

# Содержание

<b>1</b>	<b>База топологии</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Метрическая топология</b>	<b>4</b>
2.1	Метризуемость топологических пространств. . . . .	6
<b>3</b>	<b>Свойства замкнутых множеств</b>	<b>6</b>
3.1	Классификация точек относительно подмножества . . . . .	7
3.1.1	Примеры weird и fanсу топологий . . . . .	9
3.2	Непрерывные отображения метрических пространств . . .	10
<b>4</b>	<b>Гомеоморфизмы</b>	<b>12</b>
4.1	Топологические классификации . . . . .	12
4.2	Связность топологических пространств . . . . .	13
4.3	Вполне несвязные пространства . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Компакты</b>	<b>16</b>

**Определение 1** Пусть  $X$  - множество. Топологией на  $X$  называется семейство подмножеств  $\tau \in \mathcal{P}(X)$ , называемых открытыми множествами (данной топологии), такое, что:

1.  $X, \emptyset \in \tau$
2.  $U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$
3.  $\{U_i \mid i \in I\} \subset \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

То есть, топологии принадлежит само множество и пустое множество, пересечение конечного числа множеств и объединение любого числа множеств из топологии.

Пример. Докажем, что открытые множества в смысле евклидовой метрики в  $\mathbb{R}^n$  - топология. Очевидно, открыто само  $\mathbb{R}^n$ , также открыто пустое множество. Открытость пересечения доказывается тем, что наименьшая эpsilon-окрестность принадлежит всем множествам, то есть лежит в их пересечении, следовательно, оно открыто. Для объединения: для каждой точки найдется множество, в которое она входит с окрестностью.

**Определение 2** Тривиальная топология -  $\tau_t = \{X, \emptyset\}$

Дискретная топология -  $\tau_0 = \mathcal{P}(X)$

Любая нетривиальная топология содержит тривиальную и содержится в дискретной.

Пример. Множества, симметричные относительно выбранной прямой в евклидовом пространстве, образуют топологию.

Пример. Множество epsilon-окрестностей нуля  $\tau = \{D_\varepsilon(0) \mid \varepsilon > 0\} \cup \{X, \emptyset\}$  - топология.

Пример. Топология Зарисского - топология множеств, дополнительных к конечным множествам (для конечных пространств совпадает с дискретной).

Пример. Пусть  $f : X \rightarrow X$  - биекция. Докажем, что  $\tau_f = \{U \subset X \mid$

## 1 База топологии

**Определение 3** Пусть  $(X, \tau)$  - топологическое пространство. Семейство  $\Sigma = \{W_\beta \subset X \mid \beta \in B\}$  - база топологии, если удовлетворяет двум условиям:

1.  $\Sigma \in \tau \quad \forall W_\beta \in \Sigma$
2. Любое открытое подмножество  $X$  можно представить в виде объединения некоторых подмножеств из  $\Sigma$ :  $\forall U \in \tau \exists W_\alpha \in \Sigma, \alpha \in A \subset B : U = \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha$

**Пример.** В обычной (евклидовой) топологии множество  $\Sigma = \{D_r(a) \mid a \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$  является базой топологии. Действительно, проверим аксиомы:

1. Открытая окрестность открыта.
2. По определению обычной топологии, каждая точка в открытом множестве содержится в нем с некоторой окрестностью. Значит, объединение этих окрестностей дает это множество. Более формально,  $\forall U \in \tau, \forall x \in U \Rightarrow \exists D_{\varepsilon_x}(x) : D_{\varepsilon_x}(x) \in U$ . Очевидно доказывается, что

$$\bigcup_{x \in U} D_{\varepsilon_x}(x) = U$$

**Замечание.** Если к базе добавить произвольное открытое множество, то новое множество также будет базой.

**Упражнение.** Привести пример двух баз евклидовой топологии на плоскости, которые не пересекаются с обычной базой (открытых шаров). (Решение: например, база из открытых квадратных или звездчатых окрестностей).

**Пример.** В  $(\mathbb{R}^2, \tau_{MN})$ ,  $\Sigma_{MN} = \{(b, b^*) \mid b \in \mathbb{R}\}$  !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

**Пример.** Топология иррациональных точек на прямой  $(\mathbb{R}, \tau_{im})$ ,  $\tau_{im} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ . Множество иррациональных точек не является базой, поскольку их объединение не содержит всю прямую. Решение: добавить саму прямую. !!!!!!!!!!!!!

**Теорема 1** (критерий базы в топологическом пространстве)

Пусть  $(X, \tau)$  - топологическое пространство, и семейство множеств удовлетворяет условию  $\sigma \subset \tau$ .  $\Sigma$  является базой топологии тогда и только тогда, когда  $\forall U \in \tau, \forall x \in U \exists W_{\beta_0} \in \Sigma : x \in W_{\beta_0} \subset U$

**Доказательство.** Пусть  $\Sigma$  - база топологии. Тогда любое открытое множество можно представить в виде объединений множеств из базы. Значит, для  $x \in U$  найдется множество из базы, в котором лежит  $x$ .

Обратно. Множество  $\Sigma$  удовлетворяет первой аксиоме базы по определению. Докажем выполнение второй аксиомы. Для любой точки в открытом множестве по условию теоремы найдется окрестность из  $\Sigma$ , лежащая в открытом множестве. !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!  $\square$

**Теорема 2** (критерий базы на множестве)

Пусть  $X$  - произвольное множество,  $\Sigma = \{W_\beta \subset X \mid \beta \in B\}$  - семейство подмножеств из  $X$ . Чтобы на  $X$  существовала топология с

данной базой, необходимо и достаточно выполнения двух условий:

1.  $X = \bigcup_{\beta \in B} W_\beta$

2. Для любых множеств из базы найдется множество, лежащее в их пересечении и содержащее произвольную точку оттуда.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $\Sigma$  - база некоторой топологии  $(X, \tau)$ . Из аксиомы базы (2) следует, что  $X$  есть объединение множеств из  $\Sigma$ . значит, выполняется первое условие теоремы. Докажем второе условие. Достаточно взять пересечение двух множеств из базы. Так как это открытые множества, его также можно представить в виде объединения множеств из базы, и хотя бы в одном из которых лежит фиксированная точка (по определению объединения).

Достаточность. Докажем, что всевозможные объединения множеств из  $\Sigma$  является топологией. пусть это есть  $\tau$ . Проверим аксиомы топологии:

1. Пустое множество принадлежит всему, чему надо. Все пространство лежит там по условию теоремы. 3. Пусть

□

**Лемма.** Две топологии с общей базой совпадают.

**Доказательство.** Пусть  $\tau, \omega$  - две топологии на множестве  $X$ , имеющие общую базу  $\Sigma = \{W_\beta \subset X \mid \beta \in B\}$ . Для всех множеств из топологии  $\tau$  они являются объединением множеств из базы, но поскольку это объединение открытых множеств, то оно открыто, и является элементом топологии  $\omega$ . Итак,  $\tau \subset \omega$ , аналогично и в другую сторону.

**Замечание.** Согласно этой лемме, база топологии однозначно определяет топологию. Следовательно, критерий базы на множестве дает способ определения новых топологий.

## 2 Метрическая топология

Напомним определение метрического пространства.

Пусть функция  $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет трем условиям:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$

2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3.  $\rho(x, y) + \rho(x, z) \leq \rho(y, z)$

Тогда множество  $(M, \rho)$  называется метрическим пространством с метрикой  $\rho$ .

**Определение 4** Пусть  $(M, \rho)$  - метрическое пространство. Множество

$$D_r(a) := \{x \in M \mid \rho(x, a) < r\}$$

называется открытым шаром радиуса  $r$

Очевидно, центр шара принадлежит ему в любой метрике.

**Определение 5** Пусть  $(M, \rho)$  - метрическое пространство. Множество всевозможных шаров с разными центрами и радиусами являются базой  $\Sigma_\rho$  (единственной) топологии, которая называется метрической топологией.

Докажем, что множество шаров - база. Применим критерий базы на множестве.

1. Возьмем объединение всех шаров. Так как любой шар содержит свой центр, то все точки множества лежат в объединении шаров.
2. Для пересекающихся шаров возьмем минимальную радиус до границы шара.

**Пример.** Евклидова топология - пример метрической топологии для стандартной евклидовой метрики в  $\mathbb{R}^n$ . Дискретная топология - топология, порожденная дискретной метрикой.

**Упражнение.** Докажите самостоятельно, что евклидова метрика индуцирует евклидову топологию (используйте критерий базы) (вставить картинку.)

Решение. Докажем, что минимум из возможных расстояний до границы шара - искомый радиус окрестности, лежащей в пересечении шаров. Рассмотрим точку в этой окрестности. Она лежит в обоих шарах. (вставить выкладку)

**Замечание.** Мы будем использовать обычную топологию и рисовать картинки, которые помогут доказывать различные теоремы, но все доказательства будут даны для произвольных метрических пространств.

**Пример.** Рассмотрим множество непрерывных функций на отрезке. введем следующую метрику:  $\rho(f, g) = \max |f(x) - g(x)|$ . Определение корректно, поскольку на отрезке супремум непрерывной функции достигается. Какие (картинка) функции лежат в окрестности произвольной функции  $y = f(x)$ ? Это - непрерывные функции, заключенные в области  $f(x) - r, f(x) + r$

**Замечание.** Если  $\Sigma$  - база топологии  $\tau$ , то  $\tau$  совпадает с семейством всевозможных объединений множеств из базы.

## 2.1 Метризуемость топологических пространств.

**Определение 6** Топологическое пространство называется метризуемым, если на множестве существует метрика, индуцирующая эту топологию.

Мы уже доказали, что обычная топология метризуема. Не все, однако, топологические пространства метризуемы.

**Определение 7** Пусть  $X$  - топологическое пространство,  $H \subset X$ . Окрестностью подмножества в  $X$  называется подмножество, содержащее его. Окрестностью точки называется любое открытое множество, содержащее точку (обозначение:  $U_x$ )

**Определение 8** Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если любые две точки обладают непересекающимися окрестностями.

**Теорема 3** Любое метризуемое топологическое пространство хаусдорфово.

**Доказательство.**  $\square$

## 3 Свойства замкнутых множеств

**Теорема 4** Пусть  $(X, \tau)$  - топологическое пространство, и  $\mathcal{F} = \{CU \mid U \in \tau\}$  - совокупность всех замкнутых множеств. Тогда выполняются условия:

F1.  $\emptyset, X \in \mathcal{F}$

F2. Объединение любых двух замкнутых замкнуто.

F3. Пересечение любого семейства замкнутых замкнуто.

**Доказательство.** Применим законы де Моргана к аксиомам топологического пространства.

1.  $X = C\emptyset, \emptyset = CX$

2. Дополнение к объединению открытых замкнуто, и есть пересечение дополнений.

3. Дополнение к пересечению двух открытых замкнуто, и есть объединение дополнений.  $\square$

**Замечание.** Как мы видим, замкнутые множества имеют свойства, очень

похожие на свойства топологии. На самом деле, топологию можно однозначно задать как семейство множеств, удовлетворяющих свойствам замкнутых множеств, и объявить открытыми дополнения к ним.

**Замечание.** Из аксиомы  $\tau_2$  по индукции вытекает, что пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто, и объединение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

**Пример.** Рассмотрим обычную топологию на прямой, и рассмотрим интервалы, верхняя граница которых минорируется каким-то числом. Тогда в бесконечном пересечении имеем отрезкоинтервал. Пример показывает, что пересечение любого числа открытых уже не обязательно открыто.

**Теорема 5** (лемма об открытом множестве)

*Пусть  $(X, \tau)$  - топологическое пространство. Множество открыто в топологии тогда и только тогда, когда любая точка содержится в нем с некоторой окрестностью.*

**Доказательство.** Возьмем любую точку  $x \in U$ . Положим окрестность точки само множество  $U$ ; очевидно,  $U \subset U$ .

Обратно, пусть каждая точка входит в  $U$  вместе с какой-то окрестностью. Их объединение лежит в  $U$ , и ещё и  $U$  лежит в нем, так как окрестность каждой точки содержит её.  $\square$

### 3.1 Классификация точек относительно подмножества

Пусть  $(X, \tau)$  - топологическое пространство,  $A \subset X$  - непустое подмножество. Серия определений:

**Определение 9** Точка  $x \in X$  называется внутренней точкой множества  $A$ , если существует окрестность этой точки, лежащая в  $A$ .

**Определение 10** Точка  $x \in X$  внешняя для множества  $A$ , если она внутренняя для его дополнения.

**Определение 11** Точка  $x \in X$  называется точкой прикосновения, если для любой окрестности  $U \cap A \neq \emptyset$

**Определение 12** Точка  $x \in X$  называется предельной/точкой накопления, если в любой проколотой окрестности точки найдется точка из  $A$ .

**Определение 13** Точка  $x \in X$  - граничная для множества  $A$ , если в любой её окрестности лежат как точки из  $A$ , так и из  $X \setminus A$ .

**Определение 14** (семинар) Точка  $x \in A$  - изолированная, если существует окрестность, в которой нет других точек из  $A$ .

**Определение 15** Возьмем любое подмножество  $A$  топологического пространства  $X$ . Объединение всех внутренних точек  $A$  называется внутренностью  $A$  (обозначается  $A_0$ ,  $\text{Int}A$ ). Объединение всех точек прикосновения называется замыканием  $A$  (обозначение:  $\overline{A}$ ). Множество всех граничных точек - граница  $A$ . (обозначение:  $\text{Fr}A$ ,  $\partial A$ )

Переходим к теоремам.

**Теорема 6** (свойства замыкания)

Замыкание множества обладает следующими свойствами:

1.  $A \subset \overline{A}$ , причем замыкание замкнуто.
2. Если  $A \subset B$ , то  $\overline{A} \subset \overline{B}$ .
3. Замыкание множество - минимальное по включению замкнутое множество, содержащее  $A$ .
4.  $\overline{A} = \bigcap F_\sigma$  - замыкание есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ .
5. Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

**Доказательство.** 1. Рассмотрим  $x \in A$ . Найдем окрестность  $x \in U_x$ . Они пересекаются, и значит,  $A \subset \overline{A}$ . Докажем замкнутость замыкания. По лемме об открытом множестве, точка из дополнения к замыканию имеет окрестность, не пересекающуюся с  $A$ . Рассмотрев точку из этой окрестности, заметим, что она тоже не лежит в замыкании. Итак, мы показали, что дополнение к замыканию открыто, так как каждая точка лежит в нем с некоторой окрестностью.

2. Пусть  $A \subset B$ . Возьмем любую точку из замыкания. Она есть точка накопления для  $A$  и следовательно для  $B$  (по включению), значит, она лежит в замыкании  $B$ .

3. Предположим, что существует замкнутое  $F : A \subset F \subset \overline{A}$ . Это эквивалентно тому, что существует точка из замыкания, но не лежащая в  $F$ . Она лежит в дополнении  $F$ , но лежит и в замыкании  $A$ , значит, является точкой накопления, но тогда  $C F \cap F \neq \emptyset$  - противоречие.

4. Рассмотрим пересечение всех замкнутых, содержащих множество  $A$ . Оно замкнуто по свойству замыкания. Также, по свойству замыкания,  $\overline{A}$  - одно из них, так как замкнуто. Но также и все пересечение лежит в замыкании. Обратно,  $A$  входит в пересечение. То есть в нем лежит и замыкание. Имеем в итоге равенство.



5. Пусть множество совпадает с замыканием. Тогда оно замкнуто по первому пункту теоремы. Обратно, пусть  $A$  замкнуто. По свойству 3, замыкание - минимальное замкнутое по включению. Но это и есть  $A$ .  $\square$

### **Теорема 7** (свойства внутренности)

Пусть  $A$  - подмножество топологического пространства.

1.  $A_0 \subset A$ , причем внутренность открыта.
2.  $A_0$  - максимально открытое по включению, лежащее в  $A$ .
3. Внутренность есть объединение всех открытых множеств, лежащих в  $A$ .
4.  $A = A_0 \Leftrightarrow A$  открыто.

**Доказательство.** 1.  $A_0$  лежит

2. Рассмотрим открытое множество  $U \subset A$

3. Рассмотрим объединение множеств  $A_\alpha$ . Это - открытое множество, которое лежит в  $A \Rightarrow$  лежит в  $A^0$ . Есть и обратное включение: рассмотрим  $x \in A^0 \subset A$ . Значит, существует  $A_{\alpha_0} = A^0 \Rightarrow A^0 \subset \bigcup A_\alpha$ . Итак, доказано равенство.

4. Пусть  $A^0 = A$  - открыто по свойству 1. Обратно, если  $A$  открыто, то  $A = A^0$  по свойству 2.  $\square$

### **Теорема 8** (свойства границы)

Пусть  $Fr A$  - граница подмножества  $A$  топологического пространства  $(X, \tau)$ .

1.  $Fr A = \overline{A} \cap \overline{CA}$  - замкнутое множество.
2.  $Fr A = \overline{A} \setminus A^0$

**Доказательство.** 1. В любой окрестности любой точки границы содержатся как точки из  $A$ , так и из  $CA$ . Значит, граничные точки являются точками прикосновения, то есть принадлежат замыканию  $A$ . С другой стороны, они принадлежат замыканию дополнения множества  $A$  по тем же соображениям.

2. Рассмотрим  $x \in Fr A$ . Это точка, которая принадлежит как замыканию множества, так и замыканию его дополнения. Значит, это не внутренняя точка. То есть  $x \in Fr A \iff x \in \overline{A} \setminus A^0$   $\square$

#### **3.1.1 Примеры weird и fancy топологий**

**Пример.** Нарисем бабочку на плоскости, у которой кусок границы открыт. Значит, имеем  $\mathbb{R}^2, \tau_{об}$ . В ней оно ни открыто, ни замкнуто. В топологии отражения относительно  $OY$  (вспомним, что в неё все открытые

множества открыто-замкнутые!). Внутренность - брюшко бабочки, замыкание - вся бабочка, граница - их разность. Топология Зарисского. Замыкание -

дописать то что было!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

**Теорема 9** *Об эквивалентности определений непрерывного отображения*

**Доказательство.**  $1 \Rightarrow 2$ . Выполняется теоретико-множественное соотношение  $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B) \forall B \subset Y$ . Пусть  $f$  - непрерывно по определению 1. Рассмотрим замкнутое множество  $F$  в  $Y, \Omega \Rightarrow X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F) \in \tau$  - следовательно, выполняется определение 2.

$2 \Rightarrow 1$ . Аналогично предыдущему.

$1 \Rightarrow 3$ . Рассмотрим любую точку  $x \in X, y = f(x)$ , и рассмотрим любую окрестность  $V_y$ . Пусть  $U$  - прообраз окрестности  $V_y$ . Оно открыто по определению 1. И значит, это окрестность  $x$ . Значит,  $f(U) \subset V_y$ .

$3 \Rightarrow 4$ . Пусть  $\Sigma$  - база в  $\tau, \sigma$  - база в  $\Omega$ . По определению 3 непрерывности, существует окрестность  $x$ , чьим образом является базовая окрестность  $y$ . Но эта окрестность представляется в виде объединения элементов базы. В одном из них лежит  $x$  следовательно, выполняется условие.

$4 \Rightarrow 1$ . Воспользуемся леммой об открытом множестве. Покажем, что  $U := f^{-1}(V)$  открыто в  $(X, \tau)$ .  $\forall x \in U : y = f(x) \in V$  по критерию базы в топологическом пространстве.  $\exists V_y \in \sigma : y \in V_y \subset V$  значит, по определению 4 существует открытое множество из базы,  $W_x \in \Sigma : f(W_x) \subset V_y \subset V \Rightarrow W_x \subset f^{-1}(V) = U$ . Таким образом,  $U$  содержит вместе со всякой точкой окрестность  $\Rightarrow$  оно открыто.  $\square$

**Пример.** (рисунок с пространствами).  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \Omega)$  - непрерывное отображение по определению 3.

## 3.2 Непрерывные отображения метрических пространств

**Определение 16** Пусть  $(X, d, \tau_d), (Y, \rho, \tau_\rho)$  - метрические топологические пространства. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  непрерывно в точке  $x \in X$ , если  $\forall D_\varepsilon(y) \exists D_\delta(x) : f(D_\delta(x)) \subset D_\varepsilon(y)$ .

**Теорема 10** Это определение эквивалентно предыдущим определениям непрерывности.

**Доказательство.** Применим определение для баз топологий. Шары образуют базу метрической топологии.

$5 \Rightarrow 4$ .

$4 \Rightarrow 5$ . Рассмотрим шар в точке  $y$ . По определению 4, найдется шар (необязательно с центром в  $x$ ), образ которого лежит в окрестности игрека. Но тогда найдется и шар с центром в  $x$ , лежащий в этом шаре. Покажем, что образ этого шара также лежит в окрестности  $y$ . Используем неравенство треугольника:  $d(z, a) \leq d(z, x) + d(x, a) < r - d(x, a) + d(x, a) = r$ , значит,  $f(D_\delta(x)) \subset f(D_r(a)) \subset D_\varepsilon(y)$ .  $\square$

Какова связь с непрерывностью в смысле матанализа? Рассмотрим  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  с обычной топологией. Тогда обычная непрерывность  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$ . Можно нарисовать рисунок.

Можно налить воды, позвенеть ключами

Одиночество есть человек в квадрате

Вывод: в мат. анализе используется определение 5, так как  $\mathbb{R}$  - метрическое топологическое пространство.

**Теорема 11** *Композиция непрерывных функций непрерывна*

**Доказательство.** Докжем эту классическую теорему анализа чисто топологически. Пусть  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  - непрерывны. Докажем, что  $g \circ f$  - тоже непрерывно. Рассмотрим любое открытое множество в  $Z$ . Для него рассмотрим  $U = (g \circ f)^{-1}(w) = f^{-1}(g^{-1}(w))$ . Так как прообраз открытого открыт,  $g^{-1}(w)$  - открыт в  $Y$ , и значит обратная композиция тоже открыта.  $\square$

**Пример.** Любая сложная функция непрерывна, например,  $f(x) = 2^{\cos 57(x-3) + \ln 8 - \sin x} x^{170}$ . По индукции предложение распространяется на любое конечное число функций.

Дадим несколько определений. Пусть  $(X, \tau)$  - топологическое пространство,  $A \subset X$ ,  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \Omega)$  - отображение топологических пространств.

**Определение 17** *Сужение отображения - отображение  $f_A: (A, \tau_A) \rightarrow (Y, \Omega)$  (где  $\tau_A$  - индуцированная топология)*

**Определение 18** *Приведение отображения - отображение  $f_1: (X, \tau) \rightarrow (f(X), \Omega_{f(X)})$  (в частности, совпадает в случае сюръекции.)*

**Определение 19** *Приведение отображения -*

**Теорема 12** *Сужение непрерывного отображения непрерывно.*

**Доказательство.** Для любого открытого его прообраз открыт.  $\square$

**Теорема 13** *Приведение непрерывного отображения непрерывно.*

**Доказательство.** Рассмотрим открытое множество  $W$  в индуцированной топологии на образе  $X$ . Это - след открытого множества  $V$  в  $Y$ , чей прообраз открыт. Но  $f^{-1}(W) = f^{-1}(V)$ , значит,  $f_1^{-1}(V) = f^{-1}(W)$  так как образ  $X$ .  $\square$

## Теорема 14

**Доказательство.**  $\square$

**Определение 20** Пусть  $A$  - подмножество топологического пространства  $(X, \tau)$ . Тогда функция  $i: A \rightarrow X$ ,  $i(a) = a$  называется включением  $A$  в  $X$ .

**Теорема 15** Включение топологического подпространства в объемлющее пространство непрерывно.

**Доказательство.** Любой прообраз открыт  $\Rightarrow$  непрерывно.  $\square$

## 4 Гомеоморфизмы

**Определение 21** *Отображение топологических пространств называется гомеоморфизмом, если*

1.  $f$  - биекция
2.  $f$  - непрерывное отображение
3.  $f^{-1}$  - непрерывное отображение

Отображение называется открытым, если образ открытого множества открыт. Условие 3 эквивалентно открытости обратного отображения.

**Определение 22** *Топологические пространства гомеоморфны (топологически эквивалентны), если между ними можно провести гомеоморфизм.*

**Упражнение.** Гомеоморфность - отношение эквивалентности на множестве топологических пространств.

### 4.1 Топологические классификации

**Определение 23** *Свойства топологических пространств называются топологическим инвариантом, если оно сохраняется при любых гомеоморфизмах.*

**Пример.** Хаусдорфовость - топологический инвариант. Докажем это. Предположим, что  $(X, \tau)$  и  $(Y, \omega)$  - гомеоморфные пространства и  $X$  хаусдорфово. Возьмем  $y \neq z \in Y$ . Рассмотрим их прообразы. Они различны, поскольку у нас биекция, значит, они обладают непересекающимися окрестностями. Образы этих окрестностей открыты и являются окрестностями  $y, z$ . Но их пересечение пусто, так как биекция.

**Пример.**  $(\mathbb{R}, \tau_E)$  (обычная топология) не гомеоморфна  $\mathbb{R}, \tau_{MN}$ , так как у них разная хаусдорфовость.

**Задача.** Провести топологическую классификацию топологических пространств  $\xi = \{(X_\alpha, \tau_\alpha \mid \alpha \in J\}$ . Сделать эту классификацию значит найти систему топологических инвариантов, характеризующую классы эквивалентности по гомеоморфизму. Это означает, что если два пространства обладают инвариантами, то они гомеоморфны. Такая система инвариантов называется полной, то есть полностью характеризует класс.

## 4.2 Связность топологических пространств

**Определение 24** Топологическое пространство называется связным, если в нем одновременно открыты и замкнуты только  $X$  и  $\emptyset$ .

**Определение 25** Топологическое пространство называется связным, если его нельзя представить в виде двух непустых непересекающихся открытых (или замкнутых) подмножеств. То есть  $X \neq A_1 \cup A_2$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ,

**Теорема 16** Определения связности эквивалентны

**Доказательство.**  $1 \Rightarrow 2$ . Предположим противное, именно,  $X$  раскладывается в дизъюнктное объединение. Но тогда обе части открыто-замкнуты.  $2 \Rightarrow 1$ . Пусть выполняется 2, но существует такое замкнутое  $A$ , что  $X = A_1 \cap C A_1$ . получили прямое противоречие с 2.  $\square$

**Теорема 17** (о связности топологических пространств)

*Непрерывный образ связного пространства связно.*

**Доказательство.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  - непрерывная сюръекция. Допустим, что  $Y$  не связен, а  $X$  связен. Тогда  $Y$  можно представить в виде объединения открытых множеств  $Y = A_1 \cup A_2$ . Тогда  $X$  можно представить в виде объединения двух полных прообразов этих множеств, но они непустые, непересекающиеся и открытые по свойству непрерывного определения. Противоречие со связностью  $X$ .  $\square$

**Теорема 18** (основная лемма)

Пусть  $A$  и  $B$  - открытые или замкнутые непересекающиеся подмножества в топологическом пространстве  $X$ . Если для связного  $M$  выполнено  $M \subset A \cup B$ , то оно лежит целиком либо в  $A$ , либо в  $B$ .

**Доказательство.** Предположим противное, и  $M$  лежит и в  $A$  и в  $B$ . Тогда  $M = M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B) = A_1 \cup A_2$ . ни одно из этих новых множеств, не равно  $M$ , иначе они пустые. Значит, предположение неверно.  $M$  не связно как подпространство, индуцированное на самом себе  $\square$

**Теорема 19** Если любые две различные точки топологического пространства принадлежат связному подмножеству. то само пространство связно.

**Доказательство.** Предположим, что пространство несвязно.  $\square$

**Теорема 20** Линейная связность эквивалентна связности.

**Доказательство.**  $\square$

**Теорема 21** Если пересечение связных топологических подпространств непусто, тогда их объединение связно.

**Доказательство.** Предположим. что объединение несвязно.  $\square$

**Теорема 22** Замыкание связного множества связно

**Доказательство.** Рассмотрим замыкание связного множества  $A \subset \bar{A} \subset X$ . Допустим, что замыкание несвязно. По определению 2,  $\bar{A} = A_1 \cup A_2$  - объединение непересекающихся непустых множеств. По свойству замкнутых множеств, это замкнутые множества. Значит,  $A_1 = \bar{A} \cap F_1$ ,  $A_2 = \bar{A} \cap F_2$ . По основной лемме,  $A \subset A_1$  (но тогда  $A_2 = \emptyset$ ), или  $A \subset A_2$  (но тогда  $A_1 = \emptyset$ ). Это противоречит нашему предположению, значит, предположение неверно.  $\square$

Рассмотрим  $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$  - обычная топология,  $\rho$  - обычная метрика. Рассмотрим единичный шар  $D_1^n = \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid \rho(0, x) < 1\}$ . Тогда сфера  $S^{n-1} := Fr^n D_1 = \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid \rho(0, x) = 1\}$ . Топология на  $S^0 = \{-1, 1\}$  - дискретная, хотя и индуцирована из обычной.

**Теорема 23** (критерий связности)

Пусть  $(X, \tau)$  - топологическое пространство. Тогда  $A \subset X$  несвязно тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение  $A$  на нульмерную сферу.

**Доказательство.** Пусть  $A$  несвязно. Представим его в виде  $A = A_1 \cup A_2$ .

Определим отображение  $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in A_1 \\ 1, & x \in A_2 \end{cases}$ . Построенное отобра-

жение непрерывно, так как прообразы открытых множеств открыты, это непрерывное отображение. Обратно, пусть существует непрерывное отображение. Рассмотрим прообразы 1 и -1. Они не пересекаются, в противном случае отображение неоднозначно. Но тогда и  $A$  разбивается в их объединение, значит оно несвязно.  $\square$

**Пример.** Отрезок  $[a, b]$  связан в обычной топологии. По критерию, рассмотрим непрерывное отображение  $[a, b] \rightarrow \{-1, 1\}$ . Здесь непрерывность совпадает с непрерывностью в смысле матанализа, поэтому по теореме Коши это не непрерывное отображение (в противном случае оно принимало бы все значения в отрезке  $[0, 1]$ ).

**Определение 26** *Компонента связности точки  $x$  в пространстве  $(X, \tau)$  - максимальное по включению связное множество, содержащее  $x$ .*

**Теорема 24** 1. *Компонента связности любой точки замкнута.*

2. *Компоненты связности любых двух точек либо не пересекаются, либо совпадают.*

3.  $\forall x : X = K_x \iff X$  *связно.*

**Доказательство.**  $1 \Rightarrow 2$ .  $x \in K_x \subset \overline{K_x}$  - связно. С другой стороны,  $\overline{K_x} \subset K_x$  по свойству замыкания.

$2 \Rightarrow 3$ .

3.  $X = K_x$  связно по определению  $K_x$ . Обратно,  $X$  - связно, тогда оно автоматически максимальная компонента связности для всех точек.  $\square$

**Следствие.** Так как компонента связности точки является таковой для каждой своей точки, то она называется **компонентой связности пространства**.

**Следствие.** Компоненты связности образуют дизъюнктное разбиение на замкнутые пространства.

### 4.3 Вполне несвязные пространства

**Определение 27** *Пространство называется вполне несвязным, если компонента связности любой точки состоит из этой же точки.*

**Пример.** Пространство с дискретной топологией вполне несвязно.

**Пример.** Топология, индуцированная на  $\mathbb{Q}$  из обычной топологии, вполне несвязна.

## 5 Компакты

**Определение 28** Система множеств  $\xi = \{A_\alpha \subset X \mid \alpha \in I\}$  - покрытие множества  $A$ , если  $A \subset \xi$

Подпокрытие - система множеств, лежащая в покрытии и также являющаяся покрытием. Покрытие открыто, если каждый элемент покрытия открыт. Покрытие замкнуто, если каждый элемент замкнут. Покрытие конечно, когда  $|I| < \infty$ .

**Определение 29** Покрытие  $\xi = \{A_\alpha \subset X \mid \alpha \in I\}$  называют фундаментальным, если для любого отображения  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \Omega)$  топологических пространств из непрерывности сужений  $f|_{A_\alpha}$  вытекает непрерывность отображения  $f$ .

**Теорема 25** (о достаточных условиях фундаментальности покрытия)  
Пусть  $X, \tau$  - топологическое пространство,  $\xi$  - его покрытие. Если выполняется по крайней мере одно из условий: 1.  $\xi$  - открытое покрытие  
2.  $\xi$  - конечное замкнутое покрытие  
то  $X$  фундаментально.

**Доказательство.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  - открытое отображение. Тогда выполняется равенство:  $\forall B \subset Y : f^{-1}(B) = \square$