

# Лекции по математическому анализу

Slava Boben

September 5, 2019

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1</b>	<b>2</b>
1.1	Общая информация . . . . .	2
1.1.1	Контакты . . . . .	2
1.1.2	Оценка . . . . .	2
1.1.3	Коллоквиум . . . . .	2
1.1.4	Экзамен . . . . .	2
1.1.5	Литература . . . . .	2
1.2	Теория пределов и непрерывных функций одной переменной . . . . .	2
1.2.1	Понятие действительного числа . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Семинар 1</b>	<b>4</b>
2.1	Математическая индукция . . . . .	4
2.2	Неравенство бернулли . . . . .	4
2.3	Биномиальные коэффициенты . . . . .	5
2.3.1	Бином Ньютона . . . . .	5
2.4	Сумма геометрической прогрессии . . . . .	5
2.5	Рациональные числа с двумя десятичными представлениями . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Понятие предела числовой последовательности</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Семинар 2</b>	<b>6</b>
4.1	Числовые последовательности . . . . .	6
4.1.1	Общие понятия . . . . .	6
4.2	Примеры . . . . .	7

# 1 Лекция 1

## 1.1 Общая информация

### 1.1.1 Контакты

Делицын Андрей Леонидович

- delitsyn@mail.ru
- adelitsyn@hse.ru

### 1.1.2 Оценка

$$O_{\text{пром}} = \text{Округление} \left( \frac{1}{10} ДЗ_1 + \frac{1}{10} КР_1 + \frac{3}{10} КК_1 + \frac{5}{10} ЭКЗ_1 \right)$$
$$O_{\text{итог}} = \text{Округление} \left( \frac{1}{20} ДЗ_2 + \frac{1}{20} КР_2 + \frac{3}{20} КК_2 + \frac{5}{20} ЭКЗ_2 + \frac{10}{20} O_{\text{пром}} \right)$$
$$\text{Округление}(x) = [x]$$

### 1.1.3 Коллоквиум

**1 балл** Простая задача (например, продифференцировать функцию)

Основная часть

На подготовку к основной части дается 40 минут

**1 балл** Формулировка теоремы без доказательства или определение некоторого понятия

**2 балла** Решить задачу

**4 балла** Доказательство теоремы

**2 балла** Дополнительные вопросы

### 1.1.4 Экзамен

То же что и коллоквиум, за исключением первой части (один балл с нее идет в второе задание)

### 1.1.5 Литература

1. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа: учеб. пособие для вузов, М.: МФТИ, 2000.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, СПб.: Лань, 2001.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов, М.: АСТ: Астрель, 2004.
4. Л. Д. Кудрявцев [и др.]; Под ред. Л. Д. Кудрявцева. Сборник задач по математическому анализу: в 3 т.
5. Зорич, В. А. Математический анализ: учебник, М.: МЦНМО, 2015.

## 1.2 Теория пределов и непрерывных функций одной переменной

### 1.2.1 Понятие действительного числа

(а) *Натуральные числа*

$$\mathbb{N} = 1, 2, \dots, n, \dots$$
$$+, \times$$

(б) *Целые числа*

$$\mathbb{Z} = -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$
$$+, -, \times$$

Группа - множество, в котором определена операция, такая что,

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, \quad \exists c \in \mathbb{Z} \\ c = a + b$$

Свойства групп:

1.  $(a + b) + d = a + (b + d)$
2.  $\exists 0 : a + 0 = a$
3.  $\forall a \exists (-a)$   
 $a + (-a) = 0$
4.  $a + b = b + a$  — Коммутативная или абелева

(с) *Рациональные числа*

$$\mathbb{Q} = \frac{m}{n} \\ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$$

Операция сложения для рациональных чисел:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + nk}{nl}$$

Пусть есть два числа,  $\forall a \in \mathbb{Q}, \forall b \in \mathbb{Q}$ , для этих чисел определена операция умножения

5.  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
6.  $\exists 1 : a \times 1 = a$
7.  $\forall a \exists a^{-1}$   
 $a \times a^{-1} = 1$
8.  $a \times b = b \times a$
9.  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Таким образом рациональные числа — это группа по сложению и за исключением нуля по умножению. Если выполняются все 9 свойств — соответствующее множество называется полем. Возникает вопрос, достаточно ли рациональных цифр?

Вспомним теорему Пифагора —  $a^2 + b^2 = c^2$ . Допустим,  $a = 1, b = 1$ , тогда  $c^2 = 2$ . Для нас важно то, что это число  $c$  не может быть представлено никакой рациональной дробью, давайте проверим это.

Предположим что есть  $c = \frac{m}{n}$ , где  $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$ . Можно считать что дробь  $\frac{m}{n}$  несократима.

$$c^2 = 2 \implies \frac{n^2}{m^2} = 2 \implies m^2 = 2n^2$$

$m$  — четное,  $m = 2p$

$$4p^2 = 2n^2 \implies n^2 = 2p^2$$

$n$  — тоже четное,  $n = 2k$

Тогда поделим  $n$  на  $m$ :  $\frac{m}{n} = \frac{2p}{2k}$ , дробь сократима, пришли к противоречию

Получается, множества рациональных чисел не хватает чтобы взять корень из двойки.

И вот теперь, мы сделаем следующее построение, позволяющее ввести понятие вещественных чисел, и вообще говоря, измерить любой отрезок на прямой

Будет ли это множество полем? Будет, и более того, это множество позволит нам решить проблему измерения любого отрезка. А есть ли какие либо поля, которые содержат в себе поле вещественных чисел? Есть, таким полем является поле комплексных чисел. Все ли свойства вещественных чисел имеют место для комплексных чисел? Нет, вещественные числа всегда можно сравнивать.

$\forall a, b$

$$1. \begin{cases} a < b \\ b < a \\ a = b \end{cases}$$

$$2. a < b, b < c \implies a < c$$

$$3. a < b \implies \forall c : a + c < b + c$$

$$4. \forall c > 0 : a * c < b * c$$

## 2 Семинар 1

### 2.1 Математическая индукция

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

Если 1) верно, 2)  $\forall n : P_n \rightarrow P_{n+1} \implies P_n$  верно  $\forall n$

$$P_1 : 3|1^1 - 1 \text{ верно}$$

$$P_n : 3|n^3 - n$$

$$P_{n+1} : 3|(n+1)^3 - (n+1) ?$$

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3(n^2 + n) \end{aligned}$$

**Задача 1.**  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$P_1 : 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$$

Шаг:  $P_n$  верно, тогда

$$\begin{aligned} P_{n+1} : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

### 2.2 Неравенство бернулли

**Задача 2.**  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1; +\infty) \implies (1+x)^n \geq 1+nx$

$$P_1 : (1+x) \geq 1+1x$$

$$\begin{aligned} P_n : (1+x)^n \geq 1+nx &\xrightarrow{(1+x) \geq 0} (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) \\ &(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

**Задача 3.**  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-2; +\infty) \implies (1+x)^n \geq 1+nx$

$$P_1 : 1+x \geq 1+1x$$

$$P_n : (1+x)^n \geq 1+nx$$

$$\underbrace{(1+x)^{n+1}} + \underbrace{(1+x)^n} = (1+x)^n \underbrace{(1+x+1)}_{x+2 \geq 0} \geq (1+nx)(1+x+1) = \underbrace{1 + (n+1)x}_{\geq 0} + \underbrace{1 + nx(1+x)}_{\geq 0}$$

Для  $x \in [-2; -1)$  выполняется  $(1+x)^n \leq 1 \leq 1 + \underbrace{nx(1+x)}_{>0}$

## 2.3 Биномиальные коэффициенты

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

### 2.3.1 Бином Ньютона

**Задача 4.** Доказать для  $a, b \neq 0$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$
$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Пусть  $x = \frac{a}{b}, x \in R$

$$\frac{(a+b)^n}{b^n} = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^k}{b^k} \implies$$
$$\implies (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**Задача 5.** Доказать  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$

Докажем по индукции

$$P_1 : (1+x)^1 = 1+x = \binom{1}{0}1x^0 + \binom{1}{1}x^1$$

$$P_{n+1} : (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = (1+x)^n + (1+x)^n x$$
$$= x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n +$$
$$+ \binom{n}{0}x^1 + \binom{n}{1}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^n + x^{n+1}$$
$$= \binom{n+1}{0}x^0 + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right)x^1 + \left(\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right)x^2 + \dots + \left(\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right)x^n + x^{n+1}$$
$$= \binom{n+1}{0}x^0 + \binom{n+1}{1}x^1 + \binom{n+1}{2}x^2 + \dots + \binom{n+1}{n}x^n + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}$$

**Задача 6.** Доказать  $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1 = 2^n$$
$$x=1 \implies 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k$$

## 2.4 Сумма геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^n aq^{k-1} = S_n$$

$$\begin{aligned}
S_n q &= \sum_{k=1}^n a q^k = S_n - a + a q^n \\
&= \underbrace{a + a q + a q^2 + \dots + a q^{n-1}}_{S_n} + a q^n - a \implies \\
\implies (q-1) S_n &= a q^n - a \implies \\
\implies S_n &= \begin{cases} a \frac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ n a, & q = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

## 2.5 Рациональные числа с двумя десятичными представлениями

$$\begin{aligned}
\pi &= 3.1415\dots \\
\frac{1}{3} &= 0.3333\dots \\
1 &= 1.00000\dots 0\dots = 0.9999999\dots \\
\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots &= \frac{9}{10} (1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots) = \frac{9}{10} \frac{10}{9} = 1
\end{aligned}$$

## 3 Понятие предела числовой последовательности

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1, x_2 = \frac{1}{2}, \dots, x_n = \frac{1}{n}, \dots \\
\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 0
\end{aligned}$$

**Определение 1.**  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N, \forall n > N \implies |x_n - a| < \epsilon$   
 $(a - \epsilon, a + \epsilon) - \epsilon$  окрестность точки  $a$ .

**Определение 2.**  $x_n$  — называется бесконечно малым, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

**Теорема 1.**  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies x_n = a + \alpha_n$ ,  $\alpha_n$  — бесконечно малая последовательность  
 $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \implies |x_n - a| < \epsilon_n$   
 $\alpha_n = x_n - a$   
 $x_n = a + \alpha_n$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

**Определение 3.**  $\{x_n\}$  (последовательность) называется ограниченной, если  $\exists M > 0 \quad \forall n \implies |x_n| \leq M$

**Определение 4.**  $\{x_n\}$  (последовательность) называется неограниченной, если  $\forall M > 0 \quad \exists n_0 \implies |x_n| > M$

**Определение 5.**  $\{x_n\}$  (последовательность) называется бесконечно большой, если  $\forall M > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \implies |x_n| > M$

*Утверждение.* Сходящиеся последовательности ограничены

*Утверждение.*  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies |x_n| \leq M$

## 4 Семинар 2

### 4.1 Числовые последовательности

$$\begin{aligned}
n &\mapsto a_n, n \in \mathbb{N} \\
f &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\
n &\mapsto f(n)
\end{aligned}$$

#### 4.1.1 Общие понятия

1. Ограничена/не ограничена —  $\exists M : \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \leq M$

2.  $\inf$  и  $\sup$

- $s = \sup$  для  $\{a_n\}_1^\infty$ , если
  - (a)  $\forall n : a_n \leq s$
  - (b)  $\forall s' < s \exists n \in \mathbb{N} \implies s' < a_n$
- $i = \inf$  для  $\{a_n\}_1^\infty$ , если

- (a)  $\forall n : a_n \geq i$   
 (b)  $\forall i' > i \exists n \in \mathbb{N} \implies a_n < i'$

### 3. Монотонность

4. Существование предела: число  $a$  называется пределом последовательности  $\{a_n\}_1^\infty$ , если  
 $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies |a_n - A| < \epsilon$
5.  $\{a_n\}$  бесконечно большая, если  $\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies a_n > E$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
6.  $\{a_n\}$  бесконечно малая, если  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N : |a_n - A| < \epsilon$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
7. Монотонно возрастающая ограниченная сверху ? (Сходится к  $\sup$ )

## 4.2 Примеры

1.  $\{(-1)^n\}$

$$-1 \leq a_n \leq 1 (\forall n)$$

$$\inf\{a_n\} = -1$$

$$\sup\{a_n\} = 1$$

Не монотонна

Нет предела

2.  $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} > 0$

Монотонность:

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = \frac{n+3-(n+2)}{n+2-(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$$

Предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right) = 0$$

Является бесконечно малой (предел равен 0)

3.  $\{\frac{n^2}{2^n}\}_n^\infty = \{\frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{9}{8}, \frac{16}{16}, \frac{25}{32}, \dots\}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 1 \leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 2 \leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \sqrt{2}$$

Монотонно убывает

Предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{\lambda^n} = 0, \forall k \in \mathbb{N}, \lambda > 1$$

(Экспонента растет принципиально быстрее чем любой многочлен)

*Доказательство.*

$$k = 1$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n^2}{4}$$

$$n-1 \geq \frac{n}{2} \quad (\forall n \geq 2)$$

$$\lambda^n = (1 + \underbrace{\lambda - 1}_{>0})^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\lambda - 1)^i \stackrel{i=2}{\geq} \binom{n}{2} (\lambda - 1)^2 \stackrel{n \geq 2}{\geq} \underbrace{\frac{(\lambda - 1)^2}{4}}_{\text{константа}} \cdot n^2$$

$$\lambda^n \geq \frac{(\lambda - 1)^2}{4} \cdot n^2$$

$$\frac{n}{\lambda^n} \leq \frac{n}{\frac{(\lambda - 1)^2}{4}} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{4}{(\lambda - 1)^2} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

■

$$4. \left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$$

$$n \geq 4$$

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{8}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

$$5. a_n < b_n \quad \forall n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

6.

**Теорема 2.**  $\forall n : a_n \leq b_n \leq c_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$7. \{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} \rightarrow 1$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3^2]{3} \cdot \sqrt[3^3]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[3^n]{3} \right) = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3^2}} \cdot \dots \cdot 3^{\frac{1}{3^n}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}} = 3^{\frac{1 \cdot (1 - \frac{1}{3^n})}{3 \cdot (1 - \frac{1}{3})}} = 3^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}}} = 3^{\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 2}} = 3^{\frac{1}{2}}$$