Лекции по математическому анализу

Slava Boben

September 5, 2019

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Общая информация

1.1.1 Контакты

Делицын Андрей Леонидович

- delitsyn@mail.ru
- adelistyn@hse.ru

1.1.2 Оценка

$$O_{\text{пром}} = \text{Округление}\left(\frac{1}{10}\text{ДЗ}_1 + \frac{1}{10}\text{КР}_1 + \frac{3}{10}\text{КК}_1 + \frac{5}{10}\text{Экз}_1\right)$$

$$O_{\text{итог}} = \text{Округление}\left(\frac{1}{20}\text{ДЗ}_2 + \frac{1}{20}\text{КР}_2 + \frac{3}{20}\text{КК}_2 + \frac{5}{20}\text{Экз}_2 + \frac{10}{20}O_{\text{пром}}\right)$$

$$\text{Округление}\,(x) = [x]$$

1.1.3 Коллоквиум

1 балл Простая задача (например, продифференцировать функцию)

Основная часть
На подготовку к основной части дается 40 минут

1 балл Формулировка теоремы без доказательства или определение некоторого понятия

2 балла Решить задачу

4 балла Доказательство теоремы

2 балла Дополнительные вопросы

1.1.4 Экзамен

То же что и коллоквиум, за исключением первой части (один балл с нее идет в второе задание)

1.1.5 Литература

1. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа: учеб. пособие для вузов, М.: МФТИ, 2000.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, СПб.: Лань, 2001.

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов, М.: АСТ: Астрель, 2004.

4. Л. Д. Кудрявцев [и др.]; Под ред. Л. Д. Кудрявцева. Сборник задач по математическому анализу: в 3 т.

5. Зорич, В. А. Математический анализ: учебник, М.: МЦНМО, 2015.

1.2 Теория пределов и непрерывных функций одной переменной

1.2.1 Понятие действительного числа

(a) *Натуральные числа*

$$\mathbb{N} - 1, 2, \dots, n, \dots$$

$$+, \times$$

(b) *Целые числа*

$$\mathbb{Z} - -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

$$+, -, \times$$

Группа - множество, в котором определена операция, такая что,

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, \quad \exists c \in \mathbb{Z}$$
$$c = a + b$$

Свойства групп:

1. $(a + b) + d = a + (b + d)$
2. $\exists 0 : a + 0 = a$
3. $\forall a\ \exists(-a)$
   $a + (-a) = 0$
4. $a + b = b + a$ — Коммутативная или абелевая

(c) *Рациональные числа*

$$\mathbb{Q} = \frac{m}{n}$$
$$m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$$

Операция сложения для рациональных цисел:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + nk}{nl}$$

Пусть есть два числа, $\forall a \in \mathbb{Q}, \forall b \in \mathbb{Q}$, для этих чисел определена операция умножения

5. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
6. $\exists 1 : a \times 1 = a$
7. $\forall a\ \exists a^{-1}$
   $a \times a^{-1} = 1$
8. $a \times b = b \times a$
9. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Таким образом рациональные числа – это группа по сложение и за исключением нуля по умножению. Если выполняются все 9 свойств — соответствующее множество называется полем. Возникает вопрос, достаточно ли рациональных цифр?

Вспомним теорему Пифагора — $a^2 + b^2 = c^2$. Допустим, $a = 1, b = 1$, тогда $c^2 = 2$. Для нас важно то, что это число c не может быть представлено никакой рациональной дробью, давайте проверим это.

Предположим что есть $c = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$. Можно считать что дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

$$c^2 = 2 \implies \frac{n^2}{m^2} = 2 \implies m^2 = 2n^2$$

m – четное, $m = 2p$

$$4p^2 = 2n^2 \implies n^2 = 2p^2$$

n – тоже четное, $n = 2k$

Тогда поделим n на m: $\frac{m}{n} = \frac{2p}{2k}$, дробь сократима, пришли к противоречию

Получается, множества рациональных чисел не хватает чтобы взять корень из двойки.

И вот теперь, мы сделаем следующее построение, позволяющее ввести понятие вещественных чисел, и вообще говоря, измерить любой отрезок на прямой

Будет ли это множество полем? Будет, и более того, это множество позволит нам решить проблему измерения любого отрезка. А есть ли какие либо поля, которые содержат в себе поле вещественных чисел? Есть, таким полем является поле комплексных чисел. Все ли свойства вещественых чисел имеют место для комплексных чисел? Нет, вещественные числа всегда можно сравнивать.

$\forall a, b$

1. $\begin{cases} a < b \\ b < a \\ a = b \end{cases}$
2. $a < b, b < c \implies a < c$
3. $a < b \implies \forall c : a + c < b + c$
4. $\forall c > 0 : a * c < b * c$

2 Семинар 1

2.1 Математическая индукция

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

Если 1) верно, 2) $\forall n : P_n \to P_{n+1} \implies P_n$ верно $\forall n$
$P_1 : \quad 3|1^1 - 1$ *верно*
$P_n : \quad 3|n^3 - n$
$P_{n+1} : \quad 3|(n+1)^3 - (n+1)$?

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3(n^2 + n) \end{aligned}$$

Задача 1. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$P_1 : 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$
Шаг: P_n верно, тогда

$$\begin{aligned} P_{n+1} : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

2.2 Неравенство бернулли

Задача 2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1; +\infty) \implies (1+x)^n \geq 1 + nx$

$$\begin{aligned} &P_1 : (1+x) \geq 1 + 1x \\ &P_n : (1+x)^n \geq 1 + nx \xrightarrow{(1+x) \geq 0} (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

Задача 3. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-2; +\infty) \implies (1+x)^n \geq 1 + nx$

$P_1 : 1 + x \geq 1 + 1x$
$P_n : (1+x)^n \geq 1 + nx$

$$\underbracket{(1+x)^{n+1}} + \underbracket{(1+x)^n} = (1+x)^n(\underbrace{1+x+1}_{x+2 \geq 0}) \geq (1+nx)(1+x+1) = \underbracket{1+(n+1)x} + \underbracket{1+nx(1+x)}$$

Для $x \in [-2; -1)$ выполняется $(1+x)^n \leq 1 \leq 1 + n\underbrace{x(1+x)}_{>0}$

2.3 Биноминальные коэффициенты

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

2.3.1 Бином Ньютона

Задача 4. *Доказать для* $a, b \neq 0$

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\end{aligned}$$

Пусть $x = \frac{a}{b}, x \in R$

$$\frac{(a+b)^n}{b^n} = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a^k}{b^k} \implies$$

$$\implies (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

Задача 5. *Доказать* $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

Докажем по индукции

$$\begin{aligned}P_1 : (1+x)^1 &= 1 + x = \binom{1}{0}1x^0 + \binom{1}{1}x^1 \\ P_{n+1} : (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) = (1+x)^n + (1+x)^n x \\ &= x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n + \\ &\quad + \binom{n}{0}x^1 + \binom{n}{1}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^n + x^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0}x^0 + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right)x^1 + \left(\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right)x^2 + \cdots + \left(\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right)x^n + x^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0}x^0 + \binom{n+1}{1}x^1 + \binom{n+1}{2}x^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}x^n + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}\end{aligned}$$

Задача 6. *Доказать* $2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1 = 2^n$$

$$x = 1 \implies 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k$$

2.4 Сумма геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{n}aq^{k-1} = S_n$$

$$S_n q = \sum_{k=1}^{n} aq^k = S_n - a + aq^n$$
$$= \underbrace{a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}}_{S_n} + aq^n - a \implies$$
$$\implies (q-1)S_n = aq^n - a \implies$$
$$\implies S_n = \begin{cases} a\frac{q^n-1}{q-1}, & q \neq 1 \\ na, & q = 1 \end{cases}$$

2.5 Рациональные числа с двумя десятичными представлениями

$\pi = 3.1415...$
$\frac{1}{3} = 0.3333...$
$1 = 1.00000...0... = 0.9999999...$
$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots = \frac{9}{10}(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots) = \frac{9}{10}\frac{10}{9} = 1$

3 Понятие предела числовой последовательности

$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, \dots, x_n = \frac{1}{n}, \dots$
$\lim_{x\to\infty} x_n = 0$

Определение 1. $x = \lim_{x\to\infty} x_n \quad \forall\epsilon > 0 \quad \exists N, \forall n > N \implies |x_n - a| < \epsilon$
$(a - \epsilon, a + \epsilon)$ – ϵ окрестность точки a.

Определение 2. x_n – называется бесконечно малым, если $lim_{x\to\infty} x_n = 0$

Теорема 1. $a = \lim_{x\to\infty} x_n \implies x_n = a + \alpha_n$, α_n *– бесконечно малая последовательность*
$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \implies |x_n - a| < \epsilon_n$
$\alpha_n = x_n - a$
$x_n = a + \alpha_n$
$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

Определение 3. $\{x_n\}$ (последовательность) называется ограниченной, если $\exists M > 0 \quad \forall n \implies |x_n| \leq M$

Определение 4. $\{x_n\}$ (последовательность) называется неограниченной, если $\forall M > 0 \quad \exists n_0 \implies |x_n| > M$

Определение 5. $\{x_n\}$ (последовательность) называется бесконечно большой, если $\forall M > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \implies |x_n| > M$

Утверждение. Сходящиеся последовательности ограничены

Утверждение. $a = \lim_{n\to\infty} x_n \implies \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies |x_n| \leq M$

4 Семинар 2

4.1 Числовые последовательности

$n \mapsto a_n, n \in N$
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto f(n)$

4.1.1 Общие понятия

1. Ограничена/не ограничена – $\exists M : \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \leq M$

2. inf и sup

   - s – sup для $\{a_n\}_1^\infty$, если
     (a) $\forall n : a_n \leq s$
     (b) $\forall s' < s \exists n \in \mathbb{N} \implies s' < a_n$
   - i – inf для $\{a_n\}_1^\infty$, если

(a) $\forall n : a_n \geq i$

(b) $\forall i' > i \exists n \in \mathbb{N} \implies a_n < i'$

3. Монотонность

4. Существование предела: число a называется пределом последовательности $\{a_n\}_1^\infty$, если $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies |a_n - A| < \epsilon$

5. $\{a_n\}$ бесконечно большая, если $\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies a_n > E$
   $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

6. $\{a_n\}$ бесконечно малая, если $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N : |a_n - A| < \epsilon$
   $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

7. Монотонно возрастающая ограниченная сверху ? (Сходится к sup)

4.2 Примеры

1. $\{(-1)^n\}$
   $-1 \leq a_n \leq 1 (\forall n)$
   $\inf\{a_n\} = -1$
   $\sup\{a_n\} = 1$
   Не монотонна
   Нет предела

2. $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} > 0$
   Монотонность:
   $a_{n+1} - a_n < 0$
   $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
   $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \frac{n+3-(n+2)}{n+2-(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}$
   Предел:
   $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$
   $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right) = 0$
   Является бесконечно малой (предел равен 0)

3. $\{\frac{n^2}{2^n}\}_n^\infty = \{\frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{9}{8}, \frac{16}{16}, \frac{25}{32}, \dots\}$
   $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 1 \leftrightarrow (1 + \frac{1}{n})^2 < 2 \leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \sqrt{2}$
   Монотонно убывает
   Предел:
   $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\lambda^n} = 0, \forall k \in \mathbb{N}, \lambda > 1$
   (Экспонента растет принципиально быстрее чем любой многочлен)

   Доказательство.
   $k = 1$
   $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n^2}{4}$
   $n - 1 \geq \frac{n}{2} \quad (\forall n \geq 2)$
   $$\lambda^n = (1 + \underbrace{\lambda - 1}_{>0})^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}(\lambda - 1)^i \overset{i=2}{\geq} \binom{n}{2}(\lambda-1)^2 \overset{n\geq 2}{\geq} \underbrace{\frac{(\lambda-1)^2}{4}}_{\text{константа}} \cdot n^2$$
   $\lambda^n \geq \frac{(\lambda-1)^2}{4} \cdot n^2$
   $\frac{n}{\lambda^n} \leq \frac{n}{\frac{(\lambda-1)^2}{4}} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{4}{(\lambda-1)^2} \cdot \frac{1}{n} \to 0$ ∎

4. $\{\frac{2^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty} \to 0, n \to +\infty$
   $n \geq 4$
   $\frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{8}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$
5. $a_n < b_n \quad \forall n \implies \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$
6.

   Теорема 2. $\forall n : a_n \leq b_n \leq c_n$
   $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n \implies \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$
7. $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n}$
   $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
   $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} \to 1$
8. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3^2]{3} \cdot \sqrt[3^3]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[3^n]{3}\right) = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3^2}} \cdot \dots \cdot 3^{\frac{1}{3^n}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}} = 3^{\frac{1\cdot(1-\frac{1}{3^n})}{3\cdot(1-\frac{1}{3})}} = 3^{\frac{1}{3}\frac{1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}} =$
   $3^{\frac{1\cdot 3}{3\cdot 2}} = 3^{\frac{1}{2}}$

5 Лекция 4

Утверждение. $\{a_n\}$ ограничена сверху.
$a = \lim x_n$
$\exists M : \forall n \implies x_n \leq M$

Доказательство. Пусть $a > M$
$a = \lim_{n\to\infty} x_n - \forall \epsilon > \exists N : \forall n > N \implies |x_n - a| < \epsilon$
Распишем модуль $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$
Наше предположение: $a > M$
Отсюда сразу следует, что $a - \epsilon < x_n \leq M$
Возьмем ϵ такое, что $a - \epsilon > M$, например $\epsilon = \frac{a-M}{2}$
Тогда, начиная с некоторого N все точки после x_N будут лежать в ϵ-окресности точки a.
$\forall n > N \implies x_n \geq M$ ■

Утверждение. $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, $b = \lim_{n\to\infty} x_n$ Тогда, $a = b$.

Доказательство. Допустим $a < b$
$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_1 : \forall n > N_1 \implies |x_n - a| < \epsilon$
$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_2 : \forall n > N_2 \implies |x_n - b| < \epsilon$
Выбираем $N = max(N_1, N_2)$
Тогда, для N будут справедливы оба неравенства.
Например, пусть $\epsilon = \frac{b-a}{2}$, тогда с одной стороны

$$\forall n > N \implies x_n < a + \epsilon < \frac{a+b}{2}.$$

а с другой стороны

$$\forall n > N \implies x_n > b - \epsilon > \frac{a+b}{2}.$$

■

Утверждение. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$
$\lim_{n\to\infty} y_n = b$

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$
2. $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = a \cdot b$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Доказательство.

1. Если есть есть беконечно малые последовательности, то их сумма тоже бесконечно малая.
   α_n – бесконечно малая
   β_n – бесконечно малая
   $\alpha_n + \beta_n$ – бесконечно малая
   $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 - \forall \epsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n > N_1 \implies |\alpha_n| < \frac{\epsilon}{2}$
   $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 - \forall \epsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n > N_2 \implies |\beta_n| < \frac{\epsilon}{2}$
   Пусть $N = max(N_1, N_2)$
   $\forall \epsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \implies |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \epsilon$
   $\lim_{n\to\infty} x_n = a - \forall \frac{\epsilon}{C} > 0\ \exists N : \forall n > N \implies |x_n - a| < C \cdot \frac{\epsilon}{C} = \epsilon$
   $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая
   $\{z_n\}$ – ораниченная ($\exists M > 0 : \forall n \implies \{z_n\} = M$)
   $\{\gamma_n\} = \{\alpha_n \cdot z_n\}$ – бесконечно малая
   $\forall \epsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \implies |\alpha_n| < \epsilon$
   $|\gamma_n| = |\alpha_n z_n| = |z_n||\alpha_n| \leq M \cdot \epsilon$
   $a = \lim_{n\to\infty} x_n \implies x_n = a + \alpha_n$
   $b = \lim_{n\to\infty} y_n \implies y_n = b + \beta_n$
   $x_n + y_n = a + b + (\alpha_n + \beta_n)$
   $\mu_n = \alpha_n + \beta_n$ – бесконечно малая

2. $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = a \cdot b + (\alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a + \alpha_n \cdot \beta_n) = a \cdot b + \mu_n$
   $\mu_n = \alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a + \alpha_n \cdot \beta_n$

3. $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} = \frac{a}{b} + \underbrace{\frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b}}_{\mu_n}$
   $\mu_n = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} + \frac{a}{b} = \frac{a \cdot b + \alpha_n \cdot b - a \cdot b - a\beta_n}{b(b+\beta_n)} = \alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a + \frac{1}{b(b+\beta_n}$
   $|b + \beta_n| = |b - (-\beta_n)| \geq ||b| - |\beta_n||$
   β_n – бесконечно малая
   $\forall \epsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \implies |b_n| < \epsilon$
   $\epsilon = \frac{|b|}{2}$
   $|b + \beta_n| > \frac{|b|}{2}$
   $\frac{1}{|b+\beta_n|} < \frac{2}{|b|}$
   $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \mu_n$, μ_n – бесконечно малая
   $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

■

Теорема 3. *Монотонная ограниченная последовательность сходится.*

1. $\forall n \implies x_n < x_{n+1}$
2. $\exists M : \forall n \implies x_n \leq M$

Доказательство. 1. $\{x_n\}$ ограничено сверху
   $\exists M = \sup\{x_n\}$
   $M \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} x_n$
   $\forall n \implies x_n \leq M$
   $\forall e > 0\ \exists \overline{x}_n \in \{x_n\} : \overline{x}_n > M - \epsilon$
   $\overline{x}_n = x_{n_0} > M - \epsilon$

■

6 Семинар 1

6.1 Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} a_n =?.$$

1.

$$\lim_{x\to+\infty} = \frac{5n^3-3n^2}{n^3+1} = \frac{n^3(s-\frac{3}{n})}{n^3(1+\frac{1}{n^3})} = \frac{s-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}} = \frac{s}{1}.$$

2.

$$a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n(1+\frac{1}{n}}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{1}.$$

3.

$$a_n = \sin(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}) = \sin\frac{1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}} \to 0.$$

4.

$$a_n = \frac{2^{\frac{n}{2}}+(n+1)!}{n(3^n+n!)} \to ?.$$

$$\frac{(n+1)!(\frac{2^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}+1)}{n\cdot n!(\frac{3^n}{n!}+1)} \to 1\cdot\frac{1}{1} =?.$$

5.

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \implies \sqrt[n]{n^k} \to 1.$$

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n)}{n}} \to 1.$$

$$(n!)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n!)}{n}}.$$

6.

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n^3}+\sqrt[n]{7}}{3\cdot\sqrt[n]{n^2}+\sqrt[n]{3n}} \to \frac{1}{2}.$$

7.

$$a_n = \frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{9^{\frac{1}{n}}-1} = \frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{(3^{\frac{1}{n}}-1)(3^{\frac{1}{n}}+1)} = \frac{1}{3^{\frac{1}{n}}+1} \to \frac{1}{2}.$$

8.

$$a_n = \sqrt[n]{3^n+7^n} = 7\sqrt[n]{1+\frac{3}{7}^n} = 7\cdot e^{\frac{\ln(1+(\frac{3}{7})^n)}{n}} =\to 7.$$

9.

$$a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n+5^n} = 5\sqrt{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n} \to 5.$$

10.

$$a_n = \frac{3n^2-7n}{1+2+\cdots+n} = \frac{n^2(3-\frac{7}{n})}{n^2(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})} \to \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6.$$

11.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$1 \le a_n \le 1$$

$$a_n \to 1.$$

12.
$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \quad \forall n \geq 1.$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$$

Предположим, что предел есть

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a \implies a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \implies a = \pm\sqrt{2}.$$

Осталось доказаться существование предела

Докажем, что $\{a_n\}$ ограничена и монотонна.

Доказательство ограниченности:

Гипотеза: $a_n \geq \sqrt{2}$

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} - \sqrt{2} = \frac{1}{2a^n}(a_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}a_n) = \frac{1}{2a_n}(a_n - \sqrt{2})^2 \geq 0.$$

Либо $(a + b \geq 2\sqrt{a \cdot b})$:
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \geq \frac{1}{2}2\sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}.$$

Теперь монотонность:

$$0 \leq a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2a_n}(\overbrace{a_n^2 - 2}^{\geq 0}).$$

13.
$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n} = ?.$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot ln(1 + \frac{1}{n}) = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{11}{n})^n.$$

$$(1 + \frac{11}{n})^{\frac{11}{n}\cdot 11}.$$

6.2 Разные штуки

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \to a \overset{?}{\implies} f(a_n) \to f(a)$
   $a_n = \frac{1}{n} \to 0 = a$
   $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
   $f(a_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$
   $f(a) = f(0) = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\lambda^n} = 0$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^n}{(n!)^\alpha} = 0$
   $\lambda \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{(ln(n)^{\beta}}{n^2}$
   $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{n!} = 1$