

# Линейная алгебра и геометрия

Slava Boben

September 9, 2019

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1</b>	<b>2</b>
1.1	Общая информация . . . . .	2
1.1.1	Контакты . . . . .	2
1.1.2	О дисциплине . . . . .	2
1.1.3	Оценка . . . . .	2
1.1.4	Содержание курса . . . . .	2
1.2	Матрицы . . . . .	2
1.2.1	Операции над матрицами . . . . .	3
1.2.2	$\mathbb{R}^n$ . . . . .	3
1.2.3	Транспонирование . . . . .	3
1.2.4	Умножение матриц . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Лекция 2</b>	<b>4</b>
2.1	Сумма . . . . .	4
2.2	Умножение матриц . . . . .	4
2.3	Системы линейных уравнений . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Семинар 1</b>	<b>7</b>
3.1	Контакты . . . . .	7
3.2	Матрицы . . . . .	7
3.2.1	Аномалии . . . . .	7
3.2.2	Блочные операции . . . . .	7
3.2.3	Кек . . . . .	8
3.2.4	Лол . . . . .	8
3.2.5	Хех . . . . .	8
3.2.6	Мда . . . . .	8

# 1 Лекция 1

## 1.1 Общая информация

### 1.1.1 Контакты

Авдеев Роман Сергеевич

- suselr@yandex.ru
- ravdeev@hse.ru

### 1.1.2 О дисциплине

1 – 4 модули

Письменный экзамен: 2, 4 модули

### 1.1.3 Оценка

1. Экзамен
2. Коллоквиум
3. Контрольная работа
4. Больше ДЗ
5. Работа на семинарах
6. Бонус – Задачи из листков

$$O_{\text{итог}} = \min(10, \text{Округление}(0.4 * O_{\text{ЭКЗ}} + 0.22 * O_{\text{КОЛЛ}} + 0.16 * O_{\text{КР}} + 0.16 * O_{\text{ДЗ}} + 0.08 * O_{\text{СЕМ}} + 0.08 * O_{\text{Л}}), 10)$$

$$\text{Округление}(x) = [x]$$

### 1.1.4 Содержание курса

1. Начало алгебры — 9 – 10 занятий
  - Матрицы
  - Системы линейных уравнений
  - Определители
  - Комплексные числа
2. Собственно линейная алгебра
  - Векторное пространство

## 1.2 Матрицы

**Определение 1.** Матрица размера  $n \times m$  — это прямоугольная таблица высоты  $m$  и ширины  $n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}$  — элемент на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца

Краткая запись —  $A = (a_{ij})$

Множество всех матриц размера  $m \times n$  с коэффициентами из  $\mathbb{R}$  (множество всех действительных чисел) —  $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$  или  $\text{Mat}_{n \times m}$

**Определение 2.** Две матрицы  $A \in \text{Mat}_{n \times m}$  и  $B \in \text{Mat}_{p \times q}$  называются *равными*, если  $m = p, n = q$ , и соответствующие элементы равны

Пример.  $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

### 1.2.1 Операции над матрицами

$$A, B \in \text{Mat}_{m \times n}$$

- Сумма  $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$
- Произведение на скаляр  $\alpha \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij})$

Свойства суммы и произведения на скаляр

$$\forall A, B, C \in \text{Mat}_{m \times n} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- (1)  $A + B = B + A$  (коммутативность)
- (2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (ассоциативность)

$$(3) \quad A + 0 = 0 + A = A, \text{ где } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad A + (-A) = 0$$

$-A$  – Противоположная матрица

$$(5) \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$(6) \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(7) \quad \lambda(\mu A) = \lambda\mu A$$

$$(8) \quad 1A = A$$

Упражнение. Доказать эти свойства

Примечание. Из свойств (1) – (8) следует, что  $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$  является векторным пространством над  $\mathbb{R}$

### 1.2.2 $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}$$

$$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \quad \text{– числовая прямая}$$

$$\mathbb{R}^2 \quad \text{– плоскость}$$

$$\mathbb{R}^3 \quad \text{– трехмерное пространство}$$

Договоримся отождествлять  $\mathbb{R}^n$  со столбцами высоты  $n$

$$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{– “вектор столбец”}$$

$$\mathbb{R}^n \leftrightarrow \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{R})$$

$$\left[ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right] \implies [x = y \iff x_i = y_i \forall i]$$

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \dots)$$

### 1.2.3 Транспонирование

$$A \in \text{Mat}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T \in \text{Mat}_{n \times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A^T$  – Транспонированная матрица

Свойства:

- (1)  $(A^T)^T = A$
- (2)  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- (3)  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

**Пример.**  $(x_1 \quad \dots \quad x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1 \quad \dots \quad x_n)$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

#### 1.2.4 Умножение матриц

$$A = (a_{ij})$$

$A_{(i)}$  —  $i$ -я строка матрицы  $A$

$A^{(j)}$  —  $j$ -й столбец матрицы  $A$

(1) Частный случай: Произведение строки на столбец одинаковой длины

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1 \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = x_1 * y_1 + \dots + x_n * y_n$$

(2)  $A$  - матрица размера  $m * n$

$B$  - матрица размера  $n * p$

Кол-во строк матрицы  $A$  равно кол-ву столбцов матрицы  $B$  — условие согласованности матриц

$$AB := C \in \text{Mat}_{m \times p}, \text{ где } C_{ij} = A_{(i)}B^{(j)}$$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} (x_1 \quad \dots \quad x_n) := \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_1 & \dots & x_n y_1 \\ x_1 y_2 & x_2 y_2 & \dots & x_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 y_n & x_2 y_n & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 * 2 + 0 * 0 + 2 * 1 & 1 * (-1) + 0 * 5 + 2 * 1 \\ 0 * 2 + (-1) * 0 + 3 * 1 & 0 * (-1) + (-1) * 5 + 3 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

## 2 Лекция 2

### 2.1 Сумма

$S_p, S_{p+1}, \dots, S_q$  — набор чисел

$\sum_{i=p}^q S_i := S_p + S_{p+1} + \dots + S_q$  — сумма по  $i$  от  $p$  до  $q$

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$$

Свойства

1.  $\lambda \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \lambda S_i$
2.  $\sum_{i=1}^q (S_i + t_i) = \sum_{i=1}^q S_i + \sum_{i=1}^q t_i$
3.  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m S_{ij}$  — Сумма всех элементов матрицы  $S = (s_{ij})$

### 2.2 Умножение матриц

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}, B \in \text{Mat}_{n \times p}$$

$$AB = C$$

$$c_{ij} = A_{(i)}B^{(j)} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Свойства умножения матриц:

1.  $\underbrace{A(B+C)}_x = \underbrace{AB+AC}_y$  — левая дистрибутивность

$$\text{Доказательство } x_{ij} = A_{(i)}(B+C)^{(j)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^n (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^n a_{ik}bkj + \sum_{k=1}^n a_{ik}ckj = A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = y_{ij}$$

2.  $(A + B)C = AC + BC$  – правая дистрибутивность, доказывается аналогично

3.  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

4.  $(AB)C = A(BC)$  – ассоциативность

Доказательство

$$\underbrace{(AB)C}_u = x, \underbrace{A(BC)}_v = y$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^p u_{ik} * c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \left( \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \left( \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^p a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il} \left( \sum_{k=1}^p b_{lk} c_{kj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il} v_{lj} \\ &= y_{ij} \end{aligned}$$

5.  $\underbrace{(AB)^T}_x = \underbrace{B^T A^T}_y$

Доказательство

$$x_{ij} = [AB]_{ji} = A_{(j)} B^{(i)} = (B^T)_{(i)} (A^T)^{(j)} = y_{ij}$$

Умножение матриц не коммутативно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Определение 3.**  $A \in \text{Mat}_{n \times n} \implies A$  называется *квадратной матрицей* подярка  $n$

Обозн.:  $M_n := \text{Mat}_{n \times n}$

$A \in M_n$

**Определение 4.** Матрица  $A \in M_n$  называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ( $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ )

$$A \implies A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

**Лемма.**  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

$$1. \forall B \in \text{Mat}_{n \times p}, AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$$

2.  $\forall B \in \text{Mat}_{m \times n}$  – аналогично (вектор строка)

Доказательство

$$1. [AB]_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij}$$

$$2. [BA]_{ij} =$$

**Определение 5.** Матрица  $E = E_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$  называется *единичной матрицей* порядка  $n$ .

Свойства

$$1. EA = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{n \times p}$$

$$2. AE = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{p \times n}$$

$$3. AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$$

**Определение 6.** Следом матрицы  $A \in M_n$  называется число  $\text{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Свойства

$$1. \text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B$$

$$2. \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr} A$$

$$3. \text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$$

$$4. \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad \forall A \in \text{Mat}_{m \times n}, B \in \text{Mat}_{nm}$$

Доказательство

$$AB = x \in M_m, BA = y \in M_n$$

$$\text{tr} x = \sum_{i=1}^m x_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^n y_{jj} = \text{tr} y$$

**Пример.**  $A = (1, 2, 3), B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6) = 32$$

$$\text{tr}(BA) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$$

## 2.3 Системы линейных уравнений

**Определение 7.** Линейное уравнение  $- a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$

$a_1, a_2, \dots, a_n, b$  — коэффициенты

$x_1, x_2, \dots, x_n$  — неизвестные

Система линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$$

Основная задача: решить СЛУ

**Пример.**  $n = m = 1$

$$ax = b$$

$$a \neq 0 \implies x = \frac{b}{a}$$

$$a = 0 \implies 0x = b$$

$$b \neq 0 \implies \text{нет решений}$$

$$b = 0 \implies x \in \mathbb{R} - \text{бесконечно много решений}$$

$$A \in \text{Mat}_{m \times n}(R) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{матрица коэффициентов}$$

$$B \in \text{Mat}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \text{столбец правых частей}$$

$$X \in \text{Mat}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных}$$

$(*) \leftrightarrow Ax = b$  — Матричная форма записи СЛУ

**Определение 8.** СЛУ называется

- *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение
- *несовместной*, если решений нет

## 3 Семинар 1

### 3.1 Контакты

Трушин Дмитрий Витальевич — Дима  
trushindima@yandex.ru

### 3.2 Матрицы

#### 3.2.1 Аномалии

1.  $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$A \neq 0 \cdot B \neq 0 = 0$$

2.  $A \neq 0$

$$A^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

#### 3.2.2 Блочные операции

A	B
C	D

X	Y
Z	W

$AX + BZ$	$AY + BW$
$CY + DZ$	$CY + DW$

$$A \cdot B = A \cdot (B_1, B_2, \dots, B_N)$$

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_N) = (AB_1, AB_2, \dots, AB_n)$$

$$\begin{aligned}
A &= (A_1, \dots, A_n) \\
B &= (B_1, \dots, B_n) \\
AB^T &= (A_1, \dots, A_n) \begin{pmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ B_n^T \end{pmatrix} = A_1 B_1^T + \dots + A_n B_n^T
\end{aligned}$$

### 3.2.3 Кек

### 3.2.4 Лол

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

### 3.2.5 Хех

A	B
C	D
$A^T$	$C^T$
$B^T$	$D^T$

### 3.2.6 Мда

$$\begin{aligned}
x &\in M_n(\mathbb{R}) \\
xJ_0 &= J_0x
\end{aligned}$$