Анализ Ряды

Галкина

05.09.2022

Оглавление

Глава 1

Ряды

В данном разделе мы будем изучать следующие объекты:

- Числовые ряды
- Функциональные ряды (в т.ч. степенные, ряды Фурье)

1.1 Числовые ряды

1.1.1 Базовые определения и теоремы

Определение 1 *Ряд - сумма счетного числа слагаемых:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

Определение 2 *Частичная сумма S_n - сумма первых n слагаемых*

Определение 3 *Сумма ряда - предел последовательности частичных сумм*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Если предел существует и конечен, то ряд сходится. Если предел бесконечен, ряд расходится. Заметим, что, согласно теоремам о пределе суммы последовательностей и пределе последовательности, умноженной на число, сходящиеся ряды образуют линейное пространство относительно сложения и умножения на константу.

Определение 4 *Остаток ряда - разность между частичной суммой ряда и самим рядом:*

$$R_k = S - S_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_k$$

Пример. Геометрический ряд $a + aq + aq^2 + \ldots$. По школьной формуле $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Имеем случаи:

1. $|q| < 1: \; S = \frac{a}{1-q}$
2. $|q| > 1: \; S = \infty$
3. $q = 1: \; S = \infty$

Итак, ряд сходится, только если $|q| < 1$.
Следующие теоремы устанавливаются для любых рядов:

Теорема 1 *(необходимое условие сходимости ряда)*
Если ряд сходится, то предел общего члена равен 0. Равносильная формулировка: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. По условию, существует число S - предел частичных сумм ряда. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. $\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx, \; x \neq \pi k, \; k \in \mathbb{Z}$. Зафиксируем x. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx = 0$. Но это противоречит тому, что $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Значит, ряд расходится.

Пример. Гармонический ряд расходится, т.к. расходится последовательность частичных сумм: $S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \ldots = 1 + \frac{n}{2}$

Теорема 2 *(критерий Коши сходимости ряда)*
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \; \forall n > N \; \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Доказательство. По определению, ряд сходится, когда существует предел частичных сумм. Применим к ним критерий Коши, получим условие: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Но $S_{n+p} - S_n \equiv a_{n+1} + ... + a_{n+p}$. $\square$

Теорема 3 *(критерий сходимости через остаток)*
1. Если ряд сходится, то сходится любой из его остатков.
2. Если хотя бы один остаток сходится, то ряд тоже сходится.

Доказательство. 1. По условию, существует сумма ряда S. Зафиксируем номер $N \in \mathbb{N}$ и рассмотрим остаток $R_N = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} a_k$, а также последовательность σ частичных сумм ряда-остатка R_N: $\sigma_n = a_{N+1} + ... + a_{N+n} =$

$\sum\limits_{k=N+1}^{N+n} a_k$. Рассмотрим её предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{n+N} - S_N) = S - S_N = R_N$. Значит, остаток сходится.
2. По условию, существует такой номер n_0, что остаток R_{n_0} сходится. Тогда существует предел частичных сумм σ_n этого остатка: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, $\sigma_n = a_{n_0} + \ldots + a_{n_0+n}$. Пусть $n_0 + n = m$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_m = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{n_0} + \sigma_{m-n_0}) = S_{n_0} + \sigma$, то есть основной ряд сходится. $\square$

1.1.2 Знакопостоянные ряды

Исследуем подробнее знакопостоянные ряды. Ряд называется знакопостоянным, если, начиная с некоторого номера, все его члены имеют одинаковый знак (конечное число членов в начале не влияет на сходимость). Следующие теоремы устанавливаются для положительных рядов, для отрицательных рядов применимы эти же рассуждения, стот лишь поменять знак.

Теорема 4 *(критерий сходимости для неотрицательных рядов)*
Ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.

Доказательство. $\Rightarrow$. По условию, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. Значит, последовательность частичных сумм ограничена сверху.
$\Leftarrow$. По условию, ограниченная неубывающая последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху, значит, по теореме Вейерштрасса у неё есть предел S. $\square$
Следующее важное утверждение о положительных рядах - признак сравнения. Он позволяет делать выводы о сходимости ряда, сравнивая его с известными рядами: геометрической прогрессией, обобщенным гармоническим рядом (то есть с произвольным показателем степени).

Теорема 5 *(признак сравнения в оценочной форме)*
Пусть даны последовательности $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда из сходимости ряда с общим членом b_n следует сходимость ряда с общим членом a_n (из расходимости ряда с общим членом a_n следует расходимость ряда с общим членом b_n).

Доказательство. Докажем исходя из критерия сходимости. Пусть A_n, B_n - частичные суммы рядов с членами a_n, b_n. Так как ряд B сходится, то существует верхний предел M для его частичных сумм. Так как члены ряда A меньше членов ряда B, то $A_n \leqslant B_n \leqslant M$, откуда по транзитивности неравенств $A_n \leqslant M$, значит, у A_n есть предел. $\square$

Пример. Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Рассмотрим $p \leqslant 1$, $n^p \leqslant 1$, $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$. Так как гармонический ряд расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ расходится. С другой стороны, при $p > 1$ ряд сходится по интегральному признаку.

Пример. Найти сумму. $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + ...$, $a_{n+1} = \sqrt{2-b_n}$, $b_{n+1} = \sqrt{2+b_n}$. Заметим, что $b_1 = 2\cos\frac{\pi}{4}$, $b_2 = \cos\frac{\pi}{8}$. Дальше эта формула выводится по индукции. $b_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. $a_n = \sqrt{2-b_{n-1}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ Ита, $a_n \leqslant 2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}$.

Теорема 6 *(Признак сравнения в предельной форме)*
Пусть даны неотрицательные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Пусть $k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Тогда, если
1. $k = const$ $(k \neq 0)$: ряды сходятся или расходятся одновременно.
1.1. $k = 1$: ряды эквивалентны.
2. $k = 0$: если B сходится, то и A сходится.
3. $k = \infty$: если A сходится, то и B сходится.

Доказательство.
1. Запишем определение предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ для $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0$:

$$\exists N(\varepsilon)\ \forall n > N : \frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3k}{2}$$

откуда $a_n < \frac{3k}{2} b_n$. Значит, если ряд B сходится, то и ряд A сходится.
2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Для $\varepsilon = 1$ $\exists N$ $\forall n > N$: $\frac{a_n}{b_n} < 1$, значит $a_n < b_n$ и сходимость рядов следует из признака сравнения в оценочной форме.
3. Переворачивая предел в п.2, получаем все аналогично. $\square$

Пример. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha})$. Имеем $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. При $\alpha > 0$ S_n сходится к 1, при $\alpha < 0$ ряд расходится.

Теорема 7 *(третий признак сравнения)*
Пусть даны ряды $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, причем $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Тогда если B сходится, то и A сходится.

Доказательство. Перемножив положительные неравенства $\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1} \ldots \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k}$, получим $\frac{a_n}{a_1} \leqslant \frac{b_n}{b_1}$, откуда $a_n \leqslant b_n \cdot const$. Из признака сравнения в оценочной форме получаем, что ряд A сходится, если сходится ряд B. □

Переходим к более тонким признакам сходимости ряда. Алгоритм вырисовывается следующий: сначала даламберим, потом кошируем. Если не помогает, пробуем признак Раабе, но все вопросы снимает гауссирование.

Теорема 8 *(признак Даламебра в оценочной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n. Тогда
1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, то ряд сходится;
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. 1. Ряд с общим членом $b_n = q^n,\ q \in (0,1)$, сходится. По условию, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, значит, ряд сходится по 3-му признаку сравнения.
2. Ряд с общим членом $b_n = 1$ расходится. По условию, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, значит, ряд расходится по 3-му признаку сравнения. □

Теорема 9 *(признак Даламбера в предельной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n. Тогда
1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, то ряд сходится;
2. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. 1. Пусть верхний предел равен $q < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q + \varepsilon = q_1 < 1$. Тогда по признаку Даламебра в оценочной форме ряд сходится.
2. Так как для некоторой подпоследовательности $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то не выполняется необходимый признак, следовательно, ряд расходится. □
Замечание. Если предел равен 1, то $r = q = 1$.
Замечание. В отличие от признака Коши, в п.2 нельзя заменить нижний предел на верхний.
Замечание. Если все-таки получилась единица, то ряд может как сходиться, так и расходиться. Но если предел подходит к единице сверху, то ряд расходится (в силу невыполнения необходимого признака).

Теорема 10 *(признак Коши в оценочной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n.
Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, то ряд сходится.
Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Сравним с геометрической прогрессией.
1. $a_n \leqslant q^n, \ q < 1$, значит ряд сходится по признаку сравнения.
2. $a_n > 1$, значит ряд расходится по необходимому признаку. $\square$

Теорема 11 *(признак Коши в предельной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:

1. *Если $q < 1$, то ряд сходится.*

2. *Если $q > 1$, то ряд расходится.*

Доказательство. Аналогично признаку Даламбера.
1. Рассмотрим предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Тогда

$$\exists n_0 \ \forall n > n_0 : \sqrt[n]{a_n} = q + \varepsilon = \frac{q+1}{2} < 1$$

Тогда ряд сходится по признаку Коши в оценочной форме.
2. Рассмотрим предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$. Выделим подпоследовательность a_{n_k}, на которой достигается этот верхний предел. Возьмем $\varepsilon = q-1$. Тогда

$$\exists k_0 \ \forall k > k_0 : \ \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$$

Значит, $a_{n_k} > 1$, и ряд расходится по необходимому условию. $\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n$. Кошируя это ряд, взяв наибольшую подпоследовательность, получим предел $\frac{3}{4}$, значит, ряд сходится. Можно ещё просто посчитать две подпоследовательности.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$. Оценим это рядом $b_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{2n-\ln n}$. В итоге получится, что ряд сходится.

Теорема 12 *(признак Раабе в оценочной форме)*
Пусть дан знакопостоянный ряд с общим членом $a_n > 0$. Тогда:
1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$, то ряд расходится.
2. Если $\exists \alpha > 1 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$ тогда ряд сходится.

Доказательство. 1. Пусть $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n-1}{n}$. Введем ряд с общим членом $b_n = \frac{1}{n-1}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, и так как ряд b_n расходится, то ряд a_n расходится по третьему признаку сравнения.
2. Пусть $\beta \in (1, \alpha)$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ сходится. Далее, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = (\frac{n}{n+1})^\beta = (1 + \frac{1}{n})^{-\beta} = 1 + \frac{\beta}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Затем, $-\frac{\beta}{n} > -\frac{\alpha}{n} \implies 1 - \frac{\beta}{n} > 1 - \frac{\alpha}{n}$. Так

как $O(\frac{1}{n^2})$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\frac{\alpha}{n}$ и $\frac{\beta}{n}$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : 1 - \frac{\alpha}{n} < 1 - \frac{\beta}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Правая часть равна $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. По условию, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$. Из этих двух условий по свойству транзитивности неравенств получаем оценку $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$, откуда следует сходимость ряда. $\square$

Теорема 13 *(Признак Раабе в предельной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n и $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = R$. Тогда:
1. $R < 1$ - ряд расходится
2. $R > 1$ - ряд сходится.

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon = 1 - R$. Тогда

$$\exists n_0\ \forall n > n_0 : n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < R + \varepsilon = 1$$

Значит, $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{n_n}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 + \frac{1}{n}$, тогда ряд расходится по необходимому признаку.
2. Пусть $\alpha \in (1, R)$, $\varepsilon = R - \alpha$. Тогда

$$\exists n_0\ \forall n > n_0 : n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > \alpha$$

откуда $\frac{a_{n+1}}{a} < 1 - \frac{\alpha}{n}$. Значит, ряд сходится по признаку Раабе в оценочной форме. $\square$
Замечание. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})$.

Теперь докажем очень прикольный признак, из которого следуют почти все остальные признаки.

Теорема 14 *(признак Куммера)*
Пусть даны две последовательности $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$. Тогда:
1. Если $\exists\alpha > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : C_n - C_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha$ - ряд с общим членом a_n сходится.
2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n}$ расходится и $C_n - C_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 0$, то ряд с общим членом a_n расходится.

Доказательство. 1. $\alpha \cdot a_k \leqslant C_k a_k - C_{k+1} a_{k+1}$. Далее $\alpha \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant C_1 a_1 - C_{n+1} a_{n+1} \leqslant C_1 a_1$. Значит, $S_n \leqslant \frac{C_1 a_1}{\alpha}$, и ряд сходится по третьему признаку сравнения.
2. $C_n \leqslant C_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}$, значит, $\frac{C_n}{C_{n+1}} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Пусть $b_n = \frac{1}{C_n}$. Тогда ряд с

общим членом b_n расходится и $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n}$, поэтому ряд с общим членом a_n расходится по 3-му признаку сравнения. $\square$

Следствие 1. Признак Даламбера при $C_n \equiv 1$

Следствие 2. Признак Раабе. Возьмем $C_n = n - 1$. Имеем

1. $n - 1 - n \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha \implies 1 - \frac{1}{n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\alpha}{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{1+\alpha}{n}$.

Следствие 3. Признак Бертрана. Возьмем $C_n = (n-2)\ln(n-1)$. Тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n}$ ряд сходится.

Теорема 15 *(признак Гаусса)*
Пусть дан положительный ряд. Представим его в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = D - \frac{R}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

Тогда:
1. Если $D > 1$ - ряд расходится;
2. Если $D < 1$ - ряд сходится;
3. Если $D = 1$, $R \leqslant 1$ - ряд расходится;
4. Если $D = 1$, $R > 1$ - ряд сходится.
Здесь θ_n - ограниченная монотонная последовательность, $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Пункты 1 и 2 следуют из признака Даламбера, так как $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3. По условию, имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{R}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

Тогда $n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = R - \frac{\theta_n}{n^\varepsilon}$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right) = R$, значит, ряд сходится по признаку Раабе.

4. По условию, имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

откуда $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1 = -\frac{\theta_b}{n^\varepsilon}$. Домножим на логарифм и рассмотрим предел получившегося выражения:

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot n\left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln n \cdot -\frac{\theta_b}{n^\varepsilon}\right) = 0$$

Значит, по признаку Бертрана ряд расходится. $\square$

Теорема 16 *(интегральный признак)*
Пусть дана непрерывная неотрицательная невозрастающая функция $f(x)$, определенная на $[1, \infty)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно, где $a_n = f(n)$ - значения функции в натуральных числах.

Доказательство. Очевидно,что $\forall x \geqslant 1\ \exists k \in \mathbb{N} : k \leqslant x \leqslant k+1$. По условию невозрастания имеем $f(k) \geqslant f(x) > f(k+1)$. Значит, $a_{k+1} < f(x) \leqslant a_k$. Определенный интеграл от функции на единичном отрезке не больше её максимального значения, поэтому

$$a_{k+1} < \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant a_k$$

Просуммируем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} < \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Отсюда получаем, что

$$S_{n+1} - a_1 < \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \leqslant S_n$$

Если ряд сходится, то он ограничен. Значит, ограничен и интеграл, а поскольку это интеграл от положительной функции, он тоже сходится. Обратно, если интеграл сходится, то ряд ограничен, значит, он сходится по теореме Вейерштрасса. □

Рассмотрим ещё несколько интересных свойств знакопостоянных рядов.

Теорема 17 *(связь признаков Даламбера и Коши)*
Если для ряда с общим членом a_n выполняются условия признака Даламбера, то для него выполняются условия признака Коши.

Доказательство. Условие для признака Даламбера: $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$. Перемножая неравенства $\frac{a_2}{a_1} \leqslant q$, $\frac{a_3}{a_2} \leqslant q, ..., \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant q$, получим $\frac{a_n}{a_1} \leqslant q^n$, откуда $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1} q$. Зафиксируем $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Тогда $\exists n_0\ \forall n >$

$n_0 : \sqrt[n]{a_1}q < \frac{q+1}{2} = q_1$. Отсюда получаем условие применимости признака Коши: $\sqrt[n]{a_n} < q_1 < 1$. □

Ещё одна область применения рядов - **оценка погрешности приближенной величины с помощью положительного ряда**. Действительно, пусть R_n - n-ный остаток ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда из доказательства интегрального признака $a_{k+1} < \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant a_k$, но поскольку по определению $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$, получаем оценку:

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant R_n < \int\limits_{n}^{\infty} f(x)dx$$

Пример. Вычислим с точностью до 0,001 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Ответ: $1,082 \pm 0,001$ (точный ответ $\frac{\pi^4}{90}$)

1.1.3 Знакопеременные ряды

Переходим к исследованию рядов с произвольным знаком. Иногда бывает полезно рассмотреть этот ряд с числами постоянного знака, что мотивирует следующее определение.

Определение 5 *Ряд сходится абсолютно, если сходится ряд, составленный из модулей членов этого ряда. Ряд сходится условно, если он сходится, но расходится абсолютно.*

Теорема 18 *Если ряд сходится абсолютно, то ряд сходится.*

Доказательство. Следует напрямую из критерия Коши и свойства модуля: $||a_1| + ...|a_n|| \geqslant |a_1 + ... + a_n|$. □

Теорема 19 *(признак Лейбница для знакочередующихся рядов)*
Пусть ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n$*, где* $v_n > 0$ *и монотонно убывает. Тогда ряд сходится. Более того, имеет место оценка погрешности* $|R_n| \leqslant v_n$

Доказательство. 1. Посчитаем частичную сумму для $2k$:

$$S_{2k} = v_1 - v_2 + ... - v_{2k}$$

$$S_{2k+2} = S_{2k} + v_{2k+1} - v_{2k+2}$$

$$S_{2k+2} - S_{2k} = v_{2k+1} - v_{2k+2}$$

$$S_{2k} = v_1 - (v_2 - v_3) - (v_4 - v_5) - ... - (v_{2k-2} - v_{2k-1}) - v_{2k}$$

Значит, эта последовательность возрастает и ограничена сверху, значит, у неё есть конечный предел: $S_{2k} \leqslant u_1$

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (S_{2k} + v_{2k+1}) = S$$

Следовательно,

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Последовательность частичных сумм для нечетных чисел также убывает, доказательство аналогичное.
2. Докажем оценку погрешности. $|R_{2k}| = S - S_{2k} < S_{2k+1} - S_{2k}$. Итак,

$$|R_{2k}| \leqslant v_{2k+1}$$

$$R_{2k+1} = S_{2k+1} - S < S_{2k+1} - S_{2k+2}$$

$$|R_{2k+1}| \leqslant v_{2k+2}$$

□

Теорема 20 *(Преобразование Абеля)*
Пусть $B_i = \sum\limits_{k=1}^{i} b_k$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

Доказательство. $b_k = B_k - B_{k-1},\ k \in \{2, ..., n\}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} a_k \cdot (B_k - B_{k-1}) = a_1 b_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} a_k b_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{k+1} b_k = a_1 b_1 = \sum\limits_{k=2}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \cdot B_k + +a_n b_n - a_2 b_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ □

Теорема 21 *(неравенство Абеля)*
Пусть последовательность a_n монотонно возрастает или убывает, и пусть существует константа M такая, что $\forall k \in \{1...n\}: \ |b_1 + b_2 + ...b_n| \leqslant M$ (то есть она ограничивает модуль частичных сумм ряда B). Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M(|a_1| + 2|a_n|)$$

Доказательство. Применим преобразование Абеля к ряду с общим членом $a_n b_n$: $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| = \left|\sum\limits_{k+1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n\right| \leqslant \left|\sum\limits_{k+1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k\right| + |a_n| \cdot |B_n| \leqslant M \cdot \left|\sum\limits_{k+1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\right| + M|a_n| \leqslant M(|a_1| + 2|a_n|)$. $\square$

Теорема 22 *(признак Дирихле)*
Пусть общий член ряда имеет вид $a_n b_n$ Тогда если:
1. Последовательность a_n монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
2. Последовательность частичных сумм b_n ограничена константой B;
Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство. Используем критерий Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, предел последовательности a_n равен нулю, тогда для

$$\frac{\varepsilon}{6B} > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right|$. Подберем константу из неравенства Абеля: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+i} b_k\right| = |B_{n+i} - B_n| \leqslant |B_{n+i}| + |B_n| \leqslant 2B = M$. Значит, из неравенства Абеля получаем $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant 2B(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) < 2B \cdot (\frac{\varepsilon}{6B} + \frac{2\varepsilon}{6B}) = \varepsilon$. $\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$. По признаку Дирихле ряд сходится, так как частичные суммы синуса арифметической прогрессии сходятся.

Теорема 23 *(признак Абеля)*
Пусть общий член ряда имеет вид $a_n b_n$. Тогда если
1. Последовательность a_n монотонна и ограничена константой M;

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится.*
Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Докажем по критерию Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как сходится ряд с общим членом b_n, то по критерию Коши для

$$\frac{\varepsilon}{3M} > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Из неравенства Абеля получаем $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) < \frac{\varepsilon}{3M}(M + 2M) = \varepsilon$. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < \varepsilon \quad \square$$

Упражнение. Доказать признак Абеля, используя признак Дирихле. Решение. Условие означает, что признак Дирихле более общий, чем признак Дирихле, поэтому покажем, что если ряд удовлетворяет условиям признака Абеля, то он удовлетворяет и признаку Дирихле.

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. По условию признака Абеля, последовательность a_n монотонна и ограниченна, поэтому у её есть конечный предел a, поэтому исходный ряд можно представить в виде

$$a \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (a_b - a)$$

Первый ряд сходится по условию, второй удовлетворяет признаку Дирихле.

Пример. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\sin n\alpha \cos \frac{\pi}{n}) / \ln \ln n$. Косинус монотонный и ограниченный, а все остальное сходится по Дирихле. Значит,ряд сходится по Абелю.

Теорема 24 *(признак Даламбера для знакопеременных рядов)*
Пусть a_n *- общий член знакопеременного ряда, и* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$. *Тогда:*
1. Если $0 \leqslant q < 1$, *то ряд сходится абсолютно.*
2. Если $q > 1$, *то ряд расходится.*
Если $q = 1$, *ничего нельзя сказать.*

Доказательство. 1. Следует из признака Даламбера для знакопостоянных рядов.
2. Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q > 1$ Для

$$\varepsilon = q - 1 > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

откуда $\left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q\right| < \varepsilon$, поэтому $1 < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q+1$, значит не выполняется необходимый признак. □

Теорема 25 *(признак Коши для знакопеременных рядов)*
Пусть a_n - общий член знакопеременного ряда, и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:
1. Если $0 \leqslant q < 1$, то ряд сходится абсолютно.
2. Если $q > 1$, то ряд расходится.
Если $q = 1$, ничего нельзя сказать.

Доказательство. 1. Следует из признака Коши для положительных рядов.
2. Проводится аналогично доказательству п.2 в признаке Даламбера. □

Признак сравнения для знакопеременных рядов не работает. Приведем пример: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $b_n = a_n + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Предел отношения таких рядов равен 1, то есть они эквивалентны, но вот первый сходится, а второй - расходится

1.1.4 Свойства абсолютно сходящихся рядов

Лемма. Если ряд сходится абсолютно, то модуль его суммы не превосходит суммы его модулей. Лемма следует из неравенства

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$$

Теорема 26 *(о перестановках в абсолютно сходящемся ряде)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n, и он сходится абсолютно. Пусть его сумма равна S, сумма из модулей равна $\overline{S}$. Обозначим соответствующие частичные суммы как S_n, $\overline{S_n}$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^*$ с переставленными членами исходного ряда, обозначим его сумму и частичную сумму как S^*, S_n^* (для ряда из модулей соответственно $\overline{S^*}$, $\overline{S_n^*}$). Тогда:
1. S^* существует и равна S;
2. Ряд из a_n^* сходится абсолютно.

Доказательство. 1. По условию, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \overline{S}$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : |\overline{S_n} - \overline{S}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Из леммы следует, что $|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Перейдем к переставленному ряду. Выберем в нем такой номер m_0, чтобы частичная сумма $S^*_{m_0}$ содержала все слагаемые, входящие в S_{n_0}. Тогда для любого числа $m > m_0$ имеем

$$|S^*_m - S_{n_0}| < |\overline{S}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда $|S^*_m - S| = |S^*_m - S_{n_0} + S_{n_0} - S| \leqslant |S^*_m - S_{n_0}| + |S_{n_0} - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. В итоге мы доказали сходимость ряда с переставленными членами и равенство его суммы сумме исходного ряда:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall m > m_0 : |S^*_m - S| < \varepsilon$$

2. Абсолютная сходимость следует из таких же рассуждений для ряда с модулем. □

Теорема 27 *Если ряд сходится абсолютно, то ряд, умноженный на константу, сходится абсолютно.*

Доказательство. Так как ряд сходится, то по определению $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N} : ||a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}|| < \varepsilon$. Теперь возьмем $\frac{\varepsilon}{|c|}$. Тогда для ряда, умноженного на константу, получаем, что $||ca_{n+1}| + ... + |ca_{n+p}|| = |c| \cdot ||a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}|| < \frac{\varepsilon \cdot |c|}{|c|}$. □

Теорема 28 *Сумма абсолютно сходящихся рядов сходится абсолютно.*

Доказательство. Так как сумма модулей больше модуля суммы, то $\sum\limits_{n=1}^{k}|a_n| + \sum\limits_{n=1}^{k}|b_n| \geqslant \sum\limits_{n=1}^{k}|a_n + b_n|$. Но это значит, что частичные суммы ряда $|a_n + b_n|$ ограничены числом $S_a + S_b$ (суммами рядов), поэтому ряд сходится. □

Теорема 29 *(О произведении абсолютно сходящихся рядов)*
Сумма всевозможных произведений $a_i b_j$ сходится абсолютно, и сумма ряда равна произведению сумм.

Доказательство. Введем обозначения $u_n = |a_n|,\ v_n = |b_n|, S^i = \sum\limits_{n=1}^{\infty} i_n, \overline{S^i} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |i_n|$. Частичные суммы S_n произведения рядов будут суммами элементов угловых миноров бесконечной матрицы

$$\begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \dots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \dots \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Получим $S_1 = u_1v_1,\ S_2 = (u_1 + u_2)(v_1 + v_2),\ S_3 = (u_1 + u_2 + u_3)(v_1 + v_2 + v_3)$.... Получаем $S_n = \overline{S_n^a} \cdot \overline{S_n^b}$. Так как ряды сходятся абсолютно, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S_n^a} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S_n^b} = \overline{S^a} \cdot \overline{S^b}$. $\square$

Определение 6 *(произведение рядов по Коши)*
Пусть $S_a \cdot S_b = S_c$. *Определим ряд-произведение следующим образом:*
$c_1 = a_1b_1$
$c_2 = a_1b_2 + a_2b_1$
$c_3 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_3$

То есть суммируем по диагоналям бесконечной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & \\ a_3b_1 & \dots & & \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

Пример 1. $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = 1,\ b_n = \frac{n}{2^n}$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{k(k+1)-2^{n+1-k}}$.

Пример 2. Произведение расходящихся рядов $a_n = 1,5^n,\ b_n = 1 - 1,5^n$ в смысле Коши - сходится, так как $c_n = 0,75^n$.

Заметим, что условной сходимости недостаточно! Так, для $a_n = b_n = (-1)^{n-1}/\sqrt{n}$ ничего не выйдет. Смиритесь. Ребят а че вы с пары то свалили? Неуютненько.

Теорема 30 *(о перестановках в абсолютно сходящемся ряде)*
Если ряд сходится

Доказательство. $\square$

1.1.5 Свойства условно-сходящихся рядов

Теорема 31 *(лемма о сходимости)*
Пусть ряд с общим членом a_n сходится условно. Рассмотрим отдельно подпоследовательности из положительных и отрицательных членов ряда. Тогда их суммы $+\infty, -\infty$ соответственно.

Доказательство. Пусть S^+, S^- - суммы положительных и отрицательных членов. Тогда $\overline{S} = S^+ - S^-$, $S = S^+ + S^-$. Посклько $\overline{S} = \infty$, а $S = const$. Тогда $S^+ = +\infty$, $S^- = -\infty$. $\square$

Теорема 32 *(Римана)*
Если ряд сходится условно, то для любого действительного числа найдется такая перестановка ряда, при которой ряд сходится к этому числу.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ - искомое число. По предыдущей лемме, ряд a_n^+ из положительных членов расходится, значит, найдется такая его частичная сумма S_1^+, что $S_1^+ > \alpha$. Дальше найдем такую частичную сумму S_1^- из отрицательных членов, что $S_1^+ + S_1^- < \alpha$. Будем повторять эту операцию, беря частичные суммы из остатков рядов с положительными или отрицательными членами. Поскольку исходный ряд сходится, то его общий член стремится к нулю, поэтому и частичные суммы отрицательных и положительных членов стремятся к нулю. Поэтому ряд $S_1^+ + S_1^- + S_2^+ + S_2^- + ...$ является рядом Лейбница и сходится к числу α. Переставив члены исходного ряда в соответствии с этими частичными суммами, получим искомую перестановку. $\square$

1.2 Функциональные последовательности

1.2.1 Базовые определения

Определение 7 *Пусть функции $f_1, f_2 ...$ заданы на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$. Тогда задана функциональная последовательность*

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x)... \ , x \in X$$

Определение 8 *Функциональная последовательность f_n сходится* ***поточечно*** *к $f(x)$ в точке x_0, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n > N : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Множество всех $x_0 \in X$, для которых предел существует, называется областью сходимости последовательности.

Определение 9 *Функциональная последовательность f_n* ***равномерно сходится*** *к функции f на множестве X, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n > N \ \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается как $f_n \rightrightarrows f$

Это определение эквивалентно **супремум-критерию сходимости**:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Теорема 33 *Супремум-критерий эквивалентен определению равномерной сходимости.*

Доказательство. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на X. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по определению для

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $a_n = \sup |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 : |a_n| < \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Обратно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 : \sup |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Значит, выполняется неравенство

$$\forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup |f_n(x) - f(x)|$$

откуда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff f_n \rightrightarrows f$$

□

Теорема 34 *(критерий Коши равномерной сходимости)*
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве X тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, $f_n(x) \rightrightarrows f$ на X. Тогда для

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда $\forall p \in \mathbb{N}\ \forall n+p > n > n_0 : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Обратно, по условию для

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Сходимость имеет место для каждой отдельной точки $x \in X$ (поточечная сходимость), тогда по критерию Коши для числовой последовательности сущетсвует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$. Тогда в неравенстве (1) можно перейти к пределу: $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. $\square$

Следствие (метод граничной точки). Если $f_n(x) \in C[a,b)$ и $f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in (a,b)$, и $f_n(a)$ расходится. Тогда $f_n(x)$ не сходится равномерно к $f(x)$ на (a,b).

Доказательство. Допустим, что сходимость равномерная. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

По условию, функции f_n непрерывны на $[a,b)$, тогда $\lim\limits_{x\to a+0} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $|f_{n+p}(a) - f_n(a)| < \varepsilon$. По критерию Коши для числовой последовательности $f_n(a)$ сходится. Но это противоречит условию. $\square$

Теорема 35 *(метод оценки остатка функциональной последовательности)*
Пусть $f_n(x) \to f(x)$ на множестве E и $r_n(x) = f_n(x) - f(x)$ - остаток ряда. Тогда:
1. Если $\forall x \in E : |r_n(x)| \leqslant b_n \to 0$, то ф.п. сходится равномерно.
2. Если $\exists X_n \in E : r_n(x_n) \to a \neq 0$, то ф.п. не сходится равомерно.

Доказательство. 1. По условию, $\forall x \in E : |r_n(x)| \leqslant b_n$, тогда $\sup\limits_{x\in E} |r_n(x)| \leqslant b_n$. Отсюда получаем, что

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

то есть функция сходится равномерно на множестве E.
2. Пусть $\exists X_n \in E : r_n(x_n) \to a \neq 0$. Но это эквивалентно отрицанию супремум-критерия, поэтому последовательность не сходится равномерно. $\square$

Теорема 36 *(о пределе равномерно сходящейся функциональной последовательности)*
Пусть функции f_n непрерывны на X и $f_n \rightrightarrows f$. Тогда f непрерывна на X.

Доказательство. По определению, непрерывность на $X \Leftrightarrow$ непрерывность в каждой точке $x \in X$. Рассмотрим x_0 и зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию имеется равномерная сходимость, тогда для

$$\frac{\varepsilon}{3} > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Пусть $n > n_0$, функция $f_n(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда для

$$\frac{\varepsilon}{3} > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X : 0 \leqslant |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Оценим эту разницу: $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$.
Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

то есть функция непрерывна в точке x_0. □

1.2.2 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей

1. Линейные комбинации сходятся с соответствующим линейным комбинациям пределов.

2. Умножение на ограниченную (на X) функцию: $(gf_n) \rightrightarrows (gf)$

3. На любом подмножестве X функция равномерно сходится.

4. Если $\forall x \in X : f_n(x) \to f(x)$ и $E \subset X$ - конечное множество, то на E $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ - функция сходится равномерно.

5. Последовательность, равномерно сходящаяся на двух множествах, равномерно сходится на их объединении.

Доказательство.
1. Докажем для линейной комбинации $\alpha f + \beta g$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию $f_n \rightrightarrows f$ на X, тогда для $\frac{\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|} > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall x \in X$:

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|}$. Тоже самое для функции g. Для неё существует константа n_2. Выбрав максимум из них, получаем

$$|(\alpha f_n(x)+\beta g_n(x))-(\alpha f+\beta g)| \leqslant |\alpha|\cdot|f_n(x)-f(x)|+|\beta|\cdot|g_n(x)-g(x)| < \varepsilon$$

. Значит, $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$.
2. По условию, $g(x)$ ограничена на X. Значит, существует такое M, что $\forall x \in X : |g(x)| < M$. Тогда для

$$\frac{\varepsilon}{M} > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Отсюда $|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| = |g(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.
3. Допустим, функция не сходится равномерно на $E \subset X$. Тогда существует такая последовательность $\{x_n\} \subset E$, что $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x_n)-f(x_n)| > 0$. Но поскольку $\{x_n\} \subset E \subset X$, функция не сходится равномерно и на X, что противоречит условию.
4. Так как у любого конечного множества есть супремум, то найдется такой $x_0 \in E$, что на нем достигается супремум предела $|f_n(x_0) - f(x_0)|$. Так как по условию $f_n(x_0) \to f(x_0)$, то по супремум-критерию последовательность сходится равномерно.
5. Используем супремум-критерий. Допустим, последовательность равномерно не сходится на объединении. Тогда

$$\exists \{x_n\} \subset A \cup B : \lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = c \neq 0$$

Если последовательность $\{x_n\}$ целиком лежит в одном из двух множеств (или если лишь конечное число членов лежит в другом множестве), тогда f_n не сходится равномерно на этом множестве, что противоречит условию. Допустим, последовательность разбивается на две подпоследовательности $\{x_n^a\} \subset A$ и $\{x_n^b\} \subset B$. По определению, на них достигается супремум величины $|f_n - f|$. Рассмотрим сумму пределов $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x_n^a) - f(x_n^a)| + \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x_n^b) - f(x_n^b)| = c_a + c_b$. По свойству сумм пределов $c_a + c_b = c$, но тогда $c_a \neq 0$, либо $c_b \neq 0$, что противоречит пред положению согласно супремум-критерию.

1.3 Функциональные ряды

1.3.1 Базовые определения

Определение 10 *Область $X \subset D$ сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - область, лежащая в области определения всех функций ряда и для каж-*

дого x на ней последовательность частичных сумм ряда сходится поточечно.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n}(\sin x)^{3n}$. Область сходимости - $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

Определение 11 *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на* X, *если* $S_n \rightrightarrows S$ *на* X *(*S_n *- частичная сумма ряда).*

Пример. Исследуем на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x(2n-1)}{((n-1)^2+x^2)(n^2+x^2)}$, $x \in [1, \infty)$. Здесь предел частичных сумм можно найти по определению: $S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k = x(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{n^2+x^2})$. При фиксированном $x \in D : \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{x}$, $S(x) = \frac{1}{x}$. Проверим, что остаток равномерно стремится к нулю (тогда это верно и для суммы): $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2} \leqslant \frac{x}{2nx} = \frac{1}{2n} \to 0,\ n \to \infty$ (по методу оценки остатка). Итак, ряд сходится равномерно к своей сумме.

Пример. Исследуем на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2(2n-1)}{((n-1)^2+x^2)(n^2+x^2)}$, $x \in [1, \infty)$. Имеем $S_n(x) = 1 - \frac{x^2}{n^2+x^2},\ S(x) = 1$

Теорема 37 *(необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда)*
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на* X. *Тогда* $a_n \rightrightarrows 0$ *на* X.

Доказательство. По условию,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > n_0\, \forall x \in X : |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \implies |S_{n+1}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Отсюда имеем

$$|a_n(x)| = |S_{n+1}(x) - S_n(x)| \leqslant |S_{n+1}(x) - S(x)| + |S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Значит, $a_n \rightrightarrows 0$ на X. $\square$

Теорема 38 *(критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)*
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномерно сходится на* X *к* $S(x)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : |\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Применим определение Коши равномерной сходимости для последовательности. □

Пример. Докажем, что у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n^2x^2+\sqrt{n}}$, $x \in (0,1)$ нет равномерной сходимости. Возьмем $x = \frac{1}{2n}$; $a_k(x) \geqslant \frac{1}{4n}$. Поэтому для $\varepsilon \geqslant \frac{1}{4}$ по критерию Коши ряд расходится.

Теорема 39 *(метод граничной точки)*
Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, его члены непрерывны на отрезке $[a,b]$ и ряд сходится на интервале (a,b), но расходится на каком-либо конце интервала. Тогда равномерной сходимости нет.

Доказательство. Повторяет доказательство для последовательностей. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in (1,2)$. Ряд сходится на интрвале как обобщенный гармонический ряд. При $x = 1$ ряд расходится, значит, равномерной сходимости нет.

Теорема 40 *(признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда /мажорантный признак)*
Пусть дан ряд с общим членом $a_n(x)$ и мы можем оценить $|a_n(x)| \leqslant a_n$ (то есть мажорирующим рядом, не зависящим от x), причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на том множестве, на котором верна оценка.

Доказательство. Испоьзуем критерий Коши: фиксируем $\varepsilon > 0$. Ряд a_n сходится, значит, по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

По условию, $\forall x \in X \ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n(x)| \leqslant a_k$, значит

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

. Тогда по критерию Коши для функционального ряда следует равномерная сходимость. □

Пример. Исследуем на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{arcctg(nx)}{n}$, $x \in (\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$. Подставив ноль, по методу граничной точки нет равномерной сходимости.

Пример. Исследуем сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2} \sin nx$ на прямой. Спойлер: сходится равномерно. Сделаем оценку: $|a_n(x)| \leqslant e^{-n^5x^2} n|x|$. Функция симметрична при замене $x \mapsto -x$, значит, будем оценивать на положительном луче, откинув модуль. Оценим максимумом, вычислив производную и решив уравнение. Имеем $x = \frac{1}{\sqrt{2n^5}}$. Подставляем: $f_n(x) \leqslant f(\frac{1}{\sqrt{2n^5}}) = \frac{1}{\sqrt{2e}n^{\frac{3}{2}}} = a_n$. Значит, $|a_n(x)| \leqslant |f_n(x)| \leqslant a_n$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Итак, сходимость равномерная.

Теорема 41 *(признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда)*
Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *и*
1. $\forall x \in X : \{a_n(x)\}$ *монотонна по* n*;*
2. $\exists M = const$ $\forall x \in X$ $\forall n \in N : |B_n(x)| \leqslant M$*, где* $B_n(x)$ *- частичные суммы ряда* b_n*.*
Тогда ряд сходится равномерно на X*.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $a_n \rightrightarrows 0$ на X, то для

$$\frac{\varepsilon}{6B} > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ \forall x \in X : |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}$$

Из пункта 3 условия имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+i} b_k(x)\right| = |B_{n+i}(x) - B_n(x)| \leqslant |B_{n+1}(x)| + |B_n(x)| \leqslant 2B$$

По неравенству Абеля получаем

$$\forall x \in X : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant 2B(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) < \varepsilon$$

Значит, исходный ряд сходится равномерно по критерию Коши. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx/n$. Исследовать на равномерную сходимость на интервалах $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, $(0, 2\pi)$. Ну, раз говорят что уже было, то не пишем. На втором интервале нет равномерной сходимости по краевому критерию.

Теорема 42 *(признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда)*
Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *и* $\forall x \in X$*:*
1. $|a_n(x)| \leqslant M = const$ *для всех* n*;*
2. $\{a_n(x)\}$ *мнонотонна;*
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно сходится на* X*;*
Тогда исходный ряд равномерно сходится на X*.*

Доказательство. По определению Коши. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как ряд с общим членом b_n сходится равномерно, то по критерию Коши для

$$\frac{\varepsilon}{3M} > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Тогда по неравенству Абеля

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)a_k(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}(x)|) < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot 3M = \varepsilon$$

Тогда по критерию Коши этот ряд сходится равномерно на X. □

Пример. Исследуем на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin x arctgnx}{\sqrt{n^2+x^2}}$.
Алгоритм:
1. Арктангенс монотонен и ограничен.
2. Все остальное сходится по Дирихле.

1.3.2 Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 43 *(о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда)*
Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$*, причем*
1. Все функции непрерывны на множестве X*;*
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на* X*;*
Тогда $S(x)$ *непрерывна на* X*.*

Доказательство. По условию, сумма из $a_n(x)$ сходится равномерно на X к $S(x)$, то есть $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на X, $S_n(x)$ непрерывна как сумма. Тогда по теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности, составленной из непрерывных функций, $S(x)$ непрерывна. Другая формулировка:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} a_n(x)$$

(то есть можно поменять местами сумму и предел). $\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = f(x)$ - непрерывна на $(0, 2\pi)$

Теорема 44 *(об интегрировании равномерно сходящегося ряда)*
Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, *причем*
1. все функции непрерывны на отрезке $[a, b]$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a, b]$ *к* $s(x)$;
Тогда

$$\forall x, x_0 \in [a, b]: \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} a_n(t) dt \right)$$

(можно менять интеграл и сумму).

Доказательство. Докажем, что $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a_n(t)dt$. По предыдущей теореме $S(t)$ непрерывна на $[a, b]$, значит,интегрируема на нем по Риману. Обозначим $\sigma_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} a_k(t)dt$ и докажем, что $\sigma_n(x) \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, $S_n(t)$ равномерно сходится на $[a, b]$ для

$$\frac{\varepsilon}{b-a} > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \ \forall n > n_0 \ \forall x \in [a, b]: |S_n(t) - S(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Тогда $\left| \sigma_n(x) - \int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt \right| = \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} a_k(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} (S_n(t) - S(t))dt \right| \leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x} |S_n(t) - S(t)|dt \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot |x - x_0| < \varepsilon$. Значит, $\sigma_n(x) \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} S_n(t)dt$. $\square$

Теорема 45 *(о дифференцировании равномерно сходящегося ряда)*
Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, *причем*

1. Производные всех функций непрерывны на отрезке $[a, b]$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится на* $[a, b]$ *поточечно;*
3. Ряд из производных сходится равномерно на $[a, b]$ *к* $S(x)$*;*
Тогда

$$\sum_{n=a}^{\infty} a'_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)'$$

то есть в ряде можно менять производную и сумму, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится равномерно.*

Доказательство. 1. Используем предыдущую теорему. Тогда

$$\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a'_n(t)dt$$

Получаем, что в равенстве $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n(x) - a_n(x_0))$ справа стоит число (в силу непрерывности функции), ряд из $a_n(x_0)$ сходится по условию, следовательно, ряд из $a_n(x)$ сходится. Поэтому, дифференцируя равенство $\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$, получаем первое утверждение теоремы.

Теперь покажем равномерную сходимость исходного ряда. Для этого покажем, что остаток ряда из производных $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a'_n(x)$ равномерно стремится к нулю. Из этого следует применимость теоремы об инетгировании: $\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a'_k(t)\,dt = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a'_k(t)dt = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (a_k(x) - a_k(x_0))$. Если ряд удовлетворяет теореме об интегрировании, то и его остатки тоже, значит, $\int\limits_{x_0}^{x} r_n(t)dt = R_n(x) - R_n(x_0)$, откуда

$$R_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} r_n(t)dt + R_n(x_0) \quad (1)$$

. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, остаток обычного ряда стремится к нулю: $R_n(x) \to 0$. Тогда для

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0\ \exists n_1(\varepsilon)\ \forall n > n_1 : |R_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Остаток ряда из производных равномерно стремится к нулю, тогда для

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0 \ \exists n_2(\varepsilon) \ \forall n > n_2 \ \forall x \in [a,b] : |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

По формуле (1) получаем: $|R_n(x)| \leqslant \left|\int\limits_{x_0}^{x} r_n(t)dt\right| + |R_n(x_0)| \leqslant \left|\left|\int\limits_{x_0}^{x} r_n(t)dt\right| + |R_n(x_0)|\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

1.4 Степенные ряды

1.4.1 Базовые определения

Определение 12 *Степенной ряд- ряд вида* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$

Числа c_n - коэффициенты степенного ряда, x_0 - число. Итак, степенной ряд - обобщение понятия многочлена. Область сходимости степенного ряда непуста, так как там лежит как минимум x_0 (в этом случае сумма ряда равна c_0). Сделав замену $t = x - x_0$, сведем любой степенной ряд к виду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$.

Теорема 46 *(лемма Абеля)*
Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *сходится в точке* x_0 *и* $|x| < |x_0|$, *то ряд сходится сходится и в* x, *причем абсолютно.*

Доказательство. По условию ряд сходится, значит, $c_n x^n \to 0$. Тогда существует константа M, большая чем все члены ряда. Тогда $|c_n x^n| = \left|c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n$ сходится $\Rightarrow$ ряд из модулей сходится, т.е. ряд сходится абсолютно. □

Теорема 47 *Пусть* D *- область сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $R = \sup\limits_{x \in D} |x|$. *Тогда* $(-R, R) \subset D \subset [-R, R]$.

Доказательство. По лемме Абеля, второе включение очевидно: $\forall x \in D : |x| \leqslant R \implies D \subset [-R, R]$. Пусть $x \in (-R, R)$. Тогда $|x| < R = R_1$. Тогда для него найдется $x_0 \in D : |x_0| > |x|$. Значит, ряд в точке x_0 сходится, и значит сходится в x. Значит, интервал лежит в области сходимости. □

1.4.2 Формулы для вычисления радиуса сходимости

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. По признаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1$, то ряд сходится. Итак, если предел существует, то

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}}$$

Аналогично, из признака Коши получим формулу Коши-Адамара:

$$\boxed{R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}}$$

В общем случае алгоритм такой:
1. Найти радиус сходимости.
2. Выписываем интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$.
3. Исследуем на сходимость концы интервала.

Пример. Найдем область сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}$. Применим признак Даламбера: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+3)3^{n+1}}{(n+2)3^n} = 3$. Интервал сходимости: $(6-3, 6+3)$. В точке $x = 9$ ряд расходится (т.к. гармонический), в точке $x = 3$ - условная сходимость (по признаку Лейбница).

Пример. Найдем область сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n}$. Заметим, что у этого ряда коэффициенты чередуются с нулем (лакунарный ряд). Используем два способа:
1. По формуле Коши-Адамара - возьмем четные номера, так как на них доставляется супремум предела последовательности: $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)} = \sqrt{2}$. Интервал сходимости $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, на концах расходится.
2. Исследуем как функциональный ряд по признаку Даламбера. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{x^2}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$. Значит, ряд сходится, если $\frac{x^2}{2} < 1$, откуда мы получаем тот же интервал сходимости.

Теорема 48 *(о равномерной сходимости степенного ряда)*
Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри интрвала сходимости.

Доказательство. Для простоты рассмотрим ряд с центром в нуле. Пусть ряд сходится на $(-R, R)$. Возьмем $[a, b] \subset (-R, R)$. Обозначим $d =$

$\max(|a|,|b|)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n d^n$ сходится, значит, его мы можем использовать для оценки сверху рядов на отрезке: $|c_n x^n| \leqslant |c_n d^n|$, значит, по признаку Вейерштрасса ряд сходится на $[a,b]$. $\square$

Теорема 49 *(о непрерывной сумме степенного ряда)*
Сумма степенного ряда непрерывна в любой точке из интервала сходимости.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится на $(-R,R)$ к $f(x)$. Степенные функции непрерывны на интервале (и вообще на всей прямой); по предыдущей теореме, на любом отрезке, лежащем в интервале, ряд равномерно сходится. Значит, по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда, сумма непрерывна на отрезке. Так как этот отрезок произволен, то сумма непрерывна на интервале. $\square$

Теорема 50 *(об интегрировании и дифференцировании степенного ряда)*
Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = f(x)$, R - радиус сходимости. Тогда у функции $f(x)$ существуют производные любого порядка внутри интервала:

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}$$

Интегрирование тоже почленное. Причем при дифференцировании и интегрировании радиус сходимости не меняется.

Доказательство. Следует из соотвествующих теорем для функциональных рядов. Последнее утверждение следует из формулы Коши-Адамара. $\square$

Пример. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}$. Задания типа таких можно делать, используя свойства степенных рядов. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Радиус сходимости $x \in [-1,1)$. Возьмем производную: $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. А вот теперь проинтегрируем: $\int\limits_0^x \frac{dt}{1-t} = f(x) - f(0)$; $f(x) = -\ln(1-x) + f(0)$. Значит, сумма искомого ряда равна $f(\frac{1}{2}) = 2$. Цель этих телодвижений - привести к виду геометричсекой прогрессии, которую легко посчитать.

1.4.3 Ряды Тейлора

Определение 13 *Пусть в некоторой окрестности $U(x_0)$ у функции существуют производные всех порядков. Тогда для функции $y = f(x)$ в точке x_0 существует ряд Тейлора:*

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Если $x_0 = 0$, то ряд называется рядом Маклорена.

Теорема 51 *Если функция представляется в виде степенного ряда, то он совпадает с её рядом Тейлора.* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$.

Доказательство. Пусть $(x_0 - R, x_0 + R)$ - интервал сходимости ряда. Из разложения функции в ряд имеем $f(x_0) = c_0$. Беря производную, получаем, что $f'(x_0) = c_1$. Дифференцируя дальше, получаем, что $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. □

Если по произвольной функции составить ряд Тейлора, то совсем не обязательно, что он сойдется к этой функции. Сейчас поясним:

Пример. Рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$

Очевидно (по индукции), что производная порядка $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot p\left(\frac{1}{x}\right)$, где $p(t)$ - многочлен. Посчитаем производную в нуле; первая производная в нуле - нуль. По индукции получаем, что все остальные производные тоже равны нулю. Значит, ряд Маклорена тождественно равен нулю, и сходится *не к исходной функции, а к тождественно нулевой.*

Теорема 52 *(достаточное условие сходимости ряда Тейлора)*
Пусть $\exists h > 0$, $\exists M = const$ такие, что $\forall x \in \mathbb{N}$ $\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) : |f^{(n)}(x)| \leqslant M$. Тогда на всей h-окрестности точки x_0 функция равна своему ряду Тейлора, причем он сходится равномерно на данном интервале.

Доказательство. Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора и запишем остаток в форме Лагранжа: $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $\xi \in (x_0, x)$ (лежит между ними). Остаток по модуля меньше, чем $M \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$ - значит, он равномерно сходится к нулю. Поэтому и сам ряд сходится равномерно на $(x_0 - h, x_0 + h)$. □

Ряды Маклорена для основных функций

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}...,\ x \in \mathbb{R}$
2. $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...,\ x \in \mathbb{R}$
3. $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...,\ x \in \mathbb{R}$
4. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...,\ x \in \mathbb{R}$
5. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...,\ x \in \mathbb{R}$
6. $\ln(1+x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^n}{n} + ...,\ x \in (-1, 1]$
7. $\ln(1-x) =,\ x \in [-1, 1)$
8. $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x \in (-1, 1)$ - в этой формуле функция принимает все положительные значения, поэтому она круче.
9. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + ...$
10. $arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...\ , x \in [-1, 1]$
11. $arcsin(x) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! \cdot x^{2n+1}}{n! \cdot 2^n (2n+1)},\ x \in (-1, 1)$

(Для логарифма) покажем, что остаток ряда стремится к нулю.
1. $x \in [0, 1]:\ \ r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$. Подставим $\xi = x_0 + \theta(x - x_0),\ \theta = \theta(x, n)$. При этом имем оценку $0 \leqslant x \leqslant 1 \leqslant 1 + \theta x$. Получим $|r_n(x)| = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Значит, остаток равномерно сходится к 0 на $[0, 1]$. Чтобы доказать равномерную сходимость на $(-1, 0)$, запишем остаток в форме Коши. Получим $|r_n(x)| = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x}$. Первая дробь меньше 1, вторую оценим как $\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$, что при фиксированном x стремится к нулю. Значит, мы можем писать разложение для логарифма!

Пример. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

Ряд $(1+x)^\alpha$. Найдем радиус сходимости: $R = \lim\limits_{n \to \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = |\frac{n+1}{\alpha - n}| = 1$. Запишем остаток в форме Коши: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n,\ r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}$. Если остаток стремится к нулю, то и ряд сходится к данной функции. Пусть $r_n = A_n \cdot B_n \cdot C_n$, где $B_n(x) =$

$(1+\theta x)^{\alpha-1}$, $C_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$, $A_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}$. $A_n \to 0$ по признаку Даламбера, $|B_n(x)| \leqslant max\{(1-|x|)^{\alpha-1}, (1+|x|)^{\alpha-1}\}$, $C_n(x) < 1$, значит, остаток стремится к нулю, и ряд сходится к функции.

Задача. Доказать, что в $x = 1$ ряд сходится при $\alpha > -1$, расходится при $\alpha \leqslant -1$. В точке $x = -1$ сходится абсолютно при $\alpha \geqslant 0$, расходится при $\alpha < 0$

Выражения для арксинуса и арктангенса получаются интегрированием разложния их производных.

1.4.4 Использование степенных рядов

Разложение функции в ряд - мощнейшая тема. Иногда в физике и других прикладных областях делают так: берут сложную функцию, раскладывают её в ряд Тейлора и отбрасывают все члены, кроме первого. Дифференцирование обычно упрощает функцию, и зачастую такое упрощение имеет физический смысл (вспомним решение уравнения физического маятника).

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до $0,001$. Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора: $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 - \frac{1}{120}x^{10} + \ldots$. Интегрируя почленно и подставляя x_0, получаем $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{25} - \frac{1}{6\cdot 7} + \frac{1}{27\cdot 9} - \frac{1}{120\cdot 11} + \ldots$. Чтобы достичь требуемой точности, необходимо оценить остаток. Вспоминаем, что для знакочередующегося ряда оценка дается первым членом остатка. Так как $\frac{1}{120\cdot 11} < \frac{1}{1000}$, то

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{25} - \frac{1}{6\cdot 7} + \frac{1}{27\cdot 9}$$

Пример. Вычислим $\ln 3$ с точностью $0,001$. Представим его в виде $\ln 3 = \ln\frac{1+x}{1-x}$, откуда $x = \frac{1}{2} \in (-1,1)$ - входит в область сходимсоти, значит, мы можем написать разложение: $\ln 3 = 1 + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^4} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$. Этот ряд не знакочередующийся, поэтому придется оценивать остаток геометрической прогрессией: $r_n = \frac{1}{(2n+3)2^{2n+2}} + \frac{1}{(2n+5)2^{2n+4}} + \ldots \leqslant \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{2^{2n+4}}\ldots = \frac{1}{2^{n+2}(1-\frac{1}{4})} = \frac{1}{3\cdot 2^n}$. Требуемая точность достигается при $n = 5$, поэтому

$$\ln 3 \approx 1 + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^4} + \frac{1}{7\cdot 2^6} + \frac{1}{9\cdot 2^8} \approx 1,099$$

Пример. Решение дифференциальных уравнений с помощью разложений в степенной ряд. Решим $y'' = 2x'y + 4y, y(0) = 0, y'(0) = 1$ - диффренециальное уравнение с задачей Коши.

Первый способ - метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^{n-1}...| \cdot 4; y(0) = c_0 = 0 \\ y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + ... + nc_nx^{n-1}, ...| \cdot 2x; y'(0) = c_1 = 1 \\ y'' = 2c_2 + 6c_3x + ... + n(n-1)c_nx^{n-2} \end{cases}$$

x^0 соответствует $2c_2 = 4c_0 \Rightarrow c_2 = 0; c_{2n} = 0; c_5 = \frac{1}{2}; c_7 = \frac{1}{3!}; \Rightarrow c_{2n+1} = \frac{1}{n!}$
x^1 соответствует $6c_3 = 2c_1 + 4c_1 \Rightarrow c_3 = 1$
x^n соответствует $(n+2)(n+1)c_{n+2} = 2nc_n + 4c_n \Rightarrow c_{n+2} = \frac{2}{n+1}c_n$
Мы получили $y = x+x^3+\frac{1}{2!}x^5+\frac{1}{3!}x^7+...+\frac{x^{2n+1}}{n!}+... = x(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+...)$, откуда решение диффура:

$$y = xe^{x^2}$$

Второй способ - метод последовательного дифференцирования. Так как $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$, то $y''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$, $y'''(x) = 2xy'' + 6y'$ и так далее.