Лекции по функциональному анализу

Олег Галкин

20.01.22

Содержание

1 Множества

Зафиксируем универс $\mathcal{U}$.

Определение 1 *Характеристическая функция (индикатор) множества* $A \subset \mathcal{U}$*:*

$$I_A \colon \mathcal{U} \to \{0,1\};\ I_A(x) = \begin{cases} 1, x \in M \\ 0, x \notin M \end{cases}$$

Обозначим за $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}, \{0,1\})$ множество всех отображений из универса в двухэлементое множество. Рассмотрим оператор

$$\varphi \colon \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, \{0,1\});\ A \mapsto I_A$$

Мы построили функтор из категории подножеств универса в хом-категорию.

Теорема 1 φ *- биекция.*

Доказательство. Инъективность следует из того, что различным множествам соответсвуют различные индикаторы. Докажем сюръективность. Пусть I - произвольный индикатор. Сопоставим ему следующее множество:

$$A_I = \{x \in \mathcal{U} \mid I(x) = 1\}$$

$\square$

Как соотносятся операции над множествами и индикаторы? Имеем $I_{A\cap B} = I_A$, $I_{A\cup B} = I_A + A_B - I_A I_B$. Можно придумать и другие функции: например, $I_{A\cup B} = I_A^3 + A_B^2 - I_A I_B = \max$

Пусть φ - оператор, A_i - последовательность множеств. Построим по ней последовательность индикаторов I_{A_i}. Предел функциональной последовательности $\lim\limits_{i\to\infty} I_{A_i} = I_A$ является индикаторов некоего множества A.

Определение 2 *Множество* A *является пределом последовательности множеств* A_i*.*

Определение 3 *Верхний предел множеств:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \sup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \tag{1}$$

Задача. Доказать $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Решение: по определению имеем

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = (A_1 \cap ...) \cup (A_2 \cap ...) \cup ...$$

Если x лежит в этом множестве, то $\exists n : x \in \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. То есть $\forall k \geqslant n_0 : x \in A_k$. Теперь докажем, что этот $x \in \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = (A_1 \cup A_2 \cup ...) \cap ... \cap (A_n \cup A_{n+1} \cup ...) \cap ...$

Определение 4 *Нижний предел называется пределом последовательности (множеств), если он совпадает с верхним пределом.*

Задача. Доказать по определению, что если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ...$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Решение: найдем верхний и нижний пределы: $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ (в последнем равенстве мы избавились от зависимости от n).

$\boxed{\text{Дз1: доказать в случае обратных включений}}$.

Задача. Найдем $\varliminf\limits_{n\to\infty} [0, 1 + \frac{(-1)^n}{n}]$. Имеем $\varliminf\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Заметим, что $B_n = B_{n-1} = A_n$ при нечетном n, поэтому

$\boxed{\text{ДЗ2: доказать }}$ $C\left(\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n\right) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} CA_n$

$\boxed{\text{ДЗ3: найти }}$: ПУсть $A_1 = A_3 = A_5 = ... = [0, 1]$, четные- $[-1, 0]$. Найти верхний и нижний предел.

$\boxed{\text{ДЗ4: доказать: верхний предел последовательности множеств = элементы, леж}}$

2 Функции

Определение 5 *Функция* $f\colon A \to B$ *- это тройка* (A, B, f), *где A,B - множество,* f *- правило, сопоставляющее каждому элементу множества A ровно один элемент множества B. A - область определения.*

Определение 6 *Область определения функции -* $\{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Определение 7 *Декартово (прямое) произведение -* $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ *Кортеж -* $A_1 \times A_2 ... \times A_n = \{\}$

Как ввести счетное произведение множеств? $A_1 \times A_2 \times ... = \{(x_1, x_2, ...) \mid x_i \in X_i\} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} A_k = A^{\mathbb{N}}$. Как индексировать декартовы произведения множеством любой мощности? Записывается как $\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \mid x_\gamma \in A_\gamma\} = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = A^\Gamma$.

Теорема 2 *Существует биекция между* A^Γ *и* $\mathrm{Hom}(\Gamma, A)$.

Доказательство. Имеем $A^\Gamma = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ Построим следующую биекцию: $\varphi\colon A^\Gamma \to \mathrm{Hom}(\Gamma, A)$,

$$(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \mapsto [\gamma \mapsto x_\gamma]$$

Почему это биекция? □

Пример. Пусть $A = \mathbb{R}$, $\Gamma = \{1, 2, 3\}$. С одной стороны, мы имеем последовательности из 1,2,3, индексированные действительными числами, а с другой стороны - функции из множества $\{1, 2, 3\}$ в действительные числа. Тогда биекция $\varphi\colon \mathbb{R}^{\{1,2,3\}} \to \mathrm{Hom}(\{1, 2, 3\}, \mathbb{R})$ задается следующим образом: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = f : f(1) = x_1, f(2) = x_2, f(3) = x_3$

Из теоремы немедлено получаем следствие:

Теорема 3 *Существует биекция между* $\{0, 1\}^\Gamma$, $\mathrm{Hom}(\Gamma, \{0, 1\})$ *и* $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Доказательство. Первая биекция - по теореме 1. Вторая биекция $\psi\colon \mathrm{Hom}(\Gamma, \{0, 1\}) \to \mathcal{P}(\Gamma)$ строится так:

$$[f\colon \Gamma \to \{0, 1\}] \mapsto \{\gamma \in \Gamma \mid f(\gamma) = 1\}$$

Обратная к этой биекции сопоставляет множеству индикатор. □

2.1 Свойства образов и прообразов

Пусть $f\colon X \to Y$.

Определение 8 $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ *- полный прообраз точки y. Полный прообраз множества - объединение полных прообразов его точек.*

Определение 9 *Образ множества - множество образов всех его элементов.*

Вопрос: ДЗ образ пересечения = пересечение образов?

Вопрос. Счетеное произведение континуумов - континуум.
Решение. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, ...) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$. Так как $\mathbb{R} \sim \mathrm{Hom}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \{(x_1, x_2, ...) \mid x_i \in \{0,1\}\}$, то $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \{(a_1, a_2, ...) \mid a_i \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$. Покажем, что $\{(a_1, a_2, ..) \mid a_i \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Расположив это все это в бесконечной матрице, используем змейку лол.

Мы различаем Hom-множества и $B^A = \{(b_a)_{a \in A}\}$ - множество индексированных последовательностей. С другой стороны, последовательность есть функция на множестве натуральных чисел.

3 Сравнение мощностей

Пусть $\alpha = |A|, \beta = |B|$.

Определение 10 *Говорим, что $\alpha < \beta$, если $\alpha \neq \beta$ и $\exists B_1 \subset B : A \sim B_1$.*

Определение 11 *Говорим, что $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha < \beta$ или $\alpha = \beta$*

В частности, из аксиомы выбора следует сравнимость любых множеств. Следует ли обратно?

Теорема 4 *Любые две мощности сравнимы.*

Доказательство. По аксиоме выбора, любые множества можно вполне упорядочить (теорема Цермело). Из сравнения порядковых чисел следует, что либо $A \sim B_1 \subset B$ (1), либо $B \sim A_1 \subset A$ (2). Возможны следующие варианты:
1. $A \sim B_1 \subset B,\ B \sim A_1 \subset A$. Тогда по КШБ $A \sim B$.
2. (1) и не (2).
3. не (1) и (2). 4. не (1) и не (2) - не бывает. $\square$

3.1 Операции над мощностями

Пусть $\alpha = |A|, \beta = |B|$.

Определение 12 *Определим следующие операции:*
$\alpha \cdot \beta := |A \times B|$
$\alpha + \beta := |A \cup B|$
$\alpha^{\beta} := |A^B|$

Докажем, что введенное определение корректно: именно, если $|A_1| = |A| = \alpha,\ |B_1| = |B| = \beta$, тогда:
1. $|A_1 \times B_1| = |A \times B|$;
2. $|A_1 \cup B_1| = |A \cup B|$;
3. $|A_1^{B_1}| = |A^B|$.

Теорема 5 *Для мощностей выполнены свойства:*
1. $\alpha\beta = \beta\alpha$
2. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$
3. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$
4. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$
5. $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$

Доказательство.
1.
2.
3.
4. По определению, $(\alpha^\beta)^\gamma = |(A^B)^C|$, $\alpha^{\beta\gamma} = |A^{B\times C}|$, поэтому построим биекцию $\varphi\colon (A^B)^C \to A^{B\times C}$.

Вспоминаем, что $(A^B)^C = \{(d_c)_{c\in C} \mid d \in A^B\}$, $A^{B\times C} = \{(a_{(b,c)})_{(b,c)\in B\times C} \mid a_c \in A\}$. □

$\boxed{\text{ДЗ №2 ДЗ №2 З Д З Д З Д ЗД З Д З Д З Д ЗД}}$

Примеры. $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$

С одной стороны, $\aleph_0^{\aleph_0} \geqslant 2^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$. С другой стороны, $\aleph_0^{\aleph_0} \geqslant \mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$, откуда $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$.

Теорема 6 *(Кантор)*
$\mathcal{P}(X) \not\sim X$

Теорема 7 *Если* $|A| \geqslant 2$, *то* $\forall B \neq \varnothing : |A^B| > B$.

Доказательство. Очевидно из теоремы Кантора, что отношение здесь больше или равно. Исключим раVенство - докажем, что нет биекции. Именно, нет биекции меZду B и НЕЙ - додокаZать. □

Пример: континум в степени континуум это 2 в степени континума.
Если максимум существует, то он достигается.

4 Теория меры

Определение 13 *Мера μ на семействе множеств Σ - функция $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, такая что:*
1. $\forall A_1, ..., A_n \in \Sigma : A_i \cap A_j \neq 0, \bigcup\limits_i A_i \in \Sigma : \mu(A_1 \cup, ..., \cup A_n) = \mu(A_1) + ... + \mu(A_n)$ - конечная аддитивность;
2. $\mu(A) \geqslant 0$ - неотрицательность.

Определение 14 *Мера называется счетно-аддитивной, если аддитивность для счетного числа множеств:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Пример. $\Sigma = \{\langle a, b\rangle \cap \mathbb{Q} \mid a \leqslant b\}$, $\mu(\langle a, b\rangle \cap \mathbb{Q}) = b - a$. Мера точки - ноль. Имеем

$$\mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 1$$

но

$$\mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(c_i) = 0, \; c_i \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

Значит, мера не счетно-аддитивна. $\boxed{\text{ДЗ доказать конечно-аддитивность}}$

Пример. $\mu(A \cap B) = \mu(A(\backslash B) \cap B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$. Значит, $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

4.1 Сисетемы множеств

Определение 15 *Кольцо множеств R — непустое семейство множеств, причем $\forall x, y \in R : x \cap y, x \cup y, x \setminus y, x \triangle y \in R$*

Пример. Множество всех промежутков на прямой - не кольцо, так как объединение не лежит в нем. Булеан множества - кольцо.

Теорема 8 *Булеан любого множества - кольцо относительно пересечения (умножение) и симметрической разности (сложение).*

Доказательство. ДЗДЗДЗДЗДЗДЗДЗЗДЗДЗДЗДЗДЗДЗДДЗДЗДЗД-ЗДЗДЗДЗДЗДЗД □

Теорема 9 *Семейство множеств является кольцом множеств $\Leftrightarrow$ оно непусто и замнкуто относительно объединения и разности (либо относительно пересечения и симметрической разности).*

Доказательство. Докажем, что все операции, фигурирующиев в определении кольца множеств, выражаются черех объединение и разность. Действительно, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $A \cap B = (A \cup B) \setminus (AB)$. есемейство множеств R $\square$

ДЗДЗДЗДЗДЗДДЗ 333333Полна ли система только с одной операцией?33333333

Теорема 10 *Кольцу множеств принадлежат конечные объединения и пересечения его элементов.*

Доказательство. По индукции. $\square$

Теорема 11 *Пересечение любых колец множеств - кольцо множеств.*

Доказательство. Объединение и пересечение, разность и симметрическая разность элементов лежат в каждом из множеств, а значит, и в пересечении колец. $\square$
Объединение - не всегда кольцо: контрпример доставляют кольца $\{A, \varnothing\}, \{B, \varnothing\}$.

Определение 16 *Произведение систем множеств -*

$$S_1 \times S_2 := \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in S_1, A_2 \in S_2\}$$

Определение 17 *Если S - система множеств, то порожденным её кольцом называется кольцо $R(S)$, такое что $S \subset R(S)$ и $\forall R_1 : S \subset R_1$ имеет место $R(S) \subset R_1$.*

ДЗДЗДЗДЗЗДЗДЗД найти порожденное кольцо $S = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$

Теорема 12 *Порожденное кольцо существует для любого непустого семейства множеств и единственно.*

Доказательство. Пусть $X = \bigcup\limits_{A \in S} A$. $S \subset \mathcal{P}(X)$ - кольцо. Положим $\tilde{R}$ - пересечнние всех колец, содержащих S. Покажем, что оно порожденное и единственное.

Единственность. Пусть есть два минимальных кольца. Они лежат друг в друге. $\square$

Определение 18 *Полукольцо множеств - семейство множеств S, если замкнуто относительно пересечения и разность двух множеств должна представляться в виде конечного объединения непересекающихся множеств.*

Пример - семейство всех промежутков на прямой.

ДЗЗЗЗДЗДЗД ЗВЕЗДОЧКА Произведение множеств всех промежутков - кольцо или полукольцо?