

# Анализ

Галкина

05.09.2022

## Содержание

<b>1</b>	<b>Связь признака Даламбера и Коши</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Оценка погрешности приближения какой-то величины с помощью положительного ряда</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Знакопеременные ряды</b>	<b>4</b>
3.1	Преобразование Абеля . . . . .	5

Коэффициенты: Контр\*0,4 Коллок\*0,3 Экз\*0,3

**Теорема 1** (признак Даламбера в предельной форме)

Пусть дан знакоположительный ряд. Тогда

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ , то ряд сходится.
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$ , то ряд расходится.

**Доказательство.** Пусть верхний предел равен  $q < 1$ . Возьмем  $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$ . Тогда  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q + \varepsilon$ . По теореме Больцано-Вейерштрасса. Тогда по признаку Даламбера в оценочной форме ряд сходится.

Далее, пусть существует нижний предел. Тогда ряд сходится по признаку Даламбера в оценочной форме, или от противного: через отрицание необходимого признака.  $\square$

**Замечание.** Если предел равен 1, то  $r = q = 1$

**Замечание.** В отличие от признака Коши, в п.2 нельзя заменить нижний предел на верхний.

**Замечание.** Если все-таки получилась единица, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

**Теорема 2** (признак Коши в оценочной форме)

Пусть дан знакоположительный ряд. Пусть  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ . Тогда ряд сходится.

Пусть  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ . Тогда ряд расходится.

**Доказательство.** Сравним с геометрической прогрессией:  $a_n \leq q^n \implies$  из сходимости прогрессии следует сходимость ряда.  $\square$

**Теорема 3** (признак Коши в предельной форме)

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ .

1.  $q < 1 \implies$  ряд сходится.

2.  $q > 1 \implies$  ряд расходится.

**Доказательство.** Аналогично признаку Даламбера. Избавимся от верхнего предела, взяв предел подпоследовательности. Значит, тогда все числа попадают в  $\varepsilon$ -окрестность числа  $q$ . Но тогда не выполнено необходимое условие.  $\square$

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}} \right)^n$ . Кошируя это ряд, взяв наибольшую подпоследовательность, получим предел  $\frac{3}{4}$ , значит, ряд сходится. Можно ещё просто втупую посчитать две подпоследовательности.

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^{2n-\ln n}$ . Оценим это рядом  $b_n = \left( \frac{1+n}{2+n} \right)^{2n-\ln n}$ . В итоге получится, что ряд сходится.

**Теорема 4** (признак Раабе в оценочной форме)

Пусть дан знакоположительный ряд с общим членом  $a_n > 0$ . Тогда:

1. Если  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$ , ряд расходится.
2. Если  $\exists \alpha > 0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}$  тогда ряд сходится.

**Доказательство.** 1.  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n-1}{n}$ ,  $b_n = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , если ряд  $b_n$  расходится, то ряд расходится по третьему признаку сравнения.

2. Пусть  $\beta \in (1, \alpha)$ , тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$  сходится. Далее,  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\beta = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Затем,  $-\frac{\beta}{n} > -\frac{\alpha}{n} \implies 1 - \frac{\beta}{n} > 1 - \frac{\alpha}{n}$ . Так как  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  - бесконечно малая более высокого порядка, чем  $\frac{\alpha}{n}$  и  $\frac{\beta}{n}$ , то  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : 1 - \frac{\alpha}{n} < 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Правая часть равна  $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ . По условию,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}$ . Из этих двух условий по свойству транзитивности неравенств получаем оценку  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , откуда следует сходимость ряда.  $\square$

**Теорема 5** (Признак Раабе в предельной форме)

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = R$ . Тогда:

1.  $R < 1$  - ряд расходится
2.  $R > 1$  - ряд сходится.

**Доказательство.**  $\square$

**Теорема 6** (признак Куммера)

Даны две последовательности  $a_n$  и  $c_n$ . Тогда:

1. Если  $\exists \alpha > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : C_n - C_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha$  - ряд сходится.
2. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n}$  расходится и  $C_n - C_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0$ , то ряд расходится.

**Доказательство.** Пж убейте меня бя я больше не могу  $\square$

**Следствие 1.** Признак Даламбера при  $C_n \equiv 1$

**Следствие 2.** Признак Раабе. Возьмем  $C_n = n - 1$ . Имеем  $1. n - 1 - n \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha \implies 1 - \frac{1}{n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\alpha}{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1+\alpha}{n}$ . Подставляя в пункт

**Теорема 7** (признак Бертрана/следствие из признака Куммера)

1.  $C_n = (n - 2) \ln(n - 1)$ .  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n}$  - ряд сходится
- 2.

**Доказательство.**  $\square$

**Теорема 8** (признак Гаусса)

Пусть дан положительный ряд. Пусть его можно представить в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = D - \frac{r}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}$$

Тогда:

1. Если  $D > 1$  - ряд расходится
2. Если  $D < 1$  - ряд сходится
3. Если  $D = 1$ ,  $R \leq 1$  - ряд расходится
4. Если  $D = 1$ ,  $R > 1$  - ряд сходится.

**Доказательство.**  $\square$

**Теорема 9** (интегральный признак)

Пусть ряд знакопостоянен. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и интеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  сходятся и расходятся одновременно, причем  $f(n) = a_n$ , функция определена, непрерывна, неотрицательна и невозрастающая на  $[1, \infty)$ . Оценка погрешности:

**Доказательство.**  $\forall x \geq 1 \exists k \in \mathbb{N} : k \leq x \leq k+1$ . По условию невозрастания имеем  $f(k) \geq f(x) > f(k+1)$ .  $a_{k+1} < f(x) \leq a_k$ ,  $a_{k+1} \square$  **Пример.** Исследуем  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ . Взятием интеграла получаем условия сходимости:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{сходится при } p > 1 \\ \text{расходится при } p \leq 1 \end{array} \right.$$

## 1 Связь признака Даламбера и Коши

Если  $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq q$  для всех  $n$  начиная с 1, то  $a_n = a_1 q^n$ , откуда следует признак Коши.

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_1} \cdot q$$

Значит, Коши покрывает больше случаев.

## 2 Оценка погрешности приближения какой-то величины с помощью положительного ряда

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx < R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx$$

Из доказательства интегрального признака

$$a_{k+1} < \int_k^{k+1} f(x) dx \leq a_k$$

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq a_k \int_{k-1}^k f(x) dx$$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

Итак,

$$\int_{n+1}^{\infty} \leq R_n < \int_n^{\infty} f(x) dx$$

**Пример.** Вычислим с точностью до 0,001 ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ . Ответ:  $1,082 \pm 0,001$  (точный ответ  $\frac{\pi^4}{90}$ )

## 3 Знакопеременные ряды

Пусть теперь ряд знакопеременный.

**Определение 1** Ряд сходится абсолютно, если сходится ряд из модулей. Ряд сходится условно, если абсолютно расходится, но сам сходится.

**Теорема 10** Если ряд сходится абсолютно, то ряд сходится.

**Доказательство.** Следует напрямую из критерия Коши и свойства модуля:  $||a_1| + \dots + |a_n|| \geq |a_1 + \dots + a_n|$ .  $\square$

**Теорема 11** (признак Лейбница для знакопередающихся рядов)

Пусть ряд имеет вид  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n$ , где  $v_n > 0$  и монотонно убывает. Тогда ряд сходится. Более того, имеет место оценка погрешности  $|R_n| \leq v_n$

**Доказательство.** 1. Посчитаем частичную сумму для  $2k$  :

$$S_{2k} = v_1 - v_2 + \dots - v_{2k}$$

$$S_{2k+2} = S_{2k} + v_{2k+1} - v_{2k+2}$$

$$S_{2k+2} - S_{2k} = v_{2k+1} - v_{2k+2}$$

$$S_{2k} = v_1 - (v_2 - v_3) - (v_4 - v_5) - \dots - (v_{2k-2} - v_{2k-1}) - v_{2k}$$

Значит, эта последовательность возрастает и ограничена сверху, значит, у неё есть конечный предел:  $S_{2k} \leq u_1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k} + v_{2k+1}) = S$$

Следовательно,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Последовательность частичных сумм для нечетных чисел также убывает, доказательство аналогичное.

2. Докажем оценку погрешности.  $|R_{2k}| = S - S_{2k} < S_{2k+1} - S_{2k}$ . Итак,

$$|R_{2k}| \leq v_{2k+1}$$

$$R_{2k+1} = S_{2k+1} - S < S_{2k+1} - S_{2k+2}$$

$$|R_{2k+1}| \leq v_{2k+2}$$

□

### 3.1 Преобразование Абеля

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n, \quad B_i = \sum_{k=1}^i b_k$$

Доказательство.  $b_k = B_k - B_{k-1}$ ,  $k \in \{2, \dots, n\}$  ВСТАВКА

**Теорема 12** (неравенство Абеля)

Пусть последовательность монотонно возрастает или убывает. И пусть  $\exists M \forall k \in \{1 \dots n\} |B_k| \leq M$ . Тогда модуль конечной суммы  $\leq M(|a_1| + 2|a_n|)$

**Доказательство.** Юра, допиши пж □

**Теорема 13** (признак Дирихле)

**Доказательство.** □