Лекции по математическому анализу

Slava Boben

September 5, 2019

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Общая информация

1.1.1 Контакты

Делицын Андрей Леонидович

- delitsyn@mail.ru
- adelistyn@hse.ru

1.1.2 Оценка

$$O_{\text{пром}} = \text{Округление}\left(\frac{1}{10}\text{ДЗ}_1 + \frac{1}{10}\text{КР}_1 + \frac{3}{10}\text{КК}_1 + \frac{5}{10}\text{Экз}_1\right)$$

$$O_{\text{итог}} = \text{Округление}\left(\frac{1}{20}\text{ДЗ}_2 + \frac{1}{20}\text{КР}_2 + \frac{3}{20}\text{КК}_2 + \frac{5}{20}\text{Экз}_2 + \frac{10}{20}O_{\text{пром}}\right)$$

$$\text{Округление}\,(x) = [x]$$

1.1.3 Коллоквиум

1 балл Простая задача (например, продифференцировать функцию)

Основная часть
На подготовку к основной части дается 40 минут

1 балл Формулировка теоремы без доказательства или определение некоторого понятия

2 балла Решить задачу

4 балла Доказательство теоремы

2 балла Дополнительные вопросы

1.1.4 Экзамен

То же что и коллоквиум, за исключением первой части (один балл с нее идет в второе задание)

1.1.5 Литература

1. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа: учеб. пособие для вузов, М.: МФТИ, 2000.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, СПб.: Лань, 2001.

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов, М.: АСТ: Астрель, 2004.

4. Л. Д. Кудрявцев [и др.]; Под ред. Л. Д. Кудрявцева. Сборник задач по математическому анализу: в 3 т.

5. Зорич, В. А. Математический анализ: учебник, М.: МЦНМО, 2015.

1.2 Теория пределов и непрерывных функций одной переменной

1.2.1 Понятие действительного числа

(a) *Натуральные числа*

$$\mathbb{N} - 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

$$+, \times$$

(b) *Целые числа*

$$\mathbb{Z} - -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

$$+, -, \times$$

Группа - множество, в котором определена операция, такая что,

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, \quad \exists c \in \mathbb{Z}$$
$$c = a + b$$

Свойства групп:

1. $(a+b)+d = a+(b+d)$
2. $\exists 0 : a + 0 = a$
3. $\forall a \ \exists(-a)$
   $a + (-a) = 0$
4. $a + b = b + a$ — Коммутативная или абелевая

(c) *Рациональные числа*

$$\mathbb{Q} = \frac{m}{n}$$
$$m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$$

Операция сложения для рациональных цисел:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + nk}{nl}$$

Пусть есть два числа, $\forall a \in \mathbb{Q}, \forall b \in \mathbb{Q}$, для этих чисел определена операция умножения

5. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
6. $\exists 1 : a \times 1 = a$
7. $\forall a \ \exists a^{-1}$
   $a \times a^{-1} = 1$
8. $a \times b = b \times a$
9. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Таким образом рациональные числа – это группа по сложение и за исключением нуля по умножению. Если выполняются все 9 свойств — соответствующее множество называется полем. Возникает вопрос, достаточно ли рациональных цифр?

Вспомним теорему Пифагора — $a^2 + b^2 = c^2$. Допустим, $a = 1, b = 1$, тогда $c^2 = 2$. Для нас важно то, что это число c не может быть представлено никакой рациональной дробью, давайте проверим это.

Предположим что есть $c = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$. Можно считать что дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

$$c^2 = 2 \implies \frac{n^2}{m^2} = 2 \implies m^2 = 2n^2$$

m – четное, $m = 2p$

$$4p^2 = 2n^2 \implies n^2 = 2p^2$$

n – тоже четное, $n = 2k$

Тогда поделим n на m: $\frac{m}{n} = \frac{2p}{2k}$, дробь сократима, пришли к противоречию

Получается, множества рациональных чисел не хватает чтобы взять корень из двойки.

И вот теперь, мы сделаем следующее построение, позволяющее ввести понятие вещественных чисел, и вообще говоря, измерить любой отрезок на прямой

Будет ли это множество полем? Будет, и более того, это множество позволит нам решить проблему измерения любого отрезка. А есть ли какие либо поля, которые содержат в себе поле вещественных чисел? Есть, таким полем является поле комплексных чисел. Все ли свойства вещественых чисел имеют место для комплексных чисел? Нет, вещественные числа всегда можно сравнивать.

$\forall a, b$

1. $\begin{cases} a < b \\ b < a \\ a = b \end{cases}$
2. $a < b, b < c \implies a < c$
3. $a < b \implies \forall c : a + c < b + c$
4. $\forall c > 0 : a * c < b * c$