# Дифференциальные уравнения

Гуревич

## Содержание


**1 Базовые определения** **2**

1.1 База . . . 2

1.2 ДУ первого порядка, разрешенные относительно производной . . . 2

1.3 Метод изоклин . . . 3

**2 Геометрические задачи, из которых возникают ДУ** **5**

2.1 Мини-рассказ про число e . . . 6

**3 Элементарные методы интегрирования ДУ** **7**

3.1 Уравнения с разделяющимися переменными . . . 7

3.2 Уравнения, приводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными . . . 8

3.3 Однородные уравнения . . . 8

# 1 Базовые определения

## 1.1 База

**Определение 1**

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^n x}{dt^n}) = 0 \tag{1}$$

Здесь $t$ - независмая переменная, $x(t)$ - искомая функция.

**Определение 2** $x(t) \in C^n$

**Примеры.** $\frac{dx}{dt} = 0$ - решение есть константа.
$\frac{dx}{dt} = 5$. Решение $x = 5t + c$. (Так как решение зависит от параметра-константы, говорят об однопараметрическом семействе решений. Если задать $x(0)$, то решение будет единственным, зависящим от начального условия).
$\frac{d^2x}{dt^2} = w$ - уравнение равноускоренного движения. Решение: $x = \frac{wt^2}{2} + c_1 t + c_2$, где $c_1, c_2$ - начальная скорость и начальная координата соответственно.
**Пример.** Для уравнения $\frac{dx}{dt} = f(t)$, если функция в правой части непрерывна на отрезке $(a, b)$, тогда общее решение имеет вид $x = \int f(t)dt$. Более точно, $t_0 \in (a, b)$, тогда $x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + x(0)$.

**Определение 3**

Естественно возникает вопрос, существует ли решение ДУ и единственно ли оно при заданных начальных условиях? Выражается ли оно через элементарные функции? Какова его область определения и значения?

## 1.2 ДУ первого порядка, разрешенные относительно производной

**Определение 4**

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2}$$

**Пример.** $(\frac{dx}{dt})^2 - x^2 = 0$ - не разрешенное относительно производных, но оно раскладывается в два таких уравнения.
Минимальные требования к функции $f$ - определенность в области
Геометрический смысл уравнения : рис1.
Говорят, что уравнение 1.2 определяет поле направлений в фазовом пространстве (в отличие от в фазовом пространстве): каждой точке сопоставляется направление, определяемое функцией $f(x,t) = \operatorname{tg}\alpha$ (поскольку длина вектора не определена, говорят имено о поле направлений). Кое-кто говорит, что ДУ и поле направлений это одно и то же, поскольку ДУ биективно соответствуют полям направлений).
**Пример.** Пусть $x(t)$ - количество зараженных вирусом в момент времени $t$. Допустим, что скорость заражения пропорциональная количеству уже зараженных людей. Запишем это в виде ДУ:

$$\frac{dx}{dt} = kx,\ k > 0$$

Мы получили простейшую модель роста населения Мальтуса. Очевидно, решение $x(t) = x_0 e^{kt}$. Проблема с такой моделью состоит в том, что количество людей дискретно, а найденная нами функция непрерывна. Корректировка состоит в том, что $x(t)$ понимается в смысле .
**Пример.** Рассмотрим более интересное уравнение (уравнение Бернулли, оно же логистическое уравнение): $\frac{dx}{dt} = k(x)x$. Допустим, что $k(x)$ - линейная убывающая функция. Тогда $\frac{dx}{dt} = (k_0 - \frac{k_0 x}{h})x$. (Здесь $k_0 = k(0),\ h = k^{-1}(0)$). Получаем нелинейное уравнение, в котором переменные не разделяются. Теперь можно рассмотреть подробнее поле направлений. Пусть $\Gamma_0$ - множество точек $(t,x)$, в которых $\frac{dx}{dt} = 0$, то есть векторы поля параллельны оси $Ot$. Решим уравнение $0 = x(k_0 - \frac{k_0}{h}x)$.
Получаем следующее поле: рис 2. Кривые, заключенные в середине, называются логистическими кривыми. "Крутизна"логистической кривой зависит от параметра $k_0$. Данное уравнение было рассмотрено Ферхюльстом как уточнение модели Мальтуса.

## 1.3 Метод изоклин

Метод изоклин заключается в рисовании и исследовании графиков решений уравнения 1.2.

**Определение 5** $\alpha\Gamma_\alpha\alpha$

То есть, $\Gamma_\alpha\colon\ \operatorname{tg}\alpha = f(t,x)$
Опишем алгоритм метода изоклин на примере. Пусть задано уравнение $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$.

1. Найдем $\Gamma_0 : 0 = \frac{x}{t}$ (то есть $x = 0$ $(t \neq 0)$) Найдем $\Gamma_{90} : \frac{t}{x} = 0$, то есть $t = 0$ $(x \neq 0)$ Получили, что эти гаммы есть координатные оси.

2. Определим области с постоянным знаком $\frac{dx}{dt}$ (среди тех, на которые плоскость разбивается изоклинами)

3. Исследуем симметрии уравнений, например относительно $x \to -x$, $t \to -t$ (или одновременного применения). Эти симметрии эквивалентны отражению относительно осей.

4. Нахождение точек перегиба и областей выпуклости, вогнутости интегральных кривых.

5. Приближенное построение интегральных кривых (то есть решений уравнения).

РИС 3!!!! **Замечание.** Не все интегральные кривые являются решениями. Так, в рассмотренном примере ось $Ox$ - интегральная кривая, но она очевидно не является решением (так как не является функцией).
Метод изоклин является качественным, и он не дает более подробной информации о геометрии кривых. В данном конкретном примере интегральные кривые - в точности прямые, проходящие через точку $(0, 0)$, поскольку мы заметили, что в каждой точке направление касательной к интегральной кривой совпадает с прямой, соединяющей эту точку и начало координат.
**Пример.** Немного изменим уравнение: $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$. Главные изоклины точно такие же, как у предыдущего, а вот знаки в координатных четвертях меняются. Поле направлений выглядит совершенно по-другому, в нем гиперболы. РИС4.
**Пример.** Получим уравнение окружности с помощью ОДУ, исходя из следующего свойства: касательная перпендикулярна радиусу. То есть мы имеем некоторое поле направлений, исходя из которого можно восстановить ДУ: РИС5 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{y_0}{x_0}$ Поскольку $\alpha = \beta + 90$, имеем $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta + 90) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$. В итоге уравнение имеет вид $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = -\frac{x_0}{y_0}$ или, если сотрем нолики (поскольку свойство универсально)

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y}$$

Заметим, что это же уравнение можно получить дифференцированием обычного уравнения окружности. Решая его, в качестве параметра вылезет что-то, отвечающее за радиус.
Посмотрим на изоклины этого уравнения: РИС6. Ещё по приколу можно посчитать изоклины на $45^0$.

## 2 Геометрические задачи, из которых возникают ДУ

**Пример (№17).** Составим уравнение, решением которого является семейство функций $y = e^{cx}$. Поскольку в этом уравнении есть один параметр, уравнение будет включать производную первого порядка. Найдем её: $y' = ce^{cx}$. Теперь выразим параметр через производнуюи подставим обратно в функцию: $c = \frac{\ln y}{x}$, значит, искомое ДУ имеет вид $y' = \frac{\ln y}{x} e^{\ln y}$.
**Пример (№25).** Дано семейство функций $y = ax^2 + be^x$. Найдем ДУ, решениями которого они являются. Так как у нас два параметра: $a$ и $b$, то и уравнение будет второго порядка. Найдем производные: $y' = 2ax + be^x$, $y'' = 2a + be^x$. Далее решаем чисто алгебраическую систему, чтобы найти параметры. Имеем

$$y - y'' = 2a(x-1) \implies a = \frac{y' - y''}{x-1}$$

$$y'' = \frac{2(y' - y'')}{2(x-1)} + be^x \implies \frac{1}{e^x}\left(y'' - \frac{y' - y''}{x-1}\right) = b$$

$$y = \frac{y' - y''}{2(x-1)} x^2 + \left(y'' - \frac{y' - y''}{x-1}\right)$$

Возникает вопрос: а единственно это решение? Здесь мы пользуемся теоремой о неявной функции.
**Пример (№30).** Составим уравнение для окружностей, центры которых лежат на $y = 2x$. Уравнение окружностей $(x - x_0)^2 + (y - 2x_0)^2 = 1$. Ответом должно быть однопараметрическое семейство решений, которые соответствуют различным положениям центра на прямой. Дифференцируем:

$$2(x - x_0) + 2(y - 2x_0)y' = 0 \implies x_0 = \frac{x + yy'}{1 + 2y'}$$

Подставим выражение для параметра обратно в уранвение:

$$\left(x - \frac{x + yy'}{1 + 2y'}\right)^2 + \left(y - 2\frac{x + yy'}{1 + 2y'}\right)^2 = 1$$

**Пример (№71).** Найдем кривые, касательные которых заметают одинаковые площади под своим графиком. Пусть $f(x) = y$ - искомая кривая. Её производная не может быть нулевой, иначе она не образует треугольник с осью абсцисс.

Фикисруем точку $x_0$. Получаем условие: $\frac{y^2(x_0)}{2y'(x_0)} = a^2 \implies y' = \frac{y^2}{2a^2}$. Если производная отрицательная, то в этой формуле должен вылезти минус (и формально мы имеем два случая, поэтому

$$y' = \pm\frac{y^2}{2a^2}$$

Проинтегрируем (переменные разделяются): $\frac{1}{y} = \pm\frac{1}{2a^2}x + C$ Итак,

$$y = \frac{2a^2}{2a^2C \pm x}$$

**Пример (№73).** Ещё одна геометрическая задачка. Беглый анализ: производная не равна нулю. Уравнение касательной: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Точка пересечения с осью абсцисс: $x_k = \frac{-y_0}{y'(x_0)} + x_0$. Уравнение нормали: $y = -\frac{1}{y'}(x - x_0) + y_0$. Точка пересечения нормали с осью абсцисс: $x_n = y_0y' + x_0$. Диффур снова распадается на два случая... $|KN| = |x_k - x_n| = |\frac{y}{y'}$. Рашаем дома кароч.

## 2.1 Мини-рассказ про число e

Архимед в общем-то знал, что при умножении показатели степеней складываются. Это легко получить из анализа обычной геометрической пргрессии. В XV веке начали торговать, используя сложные проценты. Возник вопрос, можно ли полутать бесконечное количество денег при уменьшении периода факторизации. Какой-то челик (Саймон вставить фамилию) решил написать таблицу сложных процентов, чтобы полутать денег с её использования, и оказалось, что ответ на предыдущий вопрос отрицательный. Иоста Бюрге (помощник Кеплера) посмотрел на таблицы и полутал с них инфу о том, что с их помощью можно перемножать огромные числа. Джон Непер составил более юзабельные таблицы, ввел понятие логарифма, и кароч дальше вводим предел для натуральных чисел, переходим к непрерывной хрени... Теперь фокус: $e^k = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{nk} = (1 + \frac{k}{m})^m = \sum\limits_{i=0}^{m} C_m^i(\frac{k}{m})^i = \sum\limits_{i=0}^{m} \frac{k^i}{i!}$. Эту хрень придумал Бернулли, и она сходится к $e$ быстрее обычного предела. Можно это положить за определение $e^x$, и мгновенно распространить на любые действительные показатели степеней.

# 3 Элементарные методы интегрирования ДУ

## 3.1 Уравнения с разделяющимися переменными

**Определение 6**

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t) \tag{3}$$

$f, gx \in (a, b), t \in (\alpha, \beta)$

Как решать такие уравнения? Алгебраическая нтуиция подсказывает, что надо перенести дифференциалы к своим функциям и проинтегрировать. Но это ещё надо обосновать. Сделаем следующее:

1. Найти все $x_* : f(x_*) = 0$. Тогда $x = x_*$ - решение-константа.

2. Пусть $x_*^i, x_*^j$ - такие, что $f(x_*^i) = f(x_*^j) = 0$ и $\forall x \in (x_*^i, x_*^j) : f(x) \neq 0$. Тогда уравнение 3 эквивалентно уравнению

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$$

   Эту штуку можно проинтегрировать с обеих сторон. Результат непрерывен и не обращается в ноль. Значит, по теореме о неявной функции найдется решение. $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{x}$(решение в области $(\alpha, \beta) \times (x_*^i, x_*^j)$).

3. Выписать решение на каждом интервале $(x_*^i, x_*^j)$

Других решений не существует. Почему? Допустим, существует другое решение. Оно не может быть константой, так как все константы были получены в п.1. Если она

**Пример.** Решим уравнение $\frac{dx}{dt} = 0$. Решение-константа: $x = 0$. Теперь рассмотрим два интервала: $x < 0$ и $x > 0$. Если $x < 0$, имеем уравнение

$$\frac{1}{x}\frac{dxdt}{dt} = dt$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt$$

Получаем, что $\ln|x| = t + C$. Выражаем искомую функцию (не забыв, на каком промежутке мы рассматриваем функцию, и раскрыв модуль соответственно):

$$x = -Ce^t,\ C > 0$$

Для интервала $x > 0$ точно такой же порядок действий, только получим другой знак. Итак, множество решений:

$$x = Ce^t,\ C \in \mathbb{R}$$

## 3.2 Уравнения, приводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными

**Определение 7**

$$\frac{dx}{dt} = f(at + bx + c) \tag{4}$$

Давайте решим его.

1. Введем замену $z(t) = at + bx + c$. Имеем

$$\frac{dz}{dt} = a + b\frac{dx}{dt}$$

   Получаем уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{a + f(z)} = dt$$

**Пример.** Решим уравнение $\frac{dx}{dt} = \cos(x+t)$. Замена $z = x + t,\ \frac{dz}{dt} = 1$. Уравнение имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + 1$$

Найдем $\cos z_* + 1 = 0$: это, очевидно, $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ Свели задачу кпрошлому пункту

## 3.3 Однородные уравнения

Сначала докажем, что два определения однородного уравнения эквивалентны.

**Определение 8**

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right) \tag{5}$$

Это уравнение инвариантно относительно замены $x \mapsto kx,\ t \mapsto kt$. Геометрически это означает, что совокупность интегральных кривых инвариантно относительно преобразования $\theta(x, y) = (kx, ky)$. Из этого следует, что если мы найдем одно решение, то мы найдем всю совокупность ему подобных. Вставить картинку.

**Определение 9**
$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Это таже форма, что и $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, поскольку $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Обратно, $-f(x,y)dx + dy = 0$. Уравнение в форме дифференциалов имеет чуть большее множество решений.

**Определение 10**
$M(kx,ky) = k^n M(x,y)$
$N(kx,ky) = k^n N(x,y)$

**Теорема 1**

**Доказательство.** $1 \Rightarrow 2$. $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$
$2 \Rightarrow 1$. Пусть дано уравнение в форме дифференциалов. Подставим $k$. При $x \neq 0$ Имеем

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{k^n M(x,y)}{k^n N(x,y)} = -\frac{M(kx,ky)}{N(kx,ky)} = -\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})} = f(x)$$

$\square$
**Пример.** $M = x^2 + y^2$
**Пример (№31).** Найти уравнение, решение которых - параболы с осью, параллельной оси ординат и касающиеся прямых $y = 0$, $y = x$. Во-первых, поймем, как выглядит уравнение такой параболы. Исходя из геометрии, получим, что уравнение параболы, удовлетворяющее первому условию, имеет вид $y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$, а первому и второму - $y = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16a}$. Остался один параметр $\Rightarrow$ уравнение первого порядка. Подставляем и хаваем ответ бесплатно:

$$y = \left(\frac{y' - \frac{1}{2}}{2x}\right) x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{2x}{16y' - 8}$$

**Пример (№72).** Найти линии, у которых треугольники, образованные касательными, осью OX и точкой касания, имеют одинаковую сумму катетов. Из геометрических соображений имеем уравнение

$$\frac{|y|}{|y'|} + |y| = b = const$$

Раскрываем модули. В простейшем случае имеет уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{b - y}$$

Остальные уравнения такие же в принципе. Так шо это идет в дз Его легчайшее (и, видимо, общее) решение: $x + C = \pm b \ln |y| \pm y$
**Пример (№76).** Геометрическая интуиция не должна подводить нас. Вставить картинку. Есть кароч такая формула: $\operatorname{tg} \gamma = \frac{r}{r'}$