бернулли

Задача 2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1; +\infty) \implies (1+x)^n \geq 1+nx$

$$P_1 : (1+x) \geq 1+1x$$

$$\begin{aligned} P_n : (1+x)^n \geq 1+nx &\xrightarrow{(1+x) \geq 0} (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) \\ &(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

Задача 3. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-2; +\infty) \implies (1+x)^n \geq 1+nx$

$$P_1 : 1+x \geq 1+1x$$

$$P_n : (1+x)^n \geq 1+nx$$

$$\underbrace{(1+x)^{n+1}} + \underbrace{(1+x)^n} = (1+x)^n \underbrace{(1+x+1)}_{x+2 \geq 0} \geq (1+nx)(1+x+1) = \underbrace{1 + (n+1)x}_{\geq 0} + \underbrace{1 + nx(1+x)}_{\geq 0}$$

$$\text{Для } x \in [-2; -1) \text{ выполняется } (1+x)^n \leq 1 \leq 1 + \underbrace{nx(1+x)}_{>0}$$

2.3 Биномиальные коэффициенты

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

2.3.1 Бином Ньютона

Задача 4. Доказать для $a, b \neq 0$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$
$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Пусть $x = \frac{a}{b}, x \in R$

$$\frac{(a+b)^n}{b^n} = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^k}{b^k} \implies$$
$$\implies (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Задача 5. Доказать $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$

Докажем по индукции

$$P_1 : (1+x)^1 = 1+x = \binom{1}{0}1x^0 + \binom{1}{1}x^1$$

$$P_{n+1} : (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = (1+x)^n + (1+x)^n x$$
$$= x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n +$$
$$+ \binom{n}{0}x^1 + \binom{n}{1}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^n + x^{n+1}$$
$$= \binom{n+1}{0}x^0 + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right)x^1 + \left(\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right)x^2 + \dots + \left(\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right)x^n + x^{n+1}$$
$$= \binom{n+1}{0}x^0 + \binom{n+1}{1}x^1 + \binom{n+1}{2}x^2 + \dots + \binom{n+1}{n}x^n + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}$$

Задача 6. Доказать $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1 = 2^n$$
$$x=1 \implies 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k$$

2.4 Сумма геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^n aq^{k-1} = S_n$$

$$\begin{aligned}
S_n q &= \sum_{k=1}^n a q^k = S_n - a + a q^n \\
&= \underbrace{a + a q + a q^2 + \dots + a q^{n-1}}_{S_n} + a q^n - a \implies \\
\implies (q-1) S_n &= a q^n - a \implies \\
\implies S_n &= \begin{cases} a \frac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ n a, & q = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

2.5 Рациональные числа с двумя десятичными представлениями

$$\begin{aligned}
\pi &= 3.1415\dots \\
\frac{1}{3} &= 0.3333\dots \\
1 &= 1.00000\dots 0\dots = 0.9999999\dots \\
\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots &= \frac{9}{10} (1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots) = \frac{9}{10} \frac{10}{9} = 1
\end{aligned}$$

3 Понятие предела числовой последовательности

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1, x_2 = \frac{1}{2}, \dots, x_n = \frac{1}{n}, \dots \\
\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 0
\end{aligned}$$

Определение 1. $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N, \forall n > N \implies |x_n - a| < \epsilon$
 $(a - \epsilon, a + \epsilon) - \epsilon$ окрестность точки a .

Определение 2. x_n — называется бесконечно малым, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Теорема 1. $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies x_n = a + \alpha_n$, α_n — бесконечно малая последовательность

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \implies |x_n - a| < \epsilon_n$$

$$\alpha_n = x_n - a$$

$$x_n = a + \alpha_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

Определение 3. $\{x_n\}$ (последовательность) называется ограниченной, если $\exists M > 0 \quad \forall n \implies |x_n| \leq M$

Определение 4. $\{x_n\}$ (последовательность) называется неограниченной, если $\forall M > 0 \quad \exists n_0 \implies |x_n| > M$

Определение 5. $\{x_n\}$ (последовательность) называется бесконечно большой, если $\forall M > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \implies |x_n| > M$

Утверждение. Сходящиеся последовательности ограничены

Утверждение. $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies |x_n| \leq M$

4 Семинар 2

4.1 Числовые последовательности

$$n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N}$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto f(n)$$

4.1.1 Общие понятия

1. Ограничена/не ограничена — $\exists M: \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \leq M$

2. \inf и \sup

• $s = \sup$ для $\{a_n\}_1^\infty$, если

(a) $\forall n: a_n \leq s$

(b) $\forall s' < s \exists n \in \mathbb{N} \implies s' < a_n$

• $i = \inf$ для $\{a_n\}_1^\infty$, если

- (a) $\forall n : a_n \geq i$
 (b) $\forall i' > i \exists n \in \mathbb{N} \implies a_n < i'$

3. Монотонность

4. Существование предела: число a называется пределом последовательности $\{a_n\}_1^\infty$, если
 $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies |a_n - A| < \epsilon$
5. $\{a_n\}$ бесконечно большая, если $\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies a_n > E$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
6. $\{a_n\}$ бесконечно малая, если $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N : |a_n - A| < \epsilon$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
7. Монотонно возрастающая ограниченная сверху ? (Сходится к \sup)

4.2 Примеры

1. $\{(-1)^n\}$

$$-1 \leq a_n \leq 1 (\forall n)$$

$$\inf\{a_n\} = -1$$

$$\sup\{a_n\} = 1$$

Не монотонна

Нет предела

2. $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} > 0$

Монотонность:

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = \frac{n+3-(n+2)}{n+2-(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$$

Предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right) = 0$$

Является бесконечно малой (предел равен 0)

3. $\{\frac{n^2}{2^n}\}_n^\infty = \{\frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{9}{8}, \frac{16}{16}, \frac{25}{32}, \dots\}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 1 \leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 2 \leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \sqrt{2}$$

Монотонно убывает

Предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{\lambda^n} = 0, \forall k \in \mathbb{N}, \lambda > 1$$

(Экспонента растет принципиально быстрее чем любой многочлен)

Доказательство.

$$k = 1$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n^2}{4}$$

$$n-1 \geq \frac{n}{2} \quad (\forall n \geq 2)$$

$$\lambda^n = (1 + \underbrace{\lambda - 1}_{>0})^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\lambda - 1)^i \stackrel{i=2}{\geq} \binom{n}{2} (\lambda - 1)^2 \stackrel{n \geq 2}{\geq} \underbrace{\frac{(\lambda - 1)^2}{4}}_{\text{константа}} \cdot n^2$$

$$\lambda^n \geq \frac{(\lambda - 1)^2}{4} \cdot n^2$$

$$\frac{n}{\lambda^n} \leq \frac{n}{\frac{(\lambda - 1)^2}{4}} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{4}{(\lambda - 1)^2} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

■

$$4. \left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$$

$$n \geq 4$$

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{8}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

$$5. a_n < b_n \quad \forall n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

6.

Теорема 2. $\forall n : a_n \leq b_n \leq c_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$7. \{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} \rightarrow 1$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3^2]{3} \cdot \sqrt[3^3]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[3^n]{3} \right) = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3^2}} \cdot \dots \cdot 3^{\frac{1}{3^n}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}} = 3^{\frac{1 \cdot (1 - \frac{1}{3^n})}{3 \cdot (1 - \frac{1}{3})}} = 3^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}}} = 3^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}} = 3^{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

5 Лекция 4

Утверждение. $\{a_n\}$ ограничена сверху.

$$a = \lim x_n$$

$$\exists M : \forall n \implies x_n \leq M$$

Доказательство. Пусть $a > M$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \forall \epsilon > \exists N : \forall n > N \implies |x_n - a| < \epsilon$$

Распишем модуль $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$

Наше предположение: $a > M$

Отсюда сразу следует, что $a - \epsilon < x_n \leq M$

Возьмем ϵ такое, что $a - \epsilon > M$, например $\epsilon = \frac{a-M}{2}$

Тогда, начиная с некоторого N все точки после x_N будут лежать в ϵ -окрестности точки a .

$$\forall n > N \implies x_n \geq M$$

Утверждение. $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ Тогда, $a = b$.

Доказательство. Допустим $a < b$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 \implies |x_n - a| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 \implies |x_n - b| < \epsilon$$

Выбираем $N = \max(N_1, N_2)$

Тогда, для N будут справедливы оба неравенства.

Например, пусть $\epsilon = \frac{b-a}{2}$, тогда с одной стороны

$$\forall n > N \implies x_n < a + \epsilon < \frac{a+b}{2}.$$

а с другой стороны

$$\forall n > N \implies x_n > b - \epsilon > \frac{a+b}{2}.$$

Утверждение. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = a \cdot b$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

Доказательство.

1. Если есть бесконечно малые последовательности, то их сумма тоже бесконечно малая.

α_n – бесконечно малая

β_n – бесконечно малая

$\alpha_n + \beta_n$ – бесконечно малая

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 - \forall \epsilon > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 \implies |\alpha_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0 - \forall \epsilon > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 \implies |\beta_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n > N \implies |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \epsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a - \forall \frac{\epsilon}{C} > 0 \exists N : \forall n > N \implies |x_n - a| < C \cdot \frac{\epsilon}{C} = \epsilon$$

$\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая

$\{z_n\}$ – ограниченная ($\exists M > 0 : \forall n \implies |z_n| \leq M$)

$\{\gamma_n\} = \{\alpha_n \cdot z_n\}$ – бесконечно малая

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n > N \implies |\alpha_n| < \epsilon$$

$$|\gamma_n| = |\alpha_n z_n| = |z_n| |\alpha_n| \leq M \cdot \epsilon$$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies x_n = a + \alpha_n$$

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \implies y_n = b + \beta_n$$

$$x_n + y_n = a + b + (\alpha_n + \beta_n)$$

$\mu_n = \alpha_n + \beta_n$ – бесконечно малая

2. $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = a \cdot b + (\alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a + \alpha_n \cdot \beta_n) = a \cdot b + \mu_n$

$$\mu_n = \alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a + \alpha_n \cdot \beta_n$$

3. $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} = \frac{a}{b} + \underbrace{\frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b}}_{\mu_n}$

$$\mu_n = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{a \cdot b + \alpha_n \cdot b - a \cdot b - a \cdot \beta_n}{b(b + \beta_n)} = \frac{\alpha_n \cdot b - a \cdot \beta_n}{b(b + \beta_n)}$$

$$|b + \beta_n| = |b - (-\beta_n)| \geq ||b| - |\beta_n||$$

β_n – бесконечно малая

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n > N \implies |\beta_n| < \epsilon$$

$$\epsilon = \frac{|b|}{2}$$

$$|b + \beta_n| > \frac{|b|}{2}$$

$$\frac{1}{|b + \beta_n|} < \frac{2}{|b|}$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \mu_n, \mu_n \text{ – бесконечно малая}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

■

Теорема 3. *Монотонная ограниченная последовательность сходится.*

1. $\forall n \implies x_n < x_{n+1}$

2. $\exists M : \forall n \implies x_n \leq M$

Доказательство. 1. $\{x_n\}$ ограничено сверху

$$\exists M = \sup\{x_n\}$$

$$M \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\forall n \implies x_n \leq M$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{x}_n \in \{x_n\} : \bar{x}_n > M - \epsilon$$

$$\bar{x}_n = x_{n_0} > M - \epsilon$$

■

6 Семинар 1

6.1 Найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?.$$

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = \frac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1} = \frac{n^3(s - \frac{3}{n})}{n^3(1 + \frac{1}{n^3})} = \frac{s - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{s}{1}.$$

2.

$$a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{1}.$$

3.

$$a_n = \sin(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}) = \sin \frac{1}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} \rightarrow 0.$$

4.

$$a_n = \frac{2^{\frac{n}{2}} + (n+1)!}{n(3^n + n!)} \rightarrow ?.$$

$$\frac{(n+1)!(\frac{2^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} + 1)}{n \cdot n!(\frac{3^n}{n!} + 1)} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{1} = ?.$$

5.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \implies \sqrt[n]{n^k} \rightarrow 1.$$

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n)}{n}} \rightarrow 1.$$

$$(n!)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n!)}{n}}.$$

6.

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n^3} + \sqrt[n]{7}}{3 \cdot \sqrt[n]{n^2} + \sqrt[n]{3n}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

7.

$$a_n = \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{9^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{(3^{\frac{1}{n}} - 1)(3^{\frac{1}{n}} + 1)} = \frac{1}{3^{\frac{1}{n}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

8.

$$a_n = \sqrt[n]{3^n + 7^n} = 7 \sqrt[n]{1 + \frac{3^n}{7^n}} = 7 \cdot e^{\frac{\ln(1 + (\frac{3}{7})^n)}{n}} \rightarrow 7.$$

9.

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n + 5^n} = 5 \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n} \rightarrow 5.$$

10.

$$a_n = \frac{3n^2 - 7n}{1 + 2 + \dots + n} = \frac{n^2(3 - \frac{7}{n})}{n^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n})} \rightarrow \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6.$$

11.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$1 \leq a_n \leq 1$$

$$a_n \rightarrow 1.$$

12.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \quad \forall n \geq 1.$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2}$$

Предположим, что предел есть

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \implies a = \pm\sqrt{2}.$$

Осталось доказать существование предела

Докажем, что $\{a_n\}$ ограничена и монотонна.

Доказательство ограниченности:

Гипотеза: $a_n \geq \sqrt{2}$

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} - \sqrt{2} = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}a_n) = \frac{1}{2a_n}(a_n - \sqrt{2})^2 \geq 0.$$

Либо $(a + b \geq 2\sqrt{a \cdot b})$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geq \frac{1}{2}2\sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}.$$

Теперь монотонность:

$$0 \leq a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2a_n}(\overbrace{a_n^2 - 2}^{\geq 0}).$$

13.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{1}{n} = ?.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{11}{n}\right)^n.$$

$$\left(1 + \frac{11}{n}\right)^{\frac{11}{n} \cdot 11}.$$

6.2 Разные штуки

$$1. \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a \xrightarrow{?} f(a_n) \rightarrow f(a)$$

$$a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 = a$$

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(a_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f(a) = f(0) = 0$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\lambda^n} = 0$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n}{(n!)^\alpha} = 0$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \alpha > 0$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln(n))^\beta}{n^2}$$

$$\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1$$

7 Семинар 4

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)^{g(n)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(f(n)) \cdot g(n))}.$$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2-2}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n^2-2}\right)^{(n^2-2) \cdot \frac{n^2}{n^2-2}} \rightarrow e.$$

$$n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x \in \overbrace{(a - \delta_\epsilon, a + \delta_\epsilon) \setminus \{a\}}^{U_{\delta_\epsilon}(a)} \implies |f(x) - A| < \epsilon.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \rightarrow \frac{-1}{-1} 1.$$

$$f(x) \rightarrow a, g(x) \rightarrow b, x \rightarrow x_0 \implies f(x)g(x) \rightarrow ab, \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{a}{b} (b \neq 0).$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x})}{x^2(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)} \rightarrow \frac{2}{3}.$$

5. $m, n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{(x-1) \overbrace{(1+x+x^2+\dots+x^{m-1})}^m}{(x-1) \underbrace{(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})}_n} \rightarrow \frac{m}{n}.$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \dots + a^0b^{n-1}).$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)}^{P(x)} - 1}{x}.$$

Свободный член $P(x) - 1$ (a_0).

Коэффициент перед $x - 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 2x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4x = 10x$ (a_1).

$$= \frac{x \cdot (10 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 10.$$

7. $m, n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{\sqrt[n]{t^{mn}} - 1}{\sqrt[n]{t^{mn}} - 1} = \frac{t^n - 1}{t^m - 1} \rightarrow \frac{n}{m}.$$

$$x = t^{mn} \rightarrow 1.$$

8. Золотые лимиты.

$$\frac{\sin(\lambda x)}{x} = \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda x} \cdot \frac{\lambda x}{x} = \lambda.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(8x)}{5x^2} = \frac{1 - \cos 8x}{(8x)^2} \cdot \frac{(8x)^2}{5x^2} = \frac{8^2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{32}{5}.$$

10.

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \frac{2 \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \sin \left(\frac{x-a}{2} \right)}{x - a} \right\} = \cos a.$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right).$$

11.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin ax}{\operatorname{arctg} bx} = \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\operatorname{arctg} bx} \cdot \frac{ax}{bx} \right\} = \frac{a}{b}.$$

12.

$$x = 1 + t, \quad t = 1 - x.$$

$$x \rightarrow 1 \implies t \rightarrow 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{m}{1-(1+t)^m} - \frac{n}{1-(1+t)^n} \right) = \dots = \frac{m-n}{2}.$$

$$1 - (1+t)^m = 1 - \left(1 + \binom{m}{1}t + \binom{m}{2}t^2 + \dots \right) = -\binom{m}{1}t - \binom{m}{2}t^2 - \dots$$

$$1 - (1+t)^n = -\binom{n}{1}t - \binom{n}{2}t^2 - \dots$$

8 Семинар 5

8.1 Золотые пределы

1.

$$\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1, x \rightarrow 0.$$

2.

$$\frac{(1+bx)^2 - 1}{x} \rightarrow \alpha b, x \rightarrow 0.$$

3.

$$\frac{a^x - 1}{x} \rightarrow \ln(a) (a > 0), x \rightarrow 0.$$

4.

$$\left(1 + \frac{\alpha}{x} \right)^x \rightarrow e^\alpha, x \rightarrow \infty.$$

8.2 Дaaaaa

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - \cos(x) \cos(2x)}{1 - \cos(x)} = \frac{1 - \cos(x) \cos(2x) - \cos(2x) + \cos(2x)}{1 - \cos(x)} = \frac{\cos(2x)(1 - \cos x)}{1 - \cos(x)} + \frac{1 - \cos(2x)}{1 - \cos(x)} \right. \\ \left. = \cos(2x) + \frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2} \cdot (2x)^2 \cdot \frac{x^2}{1 - \cos(x)} \frac{1}{x} \right\} \rightarrow 1 + 4 = 5.\end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ x \cdot \operatorname{ctg}(5x) = \frac{x}{\operatorname{tg}(5x)} = \frac{5x}{\operatorname{tg}(5x)} \frac{1}{5} \right\} \rightarrow \frac{1}{5}.$$

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^n} \\ x = 1+t. \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t(1-\sqrt{1+t})(1-\sqrt[3]{1+t}) \dots (1-\sqrt[n]{1+t})}{(-t)^n} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t} \cdot \frac{\sqrt[3]{1+t}-1}{t} \dots \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t} \\ \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+3x^4)^{\frac{1}{\sin(x)^4}} = (1+3x^4)^{\frac{1}{3x^4} \cdot \frac{3x^4}{(\sin x)^4}} \right\} \rightarrow e^{3 \cdot 1^4} = e^3.$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x} + \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \right\} \rightarrow 1 \cdot 1^{-2} + \frac{1}{2} \cdot 1^{-2} = \frac{3}{2}.$$

6. $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \cos(x^\alpha)^{\frac{1}{x}} = \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{x^\alpha}{2} \right) \right)^{\frac{1}{x}} = \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{x^\alpha}{2} \right) \right)^{\frac{1}{-2 \sin^2 \left(\frac{x^\alpha}{2} \right)} \cdot \frac{-2 \sin^2 \left(\frac{x^\alpha}{2} \right)}{x}} \right\} \rightarrow e^{1(-2) \cdot \frac{1}{4}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin^2 \left(\frac{x^\alpha}{2} \right)}{x} = \left(\frac{\sin^2 \frac{x^\alpha}{2}}{\frac{x^\alpha}{2}} \right)^2 \cdot \frac{\left(\frac{x^\alpha}{2} \right)^2}{x} \right\} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} x^{2\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \alpha > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \alpha = \frac{1}{2} \\ \neg \exists & a \in (0, \frac{1}{2}) \end{cases}.$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3+x}}{\sin(2x)} = \sqrt{3} \cdot \frac{1 - \sqrt{1+\frac{x}{3}}}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)} \cdot \frac{\frac{x}{3}}{2x} \right\} = \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x.$$