Анализ

Галкина

05.09.2022

Содержание

1 Ряды **2**
1.1 Числовые ряды 2

2 Связь признака Даламбера и Коши **6**

3 Оценка погрешности приближения какой-то величины с помощью положительного ряда **7**

4 Знакопеременные ряды **7**
4.1 Преобразование Абеля 8

Коэффициенты: Контр*0,4 Коллок*0,3 Экз*0,3

1 Ряды

- Числовые ряды
- Функциональные ряды (в т.ч. степенные, ряды Фурье)

1.1 Числовые ряды

Определение 1 *Ряд - сумма счетного числа слагаемых:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

Определение 2 *Частичная сумма S_n - сумма первых n слагаемых*

Определение 3 *Сумма ряда - предел последовательности частичных сумм* $S = \lim_{n\to\infty} S_n$

Если предел существует и конечен, то ряд сходится. Если предел бесконечен, ряд расходится.

Определение 4 *Остаток ряда - разность между частичной суммой и суммой* $R_k = S - S_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_k$

Пример. Геометрический ряд $a + aq + aq^2 + \dots$. Имеем $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Имеем случаи:

1. $|q| < 1: \ S = \frac{a}{1-q}$
2. $|q| > 0: \ S = \infty$
3. $q = 1: \ S = \infty$

Итак, ряд сходится только если $|q| > 1$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$. Введем $a_n = b_{n+1} - b_n, \ b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ Итак, $S = \lim_{n\to\infty}$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$

Теорема 1 *(необходимое условие сходимости ряда).*
Если ряд сходится, то предел общего члена равен 0.
Равносильная формулировка: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq_0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. По условию, существвует число - предел ряда. Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0$. □

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx, \ x \neq \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$. Зафиксируем x. Допустим, что $\lim_{n\to\infty} \sin nx = 0$. Но это противоре чит тому, что $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Значит, ряд расходится.

Пример. Гармонический ряд расходится, т.к. расходится последовательность частичных сумм: $S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \dots = 1 + \frac{n}{2}$

Сходящиеся ряды образуют линиеное пространство!

Теорема 2 *(критерий Коши сходимости ряда)*
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\iff \forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$

Доказательство. Ряд сходится $\longleftrightarrow$ существует предел частичных сумм. Применим к ним критерий Коши: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ $\square$

Теорема 3 *(критерий сходимости через остаток)*
1. Если ряд сходится, что сходится любой из его остатков.
2. Если хотя бы один остаток сходится, то ряд тоже сходится.

Доказательство. 1. По условию, существует сумма ряда. Рассмотрим частичный остаток с фиксированным номером $N \in \mathbb{N}$, рассмотрим $\sigma = \sum_{k=N+1}^{N+n} a_k$ - последовательность частичных сумм ряда R_N. Предел сигм равен пределу $(S_{n+N} - S_N) = S - S_N$.

2. По условию, существует такое n_0, что R_{n_0} сходится. Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, $\sigma_n = a_{n_0} + \ldots + a_{n_0+n}$. Пусть $n_0 + n = m$, тогда $\lim_{n\to\infty} S_m = \lim_{n\to\infty}(S_{n_0} + \sigma_{m-n_0}) = S_{n_0} + \sigma$, то есть основный рядсходится. $\square$

Теорема 4 *(критерий сходимости для неотрицательных рядов)*
Пустьдан ряд. Тогда ряд сходится $\Leftrightarrow$ *последовательность частичных сумм ограничена сверху.*

Доказательство. $\Rightarrow$. По услови, существует предел $limS_n = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \{S_n\}_n \in \mathbb{N}$ - ограничена В другую сторону. По условию, $\{S_n\}$ ограничена сверху, $\Rightarrow$ по тео реме Вейрштрасса для ограниченной неубывающей последовательности имеется предел $\square$

Признак сравнения. С чем же сравнивать? С геометрической прогрессией, с обобщенным гармоническим рядом (с произвольной степенью числа).

Теорема 5 *(признак сравнения в оценочной форме)*
Дано $0 \leqslant a_n \leqslant b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ *: Тогда из сходимости B следует сходимость A, из расходимости A следует расходимость B.*

Доказательство. Докажем исходя из критерия сходимости.
1. Пусть A_n, B_n - частичные суммы своих рядов. Так как ряд В сходится, то существует верхний предел для его частичных сумм. Так как ряд А меньше Б, по транзитиавности неравенств верхняя граница В лежит выше чем А. ЧТо по тому же критерию дает сходимость. 2. $\square$

Пример. Рассмотрим $p < 1$, $n^p < 1$, $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$. Так как гармонический ряд расходится, то $sum\frac{1}{n^p}$ расходится.

Пример. Найти сумму. $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \ldots$, $a_{n+1} = \sqrt{2-b_n}$, $b_{n+1} = \sqrt{2+b_n}$. Заметим, что $b_1 = 2\cos\frac{\pi}{4}$, $b_2 \cos\frac{\pi}{8}$. Дальше эта формула выводится по индукции. $b_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. $a_n = \sqrt{2-b_{n-1}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ Ита, $a_n \leqslant 2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}$

Теорема 6 *(Признак сравнения в предельной форме)*
Пусть даны неотрицательные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. *Если предел отношения общего*

члена
1. Равен конечной (ненулевой) константе. Тогда ряды сходятся или расходятся одновременно
1.1. В частности, при mkk=1, ряды эквивалентны. 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, то имеет место "B сходится $\Rightarrow$ A сходится"3. Если этот предел равен ооо, то: "A сходится $\Rightarrow$ B сходится"

Доказательство. По опреелению предела. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\frac{n}{b_n}} = k$ для $\varepsilon = k/2 > 0 \exists n_0(\varepsilon)\forall n > n_0 : k/2 < \frac{a_n}{b_n} < 3k/2$. тогда если B сходится, A сходится.

2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\frac{n}{b_n}} = 0$. Lkz $\varepsilon = 1$, тогда для этого эпсилон $\exists n_0$ утверждение следует из первого признака сравнения.

Пункт 3 напрямую следует из второго. □

Пример. 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha})$. Имеем $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ Прии альфа>0 сходится к 1, при альфа<0 ряд расходится. (ljнайддем область расходимости обобщенного гармонического рядва с помощью уже известного)

Теорема 7 *(тертий признак сравнения.)*
Пусть даны ряды A и B ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$),и выполняется $a_{n+1}/a_n \leqslant b_{n+1}/b_n$ Тогда B сходится $\Rightarrow$ A сходится (если A расходится, B расходится)

Доказательство. так как все неравенства полоэительные, их всех можно перемножить: тогда утверждение следует из первого признака сравнения. □

Теорема 8 *(Признак Даламбера в оценочной форме)*

Доказательство. □

Теорема 9 *Признак даламбера в предельной форме: $\lim\limits_{n\to\infty}$*

Доказательство. □

Теорема 10 *(признак Даламбера в предельной форме)*
Пусть дан знакоположительный ряд. Тогда
1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, то ряд сходится.
2. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Пусть верхний предел равен $q < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N}\,\forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q + \varepsilon$. По теореме Больцано-Вейерштрасса. Тогда по признаку Даламебра в оценочной форме ряд сходится.
Далее, пусть существует нижний предел. Тогда ряд сходится по признаку Даламберав оценочной форме, или от противного: через отрицание необходимого признака. □
Замечание. Если предел равен 1, то $r = q = 1$
Замечание. В отличие от признака Коши, в п.2 нельзя заменить нижний предел на верхний.
Замечание. Если все-таки получилась единица, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема 11 *(признак Коши в оценочной форме)*
Пусть дан знакоположительный ряд. Пусть $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$. Тогда ряд сходится. Пусть $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$. Тогда ряд расходится.

Доказательство. Сравним с геометрической прогрессией: $a_n \leqslant q^n \implies$ из сходимости прогрессии следует сходимость ряда. □

Теорема 12 *(признак Коши в предельной форме)*
Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$.

1. *$q < 1 \implies$ ряд сходится.*
2. *$q > 1 \implies$ ряд расходится.*

Доказательство. Аналогично признаку Даламбера. Избавимся от верхнего предела, взяв предел подпоследовательности. Значит, тогда все числа попадают в эпсилон-окрестность числа q. Но тогда не выполнено необходимое условие. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n$. Кошируя это ряд, взяв наибольшую подпоследовательность, получим предел $\frac{3}{4}$, значит, ряд сходится. Можно ещё просто втупую посчитать две подпоследовательности.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$. Оценим это рядом $b_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{2n-\ln n}$. В итоге получится, что ряд сходится.

Теорема 13 *(признак Раабе в оценочной форме)*
Пусть дан знакоположительный ряд с общим членом $a_n > 0$. Тогда:
1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant_1 -\frac{1}{n}$, ряд расходится.
2. Если $\exists \alpha > 0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$ тогда ряд сходится.

Доказательство. 1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n-1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n-1}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, если ряд b_n расходится, то ряд расходится по третьему признаку сравнения.
2. Пусть $\beta \in (1, \alpha)$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ сходится. Далее, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = (\frac{n}{n+1})^\beta = (1 - \frac{1}{n})^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + O * (\frac{1}{n^2})$. Затем, $-\frac{\beta}{n} > -\frac{\alpha}{n} \implies 1 - \frac{\beta}{n} > 1 - \frac{\alpha}{n}$. Так как $O(\frac{1}{n^2})$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\frac{\alpha}{n}$ и $\frac{\beta}{n}$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : 1 - \frac{\alpha}{n} < 1 - \frac{\beta}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Правая часть равна $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. По условию, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$. Из этих двух условий по свойству транзитивности неравенств получаем оценку $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$, откуда следует сходимость ряда. □

Теорема 14 *(Признак Раабе в предельной форме)*
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = R$. Тогда:
1. $R < 1$ - ряд расходится
2. $R > 1$ - ряд сходится.

Доказательство. □

Теорема 15 *(признак Куммера)*
Даны две последовательности a_n и c_n. Тогда:
1. Если $\exists \alpha > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : C_n - C_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha$ - ряд сходится.
2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n}$ расходится и $C_n - C_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 0$, то ряд расходится.

Доказательство. Пж убейте меня бля я больше не могу $\square$
Следствие 1. Признак Даламбера при $C_n \equiv 1$
Следствие 2. Признак Раабе. Возьмем $C_n = n-1$. Имеем 1. $n-1-n\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha \implies 1-\frac{1}{n}-\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\alpha}{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1-\frac{1+\alpha}{n}$. Подставляя в пункт

Теорема 16 *(признак Бертрана/следствие из признака Куммера)*
1. $C_n = (n-2)\ln(n-1)$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant_1 -\frac{1}{n} - \frac{1}{n\ln n}$ *- ряд сходится*
2.

Доказательство. $\square$

Теорема 17 *(признак Гаусса)*
Пусть дан положительный ряд. Пусть его можно представить в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = D - \frac{r}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}$$

Тогда:
1. Если $D > 1$ *- ряд расходится*
2. Если $D < 1$ *- ряд сходится*
3. Если $D = 1,\ R \leqslant 1$ *- ряд расходится*
4. Если $D = 1,\ R > 1$ *- ряд сходится.*

Доказательство. $\square$

Теорема 18 *(интегральный признак)*
Пусть ряд знакопостоянен. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и интеграл* $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ *сходятся и расходятся одновременно, причем* $f(n) = a_n$*, функция определена, непрерывна, неотрицательна и невозрастающая на* $[1,\infty)$*. Оценка погрешности:*

Доказательство. $\forall x \geqslant 1\ \exists k \in \mathbb{N} : k \leqslant x \leqslant k+1$. По условию невозрастания имеем $f(k) \geqslant f(x) > f(k+1)$. $a_{k+1} < f(x) \leqslant a_k$, a_{k+1} $\square$ **Пример.** Исследуем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. Взятием интеграла получаем условия сходимости:

$$\begin{cases}\text{сходится при } p > 1 \text{расходится при } p \leqslant 1\end{cases}$$

2 Связь признака Даламбера и Коши

Если $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant q$ для всех n начиная с 1, то $a_n = a_1 q^n$, откуда следует признак Коши.

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1}\cdot q$$

Значит, Коши покрывает больше случаев.

3 Оценка погрешности приближения какой-то величины с помощью положительного ряда

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx < R_n \leqslant \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

Из доказательства интегрального признака

$$a_{k+1} < \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant a_k$$

$$\int_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant a_k \int_{k-1}^{k} f(x)dx$$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

Итак,

$$\int_{n+1}^{\infty} \leqslant R_n < \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

Пример. Вычислим с точностью до 0,001 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Ответ: $1,082 \pm 0,001$ (точный ответ $\frac{\pi^4}{90}$)

4 Знакопеременные ряды

Пусть теперь ряд знакопеременный.

Определение 5 *Ряд сходится абсолютно, если сходится ряд из модулей. Ряд сходится условно, если абсолютно расходится, но сам сходится.*

Теорема 19 *Если ряд сходится абсолютно, то ряд сходится.*

Доказательство. Следует напрямую из критерия Коши и свойства модуля: $||a_1| + ...|a_n|| \geqslant |a_1 + ... + a_n|$. $\square$

Теорема 20 *(признак Лейбница для знакочередующихся рядов)*
Пусть ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n v_n$, *где* $v_n > 0$ *и монотонно убывает. Тогда ряд сходится. Более того, имеет место оценка погрешности* $|R_n| \leqslant v_n$

Доказательство. 1. Посчитаем частичную сумму для $2k$:

$$S_{2k} = v_1 - v_2 + ... - v_{2k}$$

$$S_{2k+2} = S_{2k} + v_{2k+1} - v_{2k+2}$$

$$S_{2k+2} - S_{2k} = v_{2k+1} - v_{2k+2}$$

$$S_{2k} = v_1 - (v_2 - v_3) - (v_4 - v_5) - ... - (v_{2k-2} - v_{2k-1}) - v_{2k}$$

Значит, эта последовательность возрастает и ограничена сверху, значит, у неё есть конечный предел: $S_{2k} \leqslant u_1$

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}(S_{2k} + v_{2k+1}) = S$$

Следовательно,

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Последовательность частичных сумм для нечетных чисел также убывает, доказательство аналогичное.
2. Докажем оценку погрешности. $|R_{2k}| = S - S_{2k} < S_{2k+1} - S_{2k}$. Итак,

$$|R_{2k}| \leqslant v_{2k+1}$$

$$R_{2k+1} = S_{2k+1} - S < S_{2k+1} - S_{2k+2}$$
$$|R_{2k+1}| \leqslant v_{2k+2}$$

□

4.1 Преобразование Абеля

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n,\ B_i = \sum_{k=1}^{i} b_k$$

Доказательство. $b_k = B_k - B_{k-1},\ k \in \{2, ..., n\}$ ВСТАВКА

Теорема 21 *(неравенство Абеля)*
Пусть последовательность монотонно возрастает или убывает. И пусть $\exists M \forall k \in \{1...n\} |B_k| \leqslant M$. *Тогда модуль конечной суммы* $\leqslant M(|a_1| + 2|a_n|)$

Доказательство. Юра, допиши пж □

Теорема 22 *(признак Дирихле)*

Доказательство. □