

# Линейная алгебра и геометрия

Slava Boben

September 9, 2019

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1</b>	<b>2</b>
1.1	Общая информация . . . . .	2
1.1.1	Контакты . . . . .	2
1.1.2	О дисциплине . . . . .	2
1.1.3	Оценка . . . . .	2
1.1.4	Содержание курса . . . . .	2
1.2	Матрицы . . . . .	2
1.2.1	Операции над матрицами . . . . .	3
1.2.2	$\mathbb{R}^n$ . . . . .	3
1.2.3	Транспонирование . . . . .	3
1.2.4	Умножение матриц . . . . .	4

# 1 Лекция 1

## 1.1 Общая информация

### 1.1.1 Контакты

Авдеев Роман Сергеевич

- suselr@yandex.ru
- ravdeev@hse.ru

### 1.1.2 О дисциплине

1 – 4 модули

Письменный экзамен: 2, 4 модули

### 1.1.3 Оценка

1. Экзамен
2. Коллоквиум
3. Контрольная работа
4. Больше ДЗ
5. Работа на семинарах
6. Бонус – Задачи из листков

$$O_{\text{итог}} = \min(10, \text{Округление}(0.4 * O_{\text{ЭКЗ}} + 0.22 * O_{\text{КОЛЛ}} + 0.16 * O_{\text{КР}} + 0.16 * O_{\text{ДЗ}} + 0.08 * O_{\text{СЕМ}} + 0.08 * O_{\text{Л}}), 10)$$

$$\text{Округление}(x) = [x]$$

### 1.1.4 Содержание курса

1. Начало алгебры — 9 – 10 занятий
  - Матрицы
  - Системы линейных уравнений
  - Определители
  - Комплексные числа
2. Собственно линейная алгебра
  - Векторное пространство

## 1.2 Матрицы

**Определение 1.** Матрица размера  $n \times m$  — это прямоугольная таблица высоты  $m$  и ширины  $n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}$  — элемент на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца

Краткая запись —  $A = (a_{ij})$

Множество всех матриц размера  $m \times n$  с коэффициентами из  $\mathbb{R}$  (множество всех действительных чисел) —  $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$  или  $\text{Mat}_{n \times m}$

**Определение 2.** Две матрицы  $A \in \text{Mat}_{n \times m}$  и  $B \in \text{Mat}_{p \times q}$  называются *равными*, если  $m = p, n = q$ , и соответствующие элементы равны

Пример.  $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

### 1.2.1 Операции над матрицами

$$A, B \in \text{Mat}_{m \times n}$$

- Сумма  $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$
- Произведение на скаляр  $\alpha \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij})$

Свойства суммы и произведения на скаляр

$$\forall A, B, C \in \text{Mat}_{m \times n} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- (1)  $A + B = B + A$  (коммутативность)
- (2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (ассоциативность)
- (3)  $A + 0 = 0 + A = A$ , где  $0 =$
- (4)  $A + (-A) = 0$   
 $-A$  — Противоположная матрица
- (5)  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- (6)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- (7)  $\lambda(\mu A) = \lambda\mu A$
- (8)  $1A = A$

Упражнение. Доказать эти свойства

Примечание. Из свойств (1) – (8) следует, что  $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$  является векторным пространством над  $\mathbb{R}$

### 1.2.2 $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}$$

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$  — числовая прямая

$\mathbb{R}^2$  — плоскость

$\mathbb{R}^3$  — трехмерное пространство

Договоримся отождествлять  $\mathbb{R}^n$  со столбцами высоты  $n$

$$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — “вектор столбец”}$$

$$\mathbb{R}^n \leftrightarrow \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{R})$$

$$\left[ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right] \implies [x = y \iff x_i = y_i \forall i]$$

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \dots)$$

### 1.2.3 Транспонирование

$$A \in \text{Mat}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T \in \text{Mat}_{n \times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A^T$  — Транспонированная матрица

Свойства:

- (1)  $(A^T)^T = A$
- (2)  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- (3)  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

**Пример.**  $(x_1 \quad \dots \quad x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1 \quad \dots \quad x_n)$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

#### 1.2.4 Умножение матриц

$$A = (a_{ij})$$

$A_{(i)}$  —  $i$ -я строка матрицы  $A$

$A^{(j)}$  —  $j$ -й столбец матрицы  $A$

(1) Частный случай: Произведение строки на столбец одинаковой длины

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1 \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = x_1 * y_1 + \dots + x_n * y_n$$

(2)  $A$  — матрица размера  $m * n$

$B$  — матрица размера  $n * p$

Кол-во строк матрицы  $A$  равно кол-ву столбцов матрицы  $B$  — условие согласованности матриц

$$AB := C \in \text{Mat}_{m * p}, \text{ где } C_{ij} = A_{(i)} B^{(j)}$$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_1 & \dots & x_n y_1 \\ x_1 y_2 & x_2 y_2 & \dots & x_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 y_n & x_2 y_n & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$

**Пример.**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 * 2 + 0 * 0 + 2 * 1 & 1 * (-1) + 0 * 5 + 2 * 1 \\ 0 * 2 + (-1) * 0 + 3 * 1 & 0 * (-1) + (-1) * 5 + 3 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$