Анализ 3

Галкина

05.09.2022

Оглавление

Глава 1

Идеи и номера с практики

Идеи Тимура, достойные того, чтобы быть запечатленными. Те места, которые на слух отмечаются словами типа «финт ушами», будут отмечаться знаком «опасный поворот» в стиле Бурбаки (а не то, что вы подумали).

1.1 Знакопостоянные несобственные интегралы

Для знакопостоянных интегралов можно использовать признак сравнения. Обычно сравнение происходит с обобщенной степенной функцией. При этом имеется два различных типа особых точек: на бесконечности и с уходом на бесконечность в точке. Разберем подробнее.

Пример 1. Интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Пример 2. Интеграл

$$\int\limits_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Пример. Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$ сходится, поскольку подынтегральная функция эквивалентна $\frac{1}{x^2}$ - сходящейся штуке.

Пример (№2374). Исследуем на сходимость в зависимости от параметров интеграл

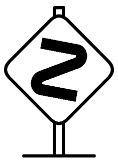
$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$$

Имеем 2 особые точки: 1 и ∞, поэтому разобъем область исследования на две части и будет исследовать интеграл $\int\limits_{10}^{\infty}$.
Нам поторебуется следующий признак сравнения: для $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{x^\varepsilon} < \ln^\alpha(x) < x^\varepsilon,\ x > \delta(\alpha, \varepsilon)$$

(доказательство через правило Лопиталя: действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\varepsilon} = 0$).
Значит, имеем

$$\frac{1}{x^{p+\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{x^p \ln^q x} \leqslant \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}$$



Итак, интеграл сходится при $p > 1+\varepsilon$ и расходится при $p < 1-\varepsilon$. Так как ε вообще-то произвольный, то и условие сходимости не должно зависеть от него; иначе говоря, интеграл сходится при $p > 1$ и расходится $p < 1$.

Рассмотрим случай, когда $p = 1$. Имеем

$$\int\limits_{10}^\infty \frac{1}{x \ln^q x} dx = \begin{cases} \ln(x) = t \\ dt = \frac{dx}{x} \end{cases} = \int\limits_{\ln 10}^\infty \frac{dt}{t^q}$$

Значит, этот интеграл сходится при $q > 1$. Соберем ответ:

$$\begin{cases} 1.\ p > 1 - \text{сходится;} \\ 2.\ p < 1 - \text{расходится;} \\ 3.\ p = 1, q > 1 - \text{сходится;} \\ 4.\ p = 1, q \leqslant 1 - \text{расходится.} \end{cases}$$

1.2 Знакопеременные несобственные интегралы

Напомним, что для применения признаков Абеля и Дирихле в интеграле $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$, необходимо, чтобы $f(x)$ и $g'(x)$ были непрерывными функциями.

Пример.

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$$

Интеграл имеет одну особую точку: $+\infty$.
Сначала расмотрим абсолютную сходимость: $\frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$, откуда по признаку сравнения получаем, что интеграл сходится абсолютно при $\alpha > 1$.
Рассмотрим обычную сходимость: интеграл удовлетворяет признаку Дирихле, поскольку $\forall y > a : \int\limits_a^y \sin(x)dx = -\cos(y) + \cos(a) \leqslant 20$ и $\frac{1}{x^\alpha} \to 0$ монотонно. Значит, интеграл сходится при $\alpha > 0$.
Теперь рассмотрим расходимость интерала. Докажем условную сходимость на $(0, 1]$. Оценим снизу увадратом синуса:

$$\frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} \geqslant \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} = \frac{1-\cos(2x)}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos(2x)}{2x^\alpha}$$

Вторая дробь сходится по Дирихле, откуда весь интеграл расходится абсолютно при $\alpha \leqslant 1$.
Осталось установить рассходимость при $\alpha \leqslant 0$. Вспомним определение **предела по Гейне**:

$$\forall\{y_n\} \to 0 : \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{y_n} f(x)dx \to const$$

Тогда интеграл можно предстваить в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{y_n}^{y_{n+1}} f(x)dx$. Найдем какую-нибудь последовательность, на которой будет расходимость. Итак, пусть $y_n = \pi n$.
Теперь нам потребуется следующая

Теорема 1 *(о среднем)*
Если $f(x)$ непрерывна и $g(x)$ знакопостоянна, тогда

$$\int\limits_a^b = f(\xi) \cdot \int\limits_a^b g(x)dx,\ \xi \in (a,b)$$

Из теоремы получаем, что

$$\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\xi_n^\alpha} \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \sin(x)dx = \frac{2\cdot(-1)^n}{\xi_n^\alpha}$$

Тогда интеграл равен
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{\xi_n^\alpha}$$
Ряд расходится по необходимому признаку, поэтому интеграл расходится по опредлению Гейне.
Можно доказать то же самое по критерию Коши. Именно, при $\alpha \leqslant 0$:
$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta \ \exists y_1, y_2 > \delta : \left| \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \right| > \varepsilon$$
Чтобы убить модули, выберем такие пределы интегрирования, на которых синус знакопостоянен. Имеем
$$\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n + n} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\xi_n^\alpha} \cdot 2, \ 2\pi n \leqslant \xi_n \leqslant 2\pi n + \pi$$
Подставив худший вариант, получаем $\frac{2}{(2\pi n)^\alpha} \geqslant 2$, то есть расходимость.
Соберем ответ:
$$\begin{cases} 1. \ \alpha > 1 - \text{сходится абсолютно;} \\ 2. \ 0 < \alpha \leqslant 1 - \text{сходится условно;} \\ 3. \ \alpha \leqslant 0 - \text{расходится.} \end{cases}$$

Поговорим про суммы. Более-менее очевидно, что если $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся, то и $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx$ сходится. Так же и для абсолютной сходимости. Так, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \ g(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$ - сходятся условно, но их сумма сходится абсолютно.

Пример (№2380в). $\int\limits_0^\infty x^2 \cos(e^x) dx$. Одна особая точка - ∞. Невероятно, но он сходится, так как пики косинуса становятся всё тоньше и тоньше.

Идея: чтобы проинтегрировать, надо добавить что-то такое, что можно внести под дифференциал. Домножим и разделим подынтегральную функцию на экспоненту, получим $\frac{x^2 e^x \cos(e^x)}{e^x}$, и проинтегрируем $e^x \cos(e^x)$, а остальное выкинем из интеграла по теореме о среднем

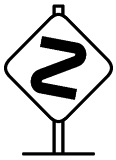
.

Оценим монотонность: $(x^2e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$. При $x > 2$ производная отрицательна, значит, стремеление к нулю монотонно. Значит, по Дирихле он сходится, так как первообразная косинуса ограниченна.
Рассмотрим абсолютную сходимость:

$$|x^2\cos(e^x)| \geqslant x^2\cos^2(e^x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 2\cos(2e^x)}{2}$$

Здесь первая дробь расходится, вторая сходится аналогично самому интегралу, то есть интеграл не сходится абсолютно.

Пример. Построим пример положительной функции, которая неограниченна, но интеграл от неё сходится. Будем строить штуки с площадью $\frac{1}{2^n}$ интервалах $(n, n+1)$. Суммировав площади, получим, что интеграл сходится.



Но по определению Гейне мы должны показать сходимость при любом выборе последовательности! (а в данном случае мы взяли $x_n = n$). На самом деле, для знакоположительных функций при выборе любой последовательности пределы частичных сумм $\sum\limits_{n=1}^{k}\int\limits_{n}^{n+1} f(x)dx$ одинаковы!

Действительно, любую частичную сумму последовательности можно зажать между членами x_n и x_{n+1} последовательности $x_n = n$, а её предел одинаков.
Если мы возьмем знакопеременную функцию, то если она сходится при самой «плохой» последовательности, то она сходится при любой другой последовательности. Причем самая плохая последовательность состоит из тех точек, где функция меняет знак. Имеет место следующая

Теорема 2 *Если $f(x)$ - знакопеременная функция и $\{x_n\}$ - последовательность, состоящая из точек, где функция меняет знак, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$*

Геометрический смысл: при данном выборе последовательности отрицательные и положительные члены имеют наибольший возможный размер.

Пример (№2380а) $\int\limits_0^\infty x^p\sin(x^q)dx,\ q \neq 0$. Две особые точки: 0 и ∞.
Рассмотрим сначала на бесконечности.
1. Если $q < 0$, то интеграл знакопостоянный:

$$x^p\sin(x^q) \sim x^{p+q}$$

Значит, интеграл сходится при $p + q < -1$.
2. Теперь займемся ситуацией, когда $q > 1$, и интеграл знакопеременный. Применим идею идею из предыдущего номера: домножим сверху и снизу на какую-нибудь штуку, в данном случае qx^{q-1}. Получим

$$\frac{x^p \sin(x^q) \cdot qx^{q-1}}{qx^{q-1}} = -\frac{x^{p-q+1}}{q} \cdot (\cos(x^q))'$$

Эта штука сходится по Дирихле при $p - q + 1 < 0$, так как $-\frac{1}{q}x^{p-q+1}$ монотонно стремится к нулю.
3. Рассмотрим абсолютную сходимость:

$$|x^p \sin(x^q)| \leqslant x^p$$

Сходится абсолютно при $p < -1$.
4. Рассмотрим ситуацию, когда $-1 < p \leqslant -1 + q$. Докажем, что здесь сходимость условная.

$$|x^p \sin(x^q)| \geqslant x^p \sin^2(x^q) = \frac{x^p}{2} - \frac{x^p \cos(2x^q)}{2}$$

Первая дробь расходится, вторая дробь сходится при $p - q + 1 < 0$ по аналогии с самим интегралом. Значит, интеграл не сходится абсолютно.
5. Докажем, что интеграл расходится при $p \geqslant -1 + q$. Рассмоторим последовательность, из точек, где синус меняет знак, и, согласно теореме, оценим интеграл рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\pi n)^{\frac{1}{q}}}^{(\pi n+\pi)^{\frac{1}{q}}} x^p \sin(x) dx$. Заметим, что $(\pi n)^{\frac{1}{q}} \to \infty$.
Снова домножим на qx^{q-1}. Тогда

$$\frac{1}{q}\xi_n^{p-q+1} \int\limits_{(\pi n)^{\frac{1}{q}}}^{(\pi n+\pi)^{\frac{1}{q}}} \sin(x^q) qx^{q-1} dx = \frac{1}{q}\xi_n^{p-q+1} \left(-\cos(x^q)\right)\Big|_{(\pi n)^{\frac{1}{q}}}^{(\pi n+\pi)^{\frac{1}{q}}} = \frac{2(-1)^{n+1}}{q}\xi_n^{p-q+1}$$

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{q}\xi_n^{p-q+1}$ расходится по необходимому признаку, так как $\xi_n^{p-q+1} \geqslant (\pi n)^{\frac{p-q+1}{q}} \to \infty$.
Теперь рассмотрим интеграл в нуле.

$$\int\limits_0^1 x^p \sin(x^q) dx = \begin{cases} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{dx}{x^2} \\ 0 \mapsto \infty \\ 1 \mapsto 1 \end{cases} = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{t^{p+2}} \sin\left(\frac{1}{t^q}\right) dt$$

Получили ситуацию один в один, только вместо p и q будет $p+2$ и $-q$.

Пример (№2373). $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\ln(x))}{\sqrt{x}}dx$. Сначала исследуем в нуле:

$$\left|\frac{\sin\ln(x)}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

значит, сходится абсолютно.
Теперь исследуем на сходимость на бесконечности. Так как $(\cos\ln(x))' = -\frac{\sin\ln(x)}{x}$, представим функцию в виде $\frac{\sin\ln(x)}{x}\cdot\sqrt{x}$ и возьмем худшую последовательность $x_n = e^{\pi n}$:

$$\int\limits_{e^{\pi n}}^{e^{\pi n+\pi}} \frac{\sin\ln(x)}{x}\cdot\sqrt{x}dx = \sqrt{\xi_n}\cdot\int\limits_{e^{\pi n}}^{e^{\pi n+\pi}} \frac{\sin\ln(x)}{x}dx = \sqrt{\xi_n}\cdot(\cos\ln(x))\Big|_{e^{\pi n}}^{e^{\pi n+\pi}} =$$

$$= \sqrt{\xi_n}(-1)^{-1}\cdot 2 \to \infty$$

- интеграл расходится.

Пример (из Кудрявцева). $\int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$. Имеем две особые точки: 0 и ∞. Рассмотрим в нуле и уберем синус оценкой:

$$\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

сходится абсолютно.

На бесконечности: разложим синус в ряд Тейлора до такого члена, который в итоге будет сходиться абсолютно:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^3 x}{3!x^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^{\frac{3}{2}}}\right)\right) = \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin^3 x}{3!x^{\frac{5}{2}}} + o\left(\frac{\sin^3}{x^2}\right)$$

Первая дробь сходится условно по Дирихле, вторая дробь сходится абсолютно, о-малое от абсолютно сходящейся функции сходится абсолютно, поэтому все вместе сходится условно.

Пример. $\int\limits_2^\infty \sqrt{x}\ln\left(1-\frac{\sin x^2}{x-1}\right)dx$. Одна особая точка - бесконечность.
Разложим логарифм в ряд Тейлора:

$$\sqrt{x}\left(\frac{\sin x^2}{x-1} - \frac{\sin^2 x^2}{2(x-1)^2} + o\left(\frac{\sin^2 x^2}{(x-1)^2}\right)\right) = \frac{\sqrt{x}\sin x^2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}\sin^2 x^2}{2(x-1)^2} + o\left(\frac{\sin^2 x^2}{(x-1)^2}\right)$$

Первый член оценим по теореме о среднем, домножив на производную аргумента синуса:

$$\frac{2x\sqrt{x}\sin x^2}{2x(x-1)} = \frac{\sqrt{x}(-\cos x^2)'}{2x(x-1)}$$

Косинус ограничен, все остальное монотонно стремится к нулю (можно взять производную и убедиться в этом), значит, первый член сходится условно по Дирихле. Теперь докажем, что абсолютно он расходится:

$$\left|\frac{\sqrt{x}\sin x^2}{x-1}\right| \geqslant \frac{\sqrt{x}\sin^2 x^2}{|x-1|} = \frac{\sqrt{x}}{|x-1|}\cdot\frac{(1-\cos 2x^2)}{2} = \frac{\sqrt{x}}{2|x-1|} - \frac{\sqrt{x}\cos 2x^2}{2|x-1|}$$

Вторая дробь сходится анлогично предыдущему пункту, первая дробь расходится, значит, все вместе абсолютно расходится.
Теперь рассмотрим второй член разложения логарифма в ряд Тейлора:

$$\left|\frac{\sqrt{x}(-\sin^2 x^2)}{2(x-1)^2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{x}}{2(x-1)^2} \sim \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

Итак, второй член сходится абсолютно, значит, и о-малое от него сходится абсолютно. Так как первый член сходится условно, то интеграл сходится условно.

Пример. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha}dx$. Имеем две особые точки: 0 и ∞.
1. Исследуем на сходимость в нуле:

$$\frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha} \sim \frac{1+x}{x^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

сходится при $\alpha < 2$.
2. Иследуем на бесконечности. Начнем с абсолютной сходимости (обычная оценка сверху):

$$\left|\frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$$

- сходится абсолютно при $\alpha > 1$.
Исследуем на обычную сходимость. Домножим на производную аргумента косинуса:

$$\frac{(1+2x)\sin(x+x^2)}{(1+2x)x^\alpha} = \frac{(-\cos(x+x^2))'}{(1+2x)x^\alpha} = \frac{(-\cos(x+x^2))'}{x^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{x}}$$

Заметим, что первая дробь сходится по признаку Дирихле при $\alpha+1 > 0$, а вторая монотонна и ограниченна, значит, все выражение сходится по

признаку Абеля при $\alpha > -1$.
Теперь докажем, что ряд расходится абсолютно при $\alpha \in (-1, 1]$; оценим квадратом синуса, перейдем к косинусу и понизим степень:

$$\frac{|\sin(x+x^2)|}{x^\alpha} \geqslant \frac{1-\cos(2x+2x^2)}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos(2x+2x^2)}{2x^\alpha}$$

Первая дробь расходится, вторая сходится по Дирихле, значит, интеграл расходится.
Докажем расходимость при $\alpha \leqslant -1$. Используем для этого ряд из нулей синуса. Корни синуса найдем из уравнения $x^2 + x = \pi n$. Так как мы рассматриваем интеграл на $+\infty$, то нам нужен только положительный корень: обозначим его $\sigma(n) = \frac{-1+\sqrt{1+4\pi n}}{2}$. В ряду домножим на ппроизводную аргумента синуса и применим теорему о среднем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\sigma(n)}^{\sigma(n+1)} \frac{(1+2x)\sin(x+x^2)}{(1+2x)x^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+2\xi_n)\xi_n^\alpha} \int\limits_{\sigma(n)}^{\sigma(n+1)} (-\cos(x+x^2))'dx$$

Интеграл от производной косинуса в нулях синуса равен $2\cdot(-1)^n$, значит, общий член ряда имеет вид и оценивается по верхней границе

$$\frac{2\cdot(-1)^n}{(1+2\xi_n)\xi_n^\alpha} \geqslant \frac{1}{(2\sigma(n+1)+1)(\sigma(n))^\alpha}$$

(мы взяли разные σ, поскольку мы хотим оценить снизу, а $\alpha < 0$). Подставляя значение корня, получаем расходимость ряда, и, как следствие, расходимость интеграла.
Итак, соберем ответ: в нуле сходится при $\alpha < 2$, на бесконечности сходится абсолютно на $(1, \infty)$, сходится на $(-1, 1]$, расходится на $(-\infty, -1]$.

Пример. $\int\limits_1^\infty x^\alpha \sin\sin x dx$. Одна особая точка - бесконечность. Абсолютная сходимость очевидна:

$$|x^\alpha \sin\sin x| \leqslant x^\alpha$$

- сходится при $\alpha < -1$.
Чтобы исследовать обычную сходимость, надо доказать ограниченность первообразной от $\sin\sin x$. Сделаем это через ряды (потому что через домножение на интегрирующий множитель не получится):

$$\int\limits_0^y \sin\sin x dx = \int\limits_0^\pi ... + \int\limits_\pi^{2\pi} ... + ... + \int\limits_{2\pi k}^{y},$$

где $k = \left[\frac{y}{2\pi}\right]$. Чтобы получить оценку, не зависящую от y, докажем, что сумма всех интегралов, кроме последнего, равна нулю:

$$\int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin\sin x dx + \int\limits_{2\pi k+\pi}^{2\pi k+2\pi} \sin\sin x dx = \begin{cases} t = t+\pi \\ dx = dt \end{cases} =$$

Введем эту замену, чтобы привести второй интеграл к тем же пределам и сделать его отрицательным:

$$= \int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin\sin x dx + \int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin\sin(t+\pi) dt = \int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin\sin x dx + \int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin(-\sin t) dt = 0$$

Оценим последний интеграл:

$$\left| \int\limits_{2\pi k}^{y} \sin\sin x dx \right| \leqslant \int\limits_{2\pi k}^{y} |\sin x| dx \leqslant \int\limits_{2\pi k}^{y} 1 dx = y - 2\pi k \leqslant 2\pi$$

Значит, интеграл сходится по Дирихле при $\alpha < 0$.
Докажем (обычную) расходимость при $\alpha \geqslant 0$. Снова используем ряды, но на этот раз будем использовать теорему о среднем:

$$\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} x^\alpha \sin\sin x dx = \xi_n^\alpha \cdot \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \sin\sin x dx = \xi_n^\alpha (-1)^n \int\limits_{o}^{\pi} \sin\sin x dx$$

Интеграл $\int\limits_{o}^{\pi} \sin\sin x dx$ не зависит от n и положителен, обозначим его значение за β. Тогда общий член ряда имеет вид

$$\xi_n^\alpha \cdot (-1)^n \cdot \beta \geqslant (\pi n + \pi)^\alpha \cdot (-1)^n$$

то есть ряд расходится по необходимому признаку, и сам интеграл расходится.
Наконец, докажем абсолютную расходимость при $\alpha \in [-1, 0)$. Она устанавливается аналогично: так как

$$\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} |\sin\sin x| dx = \int\limits_{o}^{\pi} |\sin\sin x| dx = \beta$$

то общий член ряда имеет вид $\xi_n^\alpha \beta$. Подставляя оценку $\xi_n = \pi n + \pi$, имеем расходимость ряда и соотвественно расходимость Мы интеграла.
Соберем ответ: интеграл абсолютно сходится при $\alpha \in (-\infty, -1)$, сходится условно при $\alpha \in [-1, 0)$, расходится при $\alpha \in [0, \infty)$.

1.3 Интеграл, зависящий от параметра

Будем рассматривать интеграл $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx,\ y \in [c,d]$. Мы будем использовать следующие нумерованные теоремы:
Th 1. Из непрерывности f следует непрерывность F на $(c,d]$;
Th 2. F можно интегрировать по y и переставлять интегралы местами;
Th 3. Если f и f'_y непрерывны на $[a,b]\times[c,d]$, тогда $F'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$;
Th 4.

Пример (№3713в). Найти $\lim\limits_{a\to 0}\int\limits_0^2 x^2\cos ax\,dx$. Сначала интегрируем по частям:

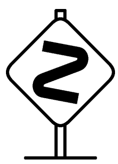
$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{a}\sin ax\cdot x\Big|_0^2 - \frac{1}{a}\int\limits_0^2 \sin ax\,dx\right) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{2\sin 2a}{a} + \frac{1}{a^2}\cos ax\Big|_0^2\right) = 4-2=2$$

С другой стороны, так как $\lim\limits_{a\to 0}\cos ax = 1$, то по теореме 1 получаем

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_0^2 x\cos ax\,dx = \int\limits_0^2 x\,dx = 2$$

Пример (№3715). Найти $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx$. Функция не определена при $y=0$, однако, посчитав предел по Лопиталю, можно увидеть, что предел в нуле равен нулю. Доопределим функцию нулем при $y=0$ и поехали интегрировать. Заметим, что $(e^{-\frac{x^2}{y^2}})' = -\frac{2x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}$, поэтому

$$\lim_{y\to 0} -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 -\frac{2x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx = \lim_{y\to 0} -\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\Big|_0^1 = \lim_{y\to 0} -\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{y^2}}-1\right) = \frac{1}{2}$$



Но если бы мы воспользовались теоремой 1, то получили бы другой ответ! Противоречие лишь кажущееся, так как для выполнения условий теоремы 1 необходима непрерывность по двум переменным (то есть по всем путям, ведущим нулю). Доопределив функцию нулем, мы сделали её непрерывной по оси Y.

Пример (№3734). $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctg(\alpha \cdot tgx)}{tgx} dx$. Пусть $f(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctg(\alpha \cdot tgx)}{tgx} dx$. Функция не определена в нуле и в $\frac{\pi}{2}$, поэтому она не непрерывна. Чтобы добить непрерывность, доопределим функцию:

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} r!!!!!!!!!!!et \\ \alpha_0, \; x = 0 \\ 0, \; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

По теореме 3 можно дифференцировать, тогда

$$f'_\alpha = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \, dx}{(1 + (\alpha \cdot tgx)^2) \cos^2 x} = \int\limits_0^{\infty} \frac{du}{(1 + (\alpha u)^2)(1 + u^2)}$$

Берем по частям:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} \int\limits_0^{\infty} \frac{d(\alpha u)}{1 + (\alpha u)^2} - \frac{1}{\alpha^2 - 1} \int\limits_0^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} =$$

Пример №3737. $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \;\; a, b > 0$. Заметим, что $(x^b)'_b = x^b \ln x$, откуда $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^y dy$. Интеграл можно менять местами:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y dy = \int\limits_a^b () \, dy = \int\limits_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln(y+1)\Big|_a^b = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

Заметим , что теорему применять можно при ????

1.4 Несобственный интеграл, зависящий от параметра

Доказать равномерную сходимость на $0, a \leqslant \alpha \leqslant b$, обычную сходимость $0 \leqslant \alpha \leqslant b$ $I = \int\limits_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$

Пример (№3755.2) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $1 < \alpha_0 \leqslant \alpha < \infty$ $1 < \alpha < \infty$

Пример (№37??) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$ $0 \leqslant \alpha < \infty$. Не сходится равномерно, ибо арктангенс (если взять интеграл) имеем максимум в нуле.

1.5 Интегралы Эйлера

Надо запомнить всего лишь 4 формулы. Основная идея - делание замен для того, чтобы попасть в пределы интегрирования.

№3843 $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}dx = B(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{8}\pi$

№3849 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$. Сведем к бета-функции заменой $t = 1 - x^n$, $dx = -\frac{1}{n}(1-t)^{\frac{1}{n}-1}dt$. Имеем

$$\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot (1-t)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}B\left(-\frac{1}{n}+1, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\pi}{n\sin\pi n}$$

№3851 $\int\limits_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx$. Сделаем замену, чтобы подогнать пределы интегрирования под бета-функцию. Замена $t = \frac{1}{1+x^n}$. Пределы пересчитаются, тогда интеграл равен

$$\int\limits_0^1 (\frac{1}{t}-1)^{\frac{m-1}{n}} t\frac{1}{n}(\frac{1}{t}-1)^{\frac{1}{n}-1}\frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{n}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{n}-1\right)^{\frac{m-n}{n}}\frac{1}{t}dt$$

!!!!!!

№3856

$$\int\limits_0^{\frac{pi}{2}} \sin^m x\cos^n x dx = \begin{cases} \sin x = t \\ dt = \cos x\, dx \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{cases} = \int\limits_0^1 t^m(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt =$$

$$\begin{cases} u = t^2 \\ du = 2t\, dt \end{cases} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^{\frac{m-1}{2}}(1-u)^{\frac{n-1}{2}}$$

Пример из Кудрявцева. $\int\limits_{-2}^2 \frac{dx}{-2\sqrt[4]{(2+x)^3(2-x)}}$. Замена $t = 2+x$. Имеем

$\int\limits_0^4 \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}(4-t)^{\frac{1}{4}}}$. Вынесем четверку, делая замену $u = \frac{t}{4}$. Тогда

$$\frac{4}{4^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{3}{4}}} \int\limits_0^1 \frac{du}{u^{\frac{3}{4}}(1-u)^{\frac{1}{4}}} = B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{pi}{4}} = \pi\sqrt{2}$$

Пример посложнее. $\int\limits_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} \frac{dx}{(x+3)^2}$. Сначала избавляемяс от второго множеителя, делая замену $t = \frac{1}{x+3}$. Тогда $-\int\limits_{1/4}^{1/5} \sqrt{\frac{\frac{1}{t}-4}{5-\frac{1}{t}}} dt = \int\limits_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1-4t}{5t-1}} dt$. Теперь замена $u = 4(5t-1)$:

$$\frac{1}{20} \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{4(1-u)}{5u}} du = \frac{\sqrt{4}}{20\sqrt{5}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{20\sqrt{5}}$$

Пример (№3863). $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx$. Сначала посчитаем интеграл без логарифма:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \begin{cases} t = \frac{1}{1+x} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{cases} = \int\limits_0^1 \frac{(\frac{1}{t}-1)^{p-1}}{\frac{1}{t}} \frac{1}{t^2} dt = \int\limits_0^1 (1-t)^{p-1} t^{-p} dt$$

Значение этого интеграла $B(1-p, p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$

Как убить логарифм? Возьмем производную от функции по параметру: $f'_p = \left(\frac{\pi}{\sin \pi p}\right)' = -\frac{\cos \pi p}{\sin^2 \pi p} \pi^2$. Дифференцировать можно. потому что интеграл сходится равномерно.

пример. *о*

Глава 2

Ряды

В данном разделе мы будем изучать следующие объекты:

- Числовые ряды
- Функциональные ряды (в т.ч. степенные, ряды Фурье)

2.1 Числовые ряды

2.1.1 Базовые определения и теоремы

Определение 1 *Ряд - сумма счетного числа слагаемых:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

Определение 2 *Частичная сумма S_n - сумма первых n слагаемых*

Определение 3 *Сумма ряда - предел последовательности частичных сумм*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Если предел существует и конечен, то ряд сходится. Если предел бесконечен, ряд расходится. Заметим, что, согласно теоремам о пределе суммы последовательностей и пределе последовательности, умноженной на число, сходящиеся ряды образуют линейное пространство относительно сложения и умножения на константу.

Определение 4 *Остаток ряда - разность между частичной суммой ряда и самим рядом:*

$$R_k = S - S_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_k$$

Пример. Геометрический ряд $a + aq + aq^2 + \ldots$. По школьной формуле $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Имеем случаи:

1. $|q| < 1: \; S = \frac{a}{1-q}$

2. $|q| > 1: \; S = \infty$

3. $q = 1: \; S = \infty$

Итак, ряд сходится, только если $|q| < 1$.
Следующие теоремы устанавливаются для любых рядов:

Теорема 3 *(необходимое условие сходимости ряда)*
Если ряд сходится, то предел общего члена равен 0. Равносильная формулировка: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. По условию, существует число S - предел частичных сумм ряда. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. $\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx, \; x \neq \pi k, \; k \in \mathbb{Z}$. Зафиксируем x. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx = 0$. Но это противоречит тому, что $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Значит, ряд расходится.

Пример. Гармонический ряд расходится, т.к. расходится последовательность частичных сумм: $S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \ldots = 1 + \frac{n}{2}$

Теорема 4 *(критерий Коши сходимости ряда)*
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \; \forall n > N \; \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Доказательство. По определению, ряд сходится, когда существует предел частичных сумм. Применим к ним критерий Коши, получим условие: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Но $S_{n+p} - S_n \equiv a_{n+1} + ... + a_{n+p}$. $\square$

Теорема 5 *(критерий сходимости через остаток)*
1. Если ряд сходится, то сходится любой из его остатков.
2. Если хотя бы один остаток сходится, то ряд тоже сходится.

Доказательство. 1. По условию, существует сумма ряда S. Зафиксируем номер $N \in \mathbb{N}$ и рассмотрим остаток $R_N = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} a_k$, а также последовательность σ частичных сумм ряда-остатка R_N: $\sigma_n = a_{N+1} + ... + a_{N+n} =$

$\sum\limits_{k=N+1}^{N+n} a_k$. Рассмотрим её предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{n+N} - S_N) = S - S_N = R_N$. Значит, остаток сходится.
2. По условию, существует такой номер n_0, что остаток R_{n_0} сходится. Тогда существует предел частичных сумм σ_n этого остатка: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, $\sigma_n = a_{n_0} + \ldots + a_{n_0+n}$. Пусть $n_0 + n = m$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_m = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{n_0} + \sigma_{m-n_0}) = S_{n_0} + \sigma$, то есть основной ряд сходится. $\square$

2.1.2 Знакопостоянные ряды

Исследуем подробнее знакопостоянные ряды. Ряд называется знакопостоянным, если, начиная с некоторого номера, все его члены имеют одинаковый знак (конечное число членов в начале не влияет на сходимость). Следующие теоремы устанавливаются для положительных рядов, для отрицательных рядов применимы эти же рассуждения, стот лишь поменять знак.

Теорема 6 *(критерий сходимости для неотрицательных рядов)*
Ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.

Доказательство. $\Rightarrow$. По условию, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. Значит, последовательность частичных сумм ограничена сверху.
$\Leftarrow$. По условию, ограниченная неубывающая последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху, значит, по теореме Вейерштрасса у неё есть предел S. $\square$
Следующее важное утверждение о положительных рядах - признак сравнения. Он позволяет делать выводы о сходимости ряда, сравнивая его с известными рядами: геометрической прогрессией, обобщенным гармоническим рядом (то есть с произвольным показателем степени).

Теорема 7 *(признак сравнения в оценочной форме)*
Пусть даны последовательности $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда из сходимости ряда с общим членом b_n следует сходимость ряда с общим членом a_n (из расходимости ряда с общим членом a_n следует расходимость ряда с общим членом b_n).

Доказательство. Докажем исходя из критерия сходимости. Пусть A_n, B_n - частичные суммы рядов с членами $a_n,\ b_n$. Так как ряд B сходится, то существует верхний предел M для его частичных сумм. Так как члены ряда A меньше членов ряда B, то $A_n \leqslant B_n \leqslant M$, откуда по транзитивности неравенств $A_n \leqslant M$, значит, у A_n есть предел. $\square$

Пример. Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Рассмотрим $p \leqslant 1$, $n^p \leqslant 1$, $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$. Так как гармонический ряд расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ расходится. С другой стороны, при $p > 1$ ряд сходится по интегральному признаку.

Пример. Найти сумму. $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + ...$, $a_{n+1} = \sqrt{2-b_n}$, $b_{n+1} = \sqrt{2+b_n}$. Заметим, что $b_1 = 2\cos\frac{\pi}{4}$, $b_2 = \cos\frac{\pi}{8}$. Дальше эта формула выводится по индукции. $b_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. $a_n = \sqrt{2-b_{n-1}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ Ита, $a_n \leqslant 2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}$.

Теорема 8 *(Признак сравнения в предельной форме)*
Пусть даны неотрицательные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. *Пусть* $k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. *Тогда, если*
1. $k = const$ $(k \neq 0)$*: ряды сходятся или расходятся одновременно.*
  1.1. $k = 1$*: ряды эквивалентны.*
2. $k = 0$*: если B сходится, то и A сходится.*
3. $k = \infty$*: если A сходится, то и B сходится.*

Доказательство.
1. Запишем определение предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ для $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0$:

$$\exists N(\varepsilon)\ \forall n > N : \frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3k}{2}$$

откуда $a_n < \frac{3k}{2} b_n$. Значит, если ряд B сходится, то и ряд A сходится.
2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Для $\varepsilon = 1$ $\exists N$ $\forall n > N$: $\frac{a_n}{b_n} < 1$, значит $a_n < b_n$ и сходимость рядов следует из признака сравнения в оценочной форме.
3. Переворачивая предел в п.2, получаем все аналогично. $\square$

Пример. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha})$. Имеем $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. При $\alpha > 0$ S_n сходится к 1, при $\alpha < 0$ ряд расходится.

Теорема 9 *(третий признак сравнения)*
Пусть даны ряды $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *причем* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$. *Тогда если B сходится, то и A сходится.*

Доказательство. Перемножив положительные неравенства $\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1} ... \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k}$, получим $\frac{a_n}{a_1} \leqslant \frac{b_n}{b_1}$, откуда $a_n \leqslant b_n \cdot const$. Из признака сравнения в оценочной форме получаем, что ряд A сходится, если сходится ряд B. □

Переходим к более тонким признакам сходимости ряда. Алгоритм вырисовывается следующий: сначала даламберим, потом кошируем. Если не помогает, пробуем признак Раабе, но все вопросы снимает гауссирование.

Теорема 10 *(признак Даламебра в оценочной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n. Тогда
1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, то ряд сходится;
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant q > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. 1. Ряд с общим членом $b_n = q^n,\ q \in (0,1)$, сходится. По условию, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, значит, ряд сходится по 3-му признаку сравнения.
2. Ряд с общим членом $b_n = 1$ расходится. По условию, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, значит, ряд расходится по 3-му признаку сравнения. □

Теорема 11 *(признак Даламбера в предельной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n. Тогда
1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, то ряд сходится;
2. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. 1. Пусть верхний предел равен $q < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q + \varepsilon = q_1 < 1$. Тогда по признаку Даламебра в оценочной форме ряд сходится.
2. Так как для некоторой подпоследовательности $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то не выполняется необходимый признак, следовательно, ряд расходится. □
Замечание. Если предел равен 1, то $r = q = 1$.
Замечание. В отличие от признака Коши, в п.2 нельзя заменить нижний предел на верхний.
Замечание. Если все-таки получилась единица, то ряд может как сходиться, так и расходиться. Но если предел подходит к единице сверху, то ряд расходится (в силу невыполнения необходимого признака).

Теорема 12 *(признак Коши в оценочной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n.
Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, то ряд сходится.
Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Сравним с геометрической прогрессией.
1. $a_n \leqslant q^n,\ q < 1$, значит ряд сходится по признаку сравнения.
2. $a_n > 1$, значит ряд расходится по необходимому признаку. $\square$

Теорема 13 *(признак Коши в предельной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:

1. *Если $q < 1$, то ряд сходится.*

2. *Если $q > 1$, то ряд расходится.*

Доказательство. Аналогично признаку Даламбера.
1. Рассмотрим предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = q < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Тогда

$$\exists n_0\ \forall n > n_0 : \sqrt[n]{a_n} = q + \varepsilon = \frac{q+1}{2} < 1$$

Тогда ряд сходится по признаку Коши в оценочной форме.
2. Рассмотрим предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = q > 1$. Выделим подпоследовательность a_{n_k}, на которой достигается этот верхний предел. Возьмем $\varepsilon = q-1$. Тогда

$$\exists k_0\ \forall k > k_0 : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$$

Значит, $a_{n_k} > 1$, и ряд расходится по необходимому условию. $\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n$. Кошируя это ряд, взяв наибольшую подпоследовательность, получим предел $\frac{3}{4}$, значит, ряд сходится. Можно ещё просто посчитать две подпоследовательности.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$. Оценим это рядом $b_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{2n-\ln n}$. В итоге получится, что ряд сходится.

Теорема 14 *(признак Раабе в оценочной форме)*
Пусть дан знакопостоянный ряд с общим членом $a_n > 0$. Тогда:
1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$, то ряд расходится.
2. Если $\exists \alpha > 1 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$ тогда ряд сходится.

Доказательство. 1. Пусть $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n-1}{n}$. Введем ряд с общим членом $b_n = \frac{1}{n-1}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, и так как ряд b_n расходится, то ряд a_n расходится по третьему признаку сравнения.
2. Пусть $\beta \in (1, \alpha)$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\beta}$ сходится. Далее, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = (\frac{n}{n+1})^\beta = (1+\frac{1}{n})^{-\beta} = 1 + \frac{\beta}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Затем, $-\frac{\beta}{n} > -\frac{\alpha}{n} \implies 1 - \frac{\beta}{n} > 1 - \frac{\alpha}{n}$. Так

как $O(\frac{1}{n^2})$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\frac{\alpha}{n}$ и $\frac{\beta}{n}$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : 1 - \frac{\alpha}{n} < 1 - \frac{\beta}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Правая часть равна $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. По условию, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$. Из этих двух условий по свойству транзитивности неравенств получаем оценку $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$, откуда следует сходимость ряда. □

Теорема 15 *(Признак Раабе в предельной форме)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n и $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = R$. Тогда:
1. $R < 1$ - ряд расходится
2. $R > 1$ - ряд сходится.

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon = 1 - R$. Тогда

$$\exists n_0\ \forall n > n_0 : n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < R + \varepsilon = 1$$

Значит, $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{n_n}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 + \frac{1}{n}$, тогда ряд расходится по необходимому признаку.
2. Пусть $\alpha \in (1, R)$, $\varepsilon = R - \alpha$. Тогда

$$\exists n_0\ \forall n > n_0 : n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > \alpha$$

откуда $\frac{a_{n+1}}{a} < 1 - \frac{\alpha}{n}$. Значит, ряд сходится по признаку Раабе в оценочной форме. □
Замечание. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})$.

Теперь докажем очень прикольный признак, из которого следуют почти все остальные признаки.

Теорема 16 *(признак Куммера)*
Пусть даны две последовательности $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$. Тогда:
1. Если $\exists \alpha > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : C_n - C_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha$ - ряд с общим членом a_n сходится.
2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n}$ расходится и $C_n - C_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 0$, то ряд с общим членом a_n расходится.

Доказательство. 1. $\alpha \cdot a_k \leqslant C_k a_k - C_{k+1} a_{k+1}$. Далее $\alpha \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant C_1 a_1 - C_{n+1} a_{n+1} \leqslant C_1 a_1$. Значит, $S_n \leqslant \frac{C_1 a_1}{\alpha}$, и ряд сходится по третьему признаку сравнения.
2. $C_n \leqslant C_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}$, значит, $\frac{C_n}{C_{n+1}} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Пусть $b_n = \frac{1}{C_n}$. Тогда ряд с

общим членом b_n расходится и $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n}$, поэтому ряд с общим членом a_n расходится по 3-му признаку сравнения. □
Следствие 1. Признак Даламбера при $C_n \equiv 1$
Следствие 2. Признак Раабе. Возьмем $C_n = n - 1$. Имеем
1. $n - 1 - n \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha \implies 1 - \frac{1}{n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\alpha}{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{1+\alpha}{n}$.
Следствие 3. Признак Бертрана. Возьмем $C_n = (n-2)\ln(n-1)$. Тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n}$ ряд сходится.

Теорема 17 *(признак Гаусса)*
Пусть дан положительный ряд. Представим его в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = D - \frac{R}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

Тогда:
1. Если $D > 1$ - ряд расходится;
2. Если $D < 1$ - ряд сходится;
3. Если $D = 1$, $R \leqslant 1$ - ряд расходится;
4. Если $D = 1$, $R > 1$ - ряд сходится.
Здесь θ_n - ограниченная монотонная последовательность, $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Пункты 1 и 2 следуют из признака Даламбера, так как $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
3. По условию, имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{R}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

Тогда $n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = R - \frac{\theta_n}{n^\varepsilon}$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right) = R$, значит, ряд сходится по признаку Раабе.
4. По условию, имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

откуда $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1 = -\frac{\theta_b}{n^\varepsilon}$. Домножим на логарифм и рассмотрим предел получившегося выражения:

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot n\left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln n \cdot -\frac{\theta_b}{n^\varepsilon}\right) = 0$$

Значит, по признаку Бертрана ряд расходится. □

Теорема 18 *(интегральный признак)*
Пусть дана непрерывная неотрицательная невозрастающая функция $f(x)$, определенная на $[1, \infty)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно, где $a_n = f(n)$ - значения функции в натуральных числах.

Доказательство. Очевидно,что $\forall x \geqslant 1\ \exists k \in \mathbb{N} : k \leqslant x \leqslant k+1$. По условию невозрастания имеем $f(k) \geqslant f(x) > f(k+1)$. Значит, $a_{k+1} < f(x) \leqslant a_k$. Определенный интеграл от функции на единичном отрезке не больше её максимального значения, поэтому

$$a_{k+1} < \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leqslant a_k$$

Просуммируем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} < \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Отсюда получаем, что

$$S_{n+1} - a_1 < \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leqslant S_n$$

Если ряд сходится, то он ограничен. Значит, ограничен и интеграл, а поскольку это интеграл от положительной функции, он тоже сходится. Обратно, если интеграл сходится, то ряд ограничен, значит, он сходится по теореме Вейерштрасса. □

Рассмотрим ещё несколько интересных свойств знакопостоянных рядов.

Теорема 19 *(связь признаков Даламбера и Коши)*
Если для ряда с общим членом a_n выполняются условия признака Даламбера, то для него выполняются условия признака Коши.

Доказательство. Условие для признака Даламбера: $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$. Перемножая неравенства $\frac{a_2}{a_1} \leqslant q$, $\frac{a_3}{a_2} \leqslant q, ..., \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant q$, получим $\frac{a_n}{a_1} \leqslant q^n$, откуда $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1} q$. Зафиксируем $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Тогда $\exists n_0\ \forall n >$

$n_0 : \sqrt[n]{a_1}q < \frac{q+1}{2} = q_1$. Отсюда получаем условие применимости признака Коши: $\sqrt[n]{a_n} < q_1 < 1$. $\square$

Ещё одна область применения рядов - **оценка погрешности приближенной величины с помощью положительного ряда**. Действительно, пусть R_n - n-ный остаток ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда из доказательства интегрального признака $a_{k+1} < \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant a_k$, но поскольку по определению $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$, получаем оценку:

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant R_n < \int\limits_{n}^{\infty} f(x)dx$$

Пример. Вычислим с точностью до 0,001 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Ответ: $1,082 \pm 0,001$ (точный ответ $\frac{\pi^4}{90}$)

2.1.3 Знакопеременные ряды

Переходим к исследованию рядов с произвольным знаком. Иногда бывает полезно рассмотреть этот ряд с числами постоянного знака, что мотивирует следующее определение.

Определение 5 *Ряд сходится абсолютно, если сходится ряд, составленный из модулей членов этого ряда. Ряд сходится условно, если он сходится, но расходится абсолютно.*

Теорема 20 *Если ряд сходится абсолютно, то ряд сходится.*

Доказательство. Следует напрямую из критерия Коши и свойства модуля: $||a_1| + ...|a_n|| \geqslant |a_1 + ... + a_n|$. $\square$

Теорема 21 *(признак Лейбница для знакочередующихся рядов)*
Пусть ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n$, *где* $v_n > 0$ *и монотонно убывает. Тогда ряд сходится. Более того, имеет место оценка погрешности* $|R_n| \leqslant v_n$

Доказательство. 1. Посчитаем частичную сумму для $2k$:

$$S_{2k} = v_1 - v_2 + ... - v_{2k}$$

$$S_{2k+2} = S_{2k} + v_{2k+1} - v_{2k+2}$$

$$S_{2k+2} - S_{2k} = v_{2k+1} - v_{2k+2}$$

$$S_{2k} = v_1 - (v_2 - v_3) - (v_4 - v_5) - ... - (v_{2k-2} - v_{2k-1}) - v_{2k}$$

Значит, эта последовательность возрастает и ограничена сверху, значит, у неё есть конечный предел: $S_{2k} \leqslant u_1$

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (S_{2k} + v_{2k+1}) = S$$

Следовательно,

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Последовательность частичных сумм для нечетных чисел также убывает, доказательство аналогичное.
2. Докажем оценку погрешности. $|R_{2k}| = S - S_{2k} < S_{2k+1} - S_{2k}$. Итак,

$$|R_{2k}| \leqslant v_{2k+1}$$

$$R_{2k+1} = S_{2k+1} - S < S_{2k+1} - S_{2k+2}$$

$$|R_{2k+1}| \leqslant v_{2k+2}$$

$\square$

Теорема 22 *(Преобразование Абеля)*
Пусть $B_i = \sum\limits_{k=1}^{i} b_k$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

Доказательство. $b_k = B_k - B_{k-1},\ k \in \{2, ..., n\}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} a_k \cdot (B_k - B_{k-1}) = a_1 b_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} a_k b_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{k+1} b_k = a_1 b_1 = \sum\limits_{k=2}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \cdot B_k + +a_n b_n - a_2 b_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ $\square$

Теорема 23 *(неравенство Абеля)*
Пусть последовательность a_n монотонно возрастает или убывает, и пусть существует константа M такая, что $\forall k \in \{1...n\}: \ |b_1 + b_2 + ...b_n| \leqslant M$ (то есть она ограничивает модуль частичных сумм ряда B). Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M(|a_1| + 2|a_n|)$$

Доказательство. Применим преобразование Абеля к ряду с общим членом $a_n b_n$: $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| = \left|\sum\limits_{k+1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n\right| \leqslant \left|\sum\limits_{k+1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k\right| + |a_n| \cdot |B_n| \leqslant M \cdot \left|\sum\limits_{k+1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\right| + M|a_n| \leqslant M(|a_1| + 2|a_n|)$. $\square$

Теорема 24 *(признак Дирихле)*
Пусть общий член ряда имеет вид $a_n b_n$ Тогда если:
1. Последовательность a_n монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
2. Последовательность частичных сумм b_n ограничена константой B;
Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство. Используем критерий Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, предел последовательности a_n равен нулю, тогда для

$$\frac{\varepsilon}{6B} > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right|$. Подберем константу из неравенства Абеля: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+i} b_k\right| = |B_{n+i} - B_n| \leqslant |B_{n+i}| + |B_n| \leqslant 2B = M$. Значит, из неравенства Абеля получаем $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant 2B(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) < 2B \cdot (\frac{\varepsilon}{6B} + \frac{2\varepsilon}{6B}) = \varepsilon$. $\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$. По признаку Дирихле ряд сходится, так как частичные суммы синуса арифметической прогрессии сходятся.

Теорема 25 *(признак Абеля)*
Пусть общий член ряда имеет вид $a_n b_n$. Тогда если
1. Последовательность a_n монотонна и ограничена константой M;

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится.*
Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Докажем по критерию Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как сходится ряд с общим членом b_n, то по критерию Коши для

$$\frac{\varepsilon}{3M} > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Из неравенства Абеля получаем $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) < \frac{\varepsilon}{3M}(M + 2M) = \varepsilon$. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < \varepsilon \quad \square$$

Упражнение. Доказать признак Абеля, используя признак Дирихле. Решение. Условие означает, что признак Дирихле более общий, чем признак Дирихле, поэтому покажем, что если ряд удовлетворяет условиям признака Абеля, то он удовлетворяет и признаку Дирихле.

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. По условию признака Абеля, последовательность a_n монотонна и ограниченна, поэтому у её есть конечный предел a, поэтому исходный ряд можно представить в виде

$$a \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (a_b - a)$$

Первый ряд сходится по условию, второй удовлетворяет признаку Дирихле.

Пример. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\sin n\alpha \cos \frac{\pi}{n}) / \ln \ln n$. Косинус монотонный и ограниченный, а все остальное сходится по Дирихле. Значит,ряд сходится по Абелю.

Теорема 26 *(признак Даламбера для знакопеременных рядов)*
Пусть a_n *- общий член знакопеременного ряда, и* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$. *Тогда:*
1. Если $0 \leqslant q < 1$, *то ряд сходится абсолютно.*
2. Если $q > 1$, *то ряд расходится.*
Если $q = 1$, *ничего нельзя сказать.*

Доказательство. 1. Следует из признака Даламбера для знакопостоянных рядов.
2. Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q > 1$ Для

$$\varepsilon = q - 1 > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

откуда $\left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q\right| < \varepsilon$, поэтому $1 < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q+1$, значит не выполняется необходимый признак. □

Теорема 27 *(признак Коши для знакопеременных рядов)*
Пусть a_n - общий член знакопеременного ряда, и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:
1. Если $0 \leqslant q < 1$, то ряд сходится абсолютно.
2. Если $q > 1$, то ряд расходится.
Если $q = 1$, ничего нельзя сказать.

Доказательство. 1. Следует из признака Коши для положительных рядов.
2. Проводится аналогично доказательству п.2 в признаке Даламбера. □

Признак сравнения для знакопеременных рядов не работает. Приведем пример: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n},\ b_n = a_n + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Предел отношения таких рядов равен 1, то есть они эквивалентны, но вот первый сходится, а второй - расходится

2.1.4 Свойства абсолютно сходящихся рядов

Лемма. Если ряд сходится абсолютно, то модуль его суммы не превосходит суммы его модулей. Лемма следует из неравенства

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$$

Теорема 28 *(о перестановках в абсолютно сходящемся ряде)*
Пусть дан ряд с общим членом a_n, и он сходится абсолютно. Пусть его сумма равна S, сумма из модулей равна $\overline{S}$. Обозначим соответствующие частичные суммы как S_n, $\overline{S_n}$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^*$ с переставленными членами исходного ряда, обозначим его сумму и частичную сумму как S^*, S_n^* (для ряда из модулей соответственно $\overline{S^*}$, $\overline{S_n^*}$). Тогда:
1. S^* существует и равна S;
2. Ряд из a_n^* сходится абсолютно.

Доказательство. 1. По условию, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \overline{S}$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : |\overline{S_n} - \overline{S}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Из леммы следует, что $|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Перейдем к переставленному ряду. Выберем в нем такой номер m_0, чтобы частичная сумма $S^*_{m_0}$ содержала все слагаемые, входящие в S_{n_0}. Тогда для любого числа $m > m_0$ имеем

$$|S^*_m - S_{n_0}| < |\overline{S}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда $|S^*_m - S| = |S^*_m - S_{n_0} + S_{n_0} - S| \leqslant |S^*_m - S_{n_0}| + |S_{n_0} - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. В итоге мы доказали сходимость ряда с переставленными членами и равенство его суммы сумме исходного ряда:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall m > m_0 : |S^*_m - S| < \varepsilon$$

2. Абсолютная сходимость следует из таких же рассуждений для ряда с модулем. $\square$

Теорема 29 *Если ряд сходится абсолютно, то ряд, умноженный на константу, сходится абсолютно.*

Доказательство. Так как ряд сходится, то по определению $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N} : ||a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}|| < \varepsilon$. Теперь возьмем $\frac{\varepsilon}{|c|}$. Тогда для ряда, умноженного на константу, получаем, что $||ca_{n+1}| + ... + |ca_{n+p}|| = |c| \cdot ||a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}|| < \frac{\varepsilon \cdot |c|}{|c|}$. $\square$

Теорема 30 *Сумма абсолютно сходящихся рядов сходится абсолютно.*

Доказательство. Так как сумма модулей больше модуля суммы, то $\sum\limits_{n=1}^{k}|a_n| + \sum\limits_{n=1}^{k}|b_n| \geqslant \sum\limits_{n=1}^{k}|a_n + b_n|$. Но это значит, что частичные суммы ряда $|a_n + b_n|$ ограничены числом $S_a + S_b$ (суммами рядов), поэтому ряд сходится. $\square$

Теорема 31 *(О произведении абсолютно сходящихся рядов)*
Сумма всевозможных произведений $a_i b_j$ сходится абсолютно, и сумма ряда равна произведению сумм.

Доказательство. Введем обозначения $u_n = |a_n|,\ v_n = |b_n|, S^i = \sum\limits_{n=1}^{\infty} i_n, \overline{S^i} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |i_n|$. Частичные суммы S_n произведения рядов будут суммами элементов угловых миноров бесконечной матрицы

$$\begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \dots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \dots \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Получим $S_1 = u_1v_1,\ S_2 = (u_1 + u_2)(v_1 + v_2),\ S_3 = (u_1 + u_2 + u_3)(v_1 + v_2 + v_3)\dots$. Получаем $S_n = \overline{S^a_n} \cdot \overline{S^b_n}$. Так как ряды сходятся абсолютно, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S^a_n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S^b_n} = \overline{S^a} \cdot \overline{S^b}$. □

Определение 6 *(произведение рядов по Коши)*
Пусть $S_a \cdot S_b = S_c$. Определим ряд-произведение следующим образом:
$c_1 = a_1b_1$
$c_2 = a_1b_2 + a_2b_1$
$c_3 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_3$

То есть суммируем по диагоналям бесконечной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & \\ a_3b_1 & \dots & & \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

Пример 1. $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = 1,\ b_n = \frac{n}{2^n}$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{k(k+1)-2^{n+1-k}}$.

Пример 2. Произведение расходящихся рядов $a_n = 1,5^n,\ b_n = 1 - 1,5^n$ в смысле Коши - сходится, так как $c_n = 0,75^n$.

Заметим, что условной сходимости недостаточно! Так, для $a_n = b_n = (-1)^{n-1}/\sqrt{n}$ ничего не выйдет. Смиритесь. Ребят а че вы с пары то свалили? Неуютненько.

Теорема 32 *(о перестановках в абсолютно сходящемся ряде)*
Если ряд сходится

Доказательство. □

2.1.5 Свойства условно-сходящихся рядов

Теорема 33 *(лемма о сходимости)*
Пусть ряд с общим членом a_n сходится условно. Рассмотрим отдельно подпоследовательности из положительных и отрицательных членов ряда. Тогда их суммы $+\infty, -\infty$ соответственно.

Доказательство. Пусть S^+, S^- - суммы положительных и отрицательных членов. Тогда $\overline{S} = S^+ - S^-$, $S = S^+ + S^-$. Посклькy $\overline{S} = \infty$, а $S = const$. Тогда $S^+ = +\infty$, $S^- = -\infty$. $\square$

Теорема 34 *(Римана)*
Если ряд сходится условно, то для любого действительного числа найдется такая перестановка ряда, при которой ряд сходится к этому числу.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ - искомое число. По предыдущей лемме, ряд a_n^+ из положительных членов расходится, значит, найдется такая его частичная сумма S_1^+, что $S_1^+ > \alpha$. Дальше найдем такую частичную сумму S_1^- из отрицательных членов, что $S_1^+ + S_1^- < \alpha$. Будем повторять эту операцию, беря частичные суммы из остатков рядов с положительными или отрицательными членами. Поскольку исходный ряд сходится, то его общий член стремится к нулю, поэтому и частичные суммы отрицательных и положительных членов стремятся к нулю. Поэтому ряд $S_1^+ + S_1^- + S_2^+ + S_2^- + ...$ является рядом Лейбница и сходится к числу α. Переставив члены исходного ряда в соответствии с этими частичными суммами, получим искомую перестановку. $\square$

2.2 Функциональные последовательности

2.2.1 Базовые определения

Определение 7 *Пусть функции $f_1, f_2...$ заданы на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$. Тогда задана функциональная последовательность*

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x)... \;, x \in X$$

Определение 8 *Функциональная последовательность f_n сходится **поточечно** к $f(x)$ в точке x_0, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n > N : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Множество всех $x_0 \in X$, для которых предел существует, называется областью сходимости последовательности.

Определение 9 *Функциональная последовательность f_n* ***равномерно сходится*** *к функции f на множестве X, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \; \forall n > N \; \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается как $f_n \rightrightarrows f$

Это определение эквивалентно **супремум-критерию сходимости**:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Теорема 35 *Супремум-критерий эквивалентен определению равномерной сходимости.*

Доказательство. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на X. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по определению для

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \; \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $a_n = \sup |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 : |a_n| < \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Обратно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 : \sup |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Значит, выполняется неравенство

$$\forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup |f_n(x) - f(x)|$$

откуда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \; \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff f_n \rightrightarrows f$$

□

Теорема 36 *(критерий Коши равномерной сходимости)*
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве X тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 \; \forall p \in \mathbb{N} \; \forall x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, $f_n(x) \rightrightarrows f$ на X. Тогда для

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда $\forall p \in \mathbb{N} \ \forall n + p > n > n_0 : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Обратно, по условию для

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Сходимость имеет место для каждой отдельной точки $x \in X$ (поточечная сходимость), тогда по критерию Коши для числовой последовательности сущетсвует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$. Тогда в неравенстве (1) можно перейти к пределу: $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. $\square$

Следствие (метод граничной точки). Если $f_n(x) \in C[a, b)$ и $f_n(x) \to f(x) \ \forall x \in (a, b)$, и $f_n(a)$ расходится. Тогда $f_n(x)$ не сходится равномерно к $f(x)$ на (a, b).

Доказательство. Допустим, что сходимость равномерная. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

По условию, функции f_n непрерывны на $[a, b)$, тогда $\lim\limits_{x\to a+0} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $|f_{n+p}(a) - f_n(a)| < \varepsilon$. По критерию Коши для числовой последовательности $f_n(a)$ сходится. Но это противоречит условию. $\square$

Теорема 37 *(метод оценки остатка функциональной последовательности)*
Пусть $f_n(x) \to f(x)$ на множестве E и $r_n(x) = f_n(x) - f(x)$ - остаток ряда. Тогда:
1. Если $\forall x \in E : |r_n(x)| \leqslant b_n \to 0$, то ф.п. сходится равномерно.
2. Если $\exists X_n \in E : r_n(x_n) \to a \neq 0$, то ф.п. не сходится равомерно.

Доказательство. 1. По условию, $\forall x \in E : |r_n(x)| \leqslant b_n$, тогда $\sup\limits_{x\in E} |r_n(x)| \leqslant b_n$. Отсюда получаем, что

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

то есть функция сходится равномерно на множестве E.
2. Пусть $\exists X_n \in E : r_n(x_n) \to a \neq 0$. Но это эквивалентно отрицанию супремум-критерия, поэтому последовательность не сходится равномерно. $\square$

Теорема 38 *(о пределе равномерно сходящейся функциональной последовательности)*
Пусть функции f_n непрерывны на X и $f_n \rightrightarrows f$. Тогда f непрерывна на X.

Доказательство. По определению, непрерывность на $X \Leftrightarrow$ непрерывность в каждой точке $x \in X$. Рассмотрим x_0 и зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию имеется равномерная сходимость, тогда для

$$\frac{\varepsilon}{3} > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 \; \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Пусть $n > n_0$, функция $f_n(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда для

$$\frac{\varepsilon}{3} > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in X : 0 \leqslant |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Оценим эту разницу: $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$. Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

то есть функция непрерывна в точке x_0. □

2.2.2 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей

1. Линейные комбинации сходятся с соответствующим линейным комбинациям пределов.

2. Умножение на ограниченную (на X) функцию: $(gf_n) \rightrightarrows (gf)$

3. На любом подмножестве X функция равномерно сходится.

4. Если $\forall x \in X : f_n(x) \to f(x)$ и $E \subset X$ - конечное множество, то на E $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ - функция сходится равномерно.

5. Последовательность, равномерно сходящаяся на двух множествах, равномерно сходится на их объединении.

Доказательство.
1. Докажем для линейной комбинации $\alpha f + \beta g$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию $f_n \rightrightarrows f$ на X, тогда для $\frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} > 0 \; \exists n_1 \in \mathbb{N} \; \forall x \in X$:

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|}$. Тоже самое для функции g. Для неё существует константа n_2. Выбрав максимум из них, получаем

$$|(\alpha f_n(x)+\beta g_n(x))-(\alpha f+\beta g)| \leqslant |\alpha|\cdot|f_n(x)-f(x)|+|\beta|\cdot|g_n(x)-g(x)| < \varepsilon$$

. Значит, $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$.
2. По условию, $g(x)$ ограничена на X. Значит, существует такое M, что $\forall x \in X : |g(x)| < M$. Тогда для

$$\frac{\varepsilon}{M} > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Отсюда $|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| = |g(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.
3. Допустим, функция не сходится равномерно на $E \subset X$. Тогда существует такая последовательность $\{x_n\} \subset E$, что $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x_n)-f(x_n)| > 0$. Но поскольку $\{x_n\} \subset E \subset X$, функция не сходится равномерно и на X, что противоречит условию.
4. Так как у любого конечного множества есть супремум, то найдется такой $x_0 \in E$, что на нем достигается супремум предела $|f_n(x_0) - f(x_0)|$. Так как по условию $f_n(x_0) \to f(x_0)$, то по супремум-критерию последовательность сходится равномерно.
5. Используем супремум-критерий. Допустим, последовательность равномерно не сходится на объединении. Тогда

$$\exists\{x_n\} \subset A \cup B : \lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = c \neq 0$$

Если последовательность $\{x_n\}$ целиком лежит в одном из двух множеств (или если лишь конечное число членов лежит в другом множестве), тогда f_n не сходится равномерно на этом множестве, что противоречит условию. Допустим, последовательность разбивается на две подпоследовательности $\{x_n^a\} \subset A$ и $\{x_n^b\} \subset B$. По определению, на них достигается супремум величины $|f_n - f|$. Рассмотрим сумму пределов $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x_n^a) - f(x_n^a)| + \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x_n^b) - f(x_n^b)| = c_a + c_b$. По свойству сумм пределов $c_a + c_b = c$, но тогда $c_a \neq 0$, либо $c_b \neq 0$, что противоречит пред положению согласно супремум-критерию.

2.3 Функциональные ряды

2.3.1 Базовые определения

Определение 10 *Область $X \subset D$ сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - область, лежащая в области определения всех функций ряда и для каж-*

дого x на ней последовательность частичных сумм ряда сходится поточечно.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n}(\sin x)^{3n}$. Область сходимости - $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

Определение 11 *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на* X, *если* $S_n \rightrightarrows S$ *на* X *(*S_n *- частичная сумма ряда).*

Пример. Исследуем на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x(2n-1)}{((n-1)^2+x^2)(n^2+x^2)}$, $x \in [1,\infty)$. Здесь предел частичных сумм можно найти по определению: $S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k = x(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{n^2+x^2})$. При фиксированном $x \in D: \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{x},\ S(x) = \frac{1}{x}$. Проверим, что остаток равномерно стремится к нулю (тогда это верно и для суммы): $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2} \leqslant \frac{x}{2nx} = \frac{1}{2n} \to 0,\ n \to \infty$ (по методу оценки остатка). Итак, ряд сходится равномерно к своей сумме.

Пример. Исследуем на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2(2n-1)}{((n-1)^2+x^2)(n^2+x^2)}$, $x \in [1,\infty)$. Имеем $S_n(x) = 1 - \frac{x^2}{n^2+x^2},\ S(x) = 1$

Теорема 39 *(необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда)*

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на* X. *Тогда* $a_n \rightrightarrows 0$ *на* X.

Доказательство. По условию,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > n_0\, \forall x \in X : |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \implies |S_{n+1}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Отсюда имеем

$$|a_n(x)| = |S_{n+1}(x) - S_n(x)| \leqslant |S_{n+1}(x) - S(x)| + |S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Значит, $a_n \rightrightarrows 0$ на X. $\square$

Теорема 40 *(критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)*

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномерно сходится на* X *к* $S(x)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : |\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Применим определение Коши равномерной сходимости для последовательности. □

Пример. Докажем, что у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n^2x^2+\sqrt{n}}$, $x \in (0,1)$ нет равномерной сходимости. Возьмем $x = \frac{1}{2n}$; $a_k(x) \geqslant \frac{1}{4n}$. Поэтому для $\varepsilon \geqslant \frac{1}{4}$ по критерию Коши ряд расходится.

Теорема 41 *(метод граничной точки)*
Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, его члены непрерывны на отрезке $[a,b]$ и ряд сходится на интервале (a,b), но расходится на каком-либо конце интервала. Тогда равномерной сходимости нет.

Доказательство. Повторяет доказательство для последовательностей. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in (1,2)$. Ряд сходится на интрвале как обобщенный гармонический ряд. При $x = 1$ ряд расходится, значит, равномерной сходимости нет.

Теорема 42 *(признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда /мажорантный признак)*
Пусть дан ряд с общим членом $a_n(x)$ и мы можем оценить $|a_n(x)| \leqslant a_n$ (то есть мажорирующим рядом, не зависящим от x), причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на том множестве, на котором верна оценка.

Доказательство. Испоьзуем критерий Коши: фиксируем $\varepsilon > 0$. Ряд a_n сходится, значит, по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

По условию, $\forall x \in X \ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n(x)| \leqslant a_k$, значит

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

. Тогда по критерию Коши для функционального ряда следует равномерная сходимость. □

Пример. Исследуем на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{arcctg(nx)}{n}$, $x \in (\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$. Подставив ноль, по методу граничной точки нет равномерной сходимости.

Пример. Исследуем сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2} \sin nx$ на прямой. Спойлер: сходится равномерно. Сделаем оценку: $|a_n(x)| \leqslant e^{-n^5x^2} n|x|$. Функция симметрична при замене $x \mapsto -x$, значит, будем оценивать на положительном луче, откинув модуль. Оценим максимумом, вычислив производную и решив уравнение. Имеем $x = \frac{1}{\sqrt{2n^5}}$. Подставляем: $f_n(x) \leqslant f(\frac{1}{\sqrt{2n^5}}) = \frac{1}{\sqrt{2e}n^{\frac{3}{2}}} = a_n$. Значит, $|a_n(x)| \leqslant |f_n(x)| \leqslant a_n$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Итак, сходимость равномерная.

Теорема 43 *(признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда)*
Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *и*
1. $\forall x \in X : \{a_n(x)\}$ *монотонна по* n*;*
2. $\exists M = const$ $\forall x \in X$ $\forall n \in N : |B_n(x)| \leqslant M$*, где* $B_n(x)$ *- частичные суммы ряда* b_n*.*
Тогда ряд сходится равномерно на X*.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $a_n \rightrightarrows 0$ на X, то для

$$\frac{\varepsilon}{6B} > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ \forall x \in X : |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}$$

Из пункта 3 условия имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+i} b_k(x)\right| = |B_{n+i}(x) - B_n(x)| \leqslant |B_{n+1}(x)| + |B_n(x)| \leqslant 2B$$

По неравенству Абеля получаем

$$\forall x \in X : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant 2B(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) < \varepsilon$$

Значит, исходный ряд сходится равномерно по критерию Коши. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx/n$. Исследовать на равномерную сходимость на интервалах $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, $(0, 2\pi)$. Ну, раз говорят что уже было, то не пишем. На втором интервале нет равномерной сходимости по краевому критерию.

Теорема 44 *(признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда)*
Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *и* $\forall x \in X$*:*
1. $|a_n(x)| \leqslant M = const$ *для всех* n*;*
2. $\{a_n(x)\}$ *мнонотонна;*
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно сходится на* X*;*
Тогда исходный ряд равномерно сходится на X*.*

Доказательство. По определению Коши. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как ряд с общим членом b_n сходится равномерно, то по критерию Коши для

$$\frac{\varepsilon}{3M} > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in X : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Тогда по неравенству Абеля

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)a_k(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}(x)|) < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot 3M = \varepsilon$$

Тогда по критерию Коши этот ряд сходится равномерно на X. $\square$

Пример. Исследуем на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin x arctgnx}{\sqrt{n^2+x^2}}$.
Алгоритм:
1. Арктангенс монотонен и ограничен.
2. Все остальное сходится по Дирихле.

2.3.2 Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 45 *(о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда)*
Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$*, причем*
1. Все функции непрерывны на множестве X*;*
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на* X*;*
Тогда $S(x)$ *непрерывна на* X*.*

Доказательство. По условию, сумма из $a_n(x)$ сходится равномерно на X к $S(x)$, то есть $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на X, $S_n(x)$ непрерывна как сумма. Тогда по теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности, составленной из непрерывных функций, $S(x)$ непрерывна. Другая формулировка:

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}a_n(x)$$

(то есть можно поменять местами сумму и предел). $\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=f(x)$ - непрерывна на $(0,2\pi)$

Теорема 46 *(об интегрировании равномерно сходящегося ряда)*
Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$, *причем*
1. все функции непрерывны на отрезке $[a,b]$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a,b]$ *к* $s(x)$;
Тогда

$$\forall x,x_0\in[a,b]:\ \int\limits_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{x_0}^{x}a_n(t)dt\right)$$

(можно менять интеграл и сумму).

Доказательство. Докажем, что $\int\limits_{x_0}^{x}S(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{x}a_n(t)dt$. По предыдущей теореме $S(t)$ непрерывна на $[a,b]$, значит,интегрируема на нем по Риману. Обозначим $\sigma_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_0}^{x}a_k(t)dt$ и докажем, что $\sigma_n(x)\rightrightarrows\int\limits_{x_0}^{x}S(t)dt$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. По условию, $S_n(t)$ равномерно сходится на $[a,b]$ для

$$\frac{\varepsilon}{b-a}>0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n>n_0\ \forall x\in[a,b]:|S_n(t)-S(t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Тогда $\left|\sigma_n(x)-\int\limits_{x_0}^{x}S(t)dt\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_0}^{x}a_k(t)dt-\int\limits_{x_0}^{x}S(t)dt\right|=\left|\int\limits_{x_0}^{x}(S_n(t)-S(t))dt\right|\leqslant$ $\left|\int\limits_{x_0}^{x}|S_n(t)-S(t)|dt\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot|x-x_0|<\varepsilon$. Значит, $\sigma_n(x)\rightrightarrows\int\limits_{x_0}^{x}S_n(t)dt$. $\square$

Теорема 47 *(о дифференцировании равномерно сходящегося ряда)*
Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$, *причем*

1. Производные всех функций непрерывны на отрезке $[a, b]$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится на $[a, b]$ поточечно;
3. Ряд из производных сходится равномерно на $[a, b]$ к $S(x)$;
Тогда

$$\sum_{n=a}^{\infty} a'_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)'$$

то есть в ряде можно менять производную и сумму, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится равномерно.

Доказательство. 1. Используем предыдущую теорему. Тогда

$$\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a'_n(t)dt$$

Получаем, что в равенстве $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(x_0))$ справа стоит число (в силу непрерывности функции), ряд из $a_n(x_0)$ сходится по условию, следовательно, ряд из $a_n(x)$ сходится. Поэтому, дифференцируя равенство $\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$, получаем первое утверждение теоремы.

Теперь покажем равномерную сходимость исходного ряда. Для этого покажем, что остаток ряда из производных $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a'_n(x)$ равномерно стремится к нулю. Из этого следует применимость теоремы об инетгировании: $\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a'_k(t)\, dt = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a'_k(t)dt = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (a_k(x) - a_k(x_0))$. Если ряд удовлетворяет теореме об интегрировании, то и его остатки тоже, значит, $\int\limits_{x_0}^{x} r_n(t)dt = R_n(x) - R_n(x_0)$, откуда

$$R_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} r_n(t)dt + R_n(x_0) \quad (1)$$

. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, остаток обычного ряда стремится к нулю: $R_n(x) \to 0$. Тогда для

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists n_1(\varepsilon) \ \forall n > n_1 : |R_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Остаток ряда из производных равномерно стремится к нулю, тогда для

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0 \ \exists n_2(\varepsilon) \ \forall n > n_2 \ \forall x \in [a,b] : |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

По формуле (1) получаем: $|R_n(x)| \leqslant \left|\int\limits_{x_0}^{x} r_n(t)dt\right| + |R_n(x_0)| \leqslant \left|\left|\int\limits_{x_0}^{x} r_n(t)dt\right| + |R_n(x_0)|\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

2.4 Степенные ряды

2.4.1 Базовые определения

Определение 12 *Степенной ряд- ряд вида* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$

Числа c_n - коэффициенты степенного ряда, x_0 - число. Итак, степенной ряд - обобщение понятия многочлена. Область сходимости степенного ряда непуста, так как там лежит как минимум x_0 (в этом случае сумма ряда равна c_0). Сделав замену $t = x - x_0$, сведем любой степенной ряд к виду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$.

Теорема 48 *(лемма Абеля)*
Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *сходится в точке* x_0 *и* $|x| < |x_0|$, *то ряд сходится сходится и в* x, *причем абсолютно.*

Доказательство. По условию ряд сходится, значит, $c_n x^n \to 0$. Тогда существует константа M, большая чем все члены ряда. Тогда $|c_n x^n| = \left|c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n$ сходится $\Rightarrow$ ряд из модулей сходится, т.е. ряд сходится абсолютно. □

Теорема 49 *Пусть* D *- область сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $R = \sup\limits_{x \in D} |x|$. *Тогда* $(-R, R) \subset D \subset [-R, R]$.

Доказательство. По лемме Абеля, второе включение очевидно: $\forall x \in D : |x| \leqslant R \implies D \subset [-R, R]$. Пусть $x \in (-R, R)$. Тогда $|x| < R = R_1$. Тогда для него найдется $x_0 \in D : |x_0| > |x|$. Значит, ряд в точке x_0 сходится, и значит сходится в x. Значит, интервал лежит в области сходимости. □

2.4.2 Формулы для вычисления радиуса сходимости

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. По признаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1$, то ряд сходится. Итак, если предел существует, то

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}}$$

Аналогично, из признака Коши получим формулу Коши-Адамара:

$$\boxed{R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}}$$

В общем случае алгоритм такой:
1. Найти радиус сходимости.
2. Выписываем интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$.
3. Исследуем на сходимость концы интервала.

Пример. Найдем область сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}$. Применим признак Даламбера: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+3)3^{n+1}}{(n+2)3^n} = 3$. Интервал сходимости: $(6-3, 6+3)$. В точке $x = 9$ ряд расходится (т.к. гармонический), в точке $x = 3$ - условная сходимость (по признаку Лейбница).

Пример. Найдем область сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n}$. Заметим, что у этого ряда коэффициенты чередуются с нулем (лакунарный ряд). Используем два способа:
1. По формуле Коши-Адамара - возьмем четные номера, так как на них доставляется супремум предела последовательности: $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)} = \sqrt{2}$. Интервал сходимости $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, на концах расходится.
2. Исследуем как функциональный ряд по признаку Даламбера. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{x^2}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$. Значит, ряд сходится, если $\frac{x^2}{2} < 1$, откуда мы получаем тот же интервал сходимости.

Теорема 50 *(о равномерной сходимости степенного ряда)*
Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри интрвала сходимости.

Доказательство. Для простоты рассмотрим ряд с центром в нуле. Пусть ряд сходится на $(-R, R)$. Возьмем $[a, b] \subset (-R, R)$. Обозначим $d =$

$\max(|a|,|b|)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n d^n$ сходится, значит, его мы можем использовать для оценки сверху рядов на отрезке: $|c_n x^n| \leqslant |c_n d^n|$, значит, по признаку Вейерштрасса ряд сходится на $[a,b]$. $\square$

Теорема 51 *(о непрерывной сумме степенного ряда)*
Сумма степенного ряда непрерывна в любой точке из интервала сходимости.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится на $(-R,R)$ к $f(x)$. Степенные функции непрерывны на интервале (и вообще на всей прямой); по предыдущей теореме, на любом отрезке, лежащем в интервале, ряд равномерно сходится. Значит, по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда, сумма непрерывна на отрезке. Так как этот отрезок произволен, то сумма непрерывна на интервале. $\square$

Теорема 52 *(об интегрировании и дифференцировании степенного ряда)*
Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = f(x)$, R - радиус сходимости. Тогда у функции $f(x)$ существуют производные любого порядка внутри интервала:

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-x_0)^{n-1}$$

Интегрирование тоже почленное. Причем при дифференцировании и интегрировании радиус сходимости не меняется.

Доказательство. Следует из соотвествующих теорем для функциональных рядов. Последнее утверждение следует из формулы Коши-Адамара. $\square$

Пример. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}$. Задания типа таких можно делать, используя свойства степенных рядов. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Радиус сходимости $x \in [-1,1)$. Возьмем производную: $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. А вот теперь проинтегрируем: $\int\limits_0^x \frac{dt}{1-t} = f(x) - f(0)$; $f(x) = -\ln(1-x) + f(0)$. Значит, сумма искомого ряда равна $f(\frac{1}{2}) = 2$. Цель этих телодвижений - привести к виду геометричсекой прогрессии, которую легко посчитать.

2.4.3 Ряды Тейлора

Определение 13 *Пусть в некоторой окрестности $U(x_0)$ у функции существуют производные всех порядков. Тогда для функции $y = f(x)$ в точке x_0 существует ряд Тейлора:*

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Если $x_0 = 0$, то ряд называется рядом Маклорена.

Теорема 53 *Если функция представляется в виде степенного ряда, то он совпадает с её рядом Тейлора. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$.*

Доказательство. Пусть $(x_0 - R, x_0 + R)$ - интервал сходимости ряда. Из разложения функции в ряд имеем $f(x_0) = c_0$. Беря производную, получаем, что $f'(x_0) = c_1$. Дифференцируя дальше, получаем, что $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. □
Если по произвольной функции составить ряд Тейлора, то совсем не обязательно, что он сойдется к этой функции. Сейчас поясним:
Пример. Рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$$

Очевидно (по индукции), что производная порядка $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot p\left(\frac{1}{x}\right)$, где $p(t)$ - многочлен. Посчитаем производную в нуле; первая производная в нуле - нуль. По индукции получаем, что все остальные производные тоже равны нулю. Значит, ряд Маклорена тождественно равен нулю, и сходится *не к исходной функции, а к тождественно нулевой.*

Теорема 54 *(достаточное условие сходимости ряда Тейлора)*
Пусть $\exists h > 0$, $\exists M = const$ такие, что $\forall x \in \mathbb{N}$ $\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) : |f^{(n)}(x)| \leqslant M$. Тогда на всей h-окрестности точки x_0 функция равна своему ряду Тейлора, причем он сходится равномерно на данном интервале.

Доказательство. Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора и запишем остаток в форме Лагранжа: $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $\xi \in (x_0, x)$ (лежит между ними). Остаток по модуля меньше, чем $M \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$ - значит, он равномерно сходится к нулю. Поэтому и сам ряд сходится равномерно на $(x_0 - h, x_0 + h)$. □

Ряды Маклорена для основных функций

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} ...,\ x \in \mathbb{R}$
2. $\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...,\ x \in \mathbb{R}$
3. $\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...,\ x \in \mathbb{R}$
4. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...,\ x \in \mathbb{R}$
5. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...,\ x \in \mathbb{R}$
6. $\ln(1+x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^n}{n} + ...,\ x \in (-1, 1]$
7. $\ln(1-x) =,\ x \in [-1, 1)$
8. $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x \in (-1, 1)$ - в этой формуле функция принимает все положительные значения, поэтому она круче.
9. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + ...$
10. $arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...\ , x \in [-1, 1]$
11. $arcsin(x) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! \cdot x^{2n+1}}{n! \cdot 2^n (2n+1)},\ x \in (-1, 1)$

(Для логарифма) покажем, что остаток ряда стремится к нулю.
1. $x \in [0, 1]:\ \ r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$. Подставим $\xi = x_0 + \theta(x - x_0),\ \theta = \theta(x, n)$. При этом имем оценку $0 \leqslant x \leqslant 1 \leqslant 1 + \theta x$. Получим $|r_n(x)| = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Значит, остаток равномерно сходится к 0 на $[0, 1]$. Чтобы доказать равномерную сходимость на $(-1, 0)$, запишем остаток в форме Коши. Получим $|r_n(x)| = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x}$. Первая дробь меньше 1, вторую оценим как $\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$, что при фиксированном x стремится к нулю. Значит, мы можем писать разложение для логарифма!

Пример. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

Ряд $(1+x)^\alpha$. Найдем радиус сходимости: $R = \lim\limits_{n \to \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = |\frac{n+1}{\alpha - n}| = 1$. Запишем остаток в форме Коши: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n,\ r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}$. Если остаток стремится к нулю, то и ряд сходится к данной функции. Пусть $r_n = A_n \cdot B_n \cdot C_n$, где $B_n(x) =$

$(1+\theta x)^{\alpha-1}$, $C_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$, $A_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}$. $A_n \to 0$ по признаку Даламбера, $|B_n(x)| \leqslant max\{(1-|x|)^{\alpha-1},(1+|x|)^{\alpha-1}\}$, $C_n(x) < 1$, значит, остаток стремится к нулю, и ряд сходится к функции.

Задача. Доказать, что в $x=1$ ряд сходится при $\alpha > -1$, расходится при $\alpha \leqslant -1$. В точке $x=-1$ сходится абсолютно при $\alpha \geqslant 0$, расходится при $\alpha < 0$

Выражения для арксинуса и арктангенса получаются интегрированием разложния их производных.

2.4.4 Использование степенных рядов

Разложение функции в ряд - мощнейшая тема. Иногда в физике и других прикладных областях делают так: берут сложную функцию, раскладывают её в ряд Тейлора и отбрасывают все члены, кроме первого. Дифференцирование обычно упрощает функцию, и зачастую такое упрощение имеет физический смысл (вспомним решение уравнения физического маятника).

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до $0,001$. Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора: $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 - \frac{1}{120}x^{10} + \ldots$. Интегрируя почленно и подставляя x_0, получаем $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{25} - \frac{1}{6\cdot7} + \frac{1}{27\cdot9} - \frac{1}{120\cdot11} + \ldots$. Чтобы достичь требуемой точности, необходимо оценить остаток. Вспоминаем, что для знакочередующегося ряда оценка дается первым членом остатка. Так как $\frac{1}{120\cdot11} < \frac{1}{1000}$, то

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{25} - \frac{1}{6\cdot7} + \frac{1}{27\cdot9}$$

Пример. Вычислим $\ln 3$ с точностью $0,001$. Представим его в виде $\ln 3 = \ln\frac{1+x}{1-x}$, откуда $x = \frac{1}{2} \in (-1,1)$ - входит в область сходимсоти, значит, мы можем написать разложение: $\ln 3 = 1 + \frac{1}{3\cdot2^2} + \frac{1}{5\cdot2^4} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$. Этот ряд не знакочередующийся, поэтому придется оценивать остаток геометрической прогрессией: $r_n = \frac{1}{(2n+3)2^{2n+2}} + \frac{1}{(2n+5)2^{2n+4}} + \ldots \leqslant \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{2^{2n+4}}\ldots = \frac{1}{2^{n+2}(1-\frac{1}{4})} = \frac{1}{3\cdot2^n}$. Требуемая точность достигается при $n=5$, поэтому

$$\ln 3 \approx 1 + \frac{1}{3\cdot2^2} + \frac{1}{5\cdot2^4} + \frac{1}{7\cdot2^6} + \frac{1}{9\cdot2^8} \approx 1,099$$

Пример. Решение дифференциальных уравнений с помощью разложений в степенной ряд. Решим $y'' = 2x'y + 4y, y(0) = 0, y'(0) = 1$ - диффренециальное уравнение с задачей Коши.

Первый способ - метод неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^{n-1}...| \cdot 4; y(0) = c_0 = 0 \\ y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + ... + nc_nx^{n-1}, ...| \cdot 2x; y'(0) = c_1 = 1 \\ y'' = 2c_2 + 6c_3x + ... + n(n-1)c_nx^{n-2} \end{cases}$$

x^0 соответствует $2c_2 = 4c_0 \Rightarrow c_2 = 0; c_{2n} = 0; c_5 = \frac{1}{2}; c_7 = \frac{1}{3!}; \Rightarrow c_{2n+1} = \frac{1}{n!}$
x^1 соответствует $6c_3 = 2c_1 + 4c_1 \Rightarrow c_3 = 1$
x^n соответствует $(n+2)(n+1)c_{n+2} = 2nc_n + 4c_n \Rightarrow c_{n+2} = \frac{2}{n+1}c_n$
Мы получили $y = x + x^3 + \frac{1}{2!}x^5 + \frac{1}{3!}x^7 + ... + \frac{x^{2n+1}}{n!} + ... = x(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + ...)$, откуда решение диффура:

$$y = xe^{x^2}$$

Второй способ - метод последовательного дифференцирования. Так как $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$, то $y''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$, $y'''(x) = 2xy'' + 6y'$ и так далее.

Глава 3

Несобственный интеграл

3.1 Основные определения

Определение 14 *Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ для всех $b > a$. Тогда* ***несобственный интеграл первого рода*** *(с одной особой точкой) - предел*

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Если таковой предел существует, то интеграл сходится; если предел равен бесконечности или не существует, то интеграл расходится. Аналолгично определяется и интеграл с нижним пределом $-\infty$.

Определение 15 *Пусть $\forall\varepsilon > 0$ функция f интегрируема на $[a+\varepsilon, b]$, и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$. Тогда* ***несобственный интеграл второго рода*** *(с особой точкой a) - предел*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Пример. $\int\limits_0^1 \ln x dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_\varepsilon^1 \ln x dx\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 dx\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \frac{-\varepsilon^2}{1/\varepsilon} - 1 = -1$ - интеграл сходится.

Если на некотором промежутке интеграл имеет конечное число особых точек, то всегда можно разбить промежуток на такие области, в которых каждый интеграл имеет лишь одну особую точку. Говорят, что интеграл **сходится, если он сходится в каждой особой точке!** Так, $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^p}$ расходится при любом p, так как он расходится хотя бы на одном из промежутков $(0, 1)$ или $[1, \infty)$.

Будем обозначать интегрируемость в смысле несобственнного интеграла как $f \in \tilde{R}$.

Теорема 55 *(формула Ньютона-Лейбница)*
Пусть $f \in \tilde{R}[a, b)$, b - особая точка первого или второго рода, и на этом интервале существует функция $F(x)$ - первообразная для f. Тогда, если интеграл сходится, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

где $F(b) = \lim\limits_{x\to b} f(b)$.

Определение 16 *Пусть $\omega \in (a, b)$ - особая точка функции f, причем $\forall \varepsilon > 0 : f \in R[a, \omega-\varepsilon], f \in R[\omega+\varepsilon, b]$. Тогда интеграл в смысле главного значения по Коши («valeur principale») -*

$$v.p. \int\limits_a^b = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int\limits_a^{\omega-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{\omega+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$$

Пример. Покажем, что интеграл в смысле главного значения может существовать, но будет расходиться как несобственный интеграл:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$$

Имеем разрыв второго рода в точке $x = 1$. Посчитаем главное значение интеграла:

$$v.p. \int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\delta\to 0} \left(\int\limits_a^{c-\delta} f(x)dx - \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx \right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \ln 3$$

Покажем, что интеграл расходится по отдельности:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{1-x^2} + \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{1-x^2} =$$

$$= \lim_{\delta\to+0} \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{1-\delta} + \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_{1+\varepsilon}^{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{\delta\to+0}\ln\frac{2-\delta}{\delta} + \lim_{\varepsilon\to+0}\ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right) +$$

$$+\frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 3}{2} + \frac{1}{2}\lim_{\substack{\delta\to+0\\ \varepsilon\to+0}}\ln\frac{\varepsilon}{\delta}$$

Предела не существует, поэтому интеграл расходится.

3.2 Свойства несобственного интеграла

Будем называть промежутком отрезок, интервал или полуинтервал и обозначать его как $\langle a, b\rangle$

1. Пусть $f \in \tilde{R}[a,\infty)$, $g \in \tilde{R}[a,\infty)$. Тогда $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda f + \mu g \in \tilde{R}[a,\infty)$. (линейность).

2. Пусть $f \in \tilde{R}[a,\infty)$, $g \in \tilde{R}[a,\infty)$ и $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \geqslant a$. Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)dx \leqslant \int\limits_a^\infty g(x)dx$.

3. Формула замены переменной.
   Пусть $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}, f \in \tilde{R}$, $\varphi\colon \langle \alpha,\beta\rangle \to \langle a,b\rangle$, причем $\varphi(a) = a, \varphi(\beta) = b$, φ возрастает и у неё существует и непрерывна производная на $\langle \alpha,\beta\rangle$. Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$.

4. Формула интегрирования по частям.
   Пусть функции $u(x), v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)v(x)$, тогда оба интеграла $\int\limits_a^\infty u(x)v'(x)dx$, $\int\limits_a^\infty u'(x)v(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, и в случае сходимости
   $\int\limits_a^\infty u'(x)v(x)dx + \int\limits_a^\infty v'(x)u(x)dx = uv\Big|_a^\infty$.

Доказательство.
1. Линейность следует из линейности определенного интеграла и линейности предела. Действительно,

$$\int\limits_a^\infty (\lambda f + \mu g)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b (\lambda f+\mu g)dx = \lim_{b\to\infty}\left(\lambda\int\limits_a^b f(x)dx + \mu\int\limits_a^b g(x)dx\right) =$$

$$= \lambda \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx + \mu \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b g(x)dx = \lambda \int\limits_a^\infty f(x)dx + \mu \int\limits_a^\infty g(x)dx$$

2. Рассмотрим $x_0 \in [a, b\rangle$. По аналогичному свойству для собственных инетгралов имеем

$$f(x) \leqslant g(x) \implies \int\limits_a^{x_0} f(x) \leqslant \int\limits_a^{x_0} g(x)dx$$

откуда, переходя к пределу при $x_0 \to \infty$ имеем искомое свойство.
3. Рассмотрим $x_0 \in [a, b\rangle$. По аналогичному свойству для собственных инетгралов имеем

$$\int\limits_\alpha^{\beta_0} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int\limits_a^{x_0} f(t)dt$$

откуда, переходя к пределу при $x_0 \to \infty$ имеем искомое свойство.
4 (Фихтенгольц). Рассмотрим $x_0 \in [a, b\rangle$. По обычной формуле интегрирования по частям имеем

$$\int\limits_a^{x_0} u\,dv = (u(x_0)v(x_0) - u(a)v(a)) - \int\limits_a^{x_0} v\,du$$

По условию, что правая часть имеет конечные пределы при $x_0 \to \infty$, поэтому и левая часть тоже сходится. □

Пример. В результате замены переменной несобственный интеграл может стать собственным, и наоборот:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} x = \sin t \\ t = \arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} = \int\limits_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

(здесь $x = 1$ - особая точка).

3.3 Критерии сходимости несобственного интеграла

Теорема 56 *(критерий Коши)*
Пусть $\forall b \geqslant a$ *функция интегрируема на* $[a, b]$. *Тогда* $\int_a^\infty f(x)dx$ *сходится* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists b_0(\varepsilon) > a\ \forall b_1, b_2 > b_0 : \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$

Доказательство. По условию, существует предел $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = A \in \mathbb{R}$, где $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда из существования предела следует для $\frac{\varepsilon}{2}$: $\exists b_o(\varepsilon) > a : |F(b) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $b_1 > b_0,\ b_2 > b_0$. Тогда $|F(b_2) - F(b_1)| = |F(b_2) - A| + |F(b_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Достаточность. Докажем существование предела $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$ из определения предела по Гейне. Пусть $b_n \to \infty$, тогда $\forall b_0 > a\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 :$ $b_n > b_0$. Зафиксируем $n, m > n_0$. Тогда $b_n > b_0$ и $b_m > b_0$. По условию отсюда следует, что $|F(b_n) - F(b_m)| < \varepsilon$. По критерию Коши для числовой последовательности $F(b_n)$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} F(b_n) = B \in \mathbb{R}$.
Покажем, что предел не зависит от выбора последовательности b_n. Выберем другую последовательность b_n^*. Обозначим предел $\lim\limits_{n\to\infty} F(b_n^*) = B$.
Составим последовательность $b_1, b_1^*, b_2, b_2^*, ... \to \infty$. Тогда предел F от этой последовательности обозначим как C. Так как пределы подпоследовательностей сходятся к пределу последовательности, то $A = B = C$. Значит, выполняется условие определения предела по Гейне, значит, интеграл сходится. $\square$

Пример. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 0$, расходится при $\alpha \leqslant 0$. Докажем это.
1. $\alpha > 0$. Поехали: $\forall \varepsilon > o\ \exists b_0(\varepsilon) > 1\ \forall b_1 > b_0, b_2 > b_0 : \left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right| < \varepsilon$.
Доказываем: $\left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right| = \left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{x^\alpha} d\cos x\right| = \left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|_{b_1}^{b_2} - \int_{b_1}^{b_2} \cos x d(\frac{1}{x^\alpha}) \leqslant$ $... \leqslant \frac{4}{b_0^\alpha}$. Значит, $b_0 > (\frac{4}{\varepsilon})^{\frac{1}{\alpha}}$.
2. $\alpha \leqslant 0$. Синус теперь принимает разные знаки. Пусть $b_k = 2\pi k$. Тогда по критерию Коши интеграл расходится.

Теорема 57 *(критерий сходимости через остаток)*
Пусть $\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx,\ (b > a)$. *Тогда:*
1. Если несобственный интеграл сходится, то и любой из его остатков сходится.
2. Если хотя бы один из остатков сходится, то несобственный интеграл сходится.

Доказательство. $\int_a^b f(x)dx$ - число, поэтому сходимость равносильна сходимости остатка. $\square$

Теорема 58 *(критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции)*
Пусть $\forall b > a$ *функция интегрируема на* $[a, b]$ *и неотрицательна.Тогда* $\int_a^\infty f(x)dx$ *сходится* $\Leftrightarrow$ *первообразная* $F(b) < M$ *ограниченна.*

Доказательство. Пусть $a < b_1 < b_2$. Имеем

$$F(b_2) = \int\limits_a^{b_2} f(x)dx = \int\limits_a^{b_1} f(x)dx + \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx = F(b_1) + \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx$$

откуда $F(b_2) - F(b_1) = \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx \geqslant 0$. Значит, $F(b)$ неубывает и ограниченна сверху. Значит, существует предел $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$, и интеграл сходится. Обратно, пусть существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty} F(b)$, то $F(b)$ ограниченна в некоторой окрестности бесконечности U. Тогда существует такое $b_0 > a \ \forall b \geqslant b_0 : F(b) \leqslant M$. Значит, $B(b^*) \leqslant M$ - ограниченна. Если $b^* < b_0$, то $F(b^*) < F(b_0)$. Итак, F ограниченна. $\square$

3.4 Признаки сравнения

В данном разделе признаки работают для неотрицательных функций.

Теорема 59 *(первый признак сравнения/в оценочной форме)*
Пусть $f(x) > g(x) > 0$ начиная с некоторого $x > a$, и для любого $b > a$ функции интегрируемы на $[a, b]$. Тогда
1. Если $\int_a^\infty f(x)$ сходится, то и $\int_a^\infty g(x)$ сходится.
2. Если $\int_a^\infty g(x)$ расходится, то и $\int_a^\infty f(x)$ расходится.

Доказательство. 1. Обозначим $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ и $G(x) = \int\limits_a^b g(x)dx$. По условию, интеграл сходится, поэтому $F(b) \leqslant M$. По свойству определенного интеграла, $F(b) \geqslant G(x)$, поэтому $G(b)$ также ограниченна и сходится по предыдущему критерию.
2. Допустим, что $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится. Тогда из первого пункта следует, что и $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится, что противоречит условию. $\square$

Теорема 60 *(второй признак сравнения/в предельной форме)*
Если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $\infty \neq k \neq 0$, то их несобственные интегралы сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Пусть $k > 0$. Тогда для

$$\varepsilon > \frac{k}{2} \ \exists b_0 > a \ \forall x > b_0 : \frac{k}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3k}{2}$$

Значит, $f(x) < \frac{3k}{2}g(x)$, и из сходимости интеграла от $g(x)$ следует сходимость интеграла от $f(x)$. С другой стороны, $\frac{k}{2}g(x) < f(x)$, поэтому из сходимости интеграла от $f(x)$ следует сходимость интеграла от $g(x)$. $\square$

Следствие. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \infty$, то интегралы сходятся или расходятся одновременно.

3.5 Абсолютная и условная сходимость

Определение 17 *Интеграл сходится абсолютно, если сходится интеграл от модуля функции.*

Теорема 61 *Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Используем критерий Коши: $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ сходится $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_0 > a \ \forall b_1, b_2 > b_0 : \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$$

Так как $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx\right|$, то и для $\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx$ выполянется условие Коши. $\square$

Пример. Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ сходится условно, так как $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = -\int\limits_0^\infty \frac{1}{x}\cos x = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^\infty + \int\limits_1^\infty \cos x\, d(\frac{1}{x}) = \cos 1 - \int\limits_1^b \frac{\cos x}{x^2}$. Второй интеграл сходится по признаку сравнения. Но абсолютно он не сходится, так как $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \left|\frac{1-\cos^2}{2x}\right|$, а инетграл от $\frac{1}{2x}$ расходится.

Теорема 62 *(признак Дирихле)*
Пусть:

1. $f \in C[a, \infty)$ (и существует интеграл $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$);
2. $\exists M = const \ \forall b \geqslant a : |f(b)| \leqslant M$;
3. $g'(x) \in C[a, \infty)$;
4. $g'(x)$ знакопостоянна на (a, ∞);
5. $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$;

Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда из условия 5 для

$$\frac{\varepsilon}{4M}\ \exists b_0 > a\ \forall x > b_0 : |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

Возьмем произвольные $b_1, b_2 > b_0$, тогда

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dF(x)\right| = \left|g(x)F(x)\Big|_{b_1}^{b_2} - \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)dx\right| =$$

$$= \left|g(b_2)F(b_2) - g(b_1)F(b_1) - F(\xi)\int\limits_{b_1}^{b_2} g'(x)dx\right|$$

Здесь мы воспользовались теоремой о среденем, взяв $\xi \in (b_1, b_2)$. Итак,

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| \leqslant |g(b_2)F(b_2)|+|g(b_1)F(b_1)|+|F(\xi)g(b_2)|+|f(\xi)g(b_1)| \leqslant \frac{4M\cdot\varepsilon}{4M}$$

Значит, $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится по критерию Коши. $\square$

Теорема 63 *(признак Абеля)*
Пусть:
1. $f \in C[a,\infty)$ *2.* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *сходится;*
2. $g'(x) \in C[a,\infty)$*;*
3. $g'(x)$ *знакопостоянна;*
4. $\exists M = const\ \forall x \geqslant a : |g(x)| \leqslant M$ *Тогда* $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда из условия 2 по критерию Коши для

$$\frac{\varepsilon}{2M}\ \exists b_0 > a\ \forall b_1, b_2 > b_0 : \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$$

Произведем оценку:

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| = |g(b_2)F(b_2) - g(b_1)F(b_1) - F(\xi)g(b_2) + F(\xi)g(b_1)| =$$

$$= \left| g(b_2) \int\limits_{\xi}^{b_2} f(x)dx + g(b_1) \int\limits_{b_1}^{\xi} f(x)dx \right| \leqslant |g(b_2)| \cdot \left| \int\limits_{\xi}^{b_2} f(x)dx \right| + |g(b_1)| \cdot \left| \int\limits_{b_1}^{\xi} f(x)dx \right| <$$

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

Значит, интеграл сходится по критерию Коши.

Глава 4

Интеграл, зависящий от параметра

4.1 Собственный интеграл, зависящий от параметра

Определение 18 *Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману (по x) на отрезке $[a(y), b(y)]$ при любом значении параметра $y \in Y$. Тогда собственный интеграл - $F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx$.*

Теорема 64 *(о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра)*
Пусть
1. $f(x, y)$ определена на $D = [a(y), b(y)] \times [c, d] = X \times Y$;
2. $a(y), b(y)$ непрерывны на $[c, d]$, причем $a \leqslant a(y) \leqslant b(y) \leqslant b$;
Тогда $F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx$ непрерывна на $[c, d]$.

Доказательство. Покажем, что $\forall y_0 \in [c, d] : \lim\limits_{y \to y_0} F(y) = F(y_0)$. Сделаем линейную замену $x = a(y) + (b(y) - a(y))t$, $dx = (b(y) - a(y))dt$. Тогда

$$F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx = \int\limits_{0}^{1} f(a(y) + (b(y) - a(y))t, y) \cdot (b(y) - a(y))dt$$

Обозначим $g(t, y) = f(a(y) + (b(y) - a(y))t, y) \cdot (b(y) - a(y))$. Эта функция непрерывна на $P = [0, 1] \times [c, d]$. Это множество - компакт, поэтому если функция непрерывна на компакте, то она и равномерно непрерывна на нем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall(t_1, y_1), (t_2, y_2) \in P : \sqrt{(t_2 - t_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta \implies$$
$$\implies |g(t_1, y_1) - g(t_2, y_2)| < \varepsilon$$

Это означает, что

$$|F(y) - F(y_0)| = \left|\int\limits_0^1 \big(g(t,y) - g(t,y_0)\big)dt\right| \leqslant \int\limits_0^1 |g(t,y) - g(t,y_0)|dt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \cdot \int\limits_0^1 dt = \varepsilon$$

Этим доказано, что если $|y - y_0| < \delta$, то и $|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{y\to y_0} F(y) = F(y_0)$. $\square$

Теорема 65 *(о предельном переходе под знаком собственного интеграла, зависящего от параметра)*
Пусть
1. $f(x, y)$ определена и непрерывна на $D = [a(y), b(y)] \times [c, d]$;
2. $a(y), b(y) \in C[c, d]$;
Тогда

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx = \int\limits_{\lim\limits_{y\to y_0} a(y)}^{\lim\limits_{y\to y_0} b(y)} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)dx$$

Доказательство. В предыдущей теореме было доказано, что при выполнении условий имеет место $\lim\limits_{y\to y_0} F(y) = \lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y) = F(y_0)$. Но $F(y_0) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)dx$, откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

Теорема 66 *(о дифференцируемости собственного интеграла, зависящего от параметра / правило Лейбница)*
Пусть $f(x, y)$
1. непрерывна на $P = [a, b] \times [c, d]$;

2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *непрерывна на* P*;*
Тогда:
1. $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx$ *дифференцируема на* $[c, d]$*;*
2. $F'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$

Доказательство. Пусть $y \in [c, d]$, $y + h \in [c, d]$. Рассмотрим $F(y + h) - F(y) = \int\limits_a^b (f(x, y + h) - f(x, y))dx$, значит, по теореме Лагранжа это равно $\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta h)h\, dx$, где $\theta \in (0, 1)$. Дифференцируем: $F'(y) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{F(y+h)-F(y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta h)dx$. При $h \to 0$ делаем замену $u = y + \theta h$, $u \to y$. Тогда предел $\lim\limits_{h\to 0} \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, u)dx =$ по теореме о предельном переходе $= \int\limits_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)dx$. $\square$

Следующая теорема обощает правило Лейбница:

Теорема 67 *(обобщенное правило Лейбница)*
Пусть
1. $f(x, y)$ *непрерывна на* $D = \{(x, y) \mid a(y) \leqslant x \leqslant b(y), c \leqslant y \leqslant d\}$*;*
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ *непрерывна на* D*;*
3. $a'(y), b'(y)$ *непрерывны на* $[c, d]$*.*
Тогда $F(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx$ *дифференцируема на* $y \in [c, d]$*, причем*

$$F'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx + f(b(y), y) \cdot b'(y) - f(a(y), y) \cdot a'(y)$$

Доказательство. Рассмотрим $F(y) = F(y, a(y), b(y))$ как сложную функцию. По правилу производной сложной функции

$$\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial y}$$

Применяя правило Лейбница, получаем

$$\frac{dF}{dy} = \frac{d}{dy}\Bigg(\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx\Bigg) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Беря частную производную по b, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{d}{db(y)}\Bigg(\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx\Bigg) = f\big(b(y),y\big)$$

Аналогично, $\frac{\partial F}{\partial a} = -f\big(a(y),y\big)$. Из этих соотношений и получаем искомую формулу. □

Теорема 68 *(об интегрировании интеграла, зависящего от параметра)*
Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $P = [a,b]\times[c,d]$. Тогда

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$$

Доказательство. Введем функции $G(t) = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^t f(x,y)dy$, $H(t) = \int\limits_a^t dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$. Докажем, что $G(b) = H(b)$ (что доказывает требуемое утверждение). Введем функцию $g(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)dx$, тогда $G(t) = \int\limits_c^d g(t,y)dy$ - применима теорема о дифференцировании сложной функции: $\frac{\partial g}{\partial t} = \left(\int\limits_a^t f(x,y)dx\right)'_t = f(t,y)$ - непрерывна на P по условию. Теперь докажем, что $g(t,y)$ непрерывна на P, для этого покажем, что $\lim\limits_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta g = 0$. Имеем $\Delta g = g(t+\Delta t, y+\Delta y) - g(t,y) = \int\limits_a^{t+\Delta t} f(x,y+\Delta y)dx - \int\limits_a^t f(x,y)dx = \int\limits_a^t (f(x,y+\Delta y) - f(x,y))dx + \int\limits_t^{t+\Delta t} f(x,y+\Delta y)dx$. Так как $f(x,y)$ непрерывна на компакте P, то она равномерно непрерывна на

P и ограниченна константой M. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из равномерной непрерывности для

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0\,\exists\delta_1 > 0\,\forall(x_1, y_1) \in P\,\forall(x_2, y_2) \in P : \sqrt{(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2} < \delta_1$$

$$\implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Если $|\Delta y| < \delta$, то $|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$; тогда можно оценить интеграл:

$$\left|\int\limits_a^t (f(x, y+\Delta y) - f(x, y))dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{t-a}{b-a} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Если $|\Delta t| < \frac{\varepsilon}{2M}$, то

$$\left|\int\limits_t^{t+\Delta t} f(x, y+\Delta y)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_t^{t+\Delta t} |f(x, y+\Delta y)|dx\right| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $\delta = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{2M}\}$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall|\Delta t| < \delta\ \forall|\Delta y| < \delta : |\Delta g| < \varepsilon$$

Это означает, что $\lim\limits_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta g = 0$. Заметим, что $g(t, y)$ непрерывна на P. Применим теорему о дифференцировании к функции $G(t)$:

$$G'(t) = \int\limits_c^d \frac{\partial g}{\partial t}(t, y)dy = \int\limits_c^d f(t, y)dy$$

С другой стороны,

$$H'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_a^t dx \int\limits_c^d f(x, y)dy\right) = \int\limits_c^d f(t, y)dy$$

Итак, мы получили, что $G'(t) = H'(t),\ G(a) = H(a) = 0$, откуда $G(t) = H(t) \implies G(b) = H(b)$. $\square$

Пример 1. $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln(x)}dx$, $0 < a < b$. Имеем $\int\limits_a^b x^y dy = \frac{x^b-x^a}{\ln(x)}$, подынтегральная функция непрерывна на бруске $[0, 1] \times [a, b]$, тогда интеграл равен $\int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y dy = \int\limits_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln(b + 1) - \ln(a + 1)$.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^1 \sin(\ln(\frac{1}{x}))\frac{x^b-x^a}{\ln(x)} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b \sin(\ln(\frac{1}{x}))x^y dy$. Функция $f(x,y) = \sin(\ln(\frac{1}{x}))x^y$ непрерывна на $[0,1]\times[a,b]$, $f(0,y)=0$. Тогда $\int = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^1 \sin(\ln(\frac{1}{x}))x^y dx = \begin{cases} t = \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x) \\ dx = -e^{-t}dt \end{cases} = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^\infty \sin(t)e^{-ty}e^{-t}dt.$
Внутренний интеграл возьмем по частям: $I = \int\limits_0^\infty \sin(t)e^{-t(y+1)}dt = -\cos(t)e^{-t(y+1)}\Big|_0^\infty - (y+1)\int\limits_0^\infty cos(t)e^{-t(y+1)}dt$, $I = 1-(y+1)^2 I$. Значит, искомый интеграл равен $\int\limits_a^b \frac{dy}{(y+1)+1} = arctg\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$. Домашка: тоже самое для косинуса.

4.2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Обозначим $F(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$, $y \in E$.

Определение 19 *Если $\forall y \in E$ $F(y)$ сходится, то поточечная сходимость на E -*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_0(\varepsilon, y) > a\ \forall b > b_0\ \forall y \in E : \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Определение 20 *$F(y)$ сходится равномерно на E, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_0(\varepsilon)\ \forall b > b_0\ \forall y \in E : \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

(то есть оценка не зависит от y).

Как и с рядями, есть супремум-критерий.

Теорема 69 *(супремум-критерий)*
Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$, зависящий от параметра, сходится равномерно на E тогда и только тогда, когда

$$\lim_{b\to\infty}\sup_{y\in E}\left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| = 0$$

Доказательство. Пусть интеграл сходится равномерно. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по определению равномерной сходимости для

$$\varepsilon > 0\ \exists b_0(\varepsilon)\ \forall b > b_0\ \forall y \in E : \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Пусть $g(b) = \sup\limits_{y\in E}\left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right|$. Тогда всилу произвольности b имеем $g(b) < \varepsilon$, а в силу произвольности ε имеем $\lim\limits_{b\to\infty} g(b) = 0$, что эквивалентно условию супремум-критерия.
Обратно, пусть $\lim\limits_{b\to\infty}\sup\limits_{y\in E}\left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| = 0$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists b_0\ \forall b > b_0 : \sup_{y\in E}\left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Значит, выполняется неравенство

$$\forall y \in E : \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| \leqslant \sup\left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right|$$

откуда следует равномерная сходимость. □

Теорема 70 *(метод оценки остатка)*
Пусть интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится на* E*, и* $r(b)$ *- какая-то оценка остатка. Тогда если* $|R(b,y)| \leqslant r(b)\ \forall y \in E$ *и* $r(b) \to 0$ *при* $b \to \infty$*, тогда* $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* E*. Если же существует такая функция* $y(b)$*, что* $R(b, y(b)) \to s \neq 0$*, то интеграл не сходится равномерно на* X*.*

Доказательство. По теореме 57, сходимость несобственного интеграла эквивалентна сходимости любого из его остатков. □

Пример. $F(y) = \int\limits_0^\infty ye^{-xy}dx$. Доказать, что сходимость равномерная при $[y_0, \infty)$, $y_0 \geqslant 0$, но на $(0,\infty)$ нет равномерной сходимости. Решение: пусть остаток $R(b,y) = \int\limits_b^\infty ye^{-xy}dx = e^{-by}$. По методу оценки остатка при оценке $r(b) = e^{-by_0}$ имеем равномерную сходимость. Если мы возьмем $y = \frac{1}{b}$, то и $R(b, \frac{1}{b}) = e^{-1} \neq 0$, поэтому нет равномерной сходимости.

Пример. Пусть $f(x) > 0$ при $x \geqslant 0$, $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ сходится. Тогда $\forall \alpha > 0$ интеграл $\int\limits_0^\infty f(y^\alpha x)dx$ сходится равномерно на $[y_0, \infty)$, $y_0 > 0$, и сходится неравномерно на $(0, \infty)$.

Решение. 1. Методом оценки остатка: $R(b,y) = \int\limits_b^\infty f(y^\alpha x)dx = \frac{1}{y^\alpha}\int\limits_b^\infty f(y^\alpha x)d(y^\alpha x) = \frac{1}{y^\alpha}\int\limits_{by^\alpha}^\infty f(t)dt \leqslant \frac{1}{y_0^\alpha}\int\limits_{by^\alpha}^\infty f(t)dt = r(b) \to 0$ при $b \to \infty$, так как $\int\limits_0^\infty f(t)dt$ сходится.

2. Докажем неравномерную сходимость по супремум-критерию: $\sup\limits_{y>0}\int\limits_b^\infty f(y^\alpha x)dx = \sup\limits_{y>0}\frac{1}{y^\alpha}\int\limits_{by^\alpha}^\infty f(t)dt \geqslant \sup\limits_{0<y\leqslant 1}\frac{1}{y^\alpha}\int\limits_{by^\alpha}^\infty f(t)dt \geqslant \sup\limits_{0<y\leqslant 1}\frac{1}{y^\alpha}\int\limits_b^\infty f(t)dt = \infty$ при $y \to \infty$. Тогда по супремум-критерию нет равномерной сходимости.

Пример. Интеграл Пуассона аналогично сходится равномерно на бесконечности, если интервал начинается не с нуля.

4.3 Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

1. Равномерно сходящиеся интегралы образуют линейное пространство.

2. Если интеграл равномерно сходится на множестве, то он равномерно сходится и на его подмножестве.

3. Интеграл сходится равномерно на конечном объединении областей, на которых он сходится равномерно.

Доказательство.
1. Следует из формулы

$$\int\limits_a^\infty \big(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y)\big)dx = \lambda\int\limits_a^\infty f(x,y)dx + \mu\int\limits_a^\infty g(x,y)dx$$

для несобственных интегралов.
2. Допустим, интеграл сходится равномерно на E и не сходится равномерно на $E_0 \subset E$. Тогда мы можем найти такой $y \in E_0$, что для некоторого

$\varepsilon > 0 : \left|\int\limits_a^\infty f(x,y)\right| < \varepsilon$. Но тогда интеграл не сходится равномерно и на E, так как $y \in E_0 \subset E$, что противоречит условию.
3. Пусть $E = \bigcup\limits_{i=1}^n E_i$ - объединение конечного числа областей, на которых интеграл сходится равномерно. Тогда по супремум-критерию на каждой области существует $s_i = \sup\limits_{y \in E_i} \left|\int\limits_a^\infty f(x,y)dx\right|$. Значит, на конечном объединении областей существует $s_{max} = \sup\limits_i s_i$. В силу произвольности нижнего предела и оценки для s_i, получаем, что

$$\lim_{b\to\infty} \sup_{y\in E} \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| = 0 \quad \square$$

Пример. Покажем, что свойство 3 нельзя обощить на объединения бесконечного числа множеств. Так, $\int\limits_0^\infty e^{-x^2 y}dx$ сходится равномерно на $E_n = [\frac{1}{n}, \infty)$, но расходится на бесконечном объединении таких областей.

Теорема 71 *(критерий Коши)*
$\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_0(\varepsilon) > a\ \forall b_1, b_2 > b_0\ \forall y \in Y : \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для

$$\frac{\varepsilon}{2}\ \exists b_0 > a\ \forall b > b_0\ \forall y \in Y : \left|\int\limits_{b_1}^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $b_1, b_2 > b_0$, тогда $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_{b_1}^\infty f(x,y)dx - \int\limits_{b_2}^\infty f(x,y)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b_1}^\infty f(x,y)dx\right| - \left|\int\limits_{b_2}^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Обратно, для

$$\frac{\varepsilon}{2}\ \exists b_0 > a\ \forall b_1, b_2 > b_0\ \forall y \in Y : \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| < \left|\frac{\varepsilon}{2}\right|$$

Тогда $\left|\int\limits_{b_1}^{\infty} f(x,y)dx - \int\limits_{b_2}^{\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $b_2 \to \infty$, то

$$\forall y \in Y : \int\limits_{b_2}^{\infty} f(x,y)dx \to 0$$

(так как есть поточечная сходимость); $\left|\int\limits_{b_1}^{\infty} f(x,y)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ Итак, выполняется определение. □

4.4 Сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 72 *(метод граничной точки)*
Пусть
1. $f(x,y)$ *непрерывна на* $[a,\infty) \times [c,d]$*;*
2. $\forall y \in (c,d)$ *интеграл* $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ *сходится;*
3. $\int\limits_a^{\infty} f(x,c)dx$ *расходится.*
Тогда $\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ *не сходится равномерно на* (c,d).

Доказательство (Зорич). Так как при $y = c$ интеграл расходится, тогда найдется $\varepsilon > 0$ и такие $b_1, b_2 \in [a,\infty)$, что $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,c)dx\right| > \varepsilon_0$. В силу непрерывности функции $F(y) = \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx$ на $[c,d]$ неравенство $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| > \varepsilon_0$ будет выполняться в некоторой окрестности точки c, поэтому в силу критерия Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, инетграл не сходится равномерно на (c,d).

Теорема 73 *(признак Вейерштрасса равномерной сходимости)*
Пусть

1. $\forall x \geqslant a\ \forall y \in Y : |f(x,y)| \leqslant g(x)$*;*
2. $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ *сходится.*
Тогда $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y*.*

Доказательство. Используем критерий Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда интеграл сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_0 > a\ \forall b_1, b_2 > b_0 : \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$$

По условию $\forall y \in Y\ \forall x \geqslant a : |f(x,y)| \leqslant g(x)$, откуда $g(x) \geqslant 0$. Значит, $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx\right| = \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx$, поэтому $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$. По критерию Коши, $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y. $\square$

Теорема 74 *(признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра)*
1. $\forall y \in Y\ f(x,y)$ *непрерывна на* $[a,\infty)$
2. $\forall y \in Y\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ *непрерывна на* $[a,\infty)$
3. $\forall y \in Y\ g(x,y)$ *монотонна по* $x \in [a,\infty)$
4. $g(x,y) \rightrightarrows 0$ *при* $x \to \infty$
5. $\exists M = const\ \forall y \in Y\ \forall x \geqslant a : \left|\int\limits_a^x f(t,y)dt\right| \leqslant M$*.*
Тогда $\int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y*.*

Доказательство. По критерию Коши. Для

$$\frac{\varepsilon}{4M} > 0\ \exists b_0(\varepsilon) > a\ \forall x > b_0\ \forall y \in Y : |g(x,y)| < \frac{\varepsilon}{4m}$$

Возьмем $b_1, b_2 > b_0$. Тогда

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x,y)d\left(\int\limits_a^x f(t,y)dt\right)\right| =$$

$$= \left| \left(g(x,y) \cdot \int\limits_a^x f(t,y)dt \right) \Big|_{b_1}^{b_2} - \int\limits_{b_1}^{b_2} \left(\int\limits_a^x f(t,y)dt \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant |g(b_2,y)| \cdot \left| \int\limits_a^{b_2} f(t,y)dt \right| + |g(b_1,y)| \cdot \left| \int\limits_a^{b_1} f(t,y)dt \right| + \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} \left| \int\limits_a^x f(t,y)dt \right| \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot M + M \cdot |g(b_2,y) - g(b,y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_0(\varepsilon) > a \ \forall b_1, b_2 > b_0 \ \forall y \in Y : \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Тогда по критерию Коши $\int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.
□

Теорема 75 *(признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра)*
1. $\forall y \in Y \ f(x,y)$ *непрерывна на* $[a,\infty)$
2. $\forall y \in Y \ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ *непрерывна на* $[a,\infty)$
3. $\forall y \in Y \ g(x,y)$ *монотонна по* $x \in [a,\infty)$
4. $\exists M = const \ \forall y \in Y \ \forall x \geqslant a : |g(x,y)| \leqslant M$.
5. $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y.
Тогда $\int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y.

Доказательство. По критерию Коши. Для

$$\frac{\varepsilon}{3M} > 0 \ \exists b_0(\varepsilon) > a \ \forall b_1, b_2 > b_0 \ \forall y \in Y : \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Возьмем $b_1, b_2 > b_0$. Тогда

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx \right| = \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x,y)d\left(\int\limits_{b_1}^x f(t,y)dt \right) \right| =$$

$$= \left| \left(g(x,y) \cdot \int\limits_{b_1}^{x} f(t,y)dt \right) \Bigg|_{b_1}^{b_2} - \int\limits_{b_1}^{b_2} \left(\int\limits_{b_1}^{x} f(t,y)dt \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant |g(b_2,y)| \cdot \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(t,y)dt \right| + \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} \left| \int\limits_{b_1}^{x} f(t,y)dt \right| \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + M \cdot |g(b_2,y) - g(b,y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_0(\varepsilon) > a \ \forall b_1, b_2 > b_0 \ \forall y \in Y : \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Тогда по критерию Коши $\int\limits_{a}^{\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y. $\square$

Пример. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{y^2 \cos xy}{x+y^2}$, $y \in [0,\infty)$. Исследуем на равномерную сходимость. Пусть $f(x,y) = y \cos xy$, $g(x,y) = \frac{y}{x+y^2}$. Условия проверяются очевидным образом, интеграл сходится равномерно по Дирихле.

Теорема 76 *(о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра)*

1. $f(x,y)$ непрерывна на $[a,\infty) \times Y$

2. $\int\limits_{a}^{\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Тогда $\Phi(y) = \int\limits_{a}^{\infty} f(x,y)dx$ непрерывна на Y

Доказательство. Функция непрерывна, если она непрерывна в каждой точке. $\Phi(y)$ непрерывна в y_0 тогда и только тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in Y : |y - y_0| < \delta \implies |\Phi(y) - \Phi(y_0)| < \varepsilon$$

По второму условию, так как интеграл сходится равномерно, то для любого

$$\frac{\varepsilon}{3} > 0 \ \exists b_0 > a \ \forall b > b_0 \ \forall y \in Y : \left| \int\limits_{b}^{\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\Phi(y) - \Phi(y_0) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx - \int\limits_a^\infty f(x,y_0)dx =$$

$$= \int\limits_a^b f(x,y)dx + \int\limits_b^\infty f(x,y)dx - \int\limits_a^b f(x,y_0)dx - \int\limits_b^\infty f(x,y_0)dx =$$

$$= \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx - \int\limits_a^b f(x,y_0)dx\right) + \int\limits_b^\infty f(x,y)dx - \int\limits_b^\infty f(x,y_0)dx$$

По теореме о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра, для

$$\forall \frac{\varepsilon}{3} > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in Y : |y - y_0| < \delta \implies |F(y) - F(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$|\Phi(y) - \Phi(y_0)| \leqslant |F(y) - F(y_0)| + \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| + \left|\int\limits_b^\infty f(x,y_0)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Значит, $\Phi(y)$ непрерывна в любой точке на Y, то есть она непрерывна на Y. $\square$

Теорема 77 *(о предельном переходе под знаком несобственного интеграла)*
1. $f(x,y)$ непрерывна на $[a,\infty) \times Y$
2. $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.
Тогда

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty f(x,y_0)dx$$

Доказательство. В предыдущей теореме было доказано, что функция $\Phi(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ непрерывна на Y. Значит,

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \lim_{y \to y_0} \Phi(y) = \Phi(y_0) = \int\limits_a^\infty f(x,y_0)dx$$

Так как функция $f(x,y)$ непрерывна, то получаем второе равенство:

$$\int\limits_a^\infty f(x,y_0)dx = \int\limits_a^\infty \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx \quad \square$$

Теорема 78 *(об интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра)*
1. $f(x,y)$ *непрерывна на* $[a,\infty)\times[c,d]$
2. $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* $[c,d]$.
Тогда

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

Доказательство. Обозначим $\Phi(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$. Эта функция непрерывна на $[c,d]$ по теореме о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра. Значит, $\Phi(y)$ интегрируема на $[c,d]$, то есть существует и конечен интеграл $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx = const$. Покажем, что несобственный интеграл справа сходится к этой константе, то есть при $b\to\infty$ имеет место $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy \to \int\limits_c^d dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$ Тогда для

$$\frac{\varepsilon}{d-c} > 0 \ \exists b_0(\varepsilon)\ \forall y\in[c,d]\ \forall b > b_0 : \left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$$

Отсюда

$$\left|\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy - \int\limits_c^d dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx\right| \leqslant \int\limits_c^d dy\left|\int\limits_a^b f(x,y)dx - \int\limits_a^\infty f(x,y)dx\right| =$$

$$= \int\limits_c^d dy\left|\int\limits_b^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}\cdot(d-c) = \varepsilon$$

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists b_0(\varepsilon) > a\, \forall b > b_0\, \forall y \in Y : \left| \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy - \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx \right| < \varepsilon \quad \square$$

Теорема 79 *(о дифференцировании несобственного интеграла, зависящего от параметра)*
Пусть
1. $f(x,y)$ *непрерывна на* $[a,\infty) \times Y$
2. $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится* $\forall y \in Y$.
3. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *непрерывна на* $[a,\infty) \times Y$.
4. $\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y.
Тогда $\forall y \in Y$

$$\left(\int\limits_a^\infty f(x,y)dx \right)'_y = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Доказательство. Так как выполняются условия теоремы об интегрировании н.и.з.от п. для $\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$, то зафиксируем $y_0 \in Y,\ y \in \tilde{Y}$ без крайних точек, и тогда

$$\int\limits_{y_0}^y dy \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx - \int\limits_a^\infty f(x,y_0)dx$$

Второй интеграл равен числу, поэтому

$$\left(\int\limits_{y_0}^y dy \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \right)'_y = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx = \left(\int\limits_a^\infty f(x,y)dx \right)'_y$$

$\square$

Пример. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in 0$. Легко проверяются условия теоремы об интегрировании, и мы можем привести интеграл к виду $\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\alpha \cos xy \cdot e^{-\beta x} dy$, который берется по частям, ответ $arctg\frac{\alpha}{\beta}$. Так как арктангенс нечетный, то эта формула справедлива как для положительных, так и отрицательных α (при условии $\beta > 0$). Другой способ - по теореме о дифференцировании. Снова обозначим $\Phi(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$. $\Phi(x, \alpha)$ непрерывна на $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Доопределим функцию: $\Phi(0, \alpha) = \lim\limits_{x \to +0} \Phi = \alpha$. Снова легко проверяются условия теоремы. Имеем $\Phi(\alpha) = \int\limits_0^\infty \cos\alpha x e^{-\beta x} dx = \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2}$. Интегрируя и подставляя начально условие, снова получаем арктангенс

4.5 Вычисление некоторых классических интегралов

Интеграл Дирихле

$$\boxed{\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}\alpha}$$

Пусть $\Phi(\beta) = \int\limits_a^\infty \frac{\sin\alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$.
1) $\varphi(x, \beta) = \frac{\sin\alpha x}{x} e^{-\beta x}$ непрерывна на $[0, \infty) \times [0, \infty)$, $\varphi(0, \beta) = \alpha$.
2) Докажем, что $\Phi(\beta)$ сходится равномерно на $[0, \infty)$. Так как $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x} dx$ сходится по признаку Дирихле, то сходимость исходного интеграла равномерная (так как не зависит от β). Далее, $0 \leqslant e^{-\beta x} \leqslant 1$ при $\beta \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Значит, $e^{-\beta x}$ убывает при данных условиях. По признаку Абеля $\Phi(\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$ сходится равномерно. По теореме о предельном переходе под знаком несобственного интеграла на $[0, \infty)$, имеем $\Phi(0) = \lim\limits_{\beta \to 0} \Phi(\beta)$. Теперь найдем этот интеграл: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x} e^{-\beta x} = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\alpha \cos(xy) e^{-\beta x} dy = \int\limits_0^\alpha dy \int\limits_0^\infty \cos(xy) e^{-\beta x} dx = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\beta^2 + y^2} \right) dy = \operatorname{arctg} \frac{y}{\beta} \Big|_0^\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}$. Значит, $\Phi(0) = \lim\limits_{\beta \to 0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}\alpha$.

Интеграл Лапласа

$$\boxed{\int\limits_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}}$$

Дифференцировать много раз не получится, так как мы придем к расходящемуся ряду. Нам нужем финт ушами, а именно прибавить $\frac{\pi}{2}$:

$$\Phi'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = -\int\limits_0^\infty \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx + \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int\limits_0^\infty \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} \sin \alpha x \, dx$$

$$\Phi''(\alpha) = \left(\Phi'(\alpha) + \frac{\pi}{2}\right)' = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)}\right)'_\alpha dx$$

Внезапно, мы получили диффур $\Phi''(\alpha) = \Phi(\alpha)$. Общее решение $\Phi(\alpha) = C_1 e^{-\alpha} + C_2 e^{\alpha}$. Поскольку Φ ограничена, то $C_2 = 0$, а поскольку $\Phi(0) = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, то $C_1 = \frac{\pi}{2}$.

Глава 5

Функции Эйлера

5.1 Гамма-функция

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x} dx$$

На бесконечности сходится всегда, в нуле сходится при $s > 0$. Если проинтегрировать по частям, беря первообразуную от экспоненты, получим $0 + \Gamma(x-1)$. Причем $\Gamma(1) = e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$. В точке 1/2 сам Бог велел делать замену $u = \frac{x^1}{2}$, и мы сведем к интегралу Пуассона.

Свойства гамма-функции

1. Область определения $\equiv$ множество таких s, на котором $\Gamma(s)$ сходится: $s > 0$;
2. Равномерная сходимость на $[s_1, s_2]$, где $0 < s_1 < s_2 < \infty$;
3. $\Gamma(s)$ непререрывна при $s > 0$;
4. $\Gamma(s) > 0$ при $s > 0$;
5. $\boxed{\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)}$;
6. $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(n+1) = n!$;
7. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}$;
8. $\forall s > 1$: $\Gamma(s) = (s-1)(s-2)...(s-n)\Gamma(s-n)$, где $n = [s]$; любое значение гамма-функции можно выразить через её значения на $(0, 1]$
9. $\Gamma^{(n)}(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \ln^n x$, причем сходится при $s > 0$, равномерно сходится там же, где и гамма-функция.
10. $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi n)}$ - формула дополнения
11. $\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi n}(1 + \alpha(x))$ - асимптотическая формула.
12. График: $\lim\limits_{s \to +0} \Gamma(s) = \lim\limits_{s \to +0} \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{1}{+0} = \infty$. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Сначала

убывает, затем возрастает.
13. $\Gamma(s) = \frac{1}{se^{\gamma s}} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} e^{\frac{s}{n}}$ - продолжение определения функции на отрицательные числа (кроме отрицательных целых).

Доказательство.

1. Докажем, что гамма-функция определена при $s > 0$. Рассмотрим сумму интегралов $\Gamma(s) = \int\limits_0^1 x^{s-1} \cdot e^{-x} dx + \int\limits_1^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x} dx$. Первый интеграл сходится при $s > 0$ и расходится при $s \leqslant 0$ по предельному признаку сравнения с интегралом $\int\limits_0^1 x^{s-1} dx$. Второй интеграл: имеем

$$\forall s \in \mathbb{R}\ \exists x(s)\ \forall x > x(s) : x^{s-1} \leqslant e^{\frac{x}{2}}$$

Значит, $\int\limits_{x(s)}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$ сходится, и исходный интеграл сходится по признаку сравнения при любом s. Значит, область определения гамма-функции - $s > 0$.

2. Докажем равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса. Получаем, что $x^{s-1} \cdot e^{-x} \leqslant x^{s-1} \leqslant x^{s_1-1}$ при фиксированном $x \in [0, 1]$. При этом интеграл $\int\limits_0^1 x^{s_1-1} dx$ сходится, поэтому интеграл сходится на $[s_1, s_2]$ равномерно. Если $x \geqslant 1$, то $x^{s-1} \cdot e^{-x} \leqslant x^{s_2-1} \cdot e^{-x}$, правая часть сходится и не зависит от s, значит, сходимость равномерная. Значит, на объединении $1 > s > 0$ и $s > 0$ сходимость непрерывная.

3. Непрерывность следует из равномерной сходимости интеграла и непрерывности подынтегральной функции по теореме о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра.

4. $\forall x > 0\ \forall s > 0 : x^{s-1} \cdot e^{-x} > 0$ значит, $\Gamma(s) > 0\ \forall s$.

5. Имеем $\Gamma(s+1) = \int\limits_0^{\infty} x^s \cdot e^{-x} dx = -\int\limits_0^{\infty} x^s d(e^{-x}) = -x^s \cdot e^{-x}\Big|_0^{\infty} + s\int\limits_0^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x}$, откуда $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$.

6. $\Gamma(1) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$. Факториальность следует по индукции из основного свойства.

7. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ - интеграл Пуассона. Значит, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Заменим $x = t^2$, откуда имеем $2\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Общая формула для полуцелых чисел следует по индукции из основного свойства.

8. По индукции.

9. Докажем, что $\Gamma'(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x \, dx$. Для применения теоремы о дифференцировании надо доказать, что этот интеграл равномерно сходится на $[s_1, s_2], 0 < s_1 < s < s_2 < \infty$. Рассмотрим $\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$. В особой точке 0 при $s_1 \geqslant 1$ имеем $|x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x| \leqslant 1 \cdot 1 \cdot |\ln x| = -\ln x$. Интеграл $-\int\limits_0^1 \ln x \, dx = -x \ln x\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 dx = 1$ - сходится. Значит, гамма-функция сходится равномерно на $[s_1, s_2] < 1$ по признаку Вейерштрасса. Если же $s_1 < 1$, то $|x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x| \leqslant x^{s_1 - 1} \cdot \ln x$. Правая часть сходится, и интеграл сходится по признаку Вейерштрасса.
Если $x > 1$, то $0 < x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x < x^{s_2-1} e^{-x} \ln x < e^{-\frac{x}{3}}$. Также сходится по Вейерштрассу. Поэтому в итоге он сходится на объединении областей. Поэтому можно дифференцировать.

10. Доказательство слишком длинное и использует комплексные числа. И прочие тоже.

5.2 Бета-функция

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

1. Область определения - $p > 0 \ \& \ q > 0$;
2. Равномерная сходимость - $p \geqslant p_0 > 0 \ \& \ q \geqslant q_0 > 0$.
3. $B(p,q)$ непрерывна на области определения
4. $B(p,q) > 0$ на области определения
5. $B(p,q) = B(q,p)$
6. $B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1,q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p,q-1)$
7. Несобственный интеграл как первого, так и второго рода: $\int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}}$
8. $\boxed{B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$
9. $B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi n}$
10. Формула Лежандра: $\boxed{B(p,p) = \dfrac{1}{2^{2p-1}} B\left(\dfrac{1}{2}, p\right)}$. Или же: $\Gamma(p)\Gamma(p + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$.

Доказательство.

1. Имеем $B(p,q) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. При $x \to 0$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}$, и интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}dx$ сходится при $p > 0$. При $x \to 1$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1}$, аналогично сходится при $q > 0$.

2. Аналогично предыдущему пункту, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leqslant x^{p_0-1}(1-x)^(q_0-1)$ - сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

3. Не на что сослаться, так как не было предела от двух переменных.

4. Очевидно.

5. Введем замену $t = 1-x$, и получим точно такой же интеграл.

6. $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = -\frac{1}{q}\int\limits_0^1 x^{p-1}d((1-x)^{q-1}) = -\frac{1}{q}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\Big|_0^1 + \frac{1}{q}\int\limits_0^1 (1-x)^q dx^{p-1} = \frac{p-1}{q}\int\limits_0^1 x^{p-2}(1-x)^{q-1}(1-x)dx$. Отсюда $q \cdot B(p,q) = (p-1)\left(\int\limits_0^1 x^{p-2}(1-x)^{q-1}dx - \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\right)$. Значит, $q \cdot B(p,q) = (p-1)\cdot B(p-1,q) - (p-1)\cdot B(p,q)$, и в итоге получаем $B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$

7. Сделаем замену $x = \frac{t}{t+1}$. Изменим пределы: $0 \to 0, 1 \to \infty$. И тогда $1-x = \frac{1}{t+1}$, $dx = \frac{dt}{(t+1)^2}$. В итоге имеем $B(p,q) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}} \cdot \frac{1}{(t+1)^{q-1}} \cdot \frac{dt}{(1+t^2)} = \int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}}$.

Чтобы доказать следующее свойство бета-функции, нам потребуется следующая

Теорема 80 *(о перестановке двух несобственных интегралов)*
Пусть
1. $f(x,y)$ *определена и непрерывна на* $[a,\infty) \times [c,\infty)$*;*
2. $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* $[c,d]$ $\forall d > c$*;*
3. $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ *сходится равномерно на* $[a,b]$ $\forall b > a$*;*
4. Существует $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy$ *или* $\int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^\infty |f(x,y)|dx$ *;*
Тогда существуют оба интеграла $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ *и* $\int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$*, и они равны между собой.*

Доказательство. Допустим, существует интеграл $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty |f(x,y)|dx$. Тогда

$$\int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \lim_{d\to\infty} \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$$

По теореме об интегрировании интеграла, зависящего от параметра, это все равно

$$\lim_{d\to\infty} \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

Обозначим $\Phi(x,d) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$. Применяя теорему о предельном переходе,

$$|\Phi(x,d)| = \left|\int\limits_c^d f(x,y)dy\right| \leqslant \int\limits_c^d |f(x,y)|dy \leqslant \int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy$$

По условию, $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy$ сходится, поэтому $\int\limits_a^\infty \Phi(x,d)dx$ сходится равномерно по $d \in (c,\infty)$. Итак,

$$\lim_{d\to\infty} \int\limits_a^\infty \Phi(x,d)dx = \int\limits_a^\infty \left(\lim_{d\to\infty} \Phi(x,d)\right) dx = \int\limits_a^\infty \left(\int\limits_c^\infty f(x,y)dy\right) dx$$

$\square$

8. Теперь докажем, что $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
Случай 1: $p > 1, q > 1$. Сделаем замену $x = (t+1)y, t > 0, y > 0$. Тогда $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty (t-1)^{s-1} y^{s-1} e^{-(t+1)y}(t+1)dy$. Тогда $\frac{\Gamma(s)}{(t+1)^s} = \int\limits_0^\infty y^{s-1}e^{-(t+1)y}dy$. Пусть $S = p+q$. Имеем $\frac{\Gamma(p+q)}{(t+1)^{p+q}} = \int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy$. Домножим на t^{p-1}:

$$\Gamma(p+q) \cdot \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}} = t^{p-1} \int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy$$

Интегрируя, получаем

$$\Gamma(p+q)\cdot\int_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(t+1)^{p+q}} = \int_0^\infty t^{p-1}dt\int_0^\infty y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy \qquad (5.1)$$

Внезапно, $\Gamma(p+q)\cdot\int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(t+1)^{p+q}} = \Gamma(p+q)\cdot B(p,q)$. По простому (нестрого): если поменять порядок интегрирования, то и получим $\Gamma(p+q)B(p,q) = \Gamma(p)\cdot\Gamma(q)$. Более формально, мы должны проверять условия теоремы, доказанной выше. Давайте сделаем это (на отл):
1. $f(t,y) = t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}$ определена и непрерывна на $[0,\infty)\times[0,\infty)$.
2. $f(t,y) > 0$ при $t \geqslant 0, y \geqslant 0$.
По 5.2, существует интеграл $\int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty |f(t,y)|dy = \Gamma(p+q)B(p,q)$. 3. Покажем равномерную сходимость. $|f(t,y)| = t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-ty-y} \leqslant a^{p-1}y^{p+q-1}e^{-y}$. Значит, интеграл $\int\limits_0^\infty f(t,y)dy$ сходится равномерно на $t\in[0,\infty)$ по признаку Вейерштрасса.
4. То же самое для $\int\limits_0^\infty f(t,y)dt$. Здесь нам нужна равномерная сходимость на $u\in[\xi,b]$. Если $0<\xi<y<b$, то $|f(t,y)| = t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-ty}e^{-y} \leqslant b^{p+q-1}t^{p-1}e^{-\xi}$. Интеграл от этой штуки сходится, тогда $\int\limits_0^\infty f(t,y)dt$ сходится равномерно на $[\xi,b]$ по признаку Вейерштрасса.

Итак, из 5.2 имеем $\Phi(t,\xi) = \int\limits_\xi^\infty y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy$, поэтому 5.2 перепишется в виде сходящегося интеграла:

$$\int_0^\infty t^{p-1}\Phi(t,0)dt = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

Имеем $0 \leqslant \Phi(t,0)-\Phi(t,\xi) = \int\limits_0^\xi y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy \to 0$ при $\xi\to 0$, так как это интеграл с переменным верхним пределом, дифференцируема, значит, непрерывна. Оценим

$$\int_0^\infty t^{p-1}\Phi(t,\xi)dt \leqslant \int_0^\infty t^{p-1}\Phi(t,0)dt$$

- интеграл сходится, значит, по признаку Вейерштрасса интеграл сходится равномерно по $x \in (0, \infty)$. Теперь делаем предельный переход:

$$\lim_{\xi \to +0} \int\limits_0^\infty t^{p+1}\Phi(t,\xi)dt = \int\limits_0^\infty t^{p+1}\Phi(t,0)dt$$

9. Докажем формулу Лежандра, начиная с левой части. Идея - выделить полный квадрат: $B(p,p) =$

$$= \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}dx = \int\limits_0^1 (x-x^2)^{p-1}dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - x + x^2\right)\right)^{p-1} dx =$$

$$= \frac{1}{4^{p-1}} \int\limits_0^1 (1-1(1-2x)^2)^{p-1}dx = \begin{cases} t = 1-2x \\ dt = -2dx \end{cases} = \frac{1}{2^{2p-1}} = \int\limits_{-1}^1 (1-t^2)^{p-1}dt =$$

$$= \begin{cases} u = t^2 \\ t = u^{\frac{1}{2}} \\ dt = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du \end{cases} = \frac{1}{2^{2p-1}} \int\limits_0^1 (1-u)^{p-1}u^{-\frac{1}{2}}du == \frac{1}{2^{2p-1}} B(\frac{1}{2}, p)$$

5.3 Примеры

Пример. $\int\limits_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}dx$. Замена: $t = x^2$, $I = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty t^{n+\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \Gamma(n+1) = \frac{1}{2}n!$

Пример. $\int\limits_0^1 (\ln x)^n dx$. Берем $t = -\ln x$, откуда $I = \int\limits_0^\infty (-t)^n e^{-t}dt = (-1)^n n!$

Пример. $\int\limits_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}dx$. Положим $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. Замена $t = x^2$, значит, $I = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}B(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{5}{2}-1}{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-1} B(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = ... = \frac{3\pi}{16}$

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{t}(1-x^3)^2}$, Свести к бета-функции.

Пример. $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x}dx}{(1+x)^2}$. Свести к бета-функции.

Пример. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^p(\cos x)^q dx$. Сведем к бета-функции заменой $t = \sin^2 x$, $dx = \frac{1}{2}\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}$, откуда $I = \frac{1}{2}B(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2})$

Пример. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{4}}dx$ - то же самое.

Пример. Вычислить площадь фигуры $(x^2+y^2)^6 = x^4y^2$. Перейдя в полярку $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, имеем $r^6 = \cos^4\varphi\sin^2\varphi$. Значит, интегрируя, получаем $S = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} r(\varphi)d\varphi$.

5.4 Заключительные вопросы

№22. Теорема о перестановке двух несобственных интегралов
Пусть
1. $f(x,y)$ определена и непрерывна на $[a,\infty)\times[c,\infty)$;
2. $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$ $\forall d > c$;
3. $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ сходится равномерно на $[a,b]$ $\forall b > a$;
4. Существует $\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy$ или $\int\limits_c^\infty dy\int\limits_a^\infty |f(x,y)|dx$;

Тогда существуют оба интеграла $\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ и $\int\limits_c^\infty dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$, и они равны между собой.

Доказательство. Допустим, существует интеграл $\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty |f(x,y)|dx$. Тогда

$$\int\limits_c^\infty dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \lim_{d\to\infty}\int\limits_c^d dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$$

По теореме об интегрировании интеграла, зависящего от параметра, этот предел равен

$$\lim_{d\to\infty}\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$$

Обозначим $\Phi(x,d) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$. Применяя теорему о предельном переходе,

$$|\Phi(x,d)| = \left|\int\limits_c^d f(x,y)dy\right| \leqslant \int\limits_c^d |f(x,y)|dy \leqslant \int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy$$

По условию, $\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy$ сходится, поэтому $\int\limits_a^\infty \Phi(x,d)dx$ сходится равномерно по $d \in (c,\infty)$. Итак,

$$\lim_{d\to\infty}\int\limits_a^\infty \Phi(x,d)dx = \int\limits_a^\infty \left(\lim_{d\to\infty}\Phi(x,d)\right)dx = \int\limits_a^\infty \left(\int\limits_c^\infty f(x,y)dy\right)dx$$

□

№23. Гамма-функция

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1}\cdot e^{-x}dx$$

определена при $s > 0$.

Доказательство. Рассмотрим сумму интегралов $\Gamma(s) = \int\limits_0^1 x^{s-1}\cdot e^{-x}dx + \int\limits_1^\infty x^{s-1}\cdot e^{-x}dx$. Первый интеграл сходится при $s > 0$ и расходится при $s \leqslant 0$ по предельному признаку сравнения с интегралом $\int\limits_0^1 x^{s-1}dx$. Второй интеграл: имеем

$$\forall s \in \mathbb{R}\ \exists x(s)\ \forall x > x(s) : x^{s-1} \leqslant e^{\frac{x}{2}}$$

Значит, $\int\limits_{x(s)}^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx$ сходится, и исходный интеграл сходится по признаку сравнения при любом s. Значит, область определения гамма-функции - $s > 0$. □

№24. Гамма-функция Эйлера сходится равномерно на любом отрезке положительной полуоси действительных чисел.

Доказательство. Докажем равномерную сходимость на $[s_1, s_2]$ по признаку Вейерштрасса. Получаем $x^{s-1}\cdot e^{-x} \leqslant x^{s-1} \leqslant x^{s_1-1}$ при фиксированном $x \in [0,1]$. При этом интеграл $\int\limits_0^1 x^{s_1-1}dx$ сходится, поэтому интеграл сходится на $[s_1, s_2]$ равномерно. Если $x \geqslant 1$, то $x^{s-1} \cdot e^{-x} \leqslant x^{s_2-1} \cdot e^{-x}$, правая часть сходится и не зависит от s, значит, сходимость равномерная. Значит, на объединении $1 > s > 0$ и $s > 0$ сходимость непрерывная. Гамма-функция непрерывна при $s > 0$. Непрерывность следует из равномерной сходимости интеграла и непрерывности подынтегральной функции по теореме о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра.

№25. Основное свойство - $\boxed{\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)}$.
Доказательство. Имеем

$$\Gamma(s+1) = \int\limits_0^\infty x^s \cdot e^{-x} dx = -\int\limits_0^\infty x^s d(e^{-x}) = -x^s \cdot e^{-x}\Big|_0^\infty + s\int\limits_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x} dx$$

откуда $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$.
Значение в единице и факториал: $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} dx = 1$. Факториальность следует по индукции из основного свойства: $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(n+1) = n!$
Полуцелые числа: $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ - интеграл Пуассона. Значит, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \int\limits_0^\infty e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Заменим $x = t^2$, откуда имеем $2\int\limits_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Общая формула для полуцелых чисел следует по индукции из основного свойства: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}$.

№26. Формула для производной: $\Gamma^{(n)}(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln^n x\, dx$.

Доказательство. Сначала докажем для первой производной: $\Gamma'(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x\, dx$. Заметим, что дифференцируя подынтегральное выражение, мы получим определение гамма-функции. Значит, нам надо доказать применимость теоремы о дифференцировании несобственного интеграла. Для этого докажем равномерную сходимость на $[s_1, s_2], 0 < s_1 < s < s_2 < \infty$. Рассмотрим $\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$. В особой точке 0 при $s_1 \geqslant 1$ имеем $|x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x| \leqslant 1 \cdot 1 \cdot |\ln x| = -\ln x$. Интеграл $-\int\limits_0^1 \ln x\, dx = -x \ln x\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 dx = 1$ - сходится. Значит, гамма-функция сходится равномерно на $[s_1, s_2] < 1$ по признаку Вейерштрасса. Если же $s_1 < 1$, то $|x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x| \leqslant x^{s_1-1} \cdot \ln x$. Правая часть сходится, и интеграл сходится

по признаку Вейерштрасса.
Если $x > 1$, то $0 < x^{s-1} \cdot e^{-x} \ln x < x^{s_2-1} e^{-x} \ln x < e^{-\frac{x}{3}}$. Также сходится по Вейерштрассу. Поэтому в итоге он сходится на объединении областей. Поэтому можно дифференцировать.

№27. Основное определение - $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. Подстановка $x = \cos\varphi$ приводит к определению через инетграл второго рода: $B(a,b) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2a-1}\varphi \sin^{2b-1}\varphi\, d\varphi$.

Область определения: $p > 0$ и $q > 0$. Имеем $B(p,q) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. При $x \to 0$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}$, и интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}dx$ сходится при $p > 0$. При $x \to 1$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1}$, аналогично сходится при $q > 0$.
Симметричность $B(p,q) = B(q,p)$. Доказательство через замену $t = 1-x$.
Основное свойство: $B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$. Доказательство: $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = -\frac{1}{q}\int\limits_0^1 x^{p-1}d((1-x)^{q-1}) = -\frac{1}{q}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\Big|_0^1 + \frac{1}{q}\int\limits_0^1 (1-x)^q dx^{p-1} = \frac{p-1}{q}\int\limits_0^1 x^{p-2}(1-x)^{q-1}(1-x)dx$.
Отсюда $q \cdot B(p,q) = (p-1)\left(\int\limits_0^1 x^{p-2}(1-x)^{q-1}dx - \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\right)$.
Значит, $q \cdot B(p,q) = (p-1)\cdot B(p-1,q) - (p-1)\cdot B(p,q)$, и в итоге получаем $B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$. Аналогично, если внесем под дифференциал x^{p-1}, получим $B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$.
Через несобсвтенный инетграл 1 рода: замена $x = \frac{y}{y+1}$: $B(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy$.

№28. Докажем, что $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
Случай 1: $p > 1, q > 1$. Сделаем замену $x = (t+1)y, t > 0, y > 0$. Тогда $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty (t+1)^{s-1}y^{s-1}e^{-(t+1)y}(t+1)dy$. Тогда $\frac{\Gamma(s)}{(t+1)^s} = \int\limits_0^\infty y^{s-1}e^{-(t+1)y}dy$.

Пусть $S = p + q$. Имеем $\frac{\Gamma(p+q)}{(t+1)^{p+q}} = \int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy$. Домножим на t^{p-1}:

$$\Gamma(p+q) \cdot \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}} = t^{p-1}\int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy$$

Интегрируя, получаем

$$\Gamma(p+q) \cdot \int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(t+1)^{p+q}} = \int\limits_0^\infty t^{p-1}dt \int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy \qquad (5.2)$$

Внезапно, $\Gamma(p+q) \cdot \int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(t+1)^{p+q}} = \Gamma(p+q) \cdot B(p,q)$. По простому (нестрого): если поменять порядок интегрирования, то и получим $\Gamma(p+q)B(p,q) = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q)$. Более формально, мы должны проверять условия теоремы, доказанной выше. Давайте сделаем это (на отл):
1. $f(t,y) = t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}$ определена и непрерывна на $[0,\infty) \times [0,\infty)$.
2. $f(t,y) > 0$ при $t \geqslant 0, y \geqslant 0$.
По 5.2, существует интеграл $\int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty |f(t,y)|dy = \Gamma(p+q)B(p,q)$. 3. Покажем равномерную сходимость. $|f(t,y)| = t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-ty-y} \leqslant a^{p-1}y^{p+q-1}e^{-y}$. Значит, интеграл $\int\limits_0^\infty f(t,y)dy$ сходится равномерно на $t \in [0,\infty)$ по признаку Вейерштрасса.
4. То же самое для $\int\limits_0^\infty f(t,y)dt$. Здесь нам нужна равномерная сходимость на $u \in [\xi, b]$. Если $0 < \xi < y < b$, то $|f(t,y)| = t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-ty}e^{-y} \leqslant b^{p+q-1}t^{p-1}e^{-\xi}$. Интеграл от этой штуки сходится, тогда $\int\limits_0^\infty f(t,y)dt$ сходится равномерно на $[\xi, b]$ по признаку Вейерштрасса.

Итак, из 5.2 имеем $\Phi(t,\xi) = \int\limits_\xi^\infty y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy$, поэтому 5.2 перепишется в виде сходящегося интеграла:

$$\int\limits_0^\infty t^{p-1}\Phi(t,0)dt = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

Имеем $0 \leqslant \Phi(t,0) - \Phi(t,\xi) = \int\limits_0^\xi y^{p+q-1}e^{-(t+1)y}dy \to 0$ при $\xi \to 0$, так как это интеграл с переменным верхним пределом, дифференцируема, значит, непрерывна. Оценим

$$\int_0^\infty t^{p-1}\Phi(t,\xi)dt \leqslant \int_0^\infty t^{p-1}\Phi(t,0)dt$$

- интеграл сходится, значит, по признаку Вейерштрасса интеграл сходится равномерно по $x \in (0,\infty)$. Теперь делаем предельный переход:

$$\lim_{\xi\to+0}\int_0^\infty t^{p+1}\Phi(t,\xi)dt = \int_0^\infty t^{p+1}\Phi(t,0)dt$$