

Анализ

Галкина


05.09.2022

Оглавление

1	Идеи и номера с практики	5
1.1	Знакопостоянные несобственные интегралы	5
1.2	Знакопеременные несобственные интегралы	6
2	Несобственный интеграл	15
2.1	Основные определения	15
2.1.1	Критерии сходимости несобственного интеграла . .	15
2.1.2	Признаки сравнения в предельной форме	16
2.1.3	Несобственные интегралы, зависящие от параметра	20

Глава 1

Идеи и номера с практики

Идеи Тимура, достойные того, чтобы быть запечатленными. Те места, которые на слух отмечаются словами типа «финт ушами», будут отмечаться знаком «опасный поворот»  в стиле Бурбаки (а не то, что вы подумали).

1.1 Знакопостоянные несобственные интегралы

Для знакопеременных интегралов можно использовать признак сравнения. Обычно сравнение происходит с обобщенной степенной функцией. При этом имеется два различных типа особых точек: на бесконечности и с уходом на бесконечность в точке. Разберем подробнее.

Пример 1. Интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 2. Интеграл

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}} dx$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Пример. Интеграл $\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ сходится, поскольку подынтегральная функция эквивалентна $\frac{1}{x^2}$ - сходящейся штуке.

Пример (№2374). Исследуем на сходимость в зависимости от параметров интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$$

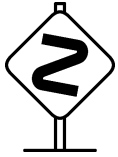
Имеем 2 особые точки: 1 и ∞ , поэтому разобьем область исследования на две части и будем исследовать интеграл \int_{10}^{∞} .

Нам потребуется следующий признак сравнения: для $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{x^\varepsilon} < \ln^\alpha(x) < x^\varepsilon, \quad x > \delta(\alpha, \varepsilon)$$

(доказательство через правило Лопиталя: действительно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\varepsilon} = 0$).
Значит, имеем

$$\frac{1}{x^{p+\varepsilon}} \leq \frac{1}{x^p \ln^q x} \leq \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}$$



Итак, интеграл сходится при $p > 1 + \varepsilon$ и расходится при $p < 1 - \varepsilon$. Так как ε вообще-то произвольный, то и условие сходимости не должно зависеть от него; иначе говоря, интеграл сходится при $p > 1$ и расходится при $p < 1$.

Рассмотрим случай, когда $p = 1$. Имеем

$$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x \ln^q x} dx = \begin{cases} \ln(x) = t \\ dt = \frac{dx}{x} \end{cases} = \int_{\ln 10}^{\infty} \frac{dt}{t^q}$$

Значит, этот интеграл сходится при $q > 1$. Соберем ответ:

$$\begin{cases} 1. p > 1 - \text{сходится;} \\ 2. p < 1 - \text{расходится;} \\ 3. p = 1, q > 1 - \text{сходится;} \\ 4. p = 1, q \leq 1 - \text{расходится.} \end{cases}$$

1.2 Знакопеременные несобственные интегралы

Напомним, что для применения признаков Абеля и Дирихле в интеграле $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$, необходимо, чтобы $f(x)$ и $g'(x)$ были непрерывными функциями.

Пример.

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$$

Интеграл имеет одну особую точку: $+\infty$.

Сначала рассмотрим абсолютную сходимость: $\frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$, откуда по признаку сравнения получаем, что интеграл сходится абсолютно при $\alpha > 1$.

Рассмотрим обычную сходимость: интеграл удовлетворяет признаку Дирихле, поскольку $\forall y > a : \int_a^y \sin(x) dx = -\cos(y) + \cos(a) \leq 2$ и $\frac{1}{x^\alpha} \rightarrow 0$

монотонно. Значит, интеграл сходится при $\alpha > 0$.

Теперь рассмотрим расходимость интеграла. Докажем условную расходимость на $(0, 1]$. Оценим снизу удвоенным синусом:

$$\frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} \geq \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} = \frac{1 - \cos(2x)}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos(2x)}{2x^\alpha}$$

Вторая дробь сходится по Дирихле, откуда весь интеграл расходится абсолютно при $\alpha \leq 1$.

Осталось установить сходимость при $\alpha \leq 0$. Вспомним определение **предела по Гейне**:

$$\forall \{y_n\} \rightarrow 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{y_n} f(x) dx \rightarrow const$$

Тогда интеграл можно представить в виде $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_n}^{y_{n+1}} f(x) dx$. Найдем какую-нибудь последовательность, на которой будет расходимость. Итак, пусть $y_n = \pi n$.

Теперь нам потребуется следующая

Теорема 1 (о среднем)

Если $f(x)$ непрерывна и $g(x)$ знакопостоянна, тогда

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx, \quad \xi \in (a, b)$$

Из теоремы получаем, что

$$\int_{\pi n}^{\pi n + \pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\xi_n^\alpha} \int_{\pi n}^{\pi n + \pi} \sin(x) dx = \frac{2 \cdot (-1)^n}{\xi_n^\alpha}$$

Тогда интеграл равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{\xi_n^\alpha}$$

Ряд расходится по необходимому признаку, поэтому интеграл расходится по определению Гейне.

Можно доказать то же самое по критерию Коши. Именно, при $\alpha \leq 0$:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta \exists y_1, y_2 > \delta : \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \right| > \varepsilon$$

Чтобы убить модули, выберем такие пределы интегрирования, на которых синус знакопостоянен. Имеем

$$\int_{2\pi n}^{2\pi n + \pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\xi_n^\alpha} \cdot 2, \quad 2\pi n \leq \xi_n \leq 2\pi n + \pi$$

Подставив худший вариант, получаем $\frac{2}{(2\pi n)^\alpha} \geq 2$, то есть расходимость. Соберем ответ:

$$\begin{cases} 1. \alpha > 1 - \text{сходится абсолютно;} \\ 2. 0 < \alpha \leq 1 - \text{сходится условно;} \\ 3. \alpha \leq 0 - \text{расходится.} \end{cases}$$

Поговорим про суммы. Более-менее очевидно, что если $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$

сходятся, то и $\int_a^b (f(x) + g(x))dx$ сходится. Так же и для абсолютной сходимости. Так, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $g(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$ - сходятся условно, но их сумма сходится абсолютно.

Пример (№2380в). $\int_0^{\infty} x^2 \cos(e^x) dx$. Одна особая точка - ∞ . Невероятно, но он сходится, так как пики косинуса становятся всё тоньше и тоньше.



Идея: чтобы проинтегрировать, надо добавить что-то такое, что можно внести под дифференциал. Домножим и разделим подынтегральную функцию на экспоненту, получим $\frac{x^2 e^x \cos(e^x)}{e^x}$, и проинтегрируем $\frac{\cos(e^x)}{e^x}$, а остальное выкинем из интеграла по теореме о среднем

Оценим монотонность: $(x^2 e^{-x})' = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x}$. При $x > 2$ производная отрицательна, значит, стремление к нулю монотонно. Значит, по Дирихле он сходится, так как первообразная косинуса ограничена.

Рассмотрим абсолютную сходимость:

$$|x^2 \cos(e^x)| \geq x^2 \cos^2(e^x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 2 \cos(2e^x)}{2}$$

Здесь первая дробь расходится, вторая сходится аналогично самому интегралу, то есть интеграл не сходится абсолютно.

Пример. Построим пример положительной функции, которая неограничена, но интеграл от неё сходится. Будем строить штуки с площадью $\frac{1}{2^n}$ интервалах $(n, n+1)$. Суммировав площади, получим, что интеграл сходится.



Но по определению Гейне мы должны показать сходимость при любом выборе последовательности! (а в данном случае мы взяли $x_n = n$). На самом деле, для знакоположительных функций при выборе любой последовательности пределы частичных сумм $\sum_{n=1}^k \int_n^{n+1} f(x) dx$ одинаковы!

Действительно, любую частичную сумму последовательности можно зажать между членами x_n и x_{n+1} последовательности $x_n = n$, а её предел одинаков.

Если мы возьмем знакопеременную функцию, то если она сходится при самой «плохой» последовательности, то она сходится при любой другой последовательности. Причем самая плохая последовательность состоит из тех точек, где функция меняет знак. Имеет место следующая

Теорема 2 Если $f(x)$ - знакопеременная функция и $\{x_n\}$ - последовательность, состоящая из точек, где функция меняет знак, то из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$ следует сходимость $\int_1^{\infty} f(x) dx$

Геометрический смысл: при данном выборе последовательности отрицательные и положительные члены имеют наибольший возможный размер.

Пример (№2380а) $\int_0^{\infty} x^p \sin(x^q) dx$, $q \neq 0$. Две особые точки: 0 и ∞ .

Рассмотрим сначала на бесконечности.

1. Если $q < 0$, то интеграл знакостоянный:

$$x^p \sin(x^q) \sim x^{p+q}$$

Значит, интеграл сходится при $p + q < -1$.

2. Теперь займемся ситуацией, когда $q > 1$, и интеграл знакопеременный. Применим идею идею из предыдущего номера: домножим сверху и снизу на какую-нибудь штуку, в данном случае qx^{q-1} . Получим

$$\frac{x^p \sin(x^q) \cdot qx^{q-1}}{qx^{q-1}} = -\frac{x^{p-q+1}}{q} \cdot (\cos(x^q))'$$

Эта штука сходится по Дирихле при $p - q + 1 < 0$, так как $-\frac{1}{q}x^{p-q+1}$ монотонно стремится к нулю.

3. Рассмотрим абсолютную сходимость:

$$|x^p \sin(x^q)| \leq x^p$$

Сходится абсолютно при $p < -1$.

4. Рассмотрим ситуацию, когда $-1 < p \leq -1 + q$. Докажем, что здесь сходимость условная.

$$|x^p \sin(x^q)| \geq x^p \sin^2(x^q) = \frac{x^p}{2} - \frac{x^p \cos(2x^q)}{2}$$

Первая дробь расходится, вторая дробь сходится при $p - q + 1 < 0$ по аналогии с самим интегралом. Значит, интеграл не сходится абсолютно.

5. Докажем, что интеграл расходится при $p \geq -1 + q$. Рассмотрим последовательность, из точек, где синус меняет знак, и, согласно теореме,

оценим интеграл рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(\pi n)^{\frac{1}{q}}}^{(\pi n + \pi)^{\frac{1}{q}}} x^p \sin(x) dx$. Заметим, что $(\pi n)^{\frac{1}{q}} \rightarrow \infty$.

Снова домножим на qx^{q-1} . Тогда

$$\frac{1}{q} \xi_n^{p-q+1} \int_{(\pi n)^{\frac{1}{q}}}^{(\pi n + \pi)^{\frac{1}{q}}} \sin(x^q) qx^{q-1} dx = \frac{1}{q} \xi_n^{p-q+1} (-\cos(x^q)) \Big|_{(\pi n)^{\frac{1}{q}}}^{(\pi n + \pi)^{\frac{1}{q}}} = \frac{2(-1)^{n+1}}{q} \xi_n^{p-q+1}$$

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{q} \xi_n^{p-q+1}$ расходится по необходимому признаку, так

как $\xi_n^{p-q+1} \geq (\pi n)^{\frac{p-q+1}{q}} \rightarrow \infty$.

Теперь рассмотрим интеграл в нуле.

$$\int_0^1 x^p \sin(x^q) dx = \begin{cases} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{dx}{x^2} \\ 0 \mapsto \infty \\ 1 \mapsto 1 \end{cases} = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{p+2}} \sin\left(\frac{1}{t^q}\right) dt$$

Получили ситуацию один в один, только вместо p и q будет $p + 2$ и $-q$.

Пример (№2373). $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\ln(x))}{\sqrt{x}} dx$. Сначала исследуем в нуле:

$$\left| \frac{\sin \ln(x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

значит, сходится абсолютно.

Теперь исследуем на сходимость на бесконечности. Так как $(\cos \ln(x))' = -\frac{\sin \ln(x)}{x}$, представим функцию в виде $\frac{\sin \ln(x)}{x} \cdot \sqrt{x}$ и возьмем худшую последовательность $x_n = e^{\pi n}$:

$$\begin{aligned} \int_{e^{\pi n}}^{e^{\pi n + \pi}} \frac{\sin \ln(x)}{x} \cdot \sqrt{x} dx &= \sqrt{\xi_n} \cdot \int_{e^{\pi n}}^{e^{\pi n + \pi}} \frac{\sin \ln(x)}{x} dx = \sqrt{\xi_n} \cdot (\cos \ln(x)) \Big|_{e^{\pi n}}^{e^{\pi n + \pi}} = \\ &= \sqrt{\xi_n} (-1)^{-1} \cdot 2 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

- интеграл расходится.

Пример (из Кудрявцева). $\int_0^{\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Имеем две особые точки: 0 и ∞ . Рассмотрим в нуле и уберем синус оценкой:

$$\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

сходится абсолютно.



На бесконечности: разложим синус в ряд Тейлора до такого члена, который в итоге будет сходиться абсолютно:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^3 x}{3!x^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \right) = \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin^3 x}{3!x^{\frac{5}{2}}} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^2}\right)$$

Первая дробь сходится условно по Дирихле, вторая дробь сходится абсолютно, о-малое от абсолютно сходящейся функции сходится абсолютно, поэтому все вместе сходится условно.

Пример. $\int_2^{\infty} \sqrt{x} \ln\left(1 - \frac{\sin x^2}{x-1}\right) dx$. Одна особая точка - бесконечность.

Разложим логарифм в ряд Тейлора:

$$\sqrt{x} \left(\frac{\sin x^2}{x-1} - \frac{\sin^2 x^2}{2(x-1)^2} + o\left(\frac{\sin^2 x^2}{(x-1)^2}\right) \right) = \frac{\sqrt{x} \sin x^2}{x-1} - \frac{\sqrt{x} \sin^2 x^2}{2(x-1)^2} + o\left(\frac{\sin^2 x^2}{(x-1)^2}\right)$$

Первый член оценим по теореме о среднем, домножив на производную аргумента синуса:

$$\frac{2x\sqrt{x}\sin x^2}{2x(x-1)} = \frac{\sqrt{x}(-\cos x^2)'}{2x(x-1)}$$

Косинус ограничен, все остальное монотонно стремится к нулю (можно взять производную и убедиться в этом), значит, первый член сходится условно по Дирихле. Теперь докажем, что абсолютно он расходится:

$$\left| \frac{\sqrt{x}\sin x^2}{x-1} \right| \geq \frac{\sqrt{x}\sin^2 x^2}{|x-1|} = \frac{\sqrt{x}}{|x-1|} \cdot \frac{(1-\cos 2x^2)}{2} = \frac{\sqrt{x}}{2|x-1|} - \frac{\sqrt{x}\cos 2x^2}{2|x-1|}$$

Вторая дробь сходится аналогично предыдущему пункту, первая дробь расходится, значит, все вместе абсолютно расходится.

Теперь рассмотрим второй член разложения логарифма в ряд Тейлора:

$$\left| \frac{\sqrt{x}(-\sin^2 x^2)}{2(x-1)^2} \right| \leq \frac{\sqrt{x}}{2(x-1)^2} \sim \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

Итак, второй член сходится абсолютно, значит, и о-малое от него сходится абсолютно. Так как первый член сходится условно, то интеграл сходится условно.

Пример. $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha} dx$. Имеем две особые точки: 0 и ∞ .

1. Исследуем на сходимость в нуле:

$$\frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha} \sim \frac{1+x}{x^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

сходится при $\alpha < 2$.

2. Исследуем на бесконечности. Начнем с абсолютной сходимости (обычная оценка сверху):

$$\left| \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

- сходится абсолютно при $\alpha > 1$.

Исследуем на обычную сходимость. Домножим на производную аргумента косинуса:

$$\frac{(1+2x)\sin(x+x^2)}{(1+2x)x^\alpha} = \frac{(-\cos(x+x^2))'}{(1+2x)x^\alpha} = \frac{(-\cos(x+x^2))'}{x^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{2+\frac{1}{x}}$$

Заметим, что первая дробь сходится по признаку Дирихле при $\alpha+1 > 0$, а вторая монотонна и ограничена, значит, все выражение сходится по

признаку Абеля при $\alpha > -1$.

Теперь докажем, что ряд расходится абсолютно при $\alpha \in (-1, 1]$; оценим квадратом синуса, перейдем к косинусу и понизим степень:

$$\frac{|\sin(x + x^2)|}{x^\alpha} \geq \frac{1 - \cos(2x + 2x^2)}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos(2x + 2x^2)}{2x^\alpha}$$

Первая дробь расходится, вторая сходится по Дирихле, значит, интеграл расходится.

Докажем расходимость при $\alpha \leq -1$. Используем для этого ряд из нулей синуса. Корни синуса найдем из уравнения $x^2 + x = \pi n$. Так как мы рассматриваем интеграл на $+\infty$, то нам нужен только положительный корень: обозначим его $\sigma(n) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\pi n}}{2}$. В ряду домножим на производную аргумента синуса и применим теорему о среднем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\sigma(n)}^{\sigma(n+1)} \frac{(1 + 2x) \sin(x + x^2)}{(1 + 2x)x^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + 2\xi_n)\xi_n^\alpha} \int_{\sigma(n)}^{\sigma(n+1)} (-\cos(x + x^2))' dx$$

Интеграл от производной косинуса в нулях синуса равен $2 \cdot (-1)^n$, значит, общий член ряда имеет вид и оценивается по верхней границе

$$\frac{2 \cdot (-1)^n}{(1 + 2\xi_n)\xi_n^\alpha} \geq \frac{1}{(2\sigma(n + 1) + 1)(\sigma(n))^\alpha}$$

(мы взяли разные σ , поскольку мы хотим оценить снизу, а $\alpha < 0$). Подставляя значение корня, получаем расходимость ряда, и, как следствие, расходимость интеграла.

Итак, соберем ответ: в нуле сходится при $\alpha < 2$, на бесконечности сходится абсолютно на $(1, \infty)$, сходится на $(-1, 1]$, расходится на $(-\infty, -1]$.

Пример. $\int_1^{\infty} x^\alpha \sin \sin x dx$. Одна особая точка - бесконечность. Абсолютная сходимость очевидна:

$$|x^\alpha \sin \sin x| \leq x^\alpha$$

- сходится при $\alpha < -1$.

Чтобы исследовать обычную сходимость, надо доказать ограниченность первообразной от $\sin \sin x$. Сделаем это через ряды (потому что через домножение на интегрирующий множитель не получится):

$$\int_0^y \sin \sin x dx = \int_0^{\pi} \dots + \int_{\pi}^{2\pi} \dots + \dots + \int_{2\pi k}^y \dots$$

где $k = \left[\frac{y}{2\pi} \right]$. Чтобы получить оценку, не зависящую от y , докажем, что сумма всех интегралов, кроме последнего, равна нулю:

$$\int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} \sin \sin x dx + \int_{2\pi k + \pi}^{2\pi k + 2\pi} \sin \sin x dx = \begin{cases} t = t + \pi \\ dx = dt \end{cases} =$$

Введем эту замену, чтобы привести второй интеграл к тем же пределам и сделать его отрицательным:

$$= \int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} \sin \sin x dx + \int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} \sin \sin(t + \pi) dt = \int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} \sin \sin x dx + \int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} \sin(-\sin t) dt = 0$$

Оценим последний интеграл:

$$\left| \int_{2\pi k}^y \sin \sin x dx \right| \leq \int_{2\pi k}^y |\sin x| dx \leq \int_{2\pi k}^y 1 dx = y - 2\pi k \leq 2\pi$$

Значит, интеграл сходится по Дирихле при $\alpha < 0$.

Докажем (обычную) расходимость при $\alpha \geq 0$. Снова используем ряды, но на этот раз будем использовать теорему о среднем:

$$\int_{\pi n}^{\pi n + \pi} x^\alpha \sin \sin x dx = \xi_n^\alpha \cdot \int_{\pi n}^{\pi n + \pi} \sin \sin x dx = \xi_n^\alpha (-1)^n \int_0^\pi \sin \sin x dx$$

Интеграл $\int_0^\pi \sin \sin x dx$ не зависит от n и положителен, обозначим его значение за β . Тогда общий член ряда имеет вид

$$\xi_n^\alpha \cdot (-1)^n \cdot \beta \geq (\pi n + \pi)^\alpha \cdot (-1)^n$$

то есть ряд расходится по необходимому признаку, и сам интеграл расходится.

Наконец, докажем абсолютную расходимость при $\alpha \in [-1, 0)$. Она устанавливается аналогично: так как

$$\int_{\pi n}^{\pi n + \pi} |\sin \sin x| dx = \int_0^\pi |\sin \sin x| dx = \beta$$

то общий член ряда имеет вид $\xi_n^\alpha \beta$. Подставляя оценку $\xi_n = \pi n + \pi$, имеем расходимость ряда и соответственно расходимость интеграла.

Соберем ответ: интеграл абсолютно сходится при $\alpha \in (-\infty, -1)$, сходится условно при $\alpha \in [-1, 0)$, расходится при $\alpha \in [0, \infty)$.

Глава 2

Несобственный интеграл

2.1 Основные определения

Определение 1 Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ для всех $b > a$. Тогда несобственный интеграл первого рода (с одной особой точкой) - предел

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

Если таковой предел существует, то интеграл сходится; если предел равен бесконечности или не существует, то интеграл расходится. Аналогично определяется и интеграл с нижним пределом $-\infty$.

Пример. $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_\varepsilon^1 \ln x dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(x \ln x \Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{-\varepsilon^2}{1/\varepsilon} - 1 = -1$ - интеграл сходится.

Рассмотрим случай конечного числа особых точек.

2.1.1 Критерии сходимости несобственного интеграла

Теорема 3 (критерий Коши) Пусть $\forall b \geq a$ функция интегрируема на $[a, b]$. Тогда $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists b_0(\varepsilon) > 0 \forall b_1, b_2 > b_0 : \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$

Доказательство. По условию, существует предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) = A \in \mathbb{R}$,

где $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда из существования предела следует для $\frac{\varepsilon}{2}$: $\exists b_0(\varepsilon) > a : |F(b) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $b_1 > b_0, b_2 > b_0$.

Тогда $|F(b_2) - F(b_1)| = |F(b_2) - A| + |F(b_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Достаточность. Докажем существование предела $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$ из определения предела по Гейне. Пусть $b_n \rightarrow \infty$, тогда $\forall b_0 > a \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0$. Покажем, что предел не зависит от выбора последовательности b_n . Выберем другую последовательность b_n^* . Обозначим предел $\lim_{n \rightarrow \infty} F(b_n^*) = B$. Составим последовательность $b_1, b_1^*, b_2, b_2^*, \dots \rightarrow \infty$. Тогда предел F от этой последовательности обозначим как C . Так как пределы подпоследовательностей сходятся к пределу последовательности, то $A = B = C$. Значит, выполняется условие определения предела по Гейне, значит, интеграл сходится. \square

Пример. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 0$, расходится при $\alpha \leq 0$. Докажем это.

1. $\alpha > 0$. Поехали: $\forall \varepsilon > 0 \exists b_0(\varepsilon) > 1 \forall b_1 > b_0, b_2 > b_0 : \left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| < \varepsilon$.

Доказываем: $\left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| = \left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{x^\alpha} d \cos x \right| = \left| \frac{\cos x}{x^\alpha} \right|_{b_1}^{b_2} - \int_{b_1}^{b_2} \cos x d\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \leq \dots \leq \frac{4}{b_0^\alpha}$. Значит, $b_0 > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

2. $\alpha \leq 0$. Синус теперь принимает разные знаки. Пусть $b_k = 2\pi k$. Тогда по критерию Коши интеграл расходится.

Теорема 4 (критерий сходимости через остаток)

Пусть $\int_a^\infty = \int_a^b + \int_b^\infty$, ($b > 0$).

1. Если интеграл сходится, то и любой из его остатков сходится.
2. Если хотя бы один из остатков сходится, то интеграл сходится.

Доказательство. \square

Теорема 5 (критерий сходимости несобственного интеграла от несобственной функции)

Пусть $\forall b > a$ функция интегрируема на $[a, b]$ и неотрицательная. Тогда $\int_a^\infty f(x) dx$ сходится \Leftrightarrow первообразная $F(b) < M$ ограничена.

Доказательство. $F(b)$ неубывает и имеет конечный предел. Значит, интеграл сходится. Обратно, пусть существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$, то $F(b)$ ограничена в некоторой окрестности. \square

2.1.2 Признаки сравнения в предельной форме

Теорема 6 (признак сравнения)

Пусть $f(x) > g(x) > 0$ начиная с некоторого $x > a$, и для любого $b > a$ функции интегрируемы на $[a, b]$. Тогда

1. Если $\int f(x)$ сходится, то и $\int g(x)$ сходится.
2. Если $\int g(x)$ расходится, то и $\int f(x)$ расходится.

Доказательство. По свойству определенного интеграла (транзитивность числовых неравенств), $F(b) \leq M$. Тогда по критерию 3 интеграл сходится. 2. Погодите, это реально? \square

Теорема 7 (второй признак сравнения)

Если $\frac{f(x)}{g(x)} = k$, $\infty \neq k \neq 0$, то их интегралы сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. \square

Теорема 8 (о непрерывности интеграла)

Если функция определена и непрерывна,

Доказательство. \square

Теорема 9 (о дифференцируемости собственного интеграла, зависящего от параметра/ правило Лейбница)

Пусть $f(x, y)$

1. непрерывна на $P = [a, b] \times [c, d]$;
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывна на P ;

Тогда:

1. $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ дифференцируема на $[c, d]$;
2. $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$

Доказательство. Пусть $y \in [c, d]$, $y + h \in [c, d]$. Рассмотрим $F(y + h) - F(y) = \int_a^b (f(x, y + h) - f(x, y)) dx$, значит, по теореме Лагранжа

это равно $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta h) h dx$, где $\theta \in (0, 1)$. Дифференцируем: $F'(y) =$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(y+h) - F(y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta h) dx$. При $h \rightarrow 0$ делаем замену $u =$

$y + \theta h$, $u \rightarrow y$. Тогда предел $\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, u) dx =$ по теореме о предельном переходе!!!!!!! \square

Следующая теорема обобщает правило Лейбница:

Теорема 10 (обобщенное правило Лейбница)

Пусть $f(x, y)$ непрерывна на $D = \{(x, y) \mid a(y) \leq x \leq b(y), c \leq y \leq d\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ непрерывна на D и $a'(y), b'(y)$ непрерывны на $[c, d]$. Тогда

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \text{ дифференцируема на } y \in [c, d], \text{ причем } F'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(b(y), y) \cdot b'(y) - f(a(y), y) \cdot a'(y).$$

Доказательство. $F(y) = F(y, a(y), b(y))$. По правилу производной сложной функции $\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(b(y), y) \cdot b'(y) - f(a(y), y) \cdot a'(y) \quad \square$

Заметим, что по правилу Лейбница, $\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx, \frac{\partial F}{\partial b} f(b(y), y),$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \left(- \int_{b(y)}^{a(y)} f(x, y) dx \right)' = -f(a(y), y)$$

Пример. Посчитаем $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+a^2 \sin^2(x))}{\sin(x)} dx$. тут я отрубился

Теорема 11 (об интегрировании интеграла, зависящего от параметра)

Пусть $f(x, y)$ непрерывна на $P = [a, b] \times [c, d]$. Тогда

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Доказательство. Введем функции $G(t) = \int_c^d dy \int_a^t f(x, y) dy, H(t) = \int_a^t dx \int_c^d f(x, y) dy$. Докажем, что $G(b) = H(b)$ (что доказывает требуемое утверждение). Введем функцию $g(t, y) = \int_a^t f(x, y) dx$, тогда $G(t) =$

$\int_c^d g(t, y) dy$ - применима теорема о дифференцировании сложной функции:

$\frac{\partial g}{\partial t} = \left(\int_a^t f(x, y) dx \right)' = f(t, y)$ - непрерывна на P по условию. Теперь докажем, что $g(t, y)$ непрерывна на P , для этого покажем, что $\lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \Delta g =$

0. Имеем $\Delta g = g(t + \Delta t, y + \Delta y) - g(t, y) = \int_a^{t+\Delta t} f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^t f(x, y) dx = \int_a^t (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) dx + \int_t^{t+\Delta t} f(x, y + \Delta y) dx$. Так как $f(x, y)$ непрерывна на компакте P , то она равномерно непрерывна на P и ограничена константой M . Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из равномерной непрерывности для

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall (x_1, y_1) \in P \forall (x_2, y_2) \in P : \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta_1$$

$$\implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Если $|\Delta y| < \delta$, то $|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$; тогда можно оценить интеграл:

$$\left| \int_a^t (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{t-a}{b-a} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Если $|\Delta t| < \frac{\varepsilon}{2M}$, то

$$\left| \int_t^{t+\Delta t} f(x, y + \Delta y) dx \right| \leq \left| \int_t^{t+\Delta t} |f(x, y + \Delta y)| dx \right| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $\delta = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{2M}\}$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall |\Delta t| < \delta \forall |\Delta y| < \delta : |\Delta g| < \varepsilon$$

Это означает, что $\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta g = 0$. Заметим, что $g(t, y)$ непрерывна на P .

Применим теорему о дифференцировании к функции $G(t)$:

$$G'(t) = \int_c^d \frac{\partial g}{\partial t}(t, y) dy = \int_c^d f(t, y) dy$$

С другой стороны,

$$H'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_a^t dx \int_c^d f(x, y) dy \right) = \int_c^d f(t, y) dy$$

Итак, мы получили, что $G'(t) = H'(t)$, $G(a) = H(a) = 0$, откуда $G(t) = H(t) \implies G(b) = H(b)$. \square

Пример. $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} dx$, $0 < a < b$. Имеем $\int_a^b x^y dy = \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}$, подынтегральная функция непрерывна на бруске $[0, 1] \times [a, b]$, тогда интеграл равен $\int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln(b+1) - \ln(a+1)$.

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 \sin(\ln(\frac{1}{x})) \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} = \int_0^1 dx \int_a^b \sin(\ln(\frac{1}{x})) x^y dy$. Функция $f(x, y) = \sin(\ln(\frac{1}{x})) x^y$ непрерывна на $[0, 1] \times [a, b]$, $f(0, y) = 0$. Тогда $\int = \int_a^b dy \int_0^1 \sin(\ln(\frac{1}{x})) x^y dx = \begin{cases} t = \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x) \\ dx = -e^{-t} dt \end{cases} = \int_a^b dy \int_0^\infty \sin(t) e^{-ty} e^{-t} dt$.

Внутренний интеграл возьмем по частям: $I = \int_0^\infty \sin(t) e^{-t(y+1)} dt = -\cos(t) e^{-t(y+1)} \Big|_0^\infty -$

$(y+1) \int_0^\infty \cos(t) e^{-t(y+1)} dt$, $I = 1 - (y+1)^2 I$. Значит, искомый интеграл

равен $\int_a^b \frac{dy}{(y+1)+1} = \operatorname{arctg} \left(\frac{a-b}{1+ab} \right)$ Домашка: тоже самое для косинуса.

2.1.3 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Рассмотрим семейство функций $f(x, y)$, $x \in X, y \in Y$. Пусть $M \subset Y$ - множество сходимости.

Определение 2 $f(x, y)$ сходится поточечно к $\varphi(x)$ на M при $x \rightarrow x_0$, если

$$\forall y \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, y) \quad \forall x \in X \cap U_\delta^\circ(x_0) : |f(x, y) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

Определение предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Определение 3 $f(x, y)$ сходится равномерно к $\varphi(x)$ на E при $x \rightarrow x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in X \cap U_\delta^\circ(x_0) \quad \forall y \in E : |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Пример. $f(x, y) = \sin(y^x)$ - непрерывен (??)

Определение 4 $\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится поточечно к $F(y)$ на M , если

$$\forall y \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists b_0(\varepsilon, y) > a \quad \forall b > b_0 : \left| \int_b^\infty f(x, y)dx \right| < \varepsilon$$

Обозначим $F(b, y) = \int_a^b f(x, y)dx$. Тогда $|F(b, y) - F(y)| = \left| \int_b^\infty f(x, y)dx \right|$. $F(b, y)$ сходится к $F(y)$ поточечно на M при $b \rightarrow \infty$. Обозначим остаток интеграла $R(b, y) = \int_b^\infty f(x, y)dx$. Остаток сходится поточечно $R(b, y) \rightarrow 0 \quad \forall y \in N$ при $b \rightarrow \infty$.

Определение 5 Интеграл сходится равномерно к $F(y)$ на E , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b_0(\varepsilon) \quad \forall b > b_0 \quad \forall y \in E : \left| \int_b^\infty f(x, y)dx \right| < \varepsilon$$

Как и с рядами, есть супремум-критерий.

Теорема 12 (супремум-критерий)

Несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x, y)dx$, зависящий от параметра, сходится равномерно на E тогда и только тогда, когда

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{y \in E} \left| \int_b^\infty f(x, y)dx \right| = 0$$

Доказательство. Самостоятельно \square

Теорема 13 . (метод оценки остатка)

Пусть интеграл $\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится на E , и $r(b)$ - какая-то оценка остатка. Тогда если $|R(b, y)| \leq r(b) \quad \forall y \in E$ и $r(b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow \infty$, тогда $\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится равномерно на E . Если же существует такая функция $y(b)$, что $R(b, y(b)) \rightarrow s \neq 0$, то интеграл не сходится равномерно на X .

Пример. $F(y) = \int_0^{\infty} ye^{-xy} dx$. Доказать, что сходимость равномерная при $[y_0, \infty)$, $y_0 \geq 0$, но на $(0, \infty)$ нет равномерной сходимости. Решение: пусть остаток $R(b, y) = \int_b^{\infty} ye^{-xy} dx = e^{-by}$. По методу оценки остатка при оценке $r(b) = e^{-by_0}$ имеем равномерную сходимость. Если мы возьмем $y = \frac{1}{b}$, то и $R(b, \frac{1}{b}) = e^{-1} \neq 0$, поэтому нет равномерной сходимости.

Пример. Пусть $f(x) > 0$ при $x \geq 0$, $\int_0^{\infty} f(x) dx$ сходится. Тогда $\forall \alpha > 0$ интеграл $\int_0^{\infty} f(y^{\alpha} x) dx$ сходится равномерно на $[y_0, \infty)$, $y_0 > 0$, и сходится неравномерно на $(0, \infty)$.

Решение. 1. Методом оценки остатка: $R(b, y) = \int_b^{\infty} f(y^{\alpha} x) dx = \frac{1}{y^{\alpha}} \int_b^{\infty} f(y^{\alpha} x) d(y^{\alpha} x) = \frac{1}{y^{\alpha}} \int_{by^{\alpha}}^{\infty} f(t) dt \leq \frac{1}{y_0^{\alpha}} \int_{by^{\alpha}}^{\infty} f(t) dt = r(b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow \infty$, так как $\int_0^{\infty} f(t) dt$ сходится.

2. Докажем неравномерную сходимость по супремум-критерию: $\sup_{y>0} \int_b^{\infty} f(y^{\alpha} x) dx = \sup_{y>0} \frac{1}{y^{\alpha}} \int_{by^{\alpha}}^{\infty} f(t) dt \geq \sup_{0<y\leq 1} \frac{1}{y^{\alpha}} \int_{by^{\alpha}}^{\infty} f(t) dt \geq \sup_{0<y\leq 1} \frac{1}{y^{\alpha}} \int_b^{\infty} f(t) dt = \infty$ при $y \rightarrow \infty$.

Тогда по супремум-критерию нет равномерной сходимости.

Пример. Интеграл Пуассона аналогично сходится равномерно на бесконечности, если интервал начинается не с нуля.

Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметров

1. Равномерно сходящиеся интегралы образуют линейное пространство.
2. Если равномерно сходится на множестве, то сходится и на его подмножестве.
3. Сходится равномерно на конечном объединении областей, где сходится равномерно.
- 4.

Пример. Покажем, что свойство 3 нельзя обобщить на объединения бесконечного числа множеств. Так, $\int_0^{\infty} e^{-x^2 y} dx$ сходится равномерно на $E_n = [\frac{1}{n}, \infty)$, но расходится на бесконечном объединении таких областей.

Теорема 14 (*критерий Коши*)

$\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится равномерно на Y тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b_0(\varepsilon) > a \forall b_1, b_2 > b_0 \forall y \in Y : \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)dx \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для

$$\frac{\varepsilon}{2} \exists b_0 > a \forall b > b_0 \forall y \in Y : \left| \int_{b_1}^\infty f(x, y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $b_1, b_2 > b_0$, тогда $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)dx \right| = \left| \int_{b_1}^\infty f(x, y)dx - \int_{b_2}^\infty f(x, y)dx \right| \leq$
 $\left| \int_{b_1}^\infty f(x, y)dx \right| - \left| \int_{b_2}^\infty f(x, y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Обратно, для

$$\frac{\varepsilon}{2} \exists b_0 > a \forall b_1, b_2 > b_0 \forall y \in Y : \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда $\left| \int_{b_1}^\infty f(x, y)dx - \int_{b_2}^\infty f(x, y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $b_2 \rightarrow \infty$, то

$$\forall y \in Y : \int_{b_2}^\infty f(x, y)dx \rightarrow 0$$

(так как есть поточечная сходимость); $\left| \int_{b_1}^\infty f(x, y)dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ Итак, выполняется определение. \square

Теорема 15 (*метод граничной точки*)

Пусть 1. $f(x, y)$ непрерывна на $[a, \infty) \times [c, d)$

2. $\forall y \in (c, d)$ интеграл $\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится

3. $\int_a^\infty f(x, c) dx$ расходится.

Тогда $\int_a^\infty f(x, y) dx$ не сходится равномерно на (c, d)

Доказательство. Допустим, на (c, d) есть равномерная сходимость. Тогда по супремум-критерию Самостоятельно от противного. \square

Теорема 16 (*признак Вейерштрасса равномерной сходимости*)

Пусть 1. $\forall x \geq a \forall y \in Y : |f(x, y)| \leq g(x);$

2. $\int_a^\infty g(x) dx$ сходится.

Тогда $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится равномерно на Y .

Доказательство. Используем критерий Коши. \square