ДЗ к Семинар 1

1. Используя метод математической индукции доказать следующее

   a) $6|n(2n^2-3n+1)$ для любого $n\in\mathbb{N}$
   запись $a|b$ читается "a делит (нацело) b"

   b) $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3+2^3+\dots+(n-1)^3+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
   обратите внимание, что $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$

   c) $\sqrt{n} < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ для любого $n\in\mathbb{N}$
   hint: $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

2. Разобраться в следующем доказательстве

   прежде чем читать доказательство, можно попробовать доказать самостоятельно, но это не просто

   Пусть $a_1,a_2,\dots,a_n$ – произвольные положительные числа. Тогда, для любого $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n} \qquad (\star)$$

   т.е. среднее арифметическое не меньше среднего геометрического

   Доказательство. $\sqrt{a_1\cdot a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2}$ // действительно, $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geq 0$ //
   применим этот результат дважды:

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \leq \frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2} \leq \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

   Пользуясь индукцией мы получаем, что

$$(a_1a_2\dots a_{2^k})^{\frac{1}{2^k}} \leq \frac{a_1+\dots+a_{2^k}}{2^k} \text{ для } \forall k \qquad (\star\star)$$

   [Проверьте эту индукцию аккуратно!]

   Заметим, что мы доказали $(\star)$ не для всех $n\in\mathbb{N}$, а только для степеней двойки (т.е. $P_1,P_2,P_4,P_8,\dots$)

   А как доказать для остальных $n\in\mathbb{N}$?

   На самом деле все уже доказано, просто надо понять почему.

   Пусть $n\in\mathbb{N}$ – произвольно и $a_1,a_2,\dots,a_n$ наши числа $\implies$ существует такое $k\in\mathbb{N}$, что $n\leq 2^k$.

   Положим $b_j = \begin{cases} a_i, & \text{если } i\leq n \\ A, & \text{если } n<i\leq 2^k \end{cases}$, где $A=\frac{a_1+\dots+a_n}{n}$

   Применим $(\star\star)$ к $b_1,b_2,\dots,b_{2^k}$ $\implies$ $\left(a_1a_2\dots a_nA^{2^k-n}\right)^{\frac{1}{2^k}} \leq \frac{\overbrace{a_1+\dots+a_n}^{=nA}+(2^k-n)A}{2^k} = A$
   $\implies (a_1\dots a_n)^{\frac{1}{2^k}} \leq A^{\frac{n}{2^k}} \implies (\star)$ ▲

3. Полезно знать следующий трюк

   Как найти сумму

$$S = 1+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\dots+n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \ ?$$

   Можно сделать так:

   · рассмотрим функцию

$$f(x) = x+x^2+\dots+x^n \implies$$
$$\implies f'(x) = 1+2x+\dots+nx^{n-1}$$

   / производная /

   Легко видеть, что $S=f'\left(\frac{1}{3}\right)$

Но $f(x) = x + x^2 + \dots + x^n = x(\underbrace{1 + \dots + x^{n-1}}_{\text{сумма геометрической прогрессии}}) = x\frac{1-x^n}{1-x}$

Тогда $f'\left(\frac{1}{3}\right) = (x\frac{1-x^n}{1-x})' = \frac{(nx-n-1)x^n+1}{(x-1)^2} \implies f'\left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{3^{-n+1}(3^{n+1}-2n-3)}{4} = S}$

Если есть сомнения в корректности этого метода, то полученную формулу можно проверить по индукции