Анализ

Галкина

05.09.2022

Оглавление

Глава 1

Ряды

В данном разделе мы будем изучать следующие объекты:

- Числовые ряды
- Функциональные ряды (в т.ч. степенные, ряды Фурье)

1.1 Числовые ряды

1.1.1 Базовые определения и теоремы

Определение 1 *Ряд - сумма счетного числа слагаемых:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

Определение 2 *Частичная сумма S_n - сумма первых n слагаемых*

Определение 3 *Сумма ряда - предел последовательности частичных сумм*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Если предел существует и конечен, то ряд сходится. Если предел бесконечен, ряд расходится. Заметим, что, согласно теоремам о

Определение 4 *Остаток ряда - разность между частичной суммой ряда и самим рядом:*

$$R_k = S - S_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_k$$

Пример. Геометрический ряд $a + aq + aq^2 + \ldots$. По школьной формуле $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Имеем случаи:

1. $|q| < 1: \; S = \frac{a}{1-q}$
2. $|q| > 0: \; S = \infty$
3. $q = 1: \; S = \infty$

Итак, ряд сходится, только если $|q| > 1$.
Следующие теоремы устанавливаются для любых рядов:

Теорема 1 *(необходимое условие сходимости ряда)*
Если ряд сходится, то предел общего члена равен 0. Равносильная формулировка: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. По условию, существует число S - предел частичных сумм ряда. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx, \; x \neq \pi k, \; k \in \mathbb{Z}$. Зафиксируем x. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx = 0$. Но это противоречит тому, что $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Значит, ряд расходится.
Пример. Гармонический ряд расходится, т.к. расходится последовательность частичных сумм: $S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \ldots = 1 + \frac{n}{2}$

Теорема 2 *(критерий Коши сходимости ряда)*
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тоггда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \; \forall n > N \; \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Доказательство. По определению, ряд сходится, когда существует предел частичных сумм. Применим к ним критерий Коши, получим условие: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Но $S_{n+p} - S_n \equiv a_{n+1} + ... + a_{n+p}$. □

Теорема 3 *(критерий сходимости через остаток)*
1. Если ряд сходится, то сходится любой из его остатков.
2. Если хотя бы один остаток сходится, то ряд тоже сходится.

Доказательство. 1. По условию, существует сумма ряда S. Зафиксируем номер $N \in \mathbb{N}$ и рассмотрим остаток $R_N = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} a_k$, а также последовательность σ частичных сумм ряда-остатка R_N: $\sigma_n = a_{N+1} + ... + a_{N+n} =$

$\sum\limits_{k=N+1}^{N+n} a_k$. Рассмотрим её предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{n+N} - S_N) = S - S_N = R_N$. Значит, остаток сходится.
2. По условию, существует такой номер n_0, что остаток R_{n_0} сходится. Тогда существует предел частичных сумм σ_n этого остатка: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, $\sigma_n = a_{n_0} + \ldots + a_{n_0+n}$. Пусть $n_0 + n = m$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_m = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{n_0} + \sigma_{m-n_0}) = S_{n_0} + \sigma$, то есть основный ряд сходится. $\square$

1.1.2 Знакопостоянные ряды

Исследуем подробнее знакопостоянные ряды. Ряд называется знакопостоянным, если, начиная с некоторого номера, все его члены имеют одинаковый знак (конечное число членов в начале не влияет на сходимость). Следующие теоремы устанавливаются для положительных рядов, для отрицательных рядов применимы эти же рассуждения, стот лишь поменять знак.

Теорема 4 *(критерий сходимости для неотрицательных рядов)*
Ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.

Доказательство. $\Rightarrow$. По условию, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. Значит, последовательных частичных сумм ограниченна сверху.
$\Leftarrow$. По условию, ограниченная неубывающая последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху, значит, по теореме Вейрштрасса у неё есть предел S.
$\square$
Следующее важное утверждение о положительных рядах - признак сравнения. Он позволяет делать выводы о сходимости ряда, сравнивая его с известными рядами: геометрической прогрессией, обобщенным гармоническим рядом (то есть с произвольным показателем степени).

Теорема 5 *(признак сравнения в оценочной форме)*
Пусть даны последовательности $0 \leqslant a_n \leqslant b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда из сходимости ряда с общим членом b_n следует сходимость ряда с общим членом a_n (из расходимости ряда с общим членом a_n следует расходимость ряда с общим членом b_n).

Доказательство. Докажем исходя из критерия сходимости. Пусть A_n, B_n - частичные суммы рядов с членами $a_n,\ b_n$. Так как ряд B сходится, то существует верхний предел M для его частичных сумм. Так как члены ряда A меньше членов ряда B, то $A_n \leqslant B_n \leqslant M$, откуда по транзитиавности неравенств $A_n \leqslant M$, значит, у A_n есть предел. $\square$

Пример. Рассмотрим $p < 1$, $n^p < 1$, $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$. Так как гармонический ряд расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ расходится.

Пример. Найти сумму. $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + ...$, $a_{n+1} = \sqrt{2-b_n}$, $b_{n+1} = \sqrt{2+b_n}$. Заметим, что $b_1 = 2\cos\frac{\pi}{4}$, $b_2 = \cos\frac{\pi}{8}$. Дальше эта формула выводится по индукции. $b_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. $a_n = \sqrt{2-b_{n-1}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ Ита, $a_n \leqslant 2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}$.

Теорема 6 *(Признак сравнения в предельной форме)*
Пусть даны неотрицательные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. *Пусть* $k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. *Тогда если*
1. $k = const$ $(k \neq 0)$*: ряды сходятся или расходятся одновременно.*
1.1. $k = 1$*: ряды эквивалентны.*
2. $k = 0$*: если B сходится, то и A сходится.*
3. $k = \infty$*: если A сходится, то и B сходится.*

Доказательство.
1. Запишем определение предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ для $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0$:

$$\exists N(\varepsilon)\ \forall n > N : \frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3k}{2}$$

откуда $a_n < \frac{3k}{2} b_n$. Значит, если ряд B сходится, то и ряд A сходится.
2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Для $\varepsilon = 1$ $\exists N$ $\forall n > N$: $\frac{a_n}{b_n} < 1$, значит $a_n < b_n$ и сходимость рядов следует из признака сравнения в оценочной форме.
3. Переворачивая предел в п.2, получаем все аналогично. $\square$

Пример. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha})$. Имеем $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. При $\alpha > 0$ S_n сходится к 1, при $\alpha < 0$ ряд расходится.

Теорема 7 *(третий признак сравнения)*
Пусть даны ряды $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *причем* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$. *Тогда если B сходится, то и A сходится.*

Доказательство. Перемножив положительные неравенства $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k}$, получим $\frac{a_n}{a_1} \leqslant \frac{b_n}{b_1}$, откуда $a_n \leqslant b_n \cdot const$. Из признака сравнения в оценочной форме получаем, что ряд A сходится, если сходится ряд B. $\square$

Переходим к более тонким признакам сходимости ряда. Алгоритм вырисовывается следующий: сначала даламберим, потом кошируем. Если не помогает, пробуем признак Раабе, но все вопросы снимает гауссирование.

Теорема 8 *(признак Даламебра в оценочной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n. Тогда
1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, то ряд сходится;
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q < 1$, то ряд расходится.

Доказательство. 1. Ряд с общим членом $b_n = q^n,\ q \in (0,1)$, сходится. По условию, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, значит, ряд сходится по 3-му признаку сравнения.
2. Ряд с общим членом $b_n = 1$ расходится. По условию, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, значит, ряд расходится по 3-му признаку сравнения. □

Теорема 9 *(признак Даламбера в предельной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n. Тогда
1. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, то ряд сходится;
2. $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. 1. Пусть верхний предел равен $q < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q + \varepsilon = q_1 < 1$. Тогда по признаку Даламебра в оценочной форме ряд сходится.
2. Так как для некоторой подпоследовательности $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то не выполняется необходимый признак, следовательно, ряд расходится. □
Замечание. Если предел равен 1, то $r = q = 1$.
Замечание. В отличие от признака Коши, в п.2 нельзя заменить нижний предел на верхний.
Замечание. Если все-таки получилась единица, то ряд может как сходиться, так и расходиться. Но если предел подходит к единице сверху, то ряд расходится (в силу невыполнения необходимого признака).

Теорема 10 *(признак Коши в оценочной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n.
Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, то ряд сходится.
Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Сравним с геометрической прогрессией.
1. $a_n \leqslant q^n,\ q < 1$, значит ряд сходится по признаку сравнения.
2. $a_n > 1$, значит ряд расходится по необходимому признаку. □

Теорема 11 *(признак Коши в предельной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n *и* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$. *Тогда:*

1. *Если* $q < 1$, *то ряд сходится.*

2. *Если* $q > 1$, *то ряд расходится.*

Доказательство. Аналогично признаку Даламбера.
1. Рассмотрим предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Тогда

$$\exists n_0\ \forall n > n_0 : \sqrt[n]{a_n} = q + \varepsilon = \frac{q+1}{2} < 1$$

Тогда ряд сходится по признаку Коши в оценочной форме.
2. Рассмотрим предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$. Выделим подпоследовательность a_{n_k}, на которой достигается этот верхний предел. Возьмем $\varepsilon = q-1$. Тогда

$$\exists k_0\ \forall k > k_0 :\ \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$$

Значит, $a_{n_k} > 1$, и ряд расходится по необходимому условию. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n$. Кошируя это ряд, взяв наибольшую подпоследовательность, получим предел $\frac{3}{4}$, значит, ряд сходится. Можно ещё просто посчитать две подпоследовательности.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$. Оценим это рядом $b_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{2n-\ln n}$. В итоге получится, что ряд сходится.

Теорема 12 *(признак Раабе в оценочной форме)*
Пусть дан знакопостоянный ряд с общим членом $a_n > 0$. *Тогда:*
1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$, *то ряд расходится.*
2. Если $\exists \alpha > 1 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$ *тогда ряд сходится.*

Доказательство. 1. Пусть $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n-1}{n}$. Введем ряд с общим членом $b_n = \frac{1}{n-1}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, и так как ряд b_n расходится, то ряд a_n расходится по третьему признаку сравнения.
2. Пусть $\beta \in (1, \alpha)$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ сходится. Далее, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = (\frac{n}{n+1})^\beta = (1+\frac{1}{n})^{-\beta} = 1 + \frac{\beta}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Затем, $-\frac{\beta}{n} > -\frac{\alpha}{n} \implies 1 - \frac{\beta}{n} > 1 - \frac{\alpha}{n}$. Так как $O(\frac{1}{n^2})$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\frac{\alpha}{n}$ и $\frac{\beta}{n}$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : 1 - \frac{\alpha}{n} < 1 - \frac{\beta}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Правая часть равна $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. По условию, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$. Из этих двух условий по свойству транзитивности неравенств получаем оценку $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$, откуда следует сходимость ряда.
□

Теорема 13 *(Признак Раабе в предельной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n и $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}) = R$. Тогда:
1. $R < 1$ - ряд расходится
2. $R > 1$ - ряд сходится.

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon = 1 - R$
□
Замечание. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})$.

Теорема 14 *(признак Куммера)*
Даны две последовательности a_n и c_n. Тогда:
1. Если $\exists \alpha > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : C_n - C_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha$ - ряд сходится.
2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n}$ расходится и $C_n - C_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 0$, то ряд расходится.

Доказательство. Пж убейте меня бля я больше не могу □
Следствие 1. Признак Даламбера при $C_n \equiv 1$
Следствие 2. Признак Раабе. Возьмем $C_n = n - 1$. Имеем 1. $n - 1 - n \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha \implies 1 - \frac{1}{n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\alpha}{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{1+\alpha}{n}$. Подставляя в пункт

Теорема 15 *(признак Бертрана/следствие из признака Куммера)*
1. $C_n = (n-2)\ln(n-1)$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant_1 -\frac{1}{n} - \frac{1}{n\ln n}$ - ряд сходится
2.

Доказательство. □

Теорема 16 *(признак Гаусса)*
Пусть дан положительный ряд. Пусть его можно представить в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = D - \frac{r}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}$$

Тогда:
1. Если $D > 1$ - ряд расходится
2. Если $D < 1$ - ряд сходится
3. Если $D = 1$, $R \leqslant 1$ - ряд расходится
4. Если $D = 1$, $R > 1$ - ряд сходится.

Доказательство. □

Теорема 17 *(интегральный признак)*
Пусть ряд знакопостоянен. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно, причем $f(n) = a_n$, функция определена, непрерывна, неотрицательна и невозрастающая на $[1, \infty)$. Оценка погрешности:

Доказательство. $\forall x \geqslant 1\ \exists k \in \mathbb{N} : k \leqslant x \leqslant k+1$. По условию невозрастания имеем $f(k) \geqslant f(x) > f(k+1)$. $a_{k+1} < f(x) \leqslant a_k$, a_{k+1} □ **Пример.** Исследуем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Взятием интеграла получаем условия сходимости:

$$\begin{cases} \text{сходится при } p > 1 \text{расходится при } p \leqslant 1 \end{cases}$$

Признак Дирихле Пусть общий член ряда имеет вид $a_n b_n$. Тогда если:
1ю a_n монотонна и её предел равен нулю
2. Предел частичных сумм b_n ограничен
Доказaзтельство. по критерию Коши. Фиксируем положительный ε. По условию, предел ряда А равен нулю, тогда для $\frac{\varepsilon}{6B} > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$. По признаку Дирихле ряд сходится, так как частичные суммы синуса арифметической прогрессии сходятся.

Теорема 18 *(признак Абеля)*
Пусть общий член ряда имеет вид $a_n b_n$. Тогда если
1. Последовательность a_n монотонна и ограниченна
2. Последовательность b_n сходится.

Доказательство. Докажем по критерию Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как сходится ряд b_n, то по критерию Коши для $\frac{\varepsilon}{3M} > 0$ найдется такой номер, начиная с которого модуль суммы p членов ряда b_n меньше, чем эта штука. Из неравенства Абеля получим $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}$

□ **Упражнение.** Доказать признак Абеля, используя признак Дирихле.

Пример. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\sin n\alpha \cos \frac{\pi}{n}) / \ln \ln n$. Косинус монотонный и ограниченный, а все остальное сходится по Дирихле. Значит,ряд сходится по Абелю.

1.2 Знакопеременные ряды

Сформулируем признаки Коши и Даламбера для знакопеременных рядов. Доказательство чекаем в Фихтенгольце.

Теорема 19 *(признак Даламбера)*
Пусть a_n - общий член знакопеременного ряда. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$. Получаем классическую абсолютную сходимость.

Доказательство. ПОЛНОСТЬЮ следует из признака Даламбера для знакопостоянных рядов. Единственно, что здесь нового - то, что при абсолютной расходимости в признаке Даламбера будет и условная расходимость, поскольку не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Для некоторого эпсилон... $|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}| - q| < \varepsilon$ □

Теорема 20 *(признак Коши) Все аналогично. Из абсолютной расходимости следует расходимость.*

Доказательство. □ Признак сравнения для знакопеременных рядов не работает. Приведем контрпример: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $b_n = a_n + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Предел отношения таких рядов равен 1, то есть они эквивалентны, но вот первый сходится, а второй - расходится (см. общий пример с степенями и логарифмами).

1.2.1 Свойства абсолютно сходящихся рядов

. **Лемма.** Если рядсходится абсолютно, то модуль его суммы не превосходит суммы его модулей.

Теорема 21 *()*
Пусть дан ряд с общим членом a_n, и он сходится абсолютно. Обозначим его сумму,частичную сумму, сумму модулей и частичную сумму модулей как $S, S_n, \overline{S}, \overline{S_n}$. Тогда, если переставить слагаемые, новый ряд a_n^* сходится абсолютно.

Доказательство. Ещё один ворох обозначений: $\overline{S_n^*}, S_n^*$. Длялюбого эпсилон найдется номер такой, что $|\overline{S_n} - \overline{S}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Из леммы следует, что $|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Перейдем к переставленному ряду. Выберем в нем номер, чтобы такая частичная сумма содержала все слагаемые, входящие в $S_{n(\varepsilon)}$. Взяв любое число m большее этого номера, $|S_m^* - S_{n(\varepsilon)}| < |\overline{S}| < \frac{\varepsilon}{2}$. В эту сумму ои все вошли. Остались толкьо те, которые ??? $|S_m^* - S| = |S_m^* - S_{n(\varepsilon)} + S_{n(\varepsilon)} - S| \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}$. Мы доказали сходимость ряда. Абсолютная сходимость следует из таких же рассуждений для ряда с модулем.

□

1.3 Действия над абсолютно сходящимися рядами

Теорема 22 *Если ряд сходится абсолютно, то ряд, умноженный на константу, сходится абсо лютно.*

Доказательство. Зафиксируем ε. Найдем такой номер, что ряд из модулей меньше чем $\frac{\varepsilon}{|c|}$. И в общем эта штука сходится. □

Теорема 23 *Сумма абсолютно сходящихся рядов абсолютно сходится.*

Доказательство. Сумма модулей больше модуля суммы. □

Теорема 24 *(О произведении абсолютносходящихся рядов)*
Сумма всевозможных произведений $a_i b_j$ сходится абсолютно, и сумма ряда равна произведению сумм.

Доказательство. Введем две переменные с модулями. Введем новые обозначения, как в прошлой теореме. Пользуясь этой же теоремой, мы можем доказать абсолютную сходимость для хотя бы одного из упорядочиваний. Представим себе бесконечную матрицу $|a_i b_j|$. Будем рассматривать последовательность частичных сумм в угловых минорах. Для них имеем формулу $S_{n^2} = S'_n \cdot S''_n$. По условию,в правой части есть оба предела, а значит и слева тоже есть. И ещё, $S_{n^2} \leqslant S_m \leqslant S_{(n+1)^2}$. Ну кароч....че то мдэ, тут дофига текста. □

Определение 5 *(произведение рядов по Коши)*
Пусть $S_a \cdot S_b = S_c$. имеемследующее произведение:
$c_1 = a_1 b_1$
$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$
$c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
То есть суммируем по диагональкам той бесконечной матрицы.

Пример 1. $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = 1,\ b_n = \frac{n}{2^n}$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{k(k+1)-2^{n+1-k}}$.

Пример 2. Произведение расходящихся рядов $a_n = 1,5^n,\ b_n = 1 - 1,5^n$ в смысле Коши - сходится, так как $c_n = 0,75^n$.

Заметим, что условной сходимости недостаточно! Так, для $a_n = b_n = (-1)^{n-1}/\sqrt{n}$ ничего не выйдет. Смиритесь. Ребят а че вы с пары то свалили. Чувствую себя лохом, и от этого неуютненько.

1.4 Перестановки условно-сходящихся рядов

Теорема 25 *Лемма о сходимости. Ряд a_n сходится условно. Рассмотрим отдельно подпоследовательности из положительных и отрицательных членов. Тогда их суммы $+\infty, -\infty$ соответственно.*

Доказательство. □

Теорема 26 *(Римана)*
Если рядсходится услвоно, то для любого действительного числа найдется такая перестановка ряда, при которой ряд сходится к этому числу.

Доказательство. По предыдущей лемме, ряд из положительных членов расходится, значит, найдется частичная сумма, большая чем искомое число. Дальше найдем такую частичну сумм из отрицатльных членов, чтобы, прибавв её к прошлому этапу, получили снова меньше чем число. И так далее. □

1.5 Равномерная сходимсоть функциональных рядов

Теорема 27 *(критерий Коши равномерной сходимости)*
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на множестве* $X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

Доказательство. 1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, $f_n(x) \rightrightarrows f$ на X. Тогда для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$
□

Следствие (метод граничной точки). Если $f_n(x) \in [a, b)$ и $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in_9 a, b$, $f_n(a)$ расходится. Тогда $f_n(x)$ не сходится равномерно к $f(x)$ на (a, b).
Доказательство. Допустим, что сходимсоть равномерная. Тогда че топроисходит
Пример. $f_n(x) = n^{x+1}e^{-nx},\ x > 0.$

1.5.1 Свойства равномерно сходящихся ф. п.

1. Линейные комбинации сходятся с соответствующим линейным комбинациям пределов.

2. Умножение на ограниченную на X функцию: $(gf_n) \rightrightarrows (gf)$
3. На любом подмножестве X функция равномерно сходится.
4. Если $\forall x \in x : f_n(x) \to f(x)$ и $E \subset X$ - конечное множество, то на E функция сходится равномерно.
5. Функция, равномерно сходящаяся на двух множествах, равномерно сходится на их объединении.

Доказательство.

1.6 Функциональные ряды.

Определение 6 *Область $X \subset D$ сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - область, лежащая в области определения всех функций ряда и для каждого x на ней ряд сходится.*

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n}(\sin x)^{3n}$. Область сходимости - $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

Определение 7 *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно к $S(x)$ на X, если $S_n \rightrightarrows S$ на X (S_n - частичная сумма ряда).*

Пример. Исследуем на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x(2n-1)}{((n-1)^2+x^2)(n^2+x^2)}$, $x \in [1, \infty)$. Здесь предел частичных сумм можно найти по определению: $S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k = x(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{n^2+x^2})$. При фиксированном $x \in D : \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{x}$, $S(x) = \frac{1}{x}$. Проверим, что остаток равномерно стремится к нулю (тогда это верно и для суммы): $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2} \leqslant \frac{x}{2nx} = \frac{1}{2n} \to 0,\ n \to \infty$ (по методу оценки остатка). Итак, ряд сходится равномерно к своей сумме.

Пример. Исследуем на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2(2n-1)}{((n-1)^2+x^2)(n^2+x^2)}$, $x \in [1, \infty)$. Имеем $S_n(x) = 1 - \frac{x^2}{n^2+x^2},\ S(x) = 1$

Теорема 28 *(необходимое условие равномерной сходимости ф.р)*
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно к $S(x)$ на X. Тогда $a_n \rightrightarrows 0$ на X.

Доказательство. По условию, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall x \in X : |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\square$

Теорема 29 *(критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)*
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномерно сходится на* X *к* $S(x)$ *тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм равномерно сходится:* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)| < \varepsilon$

Доказательство. Прсото применим определение Коши сходимости. $\square$
Пример. Докажем, что у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n^2x^2+\sqrt{n}}$, $x \in (0,1)$ нет равномерной сходимости. Возьмем $x = \frac{1}{2n}$; $a_k(x) \geqslant \frac{1}{4n}$. Поэтому для $\varepsilon \geqslant \frac{1}{4}$ по критерию Коши ряд расходится.

Теорема 30 *(метод граничной точки)*
пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, *его члены непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *и ряд сходится на интервале* (a,b), *но расходится на конце интервала. Тогда равномерной сходимости нет.*

Доказательство. Повторяет доказательство для последовательностей. $\square$
Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in (1,2)$. Ряд сходится на интрвале как обобщенный гармонический ряд. При $x = 1$ ряд расходится, значит, равномерной сходимости нет.

Теорема 31 *(признак Вейерштрасса равномерной сходимости ф.р./мажарантный*
Пусть дан ряд с общим членом $a_n(x)$ *и мы можем оценить* $|a_n(x)| \leqslant a_n$ *(то есть мажорирующим рядом, не зависящим от* x*), причем* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на том множестве, на котором верна оценка.*

Доказательство. Испоьзуем критерий Коши: фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Ряд a_n сходится, значит, по критерию коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$. Из пункта 1 имеем $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} : |a_n(x)| \leqslant a_k$.

Тогда $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$. Тогда по критерию Коши для функционального ряда следует равномерная сходимость. $\square$

Пример. Исследуем на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{arcctg(nx)}{n}$, $x \in (\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$. Подставив ноль, по методу граничной точки нет равномерной сходимости.

Пример. Исследуем сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2} \sin nx$ на прямой. Спойлер: сходится равномерно. Сделаем оценку: $|a_n(x)| \leqslant e^{-n^5x^2} n|x|$. Функция симметрична при замене $x \mapsto -x$, значит, будем оценивать на положительном луче, откинув модуль. Оценим максимумом, вычислив производную и решив уравнение. Имеем $x = \frac{1}{\sqrt{2n^5}}$. Подставляем: $f_n(x) \leqslant f(\frac{1}{\sqrt{2n^5}}) = \frac{1}{\sqrt{2e}n^{\frac{3}{2}}} = a_n$. Значит, $|a_n(x)| \leqslant |f_n(x)| \leqslant a_n \ \forall x \in \mathbb{R}$. Итак, сходимость равномерная.

Теорема 32 *(признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда)*
Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *и*
1. $\forall x \in X : \{a_n(x)\}$ *монотонна по* n*;*
2. $\exists M = const \ \forall x \in X \forall n \in N : |B_n(x)| \leqslant M$*, где* $B_n(x)$ *- частичные суммы ряда* b_n*.*
Тогда ряд сходится равномерно на X

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $a_n \rightrightarrows 0$ на X, то для $\frac{\varepsilon}{6B} > 0$
$\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx/n$. Исследовать на равномерную сходимость на интервалах $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, $(0, 2\pi)$. Ну, раз говорят что уже было. То не пишем. На втором интервале нет равномерной сходимости по краевому критерию.

Теорема 33 *(признак Абеля равномерной сходимости ф.р.)*
Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *и* $\forall x \in X$*:*
1. $|a_n(x)| \leqslant M = const$ *для всех* n*;*
2. $\{a_n(x)\}$ *мнонотонна;*
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно сходится на* X*;*
Тогда исходный ряд равномерно сходится на X*.*

Доказательство. По определению Коши. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как ряд из b_n сходится равномерно, то по критерию Коши для $\frac{\varepsilon}{3M} > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$ $\forall n > n_0$ $\forall p \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$: $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Тогда по неравенству Абеля $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)a_k(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}(x)|) < \frac{\varepsilon}{3M}3M = \varepsilon$. Тогда по критерию Коши этот ряд сходится равномерно на X. $\square$

Пример. Исследуем на равномерную сходимсоть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin x arctgnx}{\sqrt{n^2+x^2}}$.

Алгоритм:

1. Арктангенс монотонен и ограничен.
2. Все остальное сходится по Дирихле.

1.6.1 Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 34 *(о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда)*
Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$*, причем*
1. Все функции непрерывны намножестве
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на* X*;*
Тогда $S(x)$ *непрерывна на* X*.*

Доказательство. По условию, сумма из $a_n(x)$ сходится равномерно на X к $S(x)$, то есть $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на X, $S_n(x)$ непрерывна как сумма. Тогда по теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательсноти, составленной из непрерывных функций, $S(x)$ непрерывна. Другая формулировка:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

можно поменять сумму и предел. $\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = f(x)$ - непрерывна на $(0, 2\pi)$

Теорема 35 *(об интегрировании равномерно сходящегося ряда)*
дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$*, причем*
1. все функции непрерывны на отрезке $[a, b]$*;*
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a, b]$ *к* $s(x)$*;*

тогда в $\forall x, x_0 \in [a,b]$: $\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt$ *можно менять интеграл и сумму.*

Доказательство. Докажем, что $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a_n(t)dt$. По предыдущей теореме $S(t)$ непрерывна на $[a,b]$, значит,интегрируема на нем по Риману. Обозначим $\sigma_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} a_k(t)dt$ и докажем, что $\sigma_n(x) \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, $S_n(t)$ равномерно сходится на $[a,b]$ для $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$. $\exists n_0(\varepsilon)\ \forall n > n_0\ \forall x \in [a,b] : |S_n(t) - S(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $|\sigma_n(x) - \int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt| =$!!!!!!!!!!!!!!!! □

Теорема 36 *(о дифференцировании равномерно сходящегося ряда)*
дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, *причем*
1. Производные всех функций непрерывны на отрезке $[a,b]$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится на* $[a,b]$ *к* $s(x)$ *(даже не нужна непрерывность);*
3. Ряд из производных сходится равномерно на $[a,b]$ *к* $S(x)$;
тогда в ряде можно менять производную и сумму.

Доказательство. Используем предыдущую теорему. Тогда $\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n(t) \right) dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a'_n(t)dt$. Получаем, что в равенсте $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(x_0))$ справа стоит число (в силу непрерывности функции), ряд из $a_n(x_0)$ сходится по условию, следовательно, ряд из $a_n(x)$ сходится.
Теперь покажем равномерную сходимость. Для этого покажем, что остаток ряда из производных $r_n(x)$ равномерно стремится к нулю. Действительно, если ряд удовлетворяет теоереме об интегрировании, то и его остатки тоже. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, остаток обычного ряда стремится к нулю: $R_n(x) \to 0$. тогда для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists n_1(\varepsilon)\ \forall n > n_1$: $|R_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Также остаток ряда из производных равномерно стремится к нулю, тогда для $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$ $\exists n_2(\varepsilon)\ \forall n > n_2\ \forall x \in [a,b] : |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Тогда из звездочки следует !!!!!!!!!!!!?????

□

1.7 Степенные ряды

1.7.1 Базовые определения

Определение 8 *Степенной ряд- ряд вида* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n$

Числа C_n - коэффициенты степенного ряда, x_0 - число. Итак, степенной ряд - обобщение понятия многочлена. Область сходимости степенного ряда непуста, так как так лежит как минимум x_0 (в этом случае сумма ряда равна C_0). Сделав замену $t = x - x_0$, сведем любой степенной ряд к виду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n t^n$.

Теорема 37 *(лемма Абеля)*
Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *сходится в точке* x_0 *и* $|x| < |x_0|$, *то ряд сходится сходится и в* x, *причем абсолютно.*

Доказательство. По условию ряд сходится, значит, $c_n x^n \to 0$. Тогда существует константа M, большая чем все члены ряда. Тогда $|c_n x^n| = \left|c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n$ сходится $\Rightarrow$ ряд из модулей сходится, т.е. ряд сходится абсолютно. □

Теорема 38 *Пусть* D *- область сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $R = \sup\limits_{x \in D} |x|$. *Тогда* $(-R, R) \subset D \subset [-R, R]$.

Доказательство. По лемме Абеля, второе включение очевидно: $\forall x \in D : |x| \leqslant R \implies D \subset [-R, R]$. Пусть $x \in (-R, R)$. Тогда $|x| < R = R_1$. Тогда для него найдется $x_0 \in D : |x_0| > |x|$. Значит, ряд в точке x_0 сходится, и значит сходится в x. Значит, интервал лежит в области сходимости. □

1.7.2 Формулы для вычисления радиуса сходимости

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. По признаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1$, то ряд сходится. Итак, если предел существует, то

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}}$$

Аналогично, из признака Коши получим формулу Коши-Адамара:

$$\boxed{R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}}$$

В общем случае алгоритм такой:
1. Найти радиус сходимости.
2. Выписываем интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$.
3. Исследуем на сходимость концы интервала.

Пример. Найдем область сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}$. Применим признак Даламбера: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+3)3^{n+1}}{(n+2)3^n} = 3$. Интервал сходимости: $(6-3, 6+3)$. В точке $x = 9$ ряд расходится (т.к. гармонический), в точке $x = 3$ - условная сходимость (по признаку Лейбница).

Пример. Найдем область сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n}$. Заметим, что у этого ряда коэффициенты чередуются с нулем (лакунарный ряд). Используем два способа:
1. По формуле Коши-Адамара - возьмем четные номера, так как на них доставляется супремум предела последовательности: $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)} = \sqrt{2}$. Интервал сходимости $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, на концах расходится.
2. Исследуем как функциональный ряд по признаку Даламбера. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{x^2}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$. Значит, ряд сходится, если $\frac{x^2}{2} < 1$, откуда мы получаем тот же интервал сходимости.

Теорема 39 *(о равномерной сходимости степенного ряда)*
Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри интрвала сходимости.

Доказательство. Для простоты рассмотрим ряд с центром в нуле. Пусть ряд сходится на $(-R, R)$. Возьмем $[a, b] \subset (-R, R)$. Обозначим $d = max(|a|, |b|)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n d^n$ сходится, значит, его мы можем использовать для оценки сверху рядов на отрезке: $|c_n x^n| \leqslant |c_n d^n|$, значит, по признаку Вейерштрасса ряд сходится на $[a, b]$. $\square$

Теорема 40 *(о непреывной сумме степенного ряда)*
Сумма степенного ряда непрерывна в любой точке из интервала сходимости.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится на $(-R, R)$ к $f(x)$. Степенные функции непрерывны на интервале (и вообще на всей прямой); по предыдущей теореме, на любом отрезке, лежащем в интервале, ряд равномерно сходится. Значит, по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда, сумма непрерывна на отрезке. Так как этот отрезок произволен, то сумма непрерывна на интервале. □

Теорема 41 *(об интегрировании и дифференцировании степенного ряда)*

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = f(x)$, R *- радиус сходимости. Тогда у функции* $f(x)$ *существуют производные любого порядка внутри интервала:*

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}$$

Интегрирование тоже почленное. Причем при дифференцировании и интегрировании радиус сходимости не меняется.

Доказательство. Следует из соотвествующих теорем для функциональных рядов. Последнее утверждение следует из формулы Коши-Адамара. □

Пример. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Задания типа таких можно делать, используя свойства степенных рядов. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Радиус сходимости $x \in [-1, 1)$. Возьмем производную: $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. А вот теперь проинтегрируем: $\int\limits_0^x \frac{dt}{1-t} = f(x) - f(0)$; $f(x) = -\ln(1-x) + f(0)$. Значит, сумма искомого ряда равна $f(\frac{1}{2}) = 2$. Цель этих телодвижений - привести к виду геометричсекой прогрессии, которую легко посчитать.

1.7.3 Ряды Тейлора

Определение 9 *Пусть в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *существуют производные всех порядков у функции. Тогда для функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *существует ряд Тейлора:*

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Если $x_0 = 0$, то ряд называется рядом Маклорена.

Теорема 42 *Если функция представляется в виде степенного ряда, то он совпадает с её рядом Тейлора.* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$.

Доказательство. Пусть $(x_0 - R, x_0 + R)$ - интервал сходимости ряда. Из разложения функции в ряд имеем $f(x_0) = c_0$. Беря производную, получаем, что $f'(x_0) = c_1$. Дифференцируя дальше, получаем, что $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. $\square$

Если по произвольной функции составить ряд Тейлора, то совсем не обязательно, что он сойдется к этой функции. Сейчас поясним:

Пример. Рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$

Очевидно (по индукции), что производная порядка $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot p\left(\frac{1}{x}\right)$, где $p(t)$ - многочлен. Посчитаем производнуюв нуле; первая производная в нуле - ноль. По индукции получаем, что все остальные производные тоже равны нулю. Значит, ряд Маклорена тождественно равен нулю, и сходится *не к исходной функции, а к тождественно нулевой.*

Теорема 43 *(достаточное условие сходимости ряда Тейлора)*
Пусть $\exists h > 0,\ \exists M = const$ *такие, что* $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) : |f^{(n)}(x)| \leqslant M$. *Тогда на всей* h*-окрестности точки* x_0 *функция равна своему ряду Тейлора, причем он сходится равномерно на данном интервале.*

Доказательство. Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора и запишем остаток в форме Лагранжа: $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $\xi \in (x_0, x)$ (лежит между ними). Остаток по модуля меньше, чем $M \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$ - значит, он равномерно сходится к нулю. Поэтому и сам ряд сходится равномерно на $(x_0 - h, x_0 + h)$. $\square$

Ряды Маклорена для основных функций

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} ...,\ x \in \mathbb{R}$

2. $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...,\ x \in \mathbb{R}$

3. $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...,\ x \in \mathbb{R}$

4. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...,\ x \in \mathbb{R}$

5. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...,\ x \in \mathbb{R}$

6. $\ln(1+x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^n}{n} + ...,\ x \in (-1,1]$

7. $\ln(1-x) =,\ x \in [-1,1)$

8. $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x \in (-1,1)$ - в этой формуле функция примнимает все положительные значения, поэтому она круче.

9. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + ...$

10. $arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...\ , x \in [-1,1]$

11. $arcsin(x) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! \cdot x^{2n+1}}{n! * 82^n (2n+1)},\ x \in (-1,1)$

(Для логарифма) покажем, что остаток ряда стремится к нулю.
1. $x \in [0,1]:\ \ r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$. Подставим $\xi = x_0 + \theta(x - x_0),\ \theta = \theta(x,n)$. При этом имем оценку $0 \leqslant x \leqslant 1 \leqslant 1 + \theta x$. Получим $|r_n(x)| = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Значит, остаток равномерно сходится к 0 на $[0,1]$. Чтобы доказать равномерную сходимость на $(-1,0)$, запишем остаток в форме Коши. Получим $|r_n(x)| = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x}$. Первая дробь меньше 1, вторую оценим как $\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$, что при фиксированном x стремится к нулю. Значит, мы можем писать разложение для логарифма!

Пример. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

Ряд $(1+x)^\alpha$. Найдем радиус сходимости: $R = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = |\frac{n+1}{\alpha - n}| = 1$. Запишем остаток в форме Коши: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n,\ r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$. Если остаток стремится к нулю, то и ряд сходится к данной функции. Пусть $r_n = A_n \cdot B_n \cdot C_n$, где $B_n(x) = (1+\theta x)^{\alpha-1}$, $C_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$, $A_n = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!} x^{n+1}$. $A_n \to 0$ по признаку Даламбера, $|B_n(x)| \leqslant max\{(1-|x|)^{\alpha-1}, (1+|x|)^{\alpha-1}\}$, $C_n(x) < 1$, значит, остаток стремится к нулю, и ряд сходится к функции.

Задача. Доказать, что в $x = 1$ ряд сходится при $\alpha > -1$, расходится при $\alpha \leqslant -1$. В точке $x = -1$ сходится абсолютно при $\alpha \geqslant 0$, расходится при $\alpha < 0$

Выражения для арксинуса и арктангенса получаются интегрированием

разложния их производных.
Рассмотрим сходимость арксинуса на концах!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

1.7.4 Использование степенных рядов

Разложение функции в ряд - мощнейшая тема. Иногда вфизике и других прикладных областях делают так:
Пример. Возьмем интеграл $\int$

Пример. Решм диффур $y'' = 2xy' + 4y$

Глава 2

Несобственный интеграл

2.1 Основные определения

Определение 10 *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ для всех $b > a$. Тогда несобственный интеграл первого рода (с одной особой точкой) - предел*

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

Если таковой предел существует, то интеграл сходится; если предел равен бесконечности или не существует, то интеграл расходится. Аналогично определяется и интеграл с нижним пределом $-\infty$.

Пример. $\int\limits_0^1 \ln x dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_\varepsilon^1 \ln x dx\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(x \ln x\big|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 dx\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \frac{-\varepsilon^2}{1/\varepsilon} - 1 = -1$ - интеграл сходится.

Рассмотрим случай конечного числа особых точек.

2.1.1 Критерии сходимости несобственного интеграла

Теорема 44 *(критерий Коши) Пусть $\forall b \geqslant a$ функция интегрируема на $[a, b]$. Тогда $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists b_0(\varepsilon) > 0\ \forall b_1, b_2 > b_0 : \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$*

Доказательство. По условию, существует предел $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = A \in \mathbb{R}$, где $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда из существования предела следует для $\frac{\varepsilon}{2}$: $\exists b_o(\varepsilon) > a : |F(b) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $b_1 > b_0,\ b_2 > b_0$.

Тогда $|F(b_2) - F(b_1)| = |F(b_2) - A| + |F(b_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Достаточность. Докажем существование предела $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$ из определения предела по Гейне. Пусть $b_n \to \infty$, тогда $\forall b_0 > a\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0$
Покажем, что предел не зависит от выбора последовательности b_n. Выберем другую последовательность b_n^*. Обозначим предел $\lim\limits_{n\to\infty} F(b_n^*) = B$. Составим последовательность $b_1, b_1^*, b_2, b_2^*, ... \to \infty$. Тогда предел F от этой последовательности обозначим как C. Так как пределы подпоследовательностей сходятся к пределу последовательности, то $A = B = C$. Значит, выполняется условие определения предела по Гейне, значит, интеграл сходится. □

Пример. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 0$, расходится при $\alpha \leqslant 0$. Докажем это.
1. $\alpha > 0$. Поехали: $\forall \varepsilon > o\ \exists b_0(\varepsilon) > 1\ \forall b_1 > b_0, b_2 > b_0 : \left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right| < \varepsilon$.
Доказываем: $\left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right| = \left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{x^\alpha} d\cos x\right| = \left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|_{b_1}^{b_2} - \int_{b_1}^{b_2} \cos x d(\frac{1}{x^\alpha}) \leqslant ... \leqslant \frac{4}{b_0^\alpha}$. Значит, $b_0 > (\frac{4}{\varepsilon})^{\frac{1}{\alpha}}$.
2. $\alpha \leqslant 0$. Синус теперь принимает разные знаки. Пусть $b_k = 2\pi k$. Тогда по критерию Коши интеграл расходится.

Теорема 45 *(критерий сходимости через остаток)*
Пусть $\int_a^\infty = \int_a^b + \int_b^\infty,\ (b > 0)$.
1. Если интеграл сходится, то и любой из его остатков сходится.
2. Если хотя бы один из остатков сходится, то интеграл сходится.

Доказательство. □

Теорема 46 *(критерий сходимости несобственного интеграла от несобственной функции)*
Пусть $\forall b > a$ *функция интегрируема на* $[a, b]$ *и неотрицательная .Тогда* $\int_a^\infty f(x)dx$ *сходится* $\Leftrightarrow$ *первообразная* $F(b) < M$ *ограниченна.*

Доказательство. $F(b)$ неубывает и имеет конечный предел. Значит, интеграл сходится. Обратно, пусть существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$, то $F(b)$ ограниченна в некоторой окрестности. □

2.1.2 Признаки сравнения в предельной форме

Теорема 47 *(признак сравнения)*
Пусть $f(x) > g(x) > 0$ *начиная с некоторого* $x > a$, *и для любого* $b > a$ *функции интегрируемы на* $[a, b]$. *Тогда*

1. Если $\int f(x)$ сходится, то и $\int g(x)$ сходится.
2. Если $\int g(x)$ расходится, то и $\int f(x)$ расходится.

Доказательство. По свойству определенного интеграла (транзитивность числовых неравенств), $F(b) \leqslant M$. Тогда по критерию 3 интеграл сходится. 2. Погодите, это реально? □

Теорема 48 *(второй признак сравнения)*
Если $\frac{f(x)}{g(x)} = k$, $\infty \neq k \neq 0$, то их интегралы сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. □