Линейная алгебра и геометрия

Slava Boben

September 9, 2019

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Общая информация

1.1.1 Контакты

Авдеев Роман Сергеевич

- suselr@yandex.ru
- ravdeev@hse.ru

1.1.2 О дисциплине

1 – 4 модули
Письменный экзамен: 2, 4 модули

1.1.3 Оценка

1. Экзамен
2. Коллоквиум
3. Контрольная работа
4. Больше ДЗ
5. Работа на семинарах
6. Бонус – Задачи из листков

$$O_{\text{Итог}} = \min(10, \text{Округление}(0.4 * O_{\text{Экз}} + 0.22 * O_{\text{Колл}} + 0.16 * O_{\text{КР}} + 0.16 * O_{\text{ДЗ}} + 0.08 * O_{\text{Сем}} + 0.08 * O_{\text{Л}}), 10)$$

$$\text{Округление}(x) = [x]$$

1.1.4 Содержание курса

1. Начало алгебры — 9 – 10 занятий
   - Матрицы
   - Системы линейных уравнений
   - Определители
   - Комплексные числа
2. Собственно линейная алгебра
   - Вектороное пространство

1.2 Матрицы

Определение 1. Матрица размера $n \times m$ — это прямоугольная таблица высоты m и ширины n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_i j$ – элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца
Краткая запись – $A = (a_{ij})$
Множество всех матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ (множество всех действительных чисел) — $\text{Mat}_{n*m}(\mathbb{R})$ или Mat_{n*m}

Определение 2. Две матрицы $A \in \text{Mat}_{n \times m}$ и $B \in \text{Mat}_{p \times q}$ называются *равными*, если $m = p, n = q$, и соответствующие элементы равны

Пример. $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

1.2.1 Операции над матрицами

$A, B \in \mathrm{Mat}_{m*n}$

- *Сумма* $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$
- *Произведение на скаляр* $\alpha \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij})$

Свойства суммы и произведения на скаляр
$\forall A, B, C \in \mathrm{Mat}_{m*n} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(1) $A + B = B + A$ (коммутативность)
(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность)
(3) $A + 0 = 0 + A = A$, где $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
(4) $A + (-A) = 0$
$-A$ – Противоположная матрица
(5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
(6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
(7) $\lambda(\mu A) = \lambda\mu A$
(8) $1A = A$

Упражнение. Доказать эти свойства

Примечание. Из свойств (1) – (8) следует, что $\mathrm{Mat}_{n*m}(\mathbb{R})$ является векторным пространством над $\mathbb{R}$

1.2.2 $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \dots, n\}$
$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ – числовая прямая
$\mathbb{R}^2$ – плоскость
$\mathbb{R}^3$ – трехмерное пространство

Договоримся отождествлять $\mathbb{R}^n$ со столбцами высоты n
$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — “вектор столбец”
$\mathbb{R}^n \leftrightarrow \mathrm{Mat}_{n*m}(\mathbb{R})$

$$\left[x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right] \implies [x = y \iff x_i = y_i \forall i]$$

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \dots)$

1.2.3 Транспонирование

$$A \in \mathrm{Mat}_{m*n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T \in \mathrm{Mat}_{n*m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A^T — Транспонированная матрица
Свойства:

(1) $(A^T)^T = A$
(2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

1.2.4 Умножение матриц

$A = (a_{ij})$
$A_{(i)}$ – i-я строка матрицы A
$A^{(j)}$ – j-й столбец матрицы A

(1) Частный случай: Произведение строки на столбец одинаковой длинны

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = x_1 * y_1 + \dots + x_n * y_n$$

(2) A - матрица размера $m * n$

B - матрица размера $n * p$

Кол-во строк матрицы A равно кол-ву столбцов матрицы B — условие согласованности матриц

$AB := C \in \mathrm{Mat}_{m*p}$, где $C_{ij} = A_{(i)}B^{(j)}$

Пример. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \dots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \dots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_m & \dots & x_ny_m \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*2+0*0+2*1 & 1*(-1)+0*5+2*1 \\ 0*2+(-1)*0+3*1 & 0*(-1)+(-1)*5+3*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

2 Лекция 2

2.1 Сумма

$S_p, S_{p+1}, \dots, S_q$ – набор чисел
$\sum_{i=p}^{q} S_i := S_p + S_{p+1} + \dots + S_q$ – сумма по i от p до q
$\sum_{i=1}^{1} 00i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$
Свойства

1. $\lambda \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{q} \lambda S_i$
2. $\sum_{i=1}^{q}(S_i + t_i) = \sum_{i=1}^{n} S_i + \sum_{i=1}^{n} t_i$
3. $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} S_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}$ – Сумма всех элементов матрицы $S = (s_{ij})$

2.2 Умножение матриц

$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}, B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$
$AB = C$
$c_{ij} = A_{(i)}B^{(j)} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{1n}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$
Свойства умножения матриц:

1. $\underbrace{A(B + C)}_{x} = \underbrace{AB + AC}_{y}$ – левая дистрибутивность

   Доказательство $x_{ij} = A_{(i)}(B + C)^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}bkj + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = yij$

2. $(A+B)C = AC + BC$ – правая дистрибутивность, доказывается аналогично
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
4. $(AB)C = A(BC)$ – ассоциативность

   Доказательство

   $\underbrace{(AB)}_{u}C = x, A\underbrace{(BC)}_{v} = y$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} u_{ik} * c_{kp} \\ &= \sum_{k=1}^{p}(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk})c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{p}(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk})c_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^{n}(\sum_{k=1}^{p} a_{il}b_{lk})ckj \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_{il}(\sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_{il}v_{lj} \\ &= y_{ij} \end{aligned}$$

5. $\underbrace{(\overset{T}{AB})}_{x} = \underbrace{B^T A^T}_{y}$

   Доказательство

$$x_{ij} = [AB]_{ji} = A_{(j)}B^{(i)} = (B^T)_{(i)}(A^T)^{(j)} = y_{ij}$$

Умножение матриц не коммутативно
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Определение 3. $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n} \implies A$ называется *квадртаной матрицей* подярка n

Обозн.: $M_n := \mathrm{Mat}_{n\times n}$
$A \in M_n$

Определение 4. Матрица $A \in M_n$ называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$)

$A = \implies A = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Лемма. $A = diag(a_1, \ldots, a_n) \in M_n \implies$

1. $\forall B \in Mat_{n\times p}, AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$

2. $\forall B \in Mat_{m\times n}$ *– аналогично (вектор строка)*

Доказательство

1. $[AB]_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij}$

2. $[BA]_{ij} =$

Определение 5. Матрица $E = E_n = diag(1, 1, \dots, 1)$ называется *единичной матрицей* порядка n.

Свойства

1. $EA = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$

2. $AE = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{p\times n}$

3. $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$

Определение 6. *Следом* матрицы $A \in M_n$ называется число $trA = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Свойства

1. $tr(A + B) = trA + trB$

2. $tr(\lambda A) = \lambda trA$

3. $tr(A^T) = tr(A)$

4. $tr(AB) = tr(BA) \forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}, B \in \mathrm{Mat}_{nm}$
   Доказательство
   $AB = x \in M_m, BA = y \in M_n$
   $trx = \sum_{i=1}^{m} x_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = try$

Пример. $A = (1, 2, 3), B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$tr(AB) = tr(1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6) = 32$
$tr(BA) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$

2.3 Системы линейных уравнений

Линейное уравнение – $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$
$a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ – коэффициенты
$x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные
Система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Определение 7. Решение одного уравнение – это такой набор $x_1, x_2, \dots, x_n$, при подстановке которого в уравнение получаем тождество.

Решение СЛУ – такой набор значений неизвестных, которые является решением каждого уравнения СЛУ.

Основная задача: решить СЛУ, т.е. найти все решениея.

Пример. $n = m = 1$
$ax = b$
1. $a \neq 0 \implies x = \frac{b}{a}$
2. $a = 0 \implies 0x = b$
   - $b \neq 0 \implies$ нет решений
   - $b = 0 \implies x \in \mathbb{R}$ – бесконечно много решений.

$$A \in Mat_{m\times n}(R) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – матрица коэффициентов}$$

$$B \in \mathrm{Mat}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ – столбец правых частей}$$

$$X \in \mathrm{Mat}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – столбец неизвестных}$$

$(*) \leftrightarrow Ax = b$ — Матричная форма записи СЛУ

Определение 8. СЛУ называется
– *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение
– *несовмествной*, если решений нет

3 Лекция 3

$Ax = b, A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$
Полная информация о СЛУ содержится в её *расширенной матрице* $(A|b)$.

Определение 9. Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

Пример. Рассмотрим несколько СЛУ

A) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

B) $\begin{cases} 2x_1 = 1 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

C) $x_1 + x_2 = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

A и B эквиваленты, так как обе имеют единственное решение $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
A и C не эквивалентны, так как C имеет бесконечно много решений.

3.1 Как решить СЛУ?

Идея: выполнить преобразование СЛУ, сохраняющее множество её решений, и привести её к такому виду, в котором СЛУ легко решается.

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$

3.1.1 Элементарные преобразования СЛУ и её расширенная матрица

тип	СЛУ	расширенная матрица
1.	К i-му уравнению прибавить j-ое, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ $(i \neq j)$	$Э_1(i, j, \lambda)$
2.	Переставить i-е и j-е уравнения $(i \neq j)$	$Э_2(i, j)$
3.	Умножить i-ое уравнение на $\lambda \neq 0$	$Э_3(i, \lambda)$

1. $Э_1(i, j, \lambda)$: к i-ой строке прибавить j-ую, умноженную на λ (покомпонентно),
   $a_{ik} \to a_{ik} + \lambda a_{jk} \forall k = 1, \ldots, n$, $b_i \to b_i + \lambda b_j$.
2. $Э_2(i, j)$: переставить i-ую и j-ую строки.
3. $Э_3(i, \lambda)$: умножить i-ю строку на λ (покомпонентно).

$Э_1, Э_2, Э_3$ называются *элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы.*

Лемма. *Элементарные преобразования СЛУ не меняют множество решений*

Доказательство. Пусть мы получили СЛУ$(\star\star)$ из СЛУ$(\star)$ путем элементарных преобразований.

1. Всякое решение системы $(\star)$ является решением $(\star\star)$.
2. $(\star)$ получается из $(\star\star)$ путем элементарных преобразований.

$(\star) \to (\star\star)$	$(\star\star) \to (\star)$
$Э_1(i, j, \lambda)$	$Э_1(i, j, -\lambda)$
$Э_2(i, j)$	$Э_2(i, j)$
$Э_3(i, \lambda)$	$Э_3(i, \frac{1}{\lambda})$

Следовательно, всякое решение $(\star\star)$ является решением $(\star)$ $\implies$ множества решений совпадают. ■

3.2 Ступенчатые матрицы

Определение 10. *Ведущим элементом* ненулевой строки называется первый её ненулевой элемент.

Определение 11. Матрица $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ называется *ступенчатой*, или имеет ступенчатый вид, если:

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают.
2. Все нулевые строки стоят в конце.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \diamond & * & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \diamond & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \diamond & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\diamond \neq 0$, $*$ – что угодно.

Определение 12. М имеет *улучшенный ступенчатый вид*, если:

1. М имеет обычный ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *1) Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду. 2) Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.*

Следствие. Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

Доказательство.

1. Алгоритм. Если M - нулевая, то конец. Иначе:

Шаг 1 Ищем первый ненулевой столбец, пусть j — его номер.

Шаг 2 Переставляем строки, если нужно, добиваемся того, что $a_{1j} \neq 0$

Шаг 3 Выполняем $Э_1(2, 1, -\frac{a_{2j}}{a_{1j}}), \ldots, Э_1(m, 1, -\frac{a_{mj}}{a_{1j}})$. В результате $a_{ij} = 0$ при $i = 2, 3, \ldots m$.

Дальше все повторяем для меньшей матрицы M'.

2. Алгоритм. Пусть $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$ – ведущие элементы ступенчатой матрицы.

Шаг 1 Выполняем $Э_3(1, \frac{1}{a_{1j_1}}), \ldots, Э_3(r, \frac{1}{a_{rj_r}})$, в результате все ведущие элементы равны 1.

Шаг 2 Выполняем $Э_1(r-1, r, -a_{r-1\ j_r}), Э_1(r-2, r, -a_{r-2\ j_r}), \ldots, Э_1(1, r, -a_{1\ j_r})$. В результате все элементы над a_{rj_r} равны 0.

Аналогично обнуляем элементы над всеми остальными ведущими.

Итог: матрица имеет улучшенный ступенчатый вид. ■

3.3 Применение элементарных преобразований СЛУ к матрицам

Всякое элементарное преобразование строк матрицы реализуется умножением как умножение слева на подходящую “элементарную матрицу”.

- $Э_1(i, j, \lambda) : A \to U_1(i, j, \lambda)A$, где

$$U_1(i,j,\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, на i-м j-м месте стоит λ, остальные элементы нули)

- $Э_2(i, j) : A \to U_2(i, j)A$, где

$$U_2(i,j) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & i & & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i-го и j-го столбца (там нули, на i-м j-м и j-м i-м местах стоит 1, остальные нули)

- $Э_3(i,\lambda) : A \to U_3(i,\lambda)A$, где

$$U_3(i,\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & i & & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i-го столбца, там λ, остальные элементы нули)

Упражнение. Доказательство.

Упражнение. Элементарные преобразования столбцов.

4 Метод Гаусса решения СЛУ (метод исключения неизвестных)

Дана СЛУ с расширенной матрицей $(A|b)$
Было: элементарные преобразования строк в $(A|b)$ сохраняют множество решений.

4.1 Алгоритм

Прямой ход метода Гаусса
Выполняя элементарные преобразования строк в $(A|b)$, приведем A к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_{ij_1} & * & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{rj_r} & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Случай 1 $\exists i \geq r+1 : b_i \neq 0$

Тогда в новой СЛУ i-е уравнение $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$, т.е. $0 = b_i \implies$ СЛУ несовместна

Случай 2 либо $r = m$, либо $b_i = 0 \quad \forall i \geq r+1$

Выполняя элементарные преобразования строк приводим матрицу к улучшенному ступенчатому виду – обратный ход метода Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ называются *главными*, а остальные *свободными*, где j_i – индексы столбцов с ведущими элементами.

Подслучай 2.1 $r = n$, т.е. все неизвестные – главные

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & b_1 \\ \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_r = b_r \end{cases} \quad \text{– единственное решение.}$$

Подслучай 2.2 $r < n$, т.е. есть хотя бы одна свободная неизвестная

Перенесем в каждом уравнении все члены со свободными неизвестными в правую часть, получаем выражения всех главных неизвестных через свободные, эти выражения называется *общим решением исходной СЛУ.*

Пример. Улучшенный ступенчатый вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Главные неизвестные: x_1, x_3
Свободные неизвестные: x_2, x_4.
$x_2 = t_1, x_4 = t_2$ – параметры.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3t_1 - t_2 \\ t_1 \\ 4 + 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 4 + 2x_4 \end{cases}$$

Следствие. Всякая СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ имеет либо 0 решений, либо одно решение, либо бесконечно много решений.

Определение 13. СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если все её правые части равны 0. Расширенная матрица: $(A|0)$

Очевидный факт: Всякая ОСЛУ имеет нулевое решение ($x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$).

Следствие. Всякая ОСЛУ либо имеет ровно 1 решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

Следствие. Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение

Доказательство. В ступенчатом виде будет хотя бы одна свободная неизвестная. Придавая ей ненулевое значение, получим ненулевое решение ■

4.2

$(\star)$Ax = b, совместная
Частное решение СЛУ$(\star)$ – это какое-то одно её решение.

Утверждение. Пусть $Ax = b$ – совместная СЛУ.
x_0 – частное решение
$S \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений ОСЛУ $Ax = 0$
$L \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений $Ax = b$.
Тогда, $L = x_0 + S$, где $x_0 + S = \{x_0 + v | v \in S\}$

Доказательство.

1. Пусть $u \in L$. Положим $v = u - x_0$

   Тогда $u = x_0 + v$.

   $Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = 0 \implies v \in S \implies L \subseteq x_0 + S$

2. Пусть $v \in S$, положим $u = x_0 + v$.

   Тогда, $Au = A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b \implies u \in L \implies x_0 + S \subseteq L$

■

4.3 Матричные уравнения

1. $AX = B$ A, B известны X – неизвестная матрица

2. $XA = C$ A, C известны X – неизвестная матрица

$XA = C \leftrightarrow A^T X = B^T$, т.е. достаточно уметь решать только уравнения первого типа.

4.3.1 Тип (I)

$\underset{n\times m}{A}\underset{m\times p}{X} = \underset{n\times p}{B}$ – это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} AX^{(1)} = B^{(1)} \\ AX^{(2)} = B^{(2)} \\ \quad\vdots \\ AX^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

Этот набор СЛУ надо решать одновременно методом Гаусса

Записываем матрицу $(A|B)$ и элементарными преобразованиями строк с ней приводим A к улучшенному ступенчатому виду.

Получаем $(A'|B')$ – A' имеет улучшенный ступенчатый вид.

Остается выписать общее решение для каждой СЛУ

$$\begin{cases} A'x^{(1)} = B^{(1)} \\ A'x^{(2)} = B^{(2)} \\ \quad\vdots \\ A'x^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

4.4 Обратные матрицы

Определение 14. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной*, к A, если $AB = BA = E$.

Обозначение: $B = A^{-1}$

Факты:

1. Если $\exists A^{-1}$, то она определена однозначно
2. Если $AB = E$ для некоторой $B \in M_n$, то $BA = E$ автоматически и тогда $B = A^{-1}$

Следствие. A^{-1} является решение матричного уравнения $AX = E$ (если решение существует)

4.5 Перестановки

Определение 15. *Перестановкой*(или подстановкой) на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ называется всякое биективное (взаимно однозначное) отображение

$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$