## Математический анализ

## ДЗ к Семинар 2

- а) Пусть последовательности  $\{a_n\}_1^{\infty}$  и  $\{b_n\}_1^{\infty}$  расходятся. Верно ли, что последовательности  $\{a_n+b_n\}_1^\infty$  и  $\{a_nb_n\}_1^\infty$  также расходятся?
  - b) Пусть  $\{a_n\}_1^\infty$  сходится и  $\{b_n\}_1^\infty$  расходится. Что можно сказать о сходимости/расходимости  $\{a_n + b_n\}_1^{\infty}$  и  $\{a_n b_n\}_1^{\infty}$ ?
- 2. Пусть последовательности  $\{a_n\}_1^\infty$  и  $\{b_n\}_1^\infty$  таковы, что  $\lim_{n\to+\infty}a_nb_n=0$ . Верно ли следующее:
  - a)  $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ ?
  - b)  $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$  или  $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ ?
- 3. Тот же вопрос что и в 2, но дополнительно известно, что  $\{a_n\}_1^\infty$  и  $\{b_n\}_1^\infty$  сходятся.
- 4. Найти  $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{(-1)^n\frac{3n}{2n-1}\}_1^\infty$  и  $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{(-1)^n\frac{3n}{2n-1}\}_1^\infty.$
- 5. Найти предел  $\lim_{n\to+\infty} a_n$ , если:
  - a)  $a_n = \frac{3n^2 7n}{4n^2 + n + 5}$ ;
  - b)  $a_n = \sqrt{n^2 + n} \sqrt{n^2 n};$
  - c)  $a_n = \frac{n^2 + 3n 2}{1 + 2 + \dots + (n 1) + n};$

d)  $a_n=rac{1}{n^2}+rac{2}{n^2}+\cdots+rac{n-1}{n^2}$  Hint: сложить первый и последний член

e) 
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right)$$

Hint: телескопическое суммирование

f) 
$$a_n = \frac{1}{n} (\sin(1) + \sin(2) + \dots + \sin(n))$$

Hint:

- 1) домножить  $a_n$  на  $\sin \frac{1}{2}$
- 2) воспользоваться формулой  $2\sin x \cdot \cos x = \cos(x-y) \cos(x+y)$
- 3) телескопическое суммирование
- 4) воспользоваться формулой  $\cos(x) \cos(y) = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{y-x}{2}$  (необязательно)
- 5) заметить, что  $|\sin x| \le 1$ .
- 6. Пусть  $\lim_{n\to+\infty}a_n=a$ , доказать, что  $\lim_{n\to+\infty}b_n=a$ , если  $b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

Примечание. как показывает пункт f) из  $\lim_{n\to+\infty} b_n = a$  не следует  $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$