Практика из билетов

22.12.22

№1.

$$\int\limits_0^\infty \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}dx =$$

Особые точки - оба предела.

$$= \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)' dx = \underbrace{\int\limits_0^\pi \left(\frac{\sin x}{x}\right)' dx + \int\limits_\pi^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)' dx}_{\text{разбиваем, чтобы было по одной особой точке}} =$$

$$= \frac{\sin x}{x}\bigg|_0^\pi + \frac{\sin x}{x}\bigg|_\pi^\infty = 0 - \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\sin x}^{\text{ограничен}}}{\underbrace{x}_{\to 0}} = 0 - 1 + 0 = -1$$

№2.

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$$

Имеем разрыв второго рода в точке 1. Посчитаем главное значение интеграла:

$$v.p.\int\limits_0^2 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\delta} f(x)dx - \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\ln 3$$

Покажем, что интеграл расходится по отдельности:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_0^{1-\delta}\frac{dx}{1-x^2} + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{1-x^2} =$$

$$= \lim_{\delta\to+0} \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{1-\delta} + \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\Big|_{1+\varepsilon}^{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{\delta\to+0} \ln\frac{2-\delta}{\delta} + \lim_{\varepsilon\to+0} \ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right) +$$

$$+\frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 3}{2} + \frac{1}{2} \lim_{\substack{\delta\to+0\\ \varepsilon\to+0}} \ln\frac{\varepsilon}{\delta}$$

Предела не существует, поэтому интеграл расходится.