Дифференциальные уравнения

Гуревич

Содержание

1 Базовые определения

Определение 1

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^n x}{dt^n}) = 0 \tag{1}$$

- обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) порядка n.

Здесь t - независмая переменная, $x(t)$ - искомая функция.

Определение 2 *Решение ОДУ - функция $x(t) \in C^n$ (дифференцируемая n раз), обращающая уравнение в тождество.*

Примеры. $\frac{dx}{dt} = 0$ - решение есть константа.
$\frac{dx}{dt} = 5$. Решение $x = 5t + c$. (Так как решение зависит от параметра-константы, говорят об однопараметрическом семействе решений. Если задать $x(0)$, то решение будет единственным, зависящим от начального условия).
$\frac{d^2x}{dt^2} = w$ - уравнение равноускоренного движения. Решение: $x = \frac{wt^2}{2} + c_1 t + c_2$, где c_1, c_2 - начальная скорость и начальная координата соответственно.
Пример. Для уравнения $\frac{dx}{dt} = f(t)$, если функция в правой части непрерывна на отрезке (a, b), тогда общее решение имеет вид $x = \int f(t)dt$. Более точно, $t_0 \in (a, b)$, тогда $x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + x(0)$.

Определение 3 *Общее решение ОДУ - множество всех решений.*

Естественно возникает вопрос, существует ли решение ДУ и единственно ли оно при заданных начальных условиях? Выражается ли оно через элементарные функции? Какова его область определения и значения?

1.1 ДУ первого порядка, разрешенные относительно производной

Определение 4 *ДУ, разрешенные относительно производных - уравнения вида*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2}$$

то есть уравнения, производная которых задана функцией в явном виде.

Пример. $(\frac{dx}{dt})^2 - x^2 = 0$ - не разрешенное относительно производных, но оно раскладывается в два таких уравнения.
Минимальные требования к функции f - определенность в области
Геометрический смысл уравнения : рис1.
Говорят, что уравнение 1.1 определяет поле направлений в *расширенном* фазовом пространстве (в отличие от *векторного поля* в фазовом пространстве): каждой точке сопоставляется направление, определяемое функцией $f(x,t) = \operatorname{tg}\alpha$ (поскольку длина вектора не определена, говорят имено о поле направлений). Кое-кто говорит, что ДУ и поле направлений это одно и то же, поскольку ДУ биективно соответствуют полям направлений).
Пример. Пусть $x(t)$ - количество зараженных вирусом в момент времени t. Допустим, что скорость заражения пропорциональная количеству уже зараженных людей. Запишем это в виде ДУ:

$$\frac{dx}{dt} = kx,\ k > 0$$

Мы получили простейшую модель роста населения Мальтуса. Очевидно, решение $x(t) = x_0e^{kt}$. Проблема с такой моделью состоит в том, что количество людей дискретно, а найденная нами функция непрерывна. Корректировка состоит в том, что $x(t)$ понимается в смысле *плотности населения.*
Пример. Рассмотрим более интересное уравнение (уравнение Бернулли, оно же логистическое уравнение): $\frac{dx}{dt} = k(x)x$. Допустим, что $k(x)$ - линейная убывающая функция. Тогда $\frac{dx}{dt} = (k_0 - \frac{k_0x}{h})x$. (Здесь $k_0 = k(0),\ h = k^{-1}(0)$). Получаем нелинейное уравнение, в котором переменные не разделяются. Теперь можно рассмотреть подробнее поле направлений. Пусть Γ_0 - множество точек (t,x), в которых $\frac{dx}{dt} = 0$, то есть векторы поля параллельны оси Ot. Решим уравнение $0 = x(k_0 - \frac{k_0}{h}x)$.
Получаем следующее поле: рис 2. Кривые, заключенные в середине, называются логистическими кривыми. "Крутизна"логистической кривой зависит от параметра k_0. Данное уравнение было рассмотрено Ферхюльстом как уточнение модели Мальтуса.

1.2 Метод изоклин

Метод изоклин заключается в рисовании и исследовании графиков решений уравнения 1.1.

Определение 5 *Изоклина наклона α - геометрическое место точек Γ_α,* *в которых касательная к решению уравнения 1.1 имеет наклон, равный α.*

То есть, $\Gamma_\alpha\colon\ \operatorname{tg}\alpha = f(t,x)$
Опишем алгоритм метода изоклин на примере. Пусть задано уравнение $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$.

1. Найдем $\Gamma_0 : 0 = \frac{x}{t}$ (то есть $x = 0$ $(t \neq 0)$) Найдем $\Gamma_{90} : \frac{t}{x} = 0$, то есть $t = 0$ $(x \neq 0)$ Получили, что эти гаммы есть координатные оси.

2. Определим области с постоянным знаком $\frac{dx}{dt}$ (среди тех, на которые плоскость разбивается изоклинами)

3. Исследуем симметрии уравнений, например относительно $x \to -x$, $t \to -t$ (или одновременного применения). Эти симметрии эквивалентны отражению относительно осей.

4. Нахождение точек перегиба и областей выпуклости, вогнутости интегральных кривых.

5. Приближенное построение интегральных кривых (то есть решений уравнения).

РИС 3!!!! **Замечание.** Не все интегральные кривые являются решениями. Так, в рассмотренном примере ось Ox - интегральная кривая, но она очевидно не является решением (так как не является функцией).
Метод изоклин является качественным, и он не дает более подробной информации о геометрии кривых. В данном конкретном примере интегральные кривые - в точности прямые, проходящие через точку $(0,0)$, поскольку мы заметили, что в каждой точке направление касательной к интегральной кривой совпадает с прямой, соединяющей эту точку и начало координат.
Пример. Немного изменим уравнение: $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$. Главные изоклины точно такие же, как у предыдущего, а вот знаки в координатных четвертях меняются. Поле направлений выглядит совершенно по-другому, в нем гиперболы. РИС4.
Пример. Получим уравнение окружности с помощью ОДУ, исходя из следующего свойства: касательная перпендикулярна радиусу. То есть мы имеем некоторое поле направлений, исходя из которого можно восстановить ДУ: РИС5 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{y_0}{x_0}$ Поскольку $\alpha = \beta + 90$, имеем $\operatorname{tg}\alpha =$

$\operatorname{tg}(\beta+90) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$. В итоге уравнение имеет вид $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = -\frac{x_0}{y_0}$ или, если сотрем нолики (поскольку свойство универсально)

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y}$$

Заметим, что это же уравнение можно получить дифференцированием обычного уравнения окружности. Решая его, в качестве параметра вылезет что-то, отвечающее за радиус.
Посмотрим на изоклины этого уравнения: РИС6. Ещё по приколу можно посчитать изоклины на 45^0.

2 Геометрические задачи, из которых возникают ДУ

Пример (№17). Составим уравнение по решению: $y = e^{cx}$, $y' = ce^{cx}$. Имеем $c = \frac{\ln y}{x}$, значит, $y' = \frac{\ln y}{x} e^{\ln y}$.
Пример (№25). Дано семейство функций $y = ax^2 + be^x$, $y' = 2ax + be^x$, $y'' = 2a + be^x$. Найдем ДУ, решениями которого они являются. Так как у нас два параметра: a и b, то и уранвение будет второго порядка. Имеем

$$y - y'' = 2a(x-1) \implies a = \frac{y'-y''}{x-1}$$

$$y'' = \frac{2(y'-y'')}{2(x-1)} + be^x \implies \frac{1}{e^x}(y'' - \frac{y'-y''}{x-1}) = b$$

$$y = \frac{y'-y''}{2(x-1)}x^2 + (y'' - \frac{y'-y''}{x-1})$$

Возникает вопрос: а единственно это решение? Здесь мы пользуемся теоремой о неявной функции.
Пример (№30). Составим уравнение для окружностей, центры которых лежат на $y = 2x$. Уравнение окружностей $(x-x_0)^2 + (y-2x_0)^2 = 1$. Ответом должно быть однопараметрическое семейство решений, которые соответствуют различным положениям центра на прямой. Дифференцируем:

$$2(x-x_0) + 2(y-2x_0)y' = 0 \implies x_0 = \frac{x+yy'}{1+2y'}$$

Подставим выражение для параметра обратно в уравнение:

$$(x - \frac{x + yy'}{1 + 2y'})^2 + (y - 2\frac{x + yy'}{1 + 2y'})^2 = 1$$

Пример (№71). Найдем кривые, касательные которых заметают одинаковые площади под своим графиком. Пусть $f(x) = y$ - искомая кривая. Её производная не может быть нулевой, иначе она не образует треугольник с осью абсцисс.
Фикисруем точку x_0. Получаем условие: $\frac{y^2(x_0)}{2y'(x_0)} = a^2 \implies y' = \frac{y^2}{2a^2}$. Если производная отрицательная, то в этой формуле должен вылезти минус (и формально мы имеем два случая, поэтому

$$y' = \pm\frac{y^2}{2a^2}$$

Проинтегрируем (переменные разделяются): $\frac{1}{y} = \pm\frac{1}{2a^2}x + C$ Итак,

$$y = \frac{2a^2}{2a^2C \pm x}$$

Пример (№73). Ещё одна геометрическая задачка. Беглый анализ: производная не равна нулю. Уравнение касательной: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Точка пересечения с осью абсцисс: $x_k = \frac{-y_0}{y'(x_0)} + x_0$. Уравнение нормали: $y = -\frac{1}{y'}(x - x_0) + y_0$. Точка пересечения нормали с осью абсцисс: $x_n = y_0y' + x_0$. Диффур снова распадается на два случая... $|KN| = |x_k - x_n| = |\frac{y}{y'}$. Рашаем дома кароч.

2.1 Мини-рассказ про число e

Архимед в общем-то знал, что при умножении показатели степеней складываются. Это легко получить из анализа обычной геометрической пргрессии. В XV веке начали торговать, используя сложные проценты. Возник вопрос, можно ли полутать бесконечное количество денег при уменьшении периода факторизации. Какой-то челик (Саймон вставить фамилию) решил написать таблицу сложных процентов, чтобы полутать денег с её использования, и оказалось, что ответ на предыдущий вопрос отрицательный. Иоста Бюрге (помощник Кеплера) посмотрел на таблицы и полутал с них инфу о том, что с их помощью можно перемножать огромные числа. Джон Непер составил более юзабельные таблицы, ввел понятие логарифма, и кароч дальше вводим предел для натуральных чисел, переходим к непрерывной хрени... Теперь фокус: $e^k = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{nk} = (1+\frac{k}{m})^m = \sum_{i=0}^{m} C_m^i(\frac{k}{m})^i = \sum_{i=0}^{m}\frac{k^i}{i!}$. Эту хрень придумал Бернулли, и она сходится к e быстрее обычного предела. Можно это положить за определение e^x, и мгновенно распространить на любые действительные показатели степеней.

3 Элементарные методы интегрирования ДУ

3.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 6 *Уравнение с разделяющими переменными - уравнение вида*

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t) \tag{3}$$

где f, g непрерывны на $x \in (a, b),\ t \in (\alpha, \beta)$

Как решать такие уравнения? Алгебраическая нтуиция подсказывает, что надо перенести дифференциалы к своим функциям и проинтегрировать. Но это ещё надо обосновать. Сделаем следующее:

1. Найти все $x_* : f(x_*) = 0$. Тогда $x = x_*$ - решение-константа.

2. Пусть x_*^i, x_*^j - такие, что $f(x_*^i) = f(x_*^j) = 0$ и $\forall x \in (x_*^i, x_*^j) : f(x) \neq 0$. Тогда уравнение 3 эквивалентно уравнению

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$$

   Эту штуку можно проинтегрировать с обеих сторон. Результат непрерывен и не обращается в ноль. Значит, по теореме о неявной функции найдется решение. $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{x}$(решение в области $(\alpha, \beta) \times (x_*^i, x_*^j)$).

3. Выписать решение на каждом интервале (x_*^i, x_*^j)

Других решений не существует. Почему? Допустим, существует другое решение. Оно не может быть константой, так как все константы были получены в п.1. Если она
Пример. Решим уравнение $\frac{dx}{dt} = 0$. Решение-константа: $x = 0$. Теперь рассмотрим два интервала: $x < 0$ и $x > 0$. Если $x < 0$, имеем уравнение

$$\frac{1}{x}\frac{dxdt}{dt} = dt$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt$$

Получаем, что $\ln|x| = t + C$. Выражаем искомую функцию (не забыв, на каком промежутке мы рассматриваем функцию, и раскрыв модуль соответственно):

$$x = -Ce^t,\ C > 0$$

Для интервала $x > 0$ точно такой же порядок действий, только получим другой знак. Итак, множество решений:

$$x = Ce^t,\ C \in \mathbb{R}$$

3.2 Уравнения, приводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными

Определение 7 *Уравнение, приводящееся к уранвению с разделяющмися переменными - уравнение вида*

$$\frac{dx}{dt} = f(at + bx + c) \tag{4}$$

Давайте решим его.

1. Введем замену $z(t) = at + bx + c$. Имеем

$$\frac{dz}{dt} = a + b\frac{dx}{dt}$$

   Получаем уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{a + f(z)} = dt$$

Пример. Решим уравнение $\frac{dx}{dt} = \cos(x+t)$. Замена $z = x + t,\ \frac{dz}{dt} = 1$. Уравнение имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + 1$$

Найдем $\cos z_* + 1 = 0$: это, очевидно, $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ Свели задачу кпрошлому пункту

3.3 Однородные уравнения

Сначала докажем, что два определения однородного уравнения эквивалентны.

Определение 8 *Однородным называется уравнение вида*

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right) \tag{5}$$

Это уравнение инвариантно относительно замены $x \mapsto kx,\ t \mapsto kt$. Геометрически это означает, что совокупность интегральных кривых инвариантно относительно преобразования $\theta(x, y) = (kx, ky)$. Из этого следует, что если мы найдем одно решение, то мы найдем всю совокупность ему подобных. Вставить картинку.

Определение 9 *(вспомогательное)*
Уравнение в форме дифференциалов: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Это таже форма, что и $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, поскольку $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Обратно, $-f(x, y)dx + dy = 0$. Уравнение в форме дифференциалов имеет чуть большее множество решений.

Определение 10 *Уравнение в форме дифференциалов называется однородным, если*
$M(kx, ky) = k^n M(x, y)$
$N(kx, ky) = k^n N(x, y)$
n называется степенью однородности.

Теорема 1 *Определения 5 и 10 эквивалентны.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$
$2 \Rightarrow 1$. Пусть дано уравнение в форме дифференциалов. Подставим k. При $x \neq 0$ Имеем

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{k^n M(x,y)}{k^n N(x,y)} = -\frac{M(kx,ky)}{N(kx,ky)} = -\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})} = f(x)$$

□

Пример. $M = x^2 + y^2$
Пример (№31). Найти уравнение, решение которых - параболы с осью, параллельной оси ординат и касающиеся прямых $y = 0, \ y = x$. Во-первых, поймем, как выглядит уравнение такой параболы. Исходя из геометрии, получим, что уравнение параболы, удовлетворяющее первому условию, имеет вид $y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$, а первому и второму - $y = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16a}$. Остался один параметр $\Rightarrow$ уравнение первого порядка. Подставляем и хаваем ответ бесплатно:

$$y = \left(\frac{y' - \frac{1}{2}}{2x}\right) x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{2x}{16y' - 8}$$

Пример (№72). Найти линии, у которых треугольники, образованные касательными, осью OX и точкой касания, имеют одинаковую сумму катетов. Из геометрических соображений имеем уравнение

$$\frac{|y|}{|y'|} + |y| = b = const$$

Раскрываем модули. В простейшем случае имеет уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{b - y}$$

Остальные уравнения такие же в принципе. Так шо это идет в дз Его легчайшее (и, видимо, общее) решение: $x + C = \pm b \ln|y| \pm y$
Пример (№76). Геометрическая интуиция не должна подводить нас. Вставить картинку. Есть кароч такая формула: $\operatorname{tg}\gamma = \frac{r}{r'}$

4 Однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(\frac{x}{t})$$

Как искать его решение? Заменой $u(t) = \frac{x}{t}$. Тогда уравнение перепишется в виде $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$. В нем переемнные разделяются: $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dt}{t}$. Итак, типы уравнений:

1. С разделяющимися переменными
2. Приводящиеся к виду $\frac{dx}{dt} = f(ax + bx + c)$
3. Првиодящиеся к виду $(a_1x + b_1t + c_1)dx + (a_2x + b_2x + c_2)dt = 0$

Подумаем, можно ли это последнее привести к однородному. Добавим условие $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ (иначе система уже однородна). В общем, если эти две прямые пересекаются в точке (x_*, t_*), то можно ввести новые переменные, передвинув эту точку в начало координат: $x \mapsto x - x_*,\ t \mapsto t - t_*$. Тогда система перепишется без $c_1,\ c_2$, и таким образом будет однородной. Если прямые не пересекаются, то прямые лиюо совпадают, либо параллельны. Тогда введем замену (для любой прямой) $z(t) = a_1x + b_1t + c_1$. Так как прямые параллельны, то $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, значит, мы можем выразить вторую прямую: $a_2x + b_2t + c_2 = \frac{1}{k}(a_1x + b_1t + kc_2) = \frac{1}{k}(z - c_1 + kc_2)$. Уравнение приводится к виду $z(t)dx + \frac{1}{k}(z - c_1 + kc_2)dt = 0$. Но у нас все равно многовато переменны. Выразим dx через z:

$$z(\frac{dz - b_1dt}{a_1}) + \frac{1}{k}(z - c_1 + kc_2) = 0$$

Умножим на a_1k:

$$kzdz = kb_1zdt - a_1zdt - a_1(kc_2 - c_1)dt$$

Домножим на $\frac{1}{kzdt}$:

$$\frac{dz}{dt} = ((b_1 - \frac{a_1}{k})z - a_1(kc_2 - c_1))\frac{1}{z}$$

Finally, уравнение с разделяющимися переменными! ПОБЕДА!

5 Обобщенно-однородное уравнение

Определение 11 *Обобщенно-однородное уравнение - уравнение вида*

$$M(x,t)dx + N(x,t)dt = 0$$

причем M, N - такие. что $\exists n \in \mathbb{R}$: если $x = z^n(t)$, то уравнение $M(z^n, t)nz^{n-1}dz + N(z^n, t)dt = 0$ однородно.

Пример. Испортим однородное уравнения, чтобы сделать его обощенно-однородным. Роман придумал, чел харош.

Сведем и этого зверя к разделяющимся переменным.

$$\begin{cases} n(kz)^{n-1}M((kz)^n, kt) = k^m M(z^n, t)nz^{n-1} \\ N((kz)^n, kt) = k^m N(z^n, t) \end{cases}$$

6 Уравнение в полных дифференциалах

Напомним, что полный дифференциал $dF(x, y)$ C^1-гладкой функции равен $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$.

Определение 12 *Уравнение в полных дифференциалах - уравнение вида*

$$dF(x, y) = 0,\ F \in C^2(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Если мы знаем саму функцию, то решение находится мгновенно: $dF(x, y) = const$. Правда, оно неявное. Выразим $y = y(x)$ по теореме о неявной функции.

Пример. $x^2 \sin t dt + 2x \cos t dx = 0$

Уравнение является уравнение в полных дифференциалах, если существуют такие функции, что $M = \frac{\partial F}{\partial x},\ N = \frac{\partial F}{\partial y}$

Теорема 2 *(достаточное условие разрешимости):*

Доказательство. $\square$ Гомеоморфный (без самопересечений, так как биекция) образ окружности в плоскости можно непрерывно продеформировать в точку. Теорема Жордана: гомеоморфный образ окружности делит плоскость на две компоненты связности. Теорема Шёнфлиса: внутренняя часть этой плоскости гомеоморфна открытому диску. Это кстати эквивалентно тому, что фундаментальная группа тривиальна.