

Анализ

Галкина

05.09.2022

Оглавление

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Ряды | 5 |
| 1.1 | Числовые ряды | 5 |
| 1.2 | Знакопеременные ряды | 11 |
| 1.2.1 | Свойства абсолютно сходящихся рядов | 12 |
| 1.3 | Действия над абсолютно сходящимися рядами | 13 |
| 1.4 | Перестановки условно-сходящихся рядов | 14 |
| 1.5 | Равномерная сходимость функциональных рядов | 14 |
| 1.5.1 | Свойства равномерно сходящихся ф. п. | 14 |
| 1.6 | Функциональные ряды. | 15 |
| 1.6.1 | Свойства равномерно сходящихся рядов | 18 |
| 1.7 | Степенные ряды | 20 |
| 1.7.1 | Базовые определения | 20 |
| 1.7.2 | Формулы для вычисления радиуса сходимости . . . | 20 |
| 1.7.3 | Ряды Тейлора | 22 |
| 1.7.4 | Использование степенных рядов | 25 |
| 2 | Несобственный интеграл | 27 |
| 2.1 | Основные определения | 27 |
| 2.1.1 | Критерии сходимости несобственного интеграла . . | 27 |
| 2.1.2 | Признаки сравнения в предельной форме | 28 |

Глава 1

Ряды

В данном разделе мы будем изучать следующие объекты:

- Числовые ряды
- Функциональные ряды (в т.ч. степенные, ряды Фурье)

1.1 Числовые ряды

Определение 1 *Ряд - сумма счетного числа слагаемых:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

Определение 2 *Частичная сумма S_n - сумма первых n слагаемых*

Определение 3 *Сумма ряда - предел последовательности частичных сумм $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$*

Если предел существует и конечен, то ряд сходится. Если предел бесконечен, ряд расходится.

Определение 4 *Остаток ряда - разность между частичной суммой и суммой $R_k = S - S_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_k$*

Пример. Геометрический ряд $a + aq + aq^2 + \dots$. Имеем $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Имеем случаи:

1. $|q| < 1 : S = \frac{a}{1-q}$

2. $|q| > 1 : S = \infty$

3. $q = 1 : S = \infty$

Итак, ряд сходится только если $|q| > 1$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$. Введем $a_n = b_{n+1} - b_n$, $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Итак, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$

Теорема 1 (необходимое условие сходимости ряда).

Если ряд сходится, то предел общего члена равен 0.

Равносильная формулировка: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. По условию, существует число - предел ряда. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - S = 0$. \square

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Зафиксируем x . Допустим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx = 0$. Но это противоречит тому, что $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Значит, ряд расходится.

Пример. Гармонический ряд расходится, т.к. расходится последовательность частичных сумм: $S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \dots = 1 + \frac{n}{2}$

Сходящиеся ряды образуют линейное пространство!

Теорема 2 (критерий Коши сходимости ряда)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$

Доказательство. Ряд сходится \iff существует предел частичных сумм. Применим к ним критерий Коши: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ \square

Теорема 3 (критерий сходимости через остаток)

1. Если ряд сходится, то сходится любой из его остатков.

2. Если хотя бы один остаток сходится, то ряд тоже сходится.

Доказательство. 1. По условию, существует сумма ряда. Рассмотрим частичный остаток с фиксированным номером $N \in \mathbb{N}$, рассмотрим $\sigma = \sum_{k=N+1}^{N+n} a_k$ - последовательность частичных сумм ряда R_N . Предел сигм равен пределу $(S_{n+N} - S_N) = S - S_N$.

2. По условию, существует такое n_0 , что R_{n_0} сходится. Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$, $\sigma_n = a_{n_0} + \dots + a_{n_0+n}$. Пусть $n_0 + n = m$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_m = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n_0} + \sigma_{m-n_0}) = S_{n_0} + \sigma$, то есть основной ряд сходится. \square

Теорема 4 (критерий сходимости для неотрицательных рядов)

Пусть дан ряд. Тогда ряд сходится \iff последовательность частичных сумм ограничена сверху.

Доказательство. \Rightarrow . По условию, существует предел $\lim S_n = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \{S_n\}_n \in \mathbb{N}$ - ограничена в другую сторону. По условию, $\{S_n\}$ ограничена сверху, \Rightarrow по теореме Вейрштасса для ограниченной неубывающей последовательности имеется предел \square

Признак сравнения. С чем же сравнивать? С геометрической прогрессией, с обобщенным гармоническим рядом (с произвольной степенью числа).

Теорема 5 (признак сравнения в оценочной форме)

Дано $0 \leq a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$: Тогда из сходимости B следует сходимость A , из расходимости A следует расходимость B .

Доказательство. Докажем исходя из критерия сходимости.

1. Пусть A_n, B_n - частичные суммы своих рядов. Так как ряд B сходится, то существует верхний предел для его частичных сумм. Так как ряд A меньше B , по транзитивности неравенств верхняя граница B лежит выше чем A . Что по тому же критерию дает сходимость. 2. \square

Пример. Рассмотрим $p < 1$, $n^p < 1$, $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$. Так как гармонический ряд расходится, то $\sum \frac{1}{n^p}$ расходится.

Пример. Найти сумму. $\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \dots$, $a_{n+1} = \sqrt{2 - b_n}$, $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$. Заметим, что $b_1 = 2 \cos \frac{\pi}{4}$, $b_2 = 2 \cos \frac{\pi}{8}$. Дальше эта формула выводится по индукции. $b_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$. $a_n = \sqrt{2 - b_{n-1}} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{2^n}} = 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$. Итого, $a_n \leq 2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}$

Теорема 6 (Признак сравнения в предельной форме)

Пусть даны неотрицательные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если предел отношения общего члена

1. Равен конечной (ненулевой) константе. Тогда ряды сходятся или расходятся одновременно

1.1. В частности, при $k=1$, ряды эквивалентны. 2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то имеет место " B сходится $\Rightarrow A$ сходится" 3. Если этот предел равен 0, то: " A сходится $\Rightarrow B$ сходится"

Доказательство. По определению предела. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \frac{n}{b_n} = k$ для $\varepsilon = k/2 > 0 \exists n_0(\varepsilon) \forall n > n_0 : k/2 < \frac{a_n}{b_n} < 3k/2$. тогда если B сходится, A сходится.

2. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \frac{n}{b_n} = 0$. Лкз $\varepsilon = 1$, тогда для этого ε $\exists n_0$ утверждение следует из первого признака сравнения.

Пункт 3 напрямую следует из второго. \square

Пример. 3 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha})$. Имеем $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. При $\alpha > 0$ сходится к 1, при $\alpha < 0$ ряд расходится. (Найдем область расходимости обобщенного гармонического ряда с помощью уже известного)

Теорема 7 (третий признак сравнения.)

Пусть даны ряды A и B ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$), и выполняется $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$. Тогда B сходится $\Rightarrow A$ сходится (если A расходится, B расходится)

Доказательство. так как все неравенства положительные, их всех можно перемножить: тогда утверждение следует из первого признака сравнения. \square

Теорема 8 (Признак Даламбера в оценочной форме)

Доказательство. \square

Теорема 9 Признак даламбера в предельной форме: $\lim_{n \rightarrow \infty}$

Доказательство. \square

Теорема 10 (признак Даламбера в предельной форме)

Пусть дан знакоположительный ряд. Тогда

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, то ряд сходится.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Пусть верхний предел равен $q < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q + \varepsilon$. По теореме Больцано-Вейерштрасса. Тогда по признаку Даламбера в оценочной форме ряд сходится.

Далее, пусть существует нижний предел. Тогда ряд сходится по признаку Даламбера в оценочной форме, или от противного: через отрицание необходимого признака. \square

Замечание. Если предел равен 1, то $r = q = 1$

Замечание. В отличие от признака Коши, в п.2 нельзя заменить нижний предел на верхний.

Замечание. Если все-таки получилась единица, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема 11 (признак Коши в оценочной форме)

Пусть дан знакоположительный ряд. Пусть $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$. Тогда ряд сходится.

Пусть $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Тогда ряд расходится.

Доказательство. Сравним с геометрической прогрессией: $a_n \leq q^n \implies$ из сходимости прогрессии следует сходимость ряда. \square

Теорема 12 (признак Коши в предельной форме)

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

1. $q < 1 \implies$ ряд сходится.

2. $q > 1 \implies$ ряд расходится.

Доказательство. Аналогично признаку Даламбера. Избавимся от верхнего предела, взяв предел подпоследовательности. Значит, тогда все числа попадают в ε -окрестность числа q . Но тогда не выполнено необходимое условие. \square

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}} \right)^n$. Кошируя это ряд, взяв наибольшую подпоследовательность, получим предел $\frac{3}{4}$, значит, ряд сходится. Можно ещё просто втупую посчитать две подпоследовательности.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^{2n-\ln n}$. Оценим это рядом $b_n = \left(\frac{1+n}{2+n} \right)^{2n-\ln n}$. В итоге получится, что ряд сходится.

Теорема 13 (признак Раабе в оценочной форме)

Пусть дан знакоположительный ряд с общим членом $a_n > 0$. Тогда:

1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$, ряд расходится.

2. Если $\exists \alpha > 0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}$ тогда ряд сходится.

Доказательство. 1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n-1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n-1}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, если ряд b_n расходится, то ряд расходится по третьему признаку сравнения.

2. Пусть $\beta \in (1, \alpha)$, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ сходится. Далее, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\beta = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^\beta = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Затем, $-\frac{\beta}{n} > -\frac{\alpha}{n} \implies 1 - \frac{\beta}{n} > 1 - \frac{\alpha}{n}$. Так как $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\frac{\alpha}{n}$ и $\frac{\beta}{n}$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : 1 - \frac{\alpha}{n} < 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Правая часть равна $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. По условию, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}$. Из этих двух условий по свойству транзитивности неравенств получаем оценку $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$, откуда следует сходимость ряда. \square

Теорема 14 (Признак Раабе в предельной форме)

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = R$. Тогда:

1. $R < 1$ - ряд расходится
2. $R > 1$ - ряд сходится.

Доказательство. \square

Теорема 15 (признак Куммера)

Даны две последовательности a_n и c_n . Тогда:

1. Если $\exists \alpha > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : C_n - C_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha$ - ряд сходится.
2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n}$ расходится и $C_n - C_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0$, то ряд расходится.

Доказательство. Пж убейте меня бя я больше не могу \square

Следствие 1. Признак Даламбера при $C_n \equiv 1$

Следствие 2. Признак Раабе. Возьмем $C_n = n - 1$. Имеем $1. n - 1 - n \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha \implies 1 - \frac{1}{n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\alpha}{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1+\alpha}{n}$. Подставляя в пункт

Теорема 16 (признак Бертрана/следствие из признака Куммера)

1. $C_n = (n - 2) \ln(n - 1). \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n}$ - ряд сходится
- 2.

Доказательство. \square

Теорема 17 (признак Гаусса)

Пусть дан положительный ряд. Пусть его можно представить в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = D - \frac{r}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}$$

Тогда:

1. Если $D > 1$ - ряд расходится
2. Если $D < 1$ - ряд сходится
3. Если $D = 1, R \leq 1$ - ряд расходится
4. Если $D = 1, R > 1$ - ряд сходится.

Доказательство. \square

Теорема 18 (интегральный признак)

Пусть ряд знакопостоянен. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходятся и расходятся одновременно, причем $f(n) = a_n$, функция определена, непрерывна, неотрицательна и невозрастающая на $[1, \infty)$. Оценка погрешности:

Доказательство. $\forall x \geq 1 \exists k \in \mathbb{N} : k \leq x \leq k+1$. По условию невозрастания имеем $f(k) \geq f(x) > f(k+1)$. $a_{k+1} < f(x) \leq a_k$, $a_{k+1} \square$ **Пример.**

Исследуем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Взятием интеграла получаем условия сходимости:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{сходится при } p > 1 \\ \text{расходится при } p \leq 1 \end{array} \right.$$

Признак Дирихле Пусть общий член ряда имеет вид $a_n b_n$. Тогда если:

1. a_n монотонна и её предел равен нулю

2. Предел частичных сумм b_n ограничен

Доказательство. по критерию Коши. Фиксируем положительный ε . По условию, предел ряда A равен нулю, тогда для $\frac{\varepsilon}{6B} > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$. По признаку Дирихле ряд сходится, так как частичные суммы синуса арифметической прогрессии сходятся.

Теорема 19 (признак Абеля)

Пусть общий член ряда имеет вид $a_n b_n$. Тогда если

1. Последовательность a_n монотонна и ограничена

2. Последовательность b_n сходится.

Доказательство. Докажем по критерию Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как сходится ряд b_n , то по критерию Коши для $\frac{\varepsilon}{3M} > 0$ найдется такой номер, начиная с которого модуль суммы p членов ряда b_n меньше, чем эта штука. Из неравенства Абеля получим $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$

\square **Упражнение.** Доказать признак Абеля, используя признак Дирихле.

Пример. $\sum_{n=2}^{\infty} (\sin n\alpha \cos \frac{\pi}{n}) / \ln \ln n$. Косинус монотонный и ограниченный, а все остальное сходится по Дирихле. Значит, ряд сходится по Абелю.

1.2 Знакопеременные ряды

Сформулируем признаки Коши и Даламбера для знакопеременных рядов. Доказательство чекаем в Фихтенгольце.

Теорема 20 (признак Даламбера)

Пусть a_n - общий член знакопеременного ряда. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$.
Получаем классическую абсолютную сходимость.

Доказательство. ПОЛНОСТЬЮ следует из признака Даламбера для знакопостоянных рядов. Единственно, что здесь нового - то, что при абсолютной расходимости в признаке Даламбера будет и условная расходимость, поскольку не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Для некоторого ε ... $\left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q \right| < \varepsilon$ \square

Теорема 21 (признак Коши) Все аналогично. Из абсолютной расходимости следует расходимость.

Доказательство. \square Признак сравнения для знакопеременных рядов не работает. Приведем контрпример: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $b_n = a_n + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Предел отношения таких рядов равен 1, то есть они эквивалентны, но вот первый сходится, а второй - расходится (см. общий пример с степенями и логарифмами).

1.2.1 Свойства абсолютно сходящихся рядов

Лемма. Если ряд сходится абсолютно, то модуль его суммы не превосходит суммы его модулей.

Теорема 22 ()

Пусть дан ряд с общим членом a_n , и он сходится абсолютно. Обозначим его сумму, частичную сумму, сумму модулей и частичную сумму модулей как $S, S_n, \overline{S}, \overline{S}_n$. Тогда, если переставить слагаемые, новый ряд a_n^* сходится абсолютно.

Доказательство. Ещё один ворох обозначений: \overline{S}_n^*, S_n^* . Для любого ε найдется номер такой, что $|\overline{S}_n - \overline{S}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Из леммы следует, что $|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Перейдем к переставленному ряду. Выберем в нем номер, чтобы такая частичная сумма содержала все слагаемые, входящие в $S_{n(\varepsilon)}$. Взяв любое число m большее этого номера, $|S_m^* - S_{n(\varepsilon)}| < |\overline{S}| < \frac{\varepsilon}{2}$. В эту сумму они все вошли. Остались только те, которые ??? $|S_m^* - S| = |S_m^* - S_{n(\varepsilon)} + S_{n(\varepsilon)} - S| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}$. Мы доказали сходимость ряда. Абсолютная сходимость следует из таких же рассуждений для ряда с модулем.

\square

1.3 Действия над абсолютно сходящимися рядами

Теорема 23 Если ряд сходится абсолютно, то ряд, умноженный на константу, сходится абсолютно.

Доказательство. Зафиксируем ε . Найдем такой номер, что ряд из модулей меньше чем $\frac{\varepsilon}{|c|}$. И в общем эта штука сходится. \square

Теорема 24 Сумма абсолютно сходящихся рядов абсолютно сходится.

Доказательство. Сумма модулей больше модуля суммы. \square

Теорема 25 (О произведении абсолютно сходящихся рядов)
Сумма всевозможных произведений $a_i b_j$ сходится абсолютно, и сумма ряда равна произведению сумм.

Доказательство. Введем две переменные с модулями. Введем новые обозначения, как в прошлой теореме. Пользуясь этой же теоремой, мы можем доказать абсолютную сходимость для хотя бы одного из упорядочиваний. Представим себе бесконечную матрицу $|a_i b_j|$. Будем рассматривать последовательность частичных сумм в угловых минорах. Для них имеем формулу $S_{n^2} = S'_n \cdot S''_n$. По условию, в правой части есть оба предела, а значит и слева тоже есть. И ещё, $S_{n^2} \leq S_m \leq S_{(n+1)^2}$. Ну кароч.... что мдэ, тут дофига текста. \square

Определение 5 (произведение рядов по Коши)

Пусть $S_a \cdot S_b = S_c$. имеем следующее произведение:

$$c_1 = a_1 b_1$$

$$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$$

То есть суммируем по диагональкам той бесконечной матрицы.

Пример 1. $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = 1$, $b_n = \frac{n}{2^n}$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{k(k+1)-2^{n+1-k}}$.

Пример 2. Произведение расходящихся рядов $a_n = 1, 5^n$, $b_n = 1 - 1, 5^n$ в смысле Коши - сходится, так как $c_n = 0, 75^n$.

Заметим, что условной сходимости недостаточно! Так, для $a_n = b_n = (-1)^{n-1}/\sqrt{n}$ ничего не выйдет. Смиритесь. Ребят а че вы с пары то свалили. Чувствую себя лохом, и от этого неуютненько.

1.4 Перестановки условно-сходящихся рядов

Теорема 26 *Лемма о сходимости.* Ряд a_n сходится условно. Рассмотрим отдельно подпоследовательности из положительных и отрицательных членов. Тогда их суммы $+\infty, -\infty$ соответственно.

Доказательство. \square

Теорема 27 (Римана)

Если ряд сходится условно, то для любого действительного числа найдется такая перестановка ряда, при которой ряд сходится к этому числу.

Доказательство. По предыдущей лемме, ряд из положительных членов расходится, значит, найдется частичная сумма, большая чем искомое число. Далее найдем такую частичную сумму из отрицательных членов, чтобы, прибавив её к прошлому этапу, получили снова меньше чем число. И так далее. \square

1.5 Равномерная сходимость функциональных рядов

Теорема 28 (критерий Коши равномерной сходимости)

$f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на множестве $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

Доказательство. 1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, $f_n(x) \Rightarrow f$ на X . Тогда для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

\square

Следствие (метод граничной точки). Если $f_n(x) \in [a, b]$ и $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in (a, b)$, $f_n(a)$ расходится. Тогда $f_n(x)$ не сходится равномерно к $f(x)$ на (a, b) .

Доказательство. Допустим, что сходимость равномерная. Тогда что происходит

Пример. $f_n(x) = n^{x+1}e^{-nx}$, $x > 0$.

1.5.1 Свойства равномерно сходящихся ф. п.

1. Линейные комбинации сходятся с соответствующим линейным комбинациям пределов.

2. Умножение на ограниченную на X функцию: $(gf_n) \Rightarrow (gf)$
3. На любом подмножестве X функция равномерно сходится.
4. Если $\forall x \in X : f_n(x) \rightarrow f(x)$ и $E \subset X$ - конечное множество, то на E функция сходится равномерно.
5. Функция, равномерно сходящаяся на двух множествах, равномерно сходится на их объединении.

Доказательство.

1.6 Функциональные ряды.

Определение 6 Область $X \subset D$ сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ - область, лежащая в области определения всех функций ряда и для каждого x на ней ряд сходится.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n} (\sin x)^{3n}$. Область сходимости - $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

Определение 7 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно к $S(x)$ на X , если $S_n \Rightarrow S$ на X (S_n - частичная сумма ряда).

Пример. Исследуем на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(2n-1)}{((n-1)^2+x^2)(n^2+x^2)}$, $x \in [1, \infty)$. Здесь предел частичных сумм можно найти по определению: $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k = x(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{n^2+x^2})$. При фиксированном $x \in D : \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{x}$, $S(x) = \frac{1}{x}$. Проверим, что остаток равномерно стремится к нулю (тогда это верно и для суммы): $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{x}{2nx} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ (по методу оценки остатка). Итак, ряд сходится равномерно к своей сумме.

Пример. Исследуем на равномерную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2(2n-1)}{((n-1)^2+x^2)(n^2+x^2)}$, $x \in [1, \infty)$. Имеем $S_n(x) = 1 - \frac{x^2}{n^2+x^2}$, $S(x) = 1$

Теорема 29 (необходимое условие равномерной сходимости ф.р.)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно к $S(x)$ на X . Тогда $a_n \Rightarrow 0$ на X .

Доказательство. По условию, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall x \in X : |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ \square

Теорема 30 (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на X к $S(x)$ тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм равномерно сходится: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \varepsilon$

Доказательство. Просто применим определение Коши сходимости. \square

Пример. Докажем, что у ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n^2 x^2 + \sqrt{n}}$, $x \in (0, 1)$ нет равномерной сходимости. Возьмем $x = \frac{1}{2n}$; $a_k(x) \geq \frac{1}{4n}$. Поэтому для $\varepsilon \geq \frac{1}{4}$ по критерию Коши ряд расходится.

Теорема 31 (метод граничной точки)

пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, его члены непрерывны на отрезке $[a, b]$ и ряд сходится на интервале (a, b) , но расходится на конце интервала. Тогда равномерной сходимости нет.

Доказательство. Повторяет доказательство для последовательностей. \square

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in (1, 2)$. Ряд сходится на интервале как обобщенный гармонический ряд. При $x = 1$ ряд расходится, значит, равномерной сходимости нет.

Теорема 32 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости ф.р./мажорантный)

Пусть дан ряд с общим членом $a_n(x)$ и мы можем оценить $|a_n(x)| \leq a_n$ (то есть мажорирующим рядом, не зависящим от x), причем $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на том множестве, на котором верна оценка.

Доказательство. Используем критерий Коши: фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Ряд a_n сходится, значит, по критерию Коши $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} :$

$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$. Из пункта 1 имеем $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} : |a_n(x)| \leq a_n$.

Тогда $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$. Тогда по критерию Коши для функционального ряда следует равномерная сходимость. \square

Пример. Исследуем на равномерную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arccotg}(nx)}{n}$, $x \in (\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$. Подставив ноль, по методу граничной точки нет равномерной сходимости.

Пример. Исследуем сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5 x^2} \sin nx$ на прямой. Спойлер: сходится равномерно. Сделаем оценку: $|a_n(x)| \leq e^{-n^5 x^2} n|x|$. Функция симметрична при замене $x \mapsto -x$, значит, будем оценивать на положительном луче, откинув модуль. Оценим максимумом, вычислив производную и решив уравнение. Имеем $x = \frac{1}{\sqrt{2n^5}}$. Подставляем: $f_n(x) \leq f(\frac{1}{\sqrt{2n^5}}) = \frac{1}{\sqrt{2en^{\frac{3}{2}}}} = a_n$. Значит, $|a_n(x)| \leq |f_n(x)| \leq a_n \forall x \in \mathbb{R}$. Итак, сходимость равномерная.

Теорема 33 (*признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда*)

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ и

1. $\forall x \in X : \{a_n(x)\}$ монотонна по n ;
2. $\exists M = \operatorname{const} \forall x \in X \forall n \in N : |B_n(x)| \leq M$, где $B_n(x)$ - частичные суммы ряда b_n .

Тогда ряд сходится равномерно на X

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $a_n \Rightarrow 0$ на X , то для $\frac{\varepsilon}{6B} > 0$ \square

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx/n$. Исследовать на равномерную сходимость на интервалах $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, $(0, 2\pi)$. Ну, раз говорят что уже было. То не пишем. На втором интервале нет равномерной сходимости по краевому критерию.

Теорема 34 (*признак Абеля равномерной сходимости ф.р.*)

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ и $\forall x \in X$:

1. $|a_n(x)| \leq M = \operatorname{const}$ для всех n ;
2. $\{a_n(x)\}$ монотонна;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно сходится на X ;

Тогда исходный ряд равномерно сходится на X .

Доказательство. По определению Коши. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как ряд из b_n сходится равномерно, то по критерию Коши для $\frac{\varepsilon}{3M} > 0 \exists n_0(\varepsilon) \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Тогда по неравенству Абеля

$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x) a_k(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3M} (|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}(x)|) < \frac{\varepsilon}{3M} 3M = \varepsilon$. Тогда по критерию Коши этот ряд сходится равномерно на X . \square

Пример. Исследуем на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin x \operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$.

Алгоритм:

1. Арктангенс монотонен и ограничен.
2. Все остальное сходится по Дирихле.

1.6.1 Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 35 (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда)

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, причем

1. Все функции непрерывны на множестве
 2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно к $S(x)$ на X ;
- Тогда $S(x)$ непрерывна на X .

Доказательство. По условию, сумма из $a_n(x)$ сходится равномерно на X к $S(x)$, то есть $S_n(x) \Rightarrow S(x)$ на X , $S_n(x)$ непрерывна как сумма. Тогда по теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности, составленной из непрерывных функций, $S(x)$ непрерывна. Другая формулировка:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

можно поменять сумму и предел. \square

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = f(x)$ - непрерывна на $(0, 2\pi)$

Теорема 36 (об интегрировании равномерно сходящегося ряда)

дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, причем

1. все функции непрерывны на отрезке $[a, b]$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ к $s(x)$;

тогда в $\forall x, x_0 \in [a, b] : \int_{x_0}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt$ можно менять интеграл и сумму.

Доказательство. Докажем, что $\int_{x_0}^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x a_n(t)dt$. По предыдущей теореме $S(t)$ непрерывна на $[a, b]$, значит, интегрируема на нем по Риману. Обозначим $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x a_k(t)dt$ и докажем, что $\sigma_n(x) \Rightarrow \int_{x_0}^x S(t)dt$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, $S_n(t)$ равномерно сходится на $[a, b]$ для $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$. $\exists n_0(\varepsilon) \forall n > n_0 \forall x \in [a, b] : |S_n(t) - S(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $|\sigma_n(x) - \int_{x_0}^x S(t)dt| = \text{!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!} \square$

Теорема 37 (о дифференцировании равномерно сходящегося ряда)

дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, причем

1. Производные всех функций непрерывны на отрезке $[a, b]$;
 2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится на $[a, b]$ к $s(x)$ (даже не нужна непрерывность);
 3. Ряд из производных сходится равномерно на $[a, b]$ к $S'(x)$;
- тогда в ряде можно менять производную и сумму.

Доказательство. Используем предыдущую теорему. Тогда $\int_{x_0}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x a'_n(t)dt$. Получаем, что в равенстве $\int_{x_0}^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(x_0))$ справа стоит число (в силу непрерывности функции), ряд из $a_n(x_0)$ сходится по условию, следовательно, ряд из $a_n(x)$ сходится.

Теперь покажем равномерную сходимость. Для этого покажем, что остаток ряда из производных $r_n(x)$ равномерно стремится к нулю. Действительно, если ряд удовлетворяет теореме об интегрировании, то и его остатки тоже. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, остаток обычного ряда стремится к нулю: $R_n(x) \rightarrow 0$. тогда для $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists n_1(\varepsilon) \forall n > n_1 : |R_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Также остаток ряда из производных равномерно стремится к нулю, тогда для $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0 \exists n_2(\varepsilon) \forall n > n_2 \forall x \in [a, b] : |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Тогда из звездочки следует !!!!!!!!!!!!!??????

\square

1.7 Степенные ряды

1.7.1 Базовые определения

Определение 8 Степенной ряд- ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$

Числа C_n - коэффициенты степенного ряда, x_0 - число. Итак, степенной ряд - обобщение понятия многочлена. Область сходимости степенного ряда непуста, так как так лежит как минимум x_0 (в этом случае сумма ряда равна C_0). Сделав замену $t = x - x_0$, сведем любой степенной ряд к виду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$.

Теорема 38 (лемма Абеля)

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_0 и $|x| < |x_0|$, то ряд сходится сходится и в x , причем абсолютно.

Доказательство. По условию ряд сходится, значит, $c_n x^n \rightarrow 0$. Тогда существует константа M , большая чем все члены ряда. Тогда $|c_n x^n| = \left| c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$ сходится \Rightarrow ряд из модулей сходится, т.е. ряд сходится абсолютно. \square

Теорема 39 Пусть D - область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $R = \sup_{x \in D} |x|$. Тогда $(-R, R) \subset D \subset [-R, R]$.

Доказательство. По лемме Абеля, второе включение очевидно: $\forall x \in D : |x| \leq R \Rightarrow D \subset [-R, R]$. Пусть $x \in (-R, R)$. Тогда $|x| < R = R_1$. Тогда для него найдется $x_0 \in D : |x_0| > |x|$. Значит, ряд в точке x_0 сходится, и значит сходится в x . Значит, интервал лежит в области сходимости. \square

1.7.2 Формулы для вычисления радиуса сходимости

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. По признаку Даламбера $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1$, то ряд сходится. Итак, если предел существует, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

Аналогично, из признака Коши получим формулу Коши-Адамара:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

В общем случае алгоритм такой:

1. Найти радиус сходимости.
2. Выписываем интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$.
3. Исследуем на сходимость концы интервала.

Пример. Найдем область сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}$. Применим признак Даламбера: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)3^{n+1}}{(n+2)3^n} = 3$. Интервал сходимости: $(6 - 3, 6 + 3)$. В точке $x = 9$ ряд расходится (т.к. гармонический), в точке $x = 3$ - условная сходимость (по признаку Лейбница).

Пример. Найдем область сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n}$. Заметим, что у этого ряда коэффициенты чередуются с нулем (лакунарный ряд). Используем два способа:

1. По формуле Коши-Адамара - возьмем четные номера, так как на них доставляется супремум предела последовательности: $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$. Интервал сходимости $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, на концах расходится.
2. Исследуем как функциональный ряд по признаку Даламбера. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{x^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$. Значит, ряд сходится, если $\frac{x^2}{2} < 1$, откуда мы получаем тот же интервал сходимости.

Теорема 40 (о равномерной сходимости степенного ряда)

Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости.

Доказательство. Для простоты рассмотрим ряд с центром в нуле. Пусть ряд сходится на $(-R, R)$. Возьмем $[a, b] \subset (-R, R)$. Обозначим $d = \max(|a|, |b|)$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n d^n$ сходится, значит, его мы можем использовать для оценки сверху рядов на отрезке: $|c_n x^n| \leq |c_n d^n|$, значит, по признаку Вейерштрасса ряд сходится на $[a, b]$. \square

Теорема 41 (о непрерывной сумме степенного ряда)

Сумма степенного ряда непрерывна в любой точке из интервала сходимости.

Доказательство. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится на $(-R, R)$ к $f(x)$. Степенные функции непрерывны на интервале (и вообще на всей прямой); по предыдущей теореме, на любом отрезке, лежащем в интервале, ряд равномерно сходится. Значит, по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда, сумма непрерывна на отрезке. Так как этот отрезок произволен, то сумма непрерывна на интервале. \square

Теорема 42 (об интегрировании и дифференцировании степенного ряда)

Пусть дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = f(x)$, R - радиус сходимости. Тогда у функции $f(x)$ существуют производные любого порядка внутри интервала:

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$$

Интегрирование тоже почленное. Причем при дифференцировании и интегрировании радиус сходимости не меняется.

Доказательство. Следует из соответствующих теорем для функциональных рядов. Последнее утверждение следует из формулы Коши-Адамара. \square

Пример. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Задания типа таких можно де-

лать, используя свойства степенных рядов. Пусть $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Радиус сходимости $x \in [-1, 1)$. Возьмем производную: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. А

вот теперь проинтегрируем: $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = f(x) - f(0)$; $f(x) = -\ln(1-x) + f(0)$.

Значит, сумма искомого ряда равна $f(\frac{1}{2}) = 2$. Цель этих телодвижений - привести к виду геометрической прогрессии, которую легко посчитать.

1.7.3 Ряды Тейлора

Определение 9 Пусть в некоторой окрестности $U(x_0)$ существуют производные всех порядков у функции. Тогда для функции $y = f(x)$ в точке x_0 существует ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Если $x_0 = 0$, то ряд называется рядом Маклорена.

Теорема 43 Если функция представляется в виде степенного ряда, то он совпадает с её рядом Тейлора. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$.

Доказательство. Пусть $(x_0 - R, x_0 + R)$ - интервал сходимости ряда. Из разложения функции в ряд имеем $f(x_0) = c_0$. Беря производную, получаем, что $f'(x_0) = c_1$. Дифференцируя дальше, получаем, что $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. \square

Если по произвольной функции составить ряд Тейлора, то совсем не обязательно, что он сойдется к этой функции. Сейчас поясним:

Пример. Рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Очевидно (по индукции), что производная порядка $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot p\left(\frac{1}{x}\right)$, где $p(t)$ - многочлен. Посчитаем производную в нуле; первая производная в нуле - ноль. По индукции получаем, что все остальные производные тоже равны нулю. Значит, ряд Маклорена тождественно равен нулю, и сходится не к исходной функции, а к тождественно нулевой.

Теорема 44 (достаточное условие сходимости ряда Тейлора)

Пусть $\exists h > 0$, $\exists M = \text{const}$ такие, что $\forall x \in \mathbb{N} \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) : |f^{(n)}(x)| \leq M$. Тогда на всей h -окрестности точки x_0 функция равна своему ряду Тейлора, причем он сходится равномерно на данном интервале.

Доказательство. Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора и запишем остаток в форме Лагранжа: $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $\xi \in (x_0, x)$ (лежит между ними). Остаток по модулю меньше, чем $M \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$ - значит, он равномерно сходится к нулю. Поэтому и сам ряд сходится равномерно на $(x_0 - h, x_0 + h)$. \square

Ряды Маклорена для основных функций

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, x \in \mathbb{R}$
2. $\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, x \in \mathbb{R}$
3. $\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, x \in \mathbb{R}$

$$4. \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$5. \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$6. \ln(1+x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1, 1]$$

$$7. \ln(1-x) =, \quad x \in [-1, 1)$$

$$8. \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1) - \text{ в этой формуле функция принимает все положительные значения, поэтому она круче.}$$

$$9. (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$10. \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1, 1]$$

$$11. \operatorname{arcsin}(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! \cdot x^{2n+1}}{n! \cdot 82^n (2n+1)}, \quad x \in (-1, 1)$$

(Для логарифма) покажем, что остаток ряда стремится к нулю.

1. $x \in [0, 1]$: $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$. Подставим $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta = \theta(x, n)$. При этом имеем оценку $0 \leq x \leq 1 \leq 1 + \theta x$. Получим $|r_n(x)| = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Значит, остаток равномерно сходится к 0 на $[0, 1]$. Чтобы доказать равномерную сходимость на $(-1, 0)$, запишем остаток в форме Коши. Получим $|r_n(x)| = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x}$. Первая дробь меньше 1, вторую оценим как $\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$, что при фиксированном x стремится к нулю. Значит, мы можем писать разложение для логарифма!

Пример. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

Ряд $(1+x)^\alpha$. Найдем радиус сходимости: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1$.

Запишем остаток в форме Коши: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n$, $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}$. Если остаток стремится к нулю, то и ряд сходится к данной функции. Пусть $r_n = A_n \cdot B_n \cdot C_n$, где $B_n(x) = (1+\theta x)^{\alpha-1}$, $C_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$, $A_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1}$. $A_n \rightarrow 0$ по признаку Даламбера, $|B_n(x)| \leq \max\{(1-|x|)^{\alpha-1}, (1+|x|)^{\alpha-1}\}$, $C_n(x) < 1$, значит, остаток стремится к нулю, и ряд сходится к функции.

Задача. Доказать, что в $x = 1$ ряд сходится при $\alpha > -1$, расходится при $\alpha \leq -1$. В точке $x = -1$ сходится абсолютно при $\alpha \geq 0$, расходится при $\alpha < 0$

Выражения для арксинуса и арктангенса получаются интегрированием

разложив их производных.

Рассмотрим сходимость арксинуса на концах!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

1.7.4 Использование степенных рядов

Разложение функции в ряд - мощнейшая тема. Иногда в физике и других прикладных областях делают так:

Пример. Возьмем интеграл \int

Пример. Решим диффур $y'' = 2xy' + 4y$

Глава 2

Несобственный интеграл

2.1 Основные определения

Определение 10 Несобственный интеграл I-го рода (с одной особой точкой).

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ для всех $b > a$. Тогда несобственный интеграл первого рода - предел

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

2.1.1 Критерии сходимости несобственного интеграла

Теорема 45 (критерий Коши) Пусть $\forall b \geq a$ функция интегрируема на $[a, b]$. Тогда $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists b_0(\varepsilon) > 0 \forall b_1, b_2 > b_0 :$
 $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$

Доказательство. По условию, существует предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) = A \in \mathbb{R}$,

где $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда из существования предела следует для $\frac{\varepsilon}{2}$: $\exists b_0(\varepsilon) > a : |F(b) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $b_1 > b_0$, $b_2 > b_0$. Тогда $|F(b_2) - F(b_1)| = |F(b_2) - A| + |F(b_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Достаточность. Докажем существование предела $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$ из определения предела по Гейне. Пусть $b_n \rightarrow \infty$, тогда $\forall b_0 > a \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0$

Покажем, что предел не зависит от выбора последовательности b_n . Выберем другую последовательность b_n^* . Обозначим предел $\lim_{n \rightarrow \infty} F(b_n^*) = B$.

Составим последовательность $b_1, b_1^*, b_2, b_2^*, \dots \rightarrow \infty$. Тогда предел F от

этой последовательности обозначим как C . Так как пределы подпоследовательностей сходятся к пределу последовательности, то $A = B = C$. Значит, выполняется условие определения предела по Гейне, значит, интеграл сходится. \square

Пример. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 0$, расходится при $\alpha \leq 0$. Докажем это.

1. $\alpha > 0$. Поехали: $\forall \varepsilon > 0 \exists b_0(\varepsilon) > 1 \forall b_1 > b_0, b_2 > b_0 : \left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| < \varepsilon$.

Доказываем: $\left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| = \left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{x^\alpha} d \cos x \right| = \left| \frac{\cos x}{x^\alpha} \right|_{b_1}^{b_2} - \int_{b_1}^{b_2} \cos x d\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \leq \dots \leq \frac{4}{b_0^\alpha}$. Значит, $b_0 > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

2. $\alpha \leq 0$. Синус теперь принимает разные знаки. Пусть $b_k = 2\pi k$. Тогда по критерию Коши интеграл расходится.

Теорема 46 (критерий сходимости через остаток)

Пусть $\int_a^\infty = \int_a^b + \int_b^\infty$, ($b > 0$).

1. Если интеграл сходится, то и любой из его остатков сходится.
2. Если хотя бы один из остатков сходится, то интеграл сходится.

Доказательство. \square

Теорема 47 (критерий сходимости несобственного интеграла от несобственной функции)

Пусть $\forall b > a$ функция интегрируема на $[a, b]$ и неотрицательная. Тогда $\int_a^\infty f(x) dx$ сходится \Leftrightarrow первообразная $F(b) < M$ ограничена.

Доказательство. $F(b)$ неубывает и имеет конечный предел. Значит, интеграл сходится. Обратно, пусть существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$, то $F(b)$ ограничена в некоторой окрестности. \square

2.1.2 Признаки сравнения в предельной форме

Теорема 48 (признак сравнения)

Пусть $f(x) > g(x) > 0$ начиная с некоторого $x > a$, и для любого $b > a$ функции интегрируемы на $[a, b]$. Тогда

1. Если $\int f(x)$ сходится, то и $\int g(x)$ сходится.
2. Если $\int g(x)$ расходится, то и $\int f(x)$ расходится.

Доказательство. По свойству определенного интеграла (транзитивность числовых неравенств), $F(b) \leq M$. Тогда по критерию 3 интеграл сходится. 2. Погодите, это реально? \square

Теорема 49 (второй признак сравнения)

Если $\frac{f(x)}{g(x)} = k$, $\infty \neq k \neq 0$, то их интегралы сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. \square