Лекции по алгебре

Демин Д.Б.

Семестр 2

Содержание

1 Линейные пространства

Напомним определение. В векторном пространстве L над полем P заданы две операции: сложение, удовлетворяющее аксиомам абелевой группы: $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$
1^0. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
2^0. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{y} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
3^0. $\exists \vec{0} : \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
4^0. $\exists \vec{x'} : \vec{x} + \vec{x'} = \vec{0}$
И умножение на скаляры из поля P (чаще всего - вещественные или комплексные числа): $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in P$
5^0. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{x} = \lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{x}$
6^0. $(\vec{x} + \vec{y})\lambda = \vec{x}\lambda + \vec{y}\lambda$
7^0. $\lambda_1(\lambda_2\vec{x}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{x}$
8^0. $\exists 1 \in P : 1\vec{x} = \vec{x}$
Примеры. Множество положительных действительных чисел с операциями умножения (сложения в пространстве) и возведения в действительную степень (умножение в пространстве) является векторным пространством; комплексные числа с операциями сложения и комплексного сопряжения яляются векторным пространством; матрицы одного размера образуют линейное пространство; P^n - **арифметическое пространство** - строки из n чисел; множество векторов без одной прямой - не векторное пространство, так как векторы, симметричные относительно этой прямой, нельзя сложить.
Замечание. Обычно, геометрическими пространствами называются пространства размерности 1, 2 или 3.
Напомним **свойства линейных пространств:** единственность нуля и противоположного элемента, умножение на скалярный ноль дает векторноль, умножение на минус скаляр дает минус вектор, единственность разности; если произведение равно векторному нулю, то либо вектор ноль, либо скаляр ноль.

1.1 Линейные оболочки и подпространства

Определение 1 *Линейная оболочка $L(M)$ множества векторов $M \subset V$ - множество всех линейных комбинаций векторов из множества M*

Определение 2 *Подмножество L векторов линейного пространства V называется подпространством, если выполнены условия:*

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L : \vec{x} + \vec{y} \in L$
2. $\forall \vec{x} \in L \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} : \lambda\vec{x} \in L$

Примеры. Нулевой элемент - нульмерное подпространство; поле над самим собой - одномерное подпространство; столбец корней СЛАУ лежит в подпространстве, порожденном системой строк СЛАУ; тривиальное пересечение двух подпространств - нулевой вектор.

Определение 3 *Пусть L - подпространство V. Множество векторов $L' = \{x + y \mid x \in L,\ y = const,\ y \notin L\}$ называется* ***гиперплоскостью*** *(линейным многообразием), полученной в результате сдвига подпространства на вектор y.*

Определение 4 *Совокупность векторов называется линейно зависимой, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация этих векторов, в противном случае - линейно независимы*

Теорема 1 *1. Линейная зависимость системы векторов эквивалентна тому, что один из векторов линейно выражается через другие*
2. Система векторов линейно зависима, если её подсистема линейно зависима
3. Если система векторов независима, то любая её подсистема линейно независима

Доказательство. 1. Пусть x_n выражается линейно как $x_n = a_1x_1 + ... + a_{n-1}x_{n-1}$, тогда $\vec{0} = a_1x_1 + ... + a_{n-1}x_{n-1} - x_n$. Если мы положим $a_i = 0,\ i \in \{1...n-1\}$, тогда получим нетривиальную комбинацию, равную нулю. Обратно, пусть система линейно зависима. Значит, существует некоторая нетривиальная комбинация, равная нулю. Перенесем в правую часть какой нибудь вектор с ненулевым коэффициентом, и сократим на него, получим линейную комбинацию, выражающую этот вектор.
2. Пусть подсистема линейно зависима. Значит, неё можно составить нетривиальную нулевую линейную комбинацию. Добавляя оставшиеся векторы с коээфициентом 0, также получим нетривиальную линейную комбинацию, следовательно, вся система зависима.
3. Получается инверсией импликации в п.2. Высказвание пункта 2 имеет вид $\exists x P(x) \Rightarrow N(y)$, где P - “подсистема линейна зависима”, N - “система линейно зависима”, а пункта 3 - $\neg N(y) \Rightarrow \forall x \neg P(x)$. Как мы видим, это одна и та же (перевернутая) импликация. □

Теорема 2 *Если в линейном пространстве V каждый из векторов линейно независимой системы мощности n является линейной комбинацией векторов линейно независимой системы мощности m, то $n \leqslant m$*

Доказательство. Пусть $x_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}y_j$ и пусть $n > m$. Составим линейную комбинацию векторов $x_1, ..., x_n$ с коэффициентами λ_i: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}y_j)$. Рассмотрим однородную систему из m линейных уравнений с n неизвестными: $a_{1i}\lambda_i + ... + a_{ni}\lambda_i = 0,\ i \in \{1...m\}$ Так как $n > m$, то наша однородная система имеет нетривиальное (ненулевое) решение, т.е. существует такой ненулевой вектор $(\lambda_1, ...\lambda_n)$, который является решением системы. Но тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ - нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору. Отсюда следует, что система векторов $x_1, ..., x_n$ линейно зависима. Но это противоречит условию теоремы, поэтому $n \leqslant m$. $\square$
Следствие. Любые две эквивалентные системы векторов имеют одинаковую мощность.

Определение 5 *Две системы векторов эквивалентны, если все векторы каждой системы линейно выражаются через векторы другой системы*

Определение 6 ***Ранг*** *системы векторов - мощность наибольшей линейно независимой подсистемы векторов. Ранг линейного пространства называется размерностью пространства.*

Например, пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций бесконечномерно.

1.2 Переход между базисами

Определение 7 *Базис векторного пространства - линейно независимая система с рангом, равным размерности пространства.*

Базис $\{e_1, ..., e_n\}$ мы будем далее обозначать кратко $\{e\}$ или $\{e_n\}$.

Выясним, как связаны между собой координаты вектора в разных базисах. Пусть у нас есть два базиса, $\{e\}$ и $\{e'\}$. Выразим векторы базиса $\{e'\}$ через векторы базиса $\{e\}$:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1c_{11} + ... + e_nc_{n1} \\ \dots \\ e'_n = e_1c_{1n} + ... + e_nc_{nn} \end{cases} \tag{1}$$

Определение 8 *Транспонированная матрица C системы 1 называется матрицей перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$:*

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Систему 1 можно переписать другим способом. Пусть $e' = (e'_1, ..., e'_n)$ и $e = (e_1, ..., e_n)$ - строки из символов, обозначающих базисные векторы. Тогда система 1 будет иметь вид

$$e' = eC \tag{2}$$

Теорема 3 *Матрица перехода связывает координатные выражения вектороа в базисах $\{e\}$ и $\{e'\}$ согласно равенству*

$$X = CX'$$

Доказательство. Пусть x - произвольный вектор, X и X' - столбцы координат в базисах $\{e\}$ и $\{e'\}$ соответственно. Тогда $x = eX = e'X'$. Но в силу системы 2 имеем $x = eX = eCX'$, откуда получаем искомое равенство $X = CX'$. $\square$
Замечание. В силу линейной независимости векторов базисов, $detC \neq 0$
Следствие. Матрица обратного преобразования есть обратная матрица. Действительно, умножая равенство $CX' = X$ на C^{-1}, имеем $X' = C^{-1}X$.

1.3 Изоморфизм линейных пространств

Определение 9 *Пространства V и W изоморфны, если существует биекция (взаимно-однозначное соответствие) $f\colon V \to W$, которая обладает свойствами линейности.*

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

В частности, вектор-ноль изоморфен вектору-нулю.

Теорема 4 *Все векторные пространства одной размерности n над одним полем P изоморфны*

Доказательство. Выделим в пространстве базис $\{e_n\}$. Тогда каждый вектор представляется в виде линейных комбинаций базисных векторов.

Множество строк коэффициентов этих линейных комбинаций канонически отображается (по факту, совпадает) в арифметическое n-мерное пространство. Нетрудно проверить, что это изоморфизм. Таким образом, все пространства изоморфны арифметическому пространству той же размерности, а значит, все они изоморфны. $\square$

Замечание. Изоморфизм определен однозначно, только если пространства состоят из одного (ноль) или двух векторов (причем размерность пространства равна 1).

1.4 Пересечение и сумма подпространств

Определение 10

Пересечение подпространств V и W - множество векторов $W \cap V$

Сумма подпространств V и W - множество векторов $V + W = \{x + y \mid x \in V, y \in W\}$

Теорема 5 $dim(V + W) = dimV + dimW - dim(V \cap W)$

Доказательство. Пусть $\{e_p\}$ - базис пространства $V \cap W$. Дополним его какими-то векторами $e_{p+1}, .., e_k$ до базиса подпространства V и, с другой стороны, векторами $e_{k+1}, ..., e_{k+l-p}$ - до базиса подпространства W. Докажем, что векторы $e_1, ..., e_{k+l-p}$ линейно независимы.

Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{k+l-p} a_i e_i = 0$$

Рассмотрим вектор

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i = -\sum_{i=k+1}^{k+l-p} a_i e_i$$

Из первого представления вектора x следует, что он лежит в V, а из второго – что он лежит в W. Таким образом, $x \in V \cap W$ и, значит,

$$x = \sum_{i=1}^{p} b_i e_i = -\sum_{i=k+1}^{k+l-p} a_i e_i$$

Так как векторы $e_1, ..., e_p,\ e_{k+1}, ..., e_{k+l-p}$ линейно независимы, то отсюда следует, что $x = 0$ и $a_i = 0$ при $i = k + 1, .., k + l - p$. Далее, так как векторы$e_1, .., e_k$ линейно независимы, то из равенства

$$\sum_{i=1}^{k} a_i e_i = 0$$

следует, что $a_i = 0$ при $i = 1, .., k$.

Значит, векторы $e_1, .., e_{k+l-p}$ образуют базис пространства $V + W$, откуда $dim(V + W) = k + l - p = dimV + dimW - dim(V \cap W)$

Замечание. В пространстве размерности n встречаются подпространства всех промежуточных размерностей. Если V - пространство и U - подпространсво, то величина $dimV - dimU$ называется **коразмерность** подпространства.

1.5 Прямая сумма подпространств

Определение 11 *Пространство V явлется прямой суммой своих подпространств L_1 и L_2 (обозначается $V = L_1 \oplus L_2$), если каждый вектор из V представляется единственной суммой векторов из L_1 и L_2*

Теорема 6 *Для того, чтобы сумма подпространств L_1 и L_2 являлась прямой суммой, необходимо и достаточно, чтобы пересечение L_1 и L_2 было нульмерным пространством. Если $L = L_1 \oplus L_2$, то $dimL = dimL_1 + dimL_2$*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x \in L_1 \cap L_2$. Тогда, поскольку нулевой вектор принадлежит обоим подпространствам, в прямой сумме лежат векторы $x+0$ и $0+x$ (где 0 и x берутся в разных подпрострнаствах). Поскольку сумма должна быть определена однозначно, то $x + 0 = 0 + x$, следовательно, $x = 0$

Достаточность. Пусть вектор допускает двойное представление: $x = y_1 + y_2$ и $x = z_1 + z_2$. Так как $x - x = 0$, то $(y_1 - z_1) + (y_2 - z_2) = 0$, но так как как векторы в скобках принадлежат одному подпространству, то разность возможна только если $y_1 = z_1$, $y_2 = z_2$, то есть представление единственно. □

2 Евклидовы и унитарные пространства

Определение 12 *Евклидово пространство - линейное пространство, в котором введена операция скалярного произведения* $(a, b) \mapsto \alpha \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющая свойствам*

1. $(a, b) = (b, a)$
2. $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)\ \lambda \in \mathbb{R}$
3. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$
4. $(a, b) \geqslant 0$
5. $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Вещественное евклидовое пространство обозначается буквой E

Определение 13 *Унитарное пространство - линейное пространство, в котором введена операция скалярного произведения* $(a, b) \mapsto \alpha \in \mathbb{C}$, *удовлетворящая свойствам*

1. $(a, b) = \overline{(b, a)}$
2. $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)\ \lambda \in \mathbb{C}$
3. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$
4. $0 \leqslant (a, a) \in \mathbb{R}$
5. $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Унитарное пространство обозначается буквой U. В отличие от евклидовых пространств, скалярное произведение в ортономированном координатном базисе определяется как $\sum\limits_i x_i \overline{y_i}$ (аналогично для матриц). Также заметим, что в силу некоммутативности $(a, \lambda b) = \overline{\lambda}(a, b)$

Теорема 7 *(неравенство Коши-Буняковского)*
Для любых двух векторов из евклидова (унитарного) пространства имеем

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y)$$

Доказательство. Для любого коэффициента в силу аксиомы 4 имеем $(\lambda x - y, \lambda x - y) \geqslant 0$. Тогда $(\lambda x - y, \lambda x - y) = |\lambda|^2(x, x) - \lambda(x, y) - \overline{\lambda(y, x)} + (y, y) \geqslant 0$. Представим комплексное число (x, y) в тригонометрическом виде: $(x, y) = |(x, y)|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Возьмем t - действительное число такое, что $\lambda = t(\cos\varphi - i\sin\varphi)$. Тогда $|\lambda| = |t|$, $\lambda(x, y) = \overline{\lambda(x, y)} = t|(x, y)|$. Поэтому из неравенства выше следует $t^2(x, x) - 2t(x, y) + (y, y) \geqslant 0$. Значит, дискриминант этого уравнения $\square$

Необходимым и достаточным условием неотрицательности квадратного трехчлена по переменной t является неположительность его дискриминанта, т.е. выполнение неравенства: $|(x, y)|^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0$, что эквивалентно неравенству Коши-Буняковского. В евклидовом пространстве: $(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$.

Неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы x, y коллинеарны: $(\lambda x - y, \lambda x - y) = 0$, если $\lambda x = y$.

2.1 Норма вектора

Определение 14 *Линейное пространство V называется нормированным, если введена функция нормы* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$*, которая выполняет роль длины вектора и удовлетворяет аксиомам:*

1. $\|x\| \geqslant 0 \ \ (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0})$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Для евклидовых пространств норму можно определить как $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Очевидно, здесь выполняются свойства 1 и 2, неравенство треугольника проверяется с помощью неравенства Коши-Буняковского. Действительно, из него следует, что $|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. С другой стороны, $\|x + y\| = \sqrt{(x, x) + 2(x, y) + (y, y)} \leqslant \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2} = \|x + y\|$ Как следствие, получаем неравенство $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Определение 15 *Вектор называется нормированным, если его норма (длина) равна единице.*

Нормировать вектор можно так: $x' = \frac{x}{\|x\|}$

2.2 Ортонормированная система векторов

Определение 16 *Система векторов называется ортогональной, если все её векторы попарно ортогональны:* $(x_i, x_j) = 0, \ i \neq j$
Система векторов ортонормированная, если выполняется условие

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j, \end{cases}$$

Теорема 8 *Ортогональная система векторов линейно независима.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию $a_1 x_1 + ... + a_n x_n = 0$. Умножая скалярно её на x_k, получаем $a_k(x_k, x_k) = 0$. Значит, $a_k = 0$. Повторяя это для всех векторов, придем к тому, что линейная комбинация тривиальна, то есть векторы линейно независимы. $\square$

Теорема 9 *В ортонормированном базисе $\{e\}$ координаты $(x_1...x_n)$ вектора x вычисляются как $x_i = (x, e_i)$*

Доказательство. $x = x_1e_1 + ...x_ne_n$. Беря скалярное произведение на e_k слева и справа, получаем $(x, e_k) = x_k(e_k, e_k) = x_k$. $\square$

Теорема 10 *В евклидовом (унитарном) пространстве скалярные произведения в ортонормированных базисах вычисляются согласно следующим формулам:*

В евклидовом: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$
В унитарном: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$
Доказательство. Пусть в ортонормированном базисе $\{e\}$ векторы представляются как $x = x_1e_1 + ...x_ne_n,\ y = y_1e_1 + ... + y_ne_n$. Тогда:

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{i=1}^{n} y_ie_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i\overline{y_k}(e_i, e_k) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} \quad \square$$

2.2.1 Ортогонализация по Граму-Шмидту

Теорема 11 *В любом n-мерном евклидовом (унитарном) пространстве найдется ортонормированный базис.*

Доказательство. Опишем процесс ортогонализации произвольного множества из n векторов по индукции. Возьмем произвольный ненулевой вектор и отнормируем его: $f' = \frac{f}{\|f\|}$
Далее, пусть в $n-1$-мерном подпространстве есть ортонормированный базис $\{e_{n-1}\}$, а в самом пространстве - (произвольный) базис $\{f_n\}$. Линейная оболочка $L(f_1...f_{n-1})$ будет подпространством, базисом которого является $\{e_{n-1}\}$. Так как f_n не принадлежит этому подпространству, вектор $g_n = f_n - a_1e_1 - ... - a_{n-1}e_{n-1}$ отличен от нулевого вектора. Выберем координаты a_i так, чтобы g_n был ортогонален всем векторам из базиса $\{e_{n-1}\}$. Отсюда получаем формулу $a_i = (f_n, e_i)$, и определим новый вектор как $e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$. $\square$
Отсюда можно вывести процесс ортагонализации ситемы векторов $\{f\}$ - превращение её в ортонормированный базис $\{e\}$:
1. $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$
2. $e'_k = f_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1}(f_k, e_i)e_i,\ e_i = \frac{e'_i}{\|e'_i\|}$
Через n шагов получим ортонормированный базис.

2.3 Унитарные и ортогональные матрицы

Определение 17 *Эрмитово сопряжение комплексной матрицы - комбинация транспонирования и комплексного сопряжения матрицы*

$$(a_{ij})^H = (\overline{a_{ji}})$$

Определение 18 *Комплексная матрица называется унитарной, если* $UU^H = U^H U = E$
Вещественная матрица называется ортогональной, если $Q^T Q = QQ^T = E$
Комплексная матрица называется эрмитовой, если $U^H = U$
Вещественная матрица назыается симметрической, если $Q^T = Q$

Если матрица эрмитова, то её определитель вещественен.

Определение 19 *Матрица Грама системы векторов* $a_1, ...a_n$ *- матрица, определенная как*

$$\Gamma = \Gamma(a_1, ...a_n) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_n, a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_1, a_n) & \dots & (a_n, a_n) \end{pmatrix}$$

Матрица Грама является симметрической (эрмитовой), её определитель еотрицателен. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель её матрицы Грама равен 0.

Теперь найдем формулу для скалярного произведения векторов в произвольном базисе $\{f\}$. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f_i,\ y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i f_i$. Тогда

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i f_i, \sum_{j=1}^{n} y_j f_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} (f_i, f_j)$$

где (f_i, f_j) - элемент матрицы Грама для базиса $\{f\}$.

Если $\{e\}$ - ортонормированный базис, то $\Gamma(\{e\}) = E$, а $\Gamma(a_1, ..., a_n) = A^T A$, где A - матрица, составленная из координатных векторов-столбцов a_i в базисе $\{e\}$.

Исходя их этого, получаем, что в векторно-матричном виде $(x, y) = X^T \Gamma \overline{Y}$, где $X,\ Y$ - векторы-столбцы в некотором базисе, Γ - матрица Грама этого базиса.

Если C – матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$, то матрицы Грама этих базисов связаны формулой $\Gamma' = C^T \Gamma \overline{C}$.

2.4 Ортогональное дополнение

Определение 20 *Вектор x называется ортогональным к подпространству L, если этот вектор ортогонален каждому вектору из L; обозначается как $x \perp L$.*
Ортогональное дополнение к подпространству L - множество

$$L^{\perp} = \{x \mid x \perp L\}$$

Теорема 12 *Ортогональное дополнение - линейное подпространство.*

Доказательство. Пусть $x, y \in L^{\perp}$ и $z \in L$. Тогда $(x, z) = (y, z) = 0$ и $(x+y, z) = 0$, значит, $x+y \in L^{\perp}$. Аналогично показывается, что $\alpha x \in L^{\perp}$. $\square$

Теорема 13 *Если L - подпространство V, то $V = L \oplus L^{\perp}$.*

Доказательство. Пусть $\{e_k\}$ - ортонормированный базис в L, $\{e_{n-k}\}$ - ортонормированный базис в $L^{\perp}$. Объединение этих базисов $\{e_n\}$ также ортонормированно, и линейно независимо. Покажем, что получился базис пространства V. Пусть есть ненулевой вектор, который не является комбинацией векторов из базиса. Добавляя его к множеству базисных, получаем тем самым независимую систему. С одной стороны, этот вектор принадлежит $L^{\perp}$, поскольку он независим от векторов $\{e_k\}$, с другой стороны, он ортогонален $L^{\perp}$, так как он независим от векторов $\{e_{n-k}\}$. Значит, он равен нулю, что противоречит условию. $\square$
Следствие. $dimL + dimL^{\perp} = dimV$, и для каждого вектора существует единственная ортогональная проекция на подпространство.

Определение 21 *Вектор $g \in L$ называется ортогональной проекцией вектора f на подпространство L, если $h \in L^{\perp}$ и $f = h + g$. Вектор h назывется ортогональной составляющей вектора f.*

Отметим, что выполняется теорема Пифагора в виде $\|f\|^2 = \|h\|^2 + \|g\|^2$.

Чтобы найти ортогональную проекцию g вектора f на произвольное подпространство L, необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} f = g + h \\ g \in L \\ h \in L^{\perp} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g = \sum\limits_{j=1}^{k} x_j a_j \\ (\sum\limits_{j=1}^{k} x_j a_j, a_i) = (f, a_i) \ \forall i \\ h = f - g \end{cases}$$

Значит, задача сводится к поиску решения $(\sum\limits_{j=1}^{k} x_j a_j, a_i) = (f, a_i)$, в матрично-векторном виде $g\Gamma = f$.

Естественным образом определяется ортогональное отражение $f - 2h$ вектора f относительно подпространства L.

Теорема 14 *Длина между вектором f и подпространством L есть длина перпендикуляра, опущенного из f на L.*

Доказательство. Пусть $f = g + h$, где $g \in L$, $h \in L^{\perp}$. Пусть $y \in L$ – произвольный вектор. Обозначим через $\rho(f, y)$ расстояние между векторами f и y. Тогда $\rho(f, y) = |f - y| = |(g + h) - y| = |g + (h - y)|$, откуда следует, что минимум расстония достигается при $y = h$, то есть при перпендикуляре. □

Точно так же по принципу минимума вводится понятие угла между вектором и подпространством (как минимум углов между вектором и вектором из подпространства).

Определение 22 *Пусть $\{f_k\}$ - линейно независимая система векторов. k-мерным параллелепипедом, построенным на этой системе, называется множество линейных комбинаций векторов этой системы с коэффициентами $a_i \in [0, 1]$*
Объем $V\{f_k\}$k-мерного параллелипеседа (рекурсивно) определяется как произведение высоты на объем k-1-мерного основания и корня из определителя матрицы Грама системы $\{f_k\}$.

Если $\{e_k\}$ - базис, и F - матрица, составленная из координатных столбцов системы $\{f_k\}$ в базисе $\{e_k\}$, то $V\{f_k\} = |detF|\sqrt{det\Gamma_e} = |detF|V\{e_k\}$. Если базис ортонормированный, то $V\{f_k\} = |detF|$.

2.5 Дополнение. Формулы проекций

Пусть a - направляющий вектор одномерного подпространства A, n - вектор нормали к подпространству L.

- Ортогональное проектирование вектора x на A дается формулой
$$x_{pr} = \frac{(x, a)}{|a|^2} a$$
- Ортогональное проектирование на A параллельно L дается формулой
$$x_{pr} = \frac{(x, n)}{(a, n)} a$$

3 Линейные операторы

Определение 23 *Пусть V, W - линейные пространства над полем P.* ***Линейным оператором*** $\mathcal{A}\colon V \to W$ *называется функция, для всех векторов $x, y \in V$ и чисел $\alpha \in P$ удовлетворяющая условиям:*

1. $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$
2. $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x$

Множество всех линейных операторов из V в W мы обозначаем $L(V, W)$. Если оператор $\mathcal{A} \in L(V, V)$, то мы будем иногда называть его *линейным автоморфизмом* пространства V, подчеркивая, что оператор осуществляет преобразование пространства в себя. Если $\mathcal{A} \in L(V, W)$, где $W = P$ - пространство, равное полю, то такой оператор называют *линейным функционалом.*

Естественным образом можно определить равенство операторов, нулевой оператор (который все векторы отображает в вектор-ноль), обратный оператор. Также можно ввести сложение операторов и умножение на скаляр. Эти операции задают структуру линейного пространства в $L(V, W)$. Можно показать, что в случае конечных размерностей V и W, $L(V, W)$ изоморфно пространству матриц соответствующего размера.

Свойства линейных операторов

1. $\mathcal{A}0 = 0$
2. $\mathcal{A}(\sum\limits_i \alpha_i x_i) = \sum\limits_i \alpha_i \mathcal{A}x_i$
3. Линейный оператор сохраняет линейную заисимость.

Из свойства 2 следует, что для задания линейного оператора достаточно задать его действие на базисные векторы.

3.1 Матрица линейного оператора

Пусть $\mathcal{A} \in L(V, W)$, $\{e_n\}$ и $\{f_m\}$ - базисы соответственно в V и W. Действие оператора однозначно задается его действием на базисные векторы $\mathcal{A}e_1 ... \mathcal{A}e_n$, которые в свою очередь выражаются в базисе $\{f\}$:

$$\mathcal{A}e_i = a_{1i} f_i + ... + a_{mi} f_m$$

Это позволяет нам определить матрицу A_{fe} размера $m \times n$, которая называется матрицей оператора в базисах $\{e_n\}$ и $\{f_m\}$.

Теорема 15 *Если $y = \mathcal{A}x$, то $y_f = A_{fe} x_e$.*

Доказательство. Пусть

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad y = \sum_{i=1}^{m} y_i e_i$$

Имеем
$$\mathcal{A}x = y = \mathcal{A}(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathcal{A} e_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$
то есть $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. □

Теорема 16 *Пусть* $\{e\}$, $\{t\}$ *- различные базисы в* V, $\{f\}$ *и* $\{s\}$ *- базисы в* W. *Тогда имеет место соотношение*
$$A_{st} = D^{-1} A_{fe} C,$$
где $t = eC$, $s = fD$.

Доказательство. Пусть $Y_f = A_{fe} X_e$, $Y_s = A_{st} X_t$. По условию, $x = eX_e = tX_t = eCX_t$, $y = fY_f = sY_s = fDY_s$, откуда $X_e = CX_t$, $Y_f = DY_s$. Отсюда получаем $A_{fe} C X_t = DY_s$, значит, $D^{-1} A_{fe} C = A_{st}$. □

Свойства матриц линейных операторов

1. Матрицы линейного оператора в различных парах базисов эквивалентны.
2. Ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора пар базисов.
3. Линейное пространство $L(V, W)$ изоморфно пространству матриц $P^{m \times n}$, и $dim L(V, W) = dim V \cdot dim W = nm$.
4. Сумма матриц соответствует сумме операторов.

3.2 Произведение линейных операторов

Определение 24 *Пусть* V, W, Z *– линейные пространства над полем* P. *Композицией (или произведением) операторов* $\mathcal{A} \in L(V, W)$ *и* $\mathcal{B} \in L(W, Z)$ *называется оператор* $\mathcal{C} \in L(V, Z)$, *который действует по правилу*
$$\mathcal{C}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$$
Очевидно, что композиция линейных операторов линейна.

Свойства композиции операторов

1. Ассоциативность
2. $\alpha(\mathcal{A}\mathcal{B}) = (\alpha\mathcal{A})\mathcal{B} = (\alpha A\mathcal{B})$
3. Левая и правая дистрибутивность относительно сложения
4. Коммутативность работает только для линейных *авто*морфизмов.

Теорема 17 *При композиции матрицы операторов перемножаются.*

Доказательство. Рассмотрим вектор как линейную комбинацию базисных векторов и подействуем последовательно на них операторами. □

3.3 Образ и ядро

Определение 25
Образ оператора *$im\mathcal{A}$ - множество всех векторов, которые могут быть получены действием оператора*
Ядро оператора *$ker\mathcal{A}$ - множество векторов, переходящих под действием оператора в вектор-ноль*

Ядро оператора непусто (так как по крайней мере вектор-ноль переходит в вектор-ноль). Если ядро оператора состоит только из вектора-нуля, то оператор задает биекцию.

Если $\mathcal{A} \in L(V, W)$, то $kerA$ линейное подпространство пространства V, а imA – линейное подпространство пространства W.

Определение 26
Ранг линейного оператора *$rk\mathcal{A}$ - размерность образа линейного оператора.*
Дефект линейного оператора *$def\mathcal{A}$ - размерность ядра линейного оператора.*

Размерность пространства - области определения оператора - равна сумме дефекта и ранга оператора. Образ пространства - линейная оболочка образа базиса.

Теорема 18 *Ранг линейного оператора равен рангу его матрицы в произвольной паре базисов.*

Доказательство. Действительно, $rk\mathcal{A} = dim(im\mathcal{A}) = dimL(\mathcal{A}e_1...\mathcal{A}e_n) = rk(\mathcal{A}e_1...\mathcal{A}e_n)$. Ранг этой системы векторов совпадает с рангом системы арифметических векторов, составленной из координат этих векторов в базисе f пространства W, т.е. с рангом матрицы A_{fe}. □

Теорема 19 *(о каноническом виде матрицы оператора). Пусть $\mathcal{A} \in L(V_n, W_m)$, $rk\mathcal{A} = r$. Тогда существуют базисы $\{e\}$ и $\{f\}$ пространств V и W, в которых оператор $\mathcal{A}$ вида*

$$I_r = \begin{pmatrix} \boxed{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где E - единичная матрица размера $r \times r$. Базисы $\{e\}$ и $\{f\}$ называются канонической парой базисов.

Доказательство. Если $r = 0$, то матрица I_r состоит из нулей, и в любом базисе она является матрицей нулевого оператора. Пусть $r > 0$, тогда по теореме о методе Гаусса-Жордана подматрицу размера $r \times r$ в матрице A можно привести к единичному виду. Поскольку все остальные строки/столбцы линейно зависимы, они будут нулевыми. Итак, $I_r = AC$, где C - произведение матриц элементарных преобразований. Оно не вырождено, поскольку элементарные преобразования не вырождены. Значит, мы можем представить матрицу канонического вида как $I_r = E^{-1}AC$, что по теореме 16 дает нам существование канонических базисов. □

3.4 Алгебра линейных операторов

Пусть V - линейное пространство над полем P. Мы знаем, что $L(V, V)$ - векторное пространство относительно операций сложения операторов и умножения оператора на скаляр. Кроме того, относительно операций сложения и композиции векторов $L(V, V)$ яляется коммутативным кольцом с единицей. Значит, $L(V, V)$ является алгеброй.

Определение 27 *Алгебра над полем - множество с введенными операциями сложения, умножения и умножения на скаляр такое, что относительно первой и третьей оно являтся векторным пространством, а относительно первой и второй - кольцом. Кроме того, выполняется дополнительное условие (для связи всех операций):*

$$\mathcal{A}(\alpha\mathcal{B}) = (\alpha\mathcal{A})\mathcal{B} = \alpha(\mathcal{A}\mathcal{B})$$

Свойства алгебры операторов

1. Можно ввести возведение оператора в степень и определить многочлены от операторов.
2. В разных базисах одному оператору могут соответствовать разные матрицы. Таким образом, одному и тому же оператору соответствует целый класс эквивалентных матриц, которые называются **подобными**. Если $\{e\}$ и $\{f\}$ - базисы пространства, и $f = eC$ - матрица перехода, то $A_f = C^{-1}A_eC$. В частности, матрица нулевого оператора в любом базисе - нулевая матрица, матрица тождественного опеатора - всегда единичная матрица.
3. Ранг оператора равен рангу матрицы.
4. Определители всех матриц одного оператора равны. Действительно, $detA_f = det(C^{-1}A_eC) = detA_e \cdot det(C^{-1}C) = detA_e$.

3.5 Обратный оператор

Определение 28 *Пусть $\mathcal{A} \in L(V, V)$ - линейный оператор. Обратным к нему называется такой оператор $\mathcal{A}^{-1}$, что*

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = I$$

Свойства обратного оператора
1. Обратный оператор существует, если сам оператор является биекцией (то есть $ker\mathcal{A} = \{0\},\ im\mathcal{A} = V$)
2. Обратный оператор линеен. Доказательство следует из линейности самого оператора.
3. В произвольном операторе матрица обратного оператора является обратной матрицей оператора.
4. Обратный оператор единственен.

Определение 29 *Линейный автоморфизм называется невырожденным, если его ядро состоит из одного вектора-нуля.*

Теорема 20 *Следующие утверждения эквивалентны:*
1. $\mathcal{A}$ обратим
2. $\mathcal{A}$ невырожден
3. $im\mathcal{A} = V$
4. $det\mathcal{A} \neq 0$
5. $\mathcal{A}$ биективен

Доказательство Демин не дал. Поищем в Винберге xD)) □

Теорема 21 *Композиция обратимых операторов обратима, причем*

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}$$

Доказательство. Произведение невырождено в силу того, что композиция биекций - биекция. Умножая композицию на обратный к ней оператор, получем $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = I$, что и требовалось. □

3.6 Инвариантное подпространство

Определение 30 *Пусть $\mathcal{A}$ - линейный автоморфизм линейного пространства V над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Подмножество $L \subset V$ называется инвариантным относительно оператора $\mathcal{A}$, если $\forall x \in L$: $\mathcal{A}x \in L$*

В частности, вектор-ноль и само пространство инвариантны относительно любого оператора. Также инвариантными являются образи и ядро линейного оператора.

Теорема 22 *Пусть $\mathcal{A}$ - линейный автоморфизм пространства V, и L - инвариантное подпространство. Тогда существует базис $\{e_n\}$, в котором матрица оператора имеет квази-треугольную форму.*

Доказательство. Пусть $\{e_k\}$ - базис в L. Дополним его до $\{e_n\}$. Из инвариантности подпространства следует, что векторы $\{\mathcal{A}e_k\}$ линейно выражаются через $\{e_k\}$. Значит, для базисных векторов из L, $\mathcal{A}e_i = a_{1i}e_1 + ...a_{ki}e_k$, для базисных векторов из $V \setminus L$ — $\mathcal{A}e_j = a_{1j}e_1 + ...a_{nj}e_n$. Значит, матрица оператора имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a1n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kk+1} & \dots & a_{kn} \\ & & & a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— квази-треугольная форма. □

Теорема 23 *Если $V = L_1 \oplus ... \oplus L_k$ – прямая сумма подпространств, инвариантных относительно оператора $\mathcal{A} \in L(V, V)$, то в пространстве V существует базис, в котором матрица A_e оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональную форму:*

$$A_e = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

где $\boxed{A_i}$ - матрица размерности подпространства L_i
Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы. □

3.7 Индуцированный оператор

Рассматривая линейный оператор только на его инвариантном подпространстве, можно получить новый оператор.

Определение 31 *Пусть L – инвариантное подпространство относительно оператора $\mathcal{A} \in L(V, V)$. Отображение $A|L\colon L \to L$, определенное равенством: $(\mathcal{A}|L)x = \mathcal{A}x,\ \forall x \in L$, называется индуцированным оператором, порожденным оператором $\mathcal{A}$.*

Индуцированный оператор линеен, он совпадает с $\mathcal{A}$ на подпространстве L и не определен вне его: $(A|L) \in L(L, L)$.

3.8 Собственные значения и собственные векторы

Определение 32 *Ненулевой вектор x называется* ***собственным вектором*** *оператора $\mathcal{A}$, если найдется такое число λ, что $\mathcal{A}x = \lambda x$. Число λ называется* ***собственным значением*** *оператора $\mathcal{A}$, соответствующее собственному вектору x. Множество собственных значений оператора $\mathcal{A}$ называется его* ***спектром****.*

Аналогичным образом определяются собственные векторы-столбцы для матриц. Геометрически, собственные векторы - это векторы, при действии на которых оператором или матрицей они не меняют направления, изменяется только их длина. Поскольку матрицы соответствуют операторам, то действие последних может быть записано в матричном виде через базисы.

Теорема 24 *Собственные векторы оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 – собственные векторы, отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_2. Докажем, что равенство $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Имеем: $\mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 = 0$. Отнимая из этого соотношение уравнение $\lambda_2 \alpha_1 x_1 + \lambda_2 \alpha_2 x_2$, получаем $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)x_1 = 0$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то это равенство возможно, если $\alpha_1 = 0$. Аналогично, можно доказать, что $\alpha_2 = 0$, что и доказывает теорему. □

Следствие. Линейный оператор, действующий в n-мерном пространстве, имеет не более n собственных векторов.

3.9 Характеристический многочлен

Матричное равенство $Ax = \lambda x$ можно переписать в виде $(A - \lambda E)x = 0$. Это служит мотивировкой, чтобы ввести

Определение 33 *Характеристичсекий многочлен - многочлен, определенный как*

$$\triangle(\lambda) = det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + ... + a_1(-\lambda) + a_0$$

где $a_{n-1} = trA, \ a_0 = detA$

(trA - след матрицы A - сумма её диагональных элементов)

Над полем $\mathbb{C}$ характеристический многочлен имеет столько корней, какова его степень. Над другими полями корней может и не быть. Из этого следует, что в униатрном пространстве у любого многочлена имеется хотя б один собственный вектор (по основной теореме алгебры), и на любом инвариантном подпространстве имеется хотя бы один собственный вектор.

Теорема 25 *Характеристические многочлены подобных матриц равны.*

Доказательство. Пусть $A' = C^{-1}AC$, где C - невырожденная матрица. Тогда $|A' - \lambda E| = |C^{-1}AC - \lambda E| = |C^{-1}(AC - \lambda CE)| = |C^{-1}(A - \lambda CEC^{-1})C| = |C^-1| \cdot |A - \lambda E| \cdot |C| = |A - \lambda E|$. $\square$

Теорема 26 *Множество корней характеристического многочлена совпадает со спектром оператора.*

Доказательство. Пусть λ_0 - собственное значение матрицы A. Тогда найдется такой ненулевой вектор x, что $Ax = \lambda_0 x$, что эквивалентно $(A - \lambda_0 E)x = 0$. Допустим, у матрицы $(A - \lambda_0 E)$ есть обратная; тогда, домножая равенство на эту марицу слева, получим $x = 0$, что противоречит нашему предположению. Значит, у матрицы $(A - \lambda_0 E)$ нет обратной, и тогда $|A - \lambda_0 E| = 0$, но это означает, что λ_0 - корень характеристического многочлена. Обратно, пусть λ_0 - корень характеристического многочлена. Тогда $|A - \lambda_0 E| = 0$, и значит найдутся ненулевые векторы такие, что $(A - \lambda_0 E)x = 0$. Их этого следует $Ax = \lambda_0 x$, откуда λ_0 - собственное значение. $\square$

Определение 34 ***Алгебраическая кратность*** *собственного значения m_i - кратность корня λ_i в характеристическом многочлене.*

Если λ_i – собственное значение оператора $\mathcal{A}$, то множество $W_{\lambda_i} = \{x \mid \mathcal{A}x = \lambda_i x\}$ называется **собственным подпространством** оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ_i. Очевидно, что $W_{\lambda_i} = ker(\mathcal{A} - \lambda_i I)$ поэтому собственное подпространство является линейным подпространством пространства V. W_{λ_i} состоит из нулевого вектора и всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_i. Собственное подпространство W_{λ_i} инвариантно относительно оператора A.

Определение 35 *Размерность собственного подпространства W_{λ_i} называется геометрической кратностью собственного значения λ_i и обозначается s_i*

Очевидно, $s_i = n - rk(A_e - \lambda_i E)$, где n - порядок матрицы A_e, или же размерность пространства.

Теорема 27 *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

Доказательство. Пусть λ_i - собственное значение алгебраической кратности m_i, тогда характеричтический многочлен можно представить в виде $\triangle(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{m_i} g(\lambda)$. Согласно уравнению $\mathcal{A}x = \lambda_i x$, матрица оператора в базисе из собственных векторов будет иметь диагональный вид с элементами λ_i на главной диагонали. $\square$

Теорема 28 *Сумма собственных подпространств оператора, отвечающих различным собственным значениям, является прямой суммой.*

3.10 Линейные операторы простой структуры

Определение 36 *Линейный оператор $\mathcal{A} \in L(V, V)$ называется оператором простой струтуры, если его собственные векторы образуют базис в V.*

Теорема 29 *Оператор $\mathcal{A}$ наделен простой структурой тогда и только тогда, когда существует базис, в котором его матрица диагональна, причем на диагонали стоят его собственные числа.*

Доказательство. Пусть e_i - собственный вектор оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ_i. Тогда $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$. $\square$
Следствие. В линейном пространстве P^n линейный оператор с n различными собственными числами будет наделен простой структурой. Обратное неверно, пример - единичная матрица (тождественный оператор).

Теорема 30 *Оператор $\mathcal{A} \in L(V, V)$ наделен простой структурой тогда и только тогда, когда прямая сумма его собственных подпространств совпадает с V: $W_{\lambda_1} \oplus ... \oplus W_{\lambda_p} = V$, где $p \leqslant n$ - число различных собственных значений.*

Теорема 31 *Оператор $\mathcal{A} \in L(V, V)$, где V - произвольное подпространство, наделен простой структурой, если алгебраическая кратность любого собственного значения совпадает с геометрической кратностью.*

Рассмотрим характеристический многочлен $\mathcal{A}$: $\triangle(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)...(\lambda - \lambda_p)^{m_p}$, где $m_i = s_i$, то есть алгебраическая кратность равна геометрической кратности и все это равно $dim(W_{\lambda_i})$
$\sum\limits_k m_k = n, \ \lambda_i \in \mathbb{R}$

Определение 37 *Квадратная матрица A наделена простой структурой, если она подобна диагональной.*

Пусть в базисе $\{f\}$ матрица А имеет вид A_f. Мы хотим по возможности найти базис, в котором матрица будет иметь диагональный вид. Возьмем базис $\{e\}$, где e_i - собственный вектор оператора, соответствующего матрице А. Тогда $\Delta = C^{-1}AC$, где С - матрица перехода, $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ - искомая диагональная матрица.
В $\mathbb{R}^n$ существуют операторы, не имеющие собственных векторов, а в $\mathbb{C}^n$ не всякий оператор обладает необходимым числом линейно независимых векторов для того, чтобы иметь простую структуру.

3.11 Жорданова клетка матрицы

Определение 38 *Жорданова клетка $J_k(\lambda_0)$ порядка k - матрица, которая имеет вид*

$$J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & \ddots & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

В частности, $J_2(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, $J_3(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$
У жордановой клетки матрицы характеристический многочлен равен

$$\triangle(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k = det(J_k(\lambda_0 - \lambda E))$$

При этом у $J_k(\lambda_0)$ одно собственное значение алгебраической кратности k.
Рассмотрим матрицу $B = J_k(\lambda_0) - \lambda_0 E, \quad rk(B) = k - 1$. Геометрическая кратность $s = k - (k-1) = 1$, следовательно, это оператор имеет ровно один собственный вектор и не имеет простой структуры.

3.12 Треугольная форма линейного оператора

Теорема 32 *Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ в комплексном пространстве размерности n найдется система из n вложенных инвариантных подпространств всех размерностей: $L_1 \subset L_2 ... \subset L_n = \mathbb{C}^n$*

Доказательство - по индукции. При $n = 1$ теорема очевидна. При $n > 1$ допустим, что для $n-1$ теорема верна. Нам потребуется следующая

Лемма. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ в комплексном пространстве размерности n обладает инвариантным подпространством размерности n-1.*
Доказательство Пусть λ - собственное число оператора (найдется хотя бы одно, поскольку мы в комплексном пространстве). Тогда $det(A - \lambda E) = 0$ и $rk(A - \lambda E) \leqslant n - 1$, то есть существует подпространство W со свойствами, которые делают его инвариантным: $dim(W) = n - 1, \ \ im(A - \lambda E) \subset W$. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. $\mathcal{A}$, действующий в $\mathbb{C}^n$, имеет инвариантное подпространство размерности $n - 1$: $L_{n-1} \subset \mathbb{C}^n$. Тогда существует индуцировнный оператор $\mathcal{A}|L_{n-1}$, который действует в этом подпространстве, и для него существует система вложенных подпространств $L_1 \subset L_2 ... \subset L_{n-1}$. $\square$

Теорема 33 *Для любого линейного оператора найдется базис, в котором его матрица имеет треугольную форму.*

Доказательство. Согласно теореме 32, оператор имеет систему вложенных инвариантных подпространств $L_1 \subset L_2 ... \subset L_n = V$. Искомый базис строим следующим образом: $e_1 \in L_1, \ e_2 \in L_2 \setminus L_1 \ , ..., \ e_k \in L_k \setminus L_{k-1}$. $\square$
Замечание 1. При правильно выбранной нумерации базиса можно получить верхнюю/нижнюю треугольную матрицу
Замечание 2. На главной диагонали стоят собственные числа оператора.

3.13 Прямая сумма операторов

Определение 39 *Если $V = L_1 \oplus ... \oplus V_p$, где L_i инвариантно относительно линейного автоморфизма $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ - прямая сумма индуцированных операторов $\mathcal{A}|L_1 ... \mathcal{A}|L_p$*

Для всякого вектора $x = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i x_i$, который представим в виде линейной комбинации векторов из инвариантных подпространств, имеет место

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A} \sum_{i=1}^{n} e_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}|L_i e_i \cdot x_i$$

3.14 Нильпотентный оператор

Определение 40 *Линенйный оператор называется нильпотентным, если при возведении его в некоторую степень получается 0. Наименьшая такая степень Q называется индексом оператора.*

В частности, $Q = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A} = 0$
Примеры. Оператор дифференцирования в пространстве многочленов - нильпотентный, индекс на единицу больше степени многочлена; жорданова клетка $J_k(0) = J_k(\lambda_0) - \lambda_0 E$ - нильпотентная матрица.

Теорема 34 *Если для линейного нильпотентного оператора степени Q и вектора x_0 имеет место $\mathcal{A}^{Q-1}x_0 \neq 0$, то x_0, $\mathcal{A}^1 x_0, ..., \mathcal{A}^{Q-1}x_0$ - линейно независимы.*

Доказательство. $\square$

Определение 41 *Линейное пространство $L(x, \mathcal{A}x, ..., \mathcal{A}^{Q-1}x)$ называется циклическим подпространством нильпотентного оператора $\mathcal{A}$, порожденным вектором x.*

Теорема 35 *В комплексном пространстве линейный оператор нильпотентен тогда и только тогда, когда все его собственные значения равны 0.*

Доказательство. Покажем необходимость. Пусть $\mathcal{A}x = \lambda x$. Тогда и $\mathcal{A}^q = \lambda^q x$. Тогда, поскольку оператор нильпотентен, для какого-то k будет иметь место $\lambda^k x = 0$, и поскольку $x \neq 0$, $\lambda = 0$.
Покажем достаточность. Пусть все собственные значения равны нулю. По теореме о диагонализации, у матрицы этого оператора будут находиться нули на главной диагонали, и какие-то числа сверху от неё. Возводя эту матрицу в степень, нули будут подниматься, то есть оператор нильпотентен, его индекс равен порядку матрицы. $\square$

Теорема 36 *Произвольный линейный оператор является суммой нильпотентного и обратимого оператора*

Доказательство. Рассмотрим характеристический многочлен $\triangle(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1}...(\lambda - \lambda_p)^{m_p}$. Пусть $\lambda_1 = 0$. Тогда оператор, индуцированный на инвариантном подпространстве N_q, будет нильпотентным. Размерность подпространства $dim N_q = m_1$, размерн $dim T_q = m_2 + ...m_p$. $N_q = ker \mathcal{A}^q$, $T_q = im \mathcal{A}^q$, $V = N_q \oplus T_q$. $\square$
Из этой теоремы следует, что мы можем представить характеристический многочлен в виде $\triangle(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2}...(\lambda_p - \lambda)^{m_p}$, или, как говорят, расщепить его. Такое расщепление направлено на выделение в V максимального подпространства V_q, на котором индуцированный оператор нильпотентен.

3.15 Корневые подпространства

Теорема 37 *(о расщеплении оператора)*
*Для любого оператора с характеристическим многочленом $\triangle(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}...(\lambda_p - \lambda)^{m_p}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ в комплексном n-мерном пространстве существуют инвариантные подпространства, называемые **корневыми**, такие что $\mathbb{C}^n = K_{\lambda_1} \oplus ... \oplus K_{\lambda_p}$ и $dim(K_{\lambda_i}) = m_i$.*

Доказательство. $f_\lambda = f_1(\lambda)...f_p(\lambda)$, где $f_i(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{m_i} = det(\mathcal{A}|K_{\lambda_i} - \lambda E)$, то есть $\forall x \in K_{\lambda_i},\ \mathcal{A}|K_{\lambda_i}x = \mathcal{A}x$. Это и означает, что оператор является прямой суммой индуцированных операторов на инвариантных подпространствах. □
Теперь покажем, какие именно это подпространства. Поскольку $A|K_{\lambda_i}x = \mathcal{A}x$, то K_{λ_i} состоит из всех векторов x таких, что $(\mathcal{A} - \lambda_i I)^k x = 0,\ k \geqslant 0$.
Другая формулировка: K_{λ_i} является ядром оператора $N_q = (\mathcal{A} - \lambda_i I)^q$, причем $N_{q+1},\ N_{q+2}...$ совпадают с N_q.

Определение 42 *x - корневой вектор для оператора $\mathcal{A}$ и собственного значения λ_i, найдется такое число k, что $(\mathcal{A} - \lambda_i I)^k x = 0$.*

При $k = 1$ - собственный вектор для оператора
При $k > 1$ - собственный вектор для $(\mathcal{A} - \lambda_i I)^k$, тогда $(\mathcal{A} - \lambda_i I)^1, ..., (\mathcal{A} - \lambda_i I)^k$ линейно независимы.

Определение 43 *k - высота корневого многочлена $(\mathcal{A} - \lambda_i I)^k$*

Ненулевые корневые векторы различных высот линейно независимы.
Если $(\mathcal{A} - \lambda_i I)^k x = 0$, то $(\mathcal{A} - \lambda_i I)^{k-1} x \neq 0$. Таким образом, корневым вектором может быть либо 0, либо либо собственный, либо присоединенный вектор высоты $n - 1$
$N_k = ker(\mathcal{A} - \lambda_i I)^k$
$N_1 \subset N_2 \subset ... \subset N_q = N_{q+1} = N_{q+2}...$, то есть существует такой $q \in \mathbb{Z}$, что $(\mathcal{A} - \lambda_i I)^k$ - нильпотентный оператор
$N_1 = ker(\mathcal{A} - \lambda_i I) = W_{\lambda_i}$ - собств. подпространство оператора A.

Определение 44 *$dim(W_{\lambda_i}) = s_i$ - геометрическая кратность*
$dim(K_{\lambda_i}) = m_i$ - алгебраическая кратность
$s_i \leqslant m_i$

Если $S_i \leqslant m_i$, то матрица оператора имеет диагональный вид.

Теорема 38 *Для любого расщепленного оператора существует базис, в котором его матрица диагональна, причем количество клеток равно количеству собственных чисел.*

3.16 Жорданова форма

Теорема 39 *Пусть* $\mathcal{A} \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$*, и его характеристический многочлен имеет вид* $\triangle(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} ... (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$*,* $\lambda_i \neq \lambda_j$*. Тогда существует базис* $\{e\}$*, в котором матрица оператора имеет квази-диагональную форму*

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_n} \end{pmatrix}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} \boxed{J_{q_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{q_{s_i}}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

где $J_{q_i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & \ddots & \lambda_1 \end{pmatrix}$

причем $m_i = q_1 + ... + q_{s_i}$

Количество клеток n-ого порядка равно $t_k = -n_{k-1} + 2n_k - n_{k+1} = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}$, где $n_k = dim(N_k) = deg(\mathcal{A} - \lambda_i I)^k$, $r_k = rg(\mathcal{A} - \lambda_i I)^k$

Доказательство. 1. По теореме 37 о расщеплении, пространство $V = \mathbb{C}^n$ можно представить в виде прямой суммы корневых подпространств с размерностями, равными соответствующим алгебраическим кратностям:

$$V = W_1 \oplus ... \oplus W_p$$

2. Оператор $B_i = \mathcal{A} - \lambda_i I$, индуцированный на корневом подпространстве, по определению является нильпотентным. Значит, по теореме , корневое подпространство можно разложить в прямую сумму циклических подпространств.

3. Теперь заметим, что в базисе из собственных векторов оператор B_i, индуцированный на циклическом подпространстве, имеет вид

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку $\lambda_i I = diag(\lambda_i)$, то сам индуцированный оператор имеет вид жордановой клетки $J(\lambda_i)$. Поскольку оператор является прямой суммой операторов, индуцированных на цилических подпространствах корневых подпространтв, то его вид в этом базисе - жоданова форма. □

Следствие: для собственных чисел оператора A имеет место $\sum^{n} \lambda_i = tr(\mathcal{A})$, $\prod^{n} \lambda_i = det(A)$. Полученная форма оператора - жорданова, базис e - канонический жорданов базис

Теорема 40 *$A = CA_eC^{-1}$, где A_e - жорданова форма, C состоит из координатных столбцов собственных и присоединенных векторов.*

Доказательство. Пусть K_{λ_i} - корневое подпространство оператора $\mathcal{A}$. Пусть $B = \mathcal{A} - \lambda_i I,\ N_k = kerB^k,\ n_k = dimN_k,\ r_k = rkB^n$. Построим K_{λ_i}. Найдем q, начиная с которого все ядра N_q совпадают с K_{λ_i}.

Будем строить K_{λ_i} начиная с подпространств $N_q...N_1$. Пусть $f_1...f_{t_q}$ - векторы, дополняющие произвольный базис N_{q-1} до N_q. Их количество равно $t_q = n_q - n_{q-1}$. Возьмем векторы $B_{f_1}...B_{f_{t_q}}$- векторы высоты $q-1$, и они линейно независимы над $n-2$. Дополним их векторами $g_1...g_{t_{q-1}} \in N_{q-1}$. Векторы $B_{f_1}...B_{f_{t_q}},\ g_1...g_{t_{q-1}}$ образуют базис в N_{q-1}. Их количество равно $n_{q-1} - n_{q-2}$, $t_{q-1} = (n_{q-1} - n_{q-2}) - (n_q - n_{q-1})$, следовательно $t_q = -n_q - n_{q+1} + 2n_q - n_q - 1$. Выполним такие же построения для подпространств $N_{q-2}...N_1$. В N_1: $B^{q-1}f_1...B^{q-1}f_{t_q},\ B^{q-2}g_1...B^{q-2}g_{t_{q-1}},\ B_{v_1}...B_{v_{t_2}}$, которые дополняются векторами $u_1...u_{t_1}$ до базиса в N_1, и они линейно независимы. Таким образом, за q шагов получаем базис корневого подпространства K_{x_i}. □

Пояснение. Пусть $e_1...e_q$ - векторы первого столбца жордановой лестницы. Тогда

$$\begin{cases} e_1 = B^{q-1}f_1 \\ e_2 = B_{q-2}f_1 \\ \dots \\ e_q = B^0 f_1 = f_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Be_1 = 0 \\ Be_2 = 0 \\ \dots \\ Be_q = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\mathcal{A} - \lambda I)e_1 = 0 \\ (\mathcal{A} - \lambda I)e_2 = e_? \\ \dots \\ (\mathcal{A} - \lambda I)e_q = e_{q+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}e_1 = \lambda_i e_1 \\ \mathcal{A}e_2 = e_1 + \lambda_i e_2 \\ \dots \\ \mathcal{A}e_q = \lambda_i e_q + e_{q-1} \end{cases}$$

Этой группе векторов соответствуют ппервые q столбцов матрицы $\mathcal{A}|K_{\ lambda_i}$ в координатном базисе, и она имеет вид

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_q(\lambda_i)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & \ddots & \lambda_i \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

3.16.1 Алгоритм нахождения жордановой формы и жорданова базиса для матрицы 3×3

Вариант 1. Пусть $f(\lambda) = (-1)^3(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$. Тогда

$$A_e = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_3} \end{pmatrix}$$

Вариант 2. Пусть $f(\lambda) = (-1)^3(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)$. Разберем случаи разного ранга матрицы:

- $rk(A - \lambda_1 E) = rkB_1 = 1$ следовательно, $S_1 = n - rkB_1 = 3 - 1 = 2$ то есть две клетки и два собственных вектора плюс собственный вектор для λ_2: $A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & | & 0 \\ 0 & \lambda_1 & | & 0 \\ -- & -- & -| & \\ 0 & 0 & & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$

- $rk(A - \lambda_1 E) = rkB_1 = 2$, $S_1 = 3 - 1 = 2$ - одна клетка, один вектор. $A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & | & 0 \\ 0 & \lambda_1 & | & 0 \\ -- & -- & -| & \\ 0 & 0 & & \lambda_2 \end{pmatrix}$. e_1 - собственный для λ_1, e_2 - присоединенный для λ_1 высоты 1, e_3 - собственный для λ_2

Вариант 3. Пусть $f(\lambda) = (-1)^3(\lambda - \lambda_1)^3$ Снова имеем два случая.

- $rk(A - \lambda_1 E) = rkB_1 = 1$ следовательно, $S_1 = 3 - 2 = 2$ то есть две клетки и два собственных вектора λ_2: $A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & | & 0 \\ 0 & \lambda_1 & | & 0 \\ -- & -- & -| & \\ 0 & 0 & & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$.
  e_1 - собственный e_2 - присоединенный e_3

- $rk(A - \lambda_1 E) = rkB_1 = 2$, $S_1 = 3 - 2 = 1$ - одна клетка - вся матрица. $A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. e_1 - собственный e_2, e_3 присоединенный

4 Функции от матриц

4.1 Функции от жордановой формы

Пусть A - квадратная матрица, $f(\lambda)$ - какая-то скалярная функция. Если это многочлен, то $f(A) = a_0E + a_1A + ... + a_nA^n$

Теорема 41 *Если A приведена к жордановой форме, то $f(A) = Cf(A_e)C^{-1}$, где C - матрица, составленная из столбцов жорданова базиса, при этом*

$$f(J_m(\lambda_0)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_0) & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} & \dots & \frac{f^{(m-1)}(\lambda_0)}{(m-1)!} \\ 0 & f(\lambda_0) & \dots & \frac{f^{(m-2)}(\lambda_0)}{(m-2)!} \\ & \dots & \ddots & \\ 0 & & & f(\lambda_0) \end{pmatrix}$$

Доказательство. В случае, если $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, то

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

В общем случае: разложим функцию в рад Тейлора: $f(\lambda) = f(\lambda_0) + \frac{f'(\lambda_0)}{1!}(\lambda - \lambda_0) + ... + \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!}(\lambda - \lambda_0)^k$ Тогда $f(J_m(\lambda_0)) = f(\lambda_0)I + \frac{f'(\lambda_0)}{1!}I_m + ... + \frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!}I_m^k$, где

$$I_m = J_m(\lambda_0) - \lambda_0 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & \ddots & 0 \end{pmatrix}_{m\times m}$$

, причем при возведении в степень диагональ из единиц сдвигается вверх, поэтому $I_m^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $I_m^{\geqslant m} = 0$

Если $f(\lambda)$ - произвольная функция, то $f(A) = g(A)$, где $g(\lambda_k) = f(\lambda_k)$ - любой многочлен, который принимает значения равные f на всех собственных числах матрицы А.

Пример. Возьмем матричную экспоненту e^A, $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Характеристический многочлен $\triangle(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2$, $\lambda_1 = 2$

$$B = A - \lambda_1 E \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rkB = 1 \Rightarrow S_1 = 2-1 = 1$ - имеем одну клетку, один собственный вектор. Значит, $A_e = J_2(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Найдем собственный и присоединенный вектора. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -2x_2 \Rightarrow$ $e_1 = (-2, 1)$ - собственный вектор, e_{11} - присоединенный вектор ($Bx = e_1$)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & | & -2 \\ -1 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 1 - 2x_2$$

При $x_2 = 0$, $x_1 = -1$, следовательно $e_{11} = (-1, 0)$. Итак,

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$e^A = f(A) = Cf(A_e)C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ -0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

4.2 Теорема Гамильтона-Кэли

Теорема 42 *(Гамильтона-Кэли)*
Подстановка матрицы A в её характеристический многочлен дает 0.

Доказательство. Поскольку матрица оператора подобна жордановой форме, по теореме 25 их характеристические многочлены совпадают, поэтому проведем доказательство для жордановых форм.

Пусть $f(\lambda)$ - характеристический многочлен матрицы оператора. По теореме 41, каждая жорданова клетка $m_0 \times m_0$ для собственного значения λ_0 имеет вид

$$f(J_m(\lambda_0)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_0) & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} & \dots & \frac{f^{(m-1)}(\lambda_0)}{(m-1)!} \\ 0 & f(\lambda_0) & \dots & \frac{f^{(m-2)}(\lambda_0)}{(m-2)!} \\ & \dots & \ddots & \\ 0 & & & f(\lambda_0) \end{pmatrix}$$

Поскольку λ_0 - корень характеристического многочлена, на главной диагонали стоят нули. Кроме того, собственное значение λ_0 - корень многочлена кратности m_0, поэтому оно является корнем для всех многочленов $f'(\lambda),\ f''(\lambda),\ ...,\ f^{(m-1)}(\lambda)$ (по теореме, разобранной в первом сесместре). Значит, каждая жорданова клетка в характеричтисечком многолене становится нулевой, откуда вся матрица - нулевая. $\square$

5 Линейные операторы униатарных (евклидовых) пространств

Определение 45 *Линейное отображение $f\colon V \to P$ называется линйеной формой или функционалом. P может быть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$*

Примеры отображений: все векторы переходят в ноль; в арифметическом конечномерном пространстве вектор отображается в первую координату.

Определение 46 *Если $\{e\}$ - базис в V, то линейная форма f однозначно определяется числами $\alpha_i = f(e_i)$. Они называются коэффициенты линейной формы f в базисе $\{e\}$*

Если $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, то $f(x) = x_1\alpha_1 + ... + x_n\alpha_n$
Заметим, что пространство линейных форм само является линейным пространством, поскольку $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. В связи с этим вводится

Определение 47 *Линейное пространство $L(V, P)$ называют двойственным к V пространством и обозначают V^**

Для конечных размерностей, линейное пространство изоморфно двойственному. Чтобы установить это, нам потребуется

Теорема 43 *В евклидовом (унитарном пространстве) для функционала f сущеуствует и единственен вектор h такой, что $\forall x \in V\colon f(x) = (x, h)$*

Доказательство. Используем ортонормированный базис $\{e\}$ и его коэффиценты $\{\alpha\}$ для функционала f. Положим $h = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} e_i$ и $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Тогда имеем $f(x) = f(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$. Но скалярное произведение равно $(x, h) = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{\overline{\alpha_i}} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$, что и требовалось доказать □
Если базис не ортонормирован, то в векторном виде имеем $(x, h) = f(x) = x\Gamma h$, где Γ - матрица Грама для этого базиса.
Эта теорема позволяет построить изоморфизм, взяв какой-нибудь ненулевой вектор и положив $\varphi_h\colon V \to V^*$, $\varphi_h(x) \mapsto (x, h)$

5.1 Сопряженный оператор

Пусть V, W - унитарные евклидовы пространства. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V, W)$ и $(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{B}x, y)$, то $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

Определение 48 *Отображение $\mathcal{A}^* \in L(W, V)$ - сопряженный оператор для $\mathcal{A} \in L(V, W)$, если $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$*

Рассмотрим основные свойтства.

Теорема 44 *Сопряженный оператор линеен - следует из линейности скалярного произведения*

Теорема 45 *Для всякого оператора существует единственный сопряженный оператор*

Доказательство. Возьмем ортонормированный базис $\{e\}$. Тогда любой вектор выражвется как $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$. Тогда $\mathcal{A}x = \sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i) \mathcal{A}e_i$ и следовательно $(\mathcal{A}x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x, e_i)(\mathcal{A}e_i, y)$ Покажем, что оператор $\mathcal{B} \in L(W, V)$, удовлеторяющий свойству $\mathcal{B}y = \sum\limits_{i=1}^{n} (y, \mathcal{A}e_i) e_i$ - сопряженный к $\mathcal{A}$: $(x, \mathcal{B}y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{(y, \mathcal{A}e_i)} (x, e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\mathcal{A}e_i, y)(x, e_i)$ (поскольку в унитарных пространствах скалярное произведение коммутативно в композиции с комплексным сопряжением). Итак, $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{B}y)$, что и требовалось доказать. □

Свойства сопряженного оператора

1,2 - линейность относительно сопряжения

3. Антикоммутативность относительно сопряжения

4. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

5. $(A^*)^* = A$

5.2 Биортогональные базисы

Определение 49 *Системы векторов $\{x\}$ и $\{y\}$ из унитарного пространства называются биортогональными, если выполняется соотношение*

$$(x_i, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

Биортогональные системы векторов линейно независимы.

В n-мерном векторном пространстве биортогональные системы векторов мощности n образуют пару биортогональных базисов.
Ортонормированный базис биортогонален сам себе.

Теорема 46 *Для любого базиса $\{e\}$евклидова унитарного пространства существует единственный биортогональный базис $\{f\}$.*

Доказательство. $\forall j,\ f_j \perp e_i$ кроме случая $i = j$. Следовательно, f_j принадлежит ортогональному дополнению L_j линейной оболочки всех векторов базиса $\{e\}$, кроме j-того. Очевидно, $dimL_j = 1$. Значит, если g - какой-либо базисный вектор в L_j, то $f_j - \alpha g,\ \alpha \in \mathbb{C}$. Так как $(f_j, e_j) = 1$, то $\alpha = \frac{1}{g,e_j}$ и соотвественно $f_j = \frac{g}{(g,e_j)}$ - следовательно, для каждого j вектор определен однозначно, то есть построен единственный биортогональный базис. $\square$

Теорема 47 *В биортогональных базисах $\{e\}$ и $\{f\}$ унитарного евклидова пространства для линейных автоморфизмов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ имеет место соотношение $(\mathcal{A}^*)_f = (\mathcal{A}_e)^H$*

Доказательство. Пусть $A_e = (a_{ij}),\ A^*_f = (b_{ij})$ - квадратные матрицы операторов. Тогда $\mathcal{A}e_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}e_k,\ \mathcal{A}^* f_i = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ki}f_k$. Значит, скалярное произведение $(\mathcal{A}e_i, f_i) = (\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}e_k, f) = a_{ii}$, значит, $(\mathcal{A}e_j, f_i) = a_{ij}$

С другой стороны, $(\mathcal{A}e_i, f_i) = (e_j, \mathcal{A}^* f_i) = (c_j, \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ki}f_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{b_{ki}}(e_j, f_k) = \overline{b_{ji}}$, следовательно $a_{ij} = \overline{b_{ji}}$, что и требовалось $\square$

Следствие 1. Если базис $\{e\}$ ортонормирован, то $(\mathcal{A}^*)_e = (A_e)^H$ (если базис не ортонормирован, то нужен ещё оператор перехода)

Следствие 2. Для всех линейных автоморфизмов: $detA^* = \overline{detA}$, $rkA = rkA^*$

Теорема 48 *$ker\mathcal{A} = im^{\perp}\mathcal{A}^*,\ ker\mathcal{A}^* = im^{\perp}\mathcal{A}$*

Доказательство.(только для первого равенства). $\forall x \in ker\mathcal{A},\ y \in im\mathcal{A}*$ имеет место $\mathcal{A}x = 0,\ \mathcal{A} * y_1 = y$. Тогда $(x, y) = (x, \mathcal{A}^* y_1) = (\mathcal{A}x, y_1) = (0, y_1) = 0$. Значит, $ker\mathcal{A} \subset im^{\perp}\mathcal{A}^*$. С другой стороны, $dim(ker\mathcal{A}) = dimV - dim(im\mathcal{A})$, или $dimV - dim(im\mathcal{A}^*) = dim(im^{\perp}\mathcal{A}^*)$, следовательно, $ker\mathcal{A} = im^{\perp}\mathcal{A}^*$ $\square$

Теорема 49 *Если подпространство L унитарного евклидова пространства V инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$*

Доказательство. Пусть $x \in L,\ y \in L^{\perp}$. Тогда $(\mathcal{A}x, y) = 0$, но $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y) = 0$, и так как $\mathcal{A}^* y \in L^{\perp}$, то $L^{\perp}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$ $\square$

5.3 Нормальный оператор

В данном разделе векторное пространство унитарно и евклидово.

Определение 50 *Линейный автоморфизм $\mathcal{A}$ векторного пространства называется нормальным оператором, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$*
Квадратная матрица A называется нормальной, если $AA^H = A^H A$

Согласно теореме (47), оператор нормален тогда и только тогда, когда при любом ортонормированном базисе оператор нормален.

Теорема 50 *Собственный вектор нормального оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$, отвечающего собственному значению $\overline{\lambda}$*

Доказательство. Если $\mathcal{A}$ - нормален, то $\mathcal{A} - \lambda I$ - тоже нормален. Пусть x - собственный вектор для λ. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda I)x = 0$, $((\mathcal{A} - \lambda I)x, (\mathcal{A} - \lambda I)x) = 0$, $(x, (\mathcal{A} - \lambda I)^*(\mathcal{A} - \lambda I)x) = 0$, $((\mathcal{A} - \lambda I)^*x, (\mathcal{A} - \lambda I)^*x) = 0$. Следовательно, $(\mathcal{A} - \lambda I)^*x = 0$, то есть $(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda} I) = 0$, то есть $\mathcal{A}^*x = \overline{\lambda}x$, что и требовалось доказать □
Следствие 1. Если оператор нормальный, то $ker\mathcal{A} = ker\mathcal{A}^*$
Следствие 2. Если оператор нормален, то $ker\mathcal{A} = im^{\perp}\mathcal{A}$, $ker\mathcal{A}^* = im^{\perp}\mathcal{A}^*$

Теорема 51 *Собственые векторы нормального оператора отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}x = \lambda x$, $\mathcal{A}y = \mu x$, $\lambda \neq \mu$. Тогда $(\mathcal{A}x, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$. С другой стороны, $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y) = (x, \overline{\mu}y) = \mu(x, y)$. Но по условию собственные числа различны, значит, векторы ортогональны. □

Теорема 52 *(Шура)*
Для любого автоморфизма векторного пространства существует ортонормированный базис, называемый базисом Шура, в котором матрица оператора имеет верхний треугольный вид

Доказательство. Найдем жорданов базис, затем применим процесс ортагонализации по Граму-Шмидту. Полученный базис - базис Шура. □

Теорема 53 *(критерий нормальности)*
Оператор нормален тогда и только тогда, когда существует базис из собственных векторов этого оператора.

Доказательство. Небходимость. Пусть $\mathcal{A}$ наормален и $\{e\}$ - его базис Шура. Значит, матрицы A_e и A_e^H треугольные. В силу нормальности A и ортонормированности базиса Шура эти две матрицы коммутируют: $A_e A_e^H = A_e^H A_e$. Сравнивая диагональные элементы полученных матриц, стоящих слева и справа. получим, что A_e имеет диагональную форму. Значит, базис Шура есть базис из собственных векторов $\mathcal{A}$
Достаточность. Пусть $\{e\}$ - базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Тогда матрица вектора и эрмитово сопряженная к ней - диагональные. Так как диагональные матрицы коммутируют, то оператор нормальный. □

Следствие. В унитарном пространстве нормальный оператор и его сопряженный оператор имеет ортонормированный базис из собственных векторов.

Теорема 54 *(обратная к теореме (51)) Если собственный вектор оператора является собственным вектором его сопряженного оператора, то оператор нормальный.*

5.4 Унитарно-подобные матрицы

Определение 51 *Матрицы A и B называются подобными унитарно (ортогонально), если $B = Q^{-1}AQ$ и Q - унитарна (ортогональна; т.е. $QQ^H = Q^H Q = E$)*

Иначе говоря, отношение подобия для двух матриц выглядит как $B = Q^H AQ$ (в евклидовых пространствах $B = Q^T AQ$). Очевидно, что две матрицы являются подобными тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же оператора в унитарном (евклидовом) пространстве в ортонормированном базисе.

Теорема 55 *Квадратная комплексная матрица нормальна, когда она унитарно подобна диагональной матрице.*

Доказательство следует из определения унитарности. □

5.5 Унитарный оператор

Определение 52 *Линейный автоморфизм U, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, называется унитарным (ортогональным), если $U^*U = UU^* = I$*

Свойства унитарного оператора U:
1. U нормален
2. $U^* = U^{-1}$
3. $|detU| = 1$
4. Оператор унитарен (ортогонален), если в любом ортонормированном базисе его матрица унитарна (ортогональна)

Теорема 56 *(критерий унитарности)*
Следующие утверждения эквивалентны:
1. U унитарен
2. $(Ux, Uy) = (x, y)$
3. $|Ux| = |x|$
4. U сохраняет ортонормированность базиса

Доказательство
$1 \Rightarrow 2$. Так как $UU^* = I$, то $(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y)$
$2 \Rightarrow 3$. $|Ux| = \sqrt{(Ux, Ux)} = \sqrt{(x, x)} = |x|$
$2, 3 \Rightarrow 4$. Очевидно.
$4 \Rightarrow 1$. Пусть U - оператор, сохраняющий ортонормированность. Тогда
□
Заметим вскользь, что униатрный оператор на любом подпространстве индуцирует унитарный оператор.

Теорема 57 *(спектральная характеристика унитарного оператора)*
Нормальный оператор является унитарным тогда и только тогда, когда все его собственные значения равны по модулю единице.

Доказательство. Пусть $Ux = \lambda x$. Тогда $(x, x) = (Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x, x)$, откуда $\lambda\overline{\lambda} = 1$, то есть $|\lambda| = 1$.
Обратно, пусть U - нормальный оператор и $\{e\}$ - ортонормированный базис, векторы которого являются собственными векторами оператора. Тогда произвольный вектор $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, $Ux = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$. Следовательно, $(Ux, Ux) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 |\lambda_i|^2 = (x, x)$, то есть оператор унитарен. □

5.5.1 Каноническая форма матрицы унитарного оператора

Поскольку унитарный оператор нормален, то найдется ортонормированный базис, в котором матрица оператора будет диагональной, причем ненулевые элементы будут равны по модулю единице.
Итак, пусть Q - ортогональный оператор в евклидовом пространстве E.

По теореме (57), $\lambda = \pm 1$ и $detQ = \pm 1$. Также, в любом ортонормированном базисе $\{e\}$, $Q_e^{-1} = Q_e^T$.
Пример 1. В $E = \mathbb{R}^1$, $Q_e = (\pm 1)$;
Пример 2. В $E = \mathbb{R}^2$, $Q_e = \begin{pmatrix} a & b \\ \mp b & \pm a \end{pmatrix}$ (в зависимости от знака определителя).
Введем два очень важных типа линейных операторов в евклидовом пространстве.

Определение 53
Простым вращением *наывается оператор, матрица которого имеет вид*

$$diag(1...1, \Phi, 1...1)$$

Простым отражением *называется оператор, матрица которого имеет вид*

$$diag(1...1, -1, 1...1)$$

Геометрически, простое вращение осуществляет поворот вектора на угол φ. Из определений также следует, что простое вращение и простое отражение - ортогональные операторы. Очевидно также, что простое вращение поворачивает какую-плоскость, и оставляет инвариантным $(n-2)$-мерное подпространство, а простое отражение меняет направление векторов одномерного подпространства, и не меняет $(n-1)$-мерное подпространство.

Теорема 58 *Любой ортогональный оператор может быть представлен в виде произведения простых вращений и простых отражений.*

Доказательство. Поскольку ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение, то тем самым он сохраняет длину вектора. Если $\Phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - его матрица, то условие сохранения длины вектора $(x, y)^T$ эквивалентно $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = x^2 + y^2$, откуда $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1,\ ab + cd = 0$. Параметризуя через угол φ, имеем $\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ или $\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$. Геометрически, первый вариант соответствует повороту на угол φ, а второй - композиция поворота на угол φ и зеркального отражения относительно подпространства $L((1, 0)^T)$. Поскольку этим исчерпываются ортогональные преобразования, теорема доказана. $\square$

Теорема 59 *Для любого ортогонального оператора Q в евклидовом пространстве, найдется ортонормированный базис $\{e\}$, в котором его матрица имеет квази-диагональный вид, то есть состоит из клеток вида (± 1) и $\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ на главной диагонали:*

$$Q_e = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \Phi & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \Phi \end{pmatrix}$$

Такой вид также называют **канонической формой ортогонального оператора**.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай одномерного и двумерного пространства, все остальные операторы можно получить прямой суммой одномерных и двумерных. В одномерном случае ортогональный оператор есть умножение на ± 1. В двумерном случае, как мы показали выше, любой ортогональный оператор есть либо простое вращение, либо простое отражение. Матрица вращения в любом ортонормированном базисе имеет вид Φ, а для отражения можно подобрать такой ортонормированный базис, в котором его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\square$

5.6 Самосопряженный оператор

Определение 54 *Линейный автоморфизм $\mathcal{A}$ в унитарном (евклидовом) пространстве называется самосопряженным, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, то есть $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$*

В униатарном пространстве самосопряженный оператор называют эрмитовым (поскольку он инвариантен относительно эрмитова сопряжения; кстати, именно эрмитовым операторам соответствуют наблюдаемые величины квантовой механики в формулировке фон Неймана), в евклидовых - симметричным.

Свойства самосопряженного оператора U:

1. U нормален.

2. $U^H = U$
3. Самосопряженность эквивалентна тому, что в любом ортонормированном базисе любая матрица является самосопряженной.
4. Определитель U - действительное число, даже если U - оператор в *унитарном* пространстве
5. Если подпространство инвариантно относительно U, то его ортогональное дополнение также инвариатно относительно U
6. На любом инвариантном подпространстве самосопряженный оператор индуцирует самосопряженный оператор.

Теорема 60 *Нормальный оператор в унитарном (евклидовом) пространстве является самосопряженным тогда и только тогда, когда все его собственные значения вещественны.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ - самосопряженный нормальный оператор и $\mathcal{A}x = \lambda x$. Тогда $(\mathcal{A}x, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$. С другой стороны, по нормальности имеем $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) = \overline{\lambda}(x, y)$, откуда имеем $\overline{\lambda} = \lambda$, то есть собственное число вещественно.
В другую сторону. Пусть оператор нормален и все его собственные значения вещественны. Возьмем ортонормированный базис и представим вектор x в виде $\sum x_i e_i$ Далее, $\mathcal{A}x = \mathcal{A}\sum x_i e_i = \sum x_i \lambda_i e_i$. С другой стороны, $\mathcal{A}^* x = \sum x_i \overline{\lambda_i} e_i$ Но по условию все коэффициенты λ_i вещественные, то есть $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, то есть оператор самосопряженный. $\square$
Следствие 1. Самосопряженный оператор имеет ровно n собственных значений в n-мерном пространстве.
Следствие 2. Если $\mathcal{A}$ - самосопряженный оператор в n-мерном пространстве, то существует ортонормированный базис $\{e\}$, в котором матрица оператора имеет вещественную диагональную форму

Теорема 61 *Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, являются ортогональными.*

Доказательство. Теорема следует из нормальности самосопряженного оператора. $\square$
Следствие. Из собственных векторов самосопряженного оператора можно построить базис. **Пример.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем характеристический многочлен

$$\triangle(\lambda) = |A - \lambda E| = (\lambda - 18)(\lambda - 9)(\lambda + 9)$$

Теперь найдем следующие матрицы

$$A_1 = A - \lambda_1 E \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решаем систему $Ae_1 = 0$, имеем $2x_2 = x_3$; получаем вектор $e_1 = (-2, 1, 2)$. Также поступаем с другими собственными числами оператора. Из полученных векторов составляем матрицу C и матрицу A в базисе e:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_e = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = C^{-1}AC$$

Теперь отнормирвем векторы и составим из них матрицу U:

$$e_1' = \frac{e_1}{|e_1|} = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$$

$$U = \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Полученная матрица ортогональна: $U^{-1} = U^T$

6 Билинейные и квадратичные формы

6.1 Линейные формы

Определение 55 *Линейная форма (функционал) — функция $f\colon V \to P$, определенная на векторном пространстве V над полем P и удовлетворяющая условиям линейности*

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $af(x) = f(ax)$

Примеры. След матрицы - линейная форма на пространстве матриц; дифференцирование - линейная форма на пространстве дифференцируемых функций; определенное интегрирование на отрезке - линейная форма на пространстве непрерывных функций этого отрезка.

Определение 56 *Пусть $\{e\}$ - базис пространства V. Строка F называется* ***матрицей линейной формы*** *f в базисе $\{e\}$, если для вектора x, выраженного в базисе $\{e\}$ столбцом X, имеет место*

$$f(x) = FX$$

Таким образом, действие линейной формы однозначно определяется её действием на базисные векторы. Компоненты вектора F называются коэффициентами формы в данном базисе $\{e\}$.

Теорема 62 *Пусть C - матрица перехода от базиса $\{e\}$ к $\{e'\}$. Тогда матрицы F и F' линейной формы f в этих базисах связаны соотношением $F' = FC$.*

Доказательство. Пусть $X,\ X'$ - представления вектора x в базисах $\{e\}$ к $\{e'\}$ соответственно. Тогда, поскольку $X = CX'$, имеем $f(x) = FX = F'X' = FCX'$, откуда $F' = FC$. $\square$

6.2 Билинейные формы

Определение 57 *Пусть V - линейное пространство над полем P. Отображение $\mathcal{A}(x,y)\colon V \times V \to P$ называется билинейной формой, если для любых $x, y \in V$:*

1. $\mathcal{A}(x+z, y) = \mathcal{A}(x,y) + \mathcal{A}(z,y)$
2. $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha\mathcal{A}(x,y)$
3. $\mathcal{A}(x, z+y) = \mathcal{A}(x,y) + \mathcal{A}(x,z)$
4. $\mathcal{A}(x, y\alpha) = \alpha\mathcal{A}(x,y)$

Иначе говоря, билинейная форма линейна по обеим переменным.

Определение 58 *Билинейная форма $\mathcal{A}(x, y)$ называется симметричной, если $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$.*

Примеры билинейных форм:
1. Скалярное произведение - билинейная симметрическая форма
2. Если f, g - линейая форма, то $\mathcal{A}(x, y) = f(x)g(y)$ - симметричная билинейная форма
3. В n-мерном пространстве V с базисом $\{e\}$ имеет вид $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j) = \sum_i \sum_j x_i y_j \mathcal{A}(e_i, e_j)$. Если обозначить $\mathcal{A}(e_i, y_j) = a_{ij}$, то $\sum_i \sum_j x_i y_j a_{ij}$ - **общий вид билинейной формы**. Значит, **любая билинейная форма определяется некоторой квадратной матрицей** в определенном базисе

Теорема 63 *Пусть V - линейное пространство над P, $\{e\}$ - базис в V. Для любых чисел $a_{ij} \in P,\ i, j \in \{1...n\}$ найдется и притом единственная билинейная форма $\mathcal{A}(e_i, e_j) = a_{ij}$*

Доказательство существования следует из примера 3. Докажем единственность. Пусть $\mathcal{B}(e_i, e_j)$ - другая билинейная форма. Выразим эту форму: $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j) = \sum_i \sum_j x_i y_j \mathcal{B}(e_i, e_j) = \sum_i \sum_j x_i y_j a_{ij}$, откуда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. $\square$
В векторном виде, $\mathcal{A}(x, y) = x_e^T A_e y_e = y_e^T A^T x_e$, где $A_e = (a_{ij})$

Теорема 64 *Произвольная матрица $n \times n$ является матрицей единственной билинейной формы в заданном базисе.*

Доказательство - см рассуждение выше. $\square$

Эти теоремы устанавливают естественную биекцию между билинейными формами n-мерного пространства и матрицами размера $n \times n$.

Теорема 65 *Матрицы билинейной формы $\mathcal{A}(x, y)$ в базисах $\{e\}$ и $\{f\} = \{eC\}$ связаны соотношением $A_f = C^T A_e C$ (C - матрица перехода между базисами)*

Доказательство. $\mathcal{A}(x, y) = x_e^T A_e y_e$. Так как $x_e = Cx_f,\ y_e = Cy_f$, то $\mathcal{A}(x, y) = x_f^T C^T A_e C y_f = x_f^T A_f y_f$ $\square$
Следствие. $rkA_e = rkA_f$

Теорема 66 *Билинейная форма симмметрична, если её матрица в любом базисе симметрична.*

Доказательство. $\mathcal{A}(x, y) = x_e^T A_e y_e = y_e^T A_e^T x_e$ С другой стороны, $\mathcal{A}(x, y) = y_e^T A_e x_e$ Значит, если $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$, то $A^T = A$, то есть матрица симметрична.

Определение 59 *Ранг билинейной формы - ранг её матрицы в любом базисе. Если ранг формы меньше размерности пространства, то форма называется вырожденной.*

Теорема 67 *Билинейная форма $\mathcal{A}(x, y)$ является вырожденной тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор x такой, что*

$$\mathcal{A}(x, y) = 0 \ \ \forall y \in V$$

Доказательство. Пусть $\{e\}$ - базис и A_e - матрица билинейной формы в этом базисе. Тогда равенство нулю равносильно системе $\mathcal{A}(x, e_j) = 0$. Учитывая разложение вектора x на базисные, получим $\sum_i x_i \mathcal{A}(e_i, e_j) = 0$, то есть получили СЛАУ $\sum_i a_{ij} x_i = 0$, которая будет иметь ненулевое решение только когда матрица вырожденная. Значит, билинейная форма вырождена. $\square$

6.3 Квадратичные формы

Определение 60 *Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ - симметричная билинейная форма в пространстве V над полем P. Квадратичной формой называется отображение $\mathcal{A}\colon V \to P$, которое ставит в соответствие вектору число $\mathcal{A}(x, x)$*

Билинейная форма $\mathcal{A}(x, y)$ называется полярной к квадратичной форме $\mathcal{A}(x, x)$

Теорема 68 *Полярная билинейная форма для любой квадратичной формы определена однозначно.*

Доказательство. Следует из формулы

$$\mathcal{A}(x, y) = 0,5[\mathcal{A}(x + y, x + y) - \mathcal{A}(x, x) - \mathcal{A}(y, y)] \quad \square$$

Матрица квадратичной формы в базисе $\{e\}$ является матрицей полярной к ней билинейной формы.

Свойства матрицы квадратичной формы

1. Симметричность в любом базисе
2. Любая симметричная матрица является матрицей единственной квадратичной формы в заданном базисе
3. В двух базисах $\{e\}$ и $\{f\} = \{eC\}$ матрицы связаны соотношением $A_f = C^T A_e C$
4. В любом базисе квадратичная форма имеет вид $\mathcal{A}(x) = \sum\limits_i^n \sum\limits_j^n a_{ij} x_i x_j, \ \ a_{ij} =$

$a_{ji},\ x = (x_1 ... x_n)^T$
В векторных обозначениях: $\mathcal{A}(x) = x_e^T A_e x_e$ 5. Ранг квадратичной формы определется её матрицей в любом базисе: $rk\mathcal{A}(x) = rkA_e$; $\mathcal{A}(x)$ является вырожденной квадратиной формой, если её матрица вырождена.

6.4 Канонический вид квадратичной формы

Мы хотим привести матрицу квадратичной формы к красивому виду, изменяя подходящим образом базис пространства V.

Определение 61 *Базис $\{e\}$ называют каноническим базисом квадратичной формы, если её матрица в этом базисе имеет диагональный вид*

$$A_e = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

В этом случае квадартичная форма будет иметь вид $\mathcal{A}(x) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2$. Если $rk\mathcal{A}(x) < dimV$, то некоторые элементы будут нулевые (их можно расположить внизу матрицы).

Определение 62 *Нормальный канонический вид* - $\mathcal{A}(x) = \pm 1 x_1^2 + ... + \pm 1 x_r^2$

Теорема 69 *(о методе Лагранжа)*
Для любой квадратичной формы существует канонический базис.

Доказательство. Пусть имеется некоторый базис $\{e\}$ в V и в этом базисе оператор имеет вид $\mathcal{A}(x) = A_e$. Пусть $g(x_1, ... x_n) = \sum\limits_i^n \sum\limits_j^n a_{ij} x_i x_j$. Далее, пусть $x_e = Cx_f$, $f = eC$ - переход к новому базису $\{f\}$.

Пусть $A_e \neq 0$. Обозначим через Δ_k угловые миноры порядка k: $\Delta_k = M_{1,...,k}^{1,...,k},\ k \in \{1..n\}$. Положим по определению $\Delta_0 = 1$.

1. Рассмотрим случай, когда $\Delta_k \neq 0$. Первый шаг основан на том, что $\Delta_1 = a_{11} \neq 0$. Тогда соберем все слагаемые, содержащие x_1, в многочлен $g(x)$, и выделим полный квадрат; в результате получим $g(x_1, ... x_n) = a_{11} x_1^2 + 2\sum\limits_{k=2}^n a_{1k} x_1 x_k + \sum\limits_{i=2}^n \sum\limits_{j=2}^n a_{ik} x_i x_j = a_{11}(x_1 + \sum\limits_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k)^2 - a_{11}(\sum\limits_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k)^2 + \sum\limits_{i=2}^n \sum\limits_{j=2}^n a_{ik} x_i x_k$

Перейдем к новым координатам: $x'_1 = x_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k$, $x'_k = x_k$ для $k > 1$. Это преобразование приведет к матрице перехода

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a11} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом в новом базисе $\mathcal{A}(x) = g(x_1, ..., x_n) = a_{11}x_1'^2 + h(x'_2, ..., x'_n)$,

$$A_1 = C_1^T A_e C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

Заметим, что в этой матрице $\Delta_1 = a_{11}$, $a'_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$

2. Шаг 2 основан на том, что $a_{22} \neq 0$, и состоит в применении действий первого шага к квадратичной форме $h(x'_2 ... x'_n)$, т.е. в выделении полного квадрата по переменной x'_2:

$$x''_2 = x'_2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{a'_{2k}}{a'_{22}} \cdot x'_k, \;\; x''_j = x'_j, \;\; j \in \{3..n\}$$

Тогда квадратичная форма примет следующий вид: $\mathcal{A}(x) = a_{11}x_1'^2 + a'_{22}x_2''^2 + v(x''_3, ..., x''_n)$,

$$A_2 = C_2^T A_1 C_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \dots & a''_{nn} \end{pmatrix}$$

$a''_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \neq 0$.

Итак, повторяя этот процесс $n-1$ раз, получим диагональную матрицу квадратичной формы $A_{n-1} = diag(\lambda_1 ... \lambda_n)$, $\lambda_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$, при этом мы предполагаем, что все миноры не равны нулю.

3. Рассмотрим случай, когда какой-нибудь минор $\Delta_k = 0$. Тогда после k-того шага матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A_{k-1} = diag(a_{11}, a'_{22} ..., a^{(k-r)}_{k-1,k-1}, \boxed{B})$$

где матрица В равна

$$B = \begin{pmatrix} a_{kk} & ... & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Пусть $B \neq 0$. Имеем 2 случая:
1. Если $a_{kk} \neq 0$, снова идем по алгоритму Лагранжа
2. Если $a_{kk} = 0$, то:

а) Если $a_{jj} = \neq 0,\ j > k$, то произвести замену $x'_k = x_j,\ x'_j = x_k,\ x'_e = x_e$, то есть поменять одновременно k-ые и j-ые строки и столбцы. Далее снова переходим к алгоритму Лагранжа.

б) Если все следующие диагональные элементы равны нулю: $a_{ii} = 0,\ i > k$, то, поскольку В ненулевая, найдется ненулевой элемент $a_{lj},\ l \neq j,\ l, j > k, l \neq k$. Это означает, что в квадратичной форме отсутствуют слагаемые $x_k^2, .., x_n^2$, но присутствуют члены типа $2a_{lj}x_lx_j$. Перейдем к новым координатам $x_l = x'_l + x'_j,\ x_i = x'_l - x'_j,\ x'_s = x_s\ \forall s \neq k, j$. Тогда в квадратичной форме появятся $x_l'^2$ и $x_j'^2$. □

Теорема 70 *Если в матрице квадратичной формы ранга r первые r миноров не равны нулю, то существует базис e, в котором матрица квадратичной формы имеет вид*

$$A_e = diag(\lambda_1 ... \lambda_r, 0...0),\ \lambda_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$$

Доказательство следует из предыдущей теоремы. Используя метод Лагранжа, получаем матрицу $A_e = diag(\lambda_1, ..., \lambda_r, \boxed{C})$, и посокльку $rkA_e = rkA_r = r$, то матрица С - нулевая. Формулы $\lambda_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ называются **формулами Якоби**. □

6.5 Квадратичные формы в вещественном пространстве

Ни канонический базис, ни канонический вид квадратичной формы не определены однозначно. Возникает вопрос: что у них общего? Очевидно, сохраняется ранг, то есть число ненулевых λ_i. В вещественном пространстве можно также говорить о постоянстве знаков коэффициентов канонической формы.

Пусть квадратичная форма была приведена к квадратичному виду в каноническом базисе $\{e\}$: $\mathcal{A}(x) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_r x_r^2,\ \forall x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i,\ dimV = n,\ rk\mathcal{A} = r \leqslant n$.

Определение 63
Положительный индекс инерции квадратичной формы π *- число положительных коэффициентов квадратичной формы.*
Отрицательный индекс инерции квадратичной формы $\nu = r - \pi$ *- число отрицательных коэффициентов квадратичной формы.*
Сигнатура квадратичной формы $\sigma = \pi - \nu$ *- разность между положительным и отрицательным индексами инерции.*

Определение 64 *Квадратичная форма называется положительно определенной, если её сигнатура равна размерности пространства.*

Положительно определенная квадратичная форма, очевидно, для всех векторов принимает значения больше нуля: $\mathcal{A}(x) > 0$.

Теорема 71 *(закон инерции квадратичных форм)*
Положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы не зависят от выбора базиса.

Доказательство *нам не нужно в принципе* ©. Но мы-то знаем, что этот вопрос есть в билетах, поэтому приведём доказательство.

Сначала отметим, что ранг формы есть максимальная размерность подпространства, на котором форма положительно определена. Очевидно, что она положительно определена на подпространстве $L(e_1, .., e_r)$. Пусть теперь U - произвольное подпространство, на котором форма положительно определена, и $W = L(e_{r+1}, .., e_n)$. Так как $\mathcal{A}(x) \leqslant 0$ при $x \in W$, то $U \cap W = 0$. Отсюда следует, что $dimU \leqslant r$. Значит, индексы инерции не зависят от выбора базиса. □

Определение 65 *Обозначим число совпадений и перемен знаков в последовательности миноров* $\Delta_0, ..., \Delta_k$ *как* $P(\Delta_0, ..., \Delta_k)$ *и* $V(\Delta_0, ..., \Delta_k)$ *соответственно*

Теорема 72 *(Сигнатурное правило Якоби)*
Пусть Δ_k *- минор k-того порядка матрицы квадратичной формы ранга r, и* $\Delta_k \neq 0\ \forall k$*. Тогда* $\pi = P(\Delta_0, ...\Delta_r)$, $\nu = V(\Delta_0, ..., \Delta_r)$

Доказательство следует из формулы Якоби, так как если $\lambda_k > 0$, то $sgn\Delta_k = sgn\Delta_{k-1}$. □

6.6 Знакоопределенные квадратичные формы

Определение 66 *Квадратичная форма называется положительно (отрицательно) определенной, если для любого ненулевого вектора принимает только положительные (отрицательные) значения.*

Все остальные квадратичные формы, для которых на разных векторах получаются разные знаки $\mathcal{A}(x) > 0$ и $\mathcal{A}(y) < 0$ - знакопеременные.

Пример. Скалярный квадрат $\mathcal{A}(x) = (x, x)$ - положительно определенная квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 73 *Квадратичная форма $\mathcal{A}(x)$ является положительно (отрицательно) определенно, когда её положительный (отрицательный) индекс инерции совпадает с размерностью пространства.*

Доказательство. Приведем доказательство для положительных форм. Пусть $\{e\}$ - канонический базис формы $\mathcal{A}(x)$, λ_i - канонические коэффициенты, то есть $\mathcal{A}(x) = \sum \lambda_i x_i^2$
Необходимость. Если форма положительно определена, то $\mathcal{A}(e_i) > 0$. Так как $\mathcal{A}(e_i) = \lambda_i$, то все λ_i больше нуля. Значит, индекс инерции положителен.
Достаточность. Пусть все $\lambda_i > 0$. Тогда $\mathcal{A}(x) = \sum \lambda_i x_i^2$, то есть форма положительно определена.
Для отрицательных форм доказательство точно такое же, только заменяем $\mathcal{A}(x)$ на $-\mathcal{A}(x)$. $\square$
Следствие. Определитель матрицы положительно определенной квадратичной формы всегда положителен. Переходя к другому базису $\{f\}$: $|\mathcal{A}_f| = \prod \lambda_i |C|^2 > 0$, поскольку $A_f = C^T A_e C$.

Теорема 74 *(критерий Сильвестра)*
Квадаратичная форма $\mathcal{A}(x)$ является положительно (отрицательно) определенной тогда и только тогда, когда угловые миноры Δ_k матрицы формы в любом базисе положительны (чередуют знаки начиная с отрицательного: $\Delta_k = a_{11} < 0,\ \Delta_2 > 0 ...$)

Доказательство. Необходимость. Пусть форма является положительно определенной, A_e - её матрица в произвольном базисе $\{e\}$. Рассмотрим подпространство $L_k = L(e_1, ..., e_k)$, натянутое на первые k векторов базиса. Очевидно, что для всех $x \in L_k$, $\mathcal{A}(x) > 0$. Следовательно, A_k имеет положительный определитель. Но $|A_k|$ это и есть Δ_k. Следовательно, все $\Delta_k > 0$
Достаточность вытекает из теорем 72 и 73.
Для отрицательно определенных форм: рассмотрим $\mathcal{A}(x)$ с минорами

δ_k. Если форма отрицательно определена, то все угловые миноры $-\mathcal{A}(x)$ больше нуля: $(-1)^k\Delta_k > 0$. Далее очевидно. $\square$
Заметим, что если все угловые миноры отрицательны, то форма знакопеременная.
Следствие. Если квадратичная форма положительно определена в евклидовом пространстве, то все скалярные произведения исчерпываются билинейными формами, полярными к таким квадратичным формам в вещественном пространстве. Из любой такой формы мы можем сделать скалярное произведение, что сейчас и покажем.

Теорема 75 *Пусть $V = \mathbb{R}^n$. Отображение $\mathcal{A}\colon V \times V \to \mathbb{R}$ является скалярным произведением в пространстве V тогда и только тогда, когда оно является билинейной формой, полярной к положительно определенной квадратичной форме.*

Доказательство. Необходимость следует из следствия критерия Сильвестра. Покажем достаточность. Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ - билинейная форма, полярная к положительно определенной квадратичной форме $\mathcal{A}(x)$. Матрицы этих форм совпадают. Тогда отображениие $\mathcal{A}\colon V \times V \to \mathbb{R}$, заданное как $\mathcal{A}(x, y)$, удовлетворяет аксиомам скалярного произведения. $\square$
Замечание. Матрица билинейной формы, задающей скалярное проиведение, совпадает с матрицей Грама базисных векторов: $A_e = \Gamma(e_1 ... e_n)$.

6.7 Квадратичные формы в комплексном пространстве

Аналогом билинейных форм форм в коплексном пространстве являются комплексные билинейные формы. Иногда их называют полуторалинейными, почему - сейчас выясним.

Определение 67 *Отображение $\mathcal{A}\colon V \times V \to \mathbb{C}$ называют комплексной билинейной (полуторалинейной) формой в пространстве V, если для всех векторов выыполняются аксиомы*

1. $\mathcal{A}(x + y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$
2. $\mathcal{A}(ax, y) = a\mathcal{A}(x, y)$
3. $\mathcal{A}(x, y + z) =$
4. $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \overline{\alpha}\mathcal{A}(x, y)$

Отличие от вещественного случая только в п.4

Определение 68 *Форма эрмитова, если $\mathcal{A}(x, y) = \overline{\mathcal{A}(x, y)}$*

Примеры. Скалярное произведение в унитарном пространстве является эрмитовой комплексной билинейной формой.
В $V = \mathbb{C}^n$ отображение $\mathcal{A}\colon V \times V \to \mathbb{C}$, определенное как $\mathcal{A}(x,y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i \overline{y_j}$ - комплексная билинейная форма ($a_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j)$ - комплексные коэффициенты). Это выражение дает общий вид полуторалинейной формы в базисе $\{e\}$.

Многое из того, что касается вещественных форм, есть частный случай полуторалинейных форм, например:

1. Компактный (векторный) вид полуторалинейной формы: $\mathcal{A}(x,y) = X_e^T A_e \overline{Y_e}$ или $\mathcal{A}(x,y) = Y_e^H A_e^H X_E$

2. Переход между базисами $A_f = C^T A_E \overline{C}$

3. Эрмитовость формы эквивалентна эрмитовости её матрицы в любом базисе.

Теорема 76 *Полуторалинейная форма является эрмитовой тогда и только тогда, когда её квадратичная форма вещественна для любого (комплексного) вектора.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathcal{A}(x,y)$ - эрмитова. Тогда $\mathcal{A}(x,x) = \overline{\mathcal{A}(x,x)}$, поэтому её значение вещественно.
Достаточность. Пусть $\mathcal{A}(x,x) \in \mathbb{R}$. Достаточность следует из равенства

$$\mathcal{A}(x,y) = \frac{1}{4}(\mathcal{A}(x+y,x+y) - \mathcal{A}(x-y,x-y) + i\mathcal{A}(x+iy,x+iy) - i\mathcal{A}(x-iy,x-iy)) \quad \square$$

6.8 Эрмитовы (квадратичные) формы

Определение 69 *Пусть $\mathcal{A}(x,y)$ - эрмитова полуторалинейная форма. Тогда $\mathcal{A}\colon V \to \mathbb{C},\ x \mapsto \mathcal{A}(x,x)$ называется эрмитовой формой.*

При этом комплексная форма $\mathcal{A}(x,y)$ является полярной к $\mathcal{A}(x,x)$. Будем кратко обозначать эрмитову форму $\mathcal{A}(x)$.

Свойства эрмитовой формы

1. Существет биекция между эрмитовыми полуторалинейными и эрмитовыми квадратичными формами.
2. Матрица эрмитовой формы в любом базисе эрмитова.
3. Общий вид эрмитовой формы $\mathcal{A}(x) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i \overline{x_j}$ или $\mathcal{A}(x) = X_e^T A_e \overline{X_e} = X_e^H A_e^T X_e$
4. Канонический вид эрмитовой формы $\mathcal{A}(x) = \lambda_1 |x_1|^2 + ... + \lambda_r |x_r|^2$ где r - ранг формы.

5. Метод Лагранжа приведения к каноническому виду применим с изменением:

$$\mathcal{A}(x) = g(x_1...x_n) = a_{11}x_1^2+2\sum_{k=2}^{n} a_{1k}x_1x_k+\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n} a_{ik}x_ix_k = a_{11}\left\|x_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k\right\|^2+f(x_2,...x_n)$$

6. Остаются справедливыми формулы Якоби.
7. Как следует из теоремы 76, эрмитова квадратичная форма принимает только вещественные значения, поэтому остаются справедливыми закон инерции квадратичных форм, сигнатурное правило Якоби, критерий Сильвестра.
8. Отображение $\mathcal{A}\colon V\times V \to \mathbb{C}$ является скалярным произведением тогда и только тогда, когда оно является полуторалинейной формой, полярной к эрмитовой полуторалинейной форме.

6.9 Квадратичные формы в евклидовых и униатарных пространствах

Ранее было отмечено, что ни канонический базис, ни канонический вид квадратичной формы не определены однозначно. При этом сохраняются количества положительных и отрицательных коэффициентов. В евклидовом (унитарном) пространстве положение иное, если рассматривать ортонормированный базис.

Теорема 77 *Для любой квадратичной формы в евклидовом пространстве E существует, и притом единственный, симметрический оператор $\mathcal{H} \in L(E,E)$ такой, что:*

$$\mathcal{A}(x,x) = (\mathcal{H}x,x)$$

Доказательство. Пусть выбран ортонормированный базис $\{e\}$ и матрица формы A_e в этом базисе. В силу симметричности матрицы существует симметрический оператор $\mathcal{H}$, который в базисе $\{e\}$ имеет матрицу A_e. То есть, $\mathcal{H}_e = A_e$. Тогда для любого вектора $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i$, $(\mathcal{H}x)_e = \mathcal{H}_ex_e = A_ex_e$, $x_e = (x_1,...x_n)^T$. Так как в ортонормированном базисе скалярное произведение векторов делается по правилу "строка на столбец то $(\mathcal{H}x,x) = (A_ex_e,x_e) = x_e^TA_ex_e$. Но $\mathcal{A}(x,x) = x_e^TA_ex_e$.
Докажем единственность. Пусть $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ - два симметрически х операторa, удовлетворяющих условию. Из этого равенства следует $((\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2)x,x) = 0$. Это означает, что оператор, равный разности $\mathcal{H}_1-\mathcal{H}_2$, симметрический, его собственные числа равны нулю. Отсюда следует, что $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ $\square$

Теорема 78 *Для любой квадратичной формы в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором она имеет канонический вид.*

Доказательство. По предыдущей теореме существует $\mathcal{H}$ - симметричный оператор со свойством $\mathcal{A}(x,x) = (\mathcal{H}x, x)$. Если ортонормированный базис $\{e\}$ составлен из собственных векторов оператора $\mathcal{H}$, имеем $x = \sum x_i e_i$, $\mathcal{A}(x,x) = (\mathcal{H}x, x) = (\sum \lambda_i x_i e_i, \sum x_i e_i) = \sum \lambda_i x_i^2$, где λ_i - i-тое собственное значение оператора $\mathcal{H}$ $\square$

Замечание. Подобный метод построения ортонормированного базиса фигурирует под названием "приведение квадратичной формы к главным осям". Теорема 78 утверждает, что любая форма может быть приведена к такому виду. Причем, в отличие от метода Лагранжа, сохраняются канонические коэффиценты. Меняется только канонический базис, который определяется собственными векторами (поскольку вернее говорить о собственных подпространствах, имеется некторый произвол в выборе базиса).

Теорема 79 *(о паре квадратичных форм)*
Для любой пары квадратичных форм $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ в вещественном пространстве V, одна из которых положительно определена, сущетсвует общий базис, в котором обе квадратичные формы имеют канонический вид.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}(x,x) > 0$. Тогда $\mathcal{B}(x,y)$ как билинейная форма, полярная к $\mathcal{B}(x,x)$, является скалярным произведением, то есть $\mathcal{B}(x,y) = (x,y)$. Это означает, что в пространстве V задано скалярное произведение, и оно является евклидовым. По теореме 78, сущетсвует ортонормированный базис $\{e\}$, в котором $\mathcal{A}(x,x) = \sum \lambda_i x_i^2$ (λ_i - собственное значение матрицы формы $\mathcal{A}(x,x)$). Тогда для всех векторов $x = \sum x_i e_i$, имеем $\mathcal{B}(x,x) = (x,x) = \sum x_i^2$. $\square$ **Замечание.** Укажем один из способов поиска общего ортонормированного базиса. Пусть A и B - матрицы квадратичных форм $\mathcal{A}(x,x)$ и $\mathcal{B}(x,x)$ соответсвенно в некотором базисе f, и пусть $e = fC$. Тогда $C^T AC = \Lambda$, где $\Lambda = diag(\lambda_1, ...\lambda_n)$ и $C^T BC = E$. Следствие: $A = (C^T)^{-1}\Lambda C^{-1}$, $B = (C^T)^{-1}C^{-1}$. Отсюда $B^{-1} = CC^T$ В итоге, $B^{-1}AC = C\Lambda$

Последнее равенство означает, что столбцы матрицы C, то есть координаты векторов искомого канонического базиса $\{e\}$ в исходном базисе $\{f\}$ являются собственнными векторами матрицы $B^{-1}A$, отвечающим собственным значениям λ_i. Таким образом, λ_i являются корнями характеристического многочлена $|B^{-1}A - \lambda I| = 0$ или $|A - \lambda B| = 0$, а векторы канонического базиса - нетривиальными решениями СЛАУ $Ax = \lambda Bx$.

Эта теорема показывает, что положительно определенная форма $\mathcal{B}$ приводится к каноническому виду с коэффициентами, равными 1. Но на практике это не требуется. Приведенный выше алгоритм применим и в том случае, если $C^T BC = diag(\mu_1, ..., \mu_n)$, то есть если вместо единичной матрицы на диагонали стоят какие-то числа.

Вообще говоря, теоремы этого параграфа с очевидными изменениями (матрицы не симметрические, а эрмитовы) распространяются на эрмитовы квадратичные формы унитарных пространств.

6.10 Приложение: гиперповерхности порядка 2 в евклидовом пространстве

Определение 70 *Множество векторов евклидова пространства, удовлетворяющих уравнению* $\mathcal{A}(x, x) + 2g(x) + c = 0$*, называется гиперповерхностью второго порядка. Здесь* $\mathcal{A}(x, x)$ *- квадратичная форма,* $g(x)$ *- линейная форма.*

Введем обозначения: $\{e\}$ - какой-то базис пространства E, $A = (a_{ij})$ - симметрическая матрица квадратичной формы в этом базисе, $b_i = g(e_i)$ - коэффициенты линейной формы g и $x = \sum x_i e_i$. В них уравнение перепишем в виде

$$\sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_i b_i x_i + c = 0$$

или в матричной форме

$$x_e^T A x_e + 2b^T x_e + c = 0$$

Проведем исследование гиперповерхности второго порядка в n-мерном евклидовом пространстве E.

Пусть $\{e\}$ - ортонормированный базис, и пусть гиперповерхность имеет вид $x_e^T A x_e + 2b^T x_e + c = 0$, $A^T = A$. Сделаем следующее: 1. Приведем форму $\mathcal{A}$ к главным осям, т.е. найдем ортонормированный базис $\{f\}$, составленный из собственных векторов матрицы A, и укажем канонический вид этой формы:

$$\mathcal{A}(x, x) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k (x'_k)^2, \; r = rkA$$

При переходе к новому базису, уравнение преобразуется:

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k'^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} b'_k x'_k + c = 0$$

где $f = eC$, $x_e = Cx_f$, $x_f = (x'_1, ..., x'_n)^T$
2. Избавимся от переменных x'_k в линейной части уравнения. Например, если $\lambda_k \neq 0$ для некоторого k, то $\lambda_k x'^2_k + 2b'_k x'_k = \lambda_k(x'_k + \frac{b'_k}{\lambda_k})^2 - \frac{b'^2_k}{\lambda_k}$. Положим $x''_k = x'_k + \frac{b'_k}{\lambda_k}$, и тогда уравнение перепишется в виде

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x''^2_k + 2\sum_{k=r+1}^{n} b'_k x''_k + c' = 0$$

где $c' = c - \sum\limits_{k=1}^{r} \frac{b'^2_k}{\lambda_k}$
3. Исследуем полученное уравнение. Есть два случая:

- При $k > r$, $b'_k = 0$. Тогда уравнение не имеет линейной части и приведено к нужному виду.
- Если все же линейная часть сохраняется, то сделаем ещё одно преобразование. Построим его матрицу S. Пусть $s = (b'_{r+1}, ..., b'_n)$ - ненулевой по условию вектор. Нормируем его: $s_1 = (b'_{r+1}, ..., b'_n)/\sqrt{\sum\limits_{k=r+1}^{n} b'^2_k}$.
  Дополним этот вектор до ортонормированного базиса $\{s_{n-r}\}$ пространства $\mathbb{R}^{n-r}$. Тогда матрица преобразования имеет вид
  $$S = \begin{pmatrix} \boxed{E} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & s_{n-r,r+1} & \dots & s_{n-r,n} \end{pmatrix}$$
  Эта матрица ортогональна, поскольку построена из столбцов координат ортонормированного базиса. Значит, базис $\{f\}$ под её действием перейдет в ортонормированный базис. Проведем преобразование координат по правилу:
  $x'''_k = x''_k$ при k от 1 до r;
  $x'''_k = \sum\limits_{k=r+1}^{n} b'_k x''_k / \sqrt{\sum\limits_{k=r+1}^{n} b'^2_k}$ при $k = r+1$;
  $x'''_k = \sum\limits_{i=r+1}^{n} s_{k,i} x''_i$ при k от $r+2$ до n;
  В этих координатах уравнение имеет канонический вид
  $$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x'''^2_k + 2x'''_{r+1}\sqrt{\sum_{k=r+1}^{n} b'^2_k} + c'$$
  причем от c' можно избавиться параллельным переносом.

7 Использованные обозначения

$\square$ - окончание доказательства.
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ - натуральные, рациональные, действительные, комплексные числа.
sgn - знак числа ($+$ или -)
dim - размерность пространства (его ранг)
im - образ отображения
ker - ядро отображения
rk - ранг оператора
def - дефект оператора
tr - след матрицы
$L(V, W)$ - множество линейный отображений из пространства V в пространство W
(x, y) - скалярное произведение x и y
$diag(a_1, a_2, ..., a_n)$ - диагональная матрица $n \times n$ из элементов $a_1, a_2, ..., a_n$
$L(M)$ - линейная оболочка множества векторов M
$\{e\}$, $\{e_n\}$ - базис или система векторов (базис размерности n)

Список литературы

[1] Конспект по алгебре за первый семестр