

Математический анализ

ДЗ к Семинар 3

1. Найти предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, если

a) $a_n = \frac{-3n+10}{-20n+1}$

b) $a_n = \frac{\sqrt[12]{n^{48}+19^{12}n^2+2019}}{\sqrt[4]{16n^{16}+12^{19}n^8+n^4+n^2+1+3n^4}}$

c) $a_n = \cos\left(\sqrt{n^2+20n} - \sqrt{n^2+15n}\right)$

d) $a_n = \sqrt[n]{\frac{2^n+3^n+4^n}{5^n+6^n}}$

e) $a_n = \frac{10^n+n!}{2^n+(n+1)!}$

f) $a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2-2}\right)^{n^2}$

2. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_m > 0$ – фиксированные вещественные числа. Тогда, найти

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n}$;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_1^{-n} + a_2^{-n} + \dots + a_m^{-n}}}$

3.

Теорема 1 (Штольца). Пусть

a) $b_{n+1} > b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L \in \mathbb{R}$

Тогда, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

Воспользовавшись 1, вычислить: $\lim a_n$, если

a) $a_n = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\dots+\sqrt[n]{n}}{n}$

b) $a_n = \frac{1^k+2^k+3^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}, k \in \mathbb{N}$ – произвольное

c) $a_n = \frac{1^k+2^k+3^k+\dots+n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}, k \in \mathbb{N}$ – произвольное