Н. И. Жукова

Введение в топологию

Содержание

Определение 1 *Пусть X - множество. Топологией на X называется семейство подмножеств $\tau \in \mathcal{P}(X)$, называемых открытыми множествами (данной топологии), такое, что:*
1. $X, \varnothing \in \tau$
2. $U_1, \dots U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau$
3. $\{U_i \mid i \in I\} \subset \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \tau$

То есть, топологии принадлежит само множество и пустое множество, пересечение конечного числа множеств и объединение любого числа множеств из топологии.

Пример. Докажем, что открытые множества в смысле евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$ - топология. Очевидно, открыто само $\mathbb{R}^n$, также открытои пустое множество. Открытость пересечения доказывается тем, что наименьшая эпсилон-окрестность принадлежит всем множествам,то есть лежит в их пересечении, слеовательно, оно открыто. Для объединения: для каждой точки найдется множество, в которое она входит с окрестностью.

Определение 2 *Тривиальная топология -* $\tau_t = \{X, \varnothing\}$
Дискретная топология - $\tau_0 = \mathcal{P}(X)$

Любая инетерсная топология содержит тривиальную и содержится в дискретной.

Пример. Множества, симметричные относительно выбранной прямой в евклидовом пространстве,образуют топологию.

Пример. Множество эпсилон-окрестностей нуля $\tau = \{D_\varepsilon(0) \mid \varepsilon > 0\} \cup \{X, \varnothing\}$ - топология.

Пример. Топология Зарисского - топология множеств, дополнительных к конечным множествам (для конечных пространств совпадает с дискретной).

Пример. Пусть $f : X \to X$ - биекция. Докажем, что $\tau_f = \{U \subset X \mid$

1 База топологии

Определение 3 *Пусть (X, τ) - топологическое пространство Семейство $\Sigma = \{W_\beta \subset X \mid \beta \in B\}$ - база топологии, если удовлетворяет двум условиям:*
1. $\Sigma \in \tau$ $\forall W_\beta \in \Sigma$ *2. Любое открытое подмножество X можно представить в виде объединения некоторых подмножеств из Σ:* $\forall U \in \tau \exists W_\alpha \in \Sigma,\ \alpha \in A \subset B : U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} W_\alpha$

Пример. В обычной (евклидовой) топологии множество $\Sigma = \{D_r(a) \mid a \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ является базой топологии. Действительно, проверим аксиомы:
1. Открытая окрестность открыта.
2. По определению обычной топологии,каждая точка в открытом множестве содержится в нем с некоторой окрестностью. Значит, объединение этих окрестностей дает это множество. Более формально, $\forall u \in \tau, \forall x \in U \Rightarrow \exists D_{\varepsilon_x}(x) : D_{\varepsilon_x}(x) \in U$. Очевидно доказывается. что

$$\boxed{\bigcup_{x\in U} D_{\varepsilon_x}(x) = U}$$

Замечание. Если к базе добавить произвольное открытое множество, то новое множество также будет базой.
Упражнение. Привести пример двух баз евклидовой топологии на плоскости, которые не пересекаются с обычной базой (открытых шаров). (Решение: например, база из открытых квадратных или звездчатых окрестностей).
Пример. В $(\mathbb{R}^2, \tau_{MN})$, $\Sigma_{MN} = \{(b, b^*) \mid b \in\}$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Пример. Топология ираациональных точек на прямой $(\mathbb{R}, \tau_{im})$, $\tau_{im} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. Множество иррациоанльных точек не является базой, поскольку их объединение не содержит всю прямую. Решение: добавить саму прямую. !!!!!!!!!!!!

Теорема 1 *(критерий базы в топологическом пространстве)*
Пусть (X, τ) - опологическое пространство, и семейство множеств удовлетворяет условию $\sigma \subset \tau$. Σ является базой топологии тогда и только тогда, когда $\forall u \in \tau, \forall x \in U \exists W_{\beta_0} \in \Sigma : x \in W_{\beta_0} \subset U$

Доказательство. Пусть Σ - база топологии. Тогда любое открытое множество можно представить в виде объединений множеств из базы. Значит, для $x \in U$ найдется множество из базы, в котором лежит x.
Обратно. Множесто Σ удовлетворяет первой аксиоме базы по определению. Докажем выполнение второй аксиомы. Для любой точки в открытом множестве по условию теоремы найдется окрестность из Σ, лежащая в открытом множестве. !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! □

Теорема 2 *(критерий базы на множестве)*
Пусть X - произвольное множесто, $\Sigma = \{W_\beta \subset X \mid \beta \in B\}$ - семейство подмножеств из X. ЧТобы на X существовала топология с

данной базой, необходимо и достаточно выполнения двух условий:
1. $X = \bigcup_{\beta \in B} W_\beta$
2. Для любых множеств из базы найдется множество, лежащее в их пересечении и содержащее произвольную точку оттуда.

Доказательство. Необходимость. Пусть Σ - база некотрой топологии (X,т). Из акиомы базы (2) следует,что что X есть объединение множеств из Σ. значит, выполняется первое условие теоремы. Докажем второе условие. Достаточно взять пересечение двух множеств из базы. Так как это открытые множества, его также можно представить в виде объединения множеств из базы, и хотя бы в одном из которых лежит фиксированная точка (по определению объединения).
Достаточность. Докажем, что всевозможные объедения множеств из Σ является топологией. пусть это есть τ. Проверим аксиомы топологии:
1. Пустое множество принадлежит всему, чему надо. Все простарнство лежит там по условию теоремы. 3. Пусть

$\square$

Лемма. Две топологии с общей базой совпадают.
Доказательство. Пусть τ, ω - две топологии на множестве X, имеющие общую базу $\Sigma = \{W_\beta \subset X \mid \beta \in B\}$. Для всех множеств из топологии τ они являются объединением множеств из базы, но поскольку это объединение открытых множеств, то оно открыто, и является элементом топлогии ω. Итак, $\tau \subset \omega$, аналогично и в другую сторону.
Замечание. Согласно этой лемме, база топологии однозначно определяет топологию. Следовательно, критерий базы на множестве дает способ определения новых топологий.

2 Метрическая топология

Напомним определение метрического пространства.
Пусть функция $\rho\colon M \times M \to \mathbb{R}$ удовлетворяет трем условиям:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(x, z) \leqslant \rho(y, x)$

Тогда множество (M, ρ) называется метрическим пространством с метрикой ρ.

Определение 4 *Пусть (M, ρ) - метричсекое пространство. Множество*
$$D_r(a) := \{x \in M \mid \rho(x, a) < r\}$$
называется открытым шаром радиуса r

Очевидно, центр шара принадлежит ему в любой метрике.

Определение 5 *Пусть (M, ρ) - метрическое пространство. Множество весвозможных шаров с разными уентрами и радиусами являются базой Σ_ρ (единственной) топологии, которая называется метрической топологией.*

Докажем, что множество шаров - база. Применим критерий базы на множестве.
1. Возьмем объединение всех шаров. Так как любой шар содержит свой центр, то все точки множества лежат в объединении шаров.
2. Для пересекающихся шаров возьмем минимальную радиус до границы шара.
Пример. Евклидова топология - пример метрической топологии для стандартной евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$. Дискретная топология - топология, порожденная дисретной метрикой.
Упражнение. Докажите самстоятельно, что евклидова метрика индуцирует евклидову топологию (используйте критерий базы) (вставить картинку.)
Решение. Докажем, что минимум из возможных расстояний до границы шара - искомый радиус окрестности, лежащей в пересечении шаров. Рассмторим точку в этой окретсности. Она лежит в обоих шарах. (вставить выкладку)
Замечание. Мы будем использовать обычную топологию и рисовать картинки, котоыре помогут доказывать различные теоремы, но все доказательства будут даны для произвольных метричсеких простарнств.
Прмиер. Рассмотрим множество непрерывных функций на отрезке. введем следующую метрику: $\rho(f, g) = max|f(x) - g(x)|$. Оперделение корректно, посокльку на отрехзке супремум непрерыной функции достигается. Какие (картика) функции лежат в окретсности произвольной функции $y = f(x)$? Это - непрерывные функции, заключенные в области $f(x) - r, f(x) + r$
Замечание. Если Σ - база топологии τ, то τ совпадает с семейством всевозможных объединений множеств из базы.

2.1 Метризуемость топологических пространств.

Определение 6 *Топологическое пространство называется метризуемым, если на множестве существует метрика,идуцирующая эту топологию.*

Мы уже доказали, что обычная топология метризуема. Не все, однако, топологические пространства метризуемы.

Определение 7 *Пусть X - топологическое пространство, $H \subset X$. Окрестностью подмножества в X называется подмножество, содержащее его. Окрестностью точки называется любое открытое множество, содержащее точку (обозначение: U_x)*

Определение 8 *Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если любые две точки обладают непересекающимися окрестностями.*

Теорема 3 *Любое метризуемое топологическое пространство хаусдорфово.*

Доказательство. $\square$

3 Свойства замкнутых множеств

Теорема 4 *Пусть (X, τ) - топологическое прространство, и $\mathcal{F} = \{CU \mid U \in \tau\}$ - совокупность всех замкнутых множеств. Тогда выполняются условия:*
F1. $\varnothing, X \in \mathcal{F}$
F2. Объединение любых двух замкнутых замкнуто.
F3. Пересечение любого семейства замкнутых замкнуто.

Доказательство. Применим законы де Моргана к аксиомам топологического пространства.
1. $X = C\varnothing,\ \varnothing = CX$
2. Дополнение к объединению открытых замкнуто, и есть пересечение дополнений.
3. Дополнение к пересечению двух открытых замкнуто, и есть объединение дополнений. $\square$
Замечание. Как мы видим, замкнутые множества имеют свойства, очень

похожие на свойства топологии. На самом деле, топологию можно однозначно задать как семейство множеств, удовлетворяющих свойствам замкнутых множеств, и объявить открытыми дополнения к ним.
Замечание. Из аксиомы τ_2 по индукции вытекает, что пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто, и объединение любого числа замкнутых множеств замкнуто.
Пример. Рассмотрим обычную топологию на прямой, и рассмотрим интервалы, верхняя граница котрых минорируется каким-то числом. Тогда в бесконечном пересечении имеем отрезкоинтервал. Пример показывает, что пересечение любого числа открытых уже не обязательно открыто.

Теорема 5 *(лемма об открытом множестве)*
Пусть (X, τ) - топологическое пространство. Множество открыто в топологии тогда и только тогда, когда любая точка содержится в нем с некоторой окрестностью.

Доказательство. Возьмем любую точку $x \in U$. Положим окрестность точки само множество U; очевидно, $U \subset U$.
Обратно, пусть каждая точка входит в U вместе с какой-то окрестностью. Их объединение лежит в U, и ещё и U лежит в нем, так как окрестность каждой точки содержит её. □

3.1 Классификация точек относительно подмножества

Пусть (X, τ) - топологическое пространство, $A \subset X$ - непустое подмножество. Серия определений:

Определение 9 *Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества A, если существует окрестность этой точки, лежащая в A.*

Определение 10 *Точка $x \in X$ внешняя для множества A, если она внутренняя для его дополнения.*

Определение 11 *Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения, если для любой окрестности $U \cap A \neq \varnothing$*

Определение 12 *Точка $x \in X$ называется предельной/точкой накопления, если в любой проколотой окрестности точки найдется точка из A.*

Определение 13 *Точка $x \in X$ - граничная для множества A, если в любой её окрестности лежат как точки из A, так и из $X \setminus A$.*

Определение 14 *(семинар) Точка $x \in A$ - изолированная, если существует окрестность, в которой нет других точек из A.*

Определение 15 *Возьмем любое подмножество A топологического пространства X. Объединение всех внутренних точек A называется внутренностью A (обозначается A_0, $IntA$). Объединение всех точек прикосновения называтся замыканием A (обозначение: $\overline{A}$). Множество всех граничных точек - граница A. (обозначение: FrA, ∂A)*

Переходим к теоремам.

Теорема 6 *(свойства замыкания)*
Замыкание множества обладает следующими свойствами:
1. $A \subset \overline{A}$, причем замыкание замкнуто.
2. Если $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$.
3. Замыкание множество - минимальное по включению замкнутое множество, содержащее A.
4. $\overline{A} = \bigcap F_\sigma$ - замыкание есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.
5. Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

Доказательство. 1. Рассмотрим $x \in A$. Найдем окрестность $x \in U_x$. Они пересекаются, и значит, $A \subset \overline{A}$. Докажем замкнутость замыкания. По лемме об открытом множестве, точка из дополнения к замыканию имеет окрестность, не пересекающуюся с A. Рассмотрев точку из этой окрестности, заметим, что она тоже не лежит в замыкании. Итак, мы показали, что дополнение к замыканию открыто, так как каждая точка лежитв нем с некоторой окрестностью.
2. Пусть $A \subset B$. Возьмем любую точку из замыкания. Она еть точка накопления для A и следоваельно для B (по включению), значит, она лежит в замыкании B.
3. Предположим, что существует замкнутое $F : A \subset F \subset \overline{A}$. Это эквивалентно тому, что существует точка из замыкания, но не лежащая в F. Она лежит в дополнении F, но лежит и в замыкании A, значит, является точкой накопления, но тогда $CF \cap F \neq \varnothing$ - противоречие.
4. Рассмотрим пересечение всех замкнутых, содержащих множество A. Оно замкнуто по свойтсву замыкания. Также, по свойству замыкания, $\overline{A}$ - одно их них, так как замкнуто. Но также и все пересечение лежит в замыкании. Обратно, A входит в пересечение. То есть в нем лежит и замыкание. Имеем в итоге равенство.

5. Пусть множество совпадает с замыканием. Тогда оно замкнуто по первому пункту теоремы. Обратно, пусть А замкнуто. По свойству 3, замыкание - минимальное замкнутое по включению. Но это и есть А. $\square$

Теорема 7 *(свойства внутренности)*
Пусть A - подножество топологического пространства.
1. $A_0 \subset A$, причем внутренность открыта.
2. A_0 - максимально открытое по включению, лежащее в A.
3. Внутренность есть объединение всех открытых множеств, лежащих в A.
4. $A = A_0 \Leftrightarrow A$ открыто.

Доказательство. 1. A_0 лежит
2. Рассмотрим открытое множество $U \subset A$
3. Рассмотрим объединение множеств A_α. Это - открытое множество, которое лежит в $A \Rightarrow$ лежит в A^0. Есть и обратное включение: рассмтрим $x \in A^0 \subset A$. Значит, сущетсвует $A_{\alpha_0} = A^0 \Rightarrow A^0 \subset \bigcup A_\alpha$. Итак, доказано равенство.
4. Пусть $A^0 = A$ - открыто по свойству 1. Обратно, если A открыто, то $A = A^0$ по свойству 2. $\square$

Теорема 8 *(свойства границы)*
Пусть $Fr\,A$ - граница подмножества A топологического пространства (X, τ).
1. $Fr\,A = \overline{A} \cap \overline{CA}$ - замкнутое множество.
2. $Fr\,A = \overline{A} \setminus A^0$

Доказательство. 1. В любой окрестности любой точки границы содержатся как точки из A, так и из CA. Значит, граничные точки являются точками прикосновения, то есть принадлежат замыканию A. С другой стороны, они приндлежат замыканию дополнения множества A по тем же соображениям.
2. Рассмотрим $x \in Fr\,A$. Это точка, которая принадлежит как замыканию множества, так и замыканию его дополнения. Значит, это не внутренняя точка. То есть $x \in Fr\,A \iff x \in \overline{A} \setminus A^0$ $\square$

3.1.1 Примеры weird и fancy топологий

Пример. Нарисем бабочку на плоскости, у которой кусок границы открыт. Значит, имеем $\mathbb{R}^2, \tau_{\text{об}}$. В ней оно ни открыто, ни замкнуто. В топологии отражения относительно OY (вспоним, что в неё все открытые множества открыто-замкнутые!). Внутренность - брюшко бабочки, замыкание - вся бабочка, граница - их разность. Топология Зарисского. Замыкание -

дописать то что было!!!!!!!!!!!!!!!!

Теорема 9 *Об эквивалентности определений непрерывного отображения*

Доказательство. 1 $\Rightarrow$ 2. Выполняется теоретико-множестве нное соотношение $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)\ \forall B \subset Y$. Пусть f - непрерывно по определению 1. Рассмотрим замкнутое множество в F в $Y, \Omega \Rightarrow X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F) \in \tau$ - следовтаельно, выполняется определение 2.
2 $\Rightarrow$ 1. Аналогично предыдущему.
1 $\Rightarrow$ 3. Рассмотрим любую точку $x \in X,\ y = f(x)$, и рассмотрим любую окрестность V_y. Пусть U - прообраз окретсночти V_y. Оно открыто по определению 1. И значит, это окрестность икса. Значит, $f(u) \subset V_y$.
3 $\Rightarrow$ 4. Пусть Σ - база в τ, σ - база в Ω. По определению 3 непрерывности, существует окрестность икса, чьим образом является базовая окрестность игрека. Но эта окрестность представляется в виде объединения элементов базы. В одном из них лежит икс следовательно, выполняется условие.
4 $\Rightarrow$ 1. Воспользуемся леммой об открытом множестве. Покажем, что $U := f^{-1}(V)$ открыто в (X, τ). $\forall x \in U : y = f(x) \in V$ по критерию базы в топоплогическом пространстве. $\exists V_y \in \sigma : y \in V_y \subset V$ значит, по определению 4 существует открытое множество из базы, $W_x \in \Sigma : f(W_x) \subset V_y \subset V \implies W_x \subset f^{-1}(V) = U$. Таким образом, U содержит вместе со всякой точкой окрестность $\Rightarrow$ оно открыто. $\square$
Пример. (рисунок с пространствами). $f\colon (X, \tau) \to (Y, \Omega)$ - непрерывное отображение по определению 3.

3.2 Непрерывные отображения метрических пространств

Определение 16 *Пусть (X, d, τ_d), (Y, ρ, τ_ρ) - метрические топологические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $x \in X$, если $\forall D_\varepsilon(y) \exists D_\delta(x) :\ f(D_\delta(x)) \subset D_\varepsilon(y)$.*

Теорема 10 *Это определение эквивалентно предыдущим определениям непрерывности.*

Доказательство. Применим определение для баз топологй. Шары образуют базу метрической топологии.

$5 \Rightarrow 4$.
$4 \Rightarrow 5$. Рассмотрим шар в точке y. По определению 4, найдется шар (необязательно с центром в x), образ которого лежит в окрестности игрека. Но тогда найдется и шар с центром в x, лежащий в этом шаре. Покажем, что образ этого шара также лежит в окрестности y. Используем неравенство треугольника: $d(z,a) \leqslant d(z,x) + d(x,a) < r - d(x,a) + d(x,a) = r$, значит, $f(D_\delta(x)) \subset f(D_r(a)) \subset D_\varepsilon(y)$. □

Какова связь с непрерывностью в смысле матанализа? Рассмотрим $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с обычной топологией. Тогда обычноя непрерывность $|x-x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon$. Можно нарисовать рисунок.
Можно налить воды, позвененть ключами
Одиночество есть человек в квадрате
Вывод: в мат. анализе используется определение 5, так как $\mathbb{R}$ - метрическое топологическое пространство.

Теорема 11 *Композиция непрерывных функций непрерывна*

Доказательство. Докжем эту классическую теорему анализа чисто топологически. Пусть $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z$ - непрерывны. Докажем, что $g \circ f$ - тоже непреывно. Рассмотрим любое открытое множество в Z. Для него рассмотрим $U = (g \circ f)^{-1}(w) = f^{-1}(g^{-1}(w))$. Так как прообраз открытого открыт, $g^{-1}(w)$ - открыт в Y, и значит обратная композициия тоже открыта. □
Пример. Любая сложная функция непрерывна, например, $f(x) = 2^{\cos 57(x-3)+\ln 8-\sin x}$ $x^1 70$. По индукции предложение распространяется на любое конечное число функций.

Дадим несколько определений. Пусть (X, tau) - топологическое пространство, $A \subset X$, $f\colon (X,\tau) \to (Y,\Omega)$ - отображение топологических пространств.

Определение 17 *Сужение отображения - отображение* $f_A\colon (A, \tau_A) \to (Y, \Omega)$ *(где* τ_A *- индуцированная топология)*

Определение 18 *Приведение отображения - отображение* $f_1\colon (X,\tau) \to (f(X), \Omega_{f(x)})$ *(в частности, совпадает в случае сюръекции.)*

Определение 19 *Приведение отображения -*

Теорема 12 *Сужение непрерывного отображения непрерывно.*

Доказательство. Для любого открытого его прообраз открыт. □

Теорема 13 *Приведение непрерывного отображения непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим открытое множество W в индуцированной топологии на образе X. Это - след открытого множества V в Y, чей прообраз открыт. Но $f^{-1}(W) = f^{-1}(V)$, значит, $f_1^{-1}(V) = f^{-1}(W)$ так как образ X. $\square$

Теорема 14

Доказательство. $\square$

Определение 20 *Пусть A - подмножество топологического пространства (X, τ). Тогда функция $i\colon A \to X,\ i(a) = a$ называется включением A в X.*

Теорема 15 *Включение топологического подпространства в объемлющее пространтсва непрерывно.*

Доказательство. Любой прообраз открыт $\Rightarrow$ непрерывно. $\square$

4 Гомеоморфизмы

Определение 21 *Отображение топологических пространств называется гомеоморфизмом, если*
1. f - биекция
2. f - непрерывное отображение
3. f^{-1} - непреывное отображение

Отображение называется открытым, если образ открытого множества открыт. Условие 3 эквивалентно открытости обратного отображения.

Определение 22 *Топологические пространства гомеоморфны (топологически эквивалентны), если между ними можно провести гомеоморфизм.*

Упражнение. Гомеоморфность - отношение эквивалентности на множестве топологических пространств.

4.1 Топологические классификации

Определение 23 *Свойства топологических пространств называются топологическим инвариантом, если оно сохраняется при любых гомеоморфизмах.*

Пример. Хаусдорфовость - топологический инвариант. Докажем это. Предположим, что (X, τ) и (Y, ω) - гомеоморфные пространства и X хаусдорфово. Возьмем $y \neq z \in Y$. Рассмотрим их прообразы. Они различны, поскольку у нас биекция, значит, они обладают непересекающимися окрестностями. Образы этих окрестностей открыты и являются окрестностями y, z. Но их пересечение пусто, так как биекция.
Пример. $(\mathbb{R}, \tau_E)$ (обычная топология) не гомеоморфна $\mathbb{R}, \tau_{MN}$, так как у них разная хаусдорфовость.
Задача. Провести топологическую классификацию топологических пространств $\xi = \{(X_\alpha, \tau_\alpha \mid \alpha \in J\}$. Сделать эту классификацию значит найти систему топологических инвариантов, характеризующую классы эквивалентности по гомеоморфизму. Это означает, что если два пространства обладают инвариантами, то они гомеоморфны. Такая система инвариантов называется полной, то есть полностью характеризует класс.

4.2 Связность топологических пространств

Определение 24 *Топологическое пространство называется связным, если в нем одновременно открыты и замкнуты только X и $\varnothing$.*

Определение 25 *Топологическое пространство называется связным, если его нельзя представить в виде двух непустых непересекающихся открытых (или замкнутых) подмножеств. То есть $X \neq A_1 \cup A_2,\ A_1 \cap A_2 = \varnothing$,*

Теорема 16 *Определения связности эквивалентны*

Доказательство. 1 ⇒2. Предположим противное, именно, X раскладывается в дизъюнктное объединение. Но тогда обе части открыто-замкнуты.
2 ⇒1. Пусть выполнеятся 2, но существует такое замкнутое A, что $X = A_1 \cap CA_1$. получили прямое противоречие с 2. □

Теорема 17 *(о связности топологических пространств)*
Непрерывный образ связного пространства связно.

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ - непрерывная сюръекция. Допустим, что Y не связен, а X связен. Тогда У можно представить в виде объединения открытых множеств $Y = A_1 \cup A_2$. Тогда X можно представить в виде объединения двух полных прообразов этих множеств, но они непустые, непересекающиеся и открытые по свойству непрерывного определения. Противоречие со связностью X. □

Теорема 18 *(основная лемма)*
Пусть A и B - открытые или замкнутые непересекающиеся подмножества в топологическом пространстве X. Если для связного М выполнено $M \subset A \cup B$, то оно лежит целиком либо в A, либо в B.

Доказательство. Предположим противное, и M лежит и в A и B. Тогда $M = M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B) = A_1 \cup A_2$. ни одно из этих новых множеств, не равно M, иначе они пустые. Значит, предположение неверно. M не связно как подпространство, индуцированное на самаом себе □

Теорема 19 *Если любые две различные точки топологического пространства принадлежат связному подмножеству. то само пространство связно.*

Доказательство. Предположимя, что пространство несвязно. □

Теорема 20 *Линейная связность эквивалентна связности.*

Доказательство. □

Теорема 21 *Если пересечие связных топологических подпространств непусто, тогда их бъединение связно.*

Доказательство. Предположим. что объединение несвязно. □

Теорема 22 *Замыкание связного множества связно*

Доказательство. Рассмотрим замыкание связного множества $A \subset \overline{A} \subset X$. Допустим, что замыкание несвязно. По определению 2, $\overline{A} = A_1 \cup A_2$ - объединенеие непересекающихся непустых множеств. По свойству замкнутых множеств, это замкнутые множества. Значит, $A_1 = \overline{A} \cap F_1$, $A_2 = \overline{A} \cap F_2$. По основной лемме, $A \subset A_1$ (но тогда $A_2 = \varnothing$), или $A \subset A_2$ (но тогда $A_2 = \varnothing$). Это противоречит нашему предположению, значит, предположение неверно. □
Рассмотрим $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$ - обычная топология, ρ - обычная метрика. Рассмотрим единичный шар $D_1^n = \{x = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n \mid \rho(0, x) < 1\}$. Тогда сфера $\mathbb{S}^{n-1} := Fr^n D_1 = \{x = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n \mid \rho(0, x) = 1\}$. Топология на $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ - дисретная, хотя и индуцирована из обычной.

Теорема 23 *(критерий связности)*
Пусть (X, τ) - топологическое пространство. Тогда $A \subset X$ несвязно тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение A на нульмерную сферу.

Доказательство. Пусть A несвязно. Представим его в виде $A = A_1 \cup A_2$. Определеим отображение $f(x) = \begin{cases} -1, \ x \in A_1 \\ 1, x \in A_2 \end{cases}$. Построенное отображение непрерывно, так как прообразы открытых множеств открыты, это непрерывное отображение. Обратно, пусть существует непрерывное отображение. Рассмотрим прообразы 1 и -1. Они не пересекаются, в противном случае отображение неоднозначно. Но тогда и A разбивается в их объединение, значит оно несвязно. □

Пример. Отрезок $[a, b]$ связен в обычной топологии. По критерию, рассмотрим непреывное отображение $[a, b] \to \{-1, 1\}$. Здесь непрерывность совпадает с непреывностью в смысле матанализа, поэтому по теореме Коши это не непрерывное отображение (в противном случае оно принимало бы все значения в отрезке $[0, 1]$).

Определение 26 *Компонента связности точки x в пространстве (X, τ) - максимальное по включению связное множество, содержащее x.*

Теорема 24 *1. Компонента связности любой точки замкнута.*
2. Компоненты связности любых двух точек либо не пересекаются, либо совпадают.
3. $\forall x : X = K_x \iff X$ связно.

Доказательство. 1 ⇒2. $x \in K_x \subset \overline{K_x}$ - связно. С другой стороны, $\overline{K_x} \subset K_x$ по свойству замыкания.
2 ⇒ 3.
3. $X = K_x$ связно по определению K_x. Обратно, X - связно, тогда оно атоматически макисмальная компонента связности для всех точек. □

Следствие. Так как компонента связности точки является таковой для каждой своей точки, то она называется **компонентой связности пространства**.

Следствие. Компоненты связности образуют дизъюнктное разбиение на замкнутые пространства.

4.3 Вполне несвязные пространства

Определение 27 *Пространство называется вполне несвязным, если компонента связности любой точки состоит из этой же точки.*

Пример. Прострасntво с дискретной топологией вполне несвязно.

Пример. Топология, индуцированная на $\mathbb{Q}$ из обычной топологии, вполне несвязна.

5 Компакты

Определение 28 *Система множеств $\xi = \{A_\alpha \subset X \mid \alpha \in I\}$ - покрытие множества A, если $A \subset \xi$*

Подпокрытие - система множеств, лежащая в покрытии и также являющаяся покрытием. Покрытие открыто, если каждый элемент покрытия открыт. Покрытие замкнуто, если каждый элемент замкнут. Покрытие конечно, когда $|I| < \infty$.

Определение 29 *Покрытие $\xi = \{A_\alpha \subset X \mid \alpha \in I\}$ называют фундаментальным, если для любого отображения $f\colon (X,\tau) \to (Y,\Omega)$ топологических пространств из непрерывности сужений $f|_{A_\alpha}$ вытекает непреывность отображения f.*

Теорема 25 *(о достаточных условиях фундаментальности покрытия) Пусть X, τ - топологическое пространство, ξ - его покрытие. Если выполняется по крайней мере одно из условий: 1. ξ - открытое покрытие 2. ξ - конечное замкнутое покрытое*
то ξ фундаментально.

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ - открытое отображение. Тогда выполняется равенство: $\forall B \subset Y : f^{-1}(B) =$

2. Рассмотрим $\xi = \{A_1, ..., A_m\}$ - замкнутое покрытие множества X. Предположим, что $f|_{A_i} : A_i \to Y$ непрерывно. Тогда прообраз замкнутого замкнут: $(f|_{A_i})^{-1}(H)$ - замкнуто в $A_i \subset X$, следовательно, существует такое замкнутое $F_i \subset X$: $()^{-1}(H) = A_i \cap F_i$ - замкнуто в X.

$\square$

5.1 Пути

Определение 30 *Путь - непрерывное отображение $h\colon ([0,1], \tau_{об}) \to (X,\tau)$, $f(0)$ - начало пути, $f(1)$ - конец пути.*

Пусть f, g - пути в пространстве X, причем $h(1) = g(0)$. Определим произведение путей следующим образом:

$$(h \cdot g)(t) = \begin{cases} h(2t),\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1),\ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Докажем, что мы снова получили путь. При $t = \frac{1}{2}$, имеем $h(t) = h(1),\ g(t) = g(0)$. Но по условию $h(1) = g(0)$, значит, отображение опредлено корректно. Докажем непрерывность: сужения $h \cdot g|_{[0,\frac{1}{2}]} = h(2t)$ и $h \cdot g|_{[\frac{1}{2}],1} =$

$g(2t-1)$ непрерывны как композиция непрерывных отображений (например, h и умножения на 2). Теперь заметим, что $\xi = \{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\}$ - конечное замкнутое покрытие отрезка $[0,1]$. Значит, оно фундаментально, поэтому из непрерывности сужений следует непрерывность отображения.

Определение 31 *Петля $f\colon [0,1] \to X$ - путь, для которого $f(0) = f(1) = x_0$.*

Определение 32 *Обратный путь для f: $f^{-1}(t) := f(t-1)$*

Другое определение петли: такой путь h, что

Определение 33 *Постоянный путь - $h : [0,1] \to x_0$ (обозначение: e_{x_0})*

Теперь введем понятие линейной связности.

Определение 34 *Пусть (X, τ) - топологическое пространство. Говорят, что точки x_0, x_1 можно соединить путем, если существует путь h в X такой, что $h(0) = x_0, h(1) = x_1$*

Определение 35 *Топологическое пространство называется линейно связным, если любые его две точки можно соединить путем.*

5.1.1 Свойства линейно связных пространств

1. Непрерывный образ линейно связного пространства линейно связен
2. Пусть X_α - линейно связное подмножество X. Тогда если $\bigcap\limits_{\alpha \in I} X_\alpha \neq \varnothing$, то их объединение линейно связно.
3. Любое линейно связное пространство связно (обратное неверно).

Доказательство.
1. Пусть $f\colon X \to Y$ - непрерывное отображение топологических пространств, причем (X, τ) линейно связное. Покажем, что (Y, ω) линейно связно. Возьмем $y_0, y_1 \in Y$. Так как $Y = Im(f)$, то найдутся такие $x_0, x_1 : f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$. Из линейной связности X имеем путь $h : h(0) = x_0, h(1) = x_1$. Значит, в Y имеется путь $f \circ h\colon [0,1] \to Y$, $(f \circ h)(0) = y_0$, $(f \circ h)(1) = y_1$. Непрерывность следует из непрерывности композиции. Как следствие, получаем, что линейная связность сохраянтеся при гомеоморфизме, то есть это - топологический инвариант.

2. Так как $\bigcap\limits_{\alpha\in I} X_\alpha \neq \varnothing$, то $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} X_\alpha \implies x \in X_\alpha\ \forall\alpha$. Рассмотрим произвольные y, z, лежащие в пересечении. Найдутся такие α', α'', индексирующие множества, содержащие y, z. Введем два пути: h от y до x и g от x до z. Их произведение - искомый путь, доказывающий линейную связность: $h\cdot g\colon [0,1] \to \bigcap\limits_{\alpha\in I} X_\alpha,\ (h\cdot g)(0) = y,\ (h\cdot g)(1) = z$.
3. Пусть (X, τ) линейно связно. Тогда для любых точек P_1, P_2 найдется путь $h : h(0) = P_1,\ h(1) = P_2$. Так как отрезок связен, то его непрерывный образ $h([0,1]) = M(P_1, P_2)$ - связное подмножество. По теореме 19 (про две точки), получаем, что пространство связно.
Приведем контрпример к обратному утвеждению. Рассомотрим $y = \sin(\frac{1}{x}),\ x > 0$. Раасмотрим график синуса $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ с топологией, индуцированной из обычной топологии плоскости. Множество A связно, поскольку прообраз линейно связен, откуда $\overline{A} = A \cup B$, где $B = \{(0, y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ - замыкание связно как замыкание связного множества. Однако $\overline{A}$ не является линейно связным, так как точку 0 нельзя соединить путем с произвольной точкой на графике.

Определение 36 *Компонента линейной связности пространства* (X, τ) *для точки* x *- максимальное линйено связное подпространство* L_x*, содержащее* x*.*

Утверждение. Компонента линейной связности содержит все точки, которые можно соединить путем с x.

Теорема 26 *(свойства компонент связности)*
1. Компоненты линейной связности либо не пересекаются, либо совпадают;
2. Компоненты линейной связности образуют разбиение X*;*
3. X *линейное связно* $\Leftrightarrow \forall x : X = L_x$

Доказательство. Аналогично компонентам связности. Отличие только в том, что компоненты связности всегда замкнуты. □
Замечание. Каждая компонента связности разбивается на компоненты линейной связности. Приведем пример: пусть $X = \overline{A} = A \cap B$ (из контпримера прошлой теоремы) - связно как замыкание связного A, т.е. $X = K_x\ \forall x \in X$. $X = L_0 \cap L_a$, где L_a - график синуса, $L_0 = B$.

Определение 37 *Топологическое пространство* (X, τ) *называется локально линейно связным, если для любой точки* $x \in X$ *существует линейно связная окрестность.*

Теорема 27 *(о линейной связности в локально линейно связных пространствах)*
Если (X, τ) локально линейно связно, то (X, τ) связно тогда и только тогда, когда X линейно связно.

Доказательство. По теореме 9.3, из линейной связности следует связность. Докажем обратное. Пусть L - компонента линейной связности. Покажем, что L - открыто. Действительно, по условию существует линейно связная окрестность $U_x \subset L$ для точек $x \in L$, откуда по лемме об открытом множестве L открыто. Поскольку $X = \bigcup\limits_{\alpha \in I} L_\alpha$, то рассмотрим $L_{\alpha_0} = X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I \setminus \{\alpha_0\}} L_\alpha$. Получаем, что $L_{\alpha_0} \neq \varnothing$ замкнуто как дополнение до открытого. Так как это открыто-замкнутое множество, а X связно по условию, то $L_{\alpha_0} = X$. $\square$

6 Предел последовательности в топологическом пространстве

Определение 38 *Последовательность $\{x)n\} \subset X$ сходится к $a \in X$*

$$\forall U(a)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : x_n \in U(a)$$

Также обозначается $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Теорема 28 *Если предел последовательности существует в хаусдорфовом пространстве, то он единственный.*

Доказательство. Пусть существует два предела. По хаусдорфовости, они обладают непересекающимися окрестностями. Тогда и там и там лежат все номера последовательности, что невозможно. $\square$ **Пример.** Исследовать на сходимость в $(\mathbb{R}, \tau_{\text{ирр}})$ последовательность $x_n = \frac{2}{n}$. Покажем, что каждая рациональная точка является пределом последовательности. Рассмтрим $U_a,\ a \in \mathbb{Q}$. Тогда $U_a = \mathbb{R}$. Очевидно, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in U_a$. Докажем, что других нет. Очевидно, наименьшая окрестность иррациональной точки - сама точка, в которой нет никаких членов последовательности. Формально, запишем отрицание:

$$\lim_{n \to \infty} x_n \neq b \iff \exists U_b\ \forall N\ \exists n > N : x_n \notin U_b$$

7 Аксиомы счетности

Определение 39 *База окрестностей - семейство окрестностей* $\{U_\alpha = U_\alpha(x)\}$*, такое, что для каждой открытой окрестности* U_x *точк* x *имеет место* $x \in U_\alpha \subset U_x$

Окрестности, из которых состоит база окрестностей, понимаются в обычном смысле окрестностей, то есть как множество, содержащее точку, не обязательно открытое.

Определение 40 ***Аксиома счетности I****. В каждой точке* x *существует счетная база окрестностей в точке* x*.*

Определение 41 ***Аксиома счетности II****. База топологии счетна.*

Теорема 29 *(о связи между аксиомами счетности)*
Вторая аксиома счетности влечет первую (обратное неверно).

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{W_i\}$ - счетная база топологии. Положим для точки x $\Sigma_x = \{W_i \in \Sigma \mid x \in W_i\} \subset \Sigma$. Это счетное множество. Теперь покажем, что это счетная база окрестностей в точке x. По определению базы, для любой окрестности: $x \in U_x = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}} W_i$

Пример. В дискретной топологии вторая аксиома счетности не выполняется, коль скоро пространство несчетно, так как минимальная база из одноточечных подмножеств несчетна, при этом удовлетворяет первой аксиоме.

Пример. $(\mathbb{R}^2, \tau_{MN})$ удовлетворяет первой аксиоме, но не удовлетворяет второй.

Определение 42 *Подмножество* A *всюду плотно в* X*, если* $\overline{A} = X$*.*

Теорема 30 *(лемма о всюду плотном множестве)*
A *всюду плотно в* X *тогда и только тогда, когда для любого открытого* U*:* $U \cap A \neq \varnothing$*.*

Доказательство. Пусть A всюду плотно. Для любой непустой

для любого непустого открытого множества $\exists x \in U$

Обратно, пусть

□

Определение 43 *Топологическое пространство называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное подмножество.*

Так, $\mathbb{R}^n$ с обычной топологией сепарабельно, так как $\mathbb{Q}^n$ - всюду плотно и его замыкание равно $\mathbb{R}^n$. Упражнение: $\overline{\mathbb{Q} \times ... \times \mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{Q}} \times ... \times \overline{\mathbb{Q}}$

Теорема 31 *(сепарабельность в пространстве со счетной базой) Пусть (X, τ) имеет счетную базу (AC II). Отсюда следует сеперабельность (обратное вообще говоря неверно).*

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{W_i \mid i \in I\}$ - счетная база топологии. Возьмем по точке из каждого множества базы и образуем из них множество S - счетное подмножество X. Покажем, что S всюду плотно в X. Любое открытое множество можно представить в виде объединения множеств из базы, значит, в любом открытом множестве лежит точка из множества S. По лемме о всюду плотном множестве, из этого следует плотность всюду S в X.

Приведем контрпример к обратному утверждению. Рассмотрим плоскость с топологией Зарисского. Множество $S = \{(0, n) | n \in \mathbb{N}\}$ - счетное подмножество. По лемме, $\overline{S} = \mathbb{R}^2$. Значит, это пространство сепарабельно. Но у него нет счетной базы: действительно, каждое множество базы открыто, то есть является дополнением до конечного числа точек. Рассмотрим множество $\mathbb{R} \setminus \{b\}$. Оно открыто, но точка b (взятая так, чтобы она не лежала в любом множестве базы счетной базы) лежит в базе, значит, это множество не является объединением базовых множеств. $\square$

7.1 Сепарабельность в метрических пространствах

Теорема 32 *Пусть (X, d) - метрическое пространство с индуцированной топологией. Тогда X сепарабельно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. По предыдущей теореме из счетной базы следует сеперабельность. Обратно, пусть (X, τ_d) сепарабельно. Тогда существует такое счетное S, что $\overline{S} = X$. Докажем, что у него имеется счетная база. По лемме о всюду плотном множестве, любое открытое U_i пересекается с S. Возьмем по точке s_i из всех таких пересечений и рассмотрим счетное множество шаров $\Sigma = \{D_{\frac{1}{n}}(s_i) \mid s_i \in S \cap U_i, n \in \mathbb{N}\}$. Покажем, что это база, используя критерий базы топологии. Так как S было всюду плотным, то оно пересекается с любой ε-окрестностью любой точки x. Найдем такое $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2n} < \varepsilon$, и рассмотрим $D_{\frac{1}{2n}}(x)$. Так как S всюду плотно в X, то найдется $s_i \in D_{\frac{1}{2n}}(x) \cap S$. Тогда $x \in D_{\frac{1}{2n}}(s_i) \subset D_\varepsilon(x)$. Значит, семейство множеств Σ удовлетворяет критерию базы топологии. $\square$

Теорема 33 *(Линдлёфа)*
Из любого открытого покрытия пространства со счетной базой можно выделить счетное подпокрытие.

Доказательство. Пусть Σ - счетная база на (X, τ), $\xi = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}\}$ - открытое покрытие X. Пусть $x \in X = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$. Тогда $\exists \alpha : x \in U_\alpha$. Но по критерию базы топологии, найдется такое множество из базы, что $x \in W_i \subset U_\alpha$. Теперь для любого W_i выберем одно открытое множество U_{α_i}, удовлетворяющее этому включению. Рассмотрим теперь $\tilde{\xi} = \{U_{\alpha_i} \mid i \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}\}$. Очевидно, $\tilde{\xi} \subset \xi$ и согласно включению $\tilde{\xi}$ - покрытие. По построению, оно счетное. Значит, это счетное подпокрытие. $\square$

7.2 Аксиомы отделимости

Определение 44 *Аксиомы отедлимости:*

T_0: если для любых двух различных точек найдется окрестность по крайней мере одной из них, не содержащей другую точку.
T_1: Пространство (X, τ) удовлетворяет T_1, если для любых двух точек существуют окрестности, не содержащие другую точку.
T_2: (аксиома Хаусдорфа): любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности.
T_3: для любого замкнутого множества и точки не из него существуют непересекающиеся окрестности.
T_4: для любых непересекающихся замкнутых множеств найдутся их непересекающиеся окрестности.

Пример. τ_{MN} - топология, не удовлетворяющая T_0.

Теорема 34 *(критерий T_1-пространства)*
Топологическое пространство удовлетворяет T_1 тогда и только тогда, когда каждое одноточечное множество замкнуто.

Доказательство. Пусть (X, τ) удовлетворяет T_1. Рассмотрим дополнение $X \setminus \{x\}$. Рассмотрим $y \in X \setminus \{x\}$. Из-за этого $x \neq y$, по аксиоме у точки y есть окрестность, не пересекающаяся с x, поэтому по лемме об открытом множестве $X \setminus \{x\}$ открыто, и значит $\{x\}$ замкнуто.

Обратно, пусть $\{a\}, \{b\}$ - замкнутые множества. Тогда $X \setminus \{b\}$, $X \setminus \{a\}$ являются открытыми окрестностями для точек a, b соответсвтенно, значит, выполнена T_1. $\square$

Пример. Связное двоеточие T_0, но не T_1.
Пример. Топология Зарисского T_1, но не T_2

7.3 Регулярные и нормальные топологические пространства

Определение 45 *Топологическое пространство называется регулярным, если оно удовлетворяет аксиомам T1 и T3.*

Определение 46 *Топологическое пространство называется нормальным, если оно удовлетворяет аксиомам T1 и T4.*

Теорема 35 *(о связи между аксиомами отделимости)*
Нормальное пространство регулярно, регулярное пространство хаусдорфово, и так далее:

$$(T_1 \ \& \ T_4) \implies (T_1 \ \& \ T_3) \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$$

Доказательство. Более менее очевидно. $\square$
Напомним, что метрическое пространство хаусдорфово. Имеет место более сильное утверждение:

Теорема 36 *Любое метрическое пространство нормально.*

По предыдущей теореме из этого следует, что любое метрическое пространство удовлетворяет всем аксиомам отделимости.
Доказательство. Самим доказать. $\square$
Пример. $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{об}})$ - метрическая топология, а значит, нормальная.
Пример. $(\mathbb{R}^2, \tau_{MN})$ - не выполняется T_0, поэтому не выполняются T_0, T_1, T_2. Так как все открытые одномвременно замкнуты и наоборот, поэтому окрестность любого замкнутого множества - оно само, значит, множество обладает непересекающейся окрестность с точкой. Аналогично для другого замкнутого множества. Значит, множество удовлетворяет T_3, T_4.

8 Компактность

Определение 47 *Топологическое пространство называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.*

Заметим, что это определение эквивалентно такому же, только с покрытием из базы.

Пример. $([a, b], \tau)$ - компактно по лемме Гейне-Бореля (из любого покрытия отрезка открытыми интервалами можно выделить конечное подпокрытие).

Пример. Докажем, что $(\mathbb{R}, \tau_{\text{об}})$ не компактно. Допустим, что существует конечное подпокрытие $\tilde{\xi}$. Тогда это объединение конечного числа интервалов конечной длины.

Теорема 37 *Непрерывный образ компактного пространства компактен.*

Доказательство. Пусть $f\colon (X, \tau) \to (Y, \omega)$ - непрерывное отображение. Рассмотрим любое открытое покрытие образа $\eta = \{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$, $Y = \bigcup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha$. Прообразы множеств этого покрытия открыты X и покрывают его. Выделим в нем конечное подпокрытие. Его образы также покрывают Y, ибо $f(X) = Y$, значит, мы выделили конечное подпокрытие в Y, и соответсвенно Y компактно. $\square$

Следствие. Компактность - топологический инвариант (в частности, сфера без точки некомпактна, так как гомеоморфна плоскости, что показывает стереографическая проекция).

Теорема 38 *Любое замкнутое подмножество компактного пространства компактно (то есть компактно в индуцированной топологии).*

Доказательство. Пусть H - замкнутое подмножество X. Пусть $H \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ - открытое покрытие H. Так как X компактно, то существует конечное подпокрытие в покрытии $\eta = \{X \setminus H, U_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Так как в нем есть конечное подпокрытие, то значит есть и конечное подпокрытие, покрывающее H, значит, H компактно. $\square$

Теорема 39 *Любое компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.*

Доказательство. Пусть F - любое компактное подмножество в хаусдорфовом пространстве X. Докажем, что его дополнение открыто. Пусть $x \in CF$ и $z \in F$. Тогда $z \neq x$, а в силу хаусдорфовости у них существуют непересекающиеся окрестности U_z и V_x. Так как точка z произвольна, то $\xi = \{U_z \mid z \in F\}$ - открытое покрытие F, из которого можно выделить конечное подпокрытие $\tilde{\xi}$. Каждой окрестности из $\tilde{\xi}$ соответсвует какая-то окрестность V_x^i какой-то точки x. Определим $W_x = \bigcap\limits_{i \in I} V_x^i$. Покажем, что $U_f \cap W_x = \varnothing$. От противного: если есть пересечение, то противоречие с тем, что Значит, $W_x \subset CF$. Отсюда по лемме об открытом множестве имеет открытость CF, то есть F замкнуто. □

Пример. Все бесконечные подножества в топологии Зарисского компактны.

Теорема 40 *Непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово замкнуто, то есть образ замкнутого замкнут.*

Доказательство. Пусть $f\colon (X, \tau) \to (Y, \omega)$ - непрерывное отображение компактного топологического пространства в хаусдорфово. Пусть $F \subset X$ - замкнутое множество в X. Так как X компактно, то и F компактно, а значит, его непрерывный образ $f(F) \subset Y$ компактен (поскольку ограничение непрерывного отображения непрерывно). Так как Y хаусдорфово, то компактное подмножество замкнуто, значит, отображение замкнуто. □

Теорема 41 *Непрерывная биекция компактного пространства на хаусдорфово является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $f\colon (X, \tau) \to (Y, \omega)$ - непрерывная биекция компактного пространства на хаусдорфово пространство. Докажем, что обратное отображение непрерывно. По предыдущей теореме, образ любого замкнутого множества замкнут, но это значит, что прообраз *обратного* отображения замкнут, значит, обратное отображение также непрерывно. □

8.1 Проекции и теорема Тихонова

Напомним определение произведения топологических пространств.

Определение 48 *Пусть* $(X, \tau), (Y, \omega)$ *- топологические пространства. Тогда* $\Gamma = \{U \times V \mid U \in \tau, V \in \omega\}$ *- база топологии на декартовом произведении* $X \times Y$*. Так как база задает топологию однозначно, то топология* Ω *с базой* Γ *называется топологией произведения, пространство* $(X \times Y, \Omega)$ *называется произведением топологических пространств.*

Проверим, что это база, применив критерий базы на множестве.
1. Так как пространства открыты, то $X \times Y \subset X \times Y \in \Gamma$.
2. Пусть $U_1 \times V_1 \subset X \times Y, U_2 \times V_2 \subset X \times Y$ - два элемента базы, причем их пересечение непусто. Имеем $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$. Пересечение открытых открыто, поэтому любая точка лежит там с некоторой окрестностью. Произведение этих окрестностей доставляет искомый элемент базы.

Пример. Покажем, что эта база - не обязательно топология. База на произведении двух прямых с обычной топологией не является топологией, так как объединение прямоугольников не обязательно прямоугольник. С другой стороны, так как в каждом шаре лежит прямоугольник, а в каждом прямоугольнике - шар, то эта база задает обычную топологию на плоскости. Аналогично (или по индукции) доказывается, что топология произведения $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ является обычной топологией на $\mathbb{R}^{k+1}$.

Упражнение. Покажем, что произведение баз топологий также является базой топологии произведения.

Определение 49 *Пусть* $(X \times Y, \Omega) = (X, \tau) \times (Y, \omega)$ *- произведение. Отображения*

$$p_1 \colon X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$$

$$p_1 \colon X \times Y \to Y, (x, y) \mapsto y$$

называются каноническими проекциями.

Теорема 42 *(свойства канонических проекций)*
1. Канонические проекции непрерывны и открыты.
2. Для любой точки (x, y) *слой* $X \times \{y\} = p_2^{-1}(y)$ *гомеоморфен* X*, слой* $Y \times \{x\} = p_1^{-1}(x)$ *гомеоморфен* Y*.*

Доказательство. 1. Рассмотрим любое открытое множество $U \subset X$. Его прообраз $p_1^{-1}(U) = U \times Y$ - произведение открытых множеств (и вообще-то элемент базы), значит, открытое множество, поэтому отображение непрерывно. Теперь рассмотрим любое открытое множество в $W \subset X \times Y$. Пусть $W_1 = p_1(W)$. По лемме об открытом множестве, $\forall (x, y) \in W \exists U \subset \Omega, (x, y) \in U \subset W$. Так как U - множество из базы, то оно есть произведение $U = U_x \times U_y$. Значит, проекция точки (x, y) лежит в проекции W с некоторой окрестностью U_x, поэтому проекция W открыта,и отображение открыто.
2. Отображение $\{x\} \times Y \to Y$ - в обе стороны непрерывная биекция. $\square$

Теорема 43 *(Тихонова, частный случай)*
Произведение компактных пространств компактно.

Доказательство. Пусть $(X \times Y, \Omega) = (X, \tau) \times (Y, \omega)$ - произведение компактных пространств.
Случай 1. Рассмотрим открытое покрытие $\xi = \{U_\alpha \times V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ подножествами из базы $\Gamma = \tau \times \omega$. Так как слой $p_1^{-1}(x) = \{x\} \times Y$ гомеоморфен Y, то он компактен, значит, существует конечное подпокрытие $\xi^{(x)} = \{U_{\alpha_1} \times V_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_m} \times V_{\alpha_m}\}$ слоя. Значит, $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} U_(\alpha_i)$, и $\nu = \{U_x \mid x \in X\}$ - открытое покрытие, существует конченоеподпокрытие $\tilde{\nu} = \{U_{x_1}, ...U_{x_k}\}$. В общем, у каждого слоя есть конечное покрытие. Взяв миниальную полоску, содержащуюся в этом покрытии, мы получим, что такими полосками можно замостить все произведение.
Случай 2. Любое открытое покрытие

ζ

Итак, любое открытое покрытие имеет конечное подпокрытие имее □

Методом индукции можно распространить на конечное произведение сомножителей.

Определение 50 *Пусть $(X_\alpha, \tau_\alpha), \alpha \in J$ - любое семейство топологических пространств. Тогда $X = \prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$ - произведение пространств, его элементы - последовательности элементов из X_α, индексированных элементами из J. Пусть τ - самая слабая топология на X, для которой каждая проекция непрерывна. существует, так как это пересечение всех таких топологий. Тогда (X, τ) - тихоновское произведение с тихоновской топологией.*

Теорема 44 *(Тихонова)*
Тихоновское произведение компактных пространств компактно.

Доказательство. □