Математический анализ

ДЗ к Семинар 2

1. a) Пусть последовательности $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{b_n\}_1^\infty$ расходятся.
   Верно ли, что последовательности $\{a_n + b_n\}_1^\infty$ и $\{a_n b_n\}_1^\infty$ также расходятся?

   b) Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ сходится и $\{b_n\}_1^\infty$ расходится. Что можно сказать о сходимости/расходимости $\{a_n + b_n\}_1^\infty$ и $\{a_n b_n\}_1^\infty$?

2. Пусть последовательности $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{b_n\}_1^\infty$ таковы, что $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$. Верно ли следующее:

   a) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$?

   b) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ или $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$?

3. Тот же вопрос что и в 2, но дополнительно известно, что $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{b_n\}_1^\infty$ сходятся.

4. Найти $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{(-1)^n \frac{3n}{2n-1}\}_1^\infty$ и $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{(-1)^n \frac{3n}{2n-1}\}_1^\infty$.

5. Найти предел $\lim_{n\to+\infty} a_n$, если:

   a) $a_n = \frac{3n^2-7n}{4n^2+n+5}$;

   b) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$;

   c) $a_n = \frac{n^2+3n-2}{1+2+\cdots+(n-1)+n}$;

   d) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$
   Hint: сложить первый и последний член

   e) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$
   Hint: телескопическое суммирование

   f) $a_n = \frac{1}{n}\left(\sin(1) + \sin(2) + \cdots + \sin(n)\right)$
   Hint:
      1) домножить a_n на $\sin\frac{1}{2}$
      2) воспользоваться формулой $2\sin x \cdot \cos x = \cos(x-y) - \cos(x+y)$
      3) телескопическое суммирование
      4) воспользоваться формулой $\cos(x) - \cos(y) = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{y-x}{2}$ (необязательно)
      5) заметить, что $|\sin x| \le 1$.

6. Пусть $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, доказать, что $\lim_{n\to+\infty} b_n = a$, если $b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

Примечание. как показывает пункт f) из $\lim_{n\to+\infty} b_n = a$ *не следует* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$