Дифференциальные уравнения

Гуревич

Содержание

1 Однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(\frac{x}{t})$$

Как искать его решение? Заменой $u(t) = \frac{x}{t}$. Тогда уравнение перепишется в виде $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$. В нем переемнные разделяются: $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dt}{t}$. Итак, типы уравнений:

1. С разделяющимися переменными
2. Приводящиеся к виду $\frac{dx}{dt} = f(ax + bx + c)$
3. Првиодящиеся к виду $(a_1x + b_1t + c_1)dx + (a_2x + b_2x + c_2)dt = 0$

Подумаем, можно ли это последнее привести к однородному. Добавим условие $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ (иначе система уже однородна). В общем, если эти две прямые пересекаются в точке (x_*, t_*), то можно ввести новые переменные, передвинув эту точку в начало координат: $x \mapsto x - x_*,\ t \mapsto t - t_*$. Тогда система перепишется без $c_1,\ c_2$, и таким образом будет однородной. Если прямые не пересекаются, то прямые лиюо совпадают, либо параллельны. Тогда введем замену (для любой прямой) $z(t) = a_1x + b_1t + c_1$. Так как прямые параллельны, то $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, значит, мы можем выразить вторую прямую: $a_2x + b_2t + c_2 = \frac{1}{k}(a_1x + b_1t + kc_2) = \frac{1}{k}(z - c_1 + kc_2)$. Уравнение приводится к виду $z(t)dx + \frac{1}{k}(z - c_1 + kc_2)dt = 0$. Но у нас все равно многовато переменны. Выразим dx через z:

$$z(\frac{dz - b_1dt}{a_1}) + \frac{1}{k}(z - c_1 + kc_2) = 0$$

Умножим на a_1k:

$$kzdz = kb_1zdt - a_1zdt - a_1(kc_2 - c_1)dt$$

Домножим на $\frac{1}{kzdt}$:

$$\frac{dz}{dt} = ((b_1 - \frac{a_1}{k})z - a_1(kc_2 - c_1))\frac{1}{z}$$

Finally, уравнение с разделяющимися переменными! ПОБЕДА!

2 Обобщенно-однородное уравнение

Определение 1 *Обобщенно-однородное уравнение - уравнение вида*

$$M(x,t)dx + N(x,t)dt = 0$$

причем M, N *- такие. что* $\exists n \in \mathbb{R}$*: если* $x = z^n(t)$*, то уравнение* $M(z^n, t)nz^{n-1}dz + N(z^n, t)dt = 0$ *однородно.*

Пример. Испортим однородное уравнения, чтобы сделать его обощенно-однородным. Роман придумал, чел харош.

Сведем и этого зверя к разделяющимся переменным.

$$\begin{cases} n(kz)^{n-1}M((kz)^n, kt) = k^m M(z^n, t)nz^{n-1} \\ N((kz)^n, kt) = k^m N(z^n, t) \end{cases}$$

3 Уравнение в полных дифференциалах

Напомним, что полный дифференциал $dF(x,y)$ C^1-гладкой функции равен $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$.

Определение 2 *Уравнение в полных дифференциалах - уравнение вида*

$$dF(x,y) = 0,\ F \in C^2(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Если мы знаем саму функцию, то решение находится мгновенно: $dF(x,y) = const$. Правда, оно неявное. Выразим $y = y(x)$ по теореме о неявной функции.

Пример. $x^2 \sin t dt + 2x \cos t dx = 0$

Уравнение является уравнение в полных дифференциалах, если существуют такие функции, что $M = \frac{\partial F}{\partial x},\ N = \frac{\partial F}{\partial y}$

Теорема 1 *(необходимое условие представления в полных дифференциалах)*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

Достаточное условие - $M_y = N_x$ *в односвязной области*

Доказательство. $\square$
Как подбирать такие функции? Мы знаем, что $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$. Проинтегрируем это равенство по x. Имеем $F = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$. Проделаем то же самое по переменной y: $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)dx) + \varphi' = N(x,y)$, откуда $\varphi = \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y}(\int M dx) \right) dy$. Чтобы проверить себя при решении, помним, что φ не зависит от x! Итак,

$$F = \int M(x,y)dx + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M dx \right) \right) dy$$

3.0.1 Геометрический смысл решения уравнения в полных дифференциалах

Так как $z = z(x,y)$ - какая-то поверхность, то запись $z = const$ - это линии уровня, которые можно спроецировать на плокость переменных и получить интегральные кривые.
Пример (модель Лотки-Вольтерра). Пусть $x(t)$ - плотность карасей, $y(t)$ - плотность щук в некотором пруду. Щуки сдерживают рост карасей, но от количества карасей зависит также и количество щук. Запишем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + ex) \end{cases}$$

Лотка придумал эту систему для биоценозов, а Вольтерра - для химических реакций.
Давайте решим эту систему. Её расширенное фазовое пространство, вообще говоря, трехмерное, поэтому будем рассматривать фазовые кривые - проекции интегральных на плоскость независимых параметров. Они ориентированы в направлении роста параметра t. Найдем эти кривые, найдя решение уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-cy+exy}{ax-bxy}$. Переменные разделяются:

$$\frac{(a-by)dy}{y} = \frac{(-c+ex)dx}{x}$$

Представим его в полных дифференциалах:

$$d\left(a \ln y - by + c \ln x - ex\right) = 0$$

Значит, решение имеет вид $a \ln y - by + c \ln x - ex = h = const$. Выглядит очень сложно, но давайте попробуем построить изолинии. Введм функцию $F = \ln(y^a x^c) - by - ex$, и поищем её изолинии. Сначала найдем критические точки: $(x_*, y_*) = (\frac{c}{e}, \frac{a}{b})$ (получилась единственная точка). Определим тип критической точки (составим гессиан, посчитаем его знакоопределенность); получим, что это точка максимума. Линии уровня - какие-то окружности/эллипсы.

Упражнение. Доказать, что фазовые кривые замкнуты.

Теперь нам надо понять, куда закручиваются эти линии, как они ориентированы. Они закручиваются против часовой стрелки вокруг критической точки, кстати, область решения - первая координатная четверть. Чтобы избежать проблем с дискретностью, наши переменные - это плотность населения пруда.

Определение 3 *Автономное ДУ - дифференциальное уравнение, правая часть которого не зависит от времени.*

Автономные уравнения не могут быть динамическими системами, так как они не зависят от времени, но можно искусственно этого достичь.

Пример. Нелинейный консервативный осциллятор. Рассмотрим маятник с координатами φ - отклонение от положения равновесия. Рассмотрим плоские колебания маятника массой m и длиной l. При повороте на малый угол движение можно представить как прямолинейное движение по касательной. Запишем второй закон Ньютона в проекции на касательную:

$$\vec{\tau}: \; m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\varphi$$

Пусть Δx - длина дуги окружности, примерно равная малой части касательной. Тогда $\Delta x = l\Delta\varphi + o(\Delta\varphi)$. Получим уравнение $\frac{fx}{dt} = l\frac{d\varphi}{dt}$. Finally,

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi$$

- уравнение колебания маятника. Оно нелинейное из-за синуса. Оно имеет порядок 2, значит, нам надо зафиксировать начальные условия: $\varphi(0), \; \dot{\varphi}(0)$. Уравнение тогда превратится в систему

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = -\omega^2 \sin\varphi \end{cases}$$

Кстати, если мы напишем функцию Лагранжа и напишем уравнение Лагранжа для него, то получим это же уравнение.
Начнем решение. Сделаем замену $\dot{\varphi} = \psi$. Теперь введем фазовое пространство угол-скорость таким образом, чтобы близкие точки были близки. В угловых координатах мы склеим точки $\pi, -\pi$ у координат углов (точнее, создадим факторпространство по отношению $(\varphi, \psi) \sim (\varphi + 2\pi k, \psi)$). Получим, что фазовое пространство - цилиндр. Любая замкнутая кривая - это некоторая траектория (вообще говоря, определляемая уравнением). На цилиндре есть два типа замкнутых кривых - стягиваемые в точку и нестягиваемые. Вторые отвечают за движение через верх.
Продолжаем решение. Из системы имеем $\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{\omega^2 \sin\varphi}{\psi}$. Полная энергия равна константе: $\frac{m\psi^2}{2} + \frac{mg}{l}(1 - \cos\varphi) = h$. Это мы вывели из формы уравнения в полных диференциалах. В общем, решаем. Получим

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(h - \frac{mg}{l}(1 - \cos\varphi)\right)}$$

Нарисуем фазовые траектории, и ещё функцию $F(\varphi) = \frac{mg}{l}(1-\cos\varphi)$. Уровни постоянной энергии - одномерные торы. Как и обычно с функцией Гамильтона. Из анализа фазовых траекторий можно выяснить, что период колебаний растет по мере увеличения энергии. Также есть два состояния равновесия: верхнее (неустойчивое) и нижнее (устойчивое).

4 Уравнения и ряды Тейлора

Пусть $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$. Рассмотрим $x(t_0) = x_0$. Разложим в ряд Тейлора: $x(t) = x(t_0) + \frac{dx}{dt}(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$. Отбросив члены высшего порядка (прямо как топовые физики), получим приближенное решение. Приближенные решение можно итерировать, и это будет широко известный **метод Эйлера** (первого порядка). $t_{k+1} = t_k + h,\ x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k)h$

5 Практика

Пример (№111). $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$. Уравнение однородно (проверим умножением на k). Значит, делаем замену $u(x) = \frac{y}{x}$. Имеем $dy = u{\cdot}dx + du{\cdot}x$. Переменные разделяются: $\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{u}}$

Пример (№113). $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy$. Переносим начало координат в точку пересечения.
Пример (№126). $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$. Это - обобщенно-однородное уравнение, то есть приводится к однородному заменой $y = z^m(x)$. $y' = mz^{m-1}z$ Далее $mz^{m-1}z = z^{2m} - \frac{2}{x^2}$ Теперь уравнение однородно. Введем замену $\frac{z}{x} = u$, $z = ux$. Получим $u'x + u = -1 + 2u^2$
Пример (№128). $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$. Пусть $y = z^m$. Идея: сделать так, чтобы под корнем степень у x и y была одинаковой.
Пример (№) $2xydx + (x^2-y^2)dy = 0$. Подберем функцию, полным дифференицалом которого является это выражение; получим $F(x,y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$. Решние: $F = C = const$
Пример (№192). $(1 + y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 xdy$. Мы должны показать, что вторые производные равны. Тогда это значит, что $F_{xy} = F_{yx}$, и такая функция вообще существует на некотором диске (где правая часть не обращается в ноль). Интегируем два раза, и найдем эту функцию: $F(x,y) = x - y^2\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{y^2}{2} + C_0$. Итак, ответ: $\boxed{F = const}$
Пример (№202). $y^2dx + (xy + \operatorname{tg} xy)dy = 0$. Является ли однородным, в полных дифференциалах? Давайте раскроем скобки и сгруппируем: $y(ydx + xdy) + \operatorname{tg} xydy$. Это то же, что и $\frac{d(xy)}{\operatorname{tg} xy} + \frac{dy}{y} = 0$. Домножим на $\frac{1}{y\operatorname{tg} xy}$ и хаваем уравнение в полных дифференицалах бесплатно. То, на что домножили - интегрирующий множитель.

6 Численные методы

Сегодня поговорим о численных методах решения дифференциальных уравнений. Именно, задача Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

имеет решение какое-то. Поскольку

$$x_{k+1} = x(t_{k+1}) = x(t_k + h) = x(t_k) + \frac{dx}{dt}\Big|_{t_k} h + \frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t_k}\frac{h^2}{2} + o(h^3)$$

Если мы рассмотрим конечные приращения h, то получим итеративную формулу

$$x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k)h$$

- метод Эйлера первого порядка, основанный на разложении функции в ряд Тейлора и отбрасывании членов высшего порядка. Таким образом, можно рассмотреть более точные методы, основынные на использовании членов высшего пордяка. Например, $\frac{d^2x}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{f(t_k+h,x_k+f(t_k,x_k)h)-f(t_k,x_k)}{h}$. Из этого мы получим метод Штермера. И так далее. Метод Рунге-Кутты - 4го порядка.

Пример. Супер-простая функция:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Это - определение обычной экспоненты. Решим методом Эйлера. Возьмем $t_1 = h$. Далее, $x_1 = 1 + f(t_0, x_0) \cdot h = 1 + h$. Далее, $t_2 = t_1 + h = 2h$, $x_2 = x_1 + f(t_1, x_1) \cdot h = 1 + h + (1 + h)h = (1 + h)^2$. В общем виде, в точке $x_{k+1} = x_k(1 + h) = (1 + h)^{k+1}$ функция будет принимать значение $x_n = (1 + h)^n = \left(1 + \frac{T}{n}\right)^n \to e^T$. Неслучайно тут вылез замечательный предел - определение экспоненты.

7 Существование и единственность решения

Эту задачу можно решить с помощью ф.п. Пикара. Доспустим, у нас есть решение задачи Коши в виде непреывной функции $f(t, x)$. Тогда мы можем проинтегрировать:

$$\int \frac{dx(t)}{dt} \equiv \int f(t,x)dt$$

Справа стоит набор первообразных:

$$x \equiv x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$$

Теорема 2 *(лемма)*
Задача Коши эквивалента решению интегрального уравнения

Доказательство. Пусть $x(t)$ - решение задачи Коши. Тогда при подстановке в уравнение имеем

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv f(t, x(t))$$

Интегрируя, получим $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$ - решение интегрального уравнения.
Обратно, пусть $x(t)$ - непрерывное решение интегрального уравнения. Тогда, взяв производную, получим

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

Подставив $t = t_0$ в интегральное уравнение, получим $x(t_0) = x_0$, т.е. $x(t)$ - решение д.у. $\square$
На самом деле, это обман, так как мы прсото записали в другом виде все так же не решаемую задачу. Запишем последовательность Пикара $\{x_k(t)\}$: $x_0(t) = x_0$, $x_{k+1}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x_k(\tau))d\tau$. Теперь нам надо бы доказать, что эта последовательность сходится к решению. Хм, где же нас обманули...

Теорема 3 *(Коши-Пикара, или о существовании и единственности задачи Коши)*
Пусть $f(t,x)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in D$ существует решение $x(t)$ задачи Коши, определенное на отрезке $I_\delta = [t_0 - \delta, t_o + \delta]$,$\delta = \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}$, где $r > 0$ такое, что $B_r \subset D$ (замкнутый шар), $m = \max|f(t,x)|$, $(t,x) \in B_r$. Кроме того, если $\tilde{x}(t)$ - другое решение задачи Коши, определенный на интервале $[t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}]$, то существует такое $\delta^* \in (0, \min(\delta, \tilde{\delta}))$, что $x(t) = \tilde{x}(t)$ для $t \in [t_0 - \delta^*, \delta^*]$.

Доказательство. Докажем, что последовательность Пикара корректно определена и её предел - непрерывная функция. Именно, каждый раз, когда мы вычисляем x_k, она непрерывна и не выходит за пределы области D, и поэтому снова интегрируема.
Рассмотрим

$$|x_1(t) - x_0(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x_0)d\tau\right| \leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} m\, d\tau\right| \leqslant m|t - t_0| \leqslant m\frac{r}{\sqrt{1+m^2}} \leqslant r$$

- значит, график функции лежит в B_r, пока $t \in I_\delta$. По индукции доказывается, что $|x_k - x_0| \leqslant r$, значит, все эти приближения лежат в шаре и непрерывны. Потому что у первообразной есть производная, значит она непрерывна. Итак, последовательность Пикара корректно определена и её члены - непрерывные функции.

Докажем, что последовательность сходится. Рассмотрим ряд $x_0(t) + x_1(t) - x_0(t) + x_2(t) - x_1(t) + ... + x_k(t) - x_{k-1}(t) + ...$. Частичные суммы S_n этого ряда сумма этого ряда как раз равны x_n. Если мы докажем, что если ряд сходится равномерно, то и последовтаельность Пиакара имеет непрерывный предел. Имеем $|f(t,x) - f(t, \tilde{})| \leqslant L|\tilde{x} - x|$, где $L = \max \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right|$, $(t,x) \in B_r$. Итак, $|x_1 - x_0| \leqslant m|t - t_0|$. Далее $|x_2 - x_1| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} (f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_0)) d\tau \right| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_0))| \, d\tau \right| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} L|x_2(\tau) - x_1| d\tau \right| \leqslant L \left| \int\limits_{t_0}^{t} \frac{Lm|x_2(\tau) - x_1|^2}{2} d\tau \right| \leqslant \frac{L^3 m|t - t_0|^3}{6L}$. То есть, $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{m}{L} \frac{L^n (t - t_0)^n}{n!} \leqslant \frac{m}{L} \frac{L^n \delta^n}{n!}$. Где-то тут мы ссылаемся на теорему Лагранжа о среднем. Итак, мы оценили ряд из модулей сходящимся числовым рядом, следовтаельно, по признаку Вейерштрасса сумма ряда сходится равномерно:

$$\frac{m}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^n \delta^n}{n!} \rightrightarrows \frac{m}{L} \left(e^{L\delta} - 1 \right)$$

Обозначим $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*(t)$. Тогда $|x^*(t) - x_k(t)| \to 0$. Теперь рассмотрим разницу $\left| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x^*(\tau)) d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x_k(\tau)) d\tau \right| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} L|x^* - x_k| d\tau$. Правая часть стремится к нулю, значит, и левая тоже. Поэтому, переходя к пределу по t при $k \to \infty$ в формуле $x_{k+1}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x_k(\tau)) d\tau$, имеем $x^* = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x^*(\tau)) d\tau$, то есть x^* - решение интегрального уравнения, а значит и задачи Коши.

Теперь докажем единственность. Пусть на интервале I_δ^* определено два решения, x и x^*. Тогда $|x^*(t) - x(t)| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x^*(\tau)) - f(\tau, x(\tau))) d\tau \right| \leqslant L \int\limits_{t_0}^{t} |x^*(\tau) - x(\tau)| d\tau$. Пусть $t > t_0$. Положим $\Delta = \int\limits_{t_0}^{t} |x^*(\tau) - x(\tau)| d\tau$, тогда $\frac{d\Delta}{dt} \leqslant L\Delta$; $\Delta(t_2) \geqslant \Delta(t_2)$ для всех $t_2 > t_2 \geqslant t_0$. Кстати, $\frac{d\Delta}{dt} \leqslant L\Delta$ Значит, существует инфинум $T = \inf\{t \geqslant t_0\}$. Рассмотрим случай, когда $T = t_0$ (самая жесткая оценка). Если это так, то пусть $(t_0+\varepsilon) = \Delta_\varepsilon$. Тогда $\Delta_\varepsilon > 0$. Поставим задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta}{dt} = L\Delta \\ \Delta(t_0+\varepsilon) = \Delta_\varepsilon \end{cases}$$

Отсюда $\Delta = \Delta_\varepsilon e^{L(t-t_0-\varepsilon)}$. Для всех $t > t_0$, $\Delta(t) \leqslant \Delta_\varepsilon e^{L(t-t_0-\varepsilon)}$. Устремим $\varepsilon \to 0$. Тогда и $\Delta(t) = 0$ в пределе. Рассуждение при $t < t_0$ аналогично. $\square$

Пример. Что можно сказать о решении задачи Коши для

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = |x| \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Теорема Коши-Пикара не работает в нуле, так как там функция не дифференцируема. Но не обманывают ли нас? $||x_1| - |x_2|| \leqslant 1 \cdot |x_1 - x_2|$. Модуль - липшицева функция, поэтому условия теоремы работают. А если

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{x} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Производная растет неограниченно, функция не липшецева: $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \leqslant L|x_1 - x_2$ - при приближении к нулю $L \geqslant \frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$. Но это только в нуле. А не в нуле можно $\Rightarrow$ решение сущетсвует и единственно. В общем, давайте зарешаем. Получаем $x = \frac{(t+C)^2}{4},\ t + C > 0$. По условию $x(0) = 0$, откуда $x = \frac{t^2}{2}$. Но ведь ещё есть куча решений типа $x(t_0) = 0$, $x = \frac{(t-t_0)^2}{4}$, и даже $x = 0$.

Определение 4 *Функция $\tilde{x}(t)$ определенная на интервале (a, b), называется продолжением решения вправо, если она совпадает с $x(t)$ на некотором подинтервале.*

Теорема 4 *(о продолжении решения)*
Пусть дано уравнение $\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$, функции $f(t, x)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на компакте $D \subset \mathbb{R}^2$ (причем в D лежит как минимум 1 шар), $x(t, t_0, x_0)$ - решение задачи Коши для $(t_0, x_0) \in D$. Тогда существует решение, определенное на отрезке $[a, b]$, причем $(a, \tilde{x}(a, t_0, x_0)), (b, \tilde{x}(b, t_0, x_0)) \in D$. Иначе говоря, решение продолжается на границу компакта.

Доказательство. В силу теоремы о существовании и единственности решения, функция (x, t_0, x_0) определена на отрезке $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$, где $\delta_0 = \frac{r_0}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\rho(P_1, \partial D)}{\sqrt{1+m^2}}$.

Положим $t_1 = t_0 + \delta_0,\ x_1 = x(t_1, t_0, x_0), p_1(t_1, x_1)$. определим

$$\tilde{x}(t, t_0, x_0) = \begin{cases} x(t, t_0, x_0),\ t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]; \\ x(t, t_1, x_1),\ t \in [t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1]; \end{cases}$$

Если (x_1, t_1) лежит на границе, то все хорошо. Если нет, то будем увеличивать шар, пока не достигнем границы множества (в силу компактности это всегда можно сделать).

Возможен вариант, когда последовательность δ_i стремится к нулю и сама не затрагивает границу компакта. Рассмотрим функцию, определенную на $t \in [t_0 - \delta_0, t + k + \delta_k]$. Последовательность t_kневозрастающая и ограниченная, поэтому существует и предел b. Функция $\tilde{x}$ определена на объединении интервало $\bigcup\limits_k [t_0 - \delta_0, t_k + \delta_k] = [t_0 - \delta_0, b)$. Воспользуемся непрерывностью функций: пусть $0 < h \ll 1$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in (b - h, b)$: $|\tilde{|}x(\alpha, t_0, x_0) - \tilde{x}(\beta, t_0, x_0)| \leqslant m|\alpha - \beta| < mh$. Последовательность $\tilde{x}_k$ фундаментальна, значит по критерию Коши у неё есть конечный предел. Положим этот предел значением функции в точке b: $x^* = \tilde{x}(b)$. Тогда функция непрерывна на $[t_0 - \delta_0, b]$. Вспомним про интегральное уравнение: заметим, что $\tilde{(}x)$ удовлетворяет интегральному уравнению на интервале. Функция, дополненная на конце интервала, непрерывна и также удовлетворяет интегральному уравнению, поэтому в ней есть и производная (по эквивалентности определений).

Покажем, что точка b лежит на границе области D. Предположим противное, тогда она лежит во внутренности D. Тогда она лежит в нем вместе с некоторой 2ε-окрестностью с центром в $p^* = (t^*, x^*)$. Так как точки $p \to p^*$, то все $p_i, i > k$ лежат в ε-шаре точки p^*. Тогда расстояние до границы больше ε, и мы получаем противоречие с тем, что ряд из δ_k сходится и также удален от границы больше чем на ε. Значит, $p^* \in \partial D$. $\square$

Следствие. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ - такое неограниченное замкнтуое подмножество плоскости, что для любых (a, b) : $D_{a,b} = D \cap \{(t, x) : a \leqslant t \leqslant b\}$ компактно, функции $f(t, x), \frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на D. Тогда решение задачи Коши продолжается либо неограниченно, либо до выхода на границу D. Доказать самостоятельно.

Пример. $x' = t^3 - x^3$. Показать, что любое решение этого уравнения продолжается неограниченно вправо. Нарисуем изоклину $x = t$. Заметим, что если $t_0 > x_0$, то $x(t, t_0, x_0) \in D$:. Тогда в силу следствия решение продолжается на границу, на граница не достигается, то есть

Пример. $x' = 1 + x^2$. Его решение - $x = \mathrm{tg}(x + C),\ C = \mathrm{arctg}(x_0) - t_0$, поэтому его нельзя продолжить до бесконечности, так как каждое решение определено на конечном интервале $(C_0 - \frac{\pi}{2}, C_0 + \frac{\pi}{2})$.

Практика.

Пример (№199). $y^2dx - (xy - x^3)dy = 0$. Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые: $y(ydx - xdy) - x^3dy = 0$. Поделим все на x^2, тогда получим: $-d\left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y}dy = 0\right)$. Домножая на $-\frac{y}{x}$, получаем $d\left(\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) + dy = 0$. Итак, $d\left(\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + y\right) = 0$ В общем, мы нашли интегрирующий множитель методом внимательного взгляда. Ответ: $\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + y = const$.

Пример (№202). $d(\ln|\sin(xy)|) + \ln|y| = 0$.

Определение 5 *Интегрирующий множитель - такая функция $\mu(z(x, y))$, что при домножении на неё уравнение становится уравнением в полных дифференциалах.*

Тогда $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$. То есть $\frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}M =$ Получаем, что $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{z_yM - z_xN} = P(z)$. То есть, если интегрирующий множитель существует, то он удовлетворяет этому условию. Значит, $\mu = e^{\int P(z)dz}$.

Пример (№212). $(2x^2y^3 - 1)ydx + (4x^2y^3 - 1)xdx = 0$. Пусть $z = xy$. Найдем интегрирующий множитель: $\mu = \frac{1}{(xy)^2}$.