

Анализ

Галкина

05.09.2022



# Оглавление

<b>1</b>	<b>Ряды</b>	<b>5</b>
1.1	Числовые ряды . . . . .	5
1.1.1	Базовые определения и теоремы . . . . .	5
1.1.2	Знакопостоянные ряды . . . . .	7
1.1.3	Знакопеременные ряды . . . . .	14
1.1.4	Свойства абсолютно сходящихся рядов . . . . .	18
1.1.5	Свойства условно-сходящихся рядов . . . . .	20
1.2	Функциональные последовательности . . . . .	21
1.2.1	Базовые определения . . . . .	21
1.2.2	Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей . . . . .	22
1.3	Функциональные ряды . . . . .	23
1.3.1	Базовые определения . . . . .	23
1.3.2	Свойства равномерно сходящихся рядов . . . . .	27
1.4	Степенные ряды . . . . .	29
1.4.1	Базовые определения . . . . .	29
1.4.2	Формулы для вычисления радиуса сходимости . . . . .	30
1.4.3	Ряды Тейлора . . . . .	32
1.4.4	Использование степенных рядов . . . . .	34



# Глава 1

## Ряды

В данном разделе мы будем изучать следующие объекты:

- Числовые ряды
- Функциональные ряды (в т.ч. степенные, ряды Фурье)

### 1.1 Числовые ряды

#### 1.1.1 Базовые определения и теоремы

**Определение 1** *Ряд* - сумма счетного числа слагаемых:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

**Определение 2** *Частичная сумма*  $S_n$  - сумма первых  $n$  слагаемых

**Определение 3** *Сумма ряда* - предел последовательности частичных сумм

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Если предел существует и конечен, то ряд сходится. Если предел бесконечен, ряд расходится. Заметим, что, согласно теоремам о

**Определение 4** *Остаток ряда* - разность между частичной суммой ряда и самим рядом:

$$R_k = S - S_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

**Пример.** Геометрический ряд  $a + aq + aq^2 + \dots$ . По школьной формуле  $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ . Имеем случаи:

1.  $|q| < 1 : S = \frac{a}{1-q}$
2.  $|q| > 1 : S = \infty$
3.  $q = 1 : S = \infty$

Итак, ряд сходится, только если  $|q| < 1$ .

Следующие теоремы устанавливаются для любых рядов:

**Теорема 1** (необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд сходится, то предел общего члена равен 0. Равносильная формулировка: если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится.

**Доказательство.** По условию, существует число  $S$  - предел частичных сумм ряда. Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$ .  $\square$

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ ,  $x \neq \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Зафиксируем  $x$ . Допустим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx = 0$ . Но это противоречит тому, что  $\sin^2 + \cos^2 = 1$ . Значит, ряд расходится.

**Пример.** Гармонический ряд расходится, т.к. расходится последовательность частичных сумм:  $S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \dots = 1 + \frac{n}{2}$

**Теорема 2** (критерий Коши сходимости ряда)

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

**Доказательство.** По определению, ряд сходится, когда существует предел частичных сумм. Применим к ним критерий Коши, получим условие:  $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ . Но  $S_{n+p} - S_n \equiv a_{n+1} + \dots + a_{n+p}$ .  $\square$

**Теорема 3** (критерий сходимости через остаток)

1. Если ряд сходится, то сходится любой из его остатков.
2. Если хотя бы один остаток сходится, то ряд тоже сходится.

**Доказательство.** 1. По условию, существует сумма ряда  $S$ . Зафиксируем номер  $N \in \mathbb{N}$  и рассмотрим остаток  $R_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ , а также последовательность  $\sigma$  частичных сумм ряда-остатка  $R_N$ :  $\sigma_n = a_{N+1} + \dots + a_{N+n} =$

$\sum_{k=N+1}^{N+n} a_k$ . Рассмотрим её предел:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+N} - S_N) = S - S_N = R_N$ . Значит, остаток сходится.

2. По условию, существует такой номер  $n_0$ , что остаток  $R_{n_0}$  сходится. Тогда существует предел частичных сумм  $\sigma_n$  этого остатка:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$ ,  $\sigma_n = a_{n_0} + \dots + a_{n_0+n}$ . Пусть  $n_0 + n = m$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_m = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n_0} + \sigma_{m-n_0}) = S_{n_0} + \sigma$ , то есть основной ряд сходится.  $\square$

### 1.1.2 Знакопостоянные ряды

Исследуем подробнее знакопостоянные ряды. Ряд называется знакопостоянным, если, начиная с некоторого номера, все его члены имеют одинаковый знак (конечное число членов в начале не влияет на сходимость). Следующие теоремы устанавливаются для положительных рядов, для отрицательных рядов применимы эти же рассуждения, стоит лишь поменять знак.

**Теорема 4** (*критерий сходимости для неотрицательных рядов*)

*Ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

**Доказательство.**  $\Rightarrow$ . По условию, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ . Значит, последовательных частичных сумм ограничена сверху.

$\Leftarrow$ . По условию, ограниченная неубывающая последовательность  $\{S_n\}$  ограничена сверху, значит, по теореме Вейрштрасса у неё есть предел  $S$ .  $\square$

Следующее важное утверждение о положительных рядах - признак сравнения. Он позволяет делать выводы о сходимости ряда, сравнивая его с известными рядами: геометрической прогрессией, обобщенным гармоническим рядом (то есть с произвольным показателем степени).

**Теорема 5** (*признак сравнения в оценочной форме*)

*Пусть даны последовательности  $0 \leq a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда из сходимости ряда с общим членом  $b_n$  следует сходимость ряда с общим членом  $a_n$  (из расходимости ряда с общим членом  $a_n$  следует расходимость ряда с общим членом  $b_n$ ).*

**Доказательство.** Докажем исходя из критерия сходимости. Пусть  $A_n, B_n$  - частичные суммы рядов с членами  $a_n, b_n$ . Так как ряд  $B$  сходится, то существует верхний предел  $M$  для его частичных сумм. Так как члены

ряда  $A$  меньше членов ряда  $B$ , то  $A_n \leq B_n \leq M$ , откуда по транзитивности неравенств  $A_n \leq M$ , значит, у  $A_n$  есть предел.  $\square$

**Пример.** Рассмотрим  $p < 1$ ,  $n^p < 1$ ,  $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$ . Так как гармонический ряд расходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  расходится.

**Пример.** Найти сумму.  $\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \dots$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{2 - b_n}$ ,  $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$ . Заметим, что  $b_1 = 2 \cos \frac{\pi}{4}$ ,  $b_2 = \cos \frac{\pi}{8}$ . Дальше эта формула выводится по индукции.  $b_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$ .  $a_n = \sqrt{2 - b_{n-1}} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{2^n}} = 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$ . Итого,  $a_n \leq 2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}$ .

### Теорема 6 (Признак сравнения в предельной форме)

Пусть даны неотрицательные ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Пусть  $k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ .

Тогда если

1.  $k = \text{const}$  ( $k \neq 0$ ): ряды сходятся или расходятся одновременно.
  - 1.1.  $k = 1$ : ряды эквивалентны.
2.  $k = 0$ : если  $B$  сходится, то и  $A$  сходится.
3.  $k = \infty$ : если  $A$  сходится, то и  $B$  сходится.

### Доказательство.

1. Запишем определение предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$  для  $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0$ :

$$\exists N(\varepsilon) \forall n > N : \frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3k}{2}$$

откуда  $a_n < \frac{3k}{2} b_n$ . Значит, если ряд  $B$  сходится, то и ряд  $A$  сходится.

2. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ . Для  $\varepsilon = 1 \exists N \forall n > N : \frac{a_n}{b_n} < 1$ , значит  $a_n < b_n$  и сходимость рядов следует из признака сравнения в оценочной форме.
3. Переворачивая предел в п.2, получаем все аналогично.  $\square$

**Пример.** Исследуем на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha})$ . Имеем  $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ . При  $\alpha > 0$   $S_n$  сходится к 1, при  $\alpha < 0$  ряд расходится.

### Теорема 7 (третий признак сравнения)

Пусть даны ряды  $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , причем  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ . Тогда если  $B$  сходится, то и  $A$  сходится.

**Доказательство.** Перемножив положительные неравенства  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ , получим  $\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}$ , откуда  $a_n \leq b_n \cdot \text{const}$ . Из признака сравнения в оценочной форме получаем, что ряд  $A$  сходится, если сходится ряд  $B$ .  $\square$



Переходим к более тонким признакам сходимости ряда. Алгоритм вырисовывается следующий: сначала даламберим, потом копируем. Если не помогает, пробуем признак Раабе, но все вопросы снимает гауссирование.

**Теорема 8** (*признак Даламбера в оценочной форме*)

Пусть дан ряд с общим членом  $a_n$ . Тогда

1. Если  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ , то ряд сходится;
2. Если  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q < 1$ , то ряд расходится.

**Доказательство.** 1. Ряд с общим членом  $b_n = q^n$ ,  $q \in (0, 1)$ , сходится. По условию,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , значит, ряд сходится по 3-му признаку сравнения.

2. Ряд с общим членом  $b_n = 1$  расходится. По условию,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , значит, ряд расходится по 3-му признаку сравнения.  $\square$

**Теорема 9** (*признак Даламбера в предельной форме*)

Пусть дан ряд с общим членом  $a_n$ . Тогда

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ , то ряд сходится;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$ , то ряд расходится.

**Доказательство.** 1. Пусть верхний предел равен  $q < 1$ . Возьмем  $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ . Тогда  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q + \varepsilon = q_1 < 1$ . Тогда по признаку Даламбера в оценочной форме ряд сходится.

2. Так как для некоторой подпоследовательности  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , то не выполняется необходимый признак, следовательно, ряд расходится.  $\square$

**Замечание.** Если предел равен 1, то  $r = q = 1$ .

**Замечание.** В отличие от признака Коши, в п.2 нельзя заменить нижний предел на верхний.

**Замечание.** Если все-таки получилась единица, то ряд может как сходиться, так и расходиться. Но если предел подходит к единице сверху, то ряд расходится (в силу невыполнения необходимого признака).

**Теорема 10** (*признак Коши в оценочной форме*)

Пусть дан ряд с общим членом  $a_n$ .

Если  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ , то ряд сходится.

Если  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , то ряд расходится.

**Доказательство.** Сравним с геометрической прогрессией.

1.  $a_n \leq q^n$ ,  $q < 1$ , значит ряд сходится по признаку сравнения.
2.  $a_n > 1$ , значит ряд расходится по необходимому признаку.  $\square$

**Теорема 11** (признак Коши в предельной форме)

Пусть дан ряд с общим членом  $a_n$  и  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ . Тогда:

1. Если  $q < 1$ , то ряд сходится.
2. Если  $q > 1$ , то ряд расходится.

**Доказательство.** Аналогично признаку Даламбера.

1. Рассмотрим предел  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ . Возьмем  $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ . Тогда

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : \sqrt[n]{a_n} = q + \varepsilon = \frac{q+1}{2} < 1$$

Тогда ряд сходится по признаку Коши в оценочной форме.

2. Рассмотрим предел  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ . Выделим подпоследовательность  $a_{n_k}$ , на которой достигается этот верхний предел. Возьмем  $\varepsilon = q - 1$ . Тогда

$$\exists k_0 \forall k > k_0 : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$$

Значит,  $a_{n_k} > 1$ , и ряд расходится по необходимому условию.  $\square$

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}} \right)^n$ . Кошируя это ряд, взяв наибольшую подпоследовательность, получим предел  $\frac{3}{4}$ , значит, ряд сходится. Можно ещё просто посчитать две подпоследовательности.

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^{2n-\ln n}$ . Оценим это рядом  $b_n = \left( \frac{1+n}{2+n} \right)^{2n-\ln n}$ . В итоге получится, что ряд сходится.

**Теорема 12** (признак Раабе в оценочной форме)

Пусть дан знакопостоянный ряд с общим членом  $a_n > 0$ . Тогда:

1. Если  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$ , то ряд расходится.
2. Если  $\exists \alpha > 1 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}$  тогда ряд сходится.

**Доказательство.** 1. Пусть  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n-1}{n}$ . Введем ряд с общим членом  $b_n = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , и так как ряд  $b_n$  расходится, то ряд  $a_n$  расходится по третьему признаку сравнения.

2. Пусть  $\beta \in (1, \alpha)$ , тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$  сходится. Далее,  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^\beta = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Затем,  $-\frac{\beta}{n} > -\frac{\alpha}{n} \implies 1 - \frac{\beta}{n} > 1 - \frac{\alpha}{n}$ . Так как  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  - бесконечно малая более высокого порядка, чем  $\frac{\alpha}{n}$  и  $\frac{\beta}{n}$ , то  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : 1 - \frac{\alpha}{n} < 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Правая часть равна  $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ . По условию,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}$ . Из этих двух условий по свойству транзитивности неравенств получаем оценку  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , откуда следует сходимость ряда.  $\square$

**Теорема 13** (Признак Раабе в предельной форме)

Пусть дан ряд с общим членом  $a_n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = R$ . Тогда:

1.  $R < 1$  - ряд расходится
2.  $R > 1$  - ряд сходится.

**Доказательство.** 1. Пусть  $\varepsilon = 1 - R$ . Тогда

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < R + \varepsilon = 1$$

Значит,  $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{n}$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 + \frac{1}{n}$ , тогда ряд расходится по необходимому признаку.

2. Пусть  $\alpha \in (1, R)$ ,  $\varepsilon = R - \alpha$ . Тогда

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) > \alpha$$

откуда  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{\alpha}{n}$ . Значит, ряд сходится по признаку Раабе в оценочной форме.  $\square$

**Замечание.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})$ .

Теперь докажем очень прикольный признак, из которого следуют почти все остальные признаки.

**Теорема 14** (признак Куммера)

Пусть даны две последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{c_n\}$ . Тогда:

1. Если  $\exists \alpha > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : C_n - C_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha$  - ряд с общим членом  $a_n$  сходится.
2. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n}$  расходится и  $C_n - C_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0$ , то ряд с общим членом  $a_n$  расходится.

**Доказательство.** 1.  $\alpha \cdot a_k \leq C_k a_k - C_{k+1} a_{k+1}$ . Далее  $\alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq C_1 a_1 -$

$C_{n+1} a_{n+1} \leq C_1 a_1$ . Значит,  $S_n \leq \frac{C_1 a_1}{\alpha}$ , и ряд сходится по третьему признаку сравнения.

2.  $C_n \leq C_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , значит,  $\frac{C_n}{C_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Пусть  $b_n = \frac{1}{C_n}$ . Тогда ряд с общим членом  $b_n$  расходится и  $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , поэтому ряд с общим членом  $a_n$  расходится по 3-му признаку сравнения.  $\square$

**Следствие 1.** Признак Даламбера при  $C_n \equiv 1$

**Следствие 2.** Признак Раабе. Возьмем  $C_n = n - 1$ . Имеем

$$1 - 1 - n \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha \implies 1 - \frac{1}{n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\alpha}{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1+\alpha}{n}.$$

**Следствие 3.** Признак Бертрانا. Возьмем  $C_n = (n-2) \ln(n-1)$ . Тогда  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n}$  ряд сходится.

**Теорема 15** (признак Гаусса)

Пусть дан положительный ряд. Представим его в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = D - \frac{R}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

Тогда:

1. Если  $D > 1$  - ряд расходится;
2. Если  $D < 1$  - ряд сходится;
3. Если  $D = 1$ ,  $R \leq 1$  - ряд расходится;
4. Если  $D = 1$ ,  $R > 1$  - ряд сходится.

Здесь  $\theta_n$  - ограниченная монотонная последовательность,  $\alpha > 0$ .

**Доказательство.** Пункты 1 и 2 следуют из признака Даламбера, так как  $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

3. По условию, имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{R}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

Тогда  $n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = R - \frac{\theta_n}{n^\varepsilon}$ , откуда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \right) = R$ , значит, ряд сходится по признаку Раабе.

4. По условию, имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

откуда  $n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) - 1 = -\frac{\theta_n}{n^\varepsilon}$ . Домножим на логарифм и рассмотрим предел получившегося выражения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \cdot n \left( n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln n \cdot -\frac{\theta_n}{n^\varepsilon} \right) = 0$$

Значит, по признаку Бертрана ряд расходится.  $\square$

**Теорема 16** (интегральный признак)

Пусть дана непрерывная неотрицательная невозрастающая функция  $f(x)$ , определенная на  $[1, \infty)$ . Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и интеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  сходятся и расходятся одновременно, где  $a_n = f(n)$  - значения функции в натуральных числах.

**Доказательство.** Очевидно, что  $\forall x \geq 1 \exists k \in \mathbb{N} : k \leq x \leq k+1$ . По условию невозрастания имеем  $f(k) \geq f(x) > f(k+1)$ . Значит,  $a_{k+1} < f(x) \leq a_k$ . Определенный интеграл от функции на единичном отрезке не больше её максимального значения, поэтому

$$a_{k+1} < \int_k^{k+1} f(x) dx \leq a_k$$

Просуммируем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} < \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Отсюда получаем, что

$$S_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n$$

Если ряд сходится, то он ограничен. Значит, ограничен и интеграл, а поскольку это интеграл от положительной функции, он тоже сходится. Обратно, если интеграл сходится, то ряд ограничен, значит, он сходится по теореме Вейерштрасса.  $\square$

Рассмотрим ещё несколько интересных свойств знакопостоянных рядов.

**Теорема 17** (связь признаков Даламбера и Коши)

Если для ряда с общим членом  $a_n$  выполняются условия признака Даламбера, то для него выполняются условия признака Коши.

**Доказательство.** Условие для признака Даламбера:  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ . Перемножая неравенства  $\frac{a_2}{a_1} \leq q, \frac{a_3}{a_2} \leq q, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq q$ , получим  $\frac{a_n}{a_1} \leq q^n$ , откуда  $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_1} q$ . Зафиксируем  $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ . Тогда  $\exists n_0 \forall n > n_0 : \sqrt[n]{a_1} q < \frac{q+1}{2} = q_1$ . Отсюда получаем условие применимости признака Коши:  $\sqrt[n]{a_n} < q_1 < 1$ .  $\square$

Ещё одна область применения рядов - **оценка погрешности приближенной величины с помощью положительного ряда**. Действительно, пусть  $R_n$  -  $n$ -ный остаток ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Тогда Из доказатель-

ства интегрального признака  $a_{k+1} < \int_k^{k+1} f(x) dx \leq a_k$ , но поскольку по

определению  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ , получаем оценку:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n < \int_n^{\infty} f(x)dx$$

**Пример.** Вычислим с точностью до 0,001 ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ . Ответ:  $1,082 \pm 0,001$  (точный ответ  $\frac{\pi^4}{90}$ )

### 1.1.3 Знакопеременные ряды

Переходим к исследованию рядов с произвольным знаком. Иногда бывает полезно рассмотреть этот ряд с числами постоянного знака, что мотивирует следующее определение.

**Определение 5** *Ряд сходится абсолютно, если сходится ряд, составленный из модулей членов этого ряда. Ряд сходится условно, если он сходится, но расходится абсолютно.*

**Теорема 18** *Если ряд сходится абсолютно, то ряд сходится.*

**Доказательство.** Следует напрямую из критерия Коши и свойства модуля:  $||a_1| + \dots |a_n|| \geq |a_1 + \dots + a_n|$ .  $\square$

**Теорема 19** *(признак Лейбница для знакочередующихся рядов)*

*Пусть ряд имеет вид  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n$ , где  $v_n > 0$  и монотонно убывает. Тогда ряд сходится. Более того, имеет место оценка погрешности  $|R_n| \leq v_n$*

**Доказательство.** 1. Посчитаем частичную сумму для  $2k$ :

$$S_{2k} = v_1 - v_2 + \dots - v_{2k}$$

$$S_{2k+2} = S_{2k} + v_{2k+1} - v_{2k+2}$$

$$S_{2k+2} - S_{2k} = v_{2k+1} - v_{2k+2}$$

$$S_{2k} = v_1 - (v_2 - v_3) - (v_4 - v_5) - \dots - (v_{2k-2} - v_{2k-1}) - v_{2k}$$

Значит, эта последовательность возрастает и ограничена сверху, значит, у неё есть конечный предел:  $S_{2k} \leq u_1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k} + v_{2k+1}) = S$$

Следовательно,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Последовательность частичных сумм для нечетных чисел также убывает, доказательство аналогичное.

2. Докажем оценку погрешности.  $|R_{2k}| = S - S_{2k} < S_{2k+1} - S_{2k}$ . Итак,

$$|R_{2k}| \leq v_{2k+1}$$

$$R_{2k+1} = S_{2k+1} - S < S_{2k+1} - S_{2k+2}$$

$$|R_{2k+1}| \leq v_{2k+2}$$

□

**Теорема 20** (Преобразование Абеля)

Пусть  $B_i = \sum_{k=1}^i b_k$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

**Доказательство.**  $b_k = B_k - B_{k-1}$ ,  $k \in \{2, \dots, n\}$ . Тогда  $\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 b_1 +$

$$\sum_{k=2}^n a_k \cdot (B_k - B_{k-1}) = a_1 b_1 + \sum_{k=2}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} b_k = a_1 b_1 = \sum_{k=2}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \cdot$$

$$B_k + a_n b_n - a_2 b_1 = \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \quad \square$$

**Теорема 21** (неравенство Абеля)

Пусть последовательность  $a_n$  монотонно возрастает или убывает, и пусть существует константа  $M$  такая, что  $\forall k \in \{1 \dots n\} : |b_1 + b_2 + \dots + b_n| \leq M$  (то есть она ограничивает модуль частичных сумм ряда  $B$ ). Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq M(|a_1| + 2|a_n|)$$

**Доказательство.** Применим преобразование Абеля к ряду с общим членом  $a_n b_n$ :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \right| +$$

$$|a_n| \cdot |B_n| \leq M \cdot \left| \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \right| + M|a_n| \leq M(|a_1| + 2|a_n|). \quad \square$$

**Теорема 22** (признак Дирихле)

Пусть общий член ряда имеет вид  $a_n b_n$ . Тогда если:

1. Последовательность  $a_n$  монотонна и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ;
2. Последовательность частичных сумм  $b_n$  ограничена константой  $B$ ;

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

**Доказательство.** Используем критерий Коши. Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . По условию, предел последовательность  $a_n$  равен нулю, тогда для

$$\frac{\varepsilon}{6B} > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}$$

Пусть  $p \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right|$ . Подберем константу из неравен-

ства Абеля:  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+i} b_k \right| = |B_{n+i} - B_n| \leq |B_{n+i}| + |B_n| \leq 2B = M$ . Значит,

из неравенства Абеля получаем  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq 2B(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) <$

$$2B \cdot \left( \frac{\varepsilon}{6B} + \frac{2\varepsilon}{6B} \right) = \varepsilon. \quad \square$$

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$ . По признаку Дирихле ряд сходится, так как частичные суммы синуса арифметической прогрессии сходятся.

**Теорема 23** (признак Абеля)

Пусть общий член ряда имеет вид  $a_n b_n$ . Тогда если

1. Последовательность  $a_n$  монотонна и ограничена константой  $M$ ;

2. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится.

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

**Доказательство.** Докажем по критерию Коши. Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Так как сходится ряд с общим членом  $b_n$ , то по критерию Коши для

$$\frac{\varepsilon}{3M} > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Из неравенства Абеля получаем  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{3M}(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) <$



$\frac{\varepsilon}{3M}(M + 2M) = \varepsilon$ . Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < \varepsilon \quad \square$$

**Упражнение.** Доказать признак Абеля, используя признак Дирихле.

Решение. Условие означает, что признак Дирихле более общий, чем признак Дирихле, поэтому покажем, что если ряд удовлетворяет условиям признака Абеля, то он удовлетворяет и признаку Дирихле.

Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ . По условию признака Абеля, последовательность  $a_n$  монотонна и ограничена, поэтому у неё есть конечный предел  $a$ , поэтому исходный ряд можно представить в виде

$$a \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (a_n - a)$$

Первый ряд сходится по условию, второй удовлетворяет признаку Дирихле.

**Пример.**  $\sum_{n=2}^{\infty} (\sin n\alpha \cos \frac{\pi}{n}) / \ln \ln n$ . Косинус монотонный и ограниченный, а все остальное сходится по Дирихле. Значит, ряд сходится по Абелю.

**Теорема 24** (признак Даламбера для знакпеременных рядов)

Пусть  $a_n$  - общий член знакпеременного ряда, и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$ . Тогда:

1. Если  $0 \leq q < 1$ , то ряд сходится абсолютно.

2. Если  $q > 1$ , то ряд расходится.

Если  $q = 1$ , ничего нельзя сказать.

**Доказательство.** 1. Следует из признака Даламбера для знакопостоянных рядов.

2. Пусть существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q > 1$  Для

$$\varepsilon = q - 1 > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

откуда  $\left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q \right| < \varepsilon$ , поэтому  $1 < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q + 1$ , значит не выполняется необходимый признак.  $\square$

**Теорема 25** (признак Коши для знакопеременных рядов)

Пусть  $a_n$  - общий член знакопеременного ряда, и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ . Тогда:

1. Если  $0 \leq q < 1$ , то ряд сходится абсолютно.

2. Если  $q > 1$ , то ряд расходится.

Если  $q = 1$ , ничего нельзя сказать.

**Доказательство.** 1. Следует из признака Коши для положительных рядов.

2. Проводится аналогично доказательству п.2 в признаке Даламбера.  $\square$

Признак сравнения для знакопеременных рядов не работает. Приведем пример:  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ,  $b_n = a_n + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ . Предел отношения таких рядов равен 1, то есть они эквивалентны, но вот первый сходится, а второй - расходится

**1.1.4 Свойства абсолютно сходящихся рядов**

**Лемма.** Если ряд сходится абсолютно, то модуль его суммы не превосходит суммы его модулей. Лемма следует из неравенства

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

**Теорема 26** Пусть дан ряд с общим членом  $a_n$ , и он сходится абсолютно. Пусть его сумма равна  $S$ , сумма из модулей равна  $\bar{S}$ . Обозначим соответствующие частичные суммы как  $S_n$ ,  $\bar{S}_n$ . Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^*$  с переставленными членами исходного ряда, обозначим его сумму и частичную сумму как  $S^*$ ,  $S_n^*$  (для ряда из модулей соответственно  $\bar{S}^*$ ,  $\bar{S}_n^*$ ). Тогда:

1.  $S^*$  существует и равна  $S$ ;

2. Ряд из  $a_n^*$  сходится абсолютно.

**Доказательство.** 1. По условию,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \bar{S}$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |\bar{S}_n - \bar{S}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Из леммы следует, что  $|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Перейдем к переставленному ряду. Выберем в нем такой номер  $m_0$ , чтобы частичная сумма  $S_{m_0}^*$  содержала все слагаемые, входящие в  $S_{n_0}$ . Тогда для любого числа  $m > m_0$  имеем

$$|S_m^* - S_{n_0}| < |\bar{S}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда  $|S_m^* - S| = |S_m^* - S_{n_0} + S_{n_0} - S| \leq |S_m^* - S_{n_0}| + |S_{n_0} - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .  
В итоге мы доказали сходимость ряда с переставленными членами и равенство его суммы сумме исходного ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall m > m_0 : |S_m^* - S| < \varepsilon$$

2. Абсолютная сходимость следует из таких же рассуждений для ряда с модулем.  $\square$

**Теорема 27** Если ряд сходится абсолютно, то ряд, умноженный на константу, сходится абсолютно.

**Доказательство.** Так как ряд сходится, то по определению  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : ||a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|| < \varepsilon$ . Теперь возьмем  $\frac{\varepsilon}{|c|}$ . Тогда для ряда, умноженного на константу, получаем, что  $||ca_{n+1}| + \dots + |ca_{n+p}|| = |c| \cdot ||a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|| < \frac{\varepsilon \cdot |c|}{|c|} = \varepsilon$ .  $\square$

**Теорема 28** Сумма абсолютно сходящихся рядов сходится абсолютно.

**Доказательство.** Так как сумма модулей больше модуля суммы, то  $\sum_{n=1}^k |a_n| + \sum_{n=1}^k |b_n| \geq \sum_{n=1}^k |a_n + b_n|$ . Но это значит, что частичные суммы ряда  $|a_n + b_n|$  ограничены числом  $S_a + S_b$  (суммами рядов), поэтому ряд сходится.  $\square$

**Теорема 29** (О произведении абсолютно сходящихся рядов)

Сумма всевозможных произведений  $a_i b_j$  сходится абсолютно, и сумма ряда равна произведению сумм.

**Доказательство.** Введем обозначения  $u_n = |a_n|$ ,  $v_n = |b_n|$ ,  $S^i = \sum_{n=1}^{\infty} i_n$ ,  $\overline{S^i} =$

$\sum_{n=1}^{\infty} |i_n|$ . Частичные суммы  $S_n$  произведения рядов будут суммами элементов угловых миноров бесконечной матрицы

$$\begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & \dots \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & \dots \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Получим  $S_1 = u_1 v_1$ ,  $S_2 = (u_1 + u_2)(v_1 + v_2)$ ,  $S_3 = (u_1 + u_2 + u_3)(v_1 + v_2 + v_3)$ .... Получаем  $S_n = \overline{S_n^a} \cdot \overline{S_n^b}$ . Так как ряды сходятся абсолютно, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S_n^a} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S_n^b} = \overline{S^a} \cdot \overline{S^b}$ .  $\square$

**Определение 6** (произведение рядов по Коши)

Пусть  $S_a \cdot S_b = S_c$ . Определим ряд-произведение следующим образом:

$$c_1 = a_1 b_1$$

$$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$$

То есть суммируем по диагоналям бесконечной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & \\ a_3 b_1 & \dots & & \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

**Пример 1.**  $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = 1$ ,  $b_n = \frac{n}{2^n}$ . Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{k(k+1)-2^{n+1-k}}$ .

**Пример 2.** Произведение расходящихся рядов  $a_n = 1, 5^n$ ,  $b_n = 1 - 1, 5^n$  в смысле Коши - сходится, так как  $c_n = 0, 75^n$ .

Заметим, что условной сходимости недостаточно! Так, для  $a_n = b_n = (-1)^{n-1}/\sqrt{n}$  ничего не выйдет. Смиритесь. Ребят а че вы с пары то свалили? Неуютненько.

### 1.1.5 Свойства условно-сходящихся рядов

**Теорема 30** (лемма о сходимости)

Пусть ряд с общим членом  $a_n$  сходится условно. Рассмотрим отдельно подпоследовательности из положительных и отрицательных членов ряда. Тогда их суммы  $+\infty, -\infty$  соответственно.

**Доказательство.** Пусть  $S^+, S^-$  - суммы положительных и отрицательных членов. Тогда  $\bar{S} = S^+ - S^-, S = S^+ + S^-$ . Поскольку  $\bar{S} = \infty$ , а  $S = \text{const}$ . Тогда  $S^+ = +\infty, S^- = -\infty$ .  $\square$

**Теорема 31** (Римана)

Если ряд сходится условно, то для любого действительного числа найдется такая перестановка ряда, при которой ряд сходится к этому числу.

**Доказательство.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$  - искомое число. По предыдущей лемме, ряд  $a_n^+$  из положительных членов расходится, значит, найдется такая его частичная сумма  $S_1^+$ , что  $S_1^+ > \alpha$ . Далее найдем такую частичную сумму  $S_1^-$  из отрицательных членов, что  $S_1^+ + S_1^- < \alpha$ . Будем повторять

эту операцию, беря частичные суммы из остатков рядов с положительными или отрицательными членами. Поскольку исходный ряд сходится, то его общий член стремится к нулю, поэтому и частичные суммы отрицательных и положительных членов стремятся к нулю. Поэтому ряд  $S_1^+ + S_1^- + S_2^+ + S_2^- + \dots$  является рядом Лейбница и сходится к числу  $\alpha$ . Переставив члены исходного ряда в соответствии с этими частичными суммами, получим искомую перестановку.  $\square$

## 1.2 Функциональные последовательности

### 1.2.1 Базовые определения

**Определение 7** Пусть функции  $f_1, f_2, \dots$  заданы на некотором множестве  $X \subset \mathbb{R}$ . Тогда задана функциональная последовательность

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, x \in X$$

**Определение 8** Функциональная последовательность  $f_n$  сходится **по-точечно** к  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Множество всех  $x_0 \in X$ , для которых предел существует, называется областью сходимости последовательности.

**Определение 9** Функциональная последовательность  $f_n$  **равномерно сходится** к функции  $f$  на множестве  $X$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается как  $f_n \Rightarrow f$

Это определение эквивалентно тому, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$

**Теорема 32** (критерий Коши равномерной сходимости)  
 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  на множестве  $X$  тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

**Доказательство.** Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . По условию,  $f_n(x) \Rightarrow f$  на  $X$ . Тогда для

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда  $\forall p \in \mathbb{N} \forall n + p > n > n_0 : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

Обратно, по условию для

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Сходимость имеет место для каждой отдельной точки  $x \in X$  (поточечная сходимость), тогда по критерию Коши для числовой последовательности существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ . Тогда в неравенстве

$$(1) \text{ можно перейти к пределу: } \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad \square$$

**Следствие (метод граничной точки).** Если  $f_n(x) \in C[a, b]$  и  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in (a, b)$ , и  $f_n(a)$  расходится. Тогда  $f_n(x)$  не сходится равномерно к  $f(x)$  на  $(a, b)$ .

**Доказательство.** Допустим, что сходимость равномерная. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

По условию, функции  $f_n$  непрерывны на  $[a, b)$ , тогда  $\lim_{x \rightarrow a+0} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , откуда  $|f_{n+p}(a) - f_n(a)| < \varepsilon$ . По критерию Коши для числовой последовательности  $f_n(a)$  сходится. Но это противоречит условию.  $\square$

### 1.2.2 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей

1. Линейные комбинации сходятся с соответствующим линейным комбинациям пределов.
2. Умножение на ограниченную (на  $X$ ) функцию:  $(gf_n) \Rightarrow (gf)$
3. На любом подмножестве  $X$  функция равномерно сходится.
4. Если  $\forall x \in X : f_n(x) \rightarrow f(x)$  и  $E \subset X$  - конечное множество, то на  $E$   $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  - функция сходится равномерно.
5. Функция, равномерно сходящаяся на двух множествах, равномерно сходится на их объединении.

**Доказательство.**

1. Докажем для линейной комбинации  $\alpha f + \beta g$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . По условию  $f_n \Rightarrow f$  на  $X$ , тогда для  $\frac{\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|} > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall x \in X :$

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|}$ . То же самое для функции  $g$ . Для неё существует константа  $n_2$ . Выбрав максимум из них, получаем

$$|(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)) - (\alpha f + \beta g)| \leq |\alpha| \cdot |f_n(x) - f(x)| + |\beta| \cdot |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

. Значит,  $\alpha f_n + \beta g_n \Rightarrow \alpha f + \beta g$ .

2. По условию,  $g(x)$  ограничена на  $X$ . Значит, существует такое  $M$ , что  $\forall x \in X : |g(x)| < M$ . Тогда для

$$\frac{\varepsilon}{M} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

. Отсюда  $|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| = |g(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ .

3, 4, 5 были видимо вопросами на плюсики.

## 1.3 Функциональные ряды

### 1.3.1 Базовые определения

**Определение 10** Область  $X \subset D$  сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  - область, лежащая в области определения всех функций ряда и для каждого  $x$  на ней последовательность частичных сумм ряда сходится поточечно.

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n} (\sin x)^{3n}$ . Область сходимости -  $|\sin x| < \frac{1}{2}$ .

**Определение 11** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  сходится равномерно к  $S(x)$  на  $X$ , если  $S_n \Rightarrow S$  на  $X$  ( $S_n$  - частичная сумма ряда).

**Пример.** Исследуем на равномерную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(2n-1)}{((n-1)^2+x^2)(n^2+x^2)}$ ,  $x \in [1, \infty)$ . Здесь предел частичных сумм можно найти по определению:  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k = x(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{n^2+x^2})$ . При фиксированном  $x \in D : \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{x}$ ,  $S(x) = \frac{1}{x}$ . Проверим, что остаток равномерно стремится к нулю (тогда это верно и для суммы):  $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{x}{2nx} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  (по методу оценки остатка). Итак, ряд сходится равномерно к своей сумме.

**Пример.** Исследуем на равномерную сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2(2n-1)}{((n-1)^2+x^2)(n^2+x^2)}$ ,  $x \in [1, \infty)$ . Имеем  $S_n(x) = 1 - \frac{x^2}{n^2+x^2}$ ,  $S(x) = 1$

**Теорема 33** (необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда)

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  сходится равномерно к  $S(x)$  на  $X$ . Тогда  $a_n \Rightarrow 0$  на  $X$ .

**Доказательство.** По условию,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall x \in X : |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \implies |S_{n+1}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Отсюда имеем

$$|a_n(x)| = |S_{n+1}(x) - S_n(x)| \leq |S_{n+1}(x) - S(x)| + |S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Значит,  $a_n \Rightarrow 0$  на  $X$ .  $\square$

**Теорема 34** (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  равномерно сходится на  $X$  к  $S(x)$  тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \varepsilon$$

**Доказательство.** Применим определение Коши равномерной сходимости для последовательности.  $\square$

**Пример.** Докажем, что у ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n^2 x^2 + \sqrt{n}}$ ,  $x \in (0, 1)$  нет равномерной сходимости. Возьмем  $x = \frac{1}{2n}$ ;  $a_k(x) \geq \frac{1}{4n}$ . Поэтому для  $\varepsilon \geq \frac{1}{4}$  по критерию Коши ряд расходится.

**Теорема 35** (метод граничной точки)

Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ , его члены непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и ряд сходится на интервале  $(a, b)$ , но расходится на каком-либо конце интервала. Тогда равномерной сходимости нет.

**Доказательство.** Повторяет доказательство для последовательностей.  $\square$

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ ,  $x \in (1, 2)$ . Ряд сходится на интервале как обобщенный гармонический ряд. При  $x = 1$  ряд расходится, значит, равномерной сходимости нет.



**Теорема 36** (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда /мажорантный признак)

Пусть дан ряд с общим членом  $a_n(x)$  и мы можем оценить  $|a_n(x)| \leq a_n$  (то есть мажорирующим рядом, не зависящим от  $x$ ), причем  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

сходится. Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  сходится равномерно на том множестве, на котором верна оценка.

**Доказательство.** Используем критерий Коши: фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Ряд  $a_n$  сходится, значит, по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

По условию,  $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} : |a_n(x)| \leq a_n$ , значит

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

. Тогда по критерию Коши для функционального ряда следует равномерная сходимость.  $\square$

**Пример.** Исследуем на равномерную сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(nx)}{n}$ ,  $x \in (\varepsilon, \infty)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Подставив ноль, по методу граничной точки нет равномерной сходимости.

**Пример.** Исследуем сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5 x^2} \sin nx$  на прямой. Спойлер: сходится равномерно. Сделаем оценку:  $|a_n(x)| \leq e^{-n^5 x^2} n|x|$ . Функция симметрична при замене  $x \mapsto -x$ , значит, будем оценивать на положительном луче, откинув модуль. Оценим максимумом, вычислив производную и решив уравнение. Имеем  $x = \frac{1}{\sqrt{2n^5}}$ . Подставляем:  $f_n(x) \leq f(\frac{1}{\sqrt{2n^5}}) = \frac{1}{\sqrt{2en^{\frac{3}{2}}}} = a_n$ . Значит,  $|a_n(x)| \leq |f_n(x)| \leq a_n \forall x \in \mathbb{R}$ . Итак, сходимость равномерная.

**Теорема 37** (признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда)

Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  и

1.  $\forall x \in X : \{a_n(x)\}$  монотонна по  $n$ ;
2.  $\exists M = \text{const} \forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} : |B_n(x)| \leq M$ , где  $B_n(x)$  - частичные суммы ряда  $b_n$ .

Тогда ряд сходится равномерно на  $X$ .

**Доказательство.** Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Так как  $a_n \rightrightarrows 0$  на  $X$ , то для

$$\frac{\varepsilon}{6B} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall x \in X : |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}$$

Из пункта 3 условия имеем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+i} b_k(x) \right| = |B_{n+i}(x) - B_n(x)| \leq |B_{n+1}(x)| + |B_n(x)| \leq 2B$$

По неравенству Абеля получаем

$$\forall x \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2B(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) < \varepsilon$$

Значит, исходный ряд сходится равномерно по критерию Коши.  $\square$

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx/n$ . Исследовать на равномерную сходимость на интервалах  $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$ ,  $(0, 2\pi)$ . Ну, раз говорят что уже было, то не пишем. На втором интервале нет равномерной сходимости по краевому критерию.

**Теорема 38** (*признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда*)

Дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  и  $\forall x \in X$ :

1.  $|a_n(x)| \leq M = \text{const}$  для всех  $n$ ;
2.  $\{a_n(x)\}$  монотонна;
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$  равномерно сходится на  $X$ ;

Тогда исходный ряд равномерно сходится на  $X$ .

**Доказательство.** По определению Коши. Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Так как ряд с общим членом  $b_n$  сходится равномерно, то по критерию Коши для

$$\frac{\varepsilon}{3M} > 0 \exists n_0(\varepsilon) \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Тогда по неравенству Абеля

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)a_k(x) \left| \leq \frac{\varepsilon}{3M}(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}(x)|) < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot 3M = \varepsilon \right.$$

Тогда по критерию Коши этот ряд сходится равномерно на  $X$ .  $\square$

**Пример.** Исследуем на равномерную сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin x \operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$ .

Алгоритм:

1. Арктангенс монотонен и ограничен.
2. Все остальное сходится по Дирихле.

### 1.3.2 Свойства равномерно сходящихся рядов

**Теорема 39** (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда)

Дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ , причем

1. Все функции непрерывны на множестве  $X$ ;
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  сходится равномерно к  $S(x)$  на  $X$ ;

Тогда  $S(x)$  непрерывна на  $X$ .

**Доказательство.** По условию, сумма из  $a_n(x)$  сходится равномерно на  $X$  к  $S(x)$ , то есть  $S_n(x) \Rightarrow S(x)$  на  $X$ ,  $S_n(x)$  непрерывна как сумма. Тогда по теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности, составленной из непрерывных функций,  $S(x)$  непрерывна. Другая формулировка:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} a_n(x)$$

(то есть можно поменять местами сумму и предел).  $\square$

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = f(x)$  - непрерывна на  $(0, 2\pi)$

**Теорема 40** (об интегрировании равномерно сходящегося ряда)

Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ , причем

1. все функции непрерывны на отрезке  $[a, b]$ ;
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  сходится равномерно на  $[a, b]$  к  $s(x)$ ;

Тогда

$$\forall x, x_0 \in [a, b] : \int_{x_0}^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{x_0}^x a_n(t) dt \right)$$

(можно менять интеграл и сумму).

**Доказательство.** Докажем, что  $\int_{x_0}^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x a_n(t)dt$ . По предыдущей теореме  $S(t)$  непрерывна на  $[a, b]$ , значит, интегрируема на нем по Риману. Обозначим  $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x a_k(t)dt$  и докажем, что  $\sigma_n(x) \Rightarrow \int_{x_0}^x S(t)dt$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . По условию,  $S_n(t)$  равномерно сходится на  $[a, b]$  для

$$\frac{\varepsilon}{b-a} > 0 \exists n_0(\varepsilon) \forall n > n_0 \forall x \in [a, b] : |S_n(t) - S(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\text{Тогда } \left| \sigma_n(x) - \int_{x_0}^x S(t)dt \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x a_k(t)dt - \int_{x_0}^x S(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^x (S_n(t) - S(t))dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |S_n(t) - S(t)|dt \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot |x - x_0| < \varepsilon. \text{ Значит, } \sigma_n(x) \Rightarrow \int_{x_0}^x S(t)dt. \square$$

**Теорема 41** (о дифференцировании равномерно сходящегося ряда)

Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ , причем

1. Производные всех функций непрерывны на отрезке  $[a, b]$ ;
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  сходится на  $[a, b]$  поточечно;
3. Ряд из производных сходится равномерно на  $[a, b]$  к  $S(x)$ ;

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)'$$

то есть в ряде можно менять производную и сумму, причем  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится равномерно.

**Доказательство.** 1. Используем предыдущую теорему. Тогда

$$\int_{x_0}^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x a'_n(t) dt$$

Получаем, что в равенстве  $\int_{x_0}^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(x_0))$  справа стоит число (в силу непрерывности функции), ряд из  $a_n(x_0)$  сходится по условию, следовательно, ряд из  $a_n(x)$  сходится. Поэтому, дифференцируя равенство  $\int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ , получаем первое утверждение теоремы.

Теперь покажем равномерную сходимость исходного ряда. Для этого покажем, что остаток ряда из производных  $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a'_k(x)$  равномерно стремится к нулю. Из этого следует применимость теоремы об интегрировании:  $\int_{x_0}^x \sum_{k=n+1}^{\infty} a'_k(t) dt = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{x_0}^x a'_k(t) dt = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(x) - a_k(x_0))$ . Если ряд удовлетворяет теореме об интегрировании, то и его остатки тоже, значит,  $\int_{x_0}^x r_n(t) dt = R_n(x) - R_n(x_0)$ , откуда

$$R_n(x) = \int_{x_0}^x r_n(t) dt + R_n(x_0) \quad (1)$$

. Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . По условию, остаток обычного ряда стремится к нулю:  $R_n(x) \rightarrow 0$ . Тогда для

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists n_1(\varepsilon) \forall n > n_1 : |R_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Остаток ряда из производных равномерно стремится к нулю, тогда для

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0 \exists n_2(\varepsilon) \forall n > n_2 \forall x \in [a, b] : |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

По формуле (1) получаем:  $|R_n(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x r_n(t) dt \right| + |R_n(x_0)| \leq \left| \int_{x_0}^x r_n(t) dt \right| + |R_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .  $\square$

## 1.4 Степенные ряды

### 1.4.1 Базовые определения

**Определение 12** Степенной ряд- ряд вида  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$

Числа  $c_n$  - коэффициенты степенного ряда,  $x_0$  - число. Итак, степенной ряд - обобщение понятия многочлена. Область сходимости степенного ряда непуста, так как там лежит как минимум  $x_0$  (в этом случае сумма ряда равна  $c_0$ ). Сделав замену  $t = x - x_0$ , сведем любой степенной ряд к виду  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ .

**Теорема 42** (лемма Абеля)

Если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  сходится в точке  $x_0$  и  $|x| < |x_0|$ , то ряд сходится в  $x$ , причем абсолютно.

**Доказательство.** По условию ряд сходится, значит,  $c_n x^n \rightarrow 0$ . Тогда существует константа  $M$ , большая чем все члены ряда. Тогда  $|c_n x^n| = \left| c_n x_0^n \left( \frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ . Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$  сходится  $\Rightarrow$  ряд из модулей сходится, т.е. ряд сходится абсолютно.  $\square$

**Теорема 43** Пусть  $D$  - область сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ,  $R = \sup_{x \in D} |x|$ . Тогда  $(-R, R) \subset D \subset [-R, R]$ .

**Доказательство.** По лемме Абеля, второе включение очевидно:  $\forall x \in D : |x| \leq R \Rightarrow D \subset [-R, R]$ . Пусть  $x \in (-R, R)$ . Тогда  $|x| < R = R_1$ . Тогда для него найдется  $x_0 \in D : |x_0| > |x|$ . Значит, ряд в точке  $x_0$  сходится, и значит сходится в  $x$ . Значит, интервал лежит в области сходимости.  $\square$

**1.4.2 Формулы для вычисления радиуса сходимости**

Пусть  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . По признаку Даламбера  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1$ , то ряд сходится. Итак, если предел существует, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

Аналогично, из признака Коши получим формулу Коши-Адамара:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

В общем случае алгоритм такой:

1. Найти радиус сходимости.
2. Выписываем интервал сходимости  $(x_0 - R, x_0 + R)$ .
3. Исследуем на сходимость концы интервала.

**Пример.** Найдем область сходимости  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}$ . Применим признак Даламбера:  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)3^{n+1}}{(n+2)3^n} = 3$ . Интервал сходимости:  $(6 - 3, 6 + 3)$ . В

точке  $x = 9$  ряд расходится (т.к. гармонический), в точке  $x = 3$  - условная сходимость (по признаку Лейбница).

**Пример.** Найдем область сходимости  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n}$ . Заметим, что у этого ряда коэффициенты чередуются с нулем (лакунарный ряд). Используем два способа:

1. По формуле Коши-Адамара - возьмем четные номера, так как на них доставляется супремум предела последовательности:  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} =$

$\sqrt{2}$ . Интервал сходимости  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , на концах расходится.

2. Исследуем как функциональный ряд по признаку Даламбера.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{x^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$ . Значит, ряд сходится, если  $\frac{x^2}{2} < 1$ , откуда мы получаем тот же интервал сходимости.

**Теорема 44** (о равномерной сходимости степенного ряда)

*Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости.*

**Доказательство.** Для простоты рассмотрим ряд с центром в нуле. Пусть ряд сходится на  $(-R, R)$ . Возьмем  $[a, b] \subset (-R, R)$ . Обозначим  $d = \max(|a|, |b|)$ . Тогда ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n d^n$  сходится, значит, его мы можем использовать для оценки сверху рядов на отрезке:  $|c_n x^n| \leq |c_n d^n|$ , значит, по признаку Вейерштрасса ряд сходится на  $[a, b]$ .  $\square$

**Теорема 45** (о непрерывной сумме степенного ряда)

*Сумма степенного ряда непрерывна в любой точке из интервала сходимости.*

**Доказательство.** Пусть  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  сходится на  $(-R, R)$  к  $f(x)$ . Степенные функции непрерывны на интервале (и вообще на всей прямой); по предыдущей теореме, на любом отрезке, лежащем в интервале, ряд равномерно сходится. Значит, по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда, сумма непрерывна на отрезке. Так как этот отрезок произволен, то сумма непрерывна на интервале.  $\square$

**Теорема 46** (об интегрировании и дифференцировании степенного ряда)

Пусть дан ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = f(x)$ ,  $R$  - радиус сходимости. Тогда у

функции  $f(x)$  существуют производные любого порядка внутри интервала:

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$$

Интегрирование тоже почленное. Причем при дифференцировании и интегрировании радиус сходимости не меняется.

**Доказательство.** Следует из соответствующих теорем для функциональных рядов. Последнее утверждение следует из формулы Коши-Адамара.  $\square$

**Пример.** Вычислить сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ . Задания типа таких можно де-

лать, используя свойства степенных рядов. Пусть  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ . Радиус

сходимости  $x \in [-1, 1)$ . Возьмем производную:  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ . А

вот теперь проинтегрируем:  $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = f(x) - f(0)$ ;  $f(x) = -\ln(1-x) + f(0)$ .

Значит, сумма искомого ряда равна  $f(\frac{1}{2}) = 2$ . Цель этих телодвижений - привести к виду геометрической прогрессии, которую легко посчитать.

### 1.4.3 Ряды Тейлора

**Определение 13** Пусть в некоторой окрестности  $U(x_0)$  у функции существуют производные всех порядков. Тогда для функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  существует ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Если  $x_0 = 0$ , то ряд называется рядом Маклорена.

**Теорема 47** Если функция представляется в виде степенного ряда, то он совпадает с её рядом Тейлора.  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ .

**Доказательство.** Пусть  $(x_0 - R, x_0 + R)$  - интервал сходимости ряда. Из разложения функции в ряд имеем  $f(x_0) = c_0$ . Беря производную, получаем, что  $f'(x_0) = c_1$ . Дифференцируя дальше, получаем, что  $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ .  $\square$

Если по произвольной функции составить ряд Тейлора, то совсем не



обязательно, что он сойдется к этой функции. Сейчас поясним:

**Пример.** Рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Очевидно (по индукции), что производная порядка  $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot p\left(\frac{1}{x}\right)$ , где  $p(t)$  - многочлен. Посчитаем производную в нуле; первая производная в нуле - нуль. По индукции получаем, что все остальные производные тоже равны нулю. Значит, ряд Маклорена тождественно равен нулю, и сходится не к исходной функции, а к тождественно нулевой.

**Теорема 48** (достаточное условие сходимости ряда Тейлора)

Пусть  $\exists h > 0$ ,  $\exists M = \text{const}$  такие, что  $\forall x \in \mathbb{N} \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) : |f^{(n)}(x)| \leq M$ . Тогда на всей  $h$ -окрестности точки  $x_0$  функция равна своему ряду Тейлора, причем он сходится равномерно на данном интервале.

**Доказательство.** Разложим функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора и запишем остаток в форме Лагранжа:  $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ,  $\xi \in (x_0, x)$  (лежит между ними). Остаток по модулю меньше, чем  $M \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$  - значит, он равномерно сходится к нулю. Поэтому и сам ряд сходится равномерно на  $(x_0 - h, x_0 + h)$ .  $\square$

### Ряды Маклорена для основных функций

1.  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ ,  $x \in \mathbb{R}$
2.  $\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$ ,  $x \in \mathbb{R}$
3.  $\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ ,  $x \in \mathbb{R}$
4.  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$ ,  $x \in \mathbb{R}$
5.  $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ ,  $x \in \mathbb{R}$
6.  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots$ ,  $x \in (-1, 1]$
7.  $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$ ,  $x \in [-1, 1)$
8.  $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ,  $x \in (-1, 1)$  - в этой формуле функция принимает все положительные значения, поэтому она круче.

$$9. (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$10. \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, x \in [-1, 1]$$

$$11. \operatorname{arcsin}(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! \cdot x^{2n+1}}{n! \cdot 82^n (2n+1)}, x \in (-1, 1)$$

(Для логарифма) покажем, что остаток ряда стремится к нулю.

1.  $x \in [0, 1]$ :  $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ . Подставим  $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ ,  $\theta = \theta(x, n)$ . При этом имеем оценку  $0 \leq x \leq 1 \leq 1 + \theta x$ . Получим  $|r_n(x)| = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ . Значит, остаток равномерно сходится к 0 на  $[0, 1]$ . Чтобы доказать равномерную сходимость на  $(-1, 0)$ , запишем остаток в форме Коши. Получим  $|r_n(x)| = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x}$ . Первая дробь меньше 1, вторую оценим как  $\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$ , что при фиксированном  $x$  стремится к нулю. Значит, мы можем писать разложение для логарифма!

**Пример.**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

**Ряд**  $(1+x)^\alpha$ . Найдем радиус сходимости:  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1$ . Запишем остаток в форме Коши:  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n$ ,  $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}$ . Если остаток стремится к нулю, то и ряд сходится к данной функции. Пусть  $r_n = A_n \cdot B_n \cdot C_n$ , где  $B_n(x) = (1+\theta x)^{\alpha-1}$ ,  $C_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ ,  $A_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1}$ .  $A_n \rightarrow 0$  по признаку Даламбера,  $|B_n(x)| \leq \max\{(1-|x|)^{\alpha-1}, (1+|x|)^{\alpha-1}\}$ ,  $C_n(x) < 1$ , значит, остаток стремится к нулю, и ряд сходится к функции.

**Задача.** Доказать, что в  $x = 1$  ряд сходится при  $\alpha > -1$ , расходится при  $\alpha \leq -1$ . В точке  $x = -1$  сходится абсолютно при  $\alpha \geq 0$ , расходится при  $\alpha < 0$

Выражения для арксинуса и арктангенса получаются интегрированием разложения их производных.

#### 1.4.4 Использование степенных рядов

Разложение функции в ряд - мощнейшая тема. Иногда в физике и других прикладных областях делают так: берут сложную функцию раскладывают её в ряд Тейлора и отбрасывают все члены, кроме первого. Дифференцирование обычно упрощает функцию, и зачастую такое упрощение имеет физический смысл.

**Пример.** Вычислим интеграл  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  с точностью до 0,001. Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора:  $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 - \frac{1}{120}x^{10} + \dots$ . Интегрируя почленно и подставляя  $x_0$ , получаем  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{25} - \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{27 \cdot 9} - \frac{1}{120 \cdot 11} + \dots$ . Чтобы достичь требуемой точности, необходимо оценить остаток. Вспоминаем, что для знакопередающегося ряда оценка дается первым членом остатка. Так как  $\frac{1}{120 \cdot 11} < \frac{1}{1000}$ , то

$$\int_0^1 e^{-x^2} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{25} - \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{27 \cdot 9}$$

**Пример.** Вычислим  $\ln 3$  с точностью 0,001. Представим его в виде  $\ln 3 = \ln \frac{1+x}{1-x}$ , откуда  $x = \frac{1}{2} \in (-1, 1)$  - входит в область сходимости, значит, мы можем написать разложение:  $\ln 3 = 1 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} + \dots + \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$ . Этот ряд не знакопередающийся, поэтому придется оценивать остаток геометрической прогрессией:  $r_n = \frac{1}{(2n+3)2^{2n+2}} + \frac{1}{(2n+5)2^{2n+4}} + \dots \leq \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{2^{2n+4}} \dots = \frac{1}{2^{n+2}(1-\frac{1}{4})} = \frac{1}{3 \cdot 2^n}$ . Требуемая точность достигается при  $n = 5$ , поэтому

$$\ln 3 \approx 1 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} + \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} \approx 1,099$$

**Пример.** Решение дифференциальных уравнений с помощью разложений в степенной ряд. Решим  $y'' = 2x'y + 4y, y(0) = 0, y'(0) = 1$  - дифференциальное уравнение с задачей Коши.

Первый способ - метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^{n-1} \dots \cdot 4; y(0) = c_0 = 0 \\ y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1}, \dots \cdot 2x; y'(0) = c_1 = 1 \\ y'' = 2c_2 + 6c_3x + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} \end{cases}$$

$x^0$  соответствует  $2c_2 = 4c_0 \Rightarrow c_2 = 0; c_{2n} = 0; c_5 = \frac{1}{2}; c_7 = \frac{1}{3!}; \Rightarrow c_{2n+1} = \frac{1}{n!}$

$x^1$  соответствует  $6c_3 = 2c_1 + 4c_1 \Rightarrow c_3 = 1$

$x^n$  соответствует  $(n+2)(n+1)c_{n+2} = 2nc_n + 4c_n \Rightarrow c_{n+2} = \frac{2}{n+1}c_n$

Мы получили  $y = x + x^3 + \frac{1}{2!}x^5 + \frac{1}{3!}x^7 + \dots + \frac{x^{2n+1}}{n!} + \dots = x(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots)$ , откуда решение диффура:

$$y = xe^{x^2}$$

Второй способ - метод последовательного дифференцирования. Так как  $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$ , то  $y''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0, y'''(x) = 2xy'' + 6y'$  и так далее.