ДЗ к Семинар 1

1. Используя метод математической индукции доказать следующее
   a) $6|n(2n^2 - 3n + 1)$ для любого $n \in \mathbb{N}$
   запись $a|b$ читается "a делит (нацело) b"
   b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
   обратите внимание, что $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
   c) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$
   hint: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

2. Разобраться в следующем доказательстве
   прежде чем читать доказательство, можно попробовать доказать самостоятельно, но это не просто
   Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – произвольные положительные числа. Тогда, для любого $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \qquad (\star)$$

т.е. среднее арифметическое не меньше среднего геометрического

Доказательство. $\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2}$ // действительно, $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ //
применим этот результат дважды:

$$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \leq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \leq \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$

Пользуясь индукцией мы получаем, что

$$(a_1 a_2 \dots a_{2^k})^{\frac{1}{2^k}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_{2^k}}{2^k} \text{ для } \forall k \qquad (\star\star)$$

[Проверьте эту индукцию аккуратно!]
Заметим, что мы доказали $(\star)$ не для всех $n \in \mathbb{N}$, а только для степеней двойки (т.е. $P_1, P_2, P_4, P_8, \dots$)
А как доказать для остальных $n \in \mathbb{N}$?
На самом деле все уже доказано, просто надо понять почему.
Пусть $n \in \mathbb{N}$ – произвольно и $a_1, a_2, \dots, a_n$ наши числа $\implies$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $n \leq 2^k$.
Положим $b_j = \begin{cases} a_i, & \text{если } i \leq n \\ A, & \text{если } n < i \leq 2^k \end{cases}$, где $A = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$

Применим $(\star\star)$ к $b_1, b_2, \dots, b_{2^k}$ $\implies$ $\left(a_1 a_2 \dots a_n A^{2^k - n}\right)^{\frac{1}{2^k}} \leq \frac{\overbrace{a_1 + \dots + a_n}^{=nA} + (2^k - n)A}{2^k} = A$
$\implies (a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{2^k}} \leq A^{\frac{n}{2^k}} \implies (\star)$ ▲

3. Полезно знать следующий трюк
   Как найти сумму

$$S = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \ ?$$

Можно сделать так:
· рассмотрим функцию

$$f(x) = x + x^2 + \dots + x^n \implies$$
$$\implies f'(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}$$

/ производная /
Легко видеть, что $S = f'\left(\frac{1}{3}\right)$

Но $f(x) = x + x^2 + \dots + x^n = x(\underbrace{1 + \dots + x^{n-1}}_{\text{сумма геометрической прогрессии}}) = x\frac{1-x^n}{1-x}$

Тогда $f'\left(\frac{1}{3}\right) = (x\frac{1-x^n}{1-x})' = \frac{(nx-n-1)x^n+1}{(x-1)^2} \implies f'\left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{\dfrac{3^{-n+1}(3^{n+1}-2n-3)}{4} = S}$

Если есть сомнения в корректности этого метода, то полученную формулу можно проверить по индукции