

# Лекции по математическому анализу

Slava Boben

September 5, 2019

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1</b>	<b>2</b>
1.1	Общая информация . . . . .	2
1.1.1	Контакты . . . . .	2
1.1.2	Оценка . . . . .	2
1.1.3	Коллоквиум . . . . .	2
1.1.4	Экзамен . . . . .	2
1.1.5	Литература . . . . .	2
1.2	Теория пределов и непрерывных функций одной переменной . . . . .	2
1.2.1	Понятие действительного числа . . . . .	2

# 1 Лекция 1

## 1.1 Общая информация

### 1.1.1 Контакты

Делицын Андрей Леонидович

- delitsyn@mail.ru
- adelistyn@hse.ru

### 1.1.2 Оценка

$$O_{\text{пром}} = \text{Округление} \left( \frac{1}{10} ДЗ_1 + \frac{1}{10} КР_1 + \frac{3}{10} КК_1 + \frac{5}{10} ЭКЗ_1 \right)$$
$$O_{\text{итог}} = \text{Округление} \left( \frac{1}{20} ДЗ_2 + \frac{1}{20} КР_2 + \frac{3}{20} КК_2 + \frac{5}{20} ЭКЗ_2 + \frac{10}{20} O_{\text{пром}} \right)$$
$$\text{Округление}(x) = [x]$$

### 1.1.3 Коллоквиум

**1 балл** Простая задача (например, продифференцировать функцию)

Основная часть

На подготовку к основной части дается 40 минут

**1 балл** Формулировка теоремы без доказательства или определение некоторого понятия

**2 балла** Решить задачу

**4 балла** Доказательство теоремы

**2 балла** Дополнительные вопросы

### 1.1.4 Экзамен

То же что и коллоквиум, за исключением первой части (один балл с нее идет в второе задание)

### 1.1.5 Литература

1. А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. Курс математического анализа: учеб. пособие для вузов, М.: МФТИ, 2000.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, СПб.: Лань, 2001.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов, М.: АСТ: Астрель, 2004.
4. Л. Д. Кудрявцев [и др.]; Под ред. Л. Д. Кудрявцева. Сборник задач по математическому анализу: в 3 т.
5. Зорич, В. А. Математический анализ: учебник, М.: МЦНМО, 2015.

## 1.2 Теория пределов и непрерывных функций одной переменной

### 1.2.1 Понятие действительного числа

(а) *Натуральные числа*

$$\mathbb{N} = 1, 2, \dots, n, \dots$$
$$+, \times$$

(б) *Целые числа*

$$\mathbb{Z} = -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$
$$+, -, \times$$

Группа - множество, в котором определена операция, такая что,

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, \quad \exists c \in \mathbb{Z} \\ c = a + b$$

Свойства групп:

1.  $(a + b) + d = a + (b + d)$
2.  $\exists 0 : a + 0 = a$
3.  $\forall a \exists (-a)$   
 $a + (-a) = 0$
4.  $a + b = b + a$  — Коммутативная или абелева

(с) *Рациональные числа*

$$\mathbb{Q} = \frac{m}{n} \\ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$$

Операция сложения для рациональных чисел:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + nk}{nl}$$

Пусть есть два числа,  $\forall a \in \mathbb{Q}, \forall b \in \mathbb{Q}$ , для этих чисел определена операция умножения

5.  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
6.  $\exists 1 : a \times 1 = a$
7.  $\forall a \exists a^{-1}$   
 $a \times a^{-1} = 1$
8.  $a \times b = b \times a$
9.  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Таким образом рациональные числа — это группа по сложению и за исключением нуля по умножению. Если выполняются все 9 свойств — соответствующее множество называется полем. Возникает вопрос, достаточно ли рациональных цифр?

Вспомним теорему Пифагора —  $a^2 + b^2 = c^2$ . Допустим,  $a = 1, b = 1$ , тогда  $c^2 = 2$ . Для нас важно то, что это число  $c$  не может быть представлено никакой рациональной дробью, давайте проверим это.

Предположим что есть  $c = \frac{m}{n}$ , где  $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$ . Можно считать что дробь  $\frac{m}{n}$  несократима.

$$c^2 = 2 \implies \frac{n^2}{m^2} = 2 \implies m^2 = 2n^2$$

$m$  — четное,  $m = 2p$

$$4p^2 = 2n^2 \implies n^2 = 2p^2$$

$n$  — тоже четное,  $n = 2k$

Тогда поделим  $n$  на  $m$ :  $\frac{m}{n} = \frac{2p}{2k}$ , дробь сократима, пришли к противоречию

Получается, множества рациональных чисел не хватает чтобы взять корень из двойки.

И вот теперь, мы сделаем следующее построение, позволяющее ввести понятие вещественных чисел, и вообще говоря, измерить любой отрезок на прямой

Будет ли это множество полем? Будет, и более того, это множество позволит нам решить проблему измерения любого отрезка. А есть ли какие либо поля, которые содержат в себе поле вещественных чисел? Есть, таким полем является поле комплексных чисел. Все ли свойства вещественных чисел имеют место для комплексных чисел? Нет, вещественные числа всегда можно сравнивать.

$\forall a, b$

1.  $\begin{cases} a < b \\ b < a \\ a = b \end{cases}$

2.  $a < b, b < c \implies a < c$

3.  $a < b \implies \forall c : a + c < b + c$

4.  $\forall c > 0 : a * c < b * c$