Содержание

Определение 1 *Пусть X - множество. Топологией на X называется семейство подмножеств $\tau \in \mathcal{P}(X)$, называемых открытыми множествами (данной топологии), такое, что:*
1. $X, \varnothing \in \tau$
2. $U_1, \dots U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau$
3. $\{U_i \mid i \in I\} \subset \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \tau$

То есть, топологии принадлежит само множество и пустое множество, пересечение конечного числа множеств и объединение любого числа множеств из топологии.

Пример. Докажем, что открытые множества в смысле евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$ - топология. Очевидно, открыто само $\mathbb{R}^n$, также открытои пустое множество. Открытость пересечения доказывается тем, что наименьшая эпсилон-окрестность принадлежит всем множествам,то есть лежит в их пересечении, слеовательно, оно открыто. Для объединения: для каждой точки найдется множество, в которое она входит с окрестностью.

Определение 2 *Тривиальная топология -* $\tau_t = \{X, \varnothing\}$
Дискретная топология - $\tau_0 = \mathcal{P}(X)$

Любая инетерсная топология содержит тривиальную и содержится в дискретной.

Пример. Множества, симметричные относительно выбранной прямой в евклидовом пространстве,образуют топологию.

Пример. Множество эпсилон-окрестностей нуля $\tau = \{D_\varepsilon(0) \mid \varepsilon > 0\} \cup \{X, \varnothing\}$ - топология.

Пример. Топология Зарисского - топология множеств, дополнительных к конечным множествам (для конечных пространств совпадает с дискретной).

Пример. Пусть $f : X \to X$ - биекция. Докажем, что $\tau_f = \{U \subset X \mid$

1 База топологии

Определение 3 *Пусть (X, τ) - топологическое пространство Семейство $\Sigma = \{W_\beta \subset X \mid \beta \in B\}$ - база топологии, если удовлетворяет двум условиям:*
1. $\Sigma \in \tau$ $\forall W_\beta \in \Sigma$ *2. Любое открытое подмножество X можно представить в виде объединения некоторых подмножеств из Σ:* $\forall U \in \tau \exists W_\alpha \in \Sigma,\ \alpha \in A \subset B : U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} W_\alpha$

Пример. В обычной (евклидовой) топологии множество $\Sigma = \{D_r(a) \mid a \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ является базой топологии. Действительно, проверим аксиомы:
1. Открытая окрестность открыта.
2. По определению обычной топологии,каждая точка в открытом множестве содержится в нем с некоторой окрестностью. Значит, объединение этих окрестностей дает это множество. Более формально, $\forall u \in \tau, \forall x \in U \Rightarrow \exists D_{\varepsilon_x}(x) : D_{\varepsilon_x}(x) \in U$. Очевидно доказывается. что

$$\boxed{\bigcup_{x \in U} D_{\varepsilon_x}(x) = U}$$

Замечание. Если к базе добавить произвольное открытое множество, то новое множество также будет базой.
Упражнение. Привести пример двух баз евклидовой топологии на плоскости, которые не пересекаются с обычной базой (открытых шаров). (Решение: например, база из открытых квадратных или звездчатых окрестностей).
Пример. В $(\mathbb{R}^2, \tau_{MN})$, $\Sigma_{MN} = \{(b, b^*) \mid b \in\}$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Пример. Топология ираациональных точек на прямой $(\mathbb{R}, \tau_{im})$, $\tau_{im} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. Множество иррациоанльных точек не является базой, поскольку их объединение не содержит всю прямую. Решение: добавить саму прямую. !!!!!!!!!!!!

Теорема 1 *(критерий базы в топологическом пространстве)*
Пусть (X, τ) - опологическое пространство, и семейство множеств удовлетворяет условию $\sigma \subset \tau$. Σ является базой топологии тогда и только тогда, когда $\forall u \in \tau, \forall x \in U \exists W_{\beta_0} \in \Sigma : x \in W_{\beta_0} \subset U$

Доказательство. Пусть Σ - база топологии. Тогда любое открытое множество можно представить в виде объединений множеств из базы. Значит, для $x \in U$ найдется множество из базы, в котором лежит x.
Обратно. Множесто Σ удовлетворяет первой аксиоме базы по определению. Докажем выполнение второй аксиомы. Для любой точки в открытом множестве по условию теоремы найдется окрестность из Σ, лежащая в открытом множестве. !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! $\square$

Теорема 2 *(критерий базы на множестве)*
Пусть X - произвольное множесто, $\Sigma = \{W_\beta \subset X \mid \beta \in B\}$ - семейство подмножеств из X. ЧТобы на X существовала топология с

данной базой, необходимо и достаточно выполнения двух условий:
1. $X = \bigcup\limits_{\beta \in B} W_\beta$
2. Для любых множеств из базы найдется множество, лежащее в их пересечении и содержащее произвольную точку оттуда.

Доказательство. Необходимость. Пусть Σ - база некотрой топологии (X,т). Из акиомы базы (2) следует,что что X есть объединение множеств из Σ. значит, выполняется первое условие теоремы. Докажем второе условие. Достаточно взять пересечение двух множеств из базы. Так как это открытые множества, его также можно представить в виде объединения множеств из базы, и хотя бы в одном из которых лежит фиксированная точка (по определению объединения).
Достаточность. Докажем, что всевозможные объедения множеств из Σ является топологией. пусть это есть τ. Проверим аксиомы топологии:
1. Пустое множество принадлежит всему, чему надо. Все простарнство лежит там по условию теоремы. 3. Пусть

□

Лемма. Две топологии с общей базой совпадают.
Доказательство. Пусть τ, ω - две топологии на множестве X, имеющие общую базу $\Sigma = \{W_\beta \subset X \mid \beta \in B\}$. Для всех множеств из топологии τ они являются объединением множеств из базы, но поскольку это объединение открытых множеств, то оно открыто, и является элементом топлогии ω. Итак, $\tau \subset \omega$, аналогично и в другую сторону.
Замечание. Согласно этой лемме, база топологии однозначно определяет топологию. Следовательно, критерий базы на множестве дает способ определения новых топологий.

2 Метрическая топология

Напомним определение метрического пространства.
Пусть функция $\rho \colon M \times M \to \mathbb{R}$ удовлетворяет трем условиям:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(x, z) \leqslant \rho(y, x)$

Тогда множество (M, ρ) называется метрическим пространством с метрикой ρ.

Определение 4 *Пусть (M, ρ) - метричсекое пространство. Множество*

$$D_r(a) := \{x \in M \mid \rho(x, a) < r\}$$

называется открытым шаром радиуса r

Очевидно, центр шара принадлежит ему в любой метрике.

Определение 5 *Пусть (M, ρ) - метрическое пространство. Множество весвозможных шаров с разными уентрами и радиусами являются базой Σ_ρ (единственной) топологии, которая называется метрической топологией.*

Докажем, что множество шаров - база. Применим критерий базы на множестве.
1. Возьмем объединение всех шаров. Так как любой шар содержит свой центр, то все точки множества лежат в объединении шаров.
2. Для пересекающихся шаров возьмем минимальную радиус до границы шара.
Пример. Евклидова топология - пример метрической топологии для стандартной евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$. Дискретная топология - топология, порожденная дисретной метрикой.
Упражнение. Докажите самстоятельно, что евклидова метрика индуцирует евклидову топологию (используйте критерий базы) (вставить картинку.)
Решение. Докажем, что минимум из возможных расстояний до границы шара - искомый радиус окрестности, лежащей в пересечении шаров. Рассмторим точку в этой окретсности. Она лежит в обоих шарах. (вставить выкладку)
Замечание. Мы будем использовать обычную топологию и рисовать картинки, котоыре помогут доказывать различные теоремы, но все доказательства будут даны для произвольных метричсеких простарнств.
Прмиер. Рассмотрим множество непрерывных функций на отрезке. введем следующую метрику: $\rho(f, g) = max|f(x) - g(x)|$. Оперделение корректно, посокльку на отрехзке супремум непрерыной функции достигается. Какие (картика) функции лежат в окретсности произвольной функции $y = f(x)$? Это - непрерывные функции, заключенные в области $f(x) - r, f(x) + r$
Замечание. Если Σ - база топологии τ, то τ совпадает с семейством всевозможных объединений множеств из базы.

2.1 Метризуемость топологических пространств.

Определение 6 *Топологическое пространство называется метризуемым, если на множестве существует метрика,идуцирующая эту топологию.*

Мы уже доказали, что обычная топология метризуема. Не все, однако, топологические пространства метризуемы.

Определение 7 *Пусть X - топологическое пространство, $H \subset X$. Окрестностью подмножества в X называется подмножество, содержащее его. Окрестностью точки называется любое открытое множество, содержащее точку (обозначение: U_x)*

Определение 8 *Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если любые две точки обладают непересекающимися окрестностями.*

Теорема 3 *Любое метризуемое топологическое пространство хаусдорфово.*

Доказательство. $\square$

3 Свойства замкнутых множеств

Теорема 4 *Пусть (X, τ) - топологическое прространство, и $\mathcal{F} = \{CU \mid U \in \tau\}$ - совокупность всех замкнутых множеств. Тогда выполняются условия:*
F1. $\varnothing, X \in \mathcal{F}$
F2. Объединение любых двух замкнутых замкнуто.
F3. Пересечение любого семейства замкнутых замкнуто.

Доказательство. Применим законы де Моргана к аксиомам топологического пространства.
1. $X = C\varnothing,\ \varnothing = CX$
2. Дополнение к объединению открытых замкнуто, и есть пересечение дополнений.
3. Дополнение к пересечению двух открытых замкнуто, и есть объединение дополнений. $\square$

Замечание. Как мы видим, замкнутые множества имеют свойства, очень

похожие на свойства топологии. На самом деле, топологию можно однозначно задать как семейство множеств, удовлетворяющих свойствам замкнутых множеств, и объявить открытыми дополнения к ним.
Замечание. Из аксиомы τ_2 по индукции вытекает, что пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто, и объединение любого числа замкнутых множеств замкнуто.
Пример. Рассмотрим обычную топологию на прямой, и рассмотрим интервалы, верхняя граница котрых минорируется каким-то числом. Тогда в бесконечном пересечении имеем отрезкоинтервал. Пример показывает, что пересечение любого числа открытых уже не обязательно открыто.

Теорема 5 *(лемма об открытом множестве)*
Пусть (X, τ) - топологическое пространство. Множество открыто в топологии тогда и только тогда, когда любая точка содержится в нем с некоторой окрестностью.

Доказательство. Возьмем любую точку $x \in U$. Положим окрестность точки само множество U; очевидно, $U \subset U$.
Обратно, пусть каждая точка входит в U вместе с какой-то окрестностью. Их объединение лежит в U, и ещё и U лежит в нем, так как окрестность каждой точки содержит её. □

3.1 Классификация точек относительно подмножества

Пусть (X, τ) - топологическое пространство, $A \subset X$ - непустое подмножество. Серия определений:

Определение 9 *Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества A, если существует окрестность этой точки, лежащая в A.*

Определение 10 *Точка $x \in X$ внешняя для множества A, если она внутренняя для его дополнения.*

Определение 11 *Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения, если для любой окрестности $U \cap A \neq \varnothing$*

Определение 12 *Точка $x \in X$ называется предельной/точкой накопления, если в любой проколотой окрестности точки найдется точка из A.*

Определение 13 *Точка $x \in X$ - граничная для множества A, если в любой её окрестности лежат как точки из A, так и из $X \setminus A$.*

Определение 14 *(семинар) Точка $x \in A$ - изолированная, если существует окрестность, в которой нет других точек из A.*

Определение 15 *Возьмем любое подмножество A топологического пространства X. Объединение всех внутренних точек A называется внутренностью A (обозначается A_0, $IntA$). Объединение всех точек прикосновения называтся замыканием A (обозначение: $\overline{A}$). Множество всех граничных точек - граница A. (обозначение: FrA, ∂A)*

Переходим к теоремам.

Теорема 6 *(свойства замыкания)*
Замыкание множества обладает следующими свойствами:
1. $A \subset \overline{A}$, причем замыкание замкнуто.
2. Если $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$.
3. Замыкание множество - минимальное по включению замкнутое множество, содержащее A.
4. $\overline{A} = \bigcap F_\sigma$ - замыкание есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.
5. Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

Доказательство. 1. Рассмотрим $x \in A$. Найдем окрестность $x \in U_x$. Они пересекаются, и значит, $A \subset \overline{A}$. Докажем замкнутость замыкания. По лемме об открытом множестве, точка из дополнения к замыканию имеет окрестность, не пересекающуюся с A. Рассмотрев точку из этой окрестности, заметим, что она тоже не лежит в замыкании. Итак, мы показали, что дополнение к замыканию открыто, так как каждая точка лежитв нем с некоторой окрестностью.
2. Пусть $A \subset B$. Возьмем любую точку из замыкания. Она еть точка накопления для A и следоваельно для B (по включению), значит, она лежит в замыкании B.
3. Предположим, что существует замкнутое $F : A \subset F \subset \overline{A}$. Это эквивалентно тому, что существует точка из замыкания, но не лежащая в F. Она лежит в дополнении F, но лежит и в замыкании A, значит, является точкой накопления, но тогда $CF \cap F \neq \varnothing$ - противоречие.
4. Рассмотрим пересечение всех замкнутых, содержащих множество A. Оно замкнуто по свойтсву замыкания. Также, по свойству замыкания, $\overline{A}$ - одно их них, так как замкнуто. Но также и все пересечение лежит в замыкании. Обратно, A входит в пересечение. То есть в нем лежит и замыкание. Имеем в итоге равенство.

5. Пусть множество совпадает с замыканием. Тогда оно замкнуто по первому пункту теоремы. Обратно, пусть А замкнуто. По свойству 3, замыкание - минимальное замкнутое по включению. Но это и есть А. $\square$

Теорема 7 *(свойства внутренности)*
Пусть A - подножество топологического пространства.
1. $A_0 \subset A$, причем внутренность открыта.
2. A_0 - максимально открытое по включению, лежащее в A.
3. Внутренность есть объединение всех открытых множеств, лежащих в A.
4. $A = A_0 \Leftrightarrow A$ открыто.

Доказательство. 1. A_0 лежит
2. Рассмотрим открытое множество $U \subset A$
3. Рассмотрим объединение множеств A_α. Это - открытое множество, которое лежит в $A \Rightarrow$ лежит в A^0. Есть и обратное включение: рассмтрим $x \in A^0 \subset A$. Значит, сущетсвует $A_{\alpha_0} = A^0 \Rightarrow A^0 \subset \bigcup A_\alpha$. Итак, доказано равенство.
4. Пусть $A^0 = A$ - открыто по свойству 1. Обратно, если A открыто, то $A = A^0$ по свойству 2. $\square$

Теорема 8 *(свойства границы)*
Пусть $Fr\,A$ - граница подмножества A топологического пространства (X, τ).
1. $Fr\,A = \overline{A} \cap \overline{CA}$ - замкнутое множество.
2. $Fr\,A = \overline{A} \setminus A^0$

Доказательство. 1. В любой окрестности любой точки границы содержатся как точки из A, так и из CA. Значит, граничные точки являются точками прикосновения, то есть принадлежат замыканию A. С другой стороны, они приндлежат замыканию дополнения множества A по тем же соображениям.
2. Рассмотрим $x \in Fr\,A$. Это точка, которая принадлежит как замыканию множества, так и замыканию его дополнения. Значит, это не внутренняя точка. То есть $x \in Fr\,A \iff x \in \overline{A} \setminus A^0$ $\square$

3.1.1 Примеры weird и fancy топологий

Пример. Нарисем бабочку на плоскости, у которой кусок границы открыт. Значит, имеем $\mathbb{R}^2, \tau_{\text{об}}$. В ней оно ни открыто, ни замкнуто. В топологии отражения относительно OY (вспоним, что в неё все открытые множества открыто-замкнутые!). Внутренность - брюшко бабочки, замыкание - вся бабочка, граница - их разность. Топология Зарисского. Замыкание -

дописать то что было!!!!!!!!!!!!!!!!

Теорема 9 *Об эквивалентности определений непрерывного отображения*

Доказательство. 1 $\Rightarrow$ 2. Выполняется теоретико-множестве нное соотношение $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)\ \forall B \subset Y$. Пусть f - непрерывно по определению 1. Рассмотрим замкнутое множество в F в $Y, \Omega \Rightarrow X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F) \in \tau$ - следовтаельно, выполняется определение 2.
2 $\Rightarrow$ 1. Аналогично предыдущему.
1 $\Rightarrow$ 3. Рассмотрим любую точку $x \in X,\ y = f(x)$, и рассмотрим любую окрестность V_y. Пусть U - прообраз окретсночти V_y. Оно открыто по определению 1. И значит, это окрестность икса. Значит, $f(u) \subset V_y$.
3 $\Rightarrow$ 4. Пусть Σ - база в τ, σ - база в Ω. По определению 3 непрерывности, существует окрестность икса, чьим образом является базовая окрестность игрека. Но эта окрестность представляется в виде объединения элементов базы. В одном из них лежит икс следовательно, выполняется условие.
4 $\Rightarrow$ 1. Воспользуемся леммой об открытом множестве. Покажем, что $U := f^{-1}(V)$ открыто в (X, τ). $\forall x \in U : y = f(x) \in V$ по критерию базы в топоплогическом пространстве. $\exists V_y \in \sigma : y \in V_y \subset V$ значит, по определению 4 существует открытое множество из базы, $W_x \in \Sigma : f(W_x) \subset V_y \subset V \implies W_x \subset f^{-1}(V) = U$. Таким образом, U содержит вместе со всякой точкой окрестность $\Rightarrow$ оно открыто. $\square$
Пример. (рисунок с пространствами). $f\colon (X, \tau) \to (Y, \Omega)$ - непрерывное отображение по определению 3.

3.2 Непрерывные отображения метрических пространств

Определение 16 *Пусть* $(X, d, \tau_d),\ (Y, \rho, \tau_\rho)$ *- метрические топологические пространства. Отображение* $f\colon X \to Y$ *непрерывно в точке* $x \in X$, *если* $\forall D_\varepsilon(y) \exists D_\delta(x) :\ f(D_\delta(x)) \subset D_\varepsilon(y)$.

Теорема 10 *Это определение эквивалентно предыдущим определениям непрерывности.*

Доказательство. Применим определение для баз топологй. Шары образуют базу метрической топологии.

$5 \Rightarrow 4$.
$4 \Rightarrow 5$. Рассмотрим шар в точке y. По определению 4, найдется шар (необязательно с центром в x), образ которого лежит в окрестности игрека. Но тогда найдется и шар с центром в x, лежащий в этом шаре. Покажем, что образ этого шара также лежит в окрестности y. Используем неравенство треугольника: $d(z, a) \leqslant d(z, x) + d(x, a) < r - d(x, a) + d(x, a) = r$, значит, $f(D_\delta(x)) \subset f(D_r(a)) \subset D_\varepsilon(y)$. $\square$

Какова связь с непрерывностью в смысле матанализа? Рассмотрим $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с обычной топологией. Тогда обычноя непрерывность $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon$. Можно нарисовать рисунок.
Можно налить воды, позвененть ключами
Одиночество есть человек в квадрате
Вывод: в мат. анализе используется определение 5, так как $\mathbb{R}$ - метрическое топологическое пространство.

Теорема 11 *Композиция непрерывных функций непрерывна*

Доказательство. Докжем эту классическую теорему анализа чисто топологически. Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ - непрерывны. Докажем, что $g \circ f$ - тоже непреывно. Рассмотрим любое открытое множество в Z. Для него рассмотрим $U = (g \circ f)^{-1}(w) = f^{-1}(g^{-1}(w))$. Так как прообраз открытого открыт, $g^{-1}(w)$ - открыт в Y, и значит обратная композициия тоже открыта. $\square$
Пример. Любая сложная функция непрерывна, например, $f(x) = 2^{\cos 57(x-3) + \ln 8 - \sin x}$ x^170. По индукции предложение распространяется на любое конечное число функций.

Дадим несколько определений. Пусть (X, tau) - топологическое пространство, $A \subset X$, $f\colon (X, \tau) \to (Y, \Omega)$ - отображение топологических пространств.

Определение 17 *Сужение отображения - отображение* $f_A\colon (A, \tau_A) \to (Y, \Omega)$ *(где τ_A - индуцированная топология)*

Определение 18 *Приведение отображения - отображение* $f_1\colon (X, \tau) \to (f(X), \Omega_{f(x)})$ *(в частности, совпадает в случае сюръекции.)*

Определение 19 *Приведение отображения -*

Теорема 12 *Сужение непрерывного отображения непрерывно.*

Доказательство. Для любого открытого его прообраз открыт. $\square$

Теорема 13 *Приведение непрерывного отображения непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим открытое множество W в индуцированной топологии на образе X. Это - след открытого множества V в Y, чей прообраз открыт. Но $f^{-1}(W) = f^{-1}(V)$, значит, $f_1^{-1}(V) = f^{-1}(W)$ так как образ X. $\square$

Теорема 14

Доказательство. $\square$