

Дифференциальные уравнения

Гуревич

Содержание

1	Однородное уравнение	2
2	Обобщенно-однородное уравнение	3
3	Уравнение в полных дифференциалах	3
3.0.1	Геометрический смысл решения уравнения в полных дифференциалах	4
4	Уравнения и ряды Тейлора	6
5	Практика	6
6	Численные методы	7
7	Существование и единственность решения	8

1 Однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Как искать его решение? Заменой $u(t) = \frac{x}{t}$. Тогда уравнение перепишется в виде $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$. В нем переменные разделяются: $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dt}{t}$. Итак, типы уравнений:

1. С разделяющимися переменными
2. Приводящиеся к виду $\frac{dx}{dt} = f(ax + bx + c)$
3. Приводящиеся к виду $(a_1x + b_1t + c_1)dx + (a_2x + b_2t + c_2)dt = 0$

Подумаем, можно ли это последнее привести к однородному. Добавим условие $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ (иначе система уже однородна). В общем, если эти две прямые пересекаются в точке (x_*, t_*) , то можно ввести новые переменные, передвинув эту точку в начало координат: $x \mapsto x - x_*$, $t \mapsto t - t_*$. Тогда система перепишется без c_1 , c_2 , и таким образом будет однородной. Если прямые не пересекаются, то прямые либо совпадают, либо параллельны. Тогда введем замену (для любой прямой) $z(t) = a_1x + b_1t + c_1$. Так как прямые параллельны, то $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, значит, мы можем выразить вторую прямую: $a_2x + b_2t + c_2 = \frac{1}{k}(a_1x + b_1t + kc_2) = \frac{1}{k}(z - c_1 + kc_2)$. Уравнение приводится к виду $z(t)dx + \frac{1}{k}(z - c_1 + kc_2)dt = 0$. Но у нас все равно много переменных. Выразим dx через z :

$$z\left(\frac{dz - b_1dt}{a_1}\right) + \frac{1}{k}(z - c_1 + kc_2) = 0$$

Умножим на a_1k :

$$kzdz = kb_1zdt - a_1zdt - a_1(kc_2 - c_1)dt$$

Домножим на $\frac{1}{kzdt}$:

$$\frac{dz}{dt} = \left((b_1 - \frac{a_1}{k})z - a_1(kc_2 - c_1)\right)\frac{1}{z}$$

Finally, уравнение с разделяющимися переменными! ПОБЕДА!

2 Обобщенно-однородное уравнение

Определение 1 Обобщенно-однородное уравнение - уравнение вида

$$M(x, t)dx + N(x, t)dt = 0$$

причем M, N - такие, что $\exists n \in \mathbb{R}$: если $x = z^n(t)$, то уравнение $M(z^n, t)nz^{n-1}dz + N(z^n, t)dt = 0$ однородно.

Пример. Испортим однородное уравнения, чтобы сделать его обобщенно-однородным. Роман придумал, чел хорош.

Сведем и этого зверя к разделяющимся переменным.

$$\begin{cases} n(kz)^{n-1}M((kz)^n, kt) = k^m M(z^n, t)nz^{n-1} \\ N((kz)^n, kt) = k^m N(z^n, t) \end{cases}$$

3 Уравнение в полных дифференциалах

Напомним, что полный дифференциал $dF(x, y)$ C^1 -гладкой функции равен $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$.

Определение 2 Уравнение в полных дифференциалах - уравнение вида

$$dF(x, y) = 0, F \in C^2(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Если мы знаем саму функцию, то решение находится мгновенно: $dF(x, y) = const$. Правда, оно неявное. Выразим $y = y(x)$ по теореме о неявной функции.

Пример. $x^2 \sin t dt + 2x \cos t dx = 0$

Уравнение является уравнение в полных дифференциалах, если существуют такие функции, что $M = \frac{\partial F}{\partial x}$, $N = \frac{\partial F}{\partial y}$

Теорема 1 (необходимое условие представления в полных дифференциалах)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Достаточное условие - $M_y = N_x$ в односвязной области

Доказательство. \square

Как подбирать такие функции? Мы знаем, что $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$. Проинтегрируем это равенство по x . Имеем $F = \int M(x, y)dx + \varphi(y)$. Проведем то же самое по переменной y : $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x, y)dx) + \varphi' = N(x, y)$, откуда $\varphi = \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y}(\int M dx) \right) dy$. Чтобы проверить себя при решении, помним, что φ не зависит от x ! Итак,

$$F = \int M(x, y)dx + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M dx \right) \right) dy$$

3.0.1 Геометрический смысл решения уравнения в полных дифференциалах

Так как $z = z(x, y)$ - какая-то поверхность, то запись $z = \text{const}$ - это линии уровня, которые можно спроецировать на плоскость переменных и получить интегральные кривые.

Пример (модель Лотки-Вольтерра). Пусть $x(t)$ - плотность карасей, $y(t)$ - плотность щук в некотором пруду. Щуки сдерживают рост карасей, но от количества карасей зависит также и количество щук. Запишем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + ex) \end{cases}$$

Лотка придумал эту систему для биоценозов, а Вольтерра - для химических реакций.

Давайте решим эту систему. Её расширенное фазовое пространство, вообще говоря, трехмерное, поэтому будем рассматривать фазовые кривые - проекции интегральных на плоскость независимых параметров. Они ориентированы в направлении роста параметра t . Найдём эти кривые, найдя решение уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-cy+exy}{ax-bxy}$. Переменные разделяются:

$$\frac{(a - by)dy}{y} = \frac{(-c + ex)dx}{x}$$

Представим его в полных дифференциалах:

$$d(a \ln y - by + c \ln x - ex) = 0$$

Значит, решение имеет вид $a \ln y - by + c \ln x - ex = h = const$. Выглядит очень сложно, но давайте попробуем построить изолинии. Введем функцию $F = \ln(y^a x^c) - by - ex$, и найдем её изолинии. Сначала найдем критические точки: $(x_*, y_*) = (\frac{c}{e}, \frac{a}{b})$ (получилась единственная точка). Определим тип критической точки (составим гессиан, посчитаем его знакоопределенность); получим, что это точка максимума. Линии уровня - какие-то окружности/эллипсы.

Упражнение. Доказать, что фазовые кривые замкнуты.

Теперь нам надо понять, куда закручиваются эти линии, как они ориентированы. Они закручиваются против часовой стрелки вокруг критической точки, кстати, область решения - первая координатная четверть. Чтобы избежать проблем с дискретностью, наши переменные - это плотность населения пруда.

Определение 3 Автономное ДУ - дифференциальное уравнение, правая часть которого не зависит от времени.

Автономные уравнения не могут быть динамическими системами, так как они не зависят от времени, но можно искусственно этого достичь.

Пример. Нелинейный консервативный осциллятор. Рассмотрим маятник с координатами φ - отклонение от положения равновесия. Рассмотрим плоские колебания маятника массой m и длиной l . При повороте на малый угол движение можно представить как прямолинейное движение по касательной. Запишем второй закон Ньютона в проекции на касательную:

$$\vec{\tau} : m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

Пусть Δx - длина дуги окружности, примерно равная малой части касательной. Тогда $\Delta x = l \Delta \varphi + o(\Delta \varphi)$. Получим уравнение $\frac{dx}{dt} = l \frac{d\varphi}{dt}$. Finally,

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi$$

- уравнение колебания маятника. Оно нелинейное из-за синуса. Оно имеет порядок 2, значит, нам надо зафиксировать начальные условия: $\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$. Уравнение тогда превратится в систему

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = -\omega^2 \sin \varphi \end{cases}$$

Кстати, если мы напишем функцию Лагранжа и напишем уравнение Лагранжа для него, то получим это же уравнение.

Начнем решение. Сделаем замену $\dot{\varphi} = \psi$. Теперь введем фазовое пространство угол-скорость таким образом, чтобы близкие точки были близки. В угловых координатах мы склеим точки $\pi, -\pi$ у координат углов (точнее, создадим факторпространство по отношению $(\varphi, \psi) \sim (\varphi + 2\pi k, \psi)$). Получим, что фазовое пространство - цилиндр. Любая замкнутая кривая - это некоторая траектория (вообще говоря, определяемая уравнением). На цилиндре есть два типа замкнутых кривых - стягиваемые в точку и нестягиваемые. Вторые отвечают за движение через верх.

Продолжаем решение. Из системы имеем $\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{\omega^2 \sin \varphi}{\psi}$. Полная энергия равна константе: $\frac{m\psi^2}{2} + \frac{mg}{l}(1 - \cos \varphi) = h$. Это мы вывели из формы уравнения в полных дифференциалах. В общем, решаем. Получим

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(h - \frac{mg}{l}(1 - \cos \varphi) \right)}$$

Нарисуем фазовые траектории, и ещё функцию $F(\varphi) = \frac{mg}{l}(1 - \cos \varphi)$. Уровни постоянной энергии - одномерные торы. Как и обычно с функцией Гамильтона. Из анализа фазовых траекторий можно выяснить, что период колебаний растет по мере увеличения энергии. Также есть два состояния равновесия: верхнее (неустойчивое) и нижнее (устойчивое).

4 Уравнения и ряды Тейлора

Пусть $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$. Рассмотрим $x(t_0) = x_0$. Разложим в ряд Тейлора: $x(t) = x(t_0) + \frac{dx}{dt}(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$. Отбросив члены высшего порядка (прямо как топовые физики), получим приближенное решение. Приближенное решение можно итерировать, и это будет широко известный **метод Эйлера** (первого порядка). $t_{k+1} = t_k + h$, $x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k)h$

5 Практика

Пример (№111). $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$. Уравнение однородно (проверим умножением на k). Значит, делаем замену $u(x) = \frac{y}{x}$. Имеем $dy = u \cdot dx + du \cdot x$. Переменные разделяются: $\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{u}}$

Пример (№113). $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy$. Переносим начало координат в точку пересечения.

Пример (№126). $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$. Это - обобщенно-однородное уравнение, то есть приводится к однородному заменой $y = z^m(x)$. $y' = mz^{m-1}z'$ Далее $mz^{m-1}z' = z^{2m} - \frac{2}{x^2}$ Теперь уравнение однородно. Введем замену $\frac{z}{x} = u$, $z = ux$. Получим $u'x + u = -1 + 2u^2$

Пример (№128). $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$. Пусть $y = z^m$. Идея: сделать так, чтобы под корнем степень у x и y была одинаковой.

Пример (№) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$. Подберем функцию, полным дифференциалом которого является это выражение; получим $F(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$. Решение: $F = C = const$

Пример (№192). $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy$. Мы должны показать, что вторые производные равны. Тогда это значит, что $F_{xy} = F_{yx}$, и такая функция вообще существует на некотором диске (где правая часть не обращается в ноль). Интегрируем два раза, и найдем эту функцию: $F(x, y) = x - y^2 \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{y^2}{2} + C_0$. Итак, ответ: $F = const$

Пример (№202). $y^2 dx + (xy + \operatorname{tg} xy)dy = 0$. Является ли однородным, в полных дифференциалах? Давайте раскроем скобки и сгруппируем: $y(ydx + xdy) + \operatorname{tg} xy dy$. Это то же, что и $\frac{d(xy)}{\operatorname{tg} xy} + \frac{dy}{y} = 0$. Домножим на $\frac{1}{y \operatorname{tg} xy}$ и хаваем уравнение в полных дифференциалах бесплатно. То, на что домножили - интегрирующий множитель.

6 Численные методы

Сегодня поговорим о численных методах решения дифференциальных уравнений. Именно, задача Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

имеет решение какое-то. Поскольку

$$x_{k+1} = x(t_{k+1}) = x(t_k + h) = x(t_k) + \frac{dx}{dt} \Big|_{t_k} h + \frac{d^2x}{dt^2} \Big|_{t_k} \frac{h^2}{2} + o(h^3)$$

Если мы рассмотрим конечные приращения h , то получим итеративную формулу

$$x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k)h$$

- метод Эйлера первого порядка, основанный на разложении функции в ряд Тейлора и отбрасывании членов высшего порядка. Таким образом, можно рассмотреть более точные методы, основанные на использовании членов высшего порядка. Например, $\frac{d^2x}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{f(t_k+h, x_k+f(t_k, x_k)h) - f(t_k, x_k)}{h}$. Из этого мы получим метод Штермера. И так далее. Метод Рунге-Кутты - 4го порядка.

Пример. Супер-простая функция:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Это - определение обычной экспоненты. Решим методом Эйлера. Возьмем $t_1 = h$. Далее, $x_1 = 1 + f(t_0, x_0) \cdot h = 1 + h$. Далее, $t_2 = t_1 + h = 2h$, $x_2 = x_1 + f(t_1, x_1) \cdot h = 1 + h + (1 + h)h = (1 + h)^2$. В общем виде, в точке $x_{k+1} = x_k(1 + h) = (1 + h)^{k+1}$ функция будет принимать значение $x_n = (1 + h)^n = \left(1 + \frac{T}{n}\right)^n \rightarrow e^T$. Неслучайно тут вылез замечательный предел - определение экспоненты.

7 Существование и единственность решения

Эту задачу можно решить с помощью ф.п. Пикара. Допустим, у нас есть решение задачи Коши в виде непрерывной функции $f(t, x)$. Тогда мы можем проинтегрировать:

$$\int \frac{dx(t)}{dt} \equiv \int f(t, x) dt$$

Справа стоит набор первообразных:

$$x \equiv x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

Теорема 2 (лемма)

Задача Коши эквивалента решению интегрального уравнения

Доказательство. Пусть $x(t)$ - решение задачи Коши. Тогда при подстановке в уравнение имеем

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv f(t, x(t))$$

Интегрируя, получим $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))d\tau$ - решение интегрального уравнения.

Обратно, пусть $x(t)$ - непрерывное решение интегрального уравнения. Тогда, взяв производную, получим

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

Подставив $t = t_0$ в интегральное уравнение, получим $x(t_0) = x_0$, т.е. $x(t)$ - решение д.у. \square

На самом деле, это обман, так как мы просто записали в другом виде все так же не решаемую задачу. Запишем последовательность Пикара $\{x_k(t)\}$:

$x_0(t) = x_0$, $x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_k(\tau))d\tau$. Теперь нам надо бы доказать, что эта последовательность сходится к решению. Хм, где же нас обманули...

Теорема 3 (Коши-Пикара, или о существовании и единственности задачи Коши)

Пусть $f(t, x)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in D$ существует решение $x(t)$ задачи Коши, определенное на отрезке $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $\delta = \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}$, где $r > 0$ такое, что $B_r \subset D$ (замкнутый шар), $m = \max |f(t, x)|$, $(t, x) \in B_r$. Кроме того, если $\tilde{x}(t)$ - другое решение задачи Коши, определенный на интервале $[t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]$, то существует такое $\delta^* \in (0, \min(\delta, \tilde{\delta}))$, что $x(t) = \tilde{x}(t)$ для $t \in [t_0 - \delta^*, \delta^*]$.

Доказательство. Докажем, что последовательность Пикара корректно определена и её предел - непрерывная функция. Именно, каждый раз, когда мы вычисляем x_k , она непрерывна и не выходит за пределы области D , и поэтому снова интегрируема.

Рассмотрим

$$|x_1(t) - x_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x_0)d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t m d\tau \right| \leq m|t - t_0| \leq m \frac{r}{\sqrt{1+m^2}} \leq r$$

- значит, график функции лежит в B_r , пока $t \in I_\delta$. По индукции доказывается, что $|x_k - x_0| \leq r$, значит, все эти приближения лежат в шаре и непрерывны. Потому что у первообразной есть производная, значит она

непрерывна. Итак, последовательность Пикара корректно определена и её члены - непрерывные функции.

Докажем, что последовательность сходится. Рассмотрим ряд $x_0(t) + x_1(t) - x_0(t) + x_2(t) - x_1(t) + \dots + x_k(t) - x_{k-1}(t) + \dots$. Частичные суммы S_n этого ряда сумма этого ряда как раз равны x_n . Если мы докажем, что если ряд сходится равномерно, то и последовательность Пикара имеет непрерывный предел. Имеем $|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq L|\tilde{x} - x|$, где $L = \max \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|$, $(t, x) \in B_r$.

Итак, $|x_1 - x_0| \leq m|t - t_0|$. Далее $|x_2 - x_1| \leq \left| \int_{t_0}^t (f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_0)) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_0)| d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t L|x_1(\tau) - x_0| d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t \frac{Lm|x_1(\tau) - x_0|^2}{2} d\tau \right| \leq \frac{L^3 m |t - t_0|^3}{6L}$. То есть, $|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m}{L} \frac{L^n (t - t_0)^n}{n!} \leq \frac{m}{L} \frac{L^n \delta^n}{n!}$. Где-то тут мы ссылаемся на теорему Лагранжа о среднем. Итак, мы оценили ряд из модулей сходящимся числовым рядом, следовательно, по признаку Вейерштрасса сумма ряда сходится равномерно:

$$\frac{m}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^n \delta^n}{n!} \Rightarrow \frac{m}{L} (e^{L\delta} - 1)$$

Обозначим $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*(t)$. Тогда $|x^*(t) - x_k(t)| \rightarrow 0$. Теперь рассмотрим разницу $\left| \int_{t_0}^t f(\tau, x^*(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, x_k(\tau)) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t L|x^* - x_k| d\tau$. Правая часть стремится к нулю, значит, и левая тоже. Поэтому, переходя к пределу по t при $k \rightarrow \infty$ в формуле $x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_k(\tau)) d\tau$, имеем $x^* = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x^*(\tau)) d\tau$, то есть x^* - решение интегрального уравнения, а значит и задачи Коши.

Теперь докажем единственность. Пусть на интервале I_δ^* определено два решения, x и x^* . Тогда $|x^*(t) - x(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t (f(\tau, x^*(\tau)) - f(\tau, x(\tau))) d\tau \right| \leq L \int_{t_0}^t |x^*(\tau) - x(\tau)| d\tau$. Пусть $t > t_0$. Положим $\Delta = \int_{t_0}^t |x^*(\tau) - x(\tau)| d\tau$, тогда $\frac{d\Delta}{dt} \leq L\Delta$; $\Delta(t_2) \geq \Delta(t_1)$ для всех $t_2 > t_1 \geq t_0$. Кстати, $\frac{d\Delta}{dt} \leq L\Delta$ Значит,

существует инфинум $T = \inf\{t \geq t_0\}$. Рассмотрим случай, когда $T = t_0$ (самая жесткая оценка). Если это так, то пусть $(t_0 + \varepsilon) = \Delta_\varepsilon$. Тогда $\Delta_\varepsilon > 0$. Поставим задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta}{dt} = L\Delta \\ \Delta(t_0 + \varepsilon) = \Delta_\varepsilon \end{cases}$$

Отсюда $\Delta = \Delta_\varepsilon e^{L(t-t_0-\varepsilon)}$. Для всех $t > t_0$, $\Delta(t) \leq \Delta_\varepsilon e^{L(t-t_0-\varepsilon)}$. Устремим $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда и $\Delta(t) = 0$ в пределе. Рассуждение при $t < t_0$ аналогично. \square

Пример. Что можно сказать о решении задачи Коши для

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = |x| \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Теорема Коши-Пикара не работает в нуле, так как там функция не дифференцируема. Но не обманывают ли нас? $||x_1| - |x_2|| \leq 1 \cdot |x_1 - x_2|$. Модуль - липшицева функция, поэтому условия теоремы работают. А если

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{x} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Производная растет неограниченно, функция не липшицева: $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq L|x_1 - x_2|$ - при приближении к нулю $L \geq \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$. Но это только в нуле. А не в нуле можно \Rightarrow решение существует и единственно. В общем, давайте разрешаем. Получаем $x = \frac{(t+C)^2}{4}$, $t + C > 0$. По условию $x(0) = 0$, откуда $x = \frac{t^2}{4}$. Но ведь ещё есть куча решений типа $x(t_0) = 0$, $x = \frac{(t-t_0)^2}{4}$, и даже $x = 0$.