Лекции по анализу

Куприн А.В/Максимов Д.А

Семестр 2

Содержание

1 Формулы всякие

Площадь эллипса= πab

2 Площадь фигуры

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна на $[a, b]$. Тогда площадь под её графиком равна

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Если функция задана параметрически

$$f(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

То площадь под её графиком равна

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt \tag{2}$$

при условии $y(t) \geqslant 0$, $x'(t) \geqslant 0$
Если в параметрически заданном графике имеется петля (в которой $f(t_1) = f(t_2)$ - точка самопересечения), то площадь внутри этой петли также выражается формулой 2. Принимается, что если мы обходим петлю по часовой стрелке, то ориентированная площадь отрицательна, если против часовой стрелки

- то положительна.

Чтобы рассчитать площадь в полярной системе координат, вспомним, что по теоереме синусов, площадь треугольника равна $0.5AB\sin\varphi$. В пределе при $d\varphi \to 0$, $A = B = r(\varphi)$, а $\sin\varphi \sim \varphi$. Отсюда получаем формулу

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$$

Заметим, что если функция зависит также от некоторого размерного параметра, то искомая площадь зависит от его квадрата.

3 Длина линии

По теореме Пифагора, дифференциал длины линии имеет вид $dl^2 = dx^2 + dy^2$. Тогда в случае, если длина дуги стремится к длине хорды, длина линии имеет вид

$$L = \int\limits_a^b dl$$

Поскольку $dl^2 = dx^2(1+(dy/dx)^2)$, то длина графика функции имеет вид

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}|dx|,\ a > b$$

Если на отрезке $[a, b]$ функция положительна, то можно не ставить модуль.
Для параметрически заданной функции имеем $dl^2 = (x'_t dt)^2 + (y'_t dt)^2$, поэтому

$$L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt$$

В данном случае модуль не требуется.
В полярных координатах функция $r = r(\varphi)$ переводится в декартовы как параметрическая функция от φ:

$$f(t) = \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

Тогда $dl^2 = (d(r(\varphi)\cos\varphi))^2 + (d(r(\varphi)\sin\varphi))^2$; $(x'_\varphi)^2 = (r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi)^2$, $(y'_\varphi)^2 = (r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi)^2$. Отсюда, раскрывая скобки, получаем длину кривой

$$L = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2_\varphi + r^2} d\varphi \quad d\varphi \geqslant 0,\ \varphi_1 < \varphi_2$$

4 Объемы и площади поверхностей

Объем как интегрирвоание поперечных сечений. Выделим ось X, которая "пронзает"тело, причем его "крышки"перпендикулярны ей и имеют координаты a и b. Тогда

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx$$

В частности, если это тело вращения вокруг оси, и его граница выражается непрерывной функцией $f(x)$, то $S(f(x)) = \pi f^2(x)$ и соответственно

$$V_x = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$$

Так как функция стоит в квадрате, то не надо бояться разных знаков! Если мы хотим вращать вокруг оси Y и нелзя выразить функцию $x = x(y)$ через игрек, тогда

$$V_y = V_{\text{цилиндра}} + \int \text{объемы цилиндрических слоев}$$

Конкретно, пусть $f(a) = c$, $f(b) = g$, и пусть $a \neq 0$. Тогда

$$V_y = \pi a^2|d-c| + 2\pi \int\limits_a^b xf(x)dx = \pi a^2|d-c| + 2\pi \int\limits_a^b x(D - f(x))dx$$

Теорема 1 *(Паппа-Гульдена)*
Если есть некоторая ось и фигура, не пересекающая эту ось, то объем тела вращения фигуры относительно оси равен произведению площади фигуры на длину окружности, которую при вращении описывает центр тяжести фигуры.

Пример. Тело вращения полукруга - шар. Поэтому его объем $V = 2\pi r_c \times \pi r^2/2 = 4\pi r^3/3$. Отсюда $r_c = 4r/3\pi$

5 Площадь поверхности вращения

Пусть дана ось L и ограниченная кривая l, лежащая с ней в одной плоскости. Тогда мы можем проврващать l вокруг L, и мы получим поверхность вращения. Пусть ds - дифференциал длины кривой, R - расстояние до оси. Тогда дифференциал площади вращения равен $dS = 2\pi R ds$, и если мы выбрали ось X, то

$$S = 2\pi \int\limits_a^b R ds = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

6 Несобственный интеграл

Вспомним, что для интегрируемости необходима ограниченность функции. Также параметр разбиения интегральной суммы стремится к нулю. В несобственном интеграле пределы стремятся к бесконечности, или же на отрезке интегрирования есть разрыв, стремление к бесконечности. В таком случае нет места интегралу Римана. Как это можно формально определить?

6.1 Несобственный интеграл I-го рода

- по бесконечным промежуткам.
Пусть $f(x)$ - функция, интегрируемая по Риману на любом отрезке действительных чисел. По формуле Ньютона-Лейбница, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt := \lim_{a\to\infty, b\to-\infty} \int\limits_{b}^{a} f(t)dt = \lim_{a\to\infty} F(a) - \lim_{b\to-\infty} F(b)$$

Если предел существует, интеграл сходится, если предел равен бесконечности - интеграл расходится.
Пределы к плюс и минус бесконечности, очевидно, вычисляются отдельно. Иногда могут получаться кракозябры типа $[\infty - \infty]$, так как пределы независимы, то в таком случае интеграл расходится.
Если пределы зависимы, то имеем случай V.P. - главное значение - от минус до плюс бесконечности при том, что предел интегрирования один, пределы зависимы, то есть $\lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_{-a}^{a}$, но не $\lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_{-2a}^{a}$
Вопрос: как узнать, сходится ли тот или иной интеграл?

Интегралы от неотрицательных функций
(точнее, функции, не меняющие знак)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{c}^{a} f(t)dt + \lim_{b\to\infty} \int\limits_{b}^{c} f(t)dt$$

6.2 Несобственный интеграл II-го рода

- от неограниченных функций.

Определение 1 *Интеграл II-го рода*