

Дифференциальные уравнения

Гуревич Е. Я.

Содержание

1	Что такое дифференциальное уравнение?	3
1.1	Базовые определения	3
1.2	ДУ первого порядка, разрешенные относительно производной	3
1.3	Метод изоклин	5
1.4	Практика	7
1.5	Мини-рассказ про число e	8
2	Элементарные методы интегрирования ДУ	9
2.1	Уравнения с разделяющимися переменными	9
2.2	Уравнения, приводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными	10
2.3	Однородные уравнения	11
3	Однородное уравнение	12
3.1	Обобщенно-однородное уравнение	13
3.2	Уравнение в полных дифференциалах	14
3.2.1	Геометрический смысл решения уравнения в полных дифференциалах	14
3.3	Автономные уравнения	16
3.4	Нелинейный маятник	17
4	Ряды Тейлора и численные методы	19
4.1	Практика	19
4.2	Численные методы	19
5	Теоремы о существовании и единственности решения	21
5.1	Практика	28

6	Уравнение первого порядка	28
6.1	Базовые определения	28
6.2	Метод Лагранжа	30
6.3	Уравнения, приводящиеся к линейному	30
7	Теоремы о непрерывной зависимости задачи Коши	32
7.1	Как решать Рикатти через Пикара (с оценкой погрешности)	35
8	Уравнение, не разрешенное относительно производной	36
8.1	Уравнение первого порядка	36
8.2	Практика и методы решения	38
9	Уравнения высших порядков	41
9.1	Уравнения, допускающие понижение степени	41
9.2	Теория	43
9.3	Уравнение в нормальной форме	44
10	Линейные уравнения	46
10.1	Основные определения	46
10.2	Свойства линейных уравнений	46
10.3	Линейное однородное уравнение	47
10.4	Формула Остроградского-Лиувилля	50
10.5	Практика	50
11	Линейное неоднородное уравнение	51
12	Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	53
12.1	Практика	55

1 Что такое дифференциальное уравнение?

1.1 Базовые определения

Определение 1

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0 \quad (1)$$

- обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) порядка n .

Здесь t - независимая переменная, $x(t)$ - искомая функция.

Определение 2 Решение ОДУ - функция $x(t) \in C^n$ (дифференцируемая n раз), обращающая уравнение в тождество.

Примеры. $\frac{dx}{dt} = 0$ - решение есть константа.

$\frac{dx}{dt} = 5$. Решение $x = 5t + c$. (Так как решение зависит от параметра-константы, говорят об однопараметрическом семействе решений. Если задать $x(0)$, то решение будет единственным, зависящим от начального условия).

$\frac{d^2 x}{dt^2} = w$ - уравнение равноускоренного движения. Решение: $x = \frac{wt^2}{2} + c_1 t + c_2$, где c_1, c_2 - начальная скорость и начальная координата соответственно.

Пример. Для уравнения $\frac{dx}{dt} = f(t)$, если функция в правой части непрерывна на отрезке (a, b) , тогда общее решение имеет вид $x = \int f(t) dt$. Более

точно, $t_0 \in (a, b)$, тогда $x(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + x(0)$.

Определение 3 Общее решение ОДУ - множество всех решений.

Естественно возникает вопрос, существует ли решение ДУ и единственно ли оно при заданных начальных условиях? Выражается ли оно через элементарные функции? Какова его область определения и значения?

1.2 ДУ первого порядка, разрешенные относительно производной

Определение 4 ДУ, разрешенные относительно производных - уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (2)$$

то есть уравнения, производная которых задана функцией в явном виде.

Пример. $(\frac{dx}{dt})^2 - x^2 = 0$ - не разрешенное относительно производных, но оно раскладывается в два таких уравнения.

Минимальные требования к функции f - определенность в области
Геометрический смысл уравнения 2:

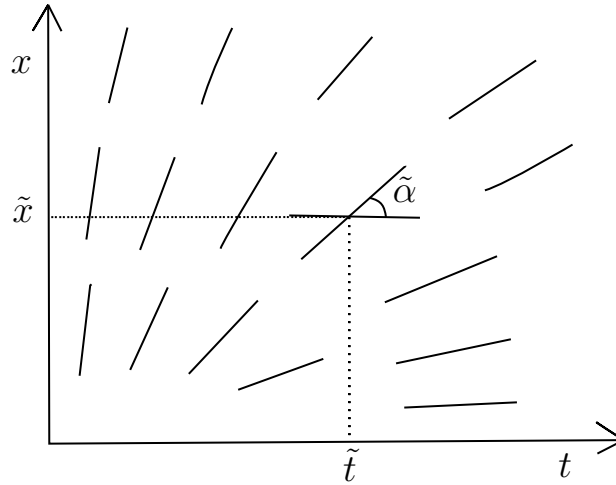


Рис. 1: Поле направлений на плоскости: $\operatorname{tg} \tilde{\alpha} = f(\tilde{t}, \tilde{x})$

Говорят, что уравнение 2 определяет поле направлений в *расширенном* фазовом пространстве (в отличие от *векторного поля* в фазовом пространстве): каждой точке сопоставляется направление, определяемое функцией $f(x, t) = \operatorname{tg} \alpha$ (поскольку длина вектора не определена, говорят именно о поле направлений). Кое-кто говорит, что ДУ и поле направлений это одно и то же, поскольку ДУ биективно соответствуют полям направлений).

Пример. Пусть $x(t)$ - количество зараженных вирусом в момент времени t . Допустим, что скорость заражения пропорциональна количеству уже зараженных людей. Запишем это в виде ДУ:

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad k > 0$$

Мы получили простейшую модель роста населения Мальтуса. Очевидно, решение $x(t) = x_0 e^{kt}$. Проблема с такой моделью состоит в том, что количество людей дискретно, а найденная нами функция непрерывна. Корректировка состоит в том, что $x(t)$ понимается в смысле *плотности населения*.

Пример. Рассмотрим более интересное уравнение (уравнение Бернулли, оно же логистическое уравнение): $\frac{dx}{dt} = k(x)x$. Допустим, что $k(x)$ - линейная убывающая функция. Тогда $\frac{dx}{dt} = (k_0 - \frac{k_0 x}{h})x$. (Здесь $k_0 = k(0)$, $h =$

$k^{-1}(0)$). Получаем нелинейное уравнение, в котором переменные не разделяются. Теперь можно рассмотреть подробнее поле направлений. Пусть Γ_0 - множество точек (t, x) , в которых $\frac{dx}{dt} = 0$, то есть векторы поля параллельны оси Ot . Решим уравнение $0 = x(k_0 - \frac{k_0}{h}x)$. Получаем следующее поле направлений:

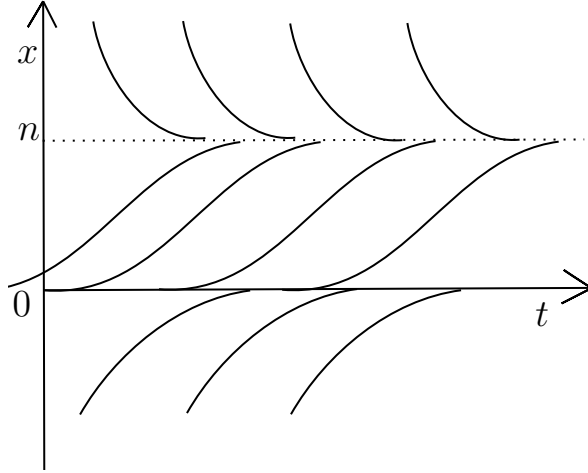


Рис. 2: Логистическое отображение

Кривые, заключенные в середине, называются логистическими кривыми. «Крутизна» логистической кривой зависит от параметра k_0 . Данное уравнение было рассмотрено Ферхюльстом как уточнение модели Мальтуса.

1.3 Метод изоклин

Метод изоклин заключается в рисовании и исследовании графиков решений уравнения 2.

Определение 5 *Изоклина наклона α - геометрическое место точек Γ_α , в которых касательная к решению уравнения 2 имеет наклон, равный α .*

То есть, $\Gamma_\alpha: \operatorname{tg} \alpha = f(t, x)$

Опишем алгоритм метода изоклин на примере. Пусть задано уравнение $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$.

1. Найдем $\Gamma_0: 0 = \frac{x}{t}$ (то есть $x = 0$ ($t \neq 0$)) Найдем $\Gamma_{90}: \frac{t}{x} = 0$, то есть $t = 0$ ($x \neq 0$) Получили, что эти гаммы есть координатные оси.

2. Определим области с постоянным знаком $\frac{dx}{dt}$ (среди тех, на которые плоскость разбивается изоклинами)
3. Исследуем симметрии уравнений, например относительно $x \rightarrow -x$, $t \rightarrow -t$ (или одновременного применения). Эти симметрии эквивалентны отражению относительно осей.
4. Нахождение точек перегиба и областей выпуклости, вогнутости интегральных кривых.
5. Приближенное построение интегральных кривых (то есть решений уравнения).

Замечание. Не все интегральные кривые являются решениями. Так, в рассмотренном примере ось Ox - интегральная кривая, но она очевидно не является решением (так как не является функцией).

Метод изоклин является качественным, и он не дает более подробной информации о геометрии кривых. В данном конкретном примере интегральные кривые - в точности прямые, проходящие через точку $(0, 0)$, поскольку мы заметили, что в каждой точке направление касательной к интегральной кривой совпадает с прямой, соединяющей эту точку и начало координат.

Пример. Немного изменим уравнение: $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$. Главные изоклины точно такие же, как у предыдущего, а вот знаки в координатных четвертях меняются. Поле направлений выглядит совершенно по-другому, в нем гиперболы.

Пример. Получим уравнение окружности с помощью ОДУ, исходя из следующего свойства: касательная перпендикулярна радиусу. То есть мы имеем некоторое поле направлений, исходя из которого можно восстановить ДУ: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0}$. Поскольку $\alpha = \beta + 90$, имеем $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\beta + 90) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$. В итоге уравнение имеет вид $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = -\frac{x_0}{y_0}$ или, если сотрем нолики (поскольку свойство универсально)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Заметим, что это же уравнение можно получить дифференцированием обычного уравнения окружности. Решая его, в качестве параметра вылезет что-то, отвечающее за радиус.

1.4 Практика

Пример (№17). Составим уравнение по решению: $y = e^{cx}$, $y' = ce^{cx}$. Имеем $c = \frac{\ln y}{x}$, значит, $y' = \frac{\ln y}{x} e^{\ln y}$.

Пример (№25). Дано семейство функций $y = ax^2 + be^x$, $y' = 2ax + be^x$, $y'' = 2a + be^x$. Найдем ДУ, решениями которого они являются. Так как у нас два параметра: a и b , то и уравнение будет второго порядка. Имеем

$$\begin{aligned}y - y'' &= 2a(x - 1) \implies a = \frac{y' - y''}{x - 1} \\y'' &= \frac{2(y' - y'')}{2(x - 1)} + be^x \implies \frac{1}{e^x}(y'' - \frac{y' - y''}{x - 1}) = b \\y &= \frac{y' - y''}{2(x - 1)}x^2 + (y'' - \frac{y' - y''}{x - 1})\end{aligned}$$

Возникает вопрос: а единственно это решение? Здесь мы пользуемся теоремой о неявной функции.

Пример (№30). Составим уравнение для окружностей, центры которых лежат на $y = 2x$. Уравнение окружностей $(x - x_0)^2 + (y - 2x_0)^2 = 1$. Ответом должно быть однопараметрическое семейство решений, которые соответствуют различным положениям центра на прямой. Дифференцируем:

$$2(x - x_0) + 2(y - 2x_0)y' = 0 \implies x_0 = \frac{x + yy'}{1 + 2y'}$$

Подставим выражение для параметра обратно в уравнение:

$$(x - \frac{x + yy'}{1 + 2y'})^2 + (y - 2\frac{x + yy'}{1 + 2y'})^2 = 1$$

Пример (№71). Найдем кривые, касательные которых закрывают одинаковые площади под своим графиком. Пусть $f(x) = y$ - искомая кривая. Её производная не может быть нулевой, иначе она не образует треугольник с осью абсцисс.

Фиксируем точку x_0 . Получаем условие: $\frac{y^2(x_0)}{2y'(x_0)} = a^2 \implies y' = \frac{y^2}{2a^2}$. Если производная отрицательная, то в этой формуле должен вылезти минус (и формально мы имеем два случая, поэтому

$$y' = \pm \frac{y^2}{2a^2}$$

Проинтегрируем (переменные разделяются): $\frac{1}{y} = \pm \frac{1}{2a^2}x + C$ Итак,

$$y = \frac{2a^2}{2a^2C \pm x}$$

Пример (№73). Ещё одна геометрическая задачка. Беглый анализ: производная не равна нулю. Уравнение касательной: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Точка пересечения с осью абсцисс: $x_k = \frac{-y_0}{y'(x_0)} + x_0$. Уравнение нормали: $y = -\frac{1}{y'}(x - x_0) + y_0$. Точка пересечения нормали с осью абсцисс: $x_n = y_0 y' + x_0$. Диффур снова распадается на два случая... $|KN| = |x_k - x_n| = |\frac{y}{y'}|$. Рашаем дома кароч.

1.5 Мини-рассказ про число e

Уже Архимед знал, что при умножении показатели степеней складываются. Это легко получить из анализа обычной геометрической прогрессии. В XV веке начали торговать, используя сложные проценты. Возник вопрос, можно ли полутать бесконечное количество денег при уменьшении периода факторизации. Стевин Саймон решил написать таблицу сложных процентов, чтобы полутать денег с её использования, и оказалось, что ответ на предыдущий вопрос отрицательный. Иоста Бюрге (помощник Кеплера) посмотрел на таблицы и полутал с них инфу о том, что с их помощью можно перемножать огромные числа. Джон Непер составил более юзательные таблицы, ввел понятие логарифма, и кароч дальше вводим предел для натуральных чисел, переходим к непрерывной штуке... Теперь фокус: $e^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{nk} = (1 + \frac{k}{m})^m = \sum_{i=0}^m C_m^i (\frac{k}{m})^i = \sum_{i=0}^m \frac{k^i}{i!}$. Эту штуку придумал Бернулли, и она сходится к e быстрее обычного предела. Можно это положить за определение e^x , и мгновенно распространить на любые действительные показатели степеней.

2 Элементарные методы интегрирования ДУ

2.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 6 Уравнение с разделяющимися переменными - уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t) \quad (3)$$

где f, g непрерывны на $x \in (a, b)$, $t \in (\alpha, \beta)$

Как решать такие уравнения? Алгебраическая интуиция подсказывает, что надо перенести дифференциалы к своим функциям и проинтегрировать. Но это ещё надо обосновать. Сделаем следующее:

1. Найти все $x_* : f(x_*) = 0$. Тогда $x = x_*$ - решение-константа.
2. Пусть x_*^i, x_*^j - такие, что $f(x_*^i) = f(x_*^j) = 0$ и $\forall x \in (x_*^i, x_*^j) : f(x) \neq 0$. Тогда уравнение 6 эквивалентно уравнению

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$$

Эту штуку можно проинтегрировать с обеих сторон. Результат непрерывен и не обращается в ноль. Значит, по теореме о неявной функции найдется решение. $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{x}$ (решение в области $(\alpha, \beta) \times (x_*^i, x_*^j)$).

3. Выписать решение на каждом интервале (x_*^i, x_*^j)

Других решений не существует. Почему? Допустим, существует другое решение. Оно не может быть константой, так как все константы были получены в п.1. Если она

Пример. Решим уравнение $\frac{dx}{dt} = 0$. Решение-константа: $x = 0$. Теперь рассмотрим два интервала: $x < 0$ и $x > 0$. Если $x < 0$, имеем уравнение

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = dt$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt$$

Получаем, что $\ln|x| = t + C$. Выражаем искомую функцию (не забыв, на каком промежутке мы рассматриваем функцию, и раскрыв модуль соответственно):

$$x = -Ce^t, \quad C > 0$$

Для интервала $x > 0$ точно такой же порядок действий, только получим другой знак. Итак, множество решений:

$$x = Ce^t, \quad C \in \mathbb{R}$$

2.2 Уравнения, приводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными

Определение 7 Уравнение, приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными - уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = f(at + bx + c) \quad (4)$$

Давайте решим его.

1. Введем замену $z(t) = at + bx + c$. Имеем

$$\frac{dz}{dt} = a + b \frac{dx}{dt}$$

Получаем уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dt$$

Пример. Решим уравнение $\frac{dx}{dt} = \cos(x + t)$. Замена $z = x + t$, $\frac{dz}{dt} = 1$. Уравнение имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + 1$$

Найдем $\cos z_* + 1 = 0$: это, очевидно, $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ Свели задачу к простому пункту

2.3 Однородные уравнения

Сначала докажем, что два определения однородного уравнения эквивалентны.

Определение 8 *Однородным называется уравнение вида*

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right) \quad (5)$$

Это уравнение инвариантно относительно замены $x \mapsto kx$, $t \mapsto kt$. Геометрически это означает, что совокупность интегральных кривых инвариантно относительно преобразования $\theta(x, y) = (kx, ky)$. Из этого следует, что если мы найдем одно решение, то мы найдем всю совокупность ему подобных.

Определение 9 *(вспомогательное)*

Уравнение в форме дифференциалов: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Это тоже форма, что и $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, поскольку $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$. Обратно, $-f(x, y)dx + dy = 0$. Уравнение в форме дифференциалов имеет чуть большее множество решений.

Определение 10 *Уравнение в форме дифференциалов называется однородным, если*

$$M(kx, ky) = k^n M(x, y)$$

$$N(kx, ky) = k^n N(x, y)$$

n называется степенью однородности.

Теорема 1 *Определения 8 и 10 эквивалентны.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$2 \Rightarrow 1$. Пусть дано уравнение в форме дифференциалов. Подставим k . При $x \neq 0$ имеем

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{k^n M(x, y)}{k^n N(x, y)} = -\frac{M(kx, ky)}{N(kx, ky)} = -\frac{M(1, \frac{y}{x})}{N(1, \frac{y}{x})} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

□

Пример. $M = x^2 + y^2$

Пример (№31). Найти уравнение, решение которых - параболы с осью, параллельной оси ординат и касающиеся прямых $y = 0$, $y = x$. Во-первых,

поймем, как выглядит уравнение такой параболы. Исходя из геометрии, получим, что уравнение параболы, удовлетворяющее первому условию, имеет вид $y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$, а первому и второму - $y = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16a}$. Остался один параметр \Rightarrow уравнение первого порядка. Подставляем и хаваем ответ бесплатно:

$$y = \left(\frac{y' - \frac{1}{2}}{2x} \right) x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{2x}{16y' - 8}$$

Пример (№72). Найти линии, у которых треугольники, образованные касательными, осью ОХ и точкой касания, имеют одинаковую сумму катетов. Из геометрических соображений имеем уравнение

$$\frac{|y|}{|y'|} + |y| = b = const$$

Раскрываем модули. В простейшем случае имеет уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{b - y}$$

Остальные уравнения такие же в принципе. Так шо это идет в дз Его легчайшее (и, видимо, общее) решение: $x + C = \pm b \ln |y| \pm y$

Пример (№76). Геометрическая интуиция не должна подводить нас. Вставить картинку. Есть кароч такая формула: $\operatorname{tg} \gamma = \frac{r}{r'}$

3 Однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Как искать его решение? Заменой $u(t) = \frac{x}{t}$. Тогда уравнение переписется в виде $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$. В нем переменные разделяются: $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dt}{t}$. Итак, типы уравнений:

1. С разделяющимися переменными
2. Приводящиеся к виду $\frac{dx}{dt} = f(ax + bx + c)$
3. Приводящиеся к виду $(a_1x + b_1t + c_1)dx + (a_2x + b_2t + c_2)dt = 0$

Подумаем, можно ли это последнее привести к однородному. Добавим условие $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ (иначе система уже однородна). В общем, если эти две прямые пересекаются в точке (x_*, t_*) , то можно ввести новые переменные, передвинув эту точку в начало координат: $x \mapsto x - x_*$, $t \mapsto t - t_*$. Тогда система переписется без c_1 , c_2 , и таким образом будет однородной. Если прямые не пересекаются, то прямые либо совпадают, либо параллельны. Тогда введем замену (для любой прямой) $z(t) = a_1x + b_1t + c_1$. Так как прямые параллельны, то $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, значит, мы можем выразить вторую прямую: $a_2x + b_2t + c_2 = \frac{1}{k}(a_1x + b_1t + kc_2) = \frac{1}{k}(z - c_1 + kc_2)$. Уравнение приводится к виду $z(t)dx + \frac{1}{k}(z - c_1 + kc_2)dt = 0$. Но у нас все равно многовато переменных. Выразим dx через z :

$$z\left(\frac{dz - b_1dt}{a_1}\right) + \frac{1}{k}(z - c_1 + kc_2) = 0$$

Умножим на a_1k :

$$kzdz = kb_1zdt - a_1zdt - a_1(kc_2 - c_1)dt$$

Домножим на $\frac{1}{kzdt}$:

$$\frac{dz}{dt} = \left((b_1 - \frac{a_1}{k})z - a_1(kc_2 - c_1)\right)\frac{1}{z}$$

Finally, уравнение с разделяющимися переменными! ПОБЕДА!

3.1 Обобщенно-однородное уравнение

Определение 11 *Обобщенно-однородное уравнение - уравнение вида*

$$M(x, t)dx + N(x, t)dt = 0$$

причем M, N - такие, что $\exists n \in \mathbb{R}$: если $x = z^n(t)$, то уравнение $M(z^n, t)nz^{n-1}dz + N(z^n, t)dt = 0$ однородно.

Пример. Испортим однородное уравнения, чтобы сделать его обобщенно-однородным. Роман придумал, чел хорош.

Сведем и этого зверя к разделяющимся переменным.

$$\begin{cases} n(kz)^{n-1}M((kz)^n, kt) = k^m M(z^n, t)nz^{n-1} \\ N((kz)^n, kt) = k^m N(z^n, t) \end{cases}$$

3.2 Уравнение в полных дифференциалах

Напомним, что полный дифференциал $dF(x, y)$ C^1 -гладкой функции равен $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$.

Определение 12 Уравнение в полных дифференциалах - уравнение вида

$$dF(x, y) = 0, \quad F \in C^2(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Если мы знаем саму функцию, то решение находится мгновенно: $dF(x, y) = \text{const}$. Правда, оно неявное. Выразим $y = y(x)$ по теореме о неявной функции.

Пример. $x^2 \sin t dt + 2x \cos t dx = 0$

Уравнение является уравнение в полных дифференциалах, если существуют такие функции, что $M = \frac{\partial F}{\partial x}$, $N = \frac{\partial F}{\partial y}$

Теорема 2 (необходимое условие представления в полных дифференциалах)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Достаточное условие - $M_y = N_x$ в односвязной области

Доказательство. \square

Как подбирать такие функции? Мы знаем, что $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$. Проинтегрируем это равенство по x . Имеем $F = \int M(x, y)dx + \varphi(y)$. Прделаем то же самое по переменной y : $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x, y)dx) + \varphi' = N(x, y)$, откуда $\varphi = \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y}(\int M dx) \right) dy$. Чтобы проверить себя при решении, помним, что φ не зависит от x ! Итак,

$$F = \int M(x, y)dx + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M dx \right) \right) dy$$

3.2.1 Геометрический смысл решения уравнения в полных дифференциалах

Так как $z = z(x, y)$ - какая-то поверхность, то запись $z = \text{const}$ - это линии уровня, которые можно спроецировать на плоскость переменных и получить интегральные кривые.

Пример (модель Лотки-Вольтерра). Пусть $x(t)$ - плотность карасей, $y(t)$ - плотность щук в некотором пруду. Щуки сдерживают рост карасей, но от количества карасей зависит также и количество щук. Запишем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + ex) \end{cases}$$

Лотка придумал эту систему для биоценозов, а Вольтерра - для химических реакций.

Давайте решим эту систему. Её расширенное фазовое пространство, вообще говоря, трехмерное, поэтому будем рассматривать фазовые кривые - проекции интегральных на плоскость независимых параметров. Они ориентированы в направлении роста параметра t . Найдем эти кривые, найдя решение уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-cy+exy}{ax-bxy}$. Переменные разделяются:

$$\frac{(a - by)dy}{y} = \frac{(-c + ex)dx}{x}$$

Представим его в полных дифференциалах:

$$d(a \ln y - by + c \ln x - ex) = 0$$

Значит, решение имеет вид $a \ln y - by + c \ln x - ex = h = const$. Выглядит очень сложно, но давайте попробуем построить изолинии. Введем функцию $F = \ln(y^a x^c) - by - ex$, и поищем её изолинии. Сначала найдем критические точки: $(x_*, y_*) = (\frac{c}{e}, \frac{a}{b})$ (получилась единственная точка). Определим тип критической точки (составим гессиан, посчитаем его знакоопределенность); получим, что это точка максимума. Линии уровня - какие-то окружности/эллипсы.

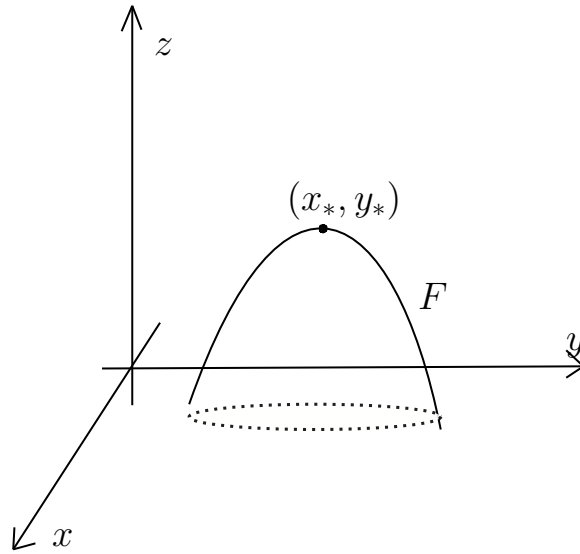


Рис. 3: Первый интеграл системы Лотки-Вольтерры

Упражнение. Доказать, что фазовые кривые замкнуты.

Доказательство ([1], §2.7). Так как $\frac{dF}{dt} = 0$, то функция F сохраняется вдоль фазовых кривых. Иначе говоря, фазовые кривые являются изолиниями функции F . Но график F является суммой двух «холмов», образованных логарифмами, и поэтому сам является холмом. Поскольку изолинии холма - замкнутые кривые, то и фазовые кривые системы Лотки-Вольтерры замкнуты. \square

Теперь нам надо понять, куда закручиваются эти линии, как они ориентированы. Они закручиваются против часовой стрелки вокруг критической точки, кстати, область решения - первая координатная четверть. Чтобы избежать проблем с дискретностью, наши переменные - это плотность населения пруда.

3.3 Автономные уравнения

Определение 13 Автономное ДУ - дифференциальное уравнение, правая часть которого не зависит от времени.

Автономные уравнения не могут быть динамическими системами, так как они не зависят от времени, но можно искусственно этого достичь.

3.4 Нелинейный маятник

Также: нелинейный консервативный (то есть сохраняющий энергию) осциллятор, физический маятник.

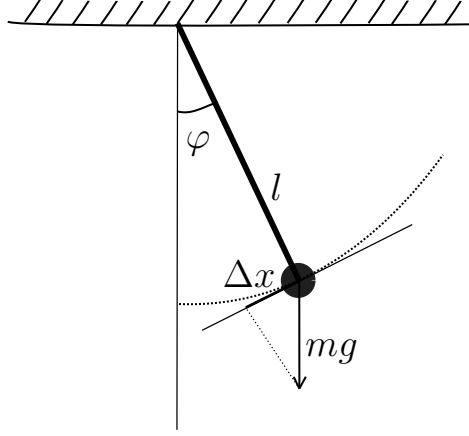


Рис. 4: Физический маятник

Рассмотрим маятник с массой m и длиной l , и пусть φ - угол отклонения от положения равновесия. При повороте на малый угол движение можно представить как прямолинейное движение по касательной. Запишем второй закон Ньютона в проекции на касательную:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

Пусть Δx - длина дуги окружности, примерно равная малой части касательной. Тогда $\Delta x = l\Delta\varphi + o(\Delta\varphi)$. Пренебрегая бесконечно малыми членами, запишем уравнение колебаний.

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

Другой способ вывода уравнения ([2], §11). Кинетическая энергия маятника равна $-\frac{m(l\dot{\varphi})^2}{2}$, потенциальная энергия равна $mg l \cos \varphi$. Функция Лагранжа (кинетическая энергия минус потенциальная энергия, выраженные в переменных координата-скорость) для маятника тогда имеет вид $L = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} + mg l \cos \varphi$. Для консервативной системы справедливо уравнение движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

Подставляя сюда функцию Лагранжа для маятника, получаем точно такое же уравнение физического маятника.

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$$

В отличие от уравнения малых колебаний, оно нелинейное из-за синуса. Также, оно имеет второй порядок, значит, появятся две константы интегрирования, и нам надо зафиксировать начальные условия: $\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$. Теперь сведем уравнение к системе из двух уравнений первого порядка заменой $\dot{\varphi} = \psi$:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = -\omega^2 \sin \varphi \end{cases}$$

Как устроено фазовое пространство данной системы? Ясно, что оно двумерное (поскольку имеется две зависимые переменные - φ и ψ). Близкие положения системы должны быть близки и в фазовом пространстве, поэтому на оси φ мы склеим точки π , $-\pi$, чтобы маятник мог делать «солнышко» и его фазовая траектория не была разрывной. Более формально, введем факторпространство по отношению эквивалентности $(\varphi, \psi) \sim (\varphi + 2\pi k, \psi)$. Получаем, что фазовое пространство - цилиндр. Любая фазовая траектория - определенная замкнутая кривая. На цилиндре есть два типа замкнутых кривых - стягиваемые в точку и нестягиваемые. Вторые отвечают за движение через верхнюю точку равновесия.

Теперь решим систему. Поделив одно уравнение на другое, получаем

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{\omega^2 \sin \varphi}{\psi}$$

Полная энергия равна константе: $E = \frac{m\psi^2}{2} + \frac{mg}{l}(1 - \cos \varphi)$. Выражая отсюда угол, имеем.

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(h - \frac{mg}{l}(1 - \cos \varphi) \right)}$$

Функция $F(\varphi) = \frac{mg}{l}(1 - \cos \varphi)$ сохраняется вдоль фазовых траекторий, так как $\frac{dF}{dt} = 0$. Её изолинии (то есть уровни постоянной энергии) - одномерные торы. Из анализа фазовых траекторий можно выяснить, что период колебаний растет по мере увеличения энергии. Также есть два состояния равновесия: верхнее (неустойчивое) и нижнее (устойчивое).

4 Ряды Тейлора и численные методы

4.1 Практика

Пример (№111). $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$. Уравнение однородно (проверим умножением на k). Значит, делаем замену $u(x) = \frac{y}{x}$. Имеем $dy = u \cdot dx + du \cdot x$. Переменные разделяются: $\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{u}}$

Пример (№113). $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy$. Переносим начало координат в точку пересечения.

Пример (№126). $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$. Это - обобщенно-однородное уравнение, то есть приводится к однородному заменой $y = z^m(x)$. $y' = mz^{m-1}z'$ Далее $mz^{m-1}z' = z^{2m} - \frac{2}{x^2}$ Теперь уравнение однородно. Введем замену $\frac{z}{x} = u$, $z = ux$. Получим $u'x + u = -1 + 2u^2$

Пример (№128). $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$. Пусть $y = z^m$. Идея: сделать так, чтобы под корнем степень x и y была одинаковой.

Пример (№) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$. Подберем функцию, полным дифференциалом которого является это выражение; получим $F(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$. Решение: $F = C = const$

Пример (№192). $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy$. Мы должны показать, что вторые производные равны. Тогда это значит, что $F_{xy} = F_{yx}$, и такая функция вообще существует на некотором диске (где правая часть не обращается в ноль). Интегрируем два раза, и найдем эту функцию: $F(x, y) = x - y^2 \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{y^2}{2} + C_0$. Итак, ответ: $\boxed{F = const}$

Пример (№202). $y^2 dx + (xy + \operatorname{tg} xy)dy = 0$. Является ли однородным, в полных дифференциалах? Давайте раскроем скобки и сгруппируем: $y(ydx + xdy) + \operatorname{tg} xy dy$. Это то же, что и $\frac{d(xy)}{\operatorname{tg} xy} + \frac{dy}{y} = 0$. Домножим на $\frac{1}{y \operatorname{tg} xy}$ и хаваем уравнение в полных дифференциалах бесплатно. То, на что домножили - интегрирующий множитель.

4.2 Численные методы

Рассмотрим задачу Коши для уравнения, разрешенного относительно производной:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Будем искать его приближенное решение, перейдя к дискретному времени: именно, возьмем малое приращение времени h и рассмотрим последовательность $t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, \dots, t_0 + kh, \dots$. Тогда уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = f(x_k, t_k), \quad (\text{где } x_i = x(t_i))$$

откуда имеем итеративную формулу

$$x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k)h$$

Мы получили знаменитый **метод Эйлера** численного интегрирования уравнения. Его геометрический смысл прост: начиная из точки (t_0, x_0) , мы в течение времени h двигаемся вдоль касательной к интегральной кривой. Попадая в новую точку (t_1, x_1) , мы снова движемся вдоль касательной к кривой, проходящей через новую точку, и так далее. Поэтому метод Эйлера ещё называют методом ломаных.

Другая точка зрения на метод Эйлера может привести к его обобщению. На самом деле, формула, использованная при выводе метода Эйлера, является лишь частным случаем разложения решения в ряд Тейлора:

$$x_{k+1} = x(t_{k+1}) = x(t_k + h) = x(t_k) + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_k} h + \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_k} \frac{h^2}{2} + \dots$$

Таким образом, можно рассмотреть более точные методы, основанные на использовании членов ряда Тейлора высшего порядка. Например, метод Штермера - 3го порядка:

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{f(t_k + h, x_k + f(t_k, x_k)h) - f(t_k, x_k)}{h}$$

Наиболее распространенный численный метод - метод Рунге-Кутты - использует разложение 4го порядка.

Пример. Супер-простая функция:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Это - определение обычной экспоненты. Решим методом Эйлера. Возьмем $t_1 = h$. Далее, $x_1 = 1 + f(t_0, x_0) \cdot h = 1 + h$. Далее, $t_2 = t_1 + h = 2h$,

$x_2 = x_1 + f(t_1, x_1) \cdot h = 1 + h + (1 + h)h = (1 + h)^2$. В общем виде, в точке $x_{k+1} = x_k(1 + h) = (1 + h)^{k+1}$ функция будет принимать значение $x_n = (1 + h)^n = \left(1 + \frac{T}{n}\right)^n \rightarrow e^T$. Неслучайно тут вылез замечательный предел - определение экспоненты.

5 Теоремы о существовании и единственности решения

Определение 14 *Задача Коши для уравнения*

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- задача отыскания его решения, проходящего через точку (t_0, x_0)

Допустим, решение задачи Коши существует, а правая часть является непрерывной функцией $f(t, x)$. Тогда мы можем проинтегрировать уравнение слева и справа:

$$\int \frac{dx(t)}{dt} \equiv \int f(t, x) dt$$

Слева стоит решение, а справа определенный интеграл:

$$x \equiv x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (6)$$

Определение 15 *Назовем уравнение 6 является интегральной формой задачи Коши.*

Следующая теорема оправдывает это название:

Теорема 3 (лемма)

Задача Коши эквивалента решению интегрального уравнения 6

Доказательство. Пусть $x(t)$ - решение задачи Коши. Тогда при подстановке в уравнение имеем

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv f(t, x(t))$$

Интегрируя, получим $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))d\tau$ - решение интегрального уравнения.

Обратно, пусть $x(t)$ - непрерывное решение интегрального уравнения. Тогда, взяв производную, получим

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

Подставив $t = t_0$ в интегральное уравнение, получим $x(t_0) = x_0$, т.е. $x(t)$ - решение д.у. \square

Введением интегрального уравнения мы не решили задачу Коши, лишь переписали её в другом виде, но мы сделали первый шаг к тому, чтобы доказать существование решения задачи Коши.

Определение 16 *Функциональная последовательность Пикара $\{x_k(t)\}$ определяется следующим образом:*

$$x_0(t) = x_0, \quad x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_k(\tau))d\tau$$

Определение 17 *Функция называется липшицевой с константой Липшица L , если*

$$\forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Введем обозначения:

$D \subset \mathbb{R}^2$ - область на плоскости (открытое множество);

$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid \rho(x, y) \leq r\}$ - замкнутый шар, причем $B_r(x) \subset D$;

$$m = \max_{(t,x) \in B_r} |f(t, x)|;$$

$$\delta = \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Теперь сформулируем основную теорему:

Теорема 4 *(Коши-Пикара, или о существовании и единственности задачи Коши)*

Пусть $f(t, x)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны в области D . Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in D$ существует решение $x(t)$ задачи Коши, определенное на отрезке $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Кроме того, если $\tilde{x}(t)$ - другое решение задачи Коши, определенное на интервале $[t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]$, то существует такое $\delta^ \in (0, \min(\delta, \tilde{\delta}))$, что $x(t) = \tilde{x}(t)$ для $t \in [t_0 - \delta^*, t_0 + \delta^*]$.*

План доказательства.

1. Последовательность Пикара корректно определена на D , и её члены - непрерывные функции;
2. Существует непрерывный предел последовательности Пикара $x^*(t)$;
3. $x^*(t)$ является решением задачи Коши;
4. В силу единственности предела последовательности, решение единственно.

Доказательство.

1. Оценим разность между нулевым и первым членом последовательности:

$$|x_1(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x_0) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t m d\tau \right| \leq m|t - t_0| \leq m \cdot \frac{r}{\sqrt{1 + m^2}} \leq r$$

- значит, график функции лежит в B_r , пока $t \in I_\delta$. Функция $x_1(t)$ непрерывна, поскольку, согласно интегральному уравнению, она является первообразной для $f(t, x_0)$.

Предположим, что для k верно, что $x_k(t)$ определена в шаре, непрерывна и $|x_k(t) - x_0| \leq r$. Тогда при $t \in I_\delta$ функция $f(t, x_k(t))$ определена, непрерывна и ограничена константой m . Значит, имеется оценка

$$x_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_k(t)) d\tau \leq r$$

Интеграл непрерывен и ограничен, поэтому на I_δ имеет место $|x_{k+1}(t) - x_0| \leq r$. Мы доказали по индукции, что все члены последовательности Пикара определены в шаре, непрерывны и ограничены.

2. Докажем, что последовательность сходится. Рассмотрим ряд

$$x_1(t) - x_0(t) + x_2(t) - x_1(t) + \dots + x_k(t) - x_{k-1}(t) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n(t) - x_{n-1}(t))$$

Частичные суммы S_n этого ряда равны x_n . Если мы докажем, что этот ряд сходится равномерно, то по матанской теореме последовательность Пикара имеет непрерывный предел. Снова применим индукцию для оценки членов ряда на I_δ . Здесь нам потребуются следующая

Лемма. Непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$

удовлетворяет условию Липшица с константой L , причем $L = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Доказательство ([1], §31.4). Пусть $x, y \in [a, b]$. Введем параметр $z(t) = x + t(y - x)$, $t \in [0, 1]$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(z(\tau)))d\tau = \int_0^1 f'(z(\tau))\dot{z}(\tau)d\tau$$

Так как $\dot{z} = y - x$, то получаем

$$\left| \int_0^1 f'(z(\tau))\dot{z}(\tau)d\tau \right| \leq \int_0^1 L|y - x|d\tau = L|y - x| \quad \square$$

В силу того, что $f(t, x)$ дифференцируема, и её производная непрерывна, имеем по только что доказанной лемме

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq L|\tilde{x} - x|,$$

где $L = \max \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|$, $(t, x), (t, \tilde{x}) \in B_r$. Значит, $|x_1 - x_0| \leq m|t - t_0|$ - база индукции доказана (более подробная выкладка - в предыдущем пункте).

Пусть для k выполнено $|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{m}{L} \cdot \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} \leq \frac{m}{L} \frac{L^k \delta^k}{k!}$. Имеем

$$\begin{aligned} |x_{k+1}(t) - x_k(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x_k(\tau))d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, x_{k-1}(\tau))d\tau \right| = \\ &= \left| \int_{t_0}^t (f(\tau, x_k(\tau)) - f(\tau, x_{k-1}(\tau)))d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, x_k(\tau)) - f(\tau, x_{k-1}(\tau))|d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L|x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau)|d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t L \cdot \frac{m}{L} \cdot \frac{L^k |\tau - t_0|^k}{k!} d\tau \right| = \frac{m}{L} \frac{L^{k+1} |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Итак, мы доказали шаг индукции, и заодно оценили ряд сходящимся рядом, не зависящим от t :

$$\frac{m}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^n \delta^n}{n!} \rightarrow \frac{m}{L} (e^{L\delta} - 1)$$

Значит, по признаку Вейерштрасса сумма ряда сходится равномерно, и её предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x^*(t)$ непрерывен.

3. По предыдущему пункту, $|x^*(t) - x_k(t)| \rightarrow 0$. Оценим эту разницу:

$$0 \leq \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x^*(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, x_k(\tau)) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t L |x^*(\tau) - x_k(\tau)| d\tau$$

Правая часть стремится к нулю, значит, и левая тоже. Поэтому, переходя к пределу по t при $k \rightarrow \infty$ в интегральной формуле, имеем

$$x^* = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x^*(\tau)) d\tau$$

Итак, $x^*(\tau)$ решение интегрального уравнения, а значит и задачи Коши.

4. Докажем единственность. Пусть на отрезке $\tilde{I}_\delta = [t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]$ определены два решения с общим начальным условием $x(t_0) = \tilde{x}(t_0)$. Покажем, что найдется такой $0 < \delta^* \leq \tilde{\delta}$, что эти решения совпадают на отрезке $I_\delta^* = [t_0 - \delta^*, t_0 + \delta^*]$. В силу липшицевости имеем

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| = \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, \tilde{x}(\tau)) - f(\tau, x(\tau))| d\tau \right| \leq L \int_{t_0}^t |\tilde{x}(\tau) - x(\tau)| d\tau$$

Пусть $t > t_0$ (для $t < t_0$ ситуация аналогична). Введем обозначение $\Delta(t) = \int_{t_0}^t |\tilde{x}(\tau) - x(\tau)| d\tau$. Функция $\Delta(t)$ неотрицательная, монотонно неубывающая и дифференцируемая. Значит, можно рассмотреть

$$T = \inf_{D > 0} \{t \mid t > t_0\}$$

Если $T > t_0$, то $\delta^* = T - t_0$ - искомый отрезок, на котором решения совпадают. Если же $T = t_0$, то интегральное неравенство можно переписать в виде $\frac{d\Delta}{dt} \leq L\Delta$. Самая грубая оценка достигается при равенстве, поэтому и рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{d\Delta}{dt} = L\Delta \\ \Delta(\varepsilon) = \Delta(t_0 + \varepsilon) \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$. Решая уравнение на отрезке $[t_0 + \varepsilon, t]$, имеем оценку

$$\Delta(t) \leq \Delta(t_0 + \varepsilon)e^{L(t-t_0-\varepsilon)}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем $\Delta(t) \leq 0$, откуда по неотрицательности $\Delta = 0$ на отрезке $[t_0, t_0 + \delta]$.

□

Пример. Что можно сказать о решении задачи Коши для

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = |x| \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Теорема Коши-Пикара не работает в нуле, так как там функция не дифференцируема. Но не обманывают ли нас? $||x_1| - |x_2|| \leq 1 \cdot |x_1 - x_2|$. Модуль - липшицева функция, поэтому условия теоремы работают. А если

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{x} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Производная растёт неограниченно, функция не липшицева: $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq L|x_1 - x_2|$ - при приближении к нулю $L \geq \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$. Но это только в нуле. А не в нуле можно \Rightarrow решение существует и единственно. В общем, давайте разрешаем. Получаем $x = \frac{(t+C)^2}{4}$, $t + C > 0$. По условию $x(0) = 0$, откуда $x = \frac{t^2}{4}$. Но ведь ещё есть куча решений типа $x(t_0) = 0$, $x = \frac{(t-t_0)^2}{4}$, и даже $x = 0$.

Определение 18 Функция $\tilde{x}(t)$, определенная на интервале (a, b) , называется продолжением решения вправо, если она совпадает с $x(t)$ на некотором подинтервале.

Теорема 5 (о продолжении решения)

Пусть дано уравнение $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, функции $f(t, x)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на компакте $D \subset \mathbb{R}^2$ (причем в D лежит как минимум 1 шар), $x(t, t_0, x_0)$ - решение задачи Коши для $(t_0, x_0) \in \text{Int}D$. Тогда существует решение, определенное на отрезке $[a, b]$, причем $(a, \tilde{x}(a, t_0, x_0)), (b, \tilde{x}(b, t_0, x_0)) \in \partial D$. Иначе говоря, решение продолжается на границу компакта.

Доказательство. В силу теоремы о существовании и единственности решения, функция $x(t, t_0, x_0)$ определена на отрезке $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$, где $\delta_0 = \frac{r_0}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\rho((t_0, x_0), \partial D)}{\sqrt{1+m^2}}$.

Положим $t_1 = t_0 + \delta_0$, $x_1 = x(t_1, t_0, x_0)$, $p_1 = (t_1, x_1)$. Определим

$$\tilde{x}(t, t_0, x_0) = \begin{cases} x(t, t_0, x_0), & t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]; \\ x(t, t_1, x_1), & t \in [t_1 - \delta_0, t_1 + \delta_0]; \end{cases}$$

Если (x_1, t_1) лежит на границе, то все хорошо. Если нет, то будем увеличивать шар, пока не достигнем границы множества (в силу компактности это всегда можно сделать).

Возможен вариант, когда последовательность δ_i стремится к нулю и сама не затрагивает границу компакта. Рассмотрим функцию, определенную на $t \in [t_0 - \delta_0, t + \delta_k]$. Последовательность t_k невозрастающая и ограниченная, поэтому существует и предел b . Функция \tilde{x} определена на объединении интервалов $\bigcup_k [t_0 - \delta_0, t_k + \delta_k] = [t_0 - \delta_0, b)$. Воспользуемся непрерывностью функций: пусть $0 < h \ll 1$. Тогда

$$\forall \alpha, \beta \in (b - h, b) : |\tilde{x}(\alpha, t_0, x_0) - \tilde{x}(\beta, t_0, x_0)| \leq m|\alpha - \beta| < mh$$

Последовательность \tilde{x}_k фундаментальна, значит по критерию Коши у неё есть конечный предел. Положим этот предел значением функции в точке b : $x^* = \tilde{x}(b)$. Тогда функция непрерывна на $[t_0 - \delta_0, b]$. Вспомним про интегральное уравнение: заметим, что \tilde{x} удовлетворяет интегральному уравнению на интервале. Функция, дополненная на конце интервала, непрерывна и также удовлетворяет интегральному уравнению, поэтому в ней есть и производная (по эквивалентности определений).

Покажем, что точка b лежит на границе области D . Предположим противное, тогда она лежит во внутренности D . Тогда она лежит в нем вместе с некоторой 2ε -окрестностью с центром в $p^* = (t^*, x^*)$. Так как точки $p \rightarrow p^*$, то все $p_i, i > k$ лежат в ε -шаре точки p^* . Тогда расстояние до границы больше ε , и мы получаем противоречие с тем, что ряд из δ_k сходится и также удален от границы больше чем на ε . Значит, $p^* \in \partial D$. \square

Следствие. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ - такое неограниченное замкнутое подмножество плоскости, что для любых $(a, b) : D_{a,b} = D \cap \{(t, x) : a \leq t \leq b\}$ компактно, функции $f(t, x), \frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на D . Тогда решение задачи Коши продолжается либо неограниченно, либо до выхода на границу D . Доказать самостоятельно.

Пример. $x' = t^3 - x^3$. Показать, что любое решение этого уравнения продолжается неограниченно вправо. Нарисуем изоклину $x = t$. Заметим, что если $t_0 > x_0$, то $x(t, t_0, x_0) \in D$: Тогда в силу следствия решение продолжается на границу, на граница не достигается, то есть

Пример. $x' = 1 + x^2$. Его решение - $x = \operatorname{tg}(x + C)$, $C = \operatorname{arctg}(x_0) - t_0$, поэтому его нельзя продолжить до бесконечности, так как каждое решение определено на конечном интервале $(C_0 - \frac{\pi}{2}, C_0 + \frac{\pi}{2})$.

5.1 Практика

Пример (№199). $y^2 dx - (xy - x^3) dy = 0$. Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые: $y(ydx - xdy) - x^3 dy = 0$. Поделим все на x^2 , тогда получим: $-d\left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} dy = 0\right)$. Домножая на $-\frac{y}{x}$, получаем $d\left(\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) + dy = 0$. Итак, $d\left(\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + y\right) = 0$ В общем, мы нашли интегрирующий множитель методом внимательного взгляда. Ответ: $\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + y = \operatorname{const}$.

Пример (№202). $d(\ln |\sin(xy)|) + \ln |y| = 0$.

Определение 19 *Интегрирующий множитель - такая функция $\mu(z(x, y))$, что при домножении на неё уравнение становится уравнением в полных дифференциалах.*

Тогда $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$. То есть $\frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} M =$ Получаем, что $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{z_y M - z_x N} = P(z)$. То есть, если интегрирующий множитель существует, то он удовлетворяет этому условию. Значит, $\mu = e^{\int P(z) dz}$.

Пример (№212). $(2x^2 y^3 - 1) y dx + (4x^2 y^3 - 1) x dx = 0$. Пусть $z = xy$. Найдем интегрирующий множитель: $\mu = \frac{1}{(xy)^2}$.

6 Уравнение первого порядка

6.1 Базовые определения

Определение 20 *Уравнение*

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = b(t) \quad (7)$$

где a, b непрерывны на $t \in (\alpha, \beta)$ (интервал непрерывности), называется линейным ДУ первого порядка. Если при этом $b(t) \not\equiv 0$, то оно называется неоднородным.

Как следствие из теоремы Коши-Пикара, для $\forall t_0 \in (\alpha, \beta)$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ существует и единственно решение задачи Коши.

Замечание. Решение задачи Коши для 7 можно продолжить на весь интервал (α, β) . Если этот интервал конечен, то функции $a(t), b(t)$ ограничены на нём, то есть $|a(t)x + b(t)| \leq Ax + B$, и решение не выйдет за конус, образованный этой прямой.

Определение 21 *Линейный оператор - отображение $A: X \rightarrow Y$ такое, что $A(x + y) = A(x) + A(y)$, $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.*

Пусть $X = C^1(\alpha, \beta)$, $C^0(\alpha, \beta)$ - пространства дифференцируемых и непрерывных функций. Положим $A(x) = \frac{dx}{dt} + a(t)x$. В силу линейности производной, это - линейный оператор. Также и любая линейная комбинация производных (любого порядка) является линейным оператором.

Итак, уравнение 7 в операторной записи эквивалентно $Ax = b(t)$. Обозначим за $x_{o.n.}$ множество решений неоднородного уравнения, $x_{o.o.}$ - множество решений однородного уравнения, $x_{o.n.} + x_{o.o.}$ - множество вида $x + x$

Теорема 6 *(о структуре решения линейного уравнения)*

Решение неоднородного уравнения - сумма общего решения однородного уравнения и частного решения.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ - частное решение однородного уравнения, x_p - частное решение неоднородного уравнения. Применим оператор A к их сумме: $A(\varphi(t) + x_p) = A\varphi(t) + Ax_p = 0 + b(t)$. Значит, сумма этих функций обращает уравнение в тождество, значит, $\varphi(t) + x_p \in x_{o.n.}$.

Докажем, что других решений нет. Допустим, $\psi(t) \in x_{o.n.}$ таков, что его нельзя представить суммы решений однородного и неоднородного. Рассмотрим $\psi - x_p$ - вычтем частное решение неоднородного. Подставляя в уравнение, получаем $A(\psi - x_p) \equiv 0$, значит, их разность - решение однородного уравнения. Но это противоречит предположению. \square

Как решать линейные уравнения? Сначала решаем однородное уравнение: $\frac{dx}{dt} = -a(t)x$, $x = C(t)e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau}$. Решать неоднородное 3мя способами:

1. Угадайка
2. Метод Лагранжа вариации постоянных
3. Формула Коши (см. справочник).

6.2 Метод Лагранжа

Мы знаем, что $x = Ce^{-\int a(t)dt}$ - решение однородного уравнения. Будем её варьировать, чтобы в уравнении было бы тождество:

$$\frac{d}{dt} \left(C(t) e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \right) + a(t) C(t) e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} = b(t)$$

Дифференцируя, получаем $C' = b(t) e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$, откуда

$$C = e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \int_{t_0}^t \left(b(s) e^{\int_{s_0}^s a(\tau) d\tau} \right) ds + C_0 e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$$

Значит, мы нашли семейство всех решений неоднородного уравнения, произвольно выбирая C_0 . По предыдущей теореме, этим все решения исчерпываются.

То, что мы получили - это и есть формула Коши. Она нужна в основном для всяких теоретических свойств.

Пример. $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = t^2$. Интервал непрерывности - $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, поэтому вообще-то надо рассматривать два интервала. Решение однородного уравнения: $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}$, $x = \frac{C}{t}$. Подумаем, как можно подобрать частное неоднородного уравнения. Поищем в виде $x = at^3$. Тогда при подстановке $3at^2 + t^2 = t^2$, откуда $a = \frac{1}{4}$. Ответ: $x = \frac{t^3}{4} + \frac{C}{t}$.

6.3 Уравнения, приводящееся к линейному

Испортируем уравнение 7, добавив нелинейности:

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = b(t)x^k, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Это - уравнение Бернулли. Если разделим на x^k , получим

$$x^{-k} \frac{dx}{dt} + a(t)x^{1-k} = b(t)$$

Значит, оно сводится к линейному уравнению заменой $z = x^{1-k}$:

$$\frac{1}{1-k} \frac{dz}{dx} + a(t)z = b(t)$$

Рассмотрим уравнение Риккати:

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = b(t)x^2 + c(t), \quad c(t) \neq 0, c(t) \in C^0(\alpha, \beta)$$

В общем виде не решается, но можно частное решение угадать. Пусть $x = z + x_p$, где x_p - частное решение. Получим

$$\frac{dz}{dt} + a(t)z + \frac{dx_p}{dt} + a(t)x_p = b(t)x_t^2 + 2zx_p b(t) + c(t)$$

Свели к уравнению Бернулли

$$\frac{dz}{dt} + [a(t) - 2x_p b(t)]z = b(t)z^2$$

Ну зато можно численно и приближенно решать.

Пример (№136). $xy' - 2y = 2x^4$, $x \neq 0$. Разделим на x , свели к линейному (делить на x можно, ибо x не является решением):

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 2x^3$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$\int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{x}$$

откуда $y = x^2$. Подберем частное решение: $y = ax^4$. Подставляя в уравнение, получим $a = 1$, откуда общее решение $y = x^4 + Cx^2$.

Теперь решим методом Лагранжа. Пусть $y = c(x)x^2$. Имеем $c'x^2 + 2xc - 2cx = 2x^3$, откуда $c(x) = x^2 + C_0$. Значит, ответ $y = x^4 + C_0x^2$.

Пример (№149). $y' = \frac{y}{3x-y^2}$. Приведем к линейному (перевернем): $\frac{dx}{dy} = \frac{3x-y^2}{y}$. Общее решение однородного уравнения: $x = Cy^3$. Частное решение поищем в виде $x = ay^2$. Отсюда $a = 1$, общее решение $x = Cy^3 + y^2$.

Пример (№158). $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$. Домножим на y : $2y'y - x = \frac{xy^2}{x^2-1}$. Замена: $z = y^2$. Тогда уравнение линеаризуется:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{xz}{x^2-1} = x$$

Общее решение однородного уравнения $z = C\sqrt{x^2 + 1}$. Метод внимательно-го взгляда: $z = x^2 - 1$ - частное решение. Итак, ответ: $z = x^2 - 1 + C\sqrt{x^2 + 1}$, $y = \sqrt{x^2 - 1 + C\sqrt{x^2 + 1}}$.

Пример (№164). $(x^2 - 1)y' \sin y + 2x \cos y = 2x - 2x^3$. Наша нейросетка заметила, что здесь есть тригонометрическая замена. Именно, пусть $z = \cos x$. Тогда $(x^2 - 1)(-z') + 2xz = 2x - 2x^3$. Делим на $x^2 - 1$ получим однородное.

Пример (№163). $x(e^y - y') = 2$. Введем замену $t = e^y$, получаем $1 - \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{2}{xt}$. Далее $z = \frac{1}{t}$, и наконец получаем линейное уравнение:

$$1 + \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}$$

Пример (№167). Уравнение Риккати: $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$. Частное решение $y = \frac{a}{x}$. Тогда $-a + a + a^2 = 4$, $a = \pm 2$. Пусть $y = \frac{2}{x}$. Общее решение тогда $y = z + \frac{2}{x}$, $y' = z' - \frac{2}{x^2}$. Имеем уравнение Бернулли

$$-z^2 = \frac{5z}{x} + z'$$

Сделаем замену $u = \frac{1}{z}$, получим $\int \frac{du}{u}$

7 Теоремы о непрерывной зависимости задачи Коши

от начальных условий и правой части уравнения.

Дано: уравнение с задачей Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$f, \frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны в области D . Утверждается, что решение задачи Коши $x = x(t, t_0, x_0)$, определенное на отрезке $I = [a, b]$, непрерывно по всем аргументам. Из этого следует, что решение при малом изменении начальных условий будет мало отличаться от исходного (разумеется, на конечном интервале).

Обозначим $V_\rho = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I, |x - x(t, t_0, x_0)| \leq \rho\}$ - цилиндрическая окрестность решения.

Теорема 7 (о непрерывной зависимости)

Пусть $f, \frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны в области V_ρ . Тогда для любого ε для любой функции $g(t, x)$, такой, что $g, \frac{\partial g}{\partial x}$ непрерывны в V_ρ найдется $\delta(\varepsilon) : |x_0 - y_0| \leq \delta, |g(t, x) - f(t, x)| \leq S$. Решение $y(t)$ задачи Коши для уравнения $\frac{dy}{dt} = g(t, y)$ продолжается на I и $\forall t \in I : |y(t, t_0, y_0) - x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$.

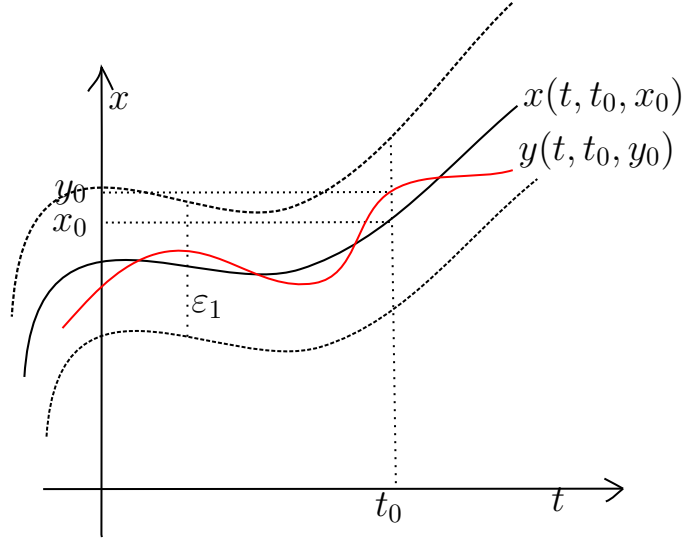


Рис. 5: Теорема о непрерывной зависимости

Иначе говоря, решение, проходящее ближе чем ρ от решения задачи Коши, не выходит из этой ρ -окрестности.

Лемма Гронуолла. Пусть $\varphi(t), \beta(t)$ - непрерывные функции на отрезке $[t_1, t_2]$, причем на отрезке $\beta(t) > 0$ и $\varphi(t) \leq \alpha + \int_{t_1}^t \beta(\tau)\varphi(\tau)d\tau$. Тогда $\varphi(t) \leq$

$$\alpha e^{\int_{t_1}^t \beta(\tau)d\tau}.$$

Доказательство. Положим $\Phi(t) = \alpha + \int_{t_1}^t \beta(\tau)\varphi(\tau)d\tau$, где $\varphi(t) \leq \Phi(t)$.

Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} e^{-\int_{t_1}^t \beta d\tau} - e^{-\int_{t_1}^t \beta d\tau} \beta(t)\Phi(t) \leq 0$$

Все это выражение на самом деле является производной:

$$\frac{d}{dt} \left(\Phi e^{-\int_{t_1}^t \beta d\tau} \right) \leq 0$$

Так как производная этой функции отрицательна, то

$$\varphi \leq \Phi \leq \alpha e^{\int_1^t \beta d\tau}$$

Мы установили равносильность неравенства из условия и неравенства $\frac{d\varphi}{dt} \leq \beta(t)\varphi(t)$. \square

Теперь перейдем к доказательству основной теоремы. Поскольку f непрерывна, то она ограничена на компакте, иными словами

$$\forall (t, x) \in V_\rho \exists M \geq 0, L \geq 0 : |f(t, x)| \leq M, \left| \frac{df}{dx} \right| \leq L$$

Значит, эта функция липшицева:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L \cdot |x - y|, \quad |f(t, x) - g(t, y)| \leq \delta$$

Тогда $|f(t, x) - f(t, y) + f(t, y) - g(t, y)| \leq |-(f(t, x) + f(t, y))| + |f(t, y) - g(t, y)| \leq L \cdot |x - y| + \delta$.

Оценим разность $|y(t, t_0, y_0) - x(t, t_0, x_0)|$. По лемме об интегральной форме уравнения, это то же самое, что и

$$\begin{aligned} & \left| y_0 + \int_{t_0}^t g(\tau, y(\tau)) d\tau - x_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leq \\ & \leq |y_0 - x_0| + \left| \int_{t_0}^t g(\tau, y(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leq \delta + \left| \int_{t_0}^t (L(|y - x| + \delta)) d\tau \right| \leq \end{aligned}$$

Пусть решение $y(t, t_0, x_0)$ определено на отрезке $I_1 = [a_1, b_1]$. Продолжим неравенства:

$$\leq \delta(1 + (b_1 - a_1)) + \left| \int_{t_0}^t L|y - x| d\tau \right|$$

Обозначим $\alpha = \delta(1 + (b_1 - a_1))$, $\varphi(t) = |y(t, t_0, y_0) - x(t, t_0, x_0)|$. Применяя лемму Гронуолла, получаем $\varphi(t) \leq \alpha e^{L|b_1 - a_1|} < \varepsilon_1$ (при $\alpha = \frac{\varepsilon_1}{2e^{L|b_1 - a_1|}}$). Таким образом, разность между двумя решениями меньше чем ε_1 на отрезке $[a_1, b_1]$, иными словами $y(t, t_0, y_0)$ лежит в V_{ε_1} -трубочке решения $x(t, t_0, x_0)$.

По теореме о продолжении решения, $y(t, t_0, y_0)$ продолжается до выхода на границу $\partial V_{\varepsilon_1}$. Через верхнюю и нижнюю границу часть границы мы не выходим, так как $|y - x| < \varepsilon_1$, значит, $y(t, t_0, y_0)$ продолжается на I . Аналогично, если $t < t_0$. \square

Следствие. Пусть числовая последовательность $x_0^i \rightarrow x_0$ сходится при $i \rightarrow \infty$. Тогда $x(t, t_0, x_0^i) \rightarrow x(t, t_0, x_0)$. Доказать самостоятельно. Упражнение: доказать теорему о непрерывной зависимости одновременно от t_0 и x_0 . Также доказать следствие о равномерной сходимости.

7.1 Как решать Рикатти через Пикара (с оценкой погрешности)

Рассмотрим уравнение $\frac{dy}{dx} = x - y^2(x)$, $y(0) = 0$. Найдем формулу для решения на отрезке $x \in [0, 0.5]$. Допустим, решение существует. Запишем последовательность Пикара, определенную рекуррентной формулой $y_{k+1}(x) = \int_0^x (s - y_k^2(s)) ds$. Посчитаем первые члены: $y_1 = 0 + \int_0^x s ds = \frac{x^2}{2}$, $y_2 = \int_0^x \left(s - \frac{s^4}{4}\right) ds = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}$, $y_3 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}$. Построим ряд из последовательности:

$$y = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) \dots + a_k$$

Остаток a_k оценивается по формуле $|a_k| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!}$.

Рассмотрим шар $B_r = \{|x| \leq \frac{1}{2}, y \in [0, \frac{1}{2}]\}$. Тогда постоянные Липшица для функции и её производной равны $M = \max_{B_r} |f(t, x)|$, $L = \max_{B_r} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|$.

Задача. Что нам мешает провести через одну точку несколько решений уравнения $y' = x - y^2$? Тот факт, что тангенс угла наклона задается уравнением однозначно, поэтому трансверсальное пересечение невозможно. А если касательные параллельны? Если такая ситуация имеет место, тогда по теореме о существовании и единственности в этой точке правая часть либо её производная не непрерывны, но это не так. А что, если $y'' = x - y^2$ - уравнение второго порядка? Тогда все-таки ничего нельзя сказать (там есть свои теоремы).

8 Уравнение, не разрешенное относительно производной

8.1 Уравнение первого порядка

Общий вид -

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (8)$$

Уравнение нельзя разрешить относительно производной, если $\frac{dx}{dt}$ нельзя выразить единственным образом.

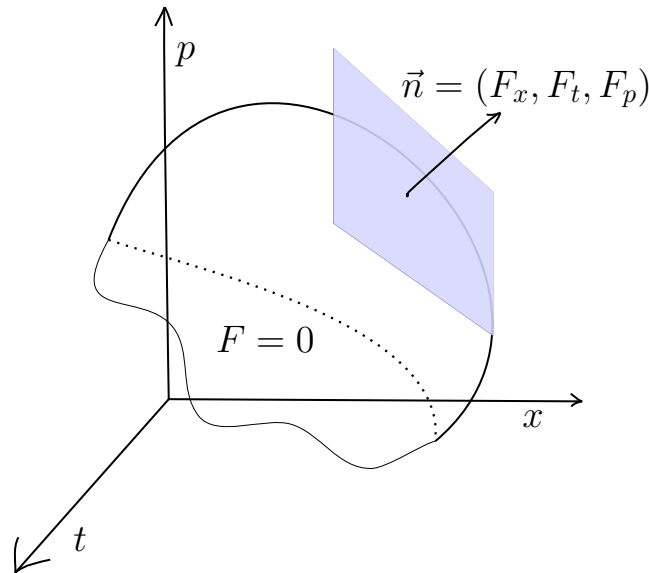


Рис. 6: Уравнение задает поверхность

Допустим, функция $F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$ задает какую-то поверхность в \mathbb{R}^3 . Вектор нормали к этой поверхности: $\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial p}\right)$ (где введено обозначение $p = \frac{dx}{dt}$). Уравнение нельзя разрешить, если этот вектор параллелен плоскости (x, t) . Но зато мы можем выразить, например, x от p, t .

Пусть $F, \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial p}$ непрерывны в области $D \subset Otxp$, и в каждой точке хотя бы одна из производных не равна нулю. Тогда по теореме о неявной функции уравнение 8 можно разрешить относительно одной из переменных.

Пример. $x'^2 - x^2 = 0$. Два семейства решений: $x = x_0 e^{\pm t}$. Как видно, в каждой точке пересекаются 2 решения. Для таких уравнений ситуация

с пересечением решений типична, но их количество и взаимный наклон определены в зависимости от вида уравнения.

Определение 22 *Особая точка - точка, через которую проходит несколько решений.*

Теорема 8 *Пусть F непрерывна по всем аргументам, имеющая непрерывные частные производные по x, t и $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$. Тогда существует одна или несколько функций $f(t, x)$ такие, что $F(t, x, f(t, x)) \equiv 0$, и решение задачи Коши $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0$ существует и единственно.*

Доказательство. Допустим, решение существует. Рассмотрим полную производную по времени: $\frac{dF(t, x, x')}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} \equiv 0$ Тогда $\frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{dx'}{dt}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ списываем из фихтенгольца Эти условия должны выполняться в окрестности какой-то точки $F(t_0, x_0, x'_0) = 0$ \square

Теорема 9 *Пусть F непрерывна по всем аргументам в области D , имеющая непрерывные частные производные по x, t и $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$. Тогда для любой точки t_0, x_0, x'_0 существует и единственно решение задачи Коши.*

Доказательство. \square

Определение 23 *Регулярная (обыкновенная) точка уравнения $F(t, x, x')$ - точка (t, x) , в которой задача Коши (для уравнения, разрешенного или не разрешенного относительно производной) имеет единственное решение. Если решений несколько или ноль, то точка особая (сингулярная).*

Теорема 10 *Пусть $f(t, x)$ - такая функция, что $F(t, x, f(t, x)) \equiv 0$. Тогда любое решение $x(t)$ уравнения 8, удовлетворяющее условию $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, является решением уравнения $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$*

Доказательство. Упражнение. \square

8.2 Практика и методы решения

Есть два метода решения уравнения 8:

1. Если $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, тогда разрешить относительно p и решать несколько уравнений типа $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$.

2. Метод введения параметра. Если $\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$, то 8 эквивалентно уравнению $x = \varphi(t, p)$, где φ - такая функция, что $F(t, \varphi, p) \equiv 0$. Будем считать p параметром и искать решение уравнения 8 в виде $x = x(p), t = t(p)$. Найдя $t(p)$, тогда $x = \varphi(t(p), p)$. Далее, имеем $dx = \varphi_t dt + \varphi_p dp, p dt = \varphi_t + \varphi_p dp$. Finally,

$$\frac{dt}{dp} = \left(\frac{\varphi_p}{p - \varphi_t} \right)$$

Пример на метод введения параметра. $x = \dot{x}t - \dot{x}^2$. Введем параметр $p = \dot{x}$ и ищем решение в виде $\begin{cases} x = x(p) \\ t = t(p) \end{cases}$. Имеем уравнение

$x = pt - p^2$, которое можно записать в виде $dx = dp t + p dt - 2p dp$, то есть $dp(t - 2p) = 0$. Оно разбивается в два уравнения: $dp = 0$ (то есть $p = \text{const}, x = Ct - C^2$) и $t = 2p$ (то есть $x = \left(\frac{t}{2}\right)^2$).

Это - частный случай уравнения Клеро:

$$x = \frac{dx}{dt}t + \psi\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Сформулируем теорему:

Теорема 11 *Общее решение уравнения Клеро - семейство прямых*

$$x = Ct + \psi(C)$$

и (возможно, вырожденная) кривая - огибающая для семейства кривых:

$$x = \eta(t)$$

Доказательство. Пусть $p = \dot{x}, dx = p dt$. Тогда $dp(t + \psi'_p(p)) = 0$. Значит, одно из решений - семейство прямых $x = Ct + \psi(C)$. Другое решение получаем из условия $t = -\psi'(p)$. Подставляя её в исходное уравнение, получаем $x = -p\psi'(p) + \psi(p) = \eta(p)$.

Пусть $p = p_0$ ψ ????????????????? Юра скоро допишет

Убедимся в том, что касательные к кривой $x = \eta(t)$ и к прямой $x = C_*t + \psi(C_*)$ в точке (t_0, x_0) совпадают, то есть кривая - действительно огибающая.
 $\left. \frac{d\eta}{dt} \right|_{t_0} = C_*$.

$\psi'(p_0)(C_* - p_0) = \psi(C_*) - \psi(p_0)$. Это - уравнение Лагранжа. Значит, уравнение Клеро - частный случай уравнения Лагранжа:

$$x = \alpha(\dot{x})t + \psi(\dot{x})$$

□

Пример (№292). $y = x(y')^2 - 3(y')^3$. Вводим параметр $y' = p$, $y = xp^2 - 2p^3$, $dy = dx p^2 + x \cdot 2p dp - 6p^2 dp$. С другой стороны, $dy = p dx$, поэтому имеем

$$p dx = dx p^2 + x \cdot 2p dp - 6p^2 dp$$

Группируя, получаем уравнение $\frac{dx}{dp} = \frac{2xp-6p^2}{p-p^2}$. Значит, введением параметра уравнение Лагранжа приводится к линейному относительно x . Доказать самостоятельно. Итак,

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \frac{2}{1-p} - \frac{6p}{1-p}$$

Общее решение однородного уравнения $\frac{dx}{dt} = \frac{2x}{1-p}$ с разделяющимися переменными - $x_{oo} = \frac{C}{(1-p)^2}$. Частное решение неоднородного уравнения сложно угадать, используем метод Лагранжа: $\frac{C'(p)(1-p)^p + C(p)2(1-p)}{(1-p)^4} = \frac{2C-6p}{1-p}$.

Итак, ответ:

$$\begin{cases} y = xp^2 - 2p^3 \\ x = \frac{-3p^3 \tilde{C}}{(1-p)^2} \end{cases}$$

Пример (№268). $x = (y')^3 + y'$. Введем параметр $p = y'$, $\frac{dy}{dx} = p$, $dx = \frac{dy}{p}$. Имеем $x = p^3 + p$, $dx = 3p^2 dp + dp$. Заметим, что это можно делать при условии $p \neq 0$. Значит, $y = \frac{3p^4}{4} + \frac{p^2}{2} + C$ - ответ.

Теперь - про особые решения. Найдем такие начальные условия, при которых задача Коши имеет единственное решение. То есть

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ x_0 = y_0'^3 + y'_0 \end{cases}$$

Чтобы получить единственность решения, необходимо проверить условия теоремы Коши-Пикара.

1. Покажем, что уравнение $F = x - y'^3 - y' = 0$ разрешимо относительно производной, при этом функция $f(x, y)$ будет гладкой. Фиксируя точку (x_0, y_0, y'_0) и в ней все частные производные и сама F непрерывна и $F'_y \neq 0$, то существует гладкая функция $f(x, y)$: $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$ по теореме о неявной функции.

2. Покажем, что функция $y' = f(x, y)$ Кароч в дз отлетает. Че за троллинг? решени

Пример (№249). $(y')^3 + y^2 = y \cdot y'(y' + 1)$. Группируем и выносим общий множитель два раза, получаем $((y')^2 - y)(y' - y) = 0$. Получаем три

$$\text{уравнения: } \begin{cases} y' = y; \\ y' = \sqrt{y}; \\ y' = -\sqrt{y} \end{cases} \quad . \quad \text{Решения: } \begin{cases} y = y_0 e^t; \\ y = \left(-\frac{x}{2} + \frac{c}{2}\right)^2 \\ y = \begin{cases} \left(\frac{x+x_0}{2}\right)^2, & x < x_0 \\ 0, & x \geq x_0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{Найдем}$$

особые точки: $y = 0$, ибо там бесконечно много решений. Вообще говоря,

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq x_0 \\ \left(\frac{x-x_0}{2}\right)^2, & x > x_0 \end{cases} \quad \text{Проверим условия теоремы для оставшихся точек}$$

(тем доказав, что других особых точек нет). Гладкость функции очевидна, нули производной: $3(y')^2 - y \cdot 2y' - y = 0$

Определение 24 Особое решение - решение состоящее из особых точек

9 Уравнения высших порядков

9.1 Уравнения, допускающие понижение степени

Пример (№451) $xy^{(4)} = 1$. Имеем $y^{(3)} = \ln|x| + C_1$. Далее тупа интегрируем:

$$y = \int \int \int (\ln|x|) dx dx dx = \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Уравнение четвертого порядка \Rightarrow 4 константы.

№435. $xy^{(3)} = y^{(2)} - xy^{(2)}$. Идея: самую младшую производную введем как новую переменную. Пусть $t(x) = y''$. Имеем $xt' = t(1 - x)$

$$\frac{t'}{t} = \frac{1 - x}{x}$$

Переменные разделились, значит, $y'' = t = C_1 x e^{-x}$. Свели к предыдущей задаче - уравнению вида $y^{(n)} = f(x)$, где мы берем интеграл n раз.

№431. $2yy'' = y^2 + (y')^2$. Замена $p(y) = y'$. Идея: в уравнении нет явно независимой переменной, поэтому её роль можно передать зависимой переменной, вводя такую замену. Тогда имеем $dx = \frac{dy}{p}$, и значит $y'' = \frac{dy'}{dx} = p \frac{dp}{dy}$. Уравнение имеет вид

$$2yp \frac{dp}{dy} = y^2 + p^2$$

Уравнение однородное! Вводим замену $\frac{p}{y} = t(y)$. Получаем

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dt}{dy} y + t(y)$$

Переменные разделяются:

$$\frac{2t dt}{1 - t^2} = \frac{dy}{y}$$

Получаем ответ: $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = t(y) = \pm \sqrt{1 - \frac{C_1}{y}}$. Теперь переменные снова разделились.

№455. $yy^{(3)} + 3y'y'' = C$. Поделим на yy'' :

$$\frac{y'''}{y''} = 3 \frac{y'}{y} = 0$$

Эти штуки похожи на производная логарифма, поэтому можем записать так:

$$\frac{d}{dx} (\ln |y''| + 3 \ln |y|) = 0$$

Значит, $\ln |y''| + 3 \ln |y| = C_1$. Имеем $\ln |y'' \cdot y^3| = C_1$, $y'' \cdot y^3 = C_1$. Сведем задачу к предыдущей заменой $p(y) = \frac{dy}{dx}$. Уравнение получаем такое:

$$pdp = \frac{dy}{y^3} C_1$$

Отсюда $p = \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} C_1 + C_2} = \frac{dy}{dx}$. Переменные разделились.

Ответ: $y = 0, y = C_1 x + C_2$ - не забудем про потерянные решения, когда делили на yy'' ; $y = \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} C_1 + C_2}$.

№460. $y'' = xy' + y + 1$. Полный букет всего. Единственная надежда - найти че-то типа первого интеграла: а именно, найти функцию от производных меньшего порядка, чья производная зануляется. В данном случае имеем

$$\frac{d}{dx} (y' - xy - x) = 0$$

откуда $y' - xy - x = C_1$. Линейное уравнение: $y' = C_1 + x(y + 1)$. Не ну такое мы умеем решать))))))

№463. $xyy'' - x(y')^2 = yy'$. Это уравнение, однородное относительно группы y (перейдет в себя при замене $y^{(l)} \mapsto ky^{(l)} \forall l$). Замена: $t(x) = \frac{y'}{y}$. Тогда имеем

$$xy(t'y + t^2y) - xt^2y^2 = y^2t$$

Поделив на y^2 , получим

$$xt' = t$$

Значит, $\frac{y'}{y} = t = C_1 x$. Ну и дальше все понятно.

№468. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$ - однородное.

№477. $x^2(2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy'$. Обобщенно-однородное уравнение - которое не меняется при замене $x \mapsto kx, y^{(l)} \mapsto ky^{(l)} \forall l$. Тогда можно ввести

замену $\begin{cases} x = \pm e^t \\ y = z(t)e^{mt} \end{cases}$ Проверим это уравнение на обобщенную однород-

ность: сделаем соответствующую замену (считая $1 = k^0$). Мы вынесем k^m ,

откуда $2m = 0$. Значит, $x = \pm e^t, y = z(t)$. Имеем

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \frac{dt}{dt} = \frac{\dot{z}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{z}}{\pm e^t}$$

$$y'' = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\ddot{z}e^{-t} - \dot{z}e^{-t}}{e^t}$$

Значит, уравнение переписывается в виде

$$e^{-t} \left(2z \cdot \frac{\ddot{z}e^{-t} - \dot{z}e^{-t}}{e^t} - \frac{\dot{z}^2}{e^{2t}} \right) = 1 \pm 2ze^t \frac{\dot{z}}{\pm e^t}$$

Поделим на $2e^t$, получим

$$(2z(\ddot{z} - \dot{z}) - \dot{z}^2) = 1 - 2z\dot{z}$$

которое сводится к $2z\ddot{z} - \dot{z}^2 = 1$. Дорешать заменой $p(z) = \dot{z}$.

Дз: 452, 454, 426, 459, 468, 480

9.2 Теория

Определение 25 Уравнение высшего порядка - уравнение вида

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0 \quad (9)$$

Его решение: $x = x(t, C_1, \dots, C_n)$. Если $\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} \neq 0$, то уравнение 9 приводится к виду

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\right) \quad (10)$$

Уравнение первого порядка задает слоение с особыми точками. Но для высших порядков нет такой картинку, там куча параметров. Чтобы увидеть естественную картинку, нам потребуется n -мерное пространство параметров. Чтобы отыскать единственное решение, проходящее через точку этого пространства, нам надо зафиксировать n начальных условий

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (11)$$

Определение 26 *Задача Коши - уравнение 10 + условия 11*

Пусть решение задачи Коши единственно. Это означает, что каждая константа C_i зависит от набора начальных условий $t, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}$. Запишем систему:

$$\begin{cases} x = x(t, C_1(t, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}), \dots, C_n(t, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)})) = x(t, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}) \\ \ddot{x} = \ddot{x}(t, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}) \\ \dots \\ x^{(n-1)} = x^{(n-1)}(t, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}) \end{cases}$$

Мы взяли $n+1$ переменную и связали их n уравнениями. Значит, эта система определяет кривую в расширенном фазовом пространстве, проходящую через точку начальных условий 11. Эта кривая - интегральная кривая - то же, что и решение уравнения. Можно сказать, что она одномерна в силу того, что функция x на самом деле функция одной переменной $x = x(t)$.

Определение 27 *Расширенное фазовое пространство - пространство независимой, зависимой переменной и её производных.*

Теорема 12 *(Коши-Пикара)*

Если в уравнении 10 $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^{(n-1)}}$ непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^n = (t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$, и точка $M(t_0, x_0, \dots, x_0^{(n-1)}) \in D$, тогда решение задачи Коши существует и имеет единственное решение.

Доказательство. \square

9.3 Уравнение в нормальной форме

Введем вектор-функции

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Зададим дифференцирование по определению:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

На основе 10 введем векторы

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \text{ а } F(t, x) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Определение 28 Уравнение в нормальной форме (в форме Коши) - уравнение 10 в векторном виде:

$$\dot{X} = F(t, x), \quad X \in \mathbb{R}^n \quad (12)$$

В частности, для обычного уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Задача Коши для уравнения высшего порядка:

$$y^{(n)} = f(t, x_1, \dots, x_{n-1}), \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (13)$$

Для системы уравнений высшего порядка:

$$\dot{X} = F(t, x), \quad x_i(t_0) = x_i^0 \quad (14)$$

Фазовое пространство для уравнения высшего порядка - n -мерное.

Теорема 13 (Коши - Пикара для системы уравнений высших порядков)
Если все $f_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны в области $D \subset \text{От } x_1 \dots x_n$, то для любой точки для этой области решение задачи Коши 14 существует и единственно.

Доказательство. См. Филипов, Лерман. \square

10 Линейные уравнения

10.1 Основные определения

Определение 29 *Линейное уравнение высшего порядка - уравнение вида*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t) \quad (15)$$

где $f(t), a_i(t)$ непрерывны на (α, β)

Условие непрерывности гарантирует выполнение условия для теоремы Коши-Пикара $\forall t_0 \in (\alpha, \beta)$. Именно, имеет место

Теорема 14 *(о единственности задачи Коши для 15)*

Если $f(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ непрерывны на $t \in (\alpha, \beta)$, то для любой точки $X_0 = (x_0, \dots, x_0^{(n-1)})$ фазового пространства при $t_0 \in (\alpha, \beta)$ существует единственное решение, удовлетворяющее данному начальному условию и определенное на интервале (α, β) .

Специфика линейного уравнения состоит в продолжении решения на весь временной промежуток.

10.2 Свойства линейных уравнений

Введем оператор

$$L: C^n(\alpha, \beta) \rightarrow C^0(\alpha, \beta)$$
$$L = \frac{d^n}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t)$$

Тогда уравнение 15 имеет вид $Lx = f(t)$. Свойства оператора L :

1. $Lkx = kLx$
2. $L(x + y) = Lx + Ly$

Эти свойства следуют из линейности дифференцирования, и значит, L - линейный оператор.

Определение 30 *Линейное уравнение называется однородным, если оно имеет вид*

$$Lx = 0 \quad (16)$$

Определение 31 *Линейное уравнение называется неоднородным, если оно имеет вид*

$$Lx = f(t), \quad f(t) \not\equiv 0 \quad (17)$$

Теорема 15 *(о структуре решения)*

Общее решение неоднородного уравнения - общее решение однородного уравнения плюс частное решение неоднородного уравнения.

Доказательство. \square

Подбор частного решения: метод вариации постоянных Лагранжа, формула Коши. Сравнивая по сложности задача - поиск решения однородного уравнения.

10.3 Линейное однородное уравнение

Непосредственно проверяется, что множество решений уравнения 16 - векторное пространство. Оказывается, его размерность равна порядку максимальной производной.

Определение 32 *Функции $x_i(t)$ называются линейно зависимыми, если существует нетривиальный набор констант c_i , что для всех $t \in (\alpha, \beta)$*

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i(t) = 0$$

Тогда этот интервал называется интервалом линейной зависимости. В противном случае набор функций называется линейно независимым.

Пример. $x_1 = t, x_2 = 1$ - линейно независимы. Предположим противное, а именно при $t \in (-\infty, \infty) \exists c_1, c_2 : c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, и $c_1 t + c_2 1 = 0$. Но тогда $c_1 = c_2 = 0$ - противоречие.

Пример. $x_1 = t, x_2 = 2t$ - линейно зависимы.

Пример. $x_1 = t^2, x_2 = t^2 + 2$ - линейно независимы.

Очевидно, добавление нуля к системе гарантированно делает её линейно зависимой.

Определение 33 *Вронскиан (определитель Вронского) C^{n-1} -дифференцируемых функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$ - определитель матрицы*

$$W(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \quad (18)$$

Например, $W(\sin t, \cos t) = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -1$

Теорема 16 (необходимое условие линейной зависимости функций)
Если C^{n-1} -дифференцируемые функции линейно зависимы, то их вронскиан тождественно равен нулю.

Доказательство. Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ - линейно зависимые функции. Тогда существует нетривиальный набор констант такой, что

$$c^i x_i(t) = 0$$

Дифференцируя это равенство, будем получать

$$\begin{cases} c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = 0 \\ c_1 \dot{x}_1(t) + \dots + c_n \dot{x}_n(t) = 0 \\ \dots \\ c_1 x_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n x_n^{(n-1)}(t) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Пусть $t = t^*$. Тогда $x_i^{(k)} = \text{const}$, и для этого t^* система 19 - СЛАУ относительно c_i . Так как имеется нетривиальное решение, её определитель 0.

Приведем пример системы линейно независимых функций с нулевым вронскианом. Положим $x_1 = \begin{cases} t^2, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$, $x_2 = \begin{cases} 0, t \geq 0 \\ t^2, t \leq 0 \end{cases}$. Легко проверить, что эти функции дифференцируемы всюду на прямой. Имеем вронскиан $W(x_1, x_2) \equiv 0$. Докажем линейную независимость. Допустим, существует неривиальная линейная комбинация $c^i x_i(t) = 0$. Но тогда $c^i = 0$. \square

Теорема 17 Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ - решения линейного однородного уравнения. Тогда:

1. Если $\exists t^* : W(x_1(t^*), \dots, x_n(t^*)) \neq 0$, то $x_1(t), \dots, x_n(t)$ линейно независимы (и вронскиан в любой точке t не равен 0).
2. Если $\exists t_0 : W(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) = 0$, то $x_1(t), \dots, x_n(t)$ линейно зависимы, и вронскиан тождественно равен нулю.

Доказательство. 1. То, что не в скобках, следует из необходимого условия линейной зависимости.

2. Выпишем i -тый столбец вронскиана:

$$X_i(t_0) = \begin{cases} x_i(t_0) \\ x'_i(t_0) \\ \dots \\ x_i^{(n-1)}(t_0) \end{cases}$$

По условию, вронскиан равен нулю, значит, существует нетривиальная линейная комбинация столбцов $\sum_{i=1}^n c_i X_i(t_0) = 0$.

Положим $X(t) = \sum_{i=1}^n c_i X_i(t)$. Тогда $X(t_0) = (0, \dots, 0)^T$. Подействуем линейным оператором уравнения на этот вектор:

$$LX(t) = L \left(\sum_{i=1}^n c_i X_i(t) \right) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot LX_i(t)$$

Поскольку $x_i(t)$ - решения, то $L(X_i(t)) \equiv 0$, откуда $LX(t) \equiv 0$ - то есть, $X(t)$ - решение уравнения $Lx = 0$ с нулевым начальным условием. С другой стороны, это уравнение имеет решение с нулевым начальным условием: $x(t) \equiv 0$. Значит, по теореме о существовании и единственности имеем $\sum_{i=1}^n c_i x_i(t) = 0 \forall t \in (\alpha, \beta)$, поэтому x_1, \dots, x_n линейно зависимы.

Предположим, что существуют $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta) : W(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)) \neq 0, W(x_1(t_2), \dots, x_n(t_2)) = 0$. Но по только что доказанному свойству, из существования t_2 следует, что $W(t) = 0$ при $t \in (\alpha, \beta)$. \square

Следствие. Не существует линейного однородного уравнения, решениями которого были бы функции $x_1 = \begin{cases} t^2, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, x_2 = \begin{cases} 0, t \geq 0 \\ t^2, t \leq 0 \end{cases}$.

Теорема 18 Существует набор линейно независимых решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$, такой что все решения уравнения $Lx = 0$ имеет вид $x = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t)$, то есть пространство решений является n -мерным векторным пространством.

Доказательство. Рассмотрим набор линейно независимых векторов $X_i = (..0, \text{единица}$

на i -м месте, $0...)^T$. Поставим n задач Коши типа
$$\begin{cases} Lx_i = 0 \\ X_i = \begin{pmatrix} x_i(t_0) \\ x'_i(t_0) \\ \vdots x_i^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{По}$$

теореме единственности, имеется n единственных решений этих задач. Решения линейно независимы, так как

$$W(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) = |X_1, \dots, X_n| \neq 0$$

а исходные столбцы линейно независимы. Так как все остальные векторы выражаются через этот базис, то это - максимально линейно независимая подсистема \Rightarrow это пространство n -мерное. \square

10.4 Формула Остроградского-Лиувилля

10.5 Практика

№663.а Допустим, $x_1 = \text{const}$. Тогда $W(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x'_2 & x'_3 \\ 0 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} = x'_2 x''_3 -$

$x'_3 x''_2$. Обе функции возрастают, но у них разные выпуклости: поэтому в точке t^* , лежащей за точкой перегиба $x_2, x_3, x''_3 > 0$, но $x''_2 < 0$, значит, $W|_{t^*} > 0$. Но тогда вронскиан не зануляется на всем промежутке (почему?).

№668. Пусть x_1, x_2 - решения уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t) = 0$. Докажем, что если они имеют максимум в одной точке, то они линейно зависимы. Имеем в этой точке

$$W|_{t^*} = \begin{vmatrix} x_1(t^*) & x_2(t^*) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Значит, система линейно зависима.

№669. Имеем вронскиан 3×3 с линейно зависимыми первой строкой (функции) и второй строкой (производные). Поэтому он нулевой. Значит, любые три решения линейно зависимы. Верхняя оценка для количества линейно независимых решений - 2. Теперь рассмотрим решения $u_1 = y_1 - y_2, u_2 = y_2 - y_3, u_3 = y_3 - y_4$. Имеем $u_1(t^*) = 0, u'_1(t^*) = 0$, но может быть так, что $u''_1(t^*) = \alpha$ - в дз

№677. Чтобы составить уравнение, надо понять, являются ли эти решения линейно зависимыми. В базисе многочленов имеем систему $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, которая линейно зависима. Значит, они не образуют базис в пространстве решений уравнения порядка 3. Порядок уравнения не больше 2. Но там есть 2 линейно независимых многочлена, поэтому может быть уравнение второго порядка. Запишем вронскиан:

$$W = \det \begin{pmatrix} y_2 & y_3 & u \\ y_2' & y_3' & u' \\ y_2'' & y_3'' & u'' \end{pmatrix} = 0$$

Это и будет искомое линейное уравнение на функцию $u = u(x)$.

Другая практика

11 Линейное неоднородное уравнение

Пусть

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t) = f(t) \quad (20)$$

- линейное неоднородное уравнение, x_1, \dots, x_n - линейно независимые частные решения однородного уравнения. Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i(t)$$

Теорема 19 *Существует такое набор функций $c_i(t)$, что частное решение неоднородного уравнения имеет вид*

$$x_{\text{ч.н.}} = \sum_{i=1}^n c_i(t) x_i(t)$$

Доказательство. Положим $\sum_{i=1}^n \dot{c}_i x_i^{(j)} = 0$, где $0 \leq j \leq n-2$, и $\sum_{i=1}^n \dot{c}_i x_i^{(n-1)} = f(t)$. Эти условия задают задают линейную систему относительно \dot{c}_i Опре-

делитель этой системы - вронскиан:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = W(X_1(t), \dots, X_n(t)) \neq 0$$

Эта система имеет единственное решение $\dot{c}_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$. Тогда получаем

$$c_i = \int_{t_0}^t \frac{\Delta_i(\tau)}{\Delta(\tau)} d\tau + c_i(t_0)$$

Тогда

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n \dot{c}_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i \dot{x}_i = 0 + \sum_{i=1}^n c_i \dot{x}_i$$

$$\ddot{x} = \sum_{i=1}^n c_i \ddot{x}_i$$

...

$$x^{(n-1)} = \sum_{i=1}^n c_i x_i^{(n-1)}$$

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^n \dot{c}_i x_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n c_i x_i^{(n)}$$

Складывая эти выражения, домноженные на коэффициенты уравнения, получаем

$$\sum_{i=1}^n c_i (a_n)$$

□

12 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0, \quad a_i = \text{const} \quad (21)$$

Пример. $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$. Используем подстановку Эйлера: ищем частное решение в виде $x = e^{\lambda t}$. Имеем $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$. Получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

чьи корни $\lambda_{1,2} = 2, 3$. Значит, базис в пространстве решений: $x_1 = e^{2t}$, $x_2 = e^{3t}$. Проверим, что это действительно басы, составив вронскиан и проверив линейную независимость:

$$W(x_1, x_2) \Big|_{t=0} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$$

Пишем ответ: $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$

Вообще говоря, будем искать частное решение уравнения 21 в виде $x = e^{\lambda t}$. Имеем

$$L(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n) = e^{\lambda t} \chi(\lambda) = 0 \quad (22)$$

То есть при $e^{\lambda t} \neq 0$, уравнения $L(e^{\lambda t}) = 0$ и $\chi(\lambda) = 0$ эквивалентны.

Определение 34 Уравнение 22 называется характеристическим уравнением.

Случай 1. Все корни характеристического уравнения различны. Допустим, что эти частные решения $x_1 = e^{\lambda_1 t}, \dots, x_n = e^{\lambda_n t}$ линейно независимы:

$$W(x_1, \dots, x_n) \Big|_{t=0} = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda^{n-1} & \dots & \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \neq 0$$

Тогда определитель - определитель Вандермонда, равный $\prod_{i < j}^n (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$

Случай 2. Пусть есть кратные корни, то есть $\lambda_1, \dots, \lambda_s, s < n$ - различные корни с кратностями k_1, \dots, k_s . Тогда $x_1 = e^{\lambda_1 t}, \dots, x_s = e^{\lambda_s t}$ - решения

уравнения $Lx = 0$. Но по теореме о структуре решения, этого не достаточно для n -мерного базиса. Дополним до фундаментальной системы решений квазиполиномами. Именно, имеет место

Теорема 20 Пусть λ - корень кратности k . Тогда $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$ - решения уравнения $Lx = 0$.

Доказательство.

Пусть $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. Рассмотрим $x = t^m e^{\lambda t}$. По обобщенной формуле Лейбница для высших производных произведения, получаем

$$\frac{d^\nu x}{dt^\nu} = \sum_{i=0}^{\nu} C_{\nu}^i \cdot (t^m)^{(\nu-i)} \cdot (e^{\lambda t})^{(i)}$$

(доказать можно по индукции, как и бином).

Заметим, что

$$t^k e^{\lambda t} = \frac{d^k(e^{\lambda t})}{d\lambda^k}$$

Отсюда получаем

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}(t^m e^{\lambda t}) = \frac{\partial^{\nu+m}(e^{\lambda t})}{\partial t^\nu \partial \lambda^m}$$

Теперь подставим квазимногочлен в уравнение:

$$L(t^m e^{\lambda t}) = x^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i x^{(n-i)} = (t^m e^{\lambda t})_t^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i (t^m e^{\lambda t})_t^{(n-i)} =$$

Пользуясь нашим замечанием, имеем

$$= ((e^{\lambda t})_{\lambda}^{(m)})_t^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i ((e^{\lambda t})_{\lambda}^{(m)})_t^{(n-i)} =$$

Поменяем местами порядок дифференцирования, и тогда получим

$$= L(e^{\lambda t})_{\lambda}^{(m)} = (e^{\lambda t} \cdot \chi(\lambda))_{\lambda}^{(m)} =$$

Пользуясь формулой Лейбница, получаем

$$= \sum_{j=1}^m C_m^j \chi_{\lambda}^{(j)} (e^{\lambda t})_{\lambda}^{(m-j)} = \sum_{j=1}^m C_m^j \chi_{\lambda}^{(j)} t^{m-j} e^{\lambda t}$$

причем это тождественно равно нулю для всех m , меньших кратности λ . \square

РАССКАЗАТЬ ПРО ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

12.1 Практика

№701. $y''' + a_1(t)y'' + \dots + a_3(t)y = 0$ с частными решениями $y_1 = x_1, y_2 = \frac{1}{x}$. Как решать уравнение третьего порядка? Ввести замену $y(x) = u(x)y_1$. Получим уравнение

$$u'' + b_1(t)u' + b_2(t)u = 0$$

$y_2 = u_{\text{частное}}y_1, u = t(x)u_{\text{частное}} =$

Сведено к формуле Остроградского-Лиувилля (чутьооо)

№524. $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0$ - уравнение типа 21. Ищем решение в виде $x_i = e^{\lambda t}$. Характеристическое уравнение $\lambda^3(\lambda - 3)^2 = 0$, корни $\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_{4,5} = 3$.

Ответ: $x(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot t + C_3 \cdot t^2 + C_4 e^{3t} + C_5 t e^{3t}$.

№517. $y'' + 4y = 0$. Характеристический многочлен $\lambda^2 + 4 = 0$, корни $\lambda = \pm 2i$. Запишем ФСР: $y_1 = e^{2ix}, y_2 = e^{-2ix}$.

Ответ: $y(x) = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix}$. Ответ комплексный, что может вызвать нарекания со стороны физически настроенных людей. Договоримся, что если коэффициенты уравнения действительные, то мы будем рассматривать только действительнзначные решения типа $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (поэтому нельзя прятать i в константы интегрирования).

Проведем овеществление этого решения. Вспоминаем формулу Эйлера:

$$e^{\alpha+i\varphi} = e^{\alpha}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Тогда имеем

$$y_1 = e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x, \quad y_2 = e^{-2ix} = \cos 2x - i \sin 2x$$

Перейдем к базису, в котором не будет комплексных чисел:

$$y'_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \cos 2x, \quad y'_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = \sin 2x$$

Проверяя вронскиан, убеждаемся, что эти функции - также фундаментальная линейно независимая система решений. Поэтому альтернативная форма ответа: $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

№518. $y''' - 8y = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 8 = 0$. Корни:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1 \pm i\sqrt{3}$$

Запишем ФСР бесплатную (прямо из решения) и овеществленную:

$$\begin{cases} e^{2x} \\ e^{(-1+i\sqrt{3})x} \\ e^{(-1-i\sqrt{3})x} \end{cases} = \begin{cases} e^{2x} \\ e^{-x} \cos(\sqrt{3}x) \\ e^{-x} \sin(\sqrt{3}x) \end{cases}$$

Ответ: $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \cos(\sqrt{3}x) + C_3 e^{-x} \sin(\sqrt{3}x)$

№531. $y''' - 3y' + 2y = 0$. Характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$.
Корни: $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -2$.

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 t e^x + C_3 e^{-2x}$.

№577. Линейное неоднородное уравнение $y'' = y = \frac{1}{\sin x}$. Решим методом вариации постоянных. Сначала - общее решение однородного уравнения: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Считая, что C_1, C_2 - функции от x , получаем уравнение

$$= \frac{1}{\sin x}$$

Занулили $C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0$, потому что захотели.

Получаем

$$C_2(x) = \int \frac{\cos}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C_2^*$$

?? ищем частное, а получаем общее лол

Ответ: $y(x) = (-x + C_1^*) \cos x + (\ln |\sin x| + C_2^*) \sin x$.

Список литературы

- [1] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения - М.: МЦ-НМО, 2018. - 344 с.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика в 10 т. Т.I: Механика - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 224 с.