Лекция 22. Эйлерова характеристика

Жукова Н. И.

09.03.2023

Пусть X - замкнутая поверхность (связное компактное двумерное многообразие без края). Рассмотрим конечное представление $\Pi = \{M_i \mid i \in I\}$ поверхности X.

Определение 1 *Эйлеровой характеристикой представления Π поверхности X называется число*

$$\chi(\Pi) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

где α_0 - число классов склеиваемых вершин, α_1 - число пар склеиваемых сторон, α_2 - число многоугольников в представлении.

Теорема 1 *Эйлерова характеристика не меняется при элеемнтарных преобразованиях поверхности.*

Доказательство. Рассмотрим преобразование первого типа (1-укрупнение, т.е. удаление вершины). Что произошло: $\alpha_2' = \alpha_2$, $\alpha_1' = \alpha_1 - 1$, $\alpha_0' = \alpha_0 - 1$. Тогда

$$\chi(\Pi) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = (\alpha_0 - 1) - (\alpha_1 - 1) + \alpha_2 = \alpha_0' - \alpha_1' + \alpha_2' = \chi(\Pi')$$

То же верно и для обратной операции.

Теперь рассмотрим 2-разбиение (разъединение сторон). Тогда из $\Pi = \{M_i\}_{i \in I}$ получается $\Pi' = \{M_i'\} = \{M_j \mid j \in I \setminus \{i\}\} \cup \{M_{i1}, M_{i2}\}$. Имеем $\alpha_2' = \alpha_2 + 1$, $\alpha_1' = \alpha_1 + 1$, $\alpha_0' = \alpha_0$. Получаем

$$\chi(\Pi) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0' - \alpha_1' + \alpha_2' = \chi(\Pi')$$

Аналогично проверяется для обратной операции. $\square$

Замечание 1 *При элементарных преобразованиях поверхность заменятся гомеоморфной, то естьне меняется с точки зрения топологии.*

Теорема 2 *Любое представление любой замкнутой поверхности можно привести к каноническому виду с помощью элеемнтарных преобразований.*

План доказательства.
1. Склейка многоугольников представления в один;
2. Уничтожение рядом стоящих сторон вида $...aa^{-1}...$;
3. Склейка всех вершин в одну;
4. Выделение плёнок;
5. Выделение ручек;
6. Приведение к каноническому многоугольнику;

Доказательство.

1. Пусть X - любая замкнутая поверхность и $\Pi = \{M_i \mid i = \overline{1,k}\}$ — её представление. Выберем M_1. Выберем сторону $a \subset M_1$, которая склеивается со стороной из другого многоугольника $M_i, i \neq 1$. В противном случае, если M_1 склеивалась бы только с собой, Π не являлось бы связным правильным семейством многоугольников, разбивающееся на компоненты связности $\{M_1\}$ и $\{M_i \mid i = \overline{2,k}\}$. Итак, проведем склейку по a, получим новое семейство $\Pi' = \{M_i' \mid i = \overline{1,k-1}\}$. Мы снова получили представление поверхности. Повторяя эту процедуру конечное число $(k-1)$ раз, мы придем к представлению поверхности единственным многоугольником M.

2.1 Пусть других сторон нет, и мы имеем M - двуугольник со схемой aa^{-1}. Это - канонический многоугольник (сфера).

2.2 Пусть остался M со схемой $...aa^{-1}...$. Тогда найдется вершина D, не принадлежащая сторонам $a = AB$, $a^{-1} = CB$. Проведем 2-разбиение, создав сторону $b = BD$, а потом — 2-укрупнение, склеив вершины A и C, при этом вершина B уйдет вглубь.

3. Докажем, что всегда можно уменьшить число вершин, с которыми не склеивается конкретная вершина. Пусть A не склеивается с B, елси там одна картинка, то укрупнение. Если другая картинка: $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$. Тогда $y \neq x, y \neq x^{-1}$. Найдется такая сторона, что $\overline{EF} = y$ (склеивается с AB). Отрежем треугольник ABC и приклеим его к FE, поличим треугольник FEA'. Значит, число вершин многоугольника не изменилось, а число вершин, которые склеиваются с A, увеличилось. Мы придем к тому, что все вершины будут лежат в одном классе склеивания.

4. Пусть в схеме $\Pi = \{M\}$ имеется выражение $..c...c...$ Тогда говорят, что есть невыделенная плёнка Мёбиуса. Соединим начала сторон c стороной x, произведем картинку. Получили $...xx...$ Это и будет выделенная пленка. Заметим, что ранее выделенные пленки не разрушаются.

5. Предположим, что в схеме есть выражение $..a..a^{-1}..$ и существует b такое, что $..a..b..a^{-1}..b^{-1}...$ Пусть x соединяет начала ребер b. Разрежем по b И склеим по x. После этого разрежем по y, соединяющему начала x, и снова склем по y. Получили выделенную ручку: $...yx^{-1}y^{-1}x... = yzy^{-1}z^{-1}$.

6. Если в многоугольнике содержатся только выделенные пленки $a_1a_1...a_qa_q$, то $X \cong \mathbb{N}_q^2$ — поверхность гомеоморфна сфере с q пленками. Если $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}...a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$, то $\mathbb{S}_p^2$ — сфера с ручками.
Что будет, если у нас будут пленки и ручки? Покажем, что плёнку + ручку можно перевести в 3 плёнки. Пусть $...aba^{-1}b^{-1}..cc..$ — схема поверхнсоти. Разрежем по x, соединяющей середины этих комбинаций букв. Склеив по c, мы получим 3 невыделенные пленки. Снова применим шаг 4.

Таким образом, любое представление замкнутой поверхности элементарными преобразованиями приводится к некоторому каноническому многоугольнику, так как при элементарных преобразованиях поверхность остается гомеоморфной самой себе. □

Следствие. Каждая поверхность гомеоморфна сфере с n ручками или k пленками Мёбиуса.

Теперь покажем, что любое преобразование может привести только к одной канонической поверхности.

Лемма 1 *От любого представления замкнутой поверхности можно перейти к любому другому представлению поверхности с помощью конечного числа элементарных преобразований.*

Доказательство. Пусть $\Pi = \{M_i\}_{i \in \overline{1,k}}, \Pi' = \{M_j\}_{j \in \overline{1,m}}$ — два представления замкнутой поверхности X. Говорят, что эти представления находятся в общем положении, если каждая вершина каждого многоугольника из Π лежит внутри многоугольника из Π', и наоборот, и всякая сторона каждого многоугольника из Π пересекает каждую сторону каждого многоугольника из Π' по конечному множеству, возможно пустому (то есть стороны разных представлений не лежат друг на друге).

Малой деформацией любые два представления можно привести к общему положению. Не нарушая общности, считаем, что Π, Π' находятся в общем положении. Назовем измельчением представления Π любое представление Π^*, которое можно двумерными укрупнениями привести к Π. Для представлений, находящихся в общем положении, существует общее измельчение, чьи вершины - вершины исходных представлений + точки пересечения сторон. Очевидно, от этого нового представления можно перейти к любому из исходных с помощью укрупнений. Поэтому можно переходить и от Π к Π', так как все обратимо. □

Определение 2 *Эйлерова характеристика поверхности X называется эйлерова характеристика любого представления этой поверхности.*

Корректность определения: для каждой поверхности существует некоторое представление Π (например, триангуляция). Тогда положим $\chi(X) := \chi(\Pi) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$. По лемме 1, между любыми представлениями можно переходить за конечное число элементарных преобразований, по теореме 1 эйлерова харатеристика на меняется. Значит, эйлерова характеристика не зависит от представления.

Теорема 3 *Пусть X — каноническая поверхность. Тогда*

Доказательство. 1. $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ (так как две вершины).
2. $\chi(\mathbb{S}^2_p), p \geqslant 1$ - сфера с ручками: $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} ... a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$. Значит, $\chi = 2 - 2p$
3. $\chi(\mathbb{N}_q), q \geqslant 1$ - сфера с плёнками. Тогда $\chi = 2 - q$. $\square$
Следствие. Эйлеровы хаарктеристики сферы с p ручками и сферы с q пленками совпадают тогда и только тогда, когда $q = 2p$.

Теорема 4 *Эйлерова характеристика — топологический инвариант.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм замкнутых поверхностей, и пусть Π - представление для X. Тогда под действием f представление Π перейдет в представление для Y (поскольку топологические многоугольники переходят в в топологические многоугольники). Значит, гомеоморфные поверхности имеют общее представление, то есть у них одинаковая эйлерова характеристика. Итак, эйлерова характеристика — топологический инвариант. $\square$

Замечание 2 *Эйлеровая характеристика — не полный инвариант, так как она может не различать ориентируемые и неориентируемые поверхности.*

1 Ориентрируемые поверхности

Определение 3 *Замкнутая поверхность X называется ориентируемой, если существует такое представление поверхности $\Pi = \{M_i \mid i = \overline{1,k}\}$, в котором можно задать ориентацию каждого многоугольника так, чтобы склеиваемые стороны проходились в противоположных направлениях, то есть в направлениях a и a^{-1}. В противном случае поверхность называется неориентируемой.*

Ориентируемость — свойство поверхности быть ориентируемой.

Теорема 5 *(свойства ориентируемости)*
1. Ориентируемость поверхности не зависит от выбора представления.
2. Ориентируемость — топологический инвариант поверхности.

Доказательство. 1. Заметим, что ориентрируемость совхраняется при элементарных преобразованиях. Сначала рассмотрим одномерное укрупнение. Когда мы склеим две стороны, то при правильной склейке направление обхода должно совпадать. Также и при разбиении.

По лемме 1, от любого представления к любому представлению можно перейти с помощью конечного числа элементарных преобразований, значит ориентируемость не зависит от представления.

2. Пусть две поверхности гомеоморфны, и $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм замкнутых поверхностей. Согласно доказательству теоремы 4, у гомеоморфных поверхностей существует общее представление. Значит, ориентируемость — топологический инвариант. □

Теорема 6 *(ориентируемость канонических поверхностей)*
1. Сфера ориентриуема;
2. Сфера с $p \geqslant 1$ ручками ориентируема;
3. Сфера с $q \geqslant 1$ пленками неориентируема.

Доказательство. 1. У сферы существует ориентируемое представление: aa^{-1}.
2. У сферы с ручками существует ориентируемое представление
$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}...a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$.
3. У сферы с пленками каноническое представление $a_1a_1...a_qa_q$ неориентируемое. По теореме об инвариантности ориентируемости, из этого следует неориентируемость поверхности. □

Следствие. $\mathbb{S}_p^2 \not\cong \mathbb{N}_q^2$

Теорема 7 *(о классификации замкнутых поверхностей)*

Полная система топологических инвариантов для замкнутой поверхности — эйлерова характеристика и ориентируемость. Иначе говоря: $X \cong Y \iff \chi(X) = \chi(Y) \wedge$ у них совпадает ориентируемость.

Доказательство. Необходимость. Так как эйлерова характеристика и ориентируемость являются топологическими инвариантами, то они совпадают. Достаточность. Каждая замкнутая поверхность гомеоморфна одной из канонических, которые мы различаем по эйлеровой характеристике и ориентируемости. □

Замечание 3 *Нечетная эйлерова характеристика однозначно указывает на неориентируемость, т.е. она полный инвариант.*

Замечание 4 *Максимальная эйлерова характеристика, равная 2, соответствует сфере. Эйлерова характеристика, равная 1, соответствует проективной плоскости. Эйлерова характеристика, равная 0, соответствует тору либо бутылке Клейна. Эйлерова характеристика, равная -1, соответствует кренделю (сфере с двумя ручками).*

2 Классификация двумерных компактных многообраззий с краем

Пусть M — связное двумерное компактное многообразие с непустоым краем $\partial M \neq \varnothing$. Из компактности следует, что край имеет конечное число компонент связности. Обозначим $\mathbb{S}^2_{p,n}$ сферу с n "дырами"и p ручками, $\mathbb{N}^2_{q,n}$ сферу с n "дырами"и q пленками.

Определение 4 *Многообразия $\mathbb{S}^2_{p\geqslant 0, n\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^2_{q\geqslant 0, n\in\mathbb{N}}$ называются каноническими поверхностями с непустым краем.*

Теорема 8 *Любая связная компактная поверхность с непустым краем гомеоморфна одной из следующих канонических поверхностей:*
1. $\mathbb{S}^2_{0,n}$ *;*
2. $\mathbb{S}^2_{p,n}$ *;*
3. $\mathbb{N}^2_{q,n}$ *;*

Доказательство. Заклеим "дыры тогда мы получим одну из канонических замкнутых поверхностей, для которых получена классификационная теорема. □

3 Теорема Эйлера о многогранниках

Определение 5 *Многогранник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от плоскости, содержащей любую его грань, в противном случае называется невыпуклым.*

Теорема 9 *(Эйлер)*

$$В - Р + \Gamma = 2$$

где В — число вершин, Р — число ребер, Г — число граней.

Доказательство. Выпуклый многогранник гомеоморфен сфере, значит, его эйлерова характеристика как замкнутой поверхности равна 2. С другой стороны, у многогранника есть представление в виде виде его граней. □

Историческая справка. Декарт в 1620 г. доказал, что сумма всех углов граней выпуклого многоугольника равна $360^0(Р - \Gamma) = 360^0(В - 2)$. 1750: Эйлер. 1811 — Коши предложил более строгое доказательство. 1812 Симон Люилье: при рассмотрении кристаллов обнаружил эйлерову характеристику, отличную от 2. 20 век: при рассмотрении симплициальных комплексов также возникает отличная от 2 эйлерова характеристика.