Дифференциальные уравнения

Гуревич Е. Я.

Содержание

1 Что такое дифференциальное уравнение?

1.1 Базовые определения

Определение 1
$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0 \tag{1}$$
- обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) порядка n.

Здесь t - независмая переменная, $x(t)$ - искомая функция.

Определение 2 *Решение ОДУ - функция $x(t) \in C^n$ (дифференцируемая n раз), обращающая уравнение в тождество.*

Примеры. $\frac{dx}{dt} = 0$ - решение есть константа.
$\frac{dx}{dt} = 5$. Решение $x = 5t + c$. (Так как решение зависит от параметра-константы, говорят об однопараметрическом семействе решений. Если задать $x(0)$, то решение будет единственным, зависящим от начального условия).
$\frac{d^2x}{dt^2} = w$ - уравнение равноускоренного движения. Решение: $x = \frac{wt^2}{2} + c_1 t + c_2$, где c_1, c_2 - начальная скорость и начальная координата соответственно.
Пример. Для уравнения $\frac{dx}{dt} = f(t)$, если функция в правой части непрерывна на отрезке (a, b), тогда общее решение имеет вид $x = \int f(t)dt$. Более точно, $t_0 \in (a, b)$, тогда $x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + x(0)$.

Определение 3 *Общее решение ОДУ - множество всех решений.*

Естественно возникает вопрос, существует ли решение ДУ и единственно ли оно при заданных начальных условиях? Выражается ли оно через элементарные функции? Какова его область определения и значения?

1.2 ДУ первого порядка, разрешенные относительно производной

Определение 4 *ДУ, разрешенные относительно производных - уравнения вида*
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2}$$
то есть уравнения, производная которых задана функцией в явном виде.

Пример. $(\frac{dx}{dt})^2 - x^2 = 0$ - не разрешенное относительно производных, но оно раскладывается в два таких уравнения.
Минимальные требования к функции f - определенность в области
Геометрический смысл уравнения 2:

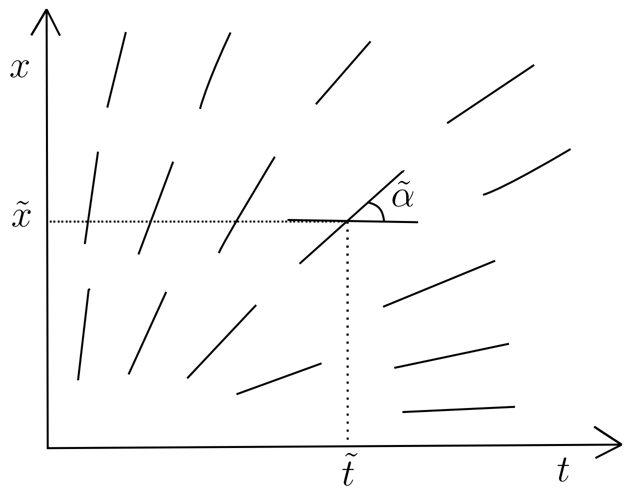

Рис. 1: Поле направлений на плоскости: $\operatorname{tg}\tilde{\alpha} = f(\tilde{t}, \tilde{x})$

Говорят, что уравнение 2 определяет поле направлений в *расширенном* фазовом пространстве (в отличие от *векторного поля* в фазовом пространстве): каждой точке сопоставляется направление, определяемое функцией $f(x,t) = \operatorname{tg}\alpha$ (поскольку длина вектора не определена, говорят имено о поле направлений). Кое-кто говорит, что ДУ и поле направлений это одно и то же, поскольку ДУ биективно соответствуют полям направлений).
Пример. Пусть $x(t)$ - количество зараженных вирусом в момент времени t. Допустим, что скорость заражения пропорциональная количеству уже зараженных людей. Запишем это в виде ДУ:

$$\frac{dx}{dt} = kx, \ k > 0$$

Мы получили простейшую модель роста населения Мальтуса. Очевидно, решение $x(t) = x_0 e^{kt}$. Проблема с такой моделью состоит в том, что количество людей дискретно, а найденная нами функция непрерывна. Корректировка состоит в том, что $x(t)$ понимается в смысле *плотности населения.*
Пример. Рассмотрим более интересное уравнение (уравнение Бернулли, оно же логистическое уравнение): $\frac{dx}{dt} = k(x)x$. Допустим, что $k(x)$ - линейная убывающая функция. Тогда $\frac{dx}{dt} = (k_0 - \frac{k_0 x}{h})x$. (Здесь $k_0 = k(0)$, $h =$

$k^{-1}(0)$). Получаем нелинейное уравнение, в котором переменные не разделяются. Теперь можно рассмотреть подробнее поле направлений. Пусть Γ_0 - множество точек (t, x), в которых $\frac{dx}{dt} = 0$, то есть векторы поля параллельны оси Ot. Решим уравнение $0 = x(k_0 - \frac{k_0}{h}x)$.
Получаем следующее поле направлений:

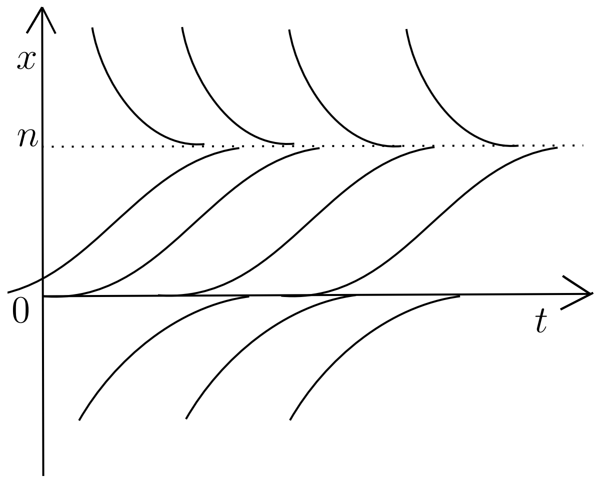

Рис. 2: Логистическое отображение

Кривые, заключенные в середине, называются логистическими кривыми. «Крутизна» логистической кривой зависит от параметра k_0. Данное уравнение было рассмотрено Ферхюльстом как уточнение модели Мальтуса.

1.3 Метод изоклин

Метод изоклин заключается в рисовании и исследовании графиков решений уравнения 2.

Определение 5 *Изоклина наклона α - геометрическое место точек Γ_α, в которых касательная к решению уравнения 2 имеет наклон, равный α.*

То есть, Γ_α: $\operatorname{tg}\alpha = f(t, x)$
Опишем алгоритм метода изоклин на примере. Пусть задано уравнение $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$.

1. Найдем $\Gamma_0 : 0 = \frac{x}{t}$ (то есть $x = 0$ $(t \neq 0)$) Найдем $\Gamma_{90} : \frac{t}{x} = 0$, то есть $t = 0$ $(x \neq 0)$ Получили, что эти гаммы есть координатные оси.

2. Определим области с постоянным знаком $\frac{dx}{dt}$ (среди тех, на которые плоскость разбивается изоклинами)

3. Исследуем симметрии уравнений, например относительно $x \to -x$, $t \to -t$ (или одновременного применения). Эти симметрии эквивалентны отражению относительно осей.

4. Нахождение точек перегиба и областей выпуклости, вогнутости интегральных кривых.

5. Приближенное построение интегральных кривых (то есть решений уравнения).

Замечание. Не все интегральные кривые являются решениями. Так, в рассмотренном примере ось Ox - интегральная кривая, но она очевидно не является решением (так как не является функцией).

Метод изоклин является качественным, и он не дает более подробной информации о геометрии кривых. В данном конкретном примере интегральные кривые - в точности прямые, проходящие через точку $(0, 0)$, поскольку мы заметили, что в каждой точке направление касательной к интегральной кривой совпадает с прямой, соединяющей эту точку и начало координат.
Пример. Немного изменим уравнение: $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$. Главные изоклины точно такие же, как у предыдущего, а вот знаки в координатных четвертях меняются. Поле направлений выглядит совершенно по-другому, в нем гиперболы.
Пример. Получим уравнение окружности с помощью ОДУ, исходя из следующего свойства: касательная перпендикулярна радиусу. То есть мы имеем некоторое поле направлений, исходя из которого можно восстановить ДУ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{y_0}{x_0}$ Поскольку $\alpha = \beta + 90$, имеем $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta + 90) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$. В итоге уравнение имеет вид $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = -\frac{x_0}{y_0}$ или, если сотрем нолики (поскольку свойство универсально)

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y}$$

Заметим, что это же уравнение можно получить дифференцированием обычного уравнения окружности. Решая его, в качестве параметра вылезет что-то, отвечающее за радиус.

1.4 Практика

Пример (№17). Составим уравнение по решению: $y = e^{cx}$, $y' = ce^{cx}$. Имеем $c = \frac{\ln y}{x}$, значит, $y' = \frac{\ln y}{x} e^{\ln y}$.
Пример (№25). Дано семейство функций $y = ax^2 + be^x$, $y' = 2ax + be^x$, $y'' = 2a + be^x$. Найдем ДУ, решениями которого они являются. Так как у нас два параметра: a и b, то и уранвение будет второго порядка. Имеем

$$y - y'' = 2a(x-1) \implies a = \frac{y' - y''}{x-1}$$

$$y'' = \frac{2(y' - y'')}{2(x-1)} + be^x \implies \frac{1}{e^x}(y'' - \frac{y' - y''}{x-1}) = b$$

$$y = \frac{y' - y''}{2(x-1)} x^2 + (y'' - \frac{y' - y''}{x-1})$$

Возникает вопрос: а единственно это решение? Здесь мы пользуемся теоремой о неявной функции.
Пример (№30). Составим уравнение для окружностей, центры которых лежат на $y = 2x$. Уравнение окружностей $(x - x_0)^2 + (y - 2x_0)^2 = 1$. Ответом должно быть однопараметрическое семейство решений, которые соответствуют различным положениям центра на прямой. Дифференцируем:

$$2(x - x_0) + 2(y - 2x_0)y' = 0 \implies x_0 = \frac{x + yy'}{1 + 2y'}$$

Подставим выражение для параметра обратно в уравнение:

$$(x - \frac{x + yy'}{1 + 2y'})^2 + (y - 2\frac{x + yy'}{1 + 2y'})^2 = 1$$

Пример (№71). Найдем кривые, касательные которых заметают одинаковые площади под своим графиком. Пусть $f(x) = y$ - искомая кривая. Её производная не может быть нулевой, иначе она не образует треугольник с осью абсцисс.
Фикисруем точку x_0. Получаем условие: $\frac{y^2(x_0)}{2y'(x_0)} = a^2 \implies y' = \frac{y^2}{2a^2}$. Если производная отрицательная, то в этой формуле должен вылезти минус (и формально мы имеем два случая, поэтому

$$y' = \pm \frac{y^2}{2a^2}$$

Проинтегрируем (переменные разделяются): $\frac{1}{y} = \pm\frac{1}{2a^2}x + C$ Итак,

$$y = \frac{2a^2}{2a^2C \pm x}$$

Пример (№73). Ещё одна геометрическая задачка. Беглый анализ: производная не равна нулю. Уравнение касательной: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Точка пересечения с осью абсцисс: $x_k = \frac{-y_0}{y'(x_0)} + x_0$. Уравнение нормали: $y = -\frac{1}{y'}(x - x_0) + y_0$. Точка пересечения нормали с осью абсцисс: $x_n = y_0 y' + x_0$. Диффур снова распадается на два случая... $|KN| = |x_k - x_n| = |\frac{y}{y'}$. Рашаем дома кароч.

1.5 Мини-рассказ про число e

Уже Архимед знал, что при умножении показатели степеней складываются. Это легко получить из анализа обычной геометрической пргрессии. В XV веке начали торговать, используя сложные проценты. Возник вопрос, можно ли полутать бесконечное количество денег при уменьшении периода факторизации. Стевин Саймон решил написать таблицу сложных процентов, чтобы полутать денег с её использования, и оказалось, что ответ на предыдущий вопрос отрицательный. Иоста Бюрге (помощник Кеплера) посмотрел на таблицы и полутал с них инфу о том, что с их помощью можно перемножать огромные числа. Джон Непер составил более юзабельные таблицы, ввел понятие логарифма, и кароч дальше вводим предел для натуральных чисел, переходим к непрерывной штуке... Теперь фокус: $e^k = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{nk} = (1 + \frac{k}{m})^m = \sum\limits_{i=0}^{m} C_m^i(\frac{k}{m})^i = \sum\limits_{i=0}^{m} \frac{k^i}{i!}$. Эту штуку придумал Бернулли, и она сходится к e быстрее обычного предела. Можно это положить за определение e^x, и мгновенно распространить на любые действительные показатели степеней.

2 Элементарные методы интегрирования ДУ

2.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 6 *Уравнение с разделяющими переменными - уравнение вида*

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t) \tag{3}$$

где f, g непрерывны на $x \in (a, b),\ t \in (\alpha, \beta)$

Как решать такие уравнения? Алгебраическая интуиция подсказывает, что надо перенести дифференциалы к своим функциям и проинтегрировать. Но это ещё надо обосновать. Сделаем следующее:

1. Найти все $x_* : f(x_*) = 0$. Тогда $x = x_*$ - решение-константа.
2. Пусть x_*^i, x_*^j - такие, что $f(x_*^i) = f(x_*^j) = 0$ и $\forall x \in (x_*^i, x_*^j) : f(x) \neq 0$. Тогда уравнение 6 эквивалентно уравнению

   $$\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$$

   Эту штуку можно проинтегрировать с обеих сторон. Результат непрерывен и не обращается в ноль. Значит, по теореме о неявной функции найдется решение. $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{x}$(решение в области $(\alpha, \beta) \times (x_*^i, x_*^j)$).
3. Выписать решение на каждом интервале (x_*^i, x_*^j)

Других решений не существует. Почему? Допустим, существует другое решение. Оно не может быть константой, так как все константы были получены в п.1. Если она

Пример. Решим уравнение $\frac{dx}{dt} = 0$. Решение-константа: $x = 0$. Теперь рассмотрим два интервала: $x < 0$ и $x > 0$. Если $x < 0$, имеем уравнение

$$\frac{1}{x}\frac{dxdt}{dt} = dt$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt$$

Получаем, что $\ln|x| = t + C$. Выражаем искомую функцию (не забыв, на каком промежутке мы рассматриваем функцию, и раскрыв модуль соответственно):

$$x = -Ce^t,\ C > 0$$

Для интервала $x > 0$ точно такой же порядок действий, только получим другой знак. Итак, множество решений:

$$x = Ce^t,\ C \in \mathbb{R}$$

2.2 Уравнения, приводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными

Определение 7 *Уравнение, приводящееся к уранвению с разделяющмися переменными - уравнение вида*

$$\frac{dx}{dt} = f(at + bx + c) \tag{4}$$

Давайте решим его.

1. Введем замену $z(t) = at + bx + c$. Имеем

$$\frac{dz}{dt} = a + b\frac{dx}{dt}$$

   Получаем уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dt$$

Пример. Решим уравнение $\frac{dx}{dt} = \cos(x + t)$. Замена $z = x + t$, $\frac{dz}{dt} = 1$. Уравнение имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + 1$$

Найдем $\cos z_* + 1 = 0$: это, очевидно, $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ Свели задачу кпрошлому пункту

2.3 Однородные уравнения

Сначала докажем, что два определения однородного уравнения эквивалентны.

Определение 8 *Однородным называется уравнение вида*

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right) \tag{5}$$

Это уравнение инвариантно относительно замены $x \mapsto kx,\ t \mapsto kt$. Геометрически это означает, что совокупность интегральных кривых инвариантно относительно преобразования $\theta(x, y) = (kx, ky)$. Из этого следует, что если мы найдем одно решение, то мы найдем всю совокупность ему подобных.

Определение 9 *(вспомогательное)*
Уравнение в форме дифференциалов: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Это таже форма, что и $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, поскольку $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Обратно, $-f(x, y)dx + dy = 0$. Уравнение в форме дифференциалов имеет чуть большее множество решений.

Определение 10 *Уравнение в форме дифференциалов называется однородным, если*
$M(kx, ky) = k^n M(x, y)$
$N(kx, ky) = k^n N(x, y)$
n *называется степенью однородности.*

Теорема 1 *Определения 8 и 10 эквивалентны.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$
$2 \Rightarrow 1$. Пусть дано уравнение в форме дифференциалов. Подставим k. При $x \neq 0$ имеем

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{k^n M(x, y)}{k^n N(x, y)} = -\frac{M(kx, ky)}{N(kx, ky)} = -\frac{M(1, \frac{y}{x})}{N(1, \frac{y}{x})} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

□
Пример. $M = x^2 + y^2$
Пример (№31). Найти уравнение, решение которых - параболы с осью, параллельной оси ординат и касающиеся прямых $y = 0,\ y = x$. Во-первых,

поймем, как выглядит уравнение такой параболы. Исходя из геометрии, получим, что уравнение параболы, удовлетворяющее первому условию, имеет вид $y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$, а первому и второму - $y = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16a}$. Остался один параметр $\Rightarrow$ уравнение первого порядка. Подставляем и хаваем ответ бесплатно:

$$y = \left(\frac{y' - \frac{1}{2}}{2x}\right) x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{2x}{16y' - 8}$$

Пример (№72). Найти линии, у которых треугольники, образованные касательными, осью OX и точкой касания, имеют одинаковую сумму катетов. Из геометрических соображений имеем уравнение

$$\frac{|y|}{|y'|} + |y| = b = const$$

Раскрываем модули. В простейшем случае имеет уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{b - y}$$

Остальные уравнения такие же в принципе. Так шо это идет в дз Его легчайшее (и, видимо, общее) решение: $x + C = \pm b \ln |y| \pm y$

Пример (№76). Геометрическая интуиция не должна подводить нас. Вставить картинку. Есть кароч такая формула: $\operatorname{tg} \gamma = \frac{r}{r'}$

3 Однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Как искать его решение? Заменой $u(t) = \frac{x}{t}$. Тогда уравнение перепишется в виде $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$. В нем переемнные разделяются: $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dt}{t}$. Итак, типы уравнений:

1. С разделяющимися переменными
2. Приводящиеся к виду $\frac{dx}{dt} = f(ax + bx + c)$
3. Првиодящиеся к виду $(a_1x + b_1t + c_1)dx + (a_2x + b_2x + c_2)dt = 0$

Подумаем, можно ли это последнее привести к однородному. Добавим условие $c_1^2+c_2^2 \neq 0$ (иначе система уже однородна). В общем, если эти две прямые пересекаются в точке (x_*, t_*), то можно ввести новые переменные, передвинув эту точку в начало координат: $x \mapsto x - x_*,\ t \mapsto t - t_*$. Тогда система перепишется без $c_1,\ c_2$, и таким образом будет однородной. Если прямые не пересекаются, то прямые либо совпадают, либо параллельны. Тогда введем замену (для любой прямой) $z(t) = a_1x + b_1t + c_1$. Так как прямые параллельны, то $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, значит, мы можем выразить вторую прямую: $a_2x+b_2t+c_2 = \frac{1}{k}(a_1x+b_1t+kc_2) = \frac{1}{k}(z-c_1+kc_2)$. Уравнение приводится к виду $z(t)dx + \frac{1}{k}(z-c_1+kc_2)dt = 0$. Но у нас все равно многовато переменны. Выразим dx через z:

$$z(\frac{dz - b_1dt}{a_1}) + \frac{1}{k}(z - c_1 + kc_2) = 0$$

Умножим на a_1k:

$$kzdz = kb_1zdt - a_1zdt - a_1(kc_2 - c_1)dt$$

Домножим на $\frac{1}{kzdt}$:

$$\frac{dz}{dt} = ((b_1 - \frac{a_1}{k})z - a_1(kc_2 - c_1))\frac{1}{z}$$

Finally, уравнение с разделяющимися переменными! ПОБЕДА!

3.1 Обобщенно-однородное уравнение

Определение 11 *Обобщенно-однородное уравнение - уравнение вида*

$$M(x,t)dx + N(x,t)dt = 0$$

причем M, N - такие. что $\exists n \in \mathbb{R}$: если $x = z^n(t)$, то уравнение $M(z^n,t)nz^{n-1}dz + N(z^n,t)dt = 0$ однородно.

Пример. Испортим однородное уравнения, чтобы сделать его обощенно-однородным. Роман придумал, чел харош.

Сведем и этого зверя к разделяющимся переменным.

$$\begin{cases} n(kz)^{n-1}M((kz)^n, kt) = k^m M(z^n,t)nz^{n-1} \\ N((kz)^n, kt) = k^m N(z^n, t) \end{cases}$$

3.2 Уравнение в полных дифференциалах

Напомним, что полный дифференциал $dF(x,y)$ C^1-гладкой функции равен $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$.

Определение 12 *Уравнение в полных дифференциалах - уравнение вида*

$$dF(x,y) = 0,\ F \in C^2(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Если мы знаем саму функцию, то решение находится мгновенно: $dF(x,y) = const$. Правда, оно неявное. Выразим $y = y(x)$ по теореме о неявной функции.

Пример. $x^2 \sin t dt + 2x \cos t dx = 0$

Уравнение является уравнение в полных дифференциалах, если существуют такие функции, что $M = \frac{\partial F}{\partial x},\ N = \frac{\partial F}{\partial y}$

Теорема 2 *(необходимое условие представления в полных дифференциалах)*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

Достаточное условие - $M_y = N_x$ *в односвязной области*

Доказательство. □

Как подбирать такие функции? Мы знаем, что $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$. Проинтегрируем это равенство по x. Имеем $F = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$. Проделаем то же самое по переменной y: $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)dx) + \varphi' = N(x,y)$, откуда $\varphi = \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y}(\int Mdx)\right) dy$. Чтобы проверить себя при решении, помним, что φ не зависит от x! Итак,

$$F = \int M(x,y)dx + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int Mdx\right)\right) dy$$

3.2.1 Геометрический смысл решения уравнения в полных дифференциалах

Так как $z = z(x,y)$ - какая-то поверхность, то запись $z = const$ - это линии уровня, которые можно спроецировать на плокость переменных и получить интегральные кривые.

Пример (модель Лотки-Вольтерра). Пусть $x(t)$ - плотность карасей, $y(t)$ - плотность щук в некотором пруду. Щуки сдерживают рост карасей, но от количества карасей зависит также и количество щук. Запишем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + ex) \end{cases}$$

Лотка придумал эту систему для биоценозов, а Вольтерра - для химических реакций.
Давайте решим эту систему. Её расширенное фазовое пространство, вообще говоря, трехмерное, поэтому будем рассматривать фазовые кривые - проекции интегральных на плоскость независимых параметров. Они ориентированы в направлении роста параметра t. Найдем эти кривые, найдя решение уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-cy+exy}{ax-bxy}$. Переменные разделяются:

$$\frac{(a - by)dy}{y} = \frac{(-c + ex)dx}{x}$$

Представим его в полных дифференциалах:

$$d\left(a \ln y - by + c \ln x - ex\right) = 0$$

Значит, решение имеет вид $a \ln y - by + c \ln x - ex = h = const$. Выглядит очень сложно, но давайте попробуем построить изолинии. Введм функцию $F = \ln\left(y^a x^c\right) - by - ex$, и поищем её изолинии. Сначала найдем критические точки: $(x_*, y_*) = \left(\frac{c}{e}, \frac{a}{b}\right)$ (получилась единственная точка). Определим тип критической точки (составим гессиан, посчитаем его знакоопределенность); получим, что это точка максимума. Линии уровня - какие-то окружности/эллипсы.

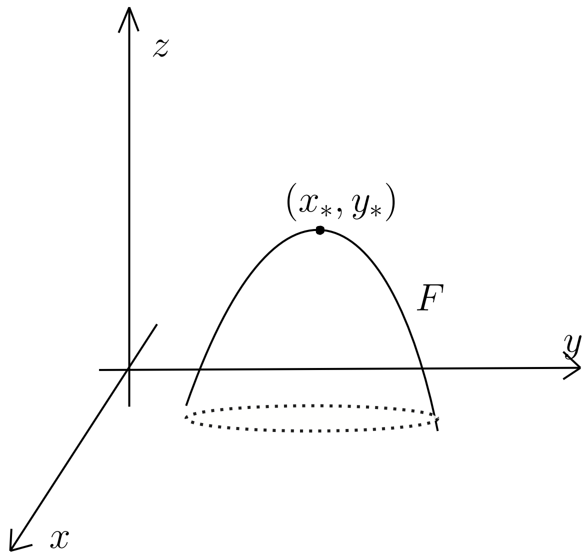

Рис. 3: Первый интеграл системы Лотки-Вольтерры

Упражнение. Доказать, что фазовые кривые замкнуты.

Доказательство ([1],§2.7). Так как $\frac{dF}{dt} = 0$, то функция F сохряняется вдоль фазовых кривых. Иначе говоря, фазовые кривые являются изолиниями фунции F. Но график F является суммой двух «холмов», образованных логарифмами, и поэтому сам является холмом. Поскольку изолинии холма - замкнутые кривые, то и фазовые кривые системы Лотки-Вольтерры замкнуты. □

Теперь нам надо понять, куда закручиваются эти линии, как они ориентированы. Они закручиваются против часовой стрелки вокруг критической точки, кстати, область решения - первая координатная четверть. Чтобы избежать проблем с дискретностью, наши переменные - это плотность населения пруда.

3.3 Автономные уравнения

Определение 13 *Автономное ДУ - дифференциальное уравнение, правая часть которого не зависит от времени.*

Автономные уравнения не могут быть динамическими системами, так как они не зависят от времени, но можно искусственно этого достичь.

3.4 Нелинейный маятник

Также: нелинейный консервативный (то есть сохраняющий энергию) осциллятор, физический маятник.

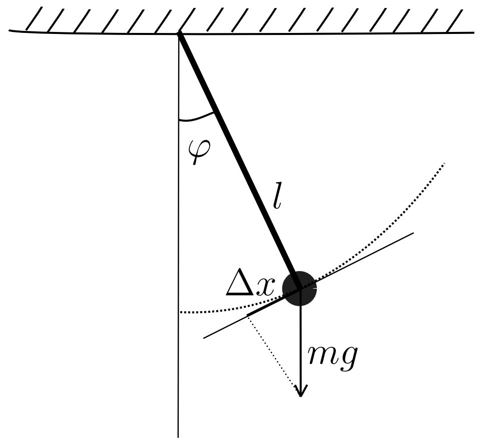

Рис. 4: Физический маятник

Рассмотрим маятник с массой m и длиной l, и пусть φ - угол отклонения от положения равновесия. При повороте на малый угол движение можно представить как прямолинейное движение по касательной. Запишем второй закон Ньютона в проекции на касательную:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\varphi$$

Пусть Δx - длина дуги окружности, примерно равная малой части касательной. Тогда $\Delta x = l\Delta\varphi + o(\Delta\varphi)$. Пренебрегая бесконечно малыми членами, запишем уравнение колебаний.

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi$$

Другой способ вывода уравнения ([2],§11). Кинетическая энергия маятника равна $-\frac{m(l\dot{\varphi})^2}{2}$, потенциальная энергия равна $mgl\cos\varphi$. Функция Лагранжа (кинетическая энергия минус потенциальная энергия, выраженные в переменных координата-скорость) для маятника тогда имеет вид $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi$. Для консервативной системы справедиво уравнение движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

Подставляя сюда функцию Лагранжа для маятника, получаем точно такое же уравнение физического маятника.

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

В отличие от уравнения малых колебаний, оно нелинейное из-за синуса. Также, оно имеет второй порядок, значит, появятся две константы интегрирования, и нам надо зафиксировать начальные условия: $\varphi(0),\ \dot{\varphi}(0)$. Теперь сведем уравнение к системе из двух уравнений первого порядка заменой $\dot{\varphi} = \psi$:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = -\omega^2 \sin\varphi \end{cases}$$

Как устроено фазовое пространство данной системы? Ясно, что оно двумерное (поскольку имеется две зависимые переменные - φ и ψ). Близкие положения системы должны быть близки и в фазовом пространстве, поэтому на оси φ мы склеим точки $\pi, -\pi$, чтобы маятник мог делать «солнышко» и его фазовая траектория не была разрывной. Более формально, введем факторпространство по отношению эквивалентности $(\varphi, \psi) \sim (\varphi + 2\pi k, \psi))$. Получаем, что фазовое пространство - цилиндр. Любая фазовая траектория - определнная замкнутая кривая. На цилиндре есть два типа замкнутых кривых - стягиваемые в точку и нестягиваемые. Вторые отвечают за движение через верхнюю точку равновесия.
Теперь решим систему. Поделив одно уравнение на другое, получаем

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{\omega^2 \sin\varphi}{\psi}$$

Полная энергия равна константе: $E = \frac{m\psi^2}{2} + \frac{mg}{l}(1 - \cos\varphi)$. Выражая отсюда угол, имеем.

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(h - \frac{mg}{l}(1 - \cos\varphi)\right)}$$

Функция $F(\varphi) = \frac{mg}{l}(1 - \cos\varphi)$ сохряняется вдоль фазовых траекторий, так как $\frac{dF}{dt} = 0$. Её изолинии (то есть уровни постоянной энергии) - одномерные торы. Из анализа фазовых траекторий можно выяснить, что период колебаний растет по мере увеличения энергии. Также есть два состояния равновесия: верхнее (неустойчивое) и нижнее (устойчивое).

4 Ряды Тейлора и численные методы

4.1 Практика

Пример (№111). $(y+\sqrt{xy})dx = xdy$. Уравнение однородно (проверим умножением на k). Значит, делаем замену $u(x) = \frac{y}{x}$. Имеем $dy = u{\cdot}dx + du{\cdot}x$. Переменные разделяются: $\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{u}}$
Пример (№113). $(2x-4y+6)dx + (x+y-3)dy$. Переносим начало координат в точку пересечения.
Пример (№126). $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$. Это - обобщенно-однородное уравнение, то есть приводится к однородному заменой $y = z^m(x)$. $y' = mz^{m-1}z$ Далее $mz^{m-1}z = z^{2m} - \frac{2}{x^2}$ Теперь уравнение однородно. Введем замену $\frac{z}{x} = u$, $z = ux$. Получим $u'x + u = -1 + 2u^2$
Пример (№128). $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$. Пусть $y = z^m$. Идея: сделать так, чтобы под корнем степень у x и y была одинаковой.
Пример (№) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$. Подберем функцию, полным дифференицалом которого является это выражение; получим $F(x,y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$. Решние: $F = C = const$
Пример (№192). $(1 + y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 xdy$. Мы должны показать, что вторые производные равны. Тогда это значит, что $F_{xy} = F_{yx}$, и такая функция вообще существует на некотором диске (где правая часть не обращается в ноль). Интегируем два раза, и найдем эту функцию: $F(x,y) = x - y^2\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{y^2}{2} + C_0$. Итак, ответ: $\boxed{F = const}$
Пример (№202). $y^2dx + (xy + \operatorname{tg} xy)dy = 0$. Является ли однородным, в полных дифференциалах? Давайте раскроем скобки и сгруппируем: $y(ydx + xdy) + \operatorname{tg} xydy$. Это то же, что и $\frac{d(xy)}{\operatorname{tg} xy} + \frac{dy}{y} = 0$. Домножим на $\frac{1}{y\operatorname{tg} xy}$ и хаваем уравнение в полных дифференицалах бесплатно. То, на что домножили - интегрирующий множитель.

4.2 Численные методы

Рассмотрим задачу Коши для уравнения, разрешенного относительно производной:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Будем искать его приближенное решение, перейдя к дискретному времени: именно, возьмем малое приращение времени h и рассмотрим последовательность $t_0, t_0+h, t_0+2h, ..., t_0+kh, ...$ Тогда уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{h} = f(x_k, t_k),\ (\textit{где } x_i = x(t_i))$$

откуда имеем итеративную формулу

$$x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k)h$$

Мы получили знаменитый **метод Эйлера** численного интегрирования уравнения. Его геометрический смысл прост: начиная из точки (t_0, x_0), мы в течение времени h двигаемся вдоль касательной к интегральной кривой. Попав в новую точку (t_1, x_1), мы снова движемся вдоль касательной к кривой, проходящей через новую точку, и так далее. Поэтому метод Эйлера ещё называют методом ломаных.

Другая точка зрения на метод Эйлера может привести к его обобщению. На самом деле, формула, использованная при выводе метода Эйлера, является лишь частным случаем разложения решения в ряд Тейлора:

$$x_{k+1} = x(t_{k+1}) = x(t_k+h) = x(t_k) + \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_k} h + \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t_k} \frac{h^2}{2} + ...$$

Таким образом, можно рассмотреть более точные методы, основанные на использовании членов ряда Тейлора высшего пордяка. Например, метод Штермера - 3го порядка:

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{f(t_k+h, x_k+f(t_k,x_k)h) - f(t_k,x_k)}{h}$$

Наиболее распространенный численный метод - метод Рунге-Кутты - использует разложение 4го порядка.

Пример. Супер-простая функция:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Это - определение обычной экспоненты. Решим методом Эйлера. Возьмем $t_1 = h$. Далее, $x_1 = 1 + f(t_0, x_0)\cdot h = 1 + h$. Далее, $t_2 = t_1 + h = 2h$,

$x_2 = x_1 + f(t_1, x_1) \cdot h = 1 + h + (1+h)h = (1+h)^2$. В общем виде, в точке $x_{k+1} = x_k(1+h) = (1+h)^{k+1}$ функция будет принимать значение $x_n = (1+h)^n = \left(1+\frac{T}{n}\right)^n \to e^T$. Неслучайно тут вылез замечательный предел - определение экспоненты.

5 Теоремы о существовании и единственности решения

Определение 14 *Задача Коши для уравнения*

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- задача отыскания его решения, проходящего через точку (t_0, x_0)

Доспустим, решение задачи Коши существует, а правая часть является непрерывной функцией $f(t,x)$. Тогда мы можем проинтегрировать уравнение слева и справа:

$$\int \frac{dx(t)}{dt} \equiv \int f(t,x)dt$$

Слева стоит решение, а справа определенный интеграл:

$$x \equiv x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \tag{6}$$

Определение 15 *Назовем уравнение 6 является интегральной формой задачи Коши.*

Следующая теорема оправдывает это название:

Теорема 3 *(лемма)*
Задача Коши эквивалента решению интегрального уравнения 6

Доказательство. Пусть $x(t)$ - решение задачи Коши. Тогда при подстановке в уравнение имеем

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv f(t, x(t))$$

Интегрируя, получим $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$ - решение интегрального уравнения.
Обратно, пусть $x(t)$ - непрерывное решение интегрального уравнения. Тогда, взяв производную, получим

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

Подставив $t = t_0$ в интегральное уравнение, получим $x(t_0) = x_0$, т.е. $x(t)$ - решение д.у. $\square$

Введением интегрального уравнения мы не решили задачу Коши, лишь переписали её в другом виде, но мы сделали первый шаг к тому, чтобы доказать существование решения задачи Коши.

Определение 16 *Функциональная последовательность Пикара* $\{x_k(t)\}$ *определяется следующим образом:*

$$x_0(t) = x_0,\ x_{k+1}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x_k(\tau))d\tau$$

Определение 17 *Функция называется липшицевой с константой Липшица* L*, если*

$$\forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$$

Введем обозначения:
$D \subset \mathbb{R}^2$ - область на плоскости (открытое множество);
$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid \rho(x, y) \leqslant r\}$ - замкнутый шар, причем $B_r(x) \subset D$;
$m = \max\limits_{(t,x) \in B_r} |f(t, x)|$;
$\delta = \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}$.
Теперь сформулируем основную теорему:

Теорема 4 *(Коши-Пикара, или о существовании и единственности задачи Коши)*
Пусть $f(t, x)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ *непрерывны в области* D. *Тогда для любой точки* $(t_0, x_0) \in D$ *существует решение* $x(t)$ *задачи Коши, определенное на отрезке* $I_\delta = [t_0 - \delta, t_o + \delta]$.
Кроме того, если $\tilde{x}(t)$ *- другое решение задачи Коши, определенное на интервале* $[t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]$*, то существует такое* $\delta^* \in (0, \min(\delta, \tilde{\delta}))$*, что* $x(t) = \tilde{x}(t)$ *для* $t \in [t_0 - \delta^*, t_0 + \delta^*]$.

План доказательства.

1. Последовательность Пикара корректно определена на D, и её члены - непрерывные функции;
2. Существует непрерывный предел последовательности Пикара $x^*(t)$;
3. $x^*(t)$ является решением задачи Коши;
4. В силу единственности предела последовательности, решение единственно.

Доказательство.

1. Оценим разность между нулевым и первым членом последовательности:

$$|x_1(t) - x_0| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x_0) d\tau \right| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} m \, d\tau \right| \leqslant m|t - t_0| \leqslant m \cdot \frac{r}{\sqrt{1+m^2}} \leqslant r$$

- значит, график функции лежит в B_r, пока $t \in I_\delta$. Функция $x_1(t)$ непрерывна, поскольку, согласно интегральному уравнению, она является первообразной для $f(t, x_0)$.

Предположим, что для k верно, что $x_k(t)$ определена в шаре, непрерывна и $|x_k(t) - x_0| \leqslant r$. Тогда при $t \in I_\delta$ функция $f(t, x_k(t))$ определена, непрерывна и ограниченна константной m. Значит, имеется оценка

$$x_{k+1} = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x_k(t)) d\tau \leqslant r$$

Интеграл непрерывен и ограничен, поэтому на I_δ имеет место $|x_{k+1}(t) - x_0| \leqslant r$. Мы доказали по индукции, что все члены последовательности Пикара определены в шаре, непрерывны и ограниченны.

2. Докажем, что последовательность сходится. Рассмотрим ряд

$$x_1(t) - x_0(t) + x_2(t) - x_1(t) + ... + x_k(t) - x_{k-1}(t) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n(t) - x_{n-1}(t))$$

Частичные суммы S_n этого ряда равны x_n. Если мы докажем, что этот ряд сходится равномерно, то по матанской теореме последовательность Пикара имеет непрерывный предел. Снова применим индукцию для оценки членов ряда на I_δ. Здесь нам потребутся следующая

Лемма. Непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$

удовлетворяет условию Липшица с константой L, причем $L = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Доказательство ([1],§31.4). Пусть $x, y \in [a,b]$. Введем параметр $z(t) = x + t(y-x), t \in [0,1]$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$f(y) - f(x) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}(f(z(\tau)))d\tau = \int\limits_0^1 f'(z(\tau))\dot{z}(\tau)d\tau$$

Так как $\dot{z} = y - x$, то получаем

$$\left|\int\limits_0^1 f'(z(\tau))\dot{z}(\tau)d\tau\right| \leqslant \int\limits_0^1 L|y-x|d\tau = L|y-x| \quad \square$$

В силу того, что $f(t,x)$ дифференцируема, и её производная непрерывна, имеем по только что доказанной лемме

$$|f(t,x) - f(t,\tilde{x})| \leqslant L|\tilde{x} - x|,$$

где $L = \max\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|,\ (t,x),(t,\tilde{x}) \in B_r$. Значит, $|x_1 - x_0| \leqslant m|t-t_0|$ - база индукции доказана (более подробная выкладка - в предыдущем пункте).

Пусть для k выполнено $|x_k - x_{k-1}| \leqslant \frac{m}{L}\cdot\frac{L^k|t-t_0|^k}{k!} \leqslant \frac{m}{L}\frac{L^k\delta^k}{k!}$. Имеем

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^t f(\tau, x_k(\tau))d\tau - \int\limits_{t_0}^t f(\tau, x_{k-1}(\tau))d\tau\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{t_0}^t \big(f(\tau,x_k(\tau)) - f(\tau,x_{k-1}(\tau))\big)d\tau\right| \leqslant \left|\int\limits_{t_0}^t \big|f(\tau,x_k(\tau)) - f(\tau,x_{k-1}(\tau))\big|d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{t_0}^t L|x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau)|d\tau\right| \leqslant \left|\int\limits_{t_0}^t L\cdot\frac{m}{L}\cdot\frac{L^k|\tau-t_0|^k}{k!}d\tau\right| = \frac{m}{L}\frac{L^{k+1}|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Итак, мы доказали шаг индукции, и заодно оценили ряд сходящимся рядом, не зависящим от t :

$$\frac{m}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L^n\delta^n}{n!} \to \frac{m}{L}\left(e^{L\delta} - 1\right)$$

Значит, по признаку Вейерштрасса сумма ряда сходится равномерно, и её предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x^*(t)$ непрерывен.

3. По предыдущему пункту, $|x^*(t) - x_k(t)| \to 0$. Оценим эту разницу:

$$0 \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x^*(\tau))d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x_k(\tau))d\tau \right| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} L|x^*(\tau) - x_k(\tau)|d\tau$$

Правая часть стремится к нулю, значит, и левая тоже. Поэтому, переходя к пределу по t при $k \to \infty$ в интегральной формуле, имеем

$$x^* = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x^*(\tau))d\tau$$

Итак, $x^*(\tau)$ решение интегрального уравнения, а значит и задачи Коши.

4. Докажем единственность. Пусть на отрезке $\tilde{I}_\delta = [t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]$ определены два решения с общим начальным условием $x(t_0) = \tilde{x}(t_0)$. Покажем, что найдется такой $0 < \delta^* \leqslant \tilde{\delta}$, что эти решения совпадают на отрезке $I^*_\delta = [t_0 - \delta^*, t_0 + \delta^*]$. В силу лишицевости имеем

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} \big| f(\tau, \tilde{x}(\tau)) - f(\tau, x(\tau)) \big| d\tau \right| \leqslant L \int\limits_{t_0}^{t} |\tilde{x}(\tau) - x(\tau)|d\tau$$

Пусть $t > t_0$ (для $t < t_0$ ситуация аналогична). Введем обозначение $\Delta(t) = \int\limits_{t}^{t_0} |\tilde{x}(\tau) - x(\tau)|d\tau$. Функция $\Delta(t)$ неотрицательная, мотонно неубывающая и дифференцируемая. Значит, можно рассмотреть

$$T = \inf_{D>0} \{t \mid t > t_0\}$$

Если $T > t_0$, то $\delta^* = T - t_0$ - искомый отрезок, на котором решения совпадают. Если же $T = t_0$, то инетгральное неравенство можно переписать в виде $\frac{d\Delta}{dt} \leqslant L\Delta$. Самая грубая оценка достигается при равенстве, поэтому и рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{d\Delta}{dt} = L\Delta \\ \Delta(\varepsilon) = \Delta(t_0 + \varepsilon) \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$. Решая уравнение на отрезке $[t_0 + \varepsilon, t]$, имеем оценку

$$\Delta(t) \leqslant \Delta(t_0 + \varepsilon)e^{L(t-t_0-\varepsilon)}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем $\Delta(t) \leqslant 0$, откуда по неотрицательности $\Delta = 0$ на отрезке $[t_0, t_0 + \tilde{\delta}]$. $\square$

Пример. Что можно сказать о решении задачи Коши для

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = |x| \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Теорема Коши-Пикара не работает в нуле, так как там функция не дифференцируема. Но не обманывают ли нас? $||x_1| - |x_2|| \leqslant 1 \cdot |x_1 - x_2|$. Модуль - липшицева функция, поэтому условия теоремы работают. А если

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{x} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Производная растет неограниченно, функция не липшецева: $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \leqslant L|x_1 - x_2$ - при приближении к нулю $L \geqslant \frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$. Но это только в нуле. А не в нуле можно $\Rightarrow$ решение сущетсвует и единственно. В общем, давайте зарешаем. Получаем $x = \frac{(t+C)^2}{4},\ t + C > 0$. По условию $x(0) = 0$, откуда $x = \frac{t^2}{2}$. Но ведь ещё есть куча решений типа $x(t_0) = 0$, $x = \frac{(t-t_0)^2}{4}$, и даже $x = 0$.

Определение 18 *Функция $\tilde{x}(t)$, определенная на интервале (a, b), называется продолжением решения вправо, если она совпадает с $x(t)$ на некотором подинтервале.*

Теорема 5 *(о продолжении решения)*
Пусть дано уравнение $\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$, функции $f(t, x),\ \frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на компакте $D \subset \mathbb{R}^2$ (причем в D лежит как минимум 1 шар), $x(t, t_0, x_0)$ - решение задачи Коши для $(t_0, x_0) \in IntD$. Тогда существует решение, определенное на отрезке $[a, b]$, причем $(a, \tilde{x}(a, t_0, x_0)), (b, \tilde{x}(b, t_0, x_0)) \in \partial D$. Иначе говоря, решение продолжается на границу компакта.

Доказательство. В силу теоремы о существовании и единственности решения, функция $x(t, t_0, x_0)$ определена на отрезке $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$, где $\delta_0 = \frac{r_0}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\rho((t_0,x_0),\partial D)}{\sqrt{1+m^2}}$.

Положим $t_1 = t_0 + \delta_0,\ x_1 = x(t_1, t_0, x_0), p_1 = (t_1, x_1)$. Определим

$$\tilde{x}(t, t_0, x_0) = \begin{cases} x(t, t_0, x_0),\ t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]; \\ x(t, t_1, x_1),\ t \in [t_1 - \delta_0, t_1 + \delta_0]; \end{cases}$$

Если (x_1, t_1) лежит на границе, то все хорошо. Если нет, то будем увеличивать шар, пока не достигнем границы множества (в силу компактности это всегда можно сделать).

Возможен вариант, когда последовательность δ_i стремится к нулю и сама не затрагивает границу компакта. Рассмотрим функцию, определенную на $t \in [t_0 - \delta_0, t + \delta_k]$. Последовательность t_k невозрастающая и ограниченная, поэтому существует и предел b. Функция $\tilde{x}$ определена на объединении интервалов $\bigcup\limits_k [t_0 - \delta_0, t_k + \delta_k] = [t_0 - \delta_0, b)$. Воспользуемся непрерывностью функций: пусть $0 < h \ll 1$. Тогда

$$\forall \alpha, \beta \in (b - h, b) : |\tilde{x}(\alpha, t_0, x_0) - \tilde{x}(\beta, t_0, x_0)| \leqslant m|\alpha - \beta| < mh$$

Последовательность $\tilde{x}_k$ фундаментальна, значит по критерию Коши у неё есть конечный предел. Положим этот предел значением функции в точке b: $x^* = \tilde{x}(b)$. Тогда функция непрерывна на $[t_0 - \delta_0, b]$. Вспомним про интегральное уравнение: заметим, что $\tilde{x}$ удовлетворяет интегральному уравнению на интервале. Функция, дополненная на конце интервала, непрерывна и также удовлетворяет интегральному уравнению, поэтому в ней есть и производная (по эквивалентности определений).

Покажем, что точка b лежит на границе области D. Предположим противное, тогда она лежит во внутренности D. Тогда она лежит в нем вместе с некоторой 2ε-окрестностью с центром в $p^* = (t^*, x^*)$. Так как точки $p \to p^*$, то все $p_i, i > k$ лежат в ε-шаре точки p^*. Тогда расстояние до границы больше ε, и мы получаем противоречие с тем, что ряд из δ_k сходится и также удален от границы больше чем на ε. Значит, $p^* \in \partial D$. $\square$

Следствие. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ - такое неограниченное замкнутое подмножество плоскости, что для любых $(a, b) : D_{a,b} = D \cap \{(t, x) : a \leqslant t \leqslant b\}$ компактно, функции $f(t, x), \frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на D. Тогда решение задачи Коши продолжается либо неограниченно, либо до выхода на границу D. Доказать самостоятельно.

Пример. $x' = t^3 - x^3$. Показать, что любое решение этого уравнения продолжается неограниченно вправо. Нарисуем изоклину $x = t$. Заметим, что если $t_0 > x_0$, то $x(t, t_0, x_0) \in D$:. Тогда в силу следствия решение продолжается на границу, на граница не достигается, то есть

Пример. $x' = 1 + x^2$. Его решение - $x = \operatorname{tg}(x + C),\ C = \operatorname{arctg}(x_0) - t_0$, поэтому его нельзя продолжить до бесконечности, так как каждое решение определено на конечном интервале $(C_0 - \frac{\pi}{2}, C_0 + \frac{\pi}{2})$.

5.1 Практика

Пример (№199). $y^2dx - (xy - x^3)dy = 0$. Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые: $y(ydx - xdy) - x^3dy = 0$. Поделим все на x^2, тогда получим: $-d\left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y}dy = 0\right)$. Домножая на $-\frac{y}{x}$, получаем $d\left(\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) + dy = 0$. Итак, $d\left(\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + y\right) = 0$ В общем, мы нашли интегрирующий множитель методом внимательного взгляда. Ответ: $\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + y = const$.

Пример (№202). $d(\ln|\sin(xy)|) + \ln|y| = 0$.

Определение 19 *Интегрирующий множитель - такая функция $\mu(z(x, y))$, что при домножении на неё уравнение становится уравнением в полных дифференциалах.*

Тогда $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$. То есть $\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}M =$ Получаем, что $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{z_yM - z_xN} = P(z)$. То есть, если интегрирующий множитель существует, то он удовлетворяет этому условию. Значит, $\mu = e^{\int P(z)dz}$.

Пример (№212). $(2x^2y^3 - 1)ydx + (4x^2y^3 - 1)xdx = 0$. Пусть $z = xy$. Найдем интегрирующий множитель: $\mu = \frac{1}{(xy)^2}$.

6 Уравнение первого порядка

6.1 Базовые определения

Определение 20 *Уравнение*

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = b(t) \tag{7}$$

где a, b непрерывны на $t \in (\alpha, \beta)$ (интервал непрерывности), называется линейным ДУ первого порядка. Если при этом $b(t) \not\equiv 0$, то оно называется неоднородным.

Как следствие из теоремы Коши-Пикара, для $\forall t_0 \in (\alpha, \beta),\ \forall x_0 \in \mathbb{R}$ существует и единственно решение задачи Коши.

Замечание. Решение задачи Коши для 7 можно продолжить на весь интервал (α, β). Если этот интервал конечен, то функции $a(t), b(t)$ ограниченны на нём, то есть $|a(t)x + b(t)| \leqslant Ax + B$, и решениене выйдет за конус, образованный этой прямой.

Определение 21 *Линейныйй ператор - отображение $A\colon X \to Y$ такое, что $A(x+y) = A(x) + A(y),\ A(\lambda x) = \lambda A(x)$.*

Пусть $X = C^1(\alpha, \beta),\ C^0(\alpha, \beta)$ - пространства дифференцируемых и непрерывных функций. Положим $A(x) = \frac{dx}{dt} + a(t)x$. В силу линейности производной, это - линейный оператор. Также и любая линейная комбинация производных (любого порядка) является линейным оператором.

Итак, уравнение 7 в операторной записи эквивалентно $Ax = b(t)$. Обозначим за $x_{o.n.}$ множество решений неоднородного уравнения, $x_{o.o.}$ - множество решений однородного уравнения, $x_{o.n} + x_{o.o}$ - множество вида $x + x$

Теорема 6 *(о структуре решения линейного уравнения)*
Решение неоднородного уравнения - сумма общего решения однородного уравнения и частного решения.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ - частное решение однородного уравнения, x_p - частное решение неоднородного уравнения. Применим оператор A к их сумме: $A(\varphi(t) + x_p) = A\varphi(t) + Ax_p = 0 + b(t)$. Значит, сумма этих функций обращает уравнение в тождество, значит, $\varphi(t) + x_p \in x_{o.n.}$.

Докажем, что других решений нет. Допустим, $\psi(t) \in x_{o.n.}$ таков, что его нельзя представить суммы решений однородного и неоднородного. Рассмотрим $\psi - x_p$ - вычтем частное решение неоднородного. Подставляя в уравнение, получаем $A(\psi - x_p) \equiv 0$, значит, их разность - решение однородного уравнения. Но это противоречит предположению. $\square$

Как решать линейные уравнения? Сначала решаем однородное уравнение: $\frac{dx}{dt} = -a(t)x$, $x = C(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$. Решать неоднородное 3мя способами:
1. Угадайка
2. Метод Лагранжа вариации постоянных
3. Формула Коши (см. справочник).

6.2 Метод Лагранжа

Мы знаем, что $x = Ce^{-\int a(t)dt}$ - решение однородного уравнения. Будем её варьировать, чтобы в уравнении было бы тождество:

$$\frac{d}{dt}\left(C(t)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}\right) + a(t)C(t)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} = b(t)$$

Дифференцируя, получаем $C' = b(t)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$, откуда

$$C = e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}\int\limits_{t_0}^{t}\left(b(s)e^{-\int\limits_{s_0}^{s} a(\tau)d\tau}\right)ds + C_0e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

Значит, мы нашли семейство всех решений неоднородного уравнения, произвольно выбирая C_0. По предыдущей теореме, этим все решения исчерпываются.

То, что мы получили - это и есть формула Коши. Она нужна в основном для всяких теоретических свойств.

Пример. $\frac{dx}{dt}+\frac{x}{t} = t^2$. Интервал непрерывности - $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, поэтому вообще-то надо рассматривать два интервала. Решение однородного уравнения: $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$, $x = \frac{C}{t}$. Подумаем, как можно подобрать частное неоднородного уравнения. Поищем в виде $x = at^3$. Тогда при подстановке $3at^2 + t^2 = t^2$, откуда $a = \frac{1}{4}$. Ответ: $x = \frac{t^3}{4} + \frac{C}{t}$.

6.3 Уравнения, приводящееся к линейному

Испортрим уравнение 7, добавив нелинейности:

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = b(t)x^k,\ \ k \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$$

Это - уравнение Бернулли. Если разделим на x^k, получим

$$x^{-k}\frac{dx}{dt} + a(t)x^{1-k} = b(t)$$

Значит, оно сводится к линейному уравнению заменой $z = x^{1-k}$:

$$\frac{1}{1-k}\frac{dz}{dx} + a(t)z = b(t)$$

Рассмотрим уравнение Риккати:

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = b(t)x^2 + c(t),\ c(t) \neq 0, c(t) \in C^0(\alpha, \beta)$$

В общем виде не решается, но можно частное решение угадать. Пусть $x = z + x_p$, где x_p - частное решение. Получим

$$\frac{dz}{dt} + a(t)z + \frac{dx_p}{dt} + a(t)x_p = b(t)x_t^2 + 2zx_pb(t) + c(t)$$

Свели к уравнению Бернулли

$$\frac{dz}{dt} + [a(t) - 2x_pb(t)]z = b(t)z^2$$

Ну зато можно численно и приближенно решать.

Пример (№136). $xy' - 2y = 2x^4,\ x \neq 0$. Разделим на x, свели к линейному (делить на x можно, ибо x не является решением):

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 2x^3$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$\int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{x}$$

откуда $y = x^2$. Подберем частное решение: $y = ax^4$. Подставляя в уравнение, получим $a = 1$, откуда общее решение $y = x^4 + Cx^2$.

Теперь решим методом Лагранжа. Пусть $y = c(x)x^2$. Имеем $c'x^2 + 2xc - 2cx = 2x^3$, откуда $c(x) = x^2 + C_0$. Значит, ответ $y = x^4 + C_0x^2$.

Пример (№149). $y' = \frac{y}{3x-y^2}$. Приведем к линейному (перевернем): $\frac{dx}{dy} = \frac{3x-y^2}{y}$. Общее решение однородного уравнения: $x = Cy^3$. Частное решение поищем в виде $x = ay^2$. Отсюда $a = 1$, общее решение $x = Cy^3 + y^2$.

Пример (№158). $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$. Домножим на y: $2y'y - x = \frac{xy^2}{x^2-1}$. Замена: $z = y^2$. Тогда уравнение линеаризуется:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{xz}{x^2-1} = x$$

Общее решение однородного уравнения $z = C\sqrt{x^2+1}$. Метод внимательного взгляда: $z = x^2-1$ - частное решение. Итак, ответ: $z = x^2-1+C\sqrt{x^2+1}$, $y = \sqrt{x^2-1+C\sqrt{x^2+1}}$.

Пример (№164). $(x^2-1)y'\sin y + 2x\cos y = 2x - 2x^3$. Наша нейросетка заметила, что здесь есть тригонометрическая замена. Именно, пусть $z = \cos x$. Тогда $(x^2-1)(-z') + 2xz = 2x - 2x^3$. Делим на x^2-1 получим однородное.

Пример (№163). $x(e^y - y') = 2$. Введем замену $t = e^y$, получаем $1 - \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{2}{xt}$. Далее $z = \frac{1}{t}$, и наконец получаем линейное уравнение:

$$1 + \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}$$

Пример (№167). Уравнение Риккати: $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$. Частное решение $y = \frac{a}{x}$. Тогда $-a+a+a^2 = 4$, $a = \pm 2$. Пусть $y = \frac{2}{x}$. Общее решение тогда $y = z + \frac{2}{x},\ y' = z' - \frac{2}{x^2}$. Имеем уравнение Бернулли

$$-z^2 = \frac{5z}{x} + z'$$

Сделаем замену $u = \frac{1}{z}$, получим $\int \frac{du}{u}$

7 Теоремы о непрерывной зависимости задачи Коши

от начальных условий и правой части уравнения.

Дано: уравнение с задачей Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$f, \frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны в области D. Утверждается, что решение задачи Коши $x = x(t, t_0, x_0)$, определенное на отрезке $I = [a, b]$. непрерывно по всем аргументам. Из этого следует, что решение при малом изменении начальных условий будет мало отличаться от исходного (разумеется, на конечном интервале).

Обозначим $V_\rho = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I, |x - x(t,t_0,x_0)| \leqslant \rho\}$ - цилиндрическая окрестность решения.

Теорема 7 *(о непрерывной зависимости)*
Пусть $f, \frac{\partial f}{\partial x}$ *непрерывны в области* V_ρ*. Тогда для любого* ε *для любой функции* $g(t,x)$*, такой, что* $g, \frac{\partial g}{\partial x}$ *непрерывны в* V_ρ *найдется* $\delta_(\varepsilon) : |x_0 - y_0| \leqslant \delta, |g(t,x) - f(t,x)| \leqslant S$*. Решение* $y(t)$ *задачи Коши для уравнения* $\frac{dy}{dt} = g(t,y)$ *продолжается на* I *и* $\forall t \in I : |y(t,t_0,y_0) - x(t,t_0,x_0)| < \varepsilon$*.*

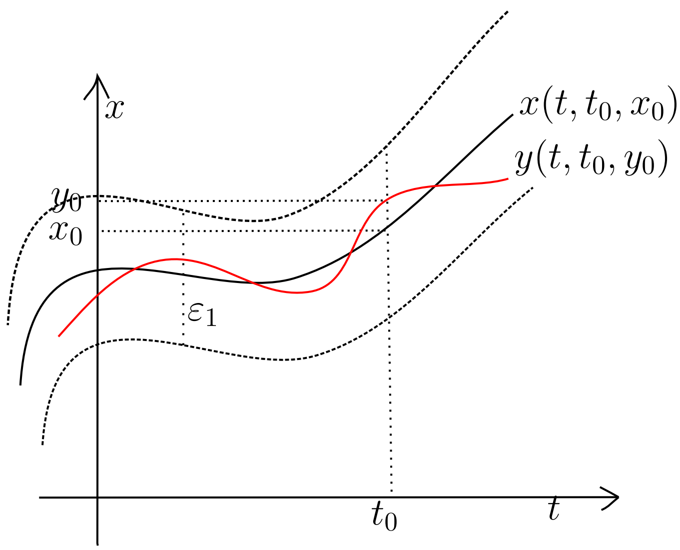

Рис. 5: Теорема о непрерывной зависимости

Иначе говоря, решение, проходящее ближе чем ρ от решения задачи Коши, не выходит из этой ρ-окрестности.

Лемма Гронуолла. Пусть $\varphi(t), \beta(t)$ - непрерывные функции на отрезке $[t_1, t_2]$, причем на отрезке $\beta(t) > 0$ и $\varphi(t) \leqslant \alpha + \int\limits_{t_1}^{t} \beta(\tau)\varphi(\tau)d\tau$. Тогда $\varphi(t) \leqslant \alpha e^{\int\limits_{t_1}^{t} \beta(\tau)d\tau}$.

Доказательство. Положим $\Phi(t) = \alpha + \int\limits_{t_1}^{t} \beta(\tau)\varphi(\tau)d\tau$, где $\varphi(t) \leqslant \Phi(t)$. Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} e^{-\int\limits_{t_1}^{t} \beta d\tau} - e^{-\int\limits_{t_1}^{t} \beta d\tau} \beta(t)\Phi(t) \leqslant 0$$

Все это выражение на самом деле является производной:

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi e^{-\int\limits_{t_1}^{t} \beta d\tau}\right) \leqslant 0$$

Так как производная этой функции отрицательна, то

$$\varphi \leqslant \Phi \leqslant \alpha e^{\int\limits_{t_1}^{t} \beta d\tau}$$

Мы установили равносильность неравенства из условия и неравенства $\frac{d\varphi}{dt} \leqslant \beta(t)\varphi(t)$. $\square$

Теперь перейдем к доказательству основной теоремы. Поскольку f непрерывна, то она ограниченна на компакте, иными словами

$$\forall (t, x) \in V_\rho\ \exists M \geqslant 0, L \geqslant 0 : |f(t,x)| \leqslant M,\ \left|\frac{df}{dx}\right| \leqslant L$$

Значит, эта функция липшицева:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L \cdot |x-y|,\ |f(t,x) - g(t,y)| \leqslant \delta$$

Тогда $|f(t,x) - f(t,y) + f(t,y) - g(t,y)| \leqslant | - (f(t,x) + f(t,y))| + |f(t,y) - g(t,y)| \leqslant L \cdot |x-y| + \delta$.

Оценим разность $|y(t,t_0,y_0) - x(t,t_0,x_0)|$. По лемме об интегральной форме уравнения, это то же самое, что и

$$\left| y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau, y(\tau)) d\tau - x_0 - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant |y_0 - x_0| + \left| \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau, y(\tau)) d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leqslant \delta + \left| \int\limits_{t_0}^{t} (L(|y-x| + \delta)) d\tau \right| \leqslant$$

Пусть решение $y(t,t_0,x_0)$ определено на отрезке $I_1 = [a_1, b_1]$. Продолжим неравенства:

$$\leqslant \delta(1 + (b_1 - a_1)) + \left| \int\limits_{t_0}^{t} L|y-x| d\tau \right|$$

Обозначим $\alpha = \delta(1 + (b_1 - a_1))$, $\varphi(t) = |y(t,t_0,y_0) - x(t,t_0,x_0)|$. Применяя лемму Гроноулла, получаем $\varphi(t) \leqslant \alpha e^{L|b_1 - a_1|} < \varepsilon_1$ (при $\alpha = \frac{\varepsilon_1}{2e^{L|b_1-a_1|}}$). Таким образом, разность между двумя решениями меньше чем ε_1 на отрезке $[a_1, b_1]$, иными словами $y(t,t_0,y_0)$ лежит в V_{ε_1}-трубочке решения $x(t,t_0,x_0)$.

По теореме о продолжении решения, $y(t,t_0,y_0)$ продолжается до выхода на границу $\partial V_{\varepsilon_1}$. Через верхнюю и нижнюю границу часть границы мы не выходим, так как $|y-x|<\varepsilon_1$, значит, $y(t,t_0,y_0)$ продолжается на I. Аналогично, если $t<t_0$. $\square$

Следствие. Пусть числовая последовательность $x_0^i \to x_0$ сходится при $i\to\infty$. Тогда $x(t,t_0,x_0^i)\to x(x,t_0,x_0)$. Доказать самостоятельно. Упражнение: доказать теорему о непрерывной зависимости одновременно от t_0 и x_0. Также доказать следствие о равномерной сходимости.

7.1 Как решать Рикатти через Пикара (с оценкой погрешности)

Рассмотрим уравнение $\frac{dy}{dx}=x-y^2(x),\ y(0)=0$. Найдем формулу для решения на отрезке $x\in[0,0.5]$. Допустим, решение существует. Запишем последовательность Пикара, определенную рекуррентной формулой $y_{k+1}(x)=\int\limits_0^x(s-y_k^2(s)ds)$. Посчитаем первые члены: $y_1=0+\int\limits_o^x sds=\frac{x^2}{2}$, $y_2=\int\limits_0^x\left(s-\frac{s^4}{4}\right)ds=\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{20}$, $y_3=\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}-\frac{x^{11}}{4400}$. Построим ряд из последовательности:

$$y=y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+(y_3-y_2)...+a_k$$

Остаток a_k оценивается по формуле $|a_k|\leqslant\frac{M}{L}\cdot\frac{L^k|t-t_0|^k}{k!}$.

Рассмотрим шар $B_r=\{|x|\leqslant\frac{1}{2},y\in[0,\frac{1}{2}]\}$. Тогда постоянные Липшица для функции и её производной равны $M=\max\limits_{B_r}|f(t,x)|,\ L=\max\limits_{B_r}|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)|$.

Задача. Что нам мешает провести через одну точку несколько решений уравнения $y'=x-y^2$? Тот факт, что тангенс угла наклона задается уравнением однозначно, поэтому трансверсальное пересечение невозможно. А если касательные параллельны? Если такая ситуация имеет место, тогда по теореме о существовании и единственности в этой точке правая часть либо её производная не непрерывны, но это не так. А что, если $y''=x-y^2$ - уравнение второго порядка? Тогда все-таки ничего неельзя сказать (там есть свои теоремы).

8 Уравнение, не разрешенное относительно производной

8.1 Уравнение первого порядка

Общий вид -

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \tag{8}$$

Уравнение нельзя разрешить относительно производной, если $\frac{dx}{dt}$ нельзя выразить единственным образом.

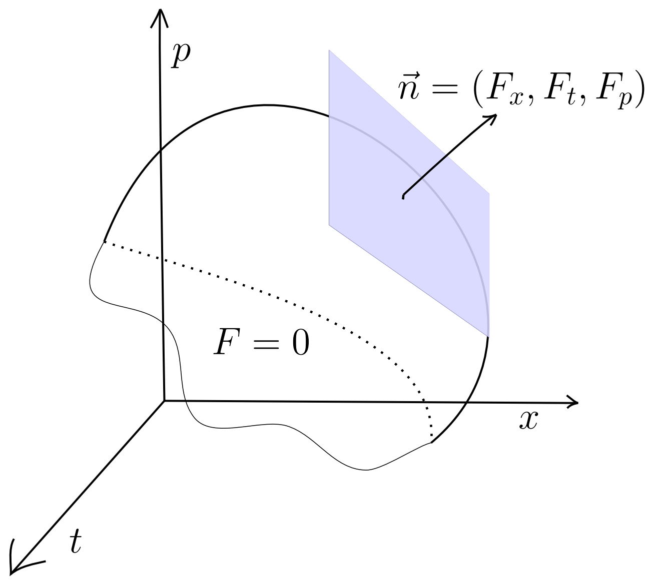

Рис. 6: Уравнение задает поверхность

Допустим, функция $F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$ задает какую-то поверхность в $\mathbb{R}^3$. Вектор нормали к этой поверхности: $\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial p}\right)$ (где введено обзначение $p = \frac{dx}{dt}$). Уравнение нельзя разрешить, если этот вектор параллелен плоскости (x, t). Но зато мы можем выразить, например, x от p, t.

Пусть $F, \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial p}$ непрерывны в области $D \subset Otxp$, и в каждой точке хотя бы одна из производных не равна нулю. Тогда по теореме о неявной функции уравнение 8 можно разрешить относительно одной из переменных.

Пример. $x'^2 - x^2 = 0$. Два семейства решений: $x = x_0 e^{\pm t}$. Как видно, в каждой точке пересекаются 2 решения. Для таких уравнений ситуация с пересечением решений типична, но их количество и взаимный наклон определены в зависимости от вида уравнения.

Определение 22 *Особая точка - точка,через которую проходит несколько решений.*

Теорема 8 *Пусть F непрерывна по всем аргументам, имеющая непрерывные частные производные по x, t и $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$. Тогда существует одна или несколько функций $f(t, x)$ такие, что $F(t, x, f(t, x)) \equiv 0$, и решение задачи Коши $x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x'_0$ существует и единственно.*

Доказательство. Допустим, решение существует. Рассмотрим полную производную по времени: $\frac{dF(t,x,x')}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} \equiv 0$ Тогда $\frac{dx}{dt} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x}}{}$ списываем из фихтенгольца Эти условия должны выполняться в окрестности какой-то точки $F(t_0, x_0, x'_0) = 0$ □

Теорема 9 *Пусть F непрерывна по всем аргументам в области D, имеющая непрерывные частные производные по x, t и $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$. Тогда для любой точки t_0, x_0, x'_0 существует и единственно решение задачи Коши.*

Доказательство. □

Определение 23 *Регулярная (обыкновенная) точка уравнения $F(t, x, x')$ - точка (t, x), в которой задача Коши (для уравнения, разрешенного или не разрешенного относительно производной) имеет единственное решение. Если решений несколько или ноль, то точка особая (сингулярная).*

Теорема 10 *Пусть $f(t, x)$ - такая функция, что $F(t, x, f(t, x)) \equiv 0$. Тогда любое решение $x(t)$ уравнения 8, удовлетворяющее условию $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, является решением уравнения $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$*

Доказательство. Упражнение. □

8.2 Практика и методы решения

Есть два метода решения уравнения 8:
1. Если $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, тогда разрешить относительно p и решать несколько уравнений типа $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$.
2. Метод введения параметра. Если $\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$, то 8 эквивалентно уравнению $x = \varphi(t, p)$, где φ - такая функция, что $F(t, \varphi, p) \equiv 0$. Будем считать p параметром и искать решение уравнения 8 в виде $x = x(p), t = t(p)$. Найдя $t(p)$, тогда $x = \varphi(t(p), p)$. Далее, имеем $dx = \varphi_t dt + \varphi + p dp$, $p\,dt = \varphi_t + \varphi_p dp$. Finally,

$$\frac{dt}{dp} = \left(\frac{\varphi_p}{p - \varphi_t}\right)$$

Пример на метод введения параметра. $x = \dot{x}t - \dot{x}^2$. Введем параметр $p = \dot{x}$ и ищем решение в виде $\begin{cases} x = x(p) \\ t = t(p) \end{cases}$. Имеем уравнение $x = pt - p^2$, которое можно записать в виде $dx = dp\,t + p\,dt - 2p\,dp$, то есть $dp(t - 2p) = 0$. Оно разбивается в два уравнения: $dp = 0$ (то есть $p = const$, $x = Ct - C^2$) и $t = 2p$ (то есть $x = \left(\frac{t}{2}\right)^2$).

Это - частный случай уравнения Клеро:

$$x = \frac{dx}{dt}t + \psi\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Сформулируем теорему:

Теорема 11 *Общее решение уравнения Клеро - семейство прямых*

$$x = Ct + \psi(C)$$

и (возможно, вырожденная) кривая - огибающая для семейства кривых:

$$x = \eta(t)$$

Доказательство. Пусть $p = \dot{x}$, $dx = p\,dt$. Тогда $dp(t + \psi_p'(p)) = 0$. Значит, одно из решений - семейство прямых $x = Ct + \psi(C)$. Другое решение получаем из условия $t = -\psi'(p)$. Подставляя её в исходное уравнение, получаем $x = -p\psi'(p) + \psi(p) = \eta(p)$.

Пусть $p = p_0$ ψ ???????????????? Юра скоро допишет

Убедимся в том, что касательные к кривой $x = \eta(t)$ и к прямой $x = C_* t + \psi(C_*)$ в точке (t_0, x_0) совпадают, то есть кривая - действительно огибающая. $\frac{d\eta}{dt}\Big|_{t_0} = C_*$.

$\psi'(p_0)(C_* - p_0) = \psi(C_*) - \psi(p_0)$. Это - уравнение Лагранжа. Значит, уравнение Клеро - частный случай уравнения Лагранжа:

$$x = \alpha(\dot{x})t + \psi(\dot{x})$$

□

Пример (№292). $y = x(y')^2 - 3(y')^3$. Вводим параметр $y' = p$, $y = xp^2 - 2p^3$, $dy = dx\, p^2 + x \cdot 2p\, dp - 6p^2\, dp$. С другой стороны, $dy = p\, dx$, поэтому имеем

$$p\, dx = dx\, p^2 + x \cdot 2p\, dp - 6p^2\, dp$$

Группируя, получаем уравнение $\frac{dx}{dp} = \frac{2xp - 6p^2}{p - p^2}$. Значит, введением параметра уравнение Лагранжа приводится к линейному относительно x. Доказать самостоятельно. Итак,

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \frac{2}{1-p} - \frac{6p}{1-p}$$

Общее решение однородного уравнения $\frac{dx}{dt} = \frac{2x}{1-p}$ с разделяющимися переменными - $x_{oo} = \frac{C}{(1-p)^2}$. Частное решение неоднородного уравнения сложно угадать, используем метод Лагранжа: $\frac{C'(p)(1-p)^p + C(p)2(1-p)}{(1-p)^4} = \frac{2C - 6p}{1-p}$.

Итак, ответ:

$$\begin{cases} y = xp^2 - 2p^3 \\ x = \frac{-3p^3\tilde{C}}{(1-p)^2} \end{cases}$$

Пример (№268). $x = (y')^3 + y'$. Введем параметр $p = y'$, $\frac{dy}{dx} = p$, $dx = \frac{dy}{p}$. Имеем $x = p^3 + p$, $dx = 3p^2\, dp + dp$. Заметим, что это можно делать при условии $p \neq 0$. Значит, $y = \frac{3p^4}{4} + \frac{p^2}{2} + C$ - ответ.

Теперь - про особые решения. Найдем такие начальные условия, при которых задача Коши имеет единственное решение. То есть

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ x_0 = y_0'^3 + y_0' \end{cases}$$

Чтобы получить единственность решения, необходимо проверить условия теоремы Коши-Пикара.
1. Покажем, что уравнение $F = x - y'^3 - y' = 0$ разрешимо относительно производной, при этом функция $f(x, y)$ будет гладкой. Фиксируя точку (x_0, y_0, y'_0) и в ней все частные производные и сама F непрерывна и $F'_y \neq 0$, то существует гладкая функция $f(x, y)$: $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$ по теореме о неявной функции.
2. Покажем, что функция $y' = f(x, y)$ Кароч в дз отлетает. Че за троллинг? решени

Пример (№249). $(y')^3 + y^2 = y \cdot y'(y' + 1)$. Группируем и выносим общий множитель два раза, получаем $((y')^2 - y)(y' - y) = 0$. Получаем три уравнения: $\begin{cases} y' = y; \\ y' = \sqrt{y}; \\ y' = -\sqrt{y} \end{cases}$. Решения: $\begin{cases} y = y_0 e^t; \\ y = \left(-\frac{x}{2} + \frac{c}{2}\right)^2 \\ y = \begin{cases} \left(\frac{x+x_0}{2}\right)^2, \ x < x_0 \\ 0, \ x \geqslant x_0 \end{cases} \end{cases}$ Найдем особые точки: $y = 0$, ибо там бесконечно много решений. Вообще говоря, $y = \begin{cases} 0, \ x \leqslant x_0 \\ \left(\frac{x-x_0}{2}\right)^2, x > x_0 \end{cases}$ Проверим условия теоремы для оставшихся точек (тем доказав, что других особых точек нет). Гладкость функции очевидна, нули производной: $3(y')^2 - y \cdot 2y' - y = 0$

Определение 24 *Особое решение - решение состоящее из особых точек*

Список литературы

[1] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения - М.: МЦНМО, 2018. - 344 с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика в 10 т. Т.I: Механика - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 224 с.