Анализ 3

Галкина

05.09.2022

Оглавление

Глава 1

Идеи и номера с практики

Идеи Тимура, достойные того, чтобы быть запечатленными. Те места, которые на слух отмечаются словами типа «финт ушами», будут отмечаться знаком «опасный поворот»  в стиле Бурбаки (а не то, что вы подумали).

1.1 Знакопостоянные несобственные интегралы

Для знакопостоянных интегралов можно использовать признак сравнения. Обычно сравнение происходит с обобщенной степенной функцией. При этом имеется два различных типа особых точек: на бесконечности и с уходом на бесконечность в точке. Разберем подробнее.

Пример 1. Интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Пример 2. Интеграл

$$\int\limits_a^{b} \frac{1}{(x-a)^{\alpha}} dx$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Пример. Интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ сходится, поскольку подынтегральная функция эквивалентна $\frac{1}{x^2}$ - сходящейся штуке.

Пример (№2374). Исследуем на сходимость в зависимости от параметров интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$$

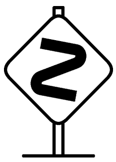
Имеем 2 особые точки: 1 и ∞, поэтому разобъем область исследования на две части и будет исследовать интеграл $\int\limits_{10}^{\infty}$.

Нам поторебуется следующий признак сравнения: для $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{x^\varepsilon} < \ln^\alpha(x) < x^\varepsilon,\ x > \delta(\alpha, \varepsilon)$$

(доказательство через правило Лопиталя: действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\varepsilon} = 0$).
Значит, имеем

$$\frac{1}{x^{p+\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{x^p \ln^q x} \leqslant \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}$$



Итак, интеграл сходится при $p > 1+\varepsilon$ и расходится при $p < 1-\varepsilon$. Так как ε вообще-то произвольный, то и условие сходимости не должно зависеть от него; иначе говоря, интеграл сходится при $p > 1$ и расходится $p < 1$.

Рассмотрим случай, когда $p = 1$. Имеем

$$\int\limits_{10}^{\infty} \frac{1}{x \ln^q x} dx = \begin{cases} \ln(x) = t \\ dt = \frac{dx}{x} \end{cases} = \int\limits_{\ln 10}^{\infty} \frac{dt}{t^q}$$

Значит, этот интеграл сходится при $q > 1$. Соберем ответ:

$$\begin{cases} 1.\ p > 1 - \text{сходится;} \\ 2.\ p < 1 - \text{расходится;} \\ 3.\ p = 1, q > 1 - \text{сходится;} \\ 4.\ p = 1, q \leqslant 1 - \text{расходится.} \end{cases}$$

1.2 Знакопеременные несобственные интегралы

Напомним, что для применения признаков Абеля и Дирихле в интеграле $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$, необходимо, чтобы $f(x)$ и $g'(x)$ были непрерывными функциями.

Пример.

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$$

Интеграл имеет одну особую точку: $+\infty$.
Сначала расмотрим абсолютную сходимость: $\frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$, откуда по признаку сравнения получаем, что интеграл сходится абсолютно при $\alpha > 1$.
Рассмотрим обычную сходимость: интеграл удовлетворяет признаку Дирихле, поскольку $\forall y > a : \int\limits_a^y \sin(x)dx = -\cos(y) + \cos(a) \leqslant 20$ и $\frac{1}{x^\alpha} \to 0$ монотонно. Значит, интеграл сходится при $\alpha > 0$.
Теперь рассмотрим расходимость интерала. Докажем условную сходимость на $(0, 1]$. Оценим снизу увадратом синуса:

$$\frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} \geqslant \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} = \frac{1-\cos(2x)}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos(2x)}{2x^\alpha}$$

Вторая дробь сходится по Дирихле, откуда весь интеграл расходится абсолютно при $\alpha \leqslant 1$.
Осталось установить рассходимость при $\alpha \leqslant 0$. Вспомним определение **предела по Гейне**:

$$\forall \{y_n\} \to 0 : \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{y_n} f(x)dx \to const$$

Тогда интеграл можно предстваить в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{y_n}^{y_{n+1}} f(x)dx$. Найдем какую-нибудь последовательность, на которой будет расходимость. Итак, пусть $y_n = \pi n$.
Теперь нам потребуется следующая

Теорема 1 *(о среднем)*
Если $f(x)$ непрерывна и $g(x)$ знакопостоянна, тогда

$$\int\limits_a^b = f(\xi) \cdot \int\limits_a^b g(x)dx,\ \xi \in (a, b)$$

Из теоремы получаем, что

$$\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\xi_n^\alpha} \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \sin(x)dx = \frac{2\cdot(-1)^n}{\xi_n^\alpha}$$

Тогда интеграл равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{\xi_n^\alpha}$$

Ряд расходится по необходимому признаку, поэтому интеграл расходится по опредлению Гейне.
Можно доказать то же самое по критерию Коши. Именно, при $\alpha \leqslant 0$:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta \ \exists y_1, y_2 > \delta : \left| \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \right| > \varepsilon$$

Чтобы убить модули, выберем такие пределы интегрирования, на которых синус знакопостоянен. Имеем

$$\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n + n} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\xi_n^\alpha} \cdot 2, \ 2\pi n \leqslant \xi_n \leqslant 2\pi n + \pi$$

Подставив худший вариант, получаем $\frac{2}{(2\pi n)^\alpha} \geqslant 2$, то есть расходимость.
Соберем ответ:

$$\begin{cases} 1. \ \alpha > 1 - \text{сходится абсолютно;} \\ 2. \ 0 < \alpha \leqslant 1 - \text{сходится условно;} \\ 3. \ \alpha \leqslant 0 - \text{расходится.} \end{cases}$$

Поговорим про суммы. Более-менее очевидно, что если $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся, то и $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx$ сходится. Так же и для абсолютной сходимости. Так, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \ g(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$ - сходятся условно, но их сумма сходится абсолютно.

Пример (№2380в). $\int\limits_0^\infty x^2 \cos(e^x) dx$. Одна особая точка - ∞. Невероятно, но он сходится, так как пики косинуса становятся всё тоньше и тоньше.

Идея: чтобы проинтегрировать, надо добавить что-то такое, что можно внести под дифференциал. Домножим и разделим подынтегральную функцию на экспоненту, получим $\frac{x^2 e^x \cos(e^x)}{e^x}$, и проинтегрируем $e^x \cos(e^x)$, а остальное выкинем из интеграла по теореме о среднем

.

Оценим монотонность: $(x^2e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$. При $x > 2$ производная отрицательна, значит, стремеление к нулю монотонно. Значит, по Дирихле он сходится, так как первообразная косинуса ограниченна.
Рассмотрим абсолютную сходимость:

$$|x^2\cos(e^x)| \geqslant x^2\cos^2(e^x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 2\cos(2e^x)}{2}$$

Здесь первая дробь расходится, вторая сходится аналогично самому интегралу, то есть интеграл не сходится абсолютно.

Пример. Построим пример положительной функции, которая неограниченна, но интеграл от неё сходится. Будем строить штуки с площадью $\frac{1}{2^n}$ интервалах $(n, n+1)$. Суммировав площади, получим, что интеграл сходится.

Но по определению Гейне мы должны показать сходимость при любом выборе последовательности! (а в данном случае мы взяли $x_n = n$). На самом деле, для знакоположительных функций при выборе любой последовательности пределы частичных сумм $\sum\limits_{n=1}^{k} \int\limits_{n}^{n+1} f(x)dx$ одинаковы!

Действительно, любую частичную сумму последовательности можно зажать между членами x_n и x_{n+1} последовательности $x_n = n$, а её предел одинаков.
Если мы возьмем знакопеременную функцию, то если она сходится при самой «плохой» последовательности, то она сходится при любой другой последовательности. Причем самая плохая последовательность состоит из тех точек, где функция меняет знак. Имеет место следующая

Теорема 2 *Если $f(x)$ - знакопеременная функция и $\{x_n\}$ - последовательность, состоящая из точек, где функция меняет знак, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$*

Геометрический смысл: при данном выборе последовательности отрицательные и положительные члены имеют наибольший возможный размер.

Пример (№2380а) $\int\limits_{0}^{\infty} x^p \sin(x^q)dx,\ q \neq 0$. Две особые точки: 0 и ∞.
Рассмотрим сначала на бесконечности.
1. Если $q < 0$, то интеграл знакопостоянный:

$$x^p \sin(x^q) \sim x^{p+q}$$

Значит, интеграл сходится при $p+q<-1$.
2. Теперь займемся ситуацией, когда $q>1$, и интеграл знакопеременный. Применим идею идею из предыдущего номера: домножим сверху и снизу на какую-нибудь штуку, в данном случае qx^{q-1}. Получим

$$\frac{x^p\sin(x^q)\cdot qx^{q-1}}{qx^{q-1}} = -\frac{x^{p-q+1}}{q}\cdot(\cos(x^q))'$$

Эта штука сходится по Дирихле при $p-q+1<0$, так как $-\frac{1}{q}x^{p-q+1}$ монотонно стремится к нулю.
3. Рассмотрим абсолютную сходимость:

$$|x^p\sin(x^q)| \leqslant x^p$$

Сходится абсолютно при $p<-1$.
4. Рассмотрим ситуацию, когда $-1<p\leqslant -1+q$. Докажем, что здесь сходимость условная.

$$|x^p\sin(x^q)| \geqslant x^p\sin^2(x^q) = \frac{x^p}{2} - \frac{x^p\cos(2x^q)}{2}$$

Первая дробь расходится, вторая дробь сходится при $p-q+1<0$ по аналогии с самим интегралом. Значит, интеграл не сходится абсолютно.
5. Докажем, что интеграл расходится при $p\geqslant -1+q$. Рассмоторим последовательность, из точек, где синус меняет знак, и, согласно теореме, оценим интеграл рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{(\pi n)^{\frac{1}{q}}}^{(\pi n+\pi)^{\frac{1}{q}}} x^p\sin(x)dx$. Заметим, что $(\pi n)^{\frac{1}{q}}\to\infty$.
Снова домножим на qx^{q-1}. Тогда

$$\frac{1}{q}\xi_n^{p-q+1}\int\limits_{(\pi n)^{\frac{1}{q}}}^{(\pi n+\pi)^{\frac{1}{q}}}\sin(x^q)qx^{q-1}dx = \frac{1}{q}\xi_n^{p-q+1}\left(-\cos(x^q)\right)\Big|_{(\pi n)^{\frac{1}{q}}}^{(\pi n+\pi)^{\frac{1}{q}}} = \frac{2(-1)^{n+1}}{q}\xi_n^{p-q+1}$$

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{q}\xi_n^{p-q+1}$ расходится по необходимому признаку, так как $\xi_n^{p-q+1}\geqslant(\pi n)^{\frac{p-q+1}{q}}\to\infty$.
Теперь рассмотрим интеграл в нуле.

$$\int\limits_0^1 x^p\sin(x^q)dx = \begin{cases} t=\frac{1}{x}\\ dt=-\frac{dx}{x^2}\\ 0\mapsto\infty\\ 1\mapsto 1\end{cases} = \int\limits_1^{\infty}\frac{1}{t^{p+2}}\sin\left(\frac{1}{t^q}\right)dt$$

Получили ситуацию один в один, только вместо p и q будет $p+2$ и $-q$.

Пример (№2373). $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\ln(x))}{\sqrt{x}}dx$. Сначала исследуем в нуле:

$$\left|\frac{\sin\ln(x)}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

значит, сходится абсолютно.
Теперь исследуем на сходимость на бесконечности. Так как $(\cos\ln(x))' = -\frac{\sin\ln(x)}{x}$, представим функцию в виде $\frac{\sin\ln(x)}{x}\cdot\sqrt{x}$ и возьмем худшую последовательность $x_n = e^{\pi n}$:

$$\int\limits_{e^{\pi n}}^{e^{\pi n+\pi}} \frac{\sin\ln(x)}{x}\cdot\sqrt{x}dx = \sqrt{\xi_n}\cdot\int\limits_{e^{\pi n}}^{e^{\pi n+\pi}} \frac{\sin\ln(x)}{x}dx = \sqrt{\xi_n}\cdot(\cos\ln(x))\Big|_{e^{\pi n}}^{e^{\pi n+\pi}} =$$

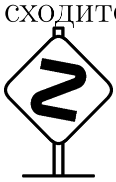
$$= \sqrt{\xi_n}(-1)^{-1}\cdot 2 \to \infty$$

- интеграл расходится.

Пример (из Кудрявцева). $\int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$. Имеем две особые точки: 0 и ∞. Рассмотрим в нуле и уберем синус оценкой:

$$\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

сходится абсолютно.



На бесконечности: разложим синус в ряд Тейлора до такого члена, который в итоге будет сходиться абсолютно:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^3 x}{3!x^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^{\frac{3}{2}}}\right)\right) = \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin^3 x}{3!x^{\frac{5}{2}}} + o\left(\frac{\sin^3}{x^2}\right)$$

Первая дробь сходится условно по Дирихле, вторая дробь сходится абсолютно, о-малое от абсолютно сходящейся функции сходится абсолютно, поэтому все вместе сходится условно.

Пример. $\int\limits_2^\infty \sqrt{x}\ln\left(1-\frac{\sin x^2}{x-1}\right)dx$. Одна особая точка - бесконечность. Разложим логарифм в ряд Тейлора:

$$\sqrt{x}\left(\frac{\sin x^2}{x-1} - \frac{\sin^2 x^2}{2(x-1)^2} + o\left(\frac{\sin^2 x^2}{(x-1)^2}\right)\right) = \frac{\sqrt{x}\sin x^2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}\sin^2 x^2}{2(x-1)^2} + o\left(\frac{\sin^2 x^2}{(x-1)^2}\right)$$

Первый член оценим по теореме о среднем, домножив на производную аргумента синуса:

$$\frac{2x\sqrt{x}\sin x^2}{2x(x-1)} = \frac{\sqrt{x}(-\cos x^2)'}{2x(x-1)}$$

Косинус ограничен, все остальное монотонно стремится к нулю (можно взять производную и убедиться в этом), значит, первый член сходится условно по Дирихле. Теперь докажем, что абсолютно он расходится:

$$\left|\frac{\sqrt{x}\sin x^2}{x-1}\right| \geqslant \frac{\sqrt{x}\sin^2 x^2}{|x-1|} = \frac{\sqrt{x}}{|x-1|}\cdot\frac{(1-\cos 2x^2)}{2} = \frac{\sqrt{x}}{2|x-1|} - \frac{\sqrt{x}\cos 2x^2}{2|x-1|}$$

Вторая дробь сходится анлогично предыдущему пункту, первая дробь расходится, значит, все вместе абсолютно расходится.
Теперь рассмотрим второй член разложения логарифма в ряд Тейлора:

$$\left|\frac{\sqrt{x}(-\sin^2 x^2)}{2(x-1)^2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{x}}{2(x-1)^2} \sim \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

Итак, второй член сходится абсолютно, значит, и о-малое от него сходится абсолютно. Так как первый член сходится условно, то интеграл сходится условно.

Пример. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha}dx$. Имеем две особые точки: 0 и ∞.
1. Исследуем на сходимость в нуле:

$$\frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha} \sim \frac{1+x}{x^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

сходится при $\alpha < 2$.
2. Иследуем на бесконечности. Начнем с абсолютной сходимости (обычная оценка сверху):

$$\left|\frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$$

- сходится абсолютно при $\alpha > 1$.
Исследуем на обычную сходимость. Домножим на производную аргумента косинуса:

$$\frac{(1+2x)\sin(x+x^2)}{(1+2x)x^\alpha} = \frac{(-\cos(x+x^2))'}{(1+2x)x^\alpha} = \frac{(-\cos(x+x^2))'}{x^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{x}}$$

Заметим, что первая дробь сходится по признаку Дирихле при $\alpha+1 > 0$, а вторая монотонна и ограниченна, значит, все выражение сходится по

признаку Абеля при $\alpha > -1$.
Теперь докажем, что ряд расходится абсолютно при $\alpha \in (-1, 1]$; оценим квадратом синуса, перейдем к косинусу и понизим степень:

$$\frac{|\sin(x + x^2)|}{x^\alpha} \geqslant \frac{1 - \cos(2x + 2x^2)}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos(2x + 2x^2)}{2x^\alpha}$$

Первая дробь расходится, вторая сходится по Дирихле, значит, интеграл расходится.
Докажем расходимость при $\alpha \leqslant -1$. Используем для этого ряд из нулей синуса. Корни синуса найдем из уравнения $x^2 + x = \pi n$. Так как мы рассматриваем интеграл на $+\infty$, то нам нужен только положительный корень: обозначим его $\sigma(n) = \frac{-1+\sqrt{1+4\pi n}}{2}$. В ряду домножим на ппроизводную аргумента синуса и применим теорему о среднем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\sigma(n)}^{\sigma(n+1)} \frac{(1 + 2x)\sin(x + x^2)}{(1 + 2x)x^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + 2\xi_n)\xi_n^\alpha} \int\limits_{\sigma(n)}^{\sigma(n+1)} (-\cos(x + x^2))' dx$$

Интеграл от производной косинуса в нулях синуса равен $2\cdot(-1)^n$, значит, общий член ряда имеет вид и оценивается по верхней границе

$$\frac{2 \cdot (-1)^n}{(1 + 2\xi_n)\xi_n^\alpha} \geqslant \frac{1}{(2\sigma(n + 1) + 1)(\sigma(n))^\alpha}$$

(мы взяли разные σ, поскольку мы хотим оценить снизу, а $\alpha < 0$). Подставляя значение корня, получаем расходимость ряда, и, как следствие, расходимость интеграла.
Итак, соберем ответ: в нуле сходится при $\alpha < 2$, на бесконечности сходится абсолютно на $(1, \infty)$, сходится на $(-1, 1]$, расходится на $(-\infty, -1]$.

Пример. $\int\limits_1^\infty x^\alpha \sin\sin x dx$. Одна особая точка - бесконечность. Абсолютная сходимость очевидна:

$$|x^\alpha \sin\sin x| \leqslant x^\alpha$$

- сходится при $\alpha < -1$.
Чтобы исследовать обычную сходимость, надо доказать ограниченность первообразной от $\sin\sin x$. Сделаем это через ряды (потому что через домножение на интегрирующий множитель не получится):

$$\int\limits_0^y \sin\sin x dx = \int\limits_0^\pi ... + \int\limits_\pi^{2\pi} ... + ... + \int\limits_{2\pi k}^y,$$

где $k = \left[\frac{y}{2\pi}\right]$. Чтобы получить оценку, не зависящую от y, докажем, что сумма всех интегралов, кроме последнего, равна нулю:

$$\int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin\sin x dx + \int\limits_{2\pi k+\pi}^{2\pi k+2\pi} \sin\sin x dx = \begin{cases} t = t+\pi \\ dx = dt \end{cases} =$$

Введем эту замену, чтобы привести второй интеграл к тем же пределам и сделать его отрицательным:

$$= \int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin\sin x dx + \int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin\sin(t+\pi) dt = \int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin\sin x dx + \int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin(-\sin t) dt = 0$$

Оценим последний интеграл:

$$\left| \int\limits_{2\pi k}^{y} \sin\sin x dx \right| \leqslant \int\limits_{2\pi k}^{y} |\sin x| dx \leqslant \int\limits_{2\pi k}^{y} 1 dx = y - 2\pi k \leqslant 2\pi$$

Значит, интеграл сходится по Дирихле при $\alpha < 0$.
Докажем (обычную) расходимость при $\alpha \geqslant 0$. Снова используем ряды, но на этот раз будем использовать теорему о среднем:

$$\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} x^{\alpha} \sin\sin x dx = \xi_n^{\alpha} \cdot \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \sin\sin x dx = \xi_n^{\alpha} (-1)^n \int\limits_{o}^{\pi} \sin\sin x dx$$

Интеграл $\int\limits_{o}^{\pi} \sin\sin x dx$ не зависит от n и положителен, обозначим его значение за β. Тогда общий член ряда имеет вид

$$\xi_n^{\alpha} \cdot (-1)^n \cdot \beta \geqslant (\pi n + \pi)^{\alpha} \cdot (-1)^n$$

то есть ряд расходится по необходимому признаку, и сам интеграл расходится.
Наконец, докажем абсолютную расходимость при $\alpha \in [-1, 0)$. Она устанавливается аналогично: так как

$$\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} |\sin\sin x| dx = \int\limits_{o}^{\pi} |\sin\sin x| dx = \beta$$

то общий член ряда имеет вид $\xi_n^{\alpha}\beta$. Подставляя оценку $\xi_n = \pi n + \pi$, имеем расходимость ряда и соотвественно расходимость Мы интеграла.
Соберем ответ: интеграл абсолютно сходится при $\alpha \in (-\infty, -1)$, сходится условно при $\alpha \in [-1, 0)$, расходится при $\alpha \in [0, \infty)$.

1.3 Интеграл, зависящий от параметра

Будем рассматривать интеграл $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx,\ y \in [c,d]$. Мы будем использовать следующие нумерованные теоремы:
Th 1. Из непрерывности f следует непрерывность F на $(c,d]$;
Th 2. F можно интегрировать по y и переставлять интегралы местами;
Th 3. Если f и f'_y непрерывны на $[a,b]\times[c,d]$, тогда $F'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$;
Th 4.

Пример (№3713в). Найти $\lim\limits_{a\to 0}\int\limits_0^2 x^2\cos ax\, dx$. Сначала интегрируем по частям:

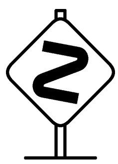
$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{a}\sin ax\cdot x\Big|_0^2 - \frac{1}{a}\int\limits_0^2 \sin ax\, dx\right) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{2\sin 2a}{a} + \frac{1}{a^2}\cos ax\Big|_0^2\right) = 4-2=2$$

С другой стороны, так как $\lim\limits_{a\to 0}\cos ax = 1$, то по теореме 1 получаем

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_0^2 x\cos ax\, dx = \int\limits_0^2 x\, dx = 2$$

Пример (№3715). Найти $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx$. Функция не определена при $y=0$, однако, посчитав предел по Лопиталю, можно увидеть, что предел в нуле равен нулю. Доопределим функцию нулем при $y=0$ и поехали интегрировать. Заметим, что $(e^{-\frac{x^2}{y^2}})' = -\frac{2x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}$, поэтому

$$\lim_{y\to 0} -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 -\frac{2x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx = \lim_{y\to 0} -\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\Big|_0^1 = \lim_{y\to 0} -\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{y^2}} - 1\right) = \frac{1}{2}$$



Но если бы мы воспользовались теоремой 1, то получили бы другой ответ! Противоречие лишь кажущееся, так как для выполнения условий теоремы 1 необходима непрерывность по двум переменным (то есть по всем путям, ведущим нулю). Доопределив функцию нулем, мы сделали её непрерывной по оси Y.

Пример (№3734). $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctg(\alpha \cdot tgx)}{tgx} dx$. Пусть $f(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctg(\alpha \cdot tgx)}{tgx} dx$. Функция не определена в нуле и в $\frac{\pi}{2}$, поэтому она не непрерывна. Чтобы добить непрерывность, доопределим функцию:

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} r!!!!!!!!!!!!et \\ \alpha_0, \ x = 0 \\ 0, \ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

По теореме 3 можно дифференцировать, тогда

$$f'_\alpha = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \, dx}{(1 + (\alpha \cdot tgx)^2) \cos^2 x} = \int\limits_0^{\infty} \frac{du}{(1 + (\alpha u)^2)(1 + u^2)}$$

Берем по частям:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} \int\limits_0^{\infty} \frac{d(\alpha u)}{1 + (\alpha u)^2} - \frac{1}{\alpha^2 - 1} \int\limits_0^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} =$$

Пример №3737. $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \ a, b > 0$. Заметим, что $(x^b)'_b = x^b \ln x$, откуда $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^y dy$. Интеграл можно менять местами:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y dy = \int\limits_a^b () \, dy = \int\limits_a^b \frac{dy}{y + 1} = \ln(y + 1) \Big|_a^b = \ln \left(\frac{b + 1}{a + 1} \right)$$

Заметим , что теорему применять можно при ????

1.4 Несобственный интеграл, зависящий от параметра

Доказать равномерную сходимость на $0, a \leqslant \alpha \leqslant b$, обычную сходимость $0 \leqslant \alpha \leqslant b$ $I = \int\limits_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$

Пример (№3755.2) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $1 < \alpha_0 \leqslant \alpha < \infty$ $1 < \alpha < \infty$

Пример (№37??) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$ $0 \leqslant \alpha < \infty$. Не сходится равномерно, ибо арктангенс (если взять интеграл) имеем максимум в нуле.

1.5 Интегралы Эйлера

Надо запомнить всего лишь 4 формулы. Основная идея - делание замен для того, чтобы попасть в пределы интегрирования.

№3843 $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}dx = B(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{8}\pi$

№3849 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$. Сведем к бета-функции заменой $t = 1-x^n,\ dx = -\frac{1}{n}(1-t)^{\frac{1}{n}-1}dt$. Имеем

$$\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot (1-t)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}B\left(-\frac{1}{n}+1,\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\pi}{n\sin\pi n}$$

№3851 $\int\limits_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx$. Сделаем замену, чтобы подогнать пределы интегрирования под бета-функцию. Замена $t = \frac{1}{1+x^n}$. Пределы пересчитаются, тогда интеграл равен

$$\int\limits_0^1 (\frac{1}{t}-1)^{\frac{m-1}{n}} t\frac{1}{n}(\frac{1}{t}-1)^{\frac{1}{n}-1}\frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{n}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{n}-1\right)^{\frac{m-n}{n}} \frac{1}{t}dt$$

!!!!!!

№3856

$$\int\limits_0^{\frac{pi}{2}} \sin^m x\cos^n x dx = \begin{cases} \sin x = t \\ dt = \cos x\, dx \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{cases} = \int\limits_0^1 t^m(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt =$$

$$\begin{cases} u = t^2 \\ du = 2t\, dt \end{cases} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^{\frac{m-1}{2}}(1-u)^{\frac{n-1}{2}}$$

Пример из Кудрявцева. $\int\limits_{-2}^2 \frac{dx}{-2\sqrt[4]{(2+x)^3(2-x)}}$. Замена $t = 2+x$. Имеем

$\int\limits_0^4 \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}(4-t)^{\frac{1}{4}}}$. Вынесем четверку, делая замену $u = \frac{t}{4}$. Тогда

$$\frac{4}{4^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{3}{4}}} \int\limits_0^1 \frac{du}{u^{\frac{3}{4}}(1-u)^{\frac{1}{4}}} = B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{pi}{4}} = \pi\sqrt{2}$$

Пример посложнее. $\int\limits_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} \frac{dx}{(x+3)^2}$. Сначала избавляемяс от второго множеителя, делая замену $t = \frac{1}{x+3}$. Тогда $-\int\limits_{1/4}^{1/5} \sqrt{\frac{\frac{1}{t}-4}{5-\frac{1}{t}}} dt = \int\limits_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1-4t}{5t-1}} dt$. Теперь замена $u = 4(5t-1)$:

$$\frac{1}{20} \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{4(1-u)}{5u}} du = \frac{\sqrt{4}}{20\sqrt{5}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{20\sqrt{5}}$$

Пример (№3863). $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x} dx$. Сначала посчитаем интеграл без логарифма:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \begin{cases} t = \frac{1}{1+x} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{cases} = \int\limits_0^1 \frac{(\frac{1}{t}-1)^{p-1}}{\frac{1}{t}} \frac{1}{t^2} dt = \int\limits_0^1 (1-t)^{p-1} t^{-p} dt$$

Значение этого интеграла $B(1-p, p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$

Как убить логарифм? Возьмем производную от функции по параметру: $f'_p = \left(\frac{\pi}{\sin\pi p}\right)' = -\frac{\cos\pi p}{\sin^2\pi p}\pi^2$. Дифференцировать можно. потому что интеграл сходится равномерно.

пример. *о*

Глава 2

Несобственный интеграл

2.1 Основные определения

Определение 1 *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ для всех $b > a$. Тогда* ***несобственный интеграл первого рода*** *(с одной особой точкой) - предел*

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

Если таковой предел существует, то интеграл сходится; если предел равен бесконечности или не существует, то интеграл расходится. Аналолгично определяется и интеграл с нижним пределом $-\infty$.

Определение 2 *Пусть $\forall \varepsilon > 0$ функция f интегрируема на $[a+\varepsilon, b]$, и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$. Тогда* ***несобственный интеграл второго рода*** *(с особой точкой a) - предел*

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Пример. $\int\limits_0^1 \ln x dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_\varepsilon^1 \ln x dx\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 dx\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \frac{-\varepsilon^2}{1/\varepsilon} - 1 = -1$ - интеграл сходится.

Если на некотором промежутке интеграл имеет конечное число особых точек, то всегда можно разбить промежуток на такие области, в которых каждый интеграл имеет лишь одну особую точку. Говорят, что интеграл **сходится, если он сходится в каждой особой точке!** Так, $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^p}$ расходится при любом p, так как он расходится хотя бы на одном из промежутков $(0,1)$ или $[1,\infty)$.

Будем обозначать интегрируемость в смысле несобственнного интеграла как $f \in \tilde{R}$.

Теорема 3 *(формула Ньютона-Лейбница)*
Пусть $f \in \tilde{R}[a,b)$, b - особая точка первого или второго рода, и на этом интервале существует функция $F(x)$ - первообразная для f. Тогда, если интеграл сходится, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

где $F(b) = \lim\limits_{x\to b} f(b)$.

Определение 3 *Пусть $\omega \in (a,b)$ - особая точка функции f, причем $\forall \varepsilon > 0 : f \in R[a,\omega-\varepsilon], f \in R[\omega+\varepsilon, b]$. Тогда интеграл в смысле главного значения по Коши («valeur principale») -*

$$v.p. \int\limits_a^b = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{\omega-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{\omega+\varepsilon}^b f(x)dx\right)$$

Пример. Покажем, что интеграл в смысле главного значения может существовать, но будет расходиться как несобственный интеграл:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$$

Имеем разрыв второго рода в точке $x = 1$. Посчитаем главное значение интеграла:

$$v.p. \int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\delta} f(x)dx - \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\ln 3$$

Покажем, что интеграл расходится по отдельности:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{1-x^2} + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{1-x^2} =$$

$$= \lim_{\delta\to+0} \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{1-\delta} + \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_{1+\varepsilon}^{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{\delta\to+0}\ln\frac{2-\delta}{\delta} + \lim_{\varepsilon\to+0}\ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right) +$$

$$+\frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 3}{2} + \frac{1}{2}\lim_{\substack{\delta\to+0\\ \varepsilon\to+0}}\ln\frac{\varepsilon}{\delta}$$

Предела не существует, поэтому интеграл расходится.

2.2 Свойства несобственного интеграла

Будем называть промежутком отрезок, интервал или полуинтервал и обозначать его как $\langle a, b\rangle$

1. Пусть $f \in \tilde{R}[a,\infty)$, $g \in \tilde{R}[a,\infty)$. Тогда $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}: \lambda f+\mu g \in \tilde{R}[a,\infty)$. (линейность).

2. Пусть $f \in \tilde{R}[a,\infty)$, $g \in \tilde{R}[a,\infty)$ и $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \geqslant a$. Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)dx \leqslant \int\limits_a^\infty g(x)dx$.

3. Формула замены переменной.
   Пусть $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}, f \in \tilde{R}$, $\varphi\colon \langle\alpha,\beta\rangle \to \langle a,b\rangle$, причем $\varphi(a) = a, \varphi(\beta) = b$, φ возрастает и у неё существует и непрерывна производная на $\langle\alpha,\beta\rangle$. Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$.

4. Формула интегрирования по частям.
   Пусть функции $u(x), v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)v(x)$, тогда оба интеграла $\int\limits_a^\infty u(x)v'(x)dx, \int\limits_a^\infty u'(x)v(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, и в случае сходимости $\int\limits_a^\infty u'(x)v(x)dx + \int\limits_a^\infty v'(x)u(x)dx = uv\Big|_a^\infty$.

Доказательство.
1. Линейность следует из линейности определенного интеграла и линейности предела. Действительно,

$$\int\limits_a^\infty(\lambda f+\mu g)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b(\lambda f+\mu g)dx = \lim_{b\to\infty}\left(\lambda\int\limits_a^b f(x)dx + \mu\int\limits_a^b g(x)dx\right) =$$

$$= \lambda \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx + \mu \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b g(x)dx = \lambda \int\limits_a^\infty f(x)dx + \mu \int\limits_a^\infty g(x)dx$$

2. Рассмотрим $x_0 \in [a, b\rangle$. По аналогичному свойству для собственных инетгралов имеем

$$f(x) \leqslant g(x) \implies \int\limits_a^{x_0} f(x) \leqslant \int\limits_a^{x_0} g(x)dx$$

откуда, переходя к пределу при $x_0 \to \infty$ имеем искомое свойство.
3. Рассмотрим $x_0 \in [a, b\rangle$. По аналогичному свойству для собственных инетгралов имеем

$$\int\limits_\alpha^{\beta_0} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int\limits_a^{x_0} f(t)dt$$

откуда, переходя к пределу при $x_0 \to \infty$ имеем искомое свойство.
4 (Фихтенгольц). Рассмотрим $x_0 \in [a, b\rangle$. По обычной формуле интегрирования по частям имеем

$$\int\limits_a^{x_0} u\,dv = (u(x_0)v(x_0) - u(a)v(a)) - \int\limits_a^{x_0} v\,du$$

По условию, что правая часть имеет конечные пределы при $x_0 \to \infty$, поэтому и левая часть тоже сходится. □

Пример. В результате замены переменной несобственный интеграл может стать собственным, и наоборот:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} x = \sin t \\ t = \arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} = \int\limits_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

(здесь $x = 1$ - особая точка).

2.3 Критерии сходимости несобственного интеграла

Теорема 4 *(критерий Коши)*
Пусть $\forall b \geqslant a$ *функция интегрируема на* $[a, b]$. *Тогда* $\int_a^\infty f(x)dx$ *сходится* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists b_0(\varepsilon) > a\ \forall b_1, b_2 > b_0 : \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$

Доказательство. По условию, существует предел $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = A \in \mathbb{R}$, где $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда из существования предела следует для $\frac{\varepsilon}{2}$: $\exists b_o(\varepsilon) > a : |F(b) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $b_1 > b_0,\ b_2 > b_0$. Тогда $|F(b_2) - F(b_1)| = |F(b_2) - A| + |F(b_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Достаточность. Докажем существование предела $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$ из определения предела по Гейне. Пусть $b_n \to \infty$, тогда $\forall b_0 > a\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 :$ $b_n > b_0$. Зафиксируем $n, m > n_0$. Тогда $b_n > b_0$ и $b_m > b_0$. По условию отсюда следует, что $|F(b_n) - F(b_m)| < \varepsilon$. По критерию Коши для числовой последовательности $F(b_n)$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} F(b_n) = B \in \mathbb{R}$.
Покажем, что предел не зависит от выбора последовательности b_n. Выберем другую последовательность b_n^*. Обозначим предел $\lim\limits_{n\to\infty} F(b_n^*) = B$. Составим последовательность $b_1, b_1^*, b_2, b_2^*, ... \to \infty$. Тогда предел F от этой последовательности обозначим как C. Так как пределы подпоследовательностей сходятся к пределу последовательности, то $A = B = C$. Значит, выполняется условие определения предела по Гейне, значит, интеграл сходится. □

Пример. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 0$, расходится при $\alpha \leqslant 0$. Докажем это.
1. $\alpha > 0$. Поехали: $\forall \varepsilon > o\ \exists b_0(\varepsilon) > 1\ \forall b_1 > b_0, b_2 > b_0 : \left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right| < \varepsilon$.
Доказываем: $\left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right| = \left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{x^\alpha} d\cos x\right| = \left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|_{b_1}^{b_2} - \int_{b_1}^{b_2} \cos x d(\frac{1}{x^\alpha}) \leqslant$ $... \leqslant \frac{4}{b_0^\alpha}$. Значит, $b_0 > (\frac{4}{\varepsilon})^{\frac{1}{\alpha}}$.
2. $\alpha \leqslant 0$. Синус теперь принимает разные знаки. Пусть $b_k = 2\pi k$. Тогда по критерию Коши интеграл расходится.

Теорема 5 *(критерий сходимости через остаток)*
Пусть $\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx,\ (b > a)$. *Тогда:*
1. Если несобственный интеграл сходится, то и любой из его остатков сходится.
2. Если хотя бы один из остатков сходится, то несобственный интеграл сходится.

Доказательство. $\int_a^b f(x)dx$ - число, поэтому сходимость равносильна сходимости остатка. □

Теорема 6 *(критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции)*
Пусть $\forall b > a$ *функция интегрируема на* $[a, b]$ *и неотрицательна.Тогда* $\int_a^\infty f(x)dx$ *сходится* $\Leftrightarrow$ *первообразная* $F(b) < M$ *ограниченна.*

Доказательство. Пусть $a < b_1 < b_2$. Имеем

$$F(b_2) = \int\limits_a^{b_2} f(x)dx = \int\limits_a^{b_1} f(x)dx + \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx = F(b_1) + \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx$$

откуда $F(b_2) - F(b_1) = \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx \geqslant 0$. Значит, $F(b)$ неубывает и ограниченна сверху. Значит, существует предел $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$, и интеграл сходится. Обратно, пусть существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$, то $F(b)$ ограниченна в некоторой окрестности бесконечности U. Тогда существует такое $b_0 > a$ $\forall b \geqslant b_0 : F(b) \leqslant M$. Значит, $B(b^*) \leqslant M$ - ограниченна. Если $b^* < b_0$, то $F(b^*) < F(b_0)$. Итак, F ограниченна. $\square$

2.4 Признаки сравнения

В данном разделе признаки работают для неотрицательных функций.

Теорема 7 *(первый признак сравнения/в оценочной форме)*
Пусть $f(x) > g(x) > 0$ начиная с некоторого $x > a$, и для любого $b > a$ функции интегрируемы на $[a, b]$. Тогда
1. Если $\int_a^\infty f(x)$ сходится, то и $\int_a^\infty g(x)$ сходится.
2. Если $\int_a^\infty g(x)$ расходится, то и $\int_a^\infty f(x)$ расходится.

Доказательство. 1. Обозначим $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ и $G(x) = \int\limits_a^b g(x)dx$. По условию, интеграл сходится, поэтому $F(b) \leqslant M$. По свойству определенного интеграла, $F(b) \geqslant G(x)$, поэтому $G(b)$ также ограниченна и сходится по предыдущему критерию.

2. Допустим, что $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится. Тогда из первого пункта следует, что и $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится, что противоречит условию. $\square$

Теорема 8 *(второй признак сравнения/в предельной форме)*
Если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $\infty \neq k \neq 0$, то их несобственные интегралы сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Пусть $k > 0$. Тогда для

$$\varepsilon > \frac{k}{2}\ \exists b_0 > a\ \forall x > b_0 : \frac{k}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3k}{2}$$

Значит, $f(x) < \frac{3k}{2}g(x)$, и из сходимости интеграла от $g(x)$ следует сходимость интеграла от $f(x)$. С другой стороны, $\frac{k}{2}g(x) < f(x)$, поэтому из сходимости интеграла от $f(x)$ следует сходимость интеграла от $g(x)$. $\square$

Следствие. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \infty$, то интегралы сходятся или расходятся одновременно.

2.5 Абсолютная и условная сходимость

Определение 4 *Интеграл сходится абсолютно, если сходится интеграл от модуля функции.*

Теорема 9 *Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Используем критерий Коши: $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ сходится $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_0 > a\ \forall b_1, b_2 > b_0 : \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$$

Так как $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx\right|$, то и для $\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx$ выполянется условие Коши. $\square$

Пример. Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ сходится условно, так как $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = -\int\limits_0^\infty \frac{1}{x}\cos x = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^\infty + \int\limits_1^\infty \cos x\, d(\frac{1}{x}) = \cos 1 - \int\limits_1^b \frac{\cos x}{x^2}$. Второй интеграл сходится по признаку сравнения. Но абсолютно он не сходится, так как $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \left|\frac{1-\cos^2}{2x}\right|$, а инетграл от $\frac{1}{2x}$ расходится.

Теорема 10 *(признак Дирихле)*
Пусть:

1. $f \in C[a, \infty)$ *(и существует интеграл* $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$*);*
2. $\exists M = const\ \forall b \geqslant a : |f(b)| \leqslant M$*;*
3. $g'(x) \in C[a, \infty)$*;*
4. $g'(x)$ *знакопостоянна на* (a, ∞)*;*
5. $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$*;*

Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда из условия 5 для

$$\frac{\varepsilon}{4M}\ \exists b_0 > a\ \forall x > b_0 : |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

Возьмем произвольные $b_1, b_2 > b_0$, тогда

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dF(x)\right| = \left|g(x)F(x)\Big|_{b_1}^{b_2} - \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)dx\right| =$$

$$= \left|g(b_2)F(b_2) - g(b_1)F(b_1) - F(\xi)\int\limits_{b_1}^{b_2} g'(x)dx\right|$$

Здесь мы воспользовались теоремой о среденем, взяв $\xi \in (b_1, b_2)$. Итак,

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| \leqslant |g(b_2)F(b_2)|+|g(b_1)F(b_1)|+|F(\xi)g(b_2)|+|f(\xi)g(b_1)| \leqslant \frac{4M\cdot\varepsilon}{4M}$$

Значит, $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится по критерию Коши. $\square$

Теорема 11 *(признак Абеля)*
Пусть:
1. $f \in C[a,\infty)$ 2. $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится;
2. $g'(x) \in C[a,\infty)$;
3. $g'(x)$ знакопостоянна;
4. $\exists M = const\ \forall x \geqslant a : |g(x)| \leqslant M$ Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда из условия 2 по критерию Коши для

$$\frac{\varepsilon}{2M}\ \exists b_0 > a\ \forall b_1, b_2 > b_0 : \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$$

Произведем оценку:

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| = |g(b_2)F(b_2) - g(b_1)F(b_1) - F(\xi)g(b_2) + F(\xi)g(b_1)| =$$

$$= \left| g(b_2) \int\limits_{\xi}^{b_2} f(x)dx + g(b_1) \int\limits_{b_1}^{\xi} f(x)dx \right| \leqslant |g(b_2)| \cdot \left| \int\limits_{\xi}^{b_2} f(x)dx \right| + |g(b_1)| \cdot \left| \int\limits_{b_1}^{\xi} f(x)dx \right| <$$

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

Значит, интеграл сходится по критерию Коши.

Глава 3

Интеграл, зависящий от параметра

3.1 Собственный интеграл, зависящий от параметра

Определение 5 *Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману (по x) на отрезке $[a(y),b(y)]$ при любом значении параметра $y \in Y$. Тогда собственный интеграл - $F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$.*

Теорема 12 *(о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра)*
Пусть
1. $f(x,y)$ определена на $D = [a(y),b(y)] \times [c,d] = X \times Y$;
2. $a(y), b(y)$ непрерывны на $[c,d]$, причем $a \leqslant a(y) \leqslant b(y) \leqslant b$;
Тогда $F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$ непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство. Покажем, что $\forall y_0 \in [c,d] : \lim\limits_{y \to y_0} F(y) = F(y_0)$. Сделаем линейную замену $x = a(y) + (b(y) - a(y))t$, $dx = (b(y) - a(y))dt$. Тогда

$$F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx = \int\limits_0^1 f(a(y) + (b(y) - a(y))t, y) \cdot (b(y) - a(y))dt$$

Обозначим $g(t,y) = f(a(y) + (b(y) - a(y))t, y) \cdot (b(y) - a(y))$. Эта функция непрерывна на $P = [0,1] \times [c,d]$. Это множество - компакт, поэтому если функция непрерывна на компакте, то она и равномерно непрерывна на нем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall(t_1, y_1), (t_2, y_2) \in P : \sqrt{(t_2 - t_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta \implies$$

$$\implies |g(t_1, y_1) - g(t_2, y_2)| < \varepsilon$$

Это означает, что

$$|F(y) - F(y_0)| = \left|\int\limits_0^1 \big(g(t, y) - g(t, y_0)\big)dt\right| \leqslant \int\limits_0^1 |g(t, y) - g(t, y_0)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \int\limits_0^1 dt = \varepsilon$$

Этим доказано, что если $|y - y_0| < \delta$, то и $|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{y\to y_0} F(y) = F(y_0)$. $\square$

Теорема 13 *(о предельном переходе под знаком собственного интеграла, зависящего от параметра)*
Пусть
1. $f(x, y)$ *определена и непрерывна на* $D = [a(y), b(y)] \times [c, d]$*;*
2. $a(y), b(y) \in C[c, d]$*;*
Тогда

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx = \int\limits_{\lim\limits_{y\to y_0} a(y)}^{\lim\limits_{y\to y_0} b(y)} \lim_{y\to y_0} f(x, y)dx = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)dx$$

Доказательство. В предыдущей теореме было доказано, что при выполнении условий имеет место $\lim\limits_{y\to y_0} F(y) = \lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) = F(y_0)$. Но $F(y_0) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)dx$, откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

Теорема 14 *(о дифференцируемости собственного интеграла, зависящего от параметра / правило Лейбница)*
Пусть $f(x, y)$
1. непрерывна на $P = [a, b] \times [c, d]$*;*

2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывна на P;
Тогда:
1. $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ дифференцируема на $[c,d]$;
2. $F'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$

Доказательство. Пусть $y \in [c,d]$, $y+h \in [c,d]$. Рассмотрим $F(y+h) - F(y) = \int\limits_a^b (f(x,y+h) - f(x,y))dx$, значит, по теореме Лагранжа это равно $\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta h)h\,dx$, где $\theta \in (0,1)$. Дифференцируем: $F'(y) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{F(y+h)-F(y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta h)dx$. При $h \to 0$ делаем замену $u = y+\theta h$, $u \to y$. Тогда предел $\lim\limits_{h\to 0}\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,u)dx =$ по теореме о предельном переходе $= \int\limits_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dx$. $\square$

Следующая теорема обощает правило Лейбница:

Теорема 15 *(обобщенное правило Лейбница)*
Пусть
1. $f(x,y)$ непрерывна на $D = \{(x,y) \mid a(y) \leqslant x \leqslant b(y), c \leqslant y \leqslant d\}$;
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ непрерывна на D;
3. $a'(y), b'(y)$ непрерывны на $[c,d]$.
Тогда $F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$ дифференцируема на $y \in [c,d]$, причем

$$F'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(b(y),y)\cdot b'(y) - f(a(y),y)\cdot a'(y)$$

Доказательство. Рассмотрим $F(y) = F(y, a(y), b(y))$ как сложную функцию. По правилу производной сложной функции

$$\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}$$

Применяя правило Лейбница, получаем

$$\frac{dF}{dy} = \frac{d}{dy}\Bigg(\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx\Bigg) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Беря частную производную по b, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{d}{db(y)}\Bigg(\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx\Bigg) = f\big(b(y),y\big)$$

Аналогично, $\frac{\partial F}{\partial a} = -f\big(a(y),y\big)$. Из этих соотношений и получаем искомую формулу. □

Теорема 16 *(об интегрировании интеграла, зависящего от параметра)*
Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $P = [a,b] \times [c,d]$. Тогда

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

Доказательство. Введем функции $G(t) = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^t f(x,y)dy$, $H(t) = \int\limits_a^t dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$. Докажем, что $G(b) = H(b)$ (что доказывает требуемое утверждение). Введем функцию $g(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)dx$, тогда $G(t) = \int\limits_c^d g(t,y)dy$ - применима теорема о дифференцировании сложной функции: $\frac{\partial g}{\partial t} = \Bigg(\int\limits_a^t f(x,y)dx\Bigg)'_t = f(t,y)$ - непрерывна на P по условию. Теперь докажем, что $g(t,y)$ непрерывна на P, для этого покажем, что $\lim\limits_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta g = 0$. Имеем $\Delta g = g(t+\Delta t, y+\Delta y) - g(t,y) = \int\limits_a^{t+\Delta t} f(x,y+\Delta y)dx - \int\limits_a^t f(x,y)dx = \int\limits_a^t (f(x,y+\Delta y) - f(x,y))dx + \int\limits_t^{t+\Delta t} f(x,y+\Delta y)dx$. Так как $f(x,y)$ непрерывна на компакте P, то она равномерно непрерывна на

P и ограниченна константой M. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из равномерной непрерывности для

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0\, \exists \delta_1 > 0\, \forall (x_1, y_1) \in P\, \forall (x_2, y_2) \in P : \sqrt{(x_1-x_2)^2 - (y_1-y_2)^2} < \delta_1$$

$$\implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Если $|\Delta y| < \delta$, то $|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$; тогда можно оценить интеграл:

$$\left| \int\limits_a^t (f(x, y + \Delta y) - f(x, y))dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{t-a}{b-a} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Если $|\Delta t| < \frac{\varepsilon}{2M}$, то

$$\left| \int\limits_t^{t+\Delta t} f(x, y + \Delta y)dx \right| \leqslant \left| \int\limits_t^{t+\Delta t} |f(x, y + \Delta y)|dx \right| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $\delta = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{2M}\}$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall |\Delta t| < \delta\ \forall |\Delta y| < \delta : |\Delta g| < \varepsilon$$

Это означает, что $\lim\limits_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta g = 0$. Заметим, что $g(t, y)$ непрерывна на P. Применим теорему о дифференцировании к функции $G(t)$:

$$G'(t) = \int\limits_c^d \frac{\partial g}{\partial t}(t, y)dy = \int\limits_c^d f(t, y)dy$$

С другой стороны,

$$H'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int\limits_a^t dx \int\limits_c^d f(x, y)dy \right) = \int\limits_c^d f(t, y)dy$$

Итак, мы получили, что $G'(t) = H'(t),\ G(a) = H(a) = 0$, откуда $G(t) = H(t) \implies G(b) = H(b)$. $\square$

Пример 1. $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}dx$, $0 < a < b$. Имеем $\int\limits_a^b x^y dy = \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}$, подынтегральная функция непрерывна на бруске $[0, 1] \times [a, b]$, тогда интеграл равен $\int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y dy = \int\limits_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln(b + 1) - \ln(a + 1)$.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^1 \sin(\ln(\frac{1}{x}))\frac{x^b-x^a}{\ln(x)} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b \sin(\ln(\frac{1}{x}))x^y dy$. Функция $f(x,y) = \sin(\ln(\frac{1}{x}))x^y$ непрерывна на $[0,1]\times[a,b]$, $f(0,y)=0$. Тогда $\int = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^1 \sin(\ln(\frac{1}{x}))x^y dx = \begin{cases} t = \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x) \\ dx = -e^{-t}dt \end{cases} = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^\infty \sin(t)e^{-ty}e^{-t}dt.$

Внутренний интеграл возьмем по частям: $I = \int\limits_0^\infty \sin(t)e^{-t(y+1)}dt = -\cos(t)e^{-t(y+1)}\Big|_0^\infty - (y+1)\int\limits_0^\infty cos(t)e^{-t(y+1)}dt$, $I = 1-(y+1)^2 I$. Значит, искомый интеграл равен $\int\limits_a^b \frac{dy}{(y+1)+1} = arctg\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$. Домашка: тоже самое для косинуса.

3.2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Обозначим $F(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$, $y \in E$.

Определение 6 *Если $\forall y \in E$ $F(y)$ сходится, то поточечная сходимость на E -*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_0(\varepsilon, y) > a\ \forall b > b_0\ \forall y \in E : \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Определение 7 *$F(y)$ сходится равномерно на E, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_0(\varepsilon)\ \forall b > b_0\ \forall y \in E : \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

(то есть оценка не зависит от y).

Как и с рядами, есть супремум-критерий.

Теорема 17 *(супремум-критерий)*
Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$, зависящий от параметра, сходится равномерно на E тогда и только тогда, когда

$$\lim_{b\to\infty}\sup_{y\in E}\left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| = 0$$

Доказательство. Пусть интеграл сходится равномерно. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по определению равномерной сходимости для

$$\varepsilon > 0\ \exists b_0(\varepsilon)\ \forall b > b_0\ \forall y \in E : \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Пусть $g(b) = \sup\limits_{y \in E}\left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right|$. Тогда всилу произвольности b имеем $g(b) < \varepsilon$, а в силу произвольности ε имеем $\lim\limits_{b\to\infty} g(b) = 0$, что эквивалентно условию супремум-критерия.
Обратно, пусть $\lim\limits_{b\to\infty}\sup\limits_{y\in E}\left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| = 0$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists b_0\ \forall b > b_0 : \sup_{y\in E}\left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Значит, выполняется неравенство

$$\forall y \in E : \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| \leqslant \sup\left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right|$$

откуда следует равномерная сходимость. □

Теорема 18 *(метод оценки остатка)*
Пусть интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится на E, и $r(b)$ - какая-то оценка остатка. Тогда если $|R(b,y)| \leqslant r(b)\ \forall y \in E$ и $r(b) \to 0$ при $b \to \infty$, тогда $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на E. Если же существует такая функция $y(b)$, что $R(b, y(b)) \to s \neq 0$, то интеграл не сходится равномерно на X.

Доказательство. По теореме 5, сходимость несобственного интеграла эквивалентна сходимости любого из его остатков. □

Пример. $F(y) = \int\limits_0^\infty ye^{-xy}dx$. Доказать, что сходимость равномерная при $[y_0, \infty)$, $y_0 \geqslant 0$, но на $(0, \infty)$ нет равномерной сходимости. Решение: пусть остаток $R(b,y) = \int\limits_b^\infty ye^{-xy}dx = e^{-by}$. По методу оценки остатка при оценке $r(b) = e^{-by_0}$ имеем равномерную сходимость. Если мы возьмем $y = \frac{1}{b}$, то и $R(b, \frac{1}{b}) = e^{-1} \neq 0$, поэтому нет равномерной сходимости.

Пример. Пусть $f(x) > 0$ при $x \geqslant 0$, $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ сходится. Тогда $\forall \alpha > 0$ интеграл $\int\limits_0^\infty f(y^\alpha x)dx$ сходится равномерно на $[y_0, \infty)$, $y_0 > 0$, и сходится неравномерно на $(0, \infty)$.

Решение. 1. Методом оценки остатка: $R(b, y) = \int\limits_b^\infty f(y^\alpha x)dx = \frac{1}{y^\alpha}\int\limits_b^\infty f(y^\alpha x)d(y^\alpha x) = \frac{1}{y^\alpha}\int\limits_{by^\alpha}^\infty f(t)dt \leqslant \frac{1}{y_0^\alpha}\int\limits_{by^\alpha}^\infty f(t)dt = r(b) \to 0$ при $b \to \infty$, так как $\int\limits_0^\infty f(t)dt$ сходится.

2. Докажем неравномерную сходимость по супремум-критерию: $\sup\limits_{y>0}\int\limits_b^\infty f(y^\alpha x)dx = \sup\limits_{y>0}\frac{1}{y^\alpha}\int\limits_{by^\alpha}^\infty f(t)dt \geqslant \sup\limits_{0<y\leqslant 1}\frac{1}{y^\alpha}\int\limits_{by^\alpha}^\infty f(t)dt \geqslant \sup\limits_{0<y\leqslant 1}\frac{1}{y^\alpha}\int\limits_b^\infty f(t)dt = \infty$ при $y \to \infty$. Тогда по супремум-критерию нет равномерной сходимости.

Пример. Интеграл Пуассона аналогично сходится равномерно на бесконечности, если интервал начинается не с нуля.

3.3 Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

1. Равномерно сходящиеся интегралы образуют линейное пространство.
2. Если интеграл равномерно сходится на множестве, то он равномерно сходится и на его подмножестве.
3. Интеграл сходится равномерно на конечном объединении областей, на которых он сходится равномерно.

Доказательство.
1. Следует из формулы

$$\int\limits_a^\infty \big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y)\big)dx = \lambda\int\limits_a^\infty f(x,y)dx + \mu\int\limits_a^\infty g(x,y)dx$$

для несобственных интегралов.
2. Допустим, интеграл сходится равномерно на E и не сходится равномерно на $E_0 \subset E$. Тогда мы можем найти такой $y \in E_0$, что для некоторого

$\varepsilon > 0 : \left|\int\limits_a^\infty f(x,y)\right| < \varepsilon$. Но тогда интеграл не сходится равномерно и на E, так как $y \in E_0 \subset E$, что противоречит условию.

3. Пусть $E = \bigcup\limits_{i=1}^n E_i$ - объединение конечного числа областей, на которых интеграл сходится равномерно. Тогда по супремум-критерию на каждой области существует $s_i = \sup\limits_{y\in E_i}\left|\int\limits_a^\infty f(x,y)dx\right|$. Значит, на конечном объединении областей существует $s_{max} = \sup\limits_i s_i$. В силу произвольности нижнего предела и оценки для s_i, получаем, что

$$\lim_{b\to\infty}\sup_{y\in E}\left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| = 0 \quad \square$$

Пример. Покажем, что свойство 3 нельзя обощить на объединения бесконечного числа множеств. Так, $\int\limits_0^\infty e^{-x^2y}dx$ сходится равномерно на $E_n = [\frac{1}{n}, \infty)$, но расходится на бесконечном объединении таких областей.

Теорема 19 *(критерий Коши)*

$\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists b_0(\varepsilon) > a\ \forall b_1, b_2 > b_0\ \forall y \in Y : \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для

$$\frac{\varepsilon}{2}\ \exists b_0 > a\ \forall b > b_0\ \forall y \in Y : \left|\int\limits_{b_1}^{\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $b_1, b_2 > b_0$, тогда $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_{b_1}^{\infty} f(x,y)dx - \int\limits_{b_2}^{\infty} f(x,y)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b_1}^{\infty} f(x,y)dx\right| - \left|\int\limits_{b_2}^{\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Обратно, для

$$\frac{\varepsilon}{2}\ \exists b_0 > a\ \forall b_1, b_2 > b_0\ \forall y \in Y : \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| < \left|\frac{\varepsilon}{2}\right|$$

Тогда $\left|\int\limits_{b_1}^{\infty} f(x,y)dx - \int\limits_{b_2}^{\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $b_2 \to \infty$, то

$$\forall y \in Y : \int\limits_{b_2}^{\infty} f(x,y)dx \to 0$$

(так как есть поточечная сходимость); $\left|\int\limits_{b_1}^{\infty} f(x,y)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ Итак, выполняется определение. □

3.4 Сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 20 *(метод граничной точки)*
Пусть
1. $f(x,y)$ *непрерывна на* $[a,\infty) \times [c,d]$*;*
2. $\forall y \in (c,d)$ *интеграл* $\int\limits_{a}^{\infty} f(x,y)dx$ *сходится;*
3. $\int\limits_{a}^{\infty} f(x,c)dx$ *расходится.*
Тогда $\int\limits_{a}^{\infty} f(x,y)dx$ *не сходится равномерно на* (c,d)*.*

Доказательство (Зорич). Так как при $y = c$ интеграл расходится, тогда найдется $\varepsilon > 0$ и такие $b_1, b_2 \in [a,\infty)$, что $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,c)dx\right| > \varepsilon_0$. В силу непрерывности функции $F(y) = \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx$ на $[c,d]$ неравенство $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| > \varepsilon_0$ будет выполняться в некоторой окрестности точки c, поэтому в силу критерия Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, инетграл не сходится равномерно на (c,d).

Теорема 21 *(признак Вейерштрасса равномерной сходимости)*
Пусть

1. $\forall x \geqslant a \ \forall y \in Y : |f(x,y)| \leqslant g(x)$*;*
2. $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ *сходится.*
Тогда $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y*.*

Доказательство. Используем критерий Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда интеграл сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_0 > a \ \forall b_1, b_2 > b_0 : \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$$

По условию $\forall y \in Y \ \forall x \geqslant a : |f(x,y)| \leqslant g(x)$, откуда $g(x) \geqslant 0$. Значит, $\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx \right| = \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx$, поэтому $\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| \leqslant \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \right| \leqslant \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx \right| < \varepsilon$. По критерию Коши, $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y. $\square$

Теорема 22 *(признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра)*
1. $\forall y \in Y \ f(x,y)$ *непрерывна на* $[a, \infty)$
2. $\forall y \in Y \ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ *непрерывна на* $[a, \infty)$
3. $\forall y \in Y \ g(x,y)$ *монотонна по* $x \in [a, \infty)$
4. $g(x,y) \rightrightarrows 0$ *при* $x \to \infty$
5. $\exists M = const \ \forall y \in Y \ \forall x \geqslant a : \left| \int\limits_a^x f(t,y)dt \right| \leqslant M$*.*
Тогда $\int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y*.*

Доказательство. По критерию Коши. Для

$$\frac{\varepsilon}{4M} > 0 \ \exists b_0(\varepsilon) > a \ \forall x > b_0 \ \forall y \in Y : |g(x,y)| < \frac{\varepsilon}{4m}$$

Возьмем $b_1, b_2 > b_0$. Тогда

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx \right| = \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x,y)d\left(\int\limits_a^x f(t,y)dt \right) \right| =$$

$$= \left| \left(g(x,y) \cdot \int\limits_a^x f(t,y)dt \right) \Big|_{b_1}^{b_2} - \int\limits_{b_1}^{b_2} \left(\int\limits_a^x f(t,y)dt \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant |g(b_2,y)| \cdot \left| \int\limits_a^{b_2} f(t,y)dt \right| + |g(b_1,y)| \cdot \left| \int\limits_a^{b_1} f(t,y)dt \right| + \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} \left| \int\limits_a^x f(t,y)dt \right| \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot M + M \cdot |g(b_2,y) - g(b,y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists b_0(\varepsilon) > a \; \forall b_1, b_2 > b_0 \; \forall y \in Y : \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Тогда по критерию Коши $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

□

Теорема 23 *(признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра)*

1. $\forall y \in Y$ $f(x,y)$ непрерывна на $[a,\infty)$

2. $\forall y \in Y$ $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ непрерывна на $[a,\infty)$

3. $\forall y \in Y$ $g(x,y)$ монотонна по $x \in [a,\infty)$

4. $\exists M = const \; \forall y \in Y \; \forall x \geqslant a : |g(x,y)| \leqslant M$.

5. $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Тогда $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Доказательство. По критерию Коши. Для

$$\frac{\varepsilon}{3M} > 0 \; \exists b_0(\varepsilon) > a \; \forall b_1, b_2 > b_0 \; \forall y \in Y : \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Возьмем $b_1, b_2 > b_0$. Тогда

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx \right| = \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x,y)d\left(\int\limits_{b_1}^{x} f(t,y)dt \right) \right| =$$

$$= \left| \left(g(x,y) \cdot \int\limits_{b_1}^{x} f(t,y)dt \right) \Big|_{b_1}^{b_2} - \int\limits_{b_1}^{b_2} \left(\int\limits_{b_1}^{x} f(t,y)dt \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant |g(b_2,y)| \cdot \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(t,y)dt \right| + \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} \left| \int\limits_{b_1}^{x} f(t,y)dt \right| \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + M \cdot |g(b_2,y) - g(b,y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_0(\varepsilon) > a \ \forall b_1, b_2 > b_0 \ \forall y \in Y : \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Тогда по критерию Коши $\int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y. $\square$

Пример. $\int\limits_1^\infty \frac{y^2 \cos xy}{x+y^2}$, $y \in [0,\infty)$. Исследуем на равномерную сходимость. Пусть $f(x,y) = y\cos xy$, $g(x,y) = \frac{y}{x+y^2}$. Условия проверяются очевидным образом, интеграл сходится равномерно по Дирихле.

Теорема 24 *(о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра)*

1. $f(x,y)$ непрерывна на $[a,\infty) \times Y$

2. $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Тогда $\Phi(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ непрерывна на Y

Доказательство. Функция непрерывна, если она непрерывна в каждой точке. $\Phi(y)$ непрерывна в y_0 тогда и только тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in Y : |y - y_0| < \delta \implies |\Phi(y) - \Phi(y_0)| < \varepsilon$$

По второму условию, так как интеграл сходится равномерно, то для любого

$$\frac{\varepsilon}{3} > 0 \ \exists b_0 > a \ \forall b > b_0 \ \forall y \in Y : \left| \int\limits_b^\infty f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\Phi(y) - \Phi(y_0) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx - \int\limits_a^\infty f(x,y_0)dx =$$

$$= \int\limits_a^b f(x,y)dx + \int\limits_b^\infty f(x,y)dx - \int\limits_a^b f(x,y_0)dx - \int\limits_b^\infty f(x,y_0)dx =$$

$$= \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx - \int\limits_a^b f(x,y_0)dx\right) + \int\limits_b^\infty f(x,y)dx - \int\limits_b^\infty f(x,y_0)dx$$

По теореме о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра, для

$$\forall \frac{\varepsilon}{3} > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in Y : |y - y_0| < \delta \implies |F(y) - F(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$|\Phi(y)-\Phi(y_0)| \leqslant |F(y)-F(y_0)| + \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| + \left|\int\limits_b^\infty f(x,y_0)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Значит, $\Phi(y)$ непрерывна в любой точке на Y, то есть она непрерывна на Y. □

Теорема 25 *(о предельном переходе под знаком несобственного интеграла)*
1. $f(x,y)$ *непрерывна на* $[a,\infty) \times Y$
2. $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y.
Тогда

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty f(x,y_0)dx$$

Доказательство. В предыдущей теореме было доказано, что функция $\Phi(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ непрерывна на Y. Значит,

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \lim_{y\to y_0} \Phi(y) = \Phi(y_0) = \int\limits_a^\infty f(x,y_0)dx$$

Так как функция $f(x,y)$ непрерывна, то получаем второе равенство:

$$\int\limits_a^\infty f(x,y_0)dx = \int\limits_a^\infty \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx \quad \Box$$

Теорема 26 *(об интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра)*
1. $f(x,y)$ *непрерывна на* $[a,\infty)\times[c,d]$
2. $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* $[c,d]$.
Тогда

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

Доказательство. Обозначим $\Phi(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$. Эта функция непрерывна на $[c,d]$ по теореме о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра. Значит, $\Phi(y)$ интегрируема на $[c,d]$, то есть существует и конечен интеграл $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = const$. Покажем, что несобственный интеграл справа сходится к этой константе, то есть при $b\to\infty$ имеет место $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \to \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$ Тогда для

$$\frac{\varepsilon}{d-c} > 0 \ \exists b_0(\varepsilon) \ \forall y\in[c,d] \ \forall b > b_0 : \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$$

Отсюда

$$\left|\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy - \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx\right| \leqslant \int\limits_c^d dy \left|\int\limits_a^b f(x,y)dx - \int\limits_a^\infty f(x,y)dx\right| =$$

$$= \int\limits_c^d dy \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}\cdot(d-c) = \varepsilon$$

Итак,

$$\forall\varepsilon>0\,\exists b_0(\varepsilon)>a\,\forall b>b_0\,\forall y\in Y:\left|\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy-\int\limits_c^d dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx\right|<\varepsilon\quad\square$$

Теорема 27 *(о дифференцировании несобственного интеграла, зависящего от параметра)*
Пусть
1. $f(x,y)$ непрерывна на $[a,\infty)\times Y$
2. $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится $\forall y\in Y$.
3. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывна на $[a,\infty)\times Y$.
4. $\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.
Тогда $\forall y\in Y$

$$\left(\int\limits_a^\infty f(x,y)dx\right)'_y=\int\limits_a^\infty\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Доказательство. Так как выполняются условия теоремы об интегрировании н.и.з.от п. для $\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$, то зафиксируем $y_0\in Y,\ y\in\tilde{Y}$ без крайних точек, и тогда

$$\int\limits_{y_0}^y dy\int\limits_a^\infty\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx=\int\limits_a^\infty dx\int\limits_{y_0}^y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx-\int\limits_a^\infty f(x,y_0)dx$$

Второй интеграл равен числу, поэтому

$$\left(\int\limits_{y_0}^y dy\int\limits_a^\infty\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx\right)'_y=\int\limits_a^\infty\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx=\left(\int\limits_a^\infty f(x,y)dx\right)'_y$$

$\square$

Пример. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}e^{-\beta x}dx$, где $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in 0$. Легко проверяются условия теоремы об интегрировании, и мы можем привести интеграл к виду $\int\limits_0^\infty dx\int\limits_0^\alpha\cos xy\cdot e^{-\beta x}dy$, который берется по частям, ответ $arctg\frac{\alpha}{\beta}$. Так как арктангенс нечетный, то эта формула справедлива как для положительных, так и отрицательных α (при условии $\beta > 0$). Другой способ - по теореме о дифференцировании. Снова обозначим $\Phi(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$. $\Phi(x, \alpha)$ непрерывна на $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Доопределим функцию: $\Phi(0, \alpha) = \lim\limits_{x \to +0} \Phi = \alpha$. Снова легко проверяются условия теоремы. Имеем $\Phi(\alpha) = \int\limits_0^\infty \cos \alpha x e^{-\beta x} dx = \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2}$. Интегрируя и подставляя начально условие, снова получаем арктангенс

3.5 Вычисление некоторых классических интегралов

Интеграл Дирихле

$$\boxed{\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha}$$

Пусть $\Phi(\beta) = \int\limits_a^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$.
1) $\varphi(x, \beta) = \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x}$ непрерывна на $[0, \infty) \times [0, \infty)$, $\varphi(0, \beta) = \alpha$.
2) Докажем, что $\Phi(\beta)$ сходится равномерно на $[0, \infty)$. Так как $\forall \alpha \in \mathbb{R}:$ $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ сходится по признаку Дирихле, то сходимость исходного интеграла равномерная (так как не зависит от β). Далее, $0 \leqslant e^{-\beta x} \leqslant 1$ при $\beta \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Значит, $e^{-\beta x}$ убывает при данных условиях. По признаку Абеля $\Phi(\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$ сходится равномерно. По теореме о предельном переходе под знаком несобственного интеграла на $[0, \infty)$, имеем $\Phi(0) = \lim\limits_{\beta \to 0} \Phi(\beta)$. Теперь найдем этот интеграл: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\alpha \cos(xy) e^{-\beta x} dy = \int\limits_0^\alpha dy \int\limits_0^\infty \cos(xy) e^{-\beta x} dx = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\beta^2 + y^2} \right) dy = \operatorname{arctg} \frac{y}{\beta} \Big|_0^\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}$. Значит, $\Phi(0) = \lim\limits_{\beta \to 0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha$.

Интеграл Лапласа

$$\boxed{\int\limits_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}}$$

Дифференцировать много раз не получится, так как мы придем к расходящемуся ряду. Нам нужем финт ушами, а именно прибавить $\frac{\pi}{2}$:

$$\Phi'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = -\int\limits_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx + \int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}dx = \int\limits_0^\infty \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}\sin\alpha x\, dx$$

$$\Phi''(\alpha) = \left(\Phi'(\alpha) + \frac{\pi}{2}\right)' = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}\right)'_\alpha dx$$

Внезапно, мы получили диффур $\Phi''(\alpha) = \Phi(\alpha)$. Общее решение $\Phi(\alpha) = C_1e^{-\alpha} + C_2e^{\alpha}$. Поскольку Φ ограничена, то $C_2 = 0$, а поскольку $\Phi(0) = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, то $C_1 = \frac{\pi}{2}$.

Глава 4

Функции Эйлера

4.1 Гамма-функция

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x} dx$$

На бесконечности сходится всегда, в нуле сходится при $s > 0$. Если проинтегрировать по частям, беря первообразуную от экспоненты, получим $0 + \Gamma(x-1)$. Причем $\Gamma(1) = e^{-t}\Big|_0^{\infty} = 1$. В точке 1/2 сам Бог велел делать замену $u = \frac{x^1}{2}$, и мы сведем к интегралу Пуассона.

Свойства гамма-функции

1. Область определения $\equiv$ множество таких s, на котором $\Gamma(s)$ сходится: $s > 0$;
2. Равномерная сходимость на $[s_1, s_2]$, где $0 < s_1 < s_2 < \infty$;
3. $\Gamma(s)$ непререрывна при $s > 0$;
4. $\Gamma(s) > 0$ при $s > 0$;
5. $\boxed{\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)}$;
6. $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(n+1) = n!$;
7. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}$;
8. $\forall s > 1$: $\Gamma(s) = (s-1)(s-2)...(s-n)\Gamma(s-n)$, где $n = [s]$; любое значение гамма-функции можно выразить через её значения на $(0, 1]$
9. $\Gamma^{(n)}(s) = \int\limits_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln^n x$, причем сходится при $s > 0$, равномерно сходится там же, где и гамма-функция.
10. $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi n)}$ - формула дополнения
11. $\Gamma(x+1) = x^x e^{-x}\sqrt{2\pi n}(1 + \alpha(x))$ - асимптотическая формула.
12. График: $\lim\limits_{s\to+0} \Gamma(s) = \lim\limits_{s\to+0} \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{1}{+0} = \infty$. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Сначала

убывает, затем возрастает.

13. $\Gamma(s) = \frac{1}{se^{\gamma s}} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} e^{\frac{s}{n}}$ - продолжение определения функции на отрицательные числа (кроме отрицательных целых).

Доказательство.

1. Докажем, что гамма-функция определена при $s > 0$. Рассмотрим сумму интегралов $\Gamma(s) = \int\limits_0^1 x^{s-1} \cdot e^{-x}dx + \int\limits_1^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x}dx$. Первый интеграл сходится при $s > 0$ и расходится при $s \leqslant 0$ по предельному признаку сравнения с интегралом $\int\limits_0^1 x^{s-1}dx$. Второй интеграл: имеем

$$\forall s \in \mathbb{R}\ \exists x(s)\ \forall x > x(s) : x^{s-1} \leqslant e^{\frac{x}{2}}$$

Значит, $\int\limits_{x(s)}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx$ сходится, и исходный интеграл сходится по признаку сравнения при любом s. Значит, область определения гамма-функции - $s > 0$.

2. Докажем равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса. Получаем, что $x^{s-1} \cdot e^{-x} \leqslant x^{s-1} \leqslant x^{s_1-1}$ при фиксированном $x \in [0,1]$. При этом интеграл $\int\limits_0^1 x^{s_1-1}dx$ сходится, поэтому интеграл сходится на $[s_1, s_2]$ равномерно. Если $x \geqslant 1$, то $x^{s-1} \cdot e^{-x} \leqslant x^{s_2-1} \cdot e^{-x}$, правая часть сходится и не зависит от s, значит, сходимость равномерная. Значит, на объединении $1 > s > 0$ и $s > 0$ сходимость непрерывная.

3. Непрерывность следует из равномерной сходимости интеграла и непрерывности подынтегральной функции по теореме о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра.

4. $\forall x > 0\ \forall s > 0 : x^{s-1} \cdot e^{-x} > 0$ значит, $\Gamma(s) > 0\ \forall s$.

5. Имеем $\Gamma(s+1) = \int\limits_0^{\infty} x^s \cdot e^{-x}dx = -\int\limits_0^{\infty} x^s d(e^{-x}) = -x^s \cdot e^{-x}\Big|_0^{\infty} + s\int\limits_0^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x}$, откуда $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$.

6. $\Gamma(1) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$. Факториальность следует по индукции из основного свойства.

7. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ - интеграл Пуассона. Значит, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. Заменим $x = t^2$, откуда имеем $2\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$. Общая формула для полуцелых чисел следует по индукции из основного свойства.

8. По индукции.

9. Докажем, что $\Gamma'(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x \, dx$. Для применения теоремы о дифференцировании надо доказать, что этот интеграл равномерно сходится на $[s_1, s_2], 0 < s_1 < s < s_2 < \infty$. Рассмотрим $\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$. В особой точке 0 при $s_1 \geqslant 1$ имеем $|x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x| \leqslant 1 \cdot 1 \cdot |\ln x| = -\ln x$. Интеграл $-\int\limits_0^1 \ln x \, dx = -x \ln x\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 dx = 1$ - сходится. Значит, гамма-функция сходится равномерно на $[s_1, s_2] < 1$ по признаку Вейерштрасса. Если же $s_1 < 1$, то $|x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x| \leqslant x^{s_1 - 1} \cdot \ln x$. Правая часть сходится, и интеграл сходится по признаку Вейерштрасса.
Если $x > 1$, то $0 < x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x < x^{s_2 - 1} e^{-x} \ln x < e^{-\frac{x}{3}}$. Также сходится по Вейерштрассу. Поэтому в итоге он сходится на объединении областей. Поэтому можно дифференцировать.

10. Доказательство слишком длинное и использует комплексные числа. И прочие тоже.

4.2 Бета-функция

$$B(p, q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

1. Область определения - $p > 0 \ \& \ q > 0$;
2. Равномерная сходимость - $p \geqslant p_0 > 0 \ \& \ q \geqslant q_0 > 0$.
3. $B(p, q)$ непрерывна на области определения
4. $B(p, q) > 0$ на области определения
5. $B(p, q) = B(q, p)$
6. $B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1)$
7. Несобственный интеграл как первого, так и второго рода: $\int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1} dt}{(1+t)^{p+q}}$
8. $\boxed{B(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$
9. $B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi n}$
10. Формула Лежандра: $\boxed{B(p, p) = \dfrac{1}{2^{2p-1}} B\left(\dfrac{1}{2}, p\right)}$. Или же: $\Gamma(p)\Gamma(p + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p)$.

Доказательство.

1. Имеем $B(p,q) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. При $x \to 0$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}$, и интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}dx$ сходится при $p > 0$. При $x \to 1$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1}$, аналогично сходится при $q > 0$.

2. Аналогично предыдущему пункту, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leqslant x^{p_0-1}(1-x)^(q_0-1)$ - сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

3. Не на что сослаться, так как не было предела от двух переменных.

4. Очевидно.

5. Введем замену $t = 1 - x$, и получим точно такой же интеграл.

6. $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = -\frac{1}{q}\int\limits_0^1 x^{p-1}d((1-x)^{q-1}) = -\frac{1}{q}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\Big|_0^1 + \frac{1}{q}\int\limits_0^1 (1-x)^q dx^{p-1} = \frac{p-1}{q}\int\limits_0^1 x^{p-2}(1-x)^{q-1}(1-x)dx$. Отсюда $q \cdot B(p,q) = (p-1)\left(\int\limits_0^1 x^{p-2}(1-x)^{q-1}dx - \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\right)$. Значит, $q \cdot B(p,q) = (p-1)\cdot B(p-1,q) - (p-1)\cdot B(p,q)$, и в итоге получаем $B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$

7. Сделаем замену $x = \frac{t}{t+1}$. Изменим пределы: $0 \to 0, 1 \to \infty$. И тогда $1 - x = \frac{1}{t+1}$, $dx = \frac{dt}{(t+1)^2}$. В итоге имеем $B(p,q) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}} \cdot \frac{1}{(t+1)^{q-1}} \cdot \frac{dt}{(1+t^2)} = \int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}}$.

Чтобы доказать следующее свойство бета-функции, нам потребуется следующая

Теорема 28 *(о перестановке двух несобственных интегралов)*
Пусть
1. $f(x,y)$ определена и непрерывна на $[a,\infty) \times [c,\infty)$;
2. $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$ $\forall d > c$;
3. $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ сходится равномерно на $[a,b]$ $\forall b > a$;
4. Существует $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy$ или $\int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^\infty |f(x,y)|dx$;
Тогда существуют оба интеграла $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ и $\int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$, и они равны между собой.

Доказательство. Допустим, существует интеграл $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty |f(x,y)|dx$. Тогда

$$\int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \lim_{d\to\infty} \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$$

По теореме об интегрировании интеграла, зависящего от параметра, это все равно

$$\lim_{d\to\infty} \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

Обозначим $\Phi(x,d) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$. Применяя теорему о предельном переходе,

$$|\Phi(x,d)| = \left|\int\limits_c^d f(x,y)dy\right| \leqslant \int\limits_c^d |f(x,y)|dy \leqslant \int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy$$

По условию, $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy$ сходится, поэтому $\int\limits_a^\infty \Phi(x,d)dx$ сходится равномерно по $d \in (c,\infty)$. Итак,

$$\lim_{d\to\infty} \int\limits_a^\infty \Phi(x,d)dx = \int\limits_a^\infty \left(\lim_{d\to\infty} \Phi(x,d)\right) dx = \int\limits_a^\infty \left(\int\limits_c^\infty f(x,y)dy\right) dx$$

□

8. Теперь докажем, что $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
Случай 1: $p > 1, q > 1$. Сделаем замену $x = (t+1)y, t > 0, y > 0$. Тогда $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty (t-1)^{s-1} y^{s-1} e^{-(t+1)y}(t+1)dy$. Тогда $\frac{\Gamma(s)}{(t+1)^s} = \int\limits_0^\infty y^{s-1}e^{-(t+1)y}dy$. Пусть $S = p+q$. Имеем $\frac{\Gamma(p+q)}{(t+1)^{p+q}} = \int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy$. Домножим на t^{p-1}:

$$\Gamma(p+q) \cdot \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}} = t^{p-1} \int\limits_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(t+1)y} dy$$

Интегрируя, получаем

$$\Gamma(p+q)\cdot\int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(t+1)^{p+q}} = \int\limits_0^\infty t^{p-1}dt\int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy \tag{4.1}$$

Внезапно, $\Gamma(p+q)\cdot\int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(t+1)^{p+q}} = \Gamma(p+q)\cdot B(p,q)$. По простому (нестрого): если поменять порядок интегрирования, то и получим $\Gamma(p+q)B(p,q) = \Gamma(p)\cdot\Gamma(q)$. Более формально, мы должны проверять условия теоремы, доказанной выше. Давайте сделаем это (на отл):
1. $f(t,y) = t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}$ определена и непрерывна на $[0,\infty)\times[0,\infty)$.
2. $f(t,y) > 0$ при $t \geqslant 0, y \geqslant 0$.
По 4.2, существует интеграл $\int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty |f(t,y)|dy = \Gamma(p+q)B(p,q)$. 3. Покажем равномерную сходимость. $|f(t,y)| = t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-ty-y} \leqslant a^{p-1}y^{p+q-1}e^{-y}$. Значит, интеграл $\int\limits_0^\infty f(t,y)dy$ сходится равномерно на $t\in[0,\infty)$ по признаку Вейерштрасса.
4. То же самое для $\int\limits_0^\infty f(t,y)dt$. Здесь нам нужна равномерная сходимость на $u\in[\xi,b]$. Если $0<\xi<y<b$, то $|f(t,y)| = t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-ty}e^{-y} \leqslant b^{p+q-1}t^{p-1}e^{-\xi}$. Интеграл от этой штуки сходится, тогда $\int\limits_0^\infty f(t,y)dt$ сходится равномерно на $[\xi,b]$ по признаку Вейерштрасса.

Итак, из 4.2 имеем $\Phi(t,\xi) = \int\limits_\xi^\infty y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy$, поэтому 4.2 перепишется в виде сходящегося интеграла:

$$\int\limits_0^\infty t^{p-1}\Phi(t,0)dt = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

Имеем $0 \leqslant \Phi(t,0)-\Phi(t,\xi) = \int\limits_0^\xi y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy \to 0$ при $\xi\to 0$, так как это интеграл с переменным верхним пределом, дифференцируема, значит, непрерывна. Оценим

$$\int\limits_0^\infty t^{p-1}\Phi(t,\xi)dt \leqslant \int\limits_0^\infty t^{p-1}\Phi(t,0)dt$$

- интеграл сходится, значит, по признаку Вейерштрасса интеграл сходится равномерно по $x \in (0, \infty)$. Теперь делаем предельный переход:

$$\lim_{\xi \to +0} \int_0^\infty t^{p+1}\Phi(t,\xi)dt = \int_0^\infty t^{p+1}\Phi(t,0)dt$$

9. Докажем формулу Лежандра, начиная с левой части. Идея - выделить полный квадрат: $B(p,p) =$

$$= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}dx = \int_0^1 (x-x^2)^{p-1}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - x + x^2\right)\right)^{p-1} dx =$$

$$= \frac{1}{4^{p-1}} \int_0^1 (1-1(1-2x)^2)^{p-1}dx = \begin{cases} t = 1-2x \\ dt = -2dx \end{cases} = \frac{1}{2^{2p-1}} = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{p-1}dt =$$

$$= \begin{cases} u = t^2 \\ t = u^{\frac{1}{2}} \\ dt = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du \end{cases} = \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 (1-u)^{p-1}u^{-\frac{1}{2}}du == \frac{1}{2^{2p-1}}B(\frac{1}{2}, p)$$

4.3 Примеры

Пример. $\int\limits_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}dx$. Замена: $t = x^2$, $I = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty t^{n+\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \Gamma(n+1) = \frac{1}{2}n!$

Пример. $\int\limits_0^1 (\ln x)^n dx$. Берем $t = -\ln x$, откуда $I = \int\limits_0^\infty (-t)^n e^{-t}dt = (-1)^n n!$

Пример. $\int\limits_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}dx$. Положим $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. Замена $t = x^2$, значит, $I = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}B(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{5}{2}-1}{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-1}B(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = ... = \frac{3\pi}{16}$

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{t}(1-x^3)^2}$, Свести к бета-функции.

Пример. $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x}dx}{(1+x)^2}$. Свести к бета-функции.

Пример. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^p(\cos x)^q dx$. Сведем к бета-функции заменой $t = \sin^2 x$, $dx = \frac{1}{2}\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}$, откуда $I = \frac{1}{2}B(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2})$

Пример. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{4}}dx$ - то же самое.

Пример. Вычислить площадь фигуры $(x^2 + y^2)^6 = x^4y^2$. Перейдя в полярку $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, имеем $r^6 = \cos^4\varphi\sin^2\varphi$. Значит, интегрируя, получаем $S = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} r(\varphi)d\varphi$.

4.4 Заключительные вопросы

№22. Теорема о перестановке двух несобственных интегралов
Пусть
1. $f(x, y)$ определена и непрерывна на $[a, \infty) \times [c, \infty)$;
2. $\int\limits_a^{\infty} f(x, y)dx$ сходится равномерно на $[c, d]$ $\forall d > c$;
3. $\int\limits_c^{\infty} f(x, y)dy$ сходится равномерно на $[a, b]$ $\forall b > a$;
4. Существует $\int\limits_a^{\infty} dx \int\limits_c^{\infty} |f(x, y)|dy$ или $\int\limits_c^{\infty} dy \int\limits_a^{\infty} |f(x, y)|dx$;

Тогда существуют оба интеграла $\int\limits_a^{\infty} dx \int\limits_c^{\infty} f(x, y)dy$ и $\int\limits_c^{\infty} dy \int\limits_a^{\infty} f(x, y)dx$, и они равны между собой.

Доказательство. Допустим, существует интеграл $\int\limits_a^{\infty} dx \int\limits_c^{\infty} |f(x, y)|dx$. Тогда

$$\int\limits_c^{\infty} dy \int\limits_a^{\infty} f(x, y)dx = \lim_{d\to\infty} \int\limits_c^{d} dy \int\limits_a^{\infty} f(x, y)dx$$

По теореме об интегрировании интеграла, зависящего от параметра, этот предел равен

$$\lim_{d\to\infty} \int\limits_a^{\infty} dx \int\limits_c^{d} f(x, y)dy$$

Обозначим $\Phi(x, d) = \int\limits_c^{d} f(x, y)dy$. Применяя теорему о предельном переходе,

$$|\Phi(x,d)| = \left|\int\limits_c^d f(x,y)dy\right| \leqslant \int\limits_c^d |f(x,y)|dy \leqslant \int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy$$

По условию, $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy$ сходится, поэтому $\int\limits_a^\infty \Phi(x,d)dx$ сходится равномерно по $d \in (c,\infty)$. Итак,

$$\lim_{d\to\infty} \int\limits_a^\infty \Phi(x,d)dx = \int\limits_a^\infty \left(\lim_{d\to\infty} \Phi(x,d)\right) dx = \int\limits_a^\infty \left(\int\limits_c^\infty f(x,y)dy\right) dx$$

$\square$

№23. Гамма-функция

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x} dx$$

определена при $s > 0$.

Доказательство. Рассмотрим сумму интегралов $\Gamma(s) = \int\limits_0^1 x^{s-1} \cdot e^{-x} dx + \int\limits_1^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x} dx$. Первый интеграл сходится при $s > 0$ и расходится при $s \leqslant 0$ по предельному признаку сравнения с интегралом $\int\limits_0^1 x^{s-1}dx$. Второй интеграл: имеем

$$\forall s \in \mathbb{R}\ \exists x(s)\ \forall x > x(s) : x^{s-1} \leqslant e^{\frac{x}{2}}$$

Значит, $\int\limits_{x(s)}^\infty e^{-\frac{x}{2}} dx$ сходится, и исходный интеграл сходится по признаку сравнения при любом s. Значит, область определения гамма-функции - $s > 0$. $\square$

№24. Гамма-функция Эйлера сходится равномерно на любом отрезке положительной полуоси действительных чисел.

Доказательство. Докажем равномерную сходимость на $[s_1, s_2]$ по признаку Вейерштрасса. Получаем $x^{s-1} \cdot e^{-x} \leqslant x^{s-1} \leqslant x^{s_1-1}$ при фиксированном $x \in [0,1]$. При этом интеграл $\int\limits_0^1 x^{s_1-1}dx$ сходится, поэтому интеграл сходится на $[s_1, s_2]$ равномерно. Если $x \geqslant 1$, то $x^{s-1} \cdot e^{-x} \leqslant x^{s_2-1} \cdot e^{-x}$, правая часть сходится и не зависит от s, значит, сходимость равномерная. Значит, на объединении $1 > s > 0$ и $s > 0$ сходимость непрерывная. Гамма-функция непрерывна при $s > 0$. Непрерывность следует из равномерной сходимости интеграла и непрерывности подынтегральной функции по теореме о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра.

№25. Основное свойство - $\boxed{\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)}$.
Доказательство. Имеем

$$\Gamma(s+1) = \int\limits_0^\infty x^s \cdot e^{-x} dx = -\int\limits_0^\infty x^s d(e^{-x}) = -x^s \cdot e^{-x}\Big|_0^\infty + s\int\limits_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x} dx$$

откуда $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$.
Значение в единице и факториал: $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} dx = 1$. Факториальность следует по индукции из основного свойства: $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(n+1) = n!$
Полуцелые числа: $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ - интеграл Пуассона. Значит, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \int\limits_0^\infty e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Заменим $x = t^2$, откуда имеем $2\int\limits_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.
Общая формула для полуцелых чисел следует по индукции из основного свойства: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}$.

№26. Формула для производной: $\Gamma^{(n)}(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln^n x\, dx$.

Доказательство. Сначала докажем для первой производной: $\Gamma'(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x\, dx$. Заметим, что дифференцируя подынтегральное выражение, мы получим определение гамма-функции. Значит, нам надо доказать применимость теоремы о дифференцировании несобственного интеграла. Для этого докажем равномерную сходимость на $[s_1, s_2], 0 < s_1 < s < s_2 < \infty$. Рассмотрим $\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$. В особой точке 0 при $s_1 \geqslant 1$ имеем $|x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x| \leqslant 1 \cdot 1 \cdot |\ln x| = -\ln x$. Интеграл $-\int\limits_0^1 \ln x\, dx = -x \ln x\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 dx = 1$ - сходится. Значит, гамма-функция сходится равномерно на $[s_1, s_2] < 1$ по признаку Вейерштрасса. Если же $s_1 < 1$, то $|x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x| \leqslant x^{s_1-1} \cdot \ln x$. Правая часть сходится, и интеграл сходится

по признаку Вейерштрасса.
Если $x > 1$, то $0 < x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x < x^{s_2-1} e^{-x} \ln x < e^{-\frac{x}{3}}$. Также сходится по Вейерштрассу. Поэтому в итоге он сходится на объединении областей. Поэтому можно дифференцировать.

№27. Основное определение - $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. Подстановка $x = \cos\varphi$ приводит к определению через инетграл второго рода: $B(a,b) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2a-1}\varphi \sin^{2b-1}\varphi\, d\varphi$.

Область определения: $p > 0$ и $q > 0$. Имеем $B(p,q) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. При $x \to 0$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}$, и интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}dx$ сходится при $p > 0$. При $x \to 1$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1}$, аналогично сходится при $q > 0$.
Симметричность $B(p,q) = B(q,p)$. Доказательство через замену $t = 1-x$.
Основное свойство: $B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$. Доказательство: $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = -\frac{1}{q}\int\limits_0^1 x^{p-1}d((1-x)^{q-1}) = -\frac{1}{q}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\Big|_0^1 + \frac{1}{q}\int\limits_0^1(1-x)^q dx^{p-1} = \frac{p-1}{q}\int\limits_0^1 x^{p-2}(1-x)^{q-1}(1-x)dx$.
Отсюда $q \cdot B(p,q) = (p-1)\left(\int\limits_0^1 x^{p-2}(1-x)^{q-1}dx - \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\right)$.
Значит, $q \cdot B(p,q) = (p-1)\cdot B(p-1,q) - (p-1)\cdot B(p,q)$, и в итоге получаем $B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$. Аналогично, если внесем под дифференциал x^{p-1}, получим $B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$.
Через несобсвтенный инетграл 1 рода: замена $x = \frac{y}{y+1}$: $B(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy$.

№28. Докажем, что $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
Случай 1: $p > 1, q > 1$. Сделаем замену $x = (t+1)y, t > 0, y > 0$. Тогда $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty (t+1)^{s-1}y^{s-1}e^{-(t+1)y}(t+1)dy$. Тогда $\frac{\Gamma(s)}{(t+1)^s} = \int\limits_0^\infty y^{s-1}e^{-(t+1)y}dy$.

Пусть $S = p + q$. Имеем $\frac{\Gamma(p+q)}{(t+1)^{p+q}} = \int\limits_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(t+1)y} dy$. Домножим на t^{p-1}:

$$\Gamma(p+q) \cdot \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}} = t^{p-1} \int\limits_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(t+1)y} dy$$

Интегрируя, получаем

$$\Gamma(p+q) \cdot \int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(t+1)^{p+q}} = \int\limits_0^\infty t^{p-1}dt \int\limits_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(t+1)y} dy \tag{4.2}$$

Внезапно, $\Gamma(p+q) \cdot \int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(t+1)^{p+q}} = \Gamma(p+q) \cdot B(p,q)$. По простому (нестрого): если поменять порядок интегрирования, то и получим $\Gamma(p+q)B(p,q) = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q)$. Более формально, мы должны проверять условия теоремы, доказанной выше. Давайте сделаем это (на отл):
1. $f(t,y) = t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(t+1)y}$ определена и непрерывна на $[0,\infty) \times [0,\infty)$.
2. $f(t,y) > 0$ при $t \geqslant 0, y \geqslant 0$.
По 4.2, существует интеграл $\int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty |f(t,y)| dy = \Gamma(p+q)B(p,q)$. 3. Покажем равномерную сходимость. $|f(t,y)| = t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-ty-y} \leqslant a^{p-1} y^{p+q-1} e^{-y}$. Значит, интеграл $\int\limits_0^\infty f(t,y)dy$ сходится равномерно на $t \in [0,\infty)$ по признаку Вейерштрасса.
4. То же самое для $\int\limits_0^\infty f(t,y)dt$. Здесь нам нужна равномерная сходимость на $u \in [\xi, b]$. Если $0 < \xi < y < b$, то $|f(t,y)| = t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-ty} e^{-y} \leqslant b^{p+q-1} t^{p-1} e^{-\xi}$. Интеграл от этой штуки сходится, тогда $\int\limits_0^\infty f(t,y)dt$ сходится равномерно на $[\xi, b]$ по признаку Вейерштрасса.

Итак, из 4.2 имеем $\Phi(t,\xi) = \int\limits_\xi^\infty y^{p+q-1} e^{-(t+1)y} dy$, поэтому 4.2 перепишется в виде сходящегося интеграла:

$$\int\limits_0^\infty t^{p-1} \Phi(t,0) dt = \Gamma(p+q) B(p,q)$$

Имеем $0 \leqslant \Phi(t,0) - \Phi(t,\xi) = \int\limits_0^\xi y^{p+q-1} e^{-(t+1)y} dy \to 0$ при $\xi \to 0$, так как это интеграл с переменным верхним пределом, дифференцируема, значит, непрерывна. Оценим

$$\int\limits_0^\infty t^{p-1}\Phi(t,\xi)dt \leqslant \int\limits_0^\infty t^{p-1}\Phi(t,0)dt$$

- интеграл сходится, значит, по признаку Вейерштрасса интеграл сходится равномерно по $x \in (0,\infty)$. Теперь делаем предельный переход:

$$\lim_{\xi\to+0}\int\limits_0^\infty t^{p+1}\Phi(t,\xi)dt = \int\limits_0^\infty t^{p+1}\Phi(t,0)dt$$