

Математический анализ

ДЗ к Семинар 2

1. а) Пусть последовательности $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{b_n\}_1^\infty$ расходятся.
Верно ли, что последовательности $\{a_n + b_n\}_1^\infty$ и $\{a_n b_n\}_1^\infty$ также расходятся?
б) Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ сходится и $\{b_n\}_1^\infty$ расходится. Что можно сказать о сходимости/расходимости $\{a_n + b_n\}_1^\infty$ и $\{a_n b_n\}_1^\infty$?
2. Пусть последовательности $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{b_n\}_1^\infty$ таковы, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = 0$. Верно ли следующее:
а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$?
б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ или $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$?
3. Тот же вопрос что и в 2, но дополнительно известно, что $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{b_n\}_1^\infty$ сходятся.
4. Найти $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{(-1)^n \frac{3n}{2n-1}\}_1^\infty$ и $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{(-1)^n \frac{3n}{2n-1}\}_1^\infty$.
5. Найти предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, если:
 - а) $a_n = \frac{3n^2 - 7n}{4n^2 + n + 5}$;
 - б) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$;
 - в) $a_n = \frac{n^2 + 3n - 2}{1 + 2 + \dots + (n-1) + n}$;
 - г) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$
Hint: сложить первый и последний член
 - е) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right)$
Hint: телескопическое суммирование
 - ф) $a_n = \frac{1}{n} (\sin(1) + \sin(2) + \dots + \sin(n))$
Hint:
 - 1) домножить a_n на $\sin \frac{1}{2}$
 - 2) воспользоваться формулой $2 \sin x \cdot \cos x = \cos(x - y) - \cos(x + y)$
 - 3) телескопическое суммирование
 - 4) воспользоваться формулой $\cos(x) - \cos(y) = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{y-x}{2}$ (необязательно)
 - 5) заметить, что $|\sin x| \leq 1$.

6. Пусть $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, доказать, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$, если $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

Примечание. как показывает пункт **ф)** из $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$ не следует $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$