

Линейная алгебра и геометрия

Slava Boben

September 9, 2019

Содержание

1	Лекция 1	2
1.1	Общая информация	2
1.1.1	Контакты	2
1.1.2	О дисциплине	2
1.1.3	Оценка	2
1.1.4	Содержание курса	2
1.2	Матрицы	2
1.2.1	Операции над матрицами	3
1.2.2	\mathbb{R}^n	3
1.2.3	Транспонирование	3
1.2.4	Умножение матриц	4
2	Лекция 2	4
2.1	Сумма	4
2.2	Умножение матриц	4
2.3	Системы линейных уравнений	6
3	Семинар 1	7
3.1	Контакты	7
3.2	Матрицы	7
3.2.1	Аномалии	7
3.2.2	Блочные операции	7
3.2.3	Кек	8
3.2.4	Лол	8
3.2.5	Хех	8
3.2.6	Мда	8

1 Лекция 1

1.1 Общая информация

1.1.1 Контакты

Авдеев Роман Сергеевич

- suselr@yandex.ru
- ravdeev@hse.ru

1.1.2 О дисциплине

1 – 4 модули

Письменный экзамен: 2, 4 модули

1.1.3 Оценка

1. Экзамен
2. Коллоквиум
3. Контрольная работа
4. Больше ДЗ
5. Работа на семинарах
6. Бонус – Задачи из листков

$$O_{\text{итог}} = \min(10, \text{Округление}(0.4 * O_{\text{ЭКЗ}} + 0.22 * O_{\text{КОЛЛ}} + 0.16 * O_{\text{КР}} + 0.16 * O_{\text{ДЗ}} + 0.08 * O_{\text{СЕМ}} + 0.08 * O_{\text{Л}}), 10)$$

$$\text{Округление}(x) = [x]$$

1.1.4 Содержание курса

1. Начало алгебры — 9 – 10 занятий
 - Матрицы
 - Системы линейных уравнений
 - Определители
 - Комплексные числа
2. Собственно линейная алгебра
 - Векторное пространство

1.2 Матрицы

Определение 1. Матрица размера $n \times m$ — это прямоугольная таблица высоты m и ширины n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} — элемент на пересечении i -й строки и j -го столбца

Краткая запись — $A = (a_{ij})$

Множество всех матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из \mathbb{R} (множество всех действительных чисел) — $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$ или $\text{Mat}_{n \times m}$

Определение 2. Две матрицы $A \in \text{Mat}_{n \times m}$ и $B \in \text{Mat}_{p \times q}$ называются *равными*, если $m = p, n = q$, и соответствующие элементы равны

Пример. $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

1.2.1 Операции над матрицами

$$A, B \in \text{Mat}_{m \times n}$$

- Сумма $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$
- Произведение на скаляр $\alpha \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij})$

Свойства суммы и произведения на скаляр

$$\forall A, B, C \in \text{Mat}_{m \times n} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- (1) $A + B = B + A$ (коммутативность)
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность)

$$(3) \quad A + 0 = 0 + A = A, \text{ где } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad A + (-A) = 0$$

$-A$ – Противоположная матрица

$$(5) \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$(6) \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(7) \quad \lambda(\mu A) = \lambda\mu A$$

$$(8) \quad 1A = A$$

Упражнение. Доказать эти свойства

Примечание. Из свойств (1) – (8) следует, что $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$ является векторным пространством над \mathbb{R}

1.2.2 \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}$$

$$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \quad \text{– числовая прямая}$$

$$\mathbb{R}^2 \quad \text{– плоскость}$$

$$\mathbb{R}^3 \quad \text{– трехмерное пространство}$$

Договоримся отождествлять \mathbb{R}^n со столбцами высоты n

$$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{– “вектор столбец”}$$

$$\mathbb{R}^n \leftrightarrow \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{R})$$

$$\left[x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right] \implies [x = y \iff x_i = y_i \forall i]$$

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \dots)$$

1.2.3 Транспонирование

$$A \in \text{Mat}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T \in \text{Mat}_{n \times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A^T – Транспонированная матрица

Свойства:

- (1) $(A^T)^T = A$
- (2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- (3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Пример. $(x_1 \quad \dots \quad x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1 \quad \dots \quad x_n)$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

1.2.4 Умножение матриц

$$A = (a_{ij})$$

$A_{(i)}$ — i -я строка матрицы A

$A^{(j)}$ — j -й столбец матрицы A

(1) Частный случай: Произведение строки на столбец одинаковой длины

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1 \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = x_1 * y_1 + \dots + x_n * y_n$$

(2) A - матрица размера $m * n$

B - матрица размера $n * p$

Кол-во строк матрицы A равно кол-ву столбцов матрицы B — условие согласованности матриц

$$AB := C \in \text{Mat}_{m \times p}, \text{ где } C_{ij} = A_{(i)}B^{(j)}$$

Пример. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} (x_1 \quad \dots \quad x_n) := \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_1 & \dots & x_n y_1 \\ x_1 y_2 & x_2 y_2 & \dots & x_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 y_n & x_2 y_n & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 * 2 + 0 * 0 + 2 * 1 & 1 * (-1) + 0 * 5 + 2 * 1 \\ 0 * 2 + (-1) * 0 + 3 * 1 & 0 * (-1) + (-1) * 5 + 3 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

2 Лекция 2

2.1 Сумма

S_p, S_{p+1}, \dots, S_q — набор чисел

$\sum_{i=p}^q S_i := S_p + S_{p+1} + \dots + S_q$ — сумма по i от p до q

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$$

Свойства

1. $\lambda \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \lambda S_i$
2. $\sum_{i=1}^q (S_i + t_i) = \sum_{i=1}^q S_i + \sum_{i=1}^q t_i$
3. $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m S_{ij}$ — Сумма всех элементов матрицы $S = (s_{ij})$

2.2 Умножение матриц

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}, B \in \text{Mat}_{n \times p}$$

$$AB = C$$

$$c_{ij} = A_{(i)}B^{(j)} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Свойства умножения матриц:

1. $\underbrace{A(B+C)}_x = \underbrace{AB+AC}_y$ — левая дистрибутивность

$$\text{Доказательство } x_{ij} = A_{(i)}(B+C)^{(j)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^n (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} = A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = y_{ij}$$

2. $(A + B)C = AC + BC$ – правая дистрибутивность, доказывается аналогично

3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

4. $(AB)C = A(BC)$ – ассоциативность

Доказательство

$$\underbrace{(AB)C}_u = x, \underbrace{A(BC)}_v = y$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^p u_{ik} * c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^p a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il} \left(\sum_{k=1}^p b_{lk} c_{kj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il} v_{lj} \\ &= y_{ij} \end{aligned}$$

5. $\underbrace{(AB)^T}_x = \underbrace{B^T A^T}_y$

Доказательство

$$x_{ij} = [AB]_{ji} = A_{(j)} B^{(i)} = (B^T)_{(i)} (A^T)^{(j)} = y_{ij}$$

Умножение матриц не коммутативно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 3. $A \in \text{Mat}_{n \times n} \implies A$ называется *квадратной матрицей* подярка n

Обозн.: $M_n := \text{Mat}_{n \times n}$

$A \in M_n$

Определение 4. Матрица $A \in M_n$ называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$)

$$A \implies A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Лемма. $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

$$1. \forall B \in \text{Mat}_{n \times p}, AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$$

2. $\forall B \in \text{Mat}_{m \times n}$ – аналогично (вектор строка)

Доказательство

$$1. [AB]_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij}$$

$$2. [BA]_{ij} =$$

Определение 5. Матрица $E = E_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ называется *единичной матрицей* порядка n .

Свойства

$$1. EA = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{n \times p}$$

$$2. AE = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{p \times n}$$

$$3. AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$$

Определение 6. Следом матрицы $A \in M_n$ называется число $\text{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Свойства

$$1. \text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B$$

$$2. \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr} A$$

$$3. \text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$$

$$4. \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad \forall A \in \text{Mat}_{m \times n}, B \in \text{Mat}_{nm}$$

Доказательство

$$AB = x \in M_m, BA = y \in M_n$$

$$\text{tr} x = \sum_{i=1}^m x_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^n y_{jj} = \text{tr} y$$

Пример. $A = (1, 2, 3), B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6) = 32$$

$$\text{tr}(BA) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$$

2.3 Системы линейных уравнений

Определение 7. Линейное уравнение $- a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$

a_1, a_2, \dots, a_n, b — коэффициенты

x_1, x_2, \dots, x_n — неизвестные

Система линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$$

Основная задача: решить СЛУ

Пример. $n = m = 1$

$$ax = b$$

$$a \neq 0 \implies x = \frac{b}{a}$$

$$a = 0 \implies 0x = b$$

$$b \neq 0 \implies \text{нет решений}$$

$$b = 0 \implies x \in \mathbb{R} - \text{бесконечно много решений}$$

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}(R) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{матрица коэффициентов}$$

$$B \in \text{Mat}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \text{столбец правых частей}$$

$$X \in \text{Mat}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных}$$

$(*) \leftrightarrow Ax = b$ — Матричная форма записи СЛУ

Определение 8. СЛУ называется

- *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение
- *несовместной*, если решений нет

3 Семинар 1

3.1 Контакты

Трушин Дмитрий Витальевич — Дима
trushindima@yandex.ru

3.2 Матрицы

3.2.1 Аномалии

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$A \neq 0 \cdot B \neq 0 = 0$$

2. $A \neq 0$

$$A^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

3.2.2 Блочные операции

A	B
C	D

X	Y
Z	W

$AX + BZ$	$AY + BW$
$CY + DZ$	$CY + DW$

$$A \cdot B = A \cdot (B_1, B_2, \dots, B_N)$$

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_N) = (AB_1, AB_2, \dots, AB_n)$$

$$\begin{aligned}
A &= (A_1, \dots, A_n) \\
B &= (B_1, \dots, B_n) \\
AB^T &= (A_1, \dots, A_n) \begin{pmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ B_n^T \end{pmatrix} = A_1 B_1^T + \dots + A_n B_n^T
\end{aligned}$$

3.2.3 Кек

3.2.4 Лол

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

3.2.5 Хех

A	B
C	D
A^T	C^T
B^T	D^T

3.2.6 Мда

$$\begin{aligned}
x &\in M_n(\mathbb{R}) \\
xJ_0 &= J_0x
\end{aligned}$$