Пруф общей тоеремы Тихонова

Мудрое Загадочное Дерево

канун экза

Определение 1 *Пусть* $(X_\alpha, \tau_\alpha), \alpha \in J$ *- любое семейство топологических пространств. Рассмотрим* $X = \prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$ *- декартово произведение пространств, его элементы - последовательности элементов из* X_α*, индексированных элементами из* J *(то есть* $\{x_1, x_2, ..., x_k, ...\}, \ x_k \in X_k, \ k \in J$*). Пусть* τ *- самая слабая топология на* X*, для которой каждая проекция* $p_k \colon X \to X_k, \{x_1, x_2, ..., x_k, ...\} \mapsto \{x_k\}$ *непрерывна. Такая слабейшая топология существует, так как это пересечение всех топологий, для которых проекции непрерывны. Тогда* (X, τ) *- тихоновское произведение с тихоновской топологией.*

Теорема 1 *(Тихонова)*
Тихоновское произведение компактных пространств компактно.

1. Начальные сведения: кольца и идеалы
2. Теорема Александера о предбазе
3. Определение тихоновской топологии через предбазу
3. Сведение теоремы Тихонова к теореме Александера о предбазе

Доказательство.

Определение 2 *Пусть* R *- коммутатичное кольцо с единицей. Идеалом* I *в кольце* R *называется аддитивная подгруппа, замкнутая относительно умножения на на элементы кольца.*

Очевидно, $\sum\limits_{\lambda in K} \lambda r$ - идеал, порожденный, множеством $S \subset R$.

Множество всех подмножеств данного множества является кольцом относительно симметрической разности (сложения) и пересечения.

Теорема 2 *(лемма Цорна для идеалов)*
Пусть I *- идеал в кольце. Тогда существует максимальный идеал* $I \subset I_1 \subset$

Доказательство. $\square$

3. Рассмотрим следующую предбазу на $X = \prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$: для любого индекса $i \in J$ и любого открытого множества $U \in X_i$ рассмотрим произведение

$$X_1 \times X_2 \times ...X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times ...$$

(вместо X_i стоит $U \subset X_i$). Покажем, что множество всех таких произведений является предбазой тихоновской топологии 1.

Пусть $\Gamma = \{X_1 \times X_2 \times ...X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times ... \mid i \in J, U \subset \tau_i\}$ - предполагаемая предбаза, Σ - множество пересечений всех элементов из Γ. Применим критерий базы топологического пространства:
1. Проекции, определенные на элементах предбазы, непрерывны: действительно, все проекции, кроме i-той, являются гомеоморфизмами слоев; i-тая проекция также непрерывна, поскольку U - открытое подпространство в X_i и все открытые в нем множества - следы открытых. Ограничение непрерывной функции непрерывно, поэтому проекция, определенная на пересечениях элементов из Γ, непрерывна. Значит, элементы предбазы открыты в смысле топологии Тихонова.

$\square$