Анализ

Галкина

05.09.2022

Содержание

1 Ряды

- Числовые ряды
- Функциональные ряды (в т.ч. степенные, ряды Фурье)

1.1 Числовые ряды

Определение 1 *Ряд - сумма счетного числа слагаемых:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

Определение 2 *Частичная сумма S_n - сумма первых n слагаемых*

Определение 3 *Сумма ряда - предел последовательности частичных сумм $S = \lim_{n\to\infty} S_n$*

Если предел существует и конечен, то ряд сходится. Если предел бесконечен, ряд расходится.

Определение 4 *Остаток ряда - разность между частичной суммой и суммой $R_k = S - S_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_k$*

Пример. Геометрический ряд $a + aq + aq^2 + \dots$. Имеем $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Имеем случаи:

1. $|q| < 1: \ S = \frac{a}{1-q}$
2. $|q| > 0: \ S = \infty$
3. $q = 1: \ S = \infty$

Итак, ряд сходится только если $|q| > 1$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$. Введем $a_n = b_{n+1} - b_n, \ b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ Итак, $S = \lim_{n\to\infty}$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$

Теорема 1 *(необходимое условие сходимости ряда).*
Если ряд сходится, то предел общего члена равен 0.
Равносильная формулировка: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq_0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. По условию, существвует число - предел ряда. Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0$. $\square$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx,\ \ x \neq \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Зафиксируем х. Допустим, что $\lim_{n\to\infty} \sin nx = 0$. Но это противоре чит тому, что $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Значит, ряд расходится.

Пример. Гармонический ряд расходится, т.к. расходится последовательность частичных сумм: $S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \ldots = 1 + \frac{n}{2}$

Сходящиеся ряды образуют линйеное пространство!

Теорема 2 *(критерий Коши сходимости ряда)*
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$

Доказательство. Ряд сходится $\longleftrightarrow$ существует предел частичных сумм. Применим к ним критерий Коши: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ $\square$

Теорема 3 *(критерий сходимости через остаток)*
1. Если ряд сходится, что сходится любой из его остатков.
2. Если хотя бы один остаток сходится, то ряд тоже сходится.

Доказательство. 1. По условию, существует сумма ряда. Рассмотрим частичный остаток с фиксированным номером $N \in \mathbb{N}$, рассмотрим $\sigma = \sum_{k=N+1}^{N+n} a_k$ - последовательность частичных сумм ряда R_N. Предел сигм равен пределу $(S_{n+N} - S_N) = S - S_N$.

2. По условию, существует такое n_0, что R_{n_0} сходится. Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, $\sigma_n = a_{n_0} + \ldots + a_{n_0+n}$. Пусть $n_0 + n = m$, тогда $\lim_{n\to\infty} S_m = \lim_{n\to\infty}(S_{n_0} + \sigma_{m-n_0}) = S_{n_0} + \sigma$, то есть основный рядсходится. $\square$

Теорема 4 *(критерий сходимости для неотрицательных рядов)*
Пустьдан ряд. Тогда ряд сходится $\Leftrightarrow$ последовательность частичных сумм ограничена сверху.

Доказательство. $\Rightarrow$. По услови, существует предел $limS_n = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \{S_n\}_n \in \mathbb{N}$ - ограничена В другую сторону. По условию, $\{S_n\}$ ограничена сверху, $\Rightarrow$ по тео реме Вейрштрасса для ограниченной неубывающей последовательности имеется предел $\square$

Признак сравнения. С чем же сравнивать? С геометрической прогрессией, с обобщенным гармоническим рядом (с произвольной степенью числа).

Теорема 5 *(признак сравнения в оценочной форме)*
Дано $0 \leqslant a_n \leqslant b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$: Тогда из сходимости B следует сходимость A, из расходимости A следует расходимость B.

Доказательство. Докажем исходя из критерия сходимости.
1. Пусть A_n, B_n - частичные суммы своих рядов. Так как ряд B сходится, то существует верхний предел для его частичных сумм. Так как ряд A меньше Б, по транзитиавности неравенств верхняя граница B лежит выше чем A. ЧТо по тому же критерию дает сходимость. 2. $\square$

Пример. Рассмотрим $p < 1$, $n^p < 1$, $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$. Так как гармонический ряд расходится, то $sum\frac{1}{n^p}$ расходится.

Пример. Найти сумму. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+...$, $a_{n+1} = \sqrt{2-b_n}$, $b_{n+1} = \sqrt{2+b_n}$. Заметим, что $b_1 = 2\cos\frac{\pi}{4}$, $b_2\cos\frac{\pi}{8}$. Дальше эта формула выводится по индукции. $b_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. $a_n = \sqrt{2-b_{n-1}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ Ита, $a_n \leqslant 2\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}$

Теорема 6 *(Признак сравнения в предельной форме)*
Пусть даны неотрицательные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Если предел отношения общего члена
1. Равен конечной (ненулевой) константе. Тогда ряды сходятся или расходятся одновременно
1.1. В частности, при mkk=1, ряды эквивалентны. 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$, то имеет место "B сходится $\Rightarrow$ A сходится"3. Если этот предел равен ооо, то: "A сходится $\Rightarrow$ B сходится"

Доказательство. По опреелению предела. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\frac{n}{b_n}} = k$ для $\varepsilon = k/2 > 0 \exists n_0(\varepsilon)\forall n > n_0 : k/2 < \frac{a_n}{b_n} < 3k/2$. тогда если B сходится, A сходится.

2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\frac{n}{b_n}} = 0$. Lkz $\varepsilon = 1$, тогда для этого эпсилон $\exists n_0$ утверждение следует из первого признака сравнения.

Пункт 3 напрямую следует из второго. $\square$

Пример. 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha})$. Имеем $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ При альфа>0 сходится к 1, при альфа<0 ряд расходится. (ljнайддем область расходимости обобщенного гармонического рядва с помощью уже известного)

Теорема 7 *(тертий признак сравнения.)*
Пусть даны ряды A и B ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$),и выполняется $a_{n+1}/a_n \leqslant b_{n+1}/b_n$
Тогда B сходится $\Rightarrow$ A сходится (если A расходится, B расходится)

Доказательство. так как все неравенства полоэительные, их всех можно перемножить: тогда утверждение следует из первого признака сравнения. $\square$

Теорема 8 *(Признак Даламбера в оценочной форме)*

Доказательство. $\square$

Теорема 9 *Признак даламбера в предельной форме:* $\lim\limits_{n\to\infty}$

Доказательство. $\square$

Теорема 10 *(признак Даламбера в предельной форме)*
Пусть дан знакоположительный ряд. Тогда
1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$*, то ряд сходится.*
2. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$*, то ряд расходится.*

Доказательство. Пусть верхний предел равен $q < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q+\varepsilon$. По теореме Больцано-Вейерштрасса. Тогда по признаку Даламебра в оценочной форме ряд сходится.
Далее, пусть существует нижний предел. Тогда ряд сходится по признаку Даламберав оценочной форме, или от противного: через отрицание необходимого признака. $\square$
Замечание. Если предел равен 1, то $r = q = 1$
Замечание. В отличие от признака Коши, в п.2 нельзя заменить нижний предел на верхний.
Замечание. Если все-таки получилась единица, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема 11 *(признак Коши в оценочной форме)*
Пусть дан знакоположительный ряд. Пусть $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$*. Тогда ряд сходится.*
Пусть $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$*. Тогда ряд расходится.*

Доказательство. Сравним с геометрической прогрессией: $a_n \leqslant q^n \implies$ из сходимости прогрессии следует сходимость ряда. $\square$

Теорема 12 *(признак Коши в предельной форме)*
Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = q$*.*

1. $q < 1 \implies$ *ряд сходится.*

2. $q > 1 \implies$ *ряд расходится.*

Доказательство. Аналогично признаку Даламбера. Избавимся от верхнего предела, взяв предел подпоследовательности. Значит, тогда все числа попадают в эпсилон-окрестность числа q. Но тогда не выполнено необходимое условие. $\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n$. Кошируя это ряд, взяв наибольшую подпоследовательность, получим предел $\frac{3}{4}$, значит, ряд сходится. Можно ещё просто втупую посчитать две подпоследовательности.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$. Оценим это рядом $b_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{2n-\ln n}$. В итоге получится, что ряд сходится.

Теорема 13 *(признак Раабе в оценочной форме)*
Пусть дан знакоположительный ряд с общим членом $a_n > 0$. Тогда:
1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant_1 -\frac{1}{n}$, ряд расходится.
2. Если $\exists\alpha > 0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$ тогда ряд сходится.

Доказательство. 1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n-1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n-1}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, если ряд b_n расходится, то ряд расходится по третьему признаку сравнения.
2. Пусть $\beta \in (1, \alpha)$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\beta}$ сходится. Далее, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = (\frac{n}{n+1})^\beta = (1-\frac{1}{n})^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + O * (\frac{1}{n^2})$. Затем, $-\frac{\beta}{n} > -\frac{\alpha}{n} \implies 1 - \frac{\beta}{n} > 1 - \frac{\alpha}{n}$. Так как $O(\frac{1}{n^2})$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\frac{\alpha}{n}$ и $\frac{\beta}{n}$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : 1 - \frac{\alpha}{n} < 1 - \frac{\beta}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Правая часть равна $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. По условию, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$. Из этих двух условий по свойству транзитивности неравенств получаем оценку $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$, откуда следует сходимость ряда. $\square$

Теорема 14 *(Признак Раабе в предельной форме)*
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = R$. Тогда:
1. $R < 1$ - ряд расходится
2. $R > 1$ - ряд сходится.

Доказательство. $\square$

Теорема 15 *(признак Куммера)*
Даны две последовательности a_n и c_n. Тогда:
1. Если $\exists\alpha > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : C_n - C_{n+1}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha$ - ряд сходится.
2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_n}$ расходится и $C_n - C_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 0$, то ряд расходится.

Доказательство. Пж убейте меня бля я больше не могу $\square$
Следствие 1. Признак Даламбера при $C_n \equiv 1$
Следствие 2. Признак Раабе. Возьмем $C_n = n-1$. Имеем 1. $n-1-n\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha \implies 1-\frac{1}{n}-\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\alpha}{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1-\frac{1+\alpha}{n}$. Подставляя в пункт

Теорема 16 *(признак Бертрана/следствие из признака Куммера)*
1. $C_n = (n-2)\ln(n-1)$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant_1 -\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n}$ - ряд сходится
2.

Доказательство. $\square$

Теорема 17 *(признак Гаусса)*
Пусть дан положительный ряд. Пусть его можно представить в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = D - \frac{r}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}$$

Тогда:
1. Если $D > 1$ - ряд расходится
2. Если $D < 1$ - ряд сходится
3. Если $D = 1$, $R \leqslant 1$ - ряд расходится
4. Если $D = 1$, $R > 1$ - ряд сходится.

Доказательство. $\square$

Теорема 18 *(интегральный признак)*
Пусть ряд знакопостоянен. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно, причем $f(n) = a_n$, функция определена, непрерывна, неотрицательна и невозрастающая на $[1,\infty)$. Оценка погрешности:

Доказательство. $\forall x \geqslant 1\ \exists k \in \mathbb{N} : k \leqslant x \leqslant k+1$. По условию невозрастания имеем $f(k) \geqslant f(x) > f(k+1)$. $a_{k+1} < f(x) \leqslant a_k$, a_{k+1} $\square$ **Пример.** Исследуем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Взятием интеграла получаем условия сходимости:

$$\begin{cases}\text{сходится при } p > 1 \text{расходится при } p \leqslant 1\end{cases}$$

Признак Дирихле Пусть общий член ряда имеет вид $a_n b_n$. Тогда если:
1ю a_n монотонна и её предел равен нулю
2. Предел частичных сумм b_n ограничен

Доказазтельство. по критерию Коши. Фиксируем положительный ε. По условию, предел ряда А равен нулю, тогда для $\frac{\varepsilon}{6B} > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$. По признаку Дирихле ряд сходится, так как частичные суммы синуса арифметической прогрессии сходятся.

Теорема 19 *(признак Абеля)*
Пусть общий член ряда имеет вид $a_n b_n$. Тогда если
1. Последовательность a_n монотонна и ограниченна
2. Последовательность b_n сходится.

Доказательство. Докажем по критерию Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как сходится ряд b_n, то по критерию Коши для $\frac{\varepsilon}{3M} > 0$ найдется такой номер, начиная с которого модуль суммы p членов ряда b_n меньше, чем эта штука. Из неравенства Абеля получим $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}$

$\square$ **Упражнение.** Доказать признак Абеля, используя признак Дирихле.

Пример. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\sin n\alpha \cos \frac{\pi}{n}) / \ln \ln n$. Косинус монотонный и ограниченный, а все остальное сходится по Дирихле. Значит,ряд сходится по Абелю.

2 Знакопеременные ряды

Сформулируем признаки Коши и Даламбера для знакопеременных рядов. Доказательство чекаем в Фихтенгольце.

Теорема 20 *(признак Даламбера)*
Пусть a_n - общий член знакопеременного ряда. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$. Получаем классическую абсолютную сходимость.

Доказательство. ПОЛНОСТЬЮ следует из признака Даламбера для знакопостоянных рядов. Единственно, что здесь нового - то, что при абсолютной расходимости в признаке Даламбера будет и условная расходимость, поскольку не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Для некоторого эпсилон... $|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}| - q| < \varepsilon$ $\square$

Теорема 21 *(признак Коши) Все аналогично. Из абсолютной расходимости следует расходимость.*

Доказательство. $\square$ Признак сравнения для знакопеременных рядов не работает. Приведем контрпример: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $b_n = a_n + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Предел отношения таких рядов равен 1, то есть они эквивалентны, но вот первый сходится, а второй - расходится (см. общий пример с степенями и логарифмами).

2.1 Свойства абсолютно сходящихся рядов

. **Лемма.** Если рядсходится абсолютно, то модуль его суммы не превосходит суммы его модулей.

Теорема 22 *()*
Пусть дан ряд с общим членом a_n, и он сходится абсолютно. Обозначим его сумму,частичную сумму, сумму модулей и частичную сумму модулей как $S, S_n, \overline{S}, \overline{S_n}$. Тогда, если переставить слагаемые, новый ряд a_n^* сходится абсолютно.

Доказательство. Ещё один ворох обозначений: $\overline{S_n^*}, S_n^*$. Длялюбого эпсилон найдется номер такой, что $|\overline{S_n} - \overline{S}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Из леммы следует, что $|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Перейдем к переставленному ряду. Выберем в нем номер, чтобы такая частичная сумма содержала все слагаемые, входящие в $S_{n(\varepsilon)}$. Взяв любое число m большее этого номера, $|S_m^* - S_{n(\varepsilon)}| < |\overline{S}| < \frac{\varepsilon}{2}$. В эту сумму ои все вошли. Остались толкьо те, которые ??? $|S_m^* - S| = |S_m^* - S_{n(\varepsilon)} + S_{n(\varepsilon)} - S| \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}$. Мы доказали сходимость ряда. Абсолютная сходимость следует из таких же рассуждений для ряда с модулем.
$\square$

3 Действия над абсолютно сходящимися рядами

Теорема 23 *Если ряд сходится абсолютно, то ряд, умноженный на константу, сходится абсо лютно.*

Доказательство. Зафиксируем ε. Найдем такой номер, что ряд из модулей меньше чем $\frac{\varepsilon}{|c|}$. И в общем эта штука сходится. $\square$

Теорема 24 *Сумма абсолютно сходящихся рядов абсолютно сходится.*

Доказательство. Сумма модулей больше модуля суммы. $\square$

Теорема 25 *(О произведении абсолютносходящихся рядов)*
Сумма всевозможных произведений $a_i b_j$ сходится абсолютно, и сумма ряда равна произведению сумм.

Доказательство. Введем две переменные с модулями. Введем новые обозначения, как в прошлой теореме. Пользуясь этой же теоремой, мы можем доказать абсолютную сходимость для хотя бы одного из упорядочиваний. Представим себе бесконечную матрицу $|a_i b_j|$. Будем рассматривать последовательность частичных сумм в угловых минорах. Для них имеем формулу $S_{n^2} = S'_n \cdot S''_n$. По условию,в правой части есть оба предела, а значит и слева тоже есть. И ещё, $S_{n^2} \leqslant S_m \leqslant S_{(n+1)^2}$. Ну кароч....че то мдэ, тут дофига текста. □

Определение 5 *(произведение рядов по Коши)*
Пусть $S_a \cdot S_b = S_c$. имеемследующее произведение:
$c_1 = a_1 b_1$
$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$
$c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
То есть суммируем по диагональкам той бесконечной матрицы.

Пример 1. $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = 1, \; b_n = \frac{n}{2^n}$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{k(k+1)-2^{n+1-k}}$.
Пример 2. Произведение расходящихся рядов $a_n = 1,5^n, \; b_n = 1 - 1,5^n$ в смысле Коши - сходится, так как $c_n = 0,75^n$.
Заметим, что условной сходимости недостаточно! Так, для $a_n = b_n = (-1)^{n-1}/\sqrt{n}$ ничего не выйдет. Смиритесь. Ребят а че вы с пары то свалили. Чувствую себя лохом, и от этого неуютненько.

4 Перестановки условно-сходящихся рядов

Теорема 26 *Лемма о сходимости. Ряд a_n сходится условно. Рассмотрим отдельно подпоследовательности из положительных и отрицательных членов. Тогда их суммы $+\infty, -\infty$ соответственно.*

Доказательство. □

Теорема 27 *(Римана)*
Если рядсходится услвоно, то для любого действительного числа найдется такая перестановка ряда, при которой ряд сходится к этому числу.

Доказательство. По предыдущей лемме, ряд из положительных членов расходится, значит, найдется частичная сумма, большая чем искомое число. Дальше найдем такую частичну сумм из отрицатльных членов, чтобы, прибавв её к прошлому этапу, получили снова меньше чем число. И так далее. □

5 Равномерная сходимсоть функциональных рядов

Теорема 28 *(критерий Коши равномерной сходимости)*
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на множестве* $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

Доказательство. 1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, $f_n(x) \rightrightarrows f$ на X. Тогда для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$
□
Следствие (метод граничной точки). Если $f_n(x) \in [a, b)$ и $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in_9 a, b$, $f_n(a)$ расходится. Тогда $f_n(x)$ не сходится равномерно к $f(x)$ на (a, b).
Доказательство. Допустим, что сходимсоть равномерная. Тогда че то-происходит
Пример. $f_n(x) = n^{x+1}e^{-nx},\ x > 0.$

5.1 Свойства равномерно сходящихся ф. п.

1. Линейные комбинации сходятся с соответствующим линейным комбинациям пределов.
2. Умножение на ограниченную на X функцию: $(gf_n) \rightrightarrows (gf)$
3. На любом подмножестве X функция равномерно сходится.
4. Если $\forall x \in x : f_n(x) \to f(x)$ и $E \subset X$ - конечное множество, то на E функция сходится равномерно.
5. Функция, равномерно сходящаяся на двух множествах, равномерно сходится на их объединении.

Доказательство.

6 Функциональные ряды.

Определение 6 *Область* $X \subset D$ *сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *- область, лежащая в области определения всех функций ряда и для каждого* x *на ней ряд сходится.*

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n}(\sin x)^{3n}$. Область сходимости - $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

Определение 7 *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на* X*, если* $S_n \rightrightarrows S$ *на* X *(*S_n *- частичная сумма ряда).*

Пример. Исследуем на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x(2n-1)}{((n-1)^2+x^2)(n^2+x^2)}$, $x \in [1, \infty)$. Здесь предел частичных сумм можно найти по определению: $S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k = x(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{n^2+x^2})$. При фиксированном $x \in D$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{x}$, $S(x) = \frac{1}{x}$. Проверим, что остаток равномерно стремится к нулю (тогда это верно и для суммы): $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2} \leqslant \frac{x}{2nx} = \frac{1}{2n} \to 0,\ n \to \infty$ (по методу оценки остатка). Итак, ряд сходится равномерно к своей сумме.

Пример. Исследуем на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2(2n-1)}{((n-1)^2+x^2)(n^2+x^2)}$, $x \in [1, \infty)$. Имеем $S_n(x) = 1 - \frac{x^2}{n^2+x^2},\ S(x) = 1$

Теорема 29 *(необходимое условие равномерной сходимости ф.р)*
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на* X*. Тогда* $a_n \rightrightarrows 0$ *на* X*.*

Доказательство. По условию, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall x \in X : |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\square$

Теорема 30 *(критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)*
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномерно сходится на* X *к* $S(x)$ *тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм равномерно сходится:* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)| < \varepsilon$

Доказательство. Прсото применим определение Коши сходимости. $\square$

Пример. Докажем, что у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n^2x^2+\sqrt{n}}$, $x \in (0, 1)$ нет равномерной сходимости. Возьмем $x = \frac{1}{2n}$; $a_k(x) \geqslant \frac{1}{4n}$. Поэтому для $\varepsilon \geqslant \frac{1}{4}$ по критерию Коши ряд расходится.

Теорема 31 *(метод граничной точки)*
пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$*, его члены непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *и ряд сходится на интервале* (a,b)*, но расходится на конце интервала. Тогда равномерной сходимости нет.*

Доказательство. Повторяет доказательство для последовательностей. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},\ x \in (1,2)$. Ряд сходится на интрвале как обобщенный гармонический ряд. При $x = 1$ ряд расходится, значит, равномерной сходимости нет.

Теорема 32 *(признак Вейерштрасса равномерной сходимости ф.р./мажарантный*
Пусть дан ряд с общим членом $a_n(x)$ *и мы можем оценить* $|a_n(x)| \leqslant a_n$ *(то есть мажорирующим рядом, не зависящим от* x*), причем* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на том множестве, на котором верна оценка.*

Доказательство. Испоьзуем критерий Коши: фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Ряд a_n сходится, значит, по критерию коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$. Из пункта 1 имеем $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} : |a_n(x)| \leqslant a_k$. Тогда $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$. Тогда по критерию Коши для функционального ряда следует равномерная сходимость. □

Пример. Исследуем на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{arcctg(nx)}{n},\ x \in (\varepsilon, \infty),\ \varepsilon > 0$. Подставив ноль, по методу граничной точки нет равномерной сходимости.

Пример. Исследуем сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2} \sin nx$ на прямой. Спойлер: сходится равномерно. Сделаем оценку: $|a_n(x)| \leqslant e^{-n^5x^2} n|x|$. Функция симметрична при замене $x \mapsto -x$, значит, будем оценивать на положительном луче, откинув модуль. Оценим максимумом, вычислив производную и решив уравнение. Имеем $x = \frac{1}{\sqrt{2n^5}}$. Подставляем: $f_n(x) \leqslant$

$f(\frac{1}{\sqrt{2n^5}}) = \frac{1}{\sqrt{2e}n^{\frac{3}{2}}} = a_n$. Значит, $|a_n(x)| \leqslant |f_n(x)| \leqslant a_n\ \forall x \in \mathbb{R}$. Итак, сходимость равномерная.

Теорема 33 *(признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда)*
Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *и*
1. $\forall x \in X : \{a_n(x)\}$ *монотонна по* n*;*
2. $\exists M = const\ \forall x \in X \forall n \in N : |B_n(x)| \leqslant M$*, где* $B_n(x)$ *- частичные суммы ряда* b_n*.*
Тогда ряд сходится равномерно на X

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $a_n \rightrightarrows 0$ на X, то для $\frac{\varepsilon}{6B} > 0$
$\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx/n$. Исследовать на равномерную сходимость на интервалах $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, $(0, 2\pi)$. Ну, раз говорят что уже было. То не пишем. На втором интервале нет равномерной сходимости по краевому критерию.

Теорема 34 *(признак Абеля равномерной сходимости ф.р.)*
Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *и* $\forall x \in X$*:*
1. $|a_n(x)| \leqslant M = const$ *для всех* n*;*
2. $\{a_n(x)\}$ *мнонотонна;*
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно сходится на* X*;*
Тогда исходный ряд равномерно сходится на X*.*

Доказательство. По определению Коши. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как ряд из b_n сходится равномерно, то по критерию Коши для $\frac{\varepsilon}{3M} > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X : |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Тогда по неравенству Абеля $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)a_k(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}(x)|) < \frac{\varepsilon}{3M}3M = \varepsilon$. Тогда по критерию Коши этот ряд сходится равномерно на X. $\square$

Пример. Исследуем на равномерную сходимсоть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin x arctgnx}{\sqrt{n^2+x^2}}$.
Алгоритм:
1. Арктангенс монотонен и ограничен.
2. Все остальное сходится по Дирихле.

6.1 Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 35 *(о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда)*
Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$*, причем*
1. Все функции непрерывны намножестве
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно к* $S(x)$ *на* X*;*
Тогда $S(x)$ *непрерывна на* X*.*

Доказательство. По условию, сумма из $a_n(x)$ сходится равномерно на X к $S(x)$, то есть $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на X, $S_n(x)$ непрерывна как сумма. Тогда по теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательсноти, составленной из непрерывных функций, $S(x)$ непрерывна. Другая формулировка:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

можно поменять сумму и предел. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = f(x)$ - непрерывна на $(0, 2\pi)$

Теорема 36 *(об интегрировании равномерно сходящегося ряда)*
дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$*, причем*
1. все функции непрерывны на отрезке $[a, b]$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a, b]$ *к* $s(x)$*;*
тогда в $\forall x, x_0 \in [a, b]$: $\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt$ *можно менять интеграл и сумму.*

Доказательство. Докажем, что $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a_n(t)dt$. По предыдущей теореме $S(t)$ непрерывна на $[a, b]$, значит,интегрируема на нем по Риману. Обозначим $\sigma_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} a_k(t)dt$ и докажем, что $\sigma_n(x) \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, $S_n(t)$ равномерно сходится на $[a, b]$ для $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$. $\exists n_0(\varepsilon)\ \forall n > n_0\ \forall x \in [a, b] : |S_n(t) - S(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $|\sigma_n(x) - \int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt| =$!!!!!!!!!!!!!!! □

Теорема 37 *(о дифференцировании равномерно сходящегося ряда)*
дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, *причем*
1. Производные всех функций непрерывны на отрезке $[a, b]$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится на* $[a, b]$ *к* $s(x)$ *(даже не нужна непрерывность);*
3. Ряд из производных сходится равномерно на $[a, b]$ *к* $S(x)$*;*
тогда в ряде можно менять производную и сумму.

Доказательство. Используем предыдущую теорему. Тогда $\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n(t) \right) dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a'_n(t)dt$. Получаем, что в равенсте $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n(x) - a_n(x_0))$ справа стоит число (в силу непрерывности функции), ряд из $a_n(x_0)$ сходится по условию, следовательно, ряд из $a_n(x)$ сходится.
Теперь покажем равномерную сходимость. Для этого покажем, что остаток ряда из производных $r_n(x)$ равномерно стремится к нулю. Действительно, если ряд удовлетворяет теоереме об интегрировании, то и его остатки тоже. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, остаток обычного ряда стремится к нулю: $R_n(x) \to 0$. тогда для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists n_1(\varepsilon)$ $\forall n > n_1$: $|R_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Также остаток ряда из производных равномерно стремится к нулю, тогда для $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$ $\exists n_2(\varepsilon)$ $\forall n > n_2$ $\forall x \in [a, b] : |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{}$
□