Анализ

Галкина

05.09.2022

Оглавление

Глава 1

Идеи и номера с практики

Идеи Тимура, достойные того, чтобы быть запечатленными. Те места, которые на слух отмечаются словами типа «финт ушами», будут отмечаться знаком «опасный поворот» ☡ в стиле Бурбаки (а не то, что вы подумали).

1.1 Знакопостоянные несобственные интегралы

Для знакопеременных интегралов можно использовать признак сравнения. Обычно сравнение происходит с обобщенной степенной функцией. При этом имеется два различных типа особых точек: на бесконечности и с уходом на бесконечность в точке. Разберем подробнее.

Пример 1. Интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Пример 2. Интеграл

$$\int\limits_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Пример. Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ сходится, поскольку подынтегральная функция эквивалентна $\frac{1}{x^2}$ - сходящейся штуке.

Пример (№2374). Исследуем на сходимость в зависимости от параметров интеграл

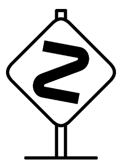
$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$$

Имеем 2 особые точки: 1 и ∞, поэтому разобъем область исследования на две части и будет исследовать интеграл $\int\limits_{10}^{\infty}$.
Нам поторебуется следующий признак сравнения: для $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{x^\varepsilon} < \ln^\alpha(x) < x^\varepsilon,\ x > \delta(\alpha, \varepsilon)$$

(доказательство через правило Лопиталя: действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\varepsilon} = 0$).
Значит, имеем

$$\frac{1}{x^{p+\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{x^p \ln^q x} \leqslant \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}$$



Итак, интеграл сходится при $p > 1+\varepsilon$ и расходится при $p < 1-\varepsilon$. Так как ε вообще-то произвольный, то и условие сходимости не должно зависеть от него; иначе говоря, интеграл сходится при $p > 1$ и расходится $p < 1$.

Рассмотрим случай, когда $p = 1$. Имеем

$$\int\limits_{10}^\infty \frac{1}{x \ln^q x} dx = \begin{cases} \ln(x) = t \\ dt = \frac{dx}{x} \end{cases} = \int\limits_{\ln 10}^\infty \frac{dt}{t^q}$$

Значит, этот интеграл сходится при $q > 1$. Соберем ответ:

$$\begin{cases} 1.\ p > 1 - \text{сходится;} \\ 2.\ p < 1 - \text{расходится;} \\ 3.\ p = 1, q > 1 - \text{сходится;} \\ 4.\ p = 1, q \leqslant 1 - \text{расходится.} \end{cases}$$

1.2 Знакопеременные несобственные интегралы

Напомним, что для применения признаков Абеля и Дирихле в интеграле $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$, необходимо, чтобы $f(x)$ и $g'(x)$ были непрерывными функциями.

Пример.

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$$

Интеграл имеет одну особую точку: $+\infty$.
Сначала расмотрим абсолютную сходимость: $\frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$, откуда по признаку сравнения получаем, что интеграл сходится абсолютно при $\alpha > 1$.
Рассмотрим обычную сходимость: интеграл удовлетворяет признаку Дирихле, поскольку $\forall y > a : \int_a^y \sin(x)dx = -\cos(y) + \cos(a) \leqslant 20$ и $\frac{1}{x^\alpha} \to 0$ монотонно. Значит, интеграл сходится при $\alpha > 0$.
Теперь рассмотрим расходимость интерала. Докажем условную сходимость на $(0, 1]$. Оценим снизу увадратом синуса:

$$\frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} \geqslant \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} = \frac{1-\cos(2x)}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos(2x)}{2x^\alpha}$$

Вторая дробь сходится по Дирихле, откуда весь интеграл расходится абсолютно при $\alpha \leqslant 1$.
Осталось установить сходимость при $\alpha \leqslant 0$. Вспомним определение **предела по Гейне**:

$$\forall\{y_n\} \to 0 : \lim_{n\to\infty} \int_a^{y_n} f(x)dx \to const$$

Тогда интеграл можно предстваить в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{y_n}^{y_{n+1}} f(x)dx$. Найдем какую-нибудь последовательность, на которой будет расходимость. Итак, пусть $y_n = \pi n$.
Теперь нам потребуется следующая

Теорема 1 *(о среднем)*
Если $f(x)$ непрерывна и $g(x)$ знакопостоянна, тогда

$$\int_a^b = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)dx, \ \xi \in (a, b)$$

Из теоремы получаем, что

$$\int_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\xi_n^\alpha} \int_{\pi n}^{\pi n+\pi} \sin(x)dx = \frac{2\cdot(-1)^n}{\xi_n^\alpha}$$

Тогда интеграл равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{\xi_n^\alpha}$$

Ряд расходится по необходимому признаку, поэтому интеграл расходится по опредлению Гейне.
Можно доказать то же самое по критерию Коши. Именно, при $\alpha \leqslant 0$:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta \ \exists y_1, y_2 > \delta : \left| \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \right| > \varepsilon$$

Чтобы убить модули, выберем такие пределы интегрирования, на которых синус знакопостоянен. Имеем

$$\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n + n} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\xi_n^\alpha} \cdot 2, \ 2\pi n \leqslant \xi_n \leqslant 2\pi n + \pi$$

Подставив худший вариант, получаем $\frac{2}{(2\pi n)^\alpha} \geqslant 2$, то есть расходимость.
Соберем ответ:

$$\begin{cases} 1. \ \alpha > 1 - \text{сходится абсолютно;} \\ 2. \ 0 < \alpha \leqslant 1 - \text{сходится условно;} \\ 3. \ \alpha \leqslant 0 - \text{расходится.} \end{cases}$$

Глава 2

Несобственный интеграл

2.1 Основные определения

Определение 1 *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ для всех $b > a$. Тогда несобственный интеграл первого рода (с одной особой точкой) - предел*

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

Если таковой предел существует, то интеграл сходится; если предел равен бесконечности или не существует, то интеграл расходится. Аналогично определяется и интеграл с нижним пределом $-\infty$.

Пример. $\int\limits_0^1 \ln x dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_\varepsilon^1 \ln x dx\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(x \ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 dx\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \frac{-\varepsilon^2}{1/\varepsilon} - 1 = -1$ - интеграл сходится.

Рассмотрим случай конечного числа особых точек.

2.1.1 Критерии сходимости несобственного интеграла

Теорема 2 *(критерий Коши) Пусть $\forall b \geqslant a$ функция интегрируема на $[a, b]$. Тогда $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists b_0(\varepsilon) > 0\ \forall b_1, b_2 > b_0 : \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$*

Доказательство. По условию, существует предел $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = A \in \mathbb{R}$, где $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда из существования предела следует для $\frac{\varepsilon}{2}$: $\exists b_o(\varepsilon) > a : |F(b) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $b_1 > b_0,\ b_2 > b_0$.

Тогда $|F(b_2) - F(b_1)| = |F(b_2) - A| + |F(b_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Достаточность. Докажем существование предела $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$ из определения предела по Гейне. Пусть $b_n \to \infty$, тогда $\forall b_0 > a\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0$ Покажем, что предел не зависит от выбора последовательности b_n. Выберем другую последовательность b_n^*. Обозначим предел $\lim\limits_{n\to\infty} F(b_n^*) = B$. Составим последовательность $b_1, b_1^*, b_2, b_2^*, ... \to \infty$. Тогда предел F от этой последовательности обозначим как C. Так как пределы подпоследовательностей сходятся к пределу последовательности, то $A = B = C$. Значит, выполняется условие определения предела по Гейне, значит, интеграл сходится. □

Пример. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 0$, расходится при $\alpha \leqslant 0$. Докажем это.
1. $\alpha > 0$. Поехали: $\forall \varepsilon > o\ \exists b_0(\varepsilon) > 1\ \forall b_1 > b_0, b_2 > b_0 : \left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right| < \varepsilon$.
Доказываем: $\left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right| = \left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{x^\alpha} d\cos x\right| = \left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|_{b_1}^{b_2} - \int_{b_1}^{b_2} \cos x d(\frac{1}{x^\alpha}) \leqslant ... \leqslant \frac{4}{b_0^\alpha}$. Значит, $b_0 > (\frac{4}{\varepsilon})^{\frac{1}{\alpha}}$.
2. $\alpha \leqslant 0$. Синус теперь принимает разные знаки. Пусть $b_k = 2\pi k$. Тогда по критерию Коши интеграл расходится.

Теорема 3 *(критерий сходимости через остаток)*
Пусть $\int_a^\infty = \int_a^b + \int_b^\infty,\ (b > 0)$.
1. Если интеграл сходится, то и любой из его остатков сходится.
2. Если хотя бы один из остатков сходится, то интеграл сходится.

Доказательство. □

Теорема 4 *(критерий сходимости несобственного интеграла от несобственной функции)*
Пусть $\forall b > a$ *функция интегрируема на* $[a, b]$ *и неотрицательная .Тогда* $\int_a^\infty f(x)dx$ *сходится* $\Leftrightarrow$ *первообразная* $F(b) < M$ *ограниченна.*

Доказательство. $F(b)$ неубывает и имеет конечный предел. Значит, интеграл сходится. Обратно, пусть существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$, то $F(b)$ ограниченна в некоторой окрестности. □

2.1.2 Признаки сравнения в предельной форме

Теорема 5 *(признак сравнения)*
Пусть $f(x) > g(x) > 0$ *начиная с некоторого* $x > a$, *и для любого* $b > a$ *функции интегрируемы на* $[a, b]$. *Тогда*

1. Если $\int f(x)$ сходится, то и $\int g(x)$ сходится.
2. Если $\int g(x)$ расходится, то и $\int f(x)$ расходится.

Доказательство. По свойству определенного интеграла (транзитивность числовых неравенств), $F(b) \leqslant M$. Тогда по критерию 3 интеграл сходится. 2. Погодите, это реально? □

Теорема 6 *(второй признак сравнения)*
Если $\frac{f(x)}{g(x)} = k,\ \infty \neq k \neq 0$, то их интегралы сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. □

Теорема 7 *(о непрерывности интеграла)*
Если функция определена и непрерывна,

Доказательство. □

Теорема 8 *(о дифференцируемости собственного интеграла, зависящего от параметра/ правило Лейбница)*
Пусть $f(x, y)$
1. непрерывна на $P = [a, b] \times [c, d]$;
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывна на P;
Тогда:
1. $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx$ дифференцируема на $[c, d]$; 2. $F'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$

Доказательство. Пусть $y \in [c, d],\ y + h \in [c, d]$. Рассмотрим $F(y + h) - F(y) = \int\limits_a^b (f(x, y + h) - f(x, y))dx$, значит, по теореме Лагранжа это равно $\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta h)h\,dx$, где $\theta \in (0, 1)$. Дифференцируем: $F'(y) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{F(y+h)-F(y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta h)dx$. При $h \to 0$ делаем замену $u = y + \theta h,\ u \to y$. Тогда предел $\lim\limits_{h\to 0} \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, u)dx =$ по теореме о предельном переходе!!!!!!!!!! □

Следующая теорема обощает правило Лейбница:

Теорема 9 *(обобщенное правило Лейбница)*
Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $D = \{(x,y) \mid a(y) \leqslant x \leqslant b(y), c \leqslant y \leqslant d\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ непрерывна на D и $a'(y), b'(y)$ непрерывны на $[c,d]$. Тогда $F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$ дифференцируема на $y \in [c,d]$, причем $F'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(b(y),y) \cdot b'(y) - f(a(y),y) \cdot a'(y)$.

Доказательство. $F(y) = F(y, a(y), b(y))$. По правилу производной сложной функции $\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dx + f(b(y),y) \cdot b'(y) - f(a(y),y) \cdot a'(y)$ □ Дальше здесь была куча поясняющего текста (см фото 10.11.22 в 13620)

Пример. Посчитаем $F(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+a^2\sin^2(x))}{\sin(x)}$. тут я отрубился

Теорема 10 *(об интегрировании интеграла, зависящего от параметра)*
Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $P = [a,b] \times [c,d]$. Тогда

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dy \int\limits_c^d f(x,y)$$

Доказательство. Введем функции $G(t) = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^t f(x,y)dy$, $H(t) = \int\limits_a^t dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$. Докажем, что $G(b) = H(b)$ (что доказывает требуемое утверждение). Введем функцию $g(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)dx$, тогда $G(t) = \int\limits_c^d g(t,y)$ - применима теорема о дифференцировании сложной функции: $\frac{\partial g}{\partial t} = \left(\int\limits_a^t f(x,y)dx\right)'_t = f(t,y)$ - непрерывна на P по условию. Теперь докажем, что $g(t,y)$ непрерывна на P, для этого покажем, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0, \Delta y \to 0} \Delta g = 0$. Имеем $\Delta g = g(t+\Delta t, y+\Delta y) - g(t,y) = \int\limits_a^{t+\Delta t} f(x, y+\Delta y)dx -$

$\int\limits_a^t f(x,y)dx = \int\limits_a^t (f(x,y+\Delta y) - f(x,y))dx + \int\limits_t^{t+\Delta t} f(x,y+\Delta y)dx$. Так как $f(x,y)$ непрерывна на компакте P, то она равномерно непрерывна на P и ограниченна константой M. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из равномерной непрерывности для

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0 \, \exists \delta_1 > 0 \, \forall (x_1, y_1) \in P \, \forall (x_2, y_2) \in P : \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2} < \delta_1 \implies$$

Если $|\Delta y| < \delta$, то $|f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$; тогда можно оценить интеграл:

$$\left| \int\limits_a^t (f(x,y+\Delta y) - f(x,y))dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{t-a}{b-a} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Если $|\Delta t| < \frac{\varepsilon}{2M}$, то

$\square$