

# Математический анализ

## ДЗ к Семинар 2

1. а) Пусть последовательности  $\{a_n\}_1^\infty$  и  $\{b_n\}_1^\infty$  расходятся.  
Верно ли, что последовательности  $\{a_n + b_n\}_1^\infty$  и  $\{a_n b_n\}_1^\infty$  также расходятся?  
б) Пусть  $\{a_n\}_1^\infty$  сходится и  $\{b_n\}_1^\infty$  расходится. Что можно сказать о сходимости/расходимости  $\{a_n + b_n\}_1^\infty$  и  $\{a_n b_n\}_1^\infty$ ?
2. Пусть последовательности  $\{a_n\}_1^\infty$  и  $\{b_n\}_1^\infty$  таковы, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = 0$ . Верно ли следующее:  
а)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ ?  
б)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  или  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ ?
3. Тот же вопрос что и в 2, но дополнительно известно, что  $\{a_n\}_1^\infty$  и  $\{b_n\}_1^\infty$  сходятся.
4. Найти  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{(-1)^n \frac{3n}{2n-1}\}_1^\infty$  и  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{(-1)^n \frac{3n}{2n-1}\}_1^\infty$ .
5. Найти предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ , если:  
а)  $a_n = \frac{3n^2 - 7n}{4n^2 + n + 5}$ ;  
б)  $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$ ;  
в)  $a_n = \frac{n^2 + 3n - 2}{1 + 2 + \dots + (n-1) + n}$ ;  
г)  $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$   
Hint: сложить первый и последний член  
е)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right)$   
Hint: телескопическое суммирование  
ф)  $a_n = \frac{1}{n} (\sin(1) + \sin(2) + \dots + \sin(n))$   
Hint:  
1) домножить  $a_n$  на  $\sin \frac{1}{2}$   
2) воспользоваться формулой  $2 \sin x \cdot \cos x = \cos(x - y) - \cos(x + y)$   
3) телескопическое суммирование  
4) воспользоваться формулой  $\cos(x) - \cos(y) = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{y-x}{2}$  (необязательно)  
5) заметить, что  $|\sin x| \leq 1$ .
6. Пусть  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , доказать, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$ , если  $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

*Примечание.* как показывает пункт ф) из  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$  не следует  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$