Линейная алгебра и геометрия

Slava Boben

September 9, 2019

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Общая информация

1.1.1 Контакты

Авдеев Роман Сергеевич

- suselr@yandex.ru
- ravdeev@hse.ru

1.1.2 О дисциплине

1 – 4 модули
Письменный экзамен: 2, 4 модули

1.1.3 Оценка

1. Экзамен
2. Коллоквиум
3. Контрольная работа
4. Больше ДЗ
5. Работа на семинарах
6. Бонус – Задачи из листков

$$O_{\text{Итог}} = \min(10, \text{Округление}(0.4 * O_{\text{Экз}} + 0.22 * O_{\text{Колл}} + 0.16 * O_{\text{КР}} + 0.16 * O_{\text{ДЗ}} + 0.08 * O_{\text{Сем}} + 0.08 * O_{\text{Л}}), 10)$$

$$\text{Округление}(x) = [x]$$

1.1.4 Содержание курса

1. Начало алгебры — 9 – 10 занятий
   - Матрицы
   - Системы линейных уравнений
   - Определители
   - Комплексные числа
2. Собственно линейная алгебра
   - Вектороное пространство

1.2 Матрицы

Определение 1. Матрица размера $n \times m$ — это прямоугольная таблица высоты m и ширины n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_i j$ – элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца
Краткая запись – $A = (a_{ij})$
Множество всех матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ (множество всех действительных чисел) — $\text{Mat}_{n*m}(\mathbb{R})$ или Mat_{n*m}

Определение 2. Две матрицы $A \in \text{Mat}_{n\times m}$ и $B \in \text{Mat}_{p\times q}$ называются *равными*, если $m = p, n = q$, и соответствующие элементы равны

Пример. $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

1.2.1 Операции над матрицами

$A, B \in \mathrm{Mat}_{m*n}$

- *Сумма* $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$
- *Произведение на скаляр* $\alpha \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij})$

Свойства суммы и произведения на скаляр
$\forall A, B, C \in \mathrm{Mat}_{m*n} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(1) $A + B = B + A$ (коммутативность)
(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность)
(3) $A + 0 = 0 + A = A$, где $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
(4) $A + (-A) = 0$
$-A$ – Противоположная матрица
(5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
(6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
(7) $\lambda(\mu A) = \lambda\mu A$
(8) $1A = A$

Упражнение. Доказать эти свойства

Примечание. Из свойств (1) – (8) следует, что $\mathrm{Mat}_{n*m}(\mathbb{R})$ является векторным пространством над $\mathbb{R}$

1.2.2 $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \dots, n\}$
$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ – числовая прямая
$\mathbb{R}^2$ – плоскость
$\mathbb{R}^3$ – трехмерное пространство

Договоримся отождествлять $\mathbb{R}^n$ со столбцами высоты n
$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — "вектор столбец"
$\mathbb{R}^n \leftrightarrow \mathrm{Mat}_{n*m}(\mathbb{R})$

$$\left[x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\right] \implies [x = y \iff x_i = y_i \forall i]$$

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \dots)$

1.2.3 Транспонирование

$$A \in \mathrm{Mat}_{m*n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T \in \mathrm{Mat}_{n*m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A^T — Транспонированная матрица
Свойства:
(1) $(A^T)^T = A$
(2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

1.2.4 Умножение матриц

$A = (a_{ij})$
$A_{(i)}$ – i-я строка матрицы A
$A^{(j)}$ – j-й столбец матрицы A

(1) Частный случай: Произведение строки на столбец одинаковой длинны

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = x_1 * y_1 + \dots + x_n * y_n$$

(2) A - матрица размера $m * n$

B - матрица размера $n * p$

Кол-во строк матрицы A равно кол-ву столбцов матрицы B — условие согласованности матриц

$AB := C \in \mathrm{Mat}_{m*p}$, где $C_{ij} = A_{(i)}B^{(j)}$

Пример. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \dots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \dots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_m & \dots & x_ny_m \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*2+0*0+2*1 & 1*(-1)+0*5+2*1 \\ 0*2+(-1)*0+3*1 & 0*(-1)+(-1)*5+3*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

2 Лекция 2

2.1 Сумма

$S_p, S_{p+1}, \dots, S_q$ – набор чисел
$\sum_{i=p}^{q} S_i := S_p + S_{p+1} + \dots + S_q$ – сумма по i от p до q
$\sum_{i=1}^{1} 00i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$
Свойства

1. $\lambda \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{q} \lambda S_i$
2. $\sum_{i=1}^{q} (S_i + t_i) = \sum_{i=1}^{n} S_i + \sum_{i=1}^{n} t_i$
3. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} S_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m}$ – Сумма всех элементов матрицы $S = (s_{ij})$

2.2 Умножение матриц

$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}, B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$
$AB = C$
$c_{ij} = A_{(i)}B^{(j)} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{1n}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$
Свойства умножения матриц:

1. $\underbrace{A(B+C)}_{x} = \underbrace{AB+AC}_{y}$ – левая дистрибутивность

   Доказательство $x_{ij} = A_{(i)}(B+C)^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}bkj + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = yij$

2. $(A+B)C = AC + BC$ – правая дистрибутивность, доказывается аналогично

3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

4. $(AB)C = A(BC)$ – ассоциативность

   Доказательство

   $\underbrace{(AB)}_{u}C = x, A\underbrace{(BC)}_{v} = y$

$$
\begin{aligned}
x_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} u_{ik} * c_{kp} \\
&= \sum_{k=1}^{p} (\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk}) c_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} (\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk}) c_{kj}) \\
&= \sum_{l=1}^{n} (\sum_{k=1}^{p} a_{il} b_{lk}) ckj \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{il} (\sum_{k=1}^{p} b_{lk} c_{kj}) \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{il} v_{lj} \\
&= y_{ij}
\end{aligned}
$$

5. $\underbrace{\overset{T}{(AB)}}_{x} = \underbrace{B^T A^T}_{y}$

   Доказательство

$$x_{ij} = [AB]_{ji} = A_{(j)} B^{(i)} = (B^T)_{(i)} (A^T)^{(j)} = y_{ij}$$

Умножение матриц не коммутативно

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Определение 3. $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n} \implies A$ называется *квадртаной матрицей* подярка n

Обозн.: $M_n := \mathrm{Mat}_{n\times n}$
$A \in M_n$

Определение 4. Матрица $A \in M_n$ называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$)

$A = \implies A = diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Лемма. $A = diag(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

1. $\forall B \in Mat_{n\times p}, AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$

2. $\forall B \in Mat_{m\times n}$ *– аналогично (вектор строка)*

Доказательство

1. $[AB]_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij}$

2. $[BA]_{ij} =$

Определение 5. Матрица $E = E_n = diag(1, 1, \dots, 1)$ называется *единичной матрицей* порядка n.

Свойства

1. $EA = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$

2. $AE = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{p\times n}$

3. $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$

Определение 6. *Следом* матрицы $A \in M_n$ называется число $trA = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Свойства

1. $tr(A+B) = trA + trB$

2. $tr(\lambda A) = \lambda trA$

3. $tr(A^T) = tr(A)$

4. $tr(AB) = tr(BA) \forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}, B \in \mathrm{Mat}_{nm}$
   Доказательство
   $AB = x \in M_m, BA = y \in M_n$
   $trx = \sum_{i=1}^m x_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^n y_{ij} = try$

Пример. $A = (1, 2, 3), B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
$tr(AB) = tr(1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6) = 32$
$tr(BA) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$

2.3 Системы линейных уравнений

Определение 7. *Линейное уравнение* – $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$
$a_1, a_2, \dots, a_n, b$ – коэффициенты
$x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные

Система линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$
Основная задача: решить СЛУ

Пример. $n = m = 1$
$ax = b$
$a \neq 0 \implies x = \frac{b}{a}$
$a = 0 \implies 0x = b$
$b \neq 0 \implies$ нет решений
$b = 0 \implies x \in \mathbb{R}$ – бесконечно много решений

$$A \in Mat_{m\times n}(R) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – матрица коэффициентов}$$

$$B \in \mathrm{Mat}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ – столбец правых частей}$$

$$X \in \mathrm{Mat}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – столбец неизвестных}$$

$(*) \leftrightarrow Ax = b$ — Матричная форма записи СЛУ

Определение 8. СЛУ называется
– *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение
– *несовмествной*, если решений нет

3 Семинар 1

3.1 Контакты

Трушин Дмитрий Витальевич – Дима
trushindima@yandex.ru

3.2 Матрицы

3.2.1 Аномалии

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$
   $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$
   $A \neq 0 \cdot B \neq 0 = 0$

2. $A \neq 0$
   $A^2 = 0$
   $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$
   $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$

3.2.2 Блочные операции

A	B
C	D

X	Y
Z	W

$AX + BZ$	$AY + BW$
$CY + DZ$	$CY + DW$

$A \cdot B = A \cdot (B_1, B_2, \dots, B_N)$
$B = (B_1, B_2, \dots, B_N) = (AB_1, AB_2, \dots, AB_n)$

$A = (A_1, \dots, A_n)$
$B = (B_1, \dots, B_n)$

$$AB^T = (A_1, \dots, A_n) \begin{pmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ B_N^T \end{pmatrix} = A_1 B_1^T + \dots + A_n B_n^T$$

3.2.3 Кек

3.2.4 Лол

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

3.2.5 Хех

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline \end{array}^T$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A^T & C^T \\ \hline B^T & D^T \\ \hline \end{array}$$

3.2.6 Мда

$x \in M_n(\mathbb{R})$
$xJ_0 = J_0 x$