

# Линейная алгебра и геометрия

Slava Boben

September 9, 2019

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1</b>	<b>2</b>
1.1	Общая информация . . . . .	2
1.1.1	Контакты . . . . .	2
1.1.2	О дисциплине . . . . .	2
1.1.3	Оценка . . . . .	2
1.1.4	Содержание курса . . . . .	2
1.2	Матрицы . . . . .	2
1.2.1	Операции над матрицами . . . . .	3
1.2.2	$\mathbb{R}^n$ . . . . .	3
1.2.3	Транспонирование . . . . .	3
1.2.4	Умножение матриц . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Лекция 2</b>	<b>4</b>
2.1	Сумма . . . . .	4
2.2	Умножение матриц . . . . .	4
2.3	Системы линейных уравнений . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Лекция 3</b>	<b>7</b>
3.1	Как решить СЛУ? . . . . .	7
3.1.1	Элементарные преобразования СЛУ и её расширенная матрица . . . . .	8
3.2	Ступенчатые матрицы . . . . .	8
3.3	Применение элементарных преобразований СЛУ к матрицам . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Метод Гаусса решения СЛУ (метод исключения неизвестных)</b>	<b>10</b>
4.1	Алгоритм . . . . .	10
4.2	. . . . .	11
4.3	Матричные уравнения . . . . .	11
4.3.1	Тип (I) . . . . .	12
4.4	Обратные матрицы . . . . .	12
4.5	Перестановки . . . . .	12

# 1 Лекция 1

## 1.1 Общая информация

### 1.1.1 Контакты

Авдеев Роман Сергеевич

- suselr@yandex.ru
- ravdeev@hse.ru

### 1.1.2 О дисциплине

1 – 4 модули

Письменный экзамен: 2, 4 модули

### 1.1.3 Оценка

1. Экзамен
2. Коллоквиум
3. Контрольная работа
4. Больше ДЗ
5. Работа на семинарах
6. Бонус – Задачи из листков

$$O_{\text{итог}} = \min(10, \text{Округление}(0.4 * O_{\text{ЭКЗ}} + 0.22 * O_{\text{КОЛЛ}} + 0.16 * O_{\text{КР}} + 0.16 * O_{\text{ДЗ}} + 0.08 * O_{\text{СЕМ}} + 0.08 * O_{\text{Л}}), 10)$$

$$\text{Округление}(x) = [x]$$

### 1.1.4 Содержание курса

1. Начало алгебры — 9 – 10 занятий
  - Матрицы
  - Системы линейных уравнений
  - Определители
  - Комплексные числа
2. Собственно линейная алгебра
  - Векторное пространство

## 1.2 Матрицы

**Определение 1.** Матрица размера  $n \times m$  — это прямоугольная таблица высоты  $m$  и ширины  $n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}$  — элемент на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца

Краткая запись —  $A = (a_{ij})$

Множество всех матриц размера  $m \times n$  с коэффициентами из  $\mathbb{R}$  (множество всех действительных чисел) —  $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$  или  $\text{Mat}_{n \times m}$

**Определение 2.** Две матрицы  $A \in \text{Mat}_{n \times m}$  и  $B \in \text{Mat}_{p \times q}$  называются *равными*, если  $m = p, n = q$ , и соответствующие элементы равны

**Пример.**  $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

### 1.2.1 Операции над матрицами

$$A, B \in \text{Mat}_{m \times n}$$

- Сумма  $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$
- Произведение на скаляр  $\alpha \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij})$

Свойства суммы и произведения на скаляр

$$\forall A, B, C \in \text{Mat}_{m \times n} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- (1)  $A + B = B + A$  (коммутативность)
- (2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (ассоциативность)

$$(3) \quad A + 0 = 0 + A = A, \text{ где } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad A + (-A) = 0$$

$-A$  — Противоположная матрица

$$(5) \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$(6) \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(7) \quad \lambda(\mu A) = \lambda\mu A$$

$$(8) \quad 1A = A$$

Упражнение. Доказать эти свойства

Примечание. Из свойств (1) – (8) следует, что  $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$  является векторным пространством над  $\mathbb{R}$

### 1.2.2 $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}$$

$$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \quad \text{— числовая прямая}$$

$$\mathbb{R}^2 \quad \text{— плоскость}$$

$$\mathbb{R}^3 \quad \text{— трехмерное пространство}$$

Договоримся отождествлять  $\mathbb{R}^n$  со столбцами высоты  $n$

$$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{— “вектор столбец”}$$

$$\mathbb{R}^n \leftrightarrow \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{R})$$

$$\left[ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right] \implies [x = y \iff x_i = y_i \forall i]$$

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \dots)$$

### 1.2.3 Транспонирование

$$A \in \text{Mat}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T \in \text{Mat}_{n \times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A^T$  — Транспонированная матрица

Свойства:

- (1)  $(A^T)^T = A$
- (2)  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- (3)  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

**Пример.**  $(x_1 \quad \dots \quad x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1 \quad \dots \quad x_n)$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

#### 1.2.4 Умножение матриц

$$A = (a_{ij})$$

$A_{(i)}$  —  $i$ -я строка матрицы  $A$

$A^{(j)}$  —  $j$ -й столбец матрицы  $A$

(1) Частный случай: Произведение строки на столбец одинаковой длины

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1 \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = x_1 * y_1 + \dots + x_n * y_n$$

(2)  $A$  - матрица размера  $m * n$

$B$  - матрица размера  $n * p$

Кол-во строк матрицы  $A$  равно кол-ву столбцов матрицы  $B$  — условие согласованности матриц

$$AB := C \in \text{Mat}_{m \times p}, \text{ где } C_{ij} = A_{(i)}B^{(j)}$$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} (x_1 \quad \dots \quad x_n) := \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_1 & \dots & x_n y_1 \\ x_1 y_2 & x_2 y_2 & \dots & x_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 y_n & x_2 y_n & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 * 2 + 0 * 0 + 2 * 1 & 1 * (-1) + 0 * 5 + 2 * 1 \\ 0 * 2 + (-1) * 0 + 3 * 1 & 0 * (-1) + (-1) * 5 + 3 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

## 2 Лекция 2

### 2.1 Сумма

$S_p, S_{p+1}, \dots, S_q$  — набор чисел

$\sum_{i=p}^q S_i := S_p + S_{p+1} + \dots + S_q$  — сумма по  $i$  от  $p$  до  $q$

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$$

Свойства

1.  $\lambda \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \lambda S_i$
2.  $\sum_{i=1}^q (S_i + t_i) = \sum_{i=1}^q S_i + \sum_{i=1}^q t_i$
3.  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m S_{ij}$  — Сумма всех элементов матрицы  $S = (s_{ij})$

### 2.2 Умножение матриц

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}, B \in \text{Mat}_{n \times p}$$

$$AB = C$$

$$c_{ij} = A_{(i)}B^{(j)} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Свойства умножения матриц:

1.  $\underbrace{A(B+C)}_x = \underbrace{AB+AC}_y$  — левая дистрибутивность

$$\text{Доказательство } x_{ij} = A_{(i)}(B+C)^{(j)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^n (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} = A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = y_{ij}$$

2.  $(A + B)C = AC + BC$  – правая дистрибутивность, доказывается аналогично

3.  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

4.  $(AB)C = A(BC)$  – ассоциативность

Доказательство

$$\underbrace{(AB)C}_u = x, \underbrace{A(BC)}_v = y$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^p u_{ik} * c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \left( \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \left( \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^p a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il} \left( \sum_{k=1}^p b_{lk} c_{kj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il} v_{lj} \\ &= y_{ij} \end{aligned}$$

5.  $\underbrace{(AB)^T}_x = \underbrace{B^T A^T}_y$

Доказательство

$$x_{ij} = [AB]_{ji} = A_{(j)} B^{(i)} = (B^T)_{(i)} (A^T)^{(j)} = y_{ij}$$

Умножение матриц не коммутативно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Определение 3.**  $A \in \text{Mat}_{n \times n} \implies A$  называется *квадратной матрицей* подярка  $n$

Обозн.:  $M_n := \text{Mat}_{n \times n}$

$A \in M_n$

**Определение 4.** Матрица  $A \in M_n$  называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ( $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ )

$$A \implies A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

**Лемма.**  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

$$1. \forall B \in \text{Mat}_{n \times p}, AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$$

2.  $\forall B \in \text{Mat}_{m \times n}$  – аналогично (вектор строка)

Доказательство

$$2. \quad [BA]_{ij} =$$

## Свойства

1.  $EA = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{n \times p}$

2.  $AE = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{p \times n}$

3.  $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$

## Свойства

1.  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}A + \text{tr}B$

2.  $tr(\lambda A) = \lambda tr A$

3.  $tr(A^T) = tr(A)$

4.  $tr(AB) = tr(BA) \forall A \in \text{Mat}_{m \times n}, B \in \text{Mat}_{nm}$

### Доказательство

$$AB = x \in M_m, BA = y \in M_n$$

$$trx = \sum_{i=1}^m x_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^n y_{ij} = try$$

**Пример.**  $A = (1, 2, 3), B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$tr(AB) = tr(1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6) = 32$$

$$tr(BA) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$$

Линейное уравнение  $-a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

 $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$  – коэффициенты $x_1, x_2, \dots, x_n$  — НЕИЗВЕСТНЫЕ

Система линейных уравнений:

[illegible]

**Определение 7.** Решение одного уравнение – это такой набор  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , при подстановке которого в уравнение получаем тождество.

Решение СЛУ – такой набор значений неизвестных, которые является решением каждого уравнения СЛУ.

Основная задача: решить СЛУ, т.е. найти все решения.

**Пример.**  $n = m = 1$

$$ax = b$$

1.  $a \neq 0 \implies x = \frac{b}{a}$

$$2. \quad a = 0 \implies 0x = b$$

- $b \neq 0 \implies$  нет решений
- $b = 0 \implies x \in \mathbb{R}$  – бесконечно много решений.

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}(R) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{матрица коэффициентов}$$

$$B \in \text{Mat}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \text{столбец правых частей}$$

$$X \in \text{Mat}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных}$$

$(*) \Leftrightarrow Ax = b$  — Матричная форма записи СЛУ

**Определение 8.** СЛУ называется

- *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение
- *несовместной*, если решений нет

### 3 Лекция 3

$$Ax = b, A \in \text{Mat}_{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Полная информация о СЛУ содержится в её *расширенной матрице*  $(A|b)$ .

**Определение 9.** Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

**Пример.** Рассмотрим несколько СЛУ

$$\text{А) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{В) } \begin{cases} 2x_1 = 1 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{С) } x_1 + x_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

А и В эквивалентны, так как обе имеют единственное решение  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

А и С не эквивалентны, так как С имеет бесконечно много решений.

#### 3.1 Как решить СЛУ?

**Идея:** выполнить преобразование СЛУ, сохраняющее множество её решений, и привести её к такому виду, в котором СЛУ легко решается.

$$\text{Пример. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

### 3.1.1 Элементарные преобразования СЛУ и её расширенная матрица

тип	СЛУ	расширенная матрица
1.	К $i$ -му уравнению прибавить $j$ -ое, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ ( $i \neq j$ )	$\mathfrak{E}_1(i, j, \lambda)$
2.	Переставить $i$ -е и $j$ -е уравнения ( $i \neq j$ )	$\mathfrak{E}_2(i, j)$
3.	Умножить $i$ -ое уравнение на $\lambda \neq 0$	$\mathfrak{E}_3(i, \lambda)$

1.  $\mathfrak{E}_1(i, j, \lambda)$  : к  $i$ -ой строке прибавить  $j$ -ую, умноженную на  $\lambda$  (покомпонентно),

$$a_{ik} \rightarrow a_{ik} + \lambda a_{jk} \forall k = 1, \dots, n, b_i \rightarrow b_i + \lambda b_j.$$

2.  $\mathfrak{E}_2(i, j)$  : переставить  $i$ -ую и  $j$ -ую строки.

3.  $\mathfrak{E}_3(i, \lambda)$  : умножить  $i$ -ю строку на  $\lambda$  (покомпонентно).

$\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$  называются *элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы*.

**Лемма.** *Элементарные преобразования СЛУ не меняют множество решений*

*Доказательство.* Пусть мы получили СЛУ(★★) из СЛУ(★) путем элементарных преобразований.

1. Всякое решение системы (★) является решением (★★).
2. (★) получается из (★★) путем элементарных преобразований.

(★) $\rightarrow$ (★★)	(★★) $\rightarrow$ (★)
$\mathfrak{E}_1(i, j, \lambda)$	$\mathfrak{E}_1(i, j, -\lambda)$
$\mathfrak{E}_2(i, j)$	$\mathfrak{E}_2(i, j)$
$\mathfrak{E}_3(i, \lambda)$	$\mathfrak{E}_3(i, \frac{1}{\lambda})$

Следовательно, всякое решение (★★) является решением (★)  $\implies$  множества решений совпадают. ■

### 3.2 Ступенчатые матрицы

**Определение 10.** *Ведущим элементом* ненулевой строки называется первый её ненулевой элемент.

**Определение 11.** Матрица  $M \in \text{Mat}_{m \times n}$  называется *ступенчатой*, или имеет ступенчатый вид, если:

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают.
2. Все нулевые строки стоят в конце.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \diamond & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \diamond & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\diamond \neq 0, *$  — что угодно.

**Определение 12.**  $M$  имеет *улучшенный ступенчатый вид*, если:

1.  $M$  имеет обычный ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



**Теорема 1.** 1) Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду. 2) Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

**Следствие.** Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

*Доказательство.*

1. Алгоритм. Если  $M$  - нулевая, то конец. Иначе:

Шаг 1 Ищем первый ненулевой столбец, пусть  $j$  — его номер.

Шаг 2 Переставляем строки, если нужно, добиваемся того, что  $a_{1j} \neq 0$

Шаг 3 Выполняем  $\Theta_1(2, 1, -\frac{a_{2j}}{a_{1j}}), \dots, \Theta_1(m, 1, -\frac{a_{mj}}{a_{1j}})$ . В результате  $a_{ij} = 0$  при  $i = 2, 3, \dots, m$ .

Дальше все повторяем для меньшей матрицы  $M'$ .

2. Алгоритм. Пусть  $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$  — ведущие элементы ступенчатой матрицы.

Шаг 1 Выполняем  $\Theta_3(1, \frac{1}{a_{1j_1}}), \dots, \Theta_3(r, \frac{1}{a_{rj_r}})$ , в результате все ведущие элементы равны 1.

Шаг 2 Выполняем  $\Theta_1(r-1, r, -a_{r-1, j_r}), \Theta_1(r-2, r, -a_{r-2, j_r}), \dots, \Theta_1(1, r, -a_{1, j_r})$ . В результате все элементы над  $a_{rj_r}$  равны 0.

Аналогично обнуляем элементы над всеми остальными ведущими.

Итог: матрица имеет улучшенный ступенчатый вид. ■

### 3.3 Применение элементарных преобразований СЛУ к матрицам

Всякое элементарное преобразование строк матрицы реализуется умножением как умножение слева на подходящую “элементарную матрицу”.

- $\Theta_1(i, j, \lambda) : A \rightarrow U_1(i, j, \lambda)A$ , где

$$U_1(i, j, \lambda) = \begin{matrix} & & & & j & & \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, на  $i$ -м  $j$ -м месте стоит  $\lambda$ , остальные элементы нули)

- $\Theta_2(i, j) : A \rightarrow U_2(i, j)A$ , где

$$U_2(i, j) = \begin{matrix} & i & & & j & & \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ j & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме  $i$ -го и  $j$ -го столбца (там нули, на  $i$ -м  $j$ -м и  $j$ -м  $i$ -м местах стоит 1, остальные нули)

- $\Theta_3(i, \lambda) : A \rightarrow U_3(i, \lambda)A$ , где

$$U_3(i, \lambda) = \begin{matrix} & i \\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме  $i$ -го столбца, там  $\lambda$ , остальные элементы нули)

*Упражнение.* Доказательство.

*Упражнение.* Элементарные преобразования столбцов.

## 4 Метод Гаусса решения СЛУ (метод исключения неизвестных)

Дана СЛУ с расширенной матрицей  $(A|b)$

Было: элементарные преобразования строк в  $(A|b)$  сохраняют множество решений.

### 4.1 Алгоритм

Прямой ход метода Гаусса

Выполняя элементарные преобразования строк в  $(A|b)$ , приведем  $A$  к ступенчатому виду:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_{ij_1} & * & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{rj_r} & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

**Случай 1**  $\exists i \geq r+1 : b_i \neq 0$

Тогда в новой СЛУ  $i$ -е уравнение  $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$ , т.е.  $0 = b_i \implies$  СЛУ несовместна

**Случай 2** либо  $r = m$ , либо  $b_i = 0 \quad \forall i \geq r+1$

Выполняя элементарные преобразования строк приводим матрицу к улучшенному ступенчатому виду – обратный ход метода Гаусса

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Неизвестные  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$  называются *главными*, а остальные *свободными*, где  $j_i$  – индексы столбцов с ведущими элементами.

**Подслучай 2.1**  $r = n$ , т.е. все неизвестные – главные

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & \dots & 0 & b_1 \\ \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_r = b_r \end{cases} \quad \text{– единственное решение.}$$

**Подслучай 2.2**  $r < n$ , т.е. есть хотя бы одна свободная неизвестная

Перенесем в каждом уравнении все члены со свободными неизвестными в правую часть, получаем выражения всех главных неизвестных через свободные, эти выражения называется *общим решением исходной СЛУ*.

**Пример.** Улучшенный ступенчатый вид:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right).$$

Главные неизвестные:  $x_1, x_3$

Свободные неизвестные:  $x_2, x_4$ .

$x_2 = t_1, x_4 = t_2$  – параметры.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3t_1 - t_2 \\ t_1 \\ 4 + 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 4 + 2x_4 \end{cases}$$

**Следствие.** Всякая СЛУ с коэффициентами из  $\mathbb{R}$  имеет либо 0 решений, либо одно решение, либо бесконечно много решений.

**Определение 13.** СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если все её правые части равны 0. Расширенная матрица:  $(A|0)$

**Очевидный факт:** Всякая ОСЛУ имеет нулевое решение ( $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ).

**Следствие.** Всякая ОСЛУ либо имеет ровно 1 решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

**Следствие.** Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение

*Доказательство.* В ступенчатом виде будет хотя бы одна свободная неизвестная. Придавая ей ненулевое значение, получим ненулевое решение ■

## 4.2

( $\star$ )  $Ax = b$ , совместная

Частное решение СЛУ( $\star$ ) – это какое-то одно её решение.

*Утверждение.* Пусть  $Ax = b$  – совместная СЛУ.

$x_0$  – частное решение

$S \subset \mathbb{R}^n$  – множество решений ОСЛУ  $Ax = 0$

$L \subset \mathbb{R}^n$  – множество решений  $Ax = b$ .

Тогда,  $L = x_0 + S$ , где  $x_0 + S = \{x_0 + v | v \in S\}$

*Доказательство.*

1. Пусть  $u \in L$ . Положим  $v = u - x_0$

Тогда  $u = x_0 + v$ .

$$Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = 0 \implies v \in S \implies L \subseteq x_0 + S$$

2. Пусть  $v \in S$ , положим  $u = x_0 + v$ .

$$\text{Тогда, } Au = A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b \implies u \in L \implies x_0 + S \subseteq L$$

■

## 4.3 Матричные уравнения

1.  $AX = B$   $A, B$  известны  $X$  – неизвестная матрица

2.  $XA = C$   $A, C$  известны  $X$  – неизвестная матрица

$XA = C \leftrightarrow A^T X = B^T$ , т.е. достаточно уметь решать только уравнения первого типа.

#### 4.3.1 Тип (I)

$\underset{n \times m}{A} \underset{m \times p}{X} = \underset{n \times p}{B}$  – это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} AX^{(1)} = B^{(1)} \\ AX^{(2)} = B^{(2)} \\ \vdots \\ AX^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

Этот набор СЛУ надо решать одновременно методом Гаусса

Записываем матрицу  $(A|B)$  и элементарными преобразованиями строк с ней приводим  $A$  к улучшенному ступенчатому виду.

Получаем  $(A'|B')$  –  $A'$  имеет улучшенный ступенчатый вид.

Остается выписать общее решение для каждой СЛУ

$$\begin{cases} A'x^{(1)} = B^{(1)} \\ A'x^{(2)} = B^{(2)} \\ \vdots \\ A'x^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

#### 4.4 Обратные матрицы

**Определение 14.** Матрица  $B \in M_n$  называется *обратной*, к  $A$ , если  $AB = BA = E$ .

Обозначение:  $B = A^{-1}$

Факты:

1. Если  $\exists A^{-1}$ , то она определена однозначно
2. Если  $AB = E$  для некоторой  $B \in M_n$ , то  $BA = E$  автоматически и тогда  $B = A^{-1}$

**Следствие.**  $A^{-1}$  является решение матричного уравнения  $AX = E$  (если решение существует)

#### 4.5 Перестановки

**Определение 15.** *Перестановкой* (или подстановкой) на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$  называется всякое биективное (взаимно однозначное) отображение

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$