# Дифференциальные уравнения

## Содержание

# 1 Базовые определения

**Определение 1**

$$F(t,x,\frac{dx}{dt},...,\frac{d^nx}{dt^n})=0 \tag{1}$$

*- обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) порядка n.*

Здесь $t$ - независмая переменная, $x(t)$ - искомая функция.

**Определение 2** *Решение ОДУ - функция $x(t)\in C^n$ (дифференцируемая n раз), обращающая уравнение в тождество.*

**Примеры.** $\frac{dx}{dt}=0$ - решение есть константа.
$\frac{dx}{dt}=5$. Решение $x=5t+c$. (Так как решение зависит от параметра-константы, говорят об однопараметрическом семействе решений. Если задать $x(0)$, то решение будет единственным, зависящим от начального условия).
$\frac{d^2x}{dt^2}=w$ - уравнение равноускоренного движения. Решение: $x=\frac{wt^2}{2}+c_1t+c_2$, где $c_1,c_2$ - начальная скорость и начальная координата соответственно.
**Пример.** Для уравнения $\frac{dx}{dt}=f(t)$, если функция в правой части непрерывна на отрезке $(a,b)$, тогда общее решение имеет вид $x=\int f(t)dt$. Более точно, $t_0\in(a,b)$, тогда $x(t)=\int\limits_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau+x(0)$.

**Определение 3** *Общее решение ОДУ - множество всех решений.*

Естественно возникает вопрос, существует ли решение ДУ и единственно ли оно при заданных начальных условиях? Выражается ли оно через элементарные функции? Какова его область определения и значения?

## 1.1 ДУ первого порядка, разрешенные относительно производной

**Определение 4** *ДУ, разрешенные относительно производных - уравнения вида*

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{2}$$

*то есть уравнения, производная которых задана функцией в явном виде.*

**Пример.** $(\frac{dx}{dt})^2-x^2=0$ - не разрешенное относительно производных, но оно раскладывается в два таких уравнения.
Минимальные требования к функции $f$ - определенность в области
Геометрический смысл уравнения : рис1.
Говорят, что уравнение 1.1 определяет поле направлений в *расширенном* фазовом пространстве (в отличие от *векторного поля* в фазовом пространстве): каждой точке сопоставляется направление, определяемое функцией $f(x,t)=\operatorname{tg}\alpha$ (поскольку длина вектора не определена, говорят имено о поле направлений). Кое-кто говорит, что ДУ и поле направлений это одно и то же, поскольку ДУ биективно соответствуют полям направлений).
**Пример.** Пусть $x(t)$ - количество зараженных вирусом в момент времени $t$. Допустим, что скорость заражения пропорциональная количеству уже зараженных людей. Запишем это в виде ДУ:

$$\frac{dx}{dt}=kx,\ k>0$$

Мы получили простейшую модель роста населения Мальтуса. Очевидно, решение $x(t)=x_0e^{kt}$. Проблема с такой моделью состоит в том, что количество людей дискретно, а найденная нами функция непрерывна. Корректировка состоит в том, что $x(t)$ понимается в смысле *плотности населения.*
**Пример.** Рассмотрим более интересное уравнение (уравнение Бернулли, оно же логистическое уравнение): $\frac{dx}{dt}=k(x)x$. Допустим, что $k(x)$ - линейная убывающая функция. Тогда $\frac{dx}{dt}=(k_0-\frac{k_0x}{h})x$. (Здесь $k_0=k(0),\ h=k^{-1}(0)$). Получаем нелинейное уравнение, в котором переменные не разделяются. Теперь можно рассмотреть подробнее поле направлений. Пусть $\Gamma_0$ - множество точек $(t,x)$, в которых $\frac{dx}{dt}=0$, то есть векторы поля параллельны оси $Ot$. Решим уравнение $0=x(k_0-\frac{k_0}{h}x)$.
Получаем следующее поле: рис 2. Кривые, заключенные в середине, называются логистическими кривыми. "Крутизна"логистической кривой зависит от параметра $k_0$. Данное уравнение было рассмотрено Ферхюльстом как уточнение модели Мальтуса.

## 1.2 Метод изоклин

Метод изоклин заключается в рисовании и исследовании графиков решений уравнения 1.1.

**Определение 5** *Изоклина наклона $\alpha$ - геометрическое место точек $\Gamma_\alpha$, в которых касательная к решению уравнения 1.1 имеет наклон, равный $\alpha$.*

То есть, $\Gamma_\alpha: \operatorname{tg}\alpha = f(t,x)$
Опишем алгоритм метода изоклин на примере. Пусть задано уравнение $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$.

1. Найдем $\Gamma_0 : 0 = \frac{x}{t}$ (то есть $x = 0$ $(t \neq 0)$) Найдем $\Gamma_{90} : \frac{t}{x} = 0$, то есть $t = 0$ $(x \neq 0)$ Получили, что эти гаммы есть координатные оси.

2. Определим области с постоянным знаком $\frac{dx}{dt}$ (среди тех, на которые плоскость разбивается изоклинами)

3. Исследуем симметрии уравнений, например относительно $x \to -x,\ t \to -t$ (или одновременного применения). Эти симметрии эквивалентны отражению относительно осей.

4. Нахождение точек перегиба и областей выпуклости, вогнутости интегральных кривых.

5. Приближенное построение интегральных кривых (то есть решений уравнения).

РИС 3!!!! **Замечание.** Не все интегральные кривые являются решениями. Так, в рассмотренном примере ось $Ox$ - интегральная кривая, но она очевидно не является решением (так как не является функцией).
Метод изоклин является качественным, и он не дает более подробной информации о геометрии кривых. В данном конкретном примере интегральные кривые - в точности прямые, проходящие через точку $(0,0)$, поскольку мы заметили, что в каждой точке направление касательной к интегральной кривой совпадает с прямой, соединяющей эту точку и начало координат.
**Пример.** Немного изменим уравнение: $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$. Главные изоклины точно такие же, как у предыдущего, а вот знаки в координатных четвертях меняются. Поле направлений выглядит совершенно по-другому, в нем гиперболы. РИС4.
**Пример.** Получим уравнение окружности с помощью ОДУ, исходя из следующего свойства: касательная перпендикулярна радиусу. То есть мы имеем некоторое поле направлений, исходя из которого можно восстановить ДУ: РИС5 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{y_0}{x_0}$ Поскольку $\alpha = \beta + 90$, имеем $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta+90) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$. В итоге уравнение имеет вид $\frac{dy}{dx}\big|_{x=x_0} = -\frac{x_0}{y_0}$ или, если сотрем нолики (поскольку свойство универсально)

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y}$$

Заметим, что это же уравнение можно получить дифференцированием обычного уравнения окружности. Решая его, в качестве параметра вылезет что-то, отвечающее за радиус.
Посмотрим на изоклины этого уравнения: РИС6. Ещё по приколу можно посчитать изоклины на $45^0$.

# 2 Геометрические задачи, из которых возникают ДУ

**Пример (№17).** Составим уравнение по решению: $y = e^{cx}$, $y' = ce^{cx}$. Имеем $c = \frac{\ln y}{x}$, значит, $y' = \frac{\ln y}{x} e^{\ln y}$.
**Пример (№25).** Дано семейство функций $y = ax^2 + be^x$, $y' = 2ax + be^x$, $y'' = 2a + be^x$. Найдем ДУ, решениями которого они являются. Так как у нас два параметра: $a$ и $b$, то и уранвение будет второго порядка. Имеем

$$y - y'' = 2a(x-1) \implies a = \frac{y'-y''}{x-1}$$

$$y'' = \frac{2(y'-y'')}{2(x-1)} + be^x \implies \frac{1}{e^x}(y'' - \frac{y'-y''}{x-1}) = b$$

$$y = \frac{y'-y''}{2(x-1)}x^2 + (y'' - \frac{y'-y''}{x-1})$$

Возникает вопрос: а единственно это решение? Здесь мы пользуемся теоремой о неявной функции.
**Пример (№30).** Составим уравнение для окружностей, центры которых лежат на $y = 2x$. Уравнение окружностей $(x - x_0)^2 + (y - 2x_0)^2 = 1$. Ответом должно быть однопараметрическое семейство решений, которые соответствуют различным положениям центра на прямой. Дифференцируем:

$$2(x - x_0) + 2(y - 2x_0)y' = 0 \implies x_0 = \frac{x + yy'}{1 + 2y'}$$

Подставим выражение для параметра обратно в уранвение:

$$(x - \frac{x + yy'}{1 + 2y'})^2 + (y - 2\frac{x + yy'}{1 + 2y'})^2 = 1$$

**Пример (№71).** Найдем кривые, касательные которых заметают одинаковые площади под своим графиком. Пусть $f(x) = y$ - искомая кривая. Её производная не может быть нулевой, иначе она не образует треугольник с осью абсцисс.
Фикисруем точку $x_0$. Получаем условие: $\frac{y^2(x_0)}{2y'(x_0)} = a^2 \implies y' = \frac{y^2}{2a^2}$. Если производная отрицательная, то в этой формуле должен вылезти минус (и формально мы имеем два случая, поэтому

$$y' = \pm\frac{y^2}{2a^2}$$

Проинтегрируем (переменные разделяются): $\frac{1}{y} = \pm\frac{1}{2a^2}x + C$ Итак,

$$y = \frac{2a^2}{2a^2C \pm x}$$

**Пример (№73).** Ещё одна геометрическая задачка. Беглый анализ: производная не равна нулю. Уравнение касательной: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Точка пересечения с осью абсцисс: $x_k = \frac{-y_0}{y'(x_0)} + x_0$. Уравнение нормали: $y = -\frac{1}{y'}(x - x_0) + y_0$. Точка пересечения нормали с осью абсцисс: $x_n = y_0y' + x_0$. Диффур снова распадается на два случая... $|KN| = |x_k - x_n| = |\frac{y}{y'}$. Рашаем дома кароч.

## 2.1 Мини-рассказ про число e

Архимед в общем-то знал, что при умножении показатели степеней складываются. Это легко получить из анализа обычной геометрической пргрессии. В XV веке начали торговать, используя сложные проценты. Возник вопрос, можно ли полутать бесконечное количество денег при уменьшении периода факторизации. Какой-то челик (Саймон вставить фамилию) решил написать таблицу сложных процентов, чтобы полутать денег с её использования, и оказалось, что ответ на предыдущий вопрос отрицательный. Иоста Бюрге (помощник Кеплера) посмотрел на таблицы и полутал с них инфу о том, что с их помощью можно перемножать огромные числа. Джон Непер составил более юзабельные таблицы, ввел понятие логарифма, и кароч дальше вводим предел для натуральных чисел, переходим к непрерывной хрени... Теперь фокус: $e^k = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{nk} = (1+\frac{k}{m})^m = \sum\limits_{i=0}^{m} C_m^i(\frac{k}{m})^i = \sum\limits_{i=0}^{m} \frac{k^i}{i!}$. Эту хрень придумал Бернулли, и она сходится к $e$ быстрее обычного предела. Можно это положить за определение $e^x$, и мгновенно распространить на любые действительные показатели степеней.