Топология

5.09.22

Содержание

Определение 1 *Пусть X - множество. Топологией на X называется семейство подмножеств $\tau \in \mathcal{P}(X)$, называемых открытыми множествами (данной топологии), такое, что:*
1. $X, \varnothing \in \tau$
2. $U_1, \ldots U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau$
3. $\{U_i \mid i \in I\} \subset \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \tau$

То есть, топологии принадлежит само множество и пустое множество, пересечение конечного числа множеств и объединение любого числа множеств из топологии.

Пример. Докажем, что открытые множества в смысле евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$ - топология. Очевидно, открыто само $\mathbb{R}^n$, также открытои пустое множество. Открытость пересечения доказывается тем, что наименьшая эпсилон-окрестность принадлежит всем множествам,то есть лежит в их пересечении, слеовательно, оно открыто. Для объединения: для каждой точки найдется множество, в которое она входит с окрестностью.

Определение 2 *Тривиальная топология* - $\tau_t = \{X, \varnothing\}$
Дискретная топология - $\tau_0 = \mathcal{P}(X)$

Любая инетерсная топология содержит тривиальную и содержится в дискретной.

Пример. Множества, симметричные относительно выбранной прямой в евклидовом пространстве,образуют топологию.

Пример. Множество эпсилон-окрестностей нуля $\tau = \{D_\varepsilon(0) \mid \varepsilon > 0\} \cup \{X, \varnothing\}$ - топология.

Пример. Топология Зарисского - топология множеств, дополнительных к конечным множествам (для конечных пространств совпадает с дискретной).

Пример. Пусть $f : X \to X$ - биекция. Докажем, что $\tau_f = \{U \subset X \mid$

1 База топологии

Определение 3 *Пусть (X, τ) - топологическое пространство Семейство $\Sigma = \{W_\beta \subset X \mid \beta \in B\}$ - база топологии, если удовлетворяет двум условиям:*
1. $\Sigma \in \tau\ \forall W_\beta \in \Sigma$ 2. Любое открытое подмножество X можно представить в виде объединения некоторых подмножеств из Σ: $\forall U \in \tau \exists W_\alpha \in \Sigma,\ \alpha \in A \subset B : U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} W_\alpha$

Пример. В обычной (евклидовой) топологии множество $\Sigma = \{D_r(a) \mid a \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ является базой топологии. Действительно, проверим аксиомы:
1. Открытая окрестность открыта.

2. По определению обычной топологии,каждая точка в открытом множестве содержится в нем с некоторой окрестностью. Значит, объединение этих окрестностей дает это множество. Более формально, $\forall u \in \tau, \forall x \in U \Rightarrow \exists D_{\varepsilon_x}(x) : D_{\varepsilon_x}(x) \in U$. Очевидно доказывается. что

$$\boxed{\bigcup_{x \in U} D_{\varepsilon_x}(x) = U}$$

Замечание. Если к базе добавить произвольное открытое множество, то новое множество также будет базой.
Упражнение. Привести пример двух баз евклидовой топологии на плоскости, которые не пересекаются с обычной базой (открытых шаров). (Решение: например, база из открытых квадратных или звездчатых окрестностей).
Пример. В $(\mathbb{R}^2, \tau_{MN})$, $\Sigma_{MN} = \{(b, b^*) \mid b \in\}$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Пример. Топология ираациональных точек на прямой $(\mathbb{R}, \tau_{im})$, $\tau_{im} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. Множество иррациоанльных точек не является базой, поскольку их объединение не содержит всю прямую. Решение: добавить саму прямую. !!!!!!!!!!!!

Теорема 1 *(критерий базы в топологическом пространстве)*
Пусть (X, τ) - опологическое пространство, и семейство множеств удовлетворяет условию $\sigma \subset \tau$. Σ является базой топологии тогда и только тогда, когда $\forall u \in \tau, \forall x \in U \exists W_{\beta_0} \in \Sigma : x \in W_{\beta_0} \subset U$

Доказательство. Пусть Σ - база топологии. Тогда любое открытое множество можно представить в виде объединений множеств из базы. Значит, для $x \in U$ найдется множество из базы, в котором лежит x.
Обратно. Множесто Σ удовлетворяет первой аксиоме базы по определению. Докажем выполнение второй аксиомы. Для любой точки в открытом множестве по условию теоремы найдется окрестность из Σ, лежащая в открытом множестве. !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! $\square$

Теорема 2 *(критерий базы на множестве)*
Пусть X - произвольное множесто, $\Sigma = \{W_\beta \subset X \mid \beta \in B\}$ - семейство подмножеств из X. ЧТобы на X существовала топология с данной базой, необходимо и достаточно выполнения двух условий:
1. $X = \bigcup_{\beta \in B} W_\beta$
2. Для любых множеств из базы найдется множество, лежащее в их пересечении и содержащее произвольную точку оттуда.

Доказательство. Необходимость. Пусть Σ - база некотрой топологии (X,т). Из акиомы базы (2) следует,что что X есть объединение множеств из Σ. значит, выполняется первое условие теоремы. Докажем второе условие. Достаточно взять пересечение двух множеств из базы. Так как это открытые

множества, его также можно представить в виде объединения множеств из базы, и хотя бы в одном из которых лежит фиксированная точка (по определению объединения).
Достаточность. Докажем, что всевозможные объедения множеств из Σ является топологией. пусть это есть τ. Проверим аксиомы топологии:
1. Пустое множество принадлежит всему, чему надо. Все простарнство лежит там по условию теоремы. 3. Пусть

$\square$

Лемма. Две топологии с общей базой совпадают.
Доказательство. Пусть τ, ω - две топологии на множестве X, имеющие общую базу $\Sigma = \{W_\beta \subset X \mid \beta \in B\}$. Для всех множеств из топологии τ они являются объединением множеств из базы, но поскольку это объединение открытых множеств, то оно открыто, и является элементом топлогии ω. Итак, $\tau \subset \omega$, аналогично и в другую сторону.
Замечание. Согласно этой лемме, база топологии однозначно определяет топологию. Следовательно, критерий базы на множестве дает способ определения новых топологий.

2 Метрическая топология

Напомним определение метрического пространства.
Пусть функция $\rho\colon M \times M \to \mathbb{R}$ удовлетворяет трем условиям:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(x, z) \leqslant \rho(y, x)$

Тогда множество (M, ρ) называется метрическим пространством с метрикой ρ.

Определение 4 *Пусть (M, ρ) - метричсекое пространство. Множество*

$$D_r(a) := \{x \in M \mid \rho(x, a) < r\}$$

называется открытым шаром радиуса r

Очевидно, центр шара принадлежит ему в любой метрике.

Определение 5 *Пусть (M, ρ) - метрическое пространство. Множество весвозможных шаров с разными уентрами и радиусами являются базой Σ_ρ (единственной) топологии, которая называется метрической топологией.*

Докажем, что множество шаров - база. Применим критерий базы на множестве.
1. Возьмем объединение всех шаров. Так как любой шар содержит свой центр, то все точки множества лежат в объединении шаров.

2. Для пересекающихся шаров возьмем минимальную радиус до границы шара.
Пример. Евклидова топология - пример метрической топологии для стандартной евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$. Дискретная топология - топология, порожденная дисретной метрикой.
Упражнение. Докажите самстоятельно, что евклидова метрика индуцирует евклидову топологию (используйте критерий базы) (вставить картинку.)
Решение. Докажем, что минимум из возможных расстояний до границы шара - искомый радиус окрестности, лежащей в пересечении шаров. Рассмторим точку в этой окретсности. Она лежит в обоих шарах. (вставить выкладку)
Замечание. Мы будем использовать обычную топологию и рисовать картинки, котоыре помогут доказывать различные теоремы, но все доказательства будут даны для произвольных метричсеких простарнств.
Прмиер. Рассмотрим множество непрерывных функций на отрезке. введем следующую метрику: $\rho(f,g) = max|f(x) - g(x)|$. Оперделение корректно, посоклько на отрехзке супремум непрерыной функции достигается. Какие (картика) функции лежат в окретсности произвольной функции $y = f(x)$? Это - непрерывные функции, заключенные в области $f(x) - r, f(x) + r$
Замечание. Если Σ - база топологии τ, то τ совпадает с семейством всевозможных объединений множеств из базы.

2.1 Метризуемость топологических пространств.

Определение 6 *Топологическое пространство называется метризуемым, если на множестве существует метрика,идуцирующая эту топологию.*

Мы уже доказали, что обычная топология метризуема. Не все, однако, топологические пространства метризуемы.

Определение 7 *Пусть X - топологическое пространство, $H \subset X$. Окрестностью подмножества в X называется подмножество, содержащее его. Окрестностью точки называется любое открытое множество, содержащее точку (обозначение: U_x)*

Определение 8 *Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если любые две точки обладают непересекающимися окрестностями.*

Теорема 3 *Любое метризуемое топологическое пространство хаусдорфово.*

Доказательство. $\square$

3 Свойства замкнутых множеств

Теорема 4 *Пусть (X, τ) - топологическое прространство, и $\mathcal{F} = \{CU \mid U \in \tau\}$ - совокупность всех замкнутых множеств. Тогда выполняются*

условия:
F1. $\varnothing, X \in \mathcal{F}$
F2. Объединение любых двух замкнутых замкнуто.
F3. Пересечение любого семейства замкнутых замкнуто.

Доказательство. Применим законы де Моргана к аксиомам топологического пространства.
1. $X = C\varnothing,\ \varnothing = CX$
2. Дополнение к объединению открытых замкнуто, и есть пересечение дополнений.
3. Дополнение к пересечению двух открытых замкнуто, и есть объединение дополнений. □
Замечание. Как мы видим, замкнутые множества имеют свойства, очень похожие на свойства топологии. На самом деле, топологию можно однозначно задать как семейство множеств, удовлетворяющих свойствам замкнутых множеств, и объявить открытыми дополнения к ним.
Замечание. Из аксиомы τ_2 по индукции вытекает, что пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто, и объединение любого числа замкнутых множеств замкнуто.
Пример. Рассмотрим обычную топологию на прямой, и рассмотрим интервалы, верхняя граница котрых минорируется каким-то числом. Тогда в бесконечном пересечении имеем отрезкоинтервал. Пример показывает, что пересечение любого числа открытых уже не обязательно открыто.

Теорема 5 *(лемма об открытом множестве)*
Пусть (X, τ) *- топологическое пространство. Множество открыто в топологии тогда и только тогда, когда любая точка содержится в нем с некоторой окрестностью.*

Доказательство. Возьмем любую точку $x \in U$. Положим окрестность точки само множество U; очевидно, $U \subset U$.
Обратно, пусть каждая точка входит в U вместе с какой-то окрестностью. Их объединение лежит в U, и ещё и U лежит в нем, так как окрестность каждой точки содержит её. □

3.1 Классификация точек относительно подмножества

Пусть (X, τ) - топологическое пространство, $A \subset X$ - непустое подмножество. Серия определений:

Определение 9 *Точка* $x \in X$ *называется внутренней точкой множества* A*, если существует окрестность этой точки, лежащая в* A*.*

Определение 10 *Точка* $x \in X$ *внешняя для множества* A*, если она внутренняя для его дополнения.*

Определение 11 *Точка* $x \in X$ *называется точкой прикосновения, если для любой окрестности* $U \cap A \neq \varnothing$

Определение 12 *Точка $x \in X$ называется предельной/точкой накопления, если в любой проколотой окрестности точки найдется точка из A.*

Определение 13 *Точка $x \in X$ - граничная для множества A, если в любой её окрестности лежат как точки из A, так и из $X \setminus A$.*

Определение 14 *(семинар) Точка $x \in A$ - изолированная, если существует окрестность, в которой нет других точек из A.*

Определение 15 *Возьмем любое подмножество A топологического пространства X. Объединение всех внутренних точек A называется внутренностью A (обозначается A_0, $IntA$). Объединение всех точек прикосновения называтся замыканием A (обозначение: $\overline{A}$). Множество всех граничных точек - граница A. (обозначение: FrA, ∂A)*

Переходим к теоремам.

Теорема 6 *(свойства замыкания)*
Замыкание множества обладает следующими свойствами:
1. $A \subset \overline{A}$, причем замыкание замкнуто.
2. Если $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$.
3. Замыкание множество - минимальное по включению замкнутое множество, содержащее A.
4. $\overline{A} = \bigcap F_\sigma$ - замыкание есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.
5. Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

Доказательство. 1. Рассмотрим $x \in A$. Найдем окрестность $x \in U_x$. Они пересекаются, и значит, $A \subset \overline{A}$. Докажем замкнутость замыкания. По лемме об открытом множестве, точка из дополнения к замыканию имеет окрестность, не пересекающуюся с A. Рассмотрев точку из этой окрестности, заметим, что она тоже не лежит в замыкании. Итак, мы показали, что дополнение к замыканию открыто, так как каждая точка лежитв нем с некоторой окрестностью.
2. Пусть $A \subset B$. Возьмем любую точку из замыкания. Она еть точка накопления для A и следоваельно для B (по включению), значит, она лежит в замыкании B.
3. Предположим, что существует замкнутое $F : A \subset F \subset \overline{A}$. Это эквивалентно тому, что существует точка из замыкания, но не лежащая в F. Она лежит в дополнении F, но лежит и в замыкании A, значит, является точкой накопления, но тогда $CF \cap F \neq \varnothing$ - противоречие.
4. Рассмотрим пересечение всех замкнутых, содержащих множество A. Оно замкнуто по свойтсву замыкания. Также, по свойству замыкания, $\overline{A}$ - одно их них, так как замкнуто. Но также и все пересечение лежит в замыкании. Обратно, A входит в пересечение. То есть в нем лежит и замыкание. Имеем в итоге равенство.

5. Пусть множество совпадает с замыканием. Тогда оно замкнуто по первому пункту теоремы. Обратно, пусть A замкнуто. По свойству 3, замыкание - минимальное замкнутое по включению. Но это и есть A. $\square$

Теорема 7 *(свойства внутренности)*
Пусть A - подножество топологического пространства.
1. $A_0 \subset A$, причем внутренность открыта.
2. A_0 - максимально открытое по включению, лежащее в A.
3. Внутренность есть объединение всех открытых множеств, лежащих в A.
4. $A = A_0 \Leftrightarrow A$ открыто.

Доказательство. 1. A_0 лежит
2. Рассмотрим открытое множество $U \subset A$
3. Рассмотрим объединение множеств A_α. Это - открытое множество, которое лежит в $A \Rightarrow$ лежит в A^0. Есть и обратное включение: рассмтрим $x \in A^0 \subset A$. Значит, сущетсвует $A_{\alpha_0} = A^0 \Rightarrow A^0 \subset \bigcup A_\alpha$. Итак, доказано равенство.
4. Пусть $A^0 = A$ - открыто по свойству 1. Обратно, если A открыто, то $A = A^0$ по свойству 2. $\square$

Теорема 8 *(свойства границы)*
Пусть $Fr\,A$ - граница подмножества A топологического пространства (X, τ).
1. $Fr\,A = \overline{A} \cap \overline{CA}$ - замкнутое множество.
2. $Fr\,A = \overline{A} \setminus A^0$

Доказательство. 1. В любой окрестности любой точки границы содержатся как точки из A, так и из CA. Значит, граничные точки являются точками прикосновения, то есть принадлежат замыканию A. С другой стороны, они приндлежат замыканию дополнения множества A по тем же соображениям.
2. Рассмотрим $x \in Fr\,A$. Это точка, которая принадлежит как замыканию множества, так и замыканию его дополнения. Значит, это не внутренняя точка. То есть $x \in Fr\,A \iff x \in \overline{A} \setminus A^0$ $\square$

3.1.1 Примеры weird и fancy топологий

Пример. Нарисем бабочку на плоскости, у которой кусок границы открыт. Значит, имеем $\mathbb{R}^2, \tau_{\text{об}}$. В ней оно ни открыто, ни замкнуто. В топологии отражения относительно OY (вспоним, что в неё все открытые множества открыто-замкнутые!). Внутренность - брюшко бабочки, замыкание - вся бабочка, граница - их разность. Топология Зарисского. Замыкание -