Введение

Проблема ускорения сходимости бесконечных кратных рядов и интегралов с помощью методов экстраполяции в последнее время вызывает значительный интерес. Первая работа по ускорению сходимости кратных рядов была опубликована Чизхолмом [1]. В этой работе Чизхолм определил диагональные аппроксиманты Паде для двойных рядов вида $f(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}x^i y^j$. Рассматриваемые в [1] «диагональные» аппроксиманты имеют вид $[n\,/\,n]_f(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} u_{ij}x^i y^j \,/\, \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} v_{ij}x^i y^j$. Недиагональные аппроксиманты $[m\,/\,n]_f(x,y)$ были позднее определены Грейвсом-Моррисом, Хьюзом Джонсом и Мейкинсоном. Диагональные аппроксиманты из [1] были обобщены на степенные ряды от *N* переменных Чизхолмом и Макьюэном, а недиагональные аппроксиманты из были обобщены на *N* переменных Хьюзом Джонсом. Аппроксиманты Паде общего порядка для кратных степенных рядов были определены Левиным [2] и далее развиты Кайтом.

Общее обсуждение ускорения сходимости бесконечных двойных рядов и интегралов было представлено в работе Левина [3]. Статья Грайфа и Левина [4] объединяет общую идею из [3] с подходом, основанным на *D*-преобразовании для одномерных бесконечных интегралов и *d*-преобразовании для одномерных бесконечных рядов, предложенных Левиным и Сиди. Ранее, Сиди уже предложил подход, в котором *d*-преобразование используется последовательно для суммирования кратных рядов. Тот же подход может быть применен для вычисления кратных интегралов с бесконечными пределами.

Рассмотрим некоторые детали подхода, основанного на асимптотических разложениях и обобщенном процессе экстраполяции Ричардсона, которые приводят к *D*- и *d*-преобразованиям

$D^{(m)}$-трансформация для одномерных бесконечных интегралов

Обсудим D-преобразование для интегралов с бесконечными пределами. Начнем с определения двух классов функций, которые мы обозначаем $A^{(\gamma)}$ и $B^{(m)}$.

Определение [5]: функция $\alpha(x)$ принадлежит множеству $A^{(\gamma)}$, если она бесконечно дифференцируема для всех x $\geq$ a$x \geq a$ и имеет асимптотическое разложение типа Пуанкаре вида:

$$\alpha(x) \sim \sum_{i=0} \alpha_i x^{\gamma-i}, \qquad x \to \infty, \#(1)$$

а её производные имеют асимптотические разложения, полученные формальным почленным дифференцированием разложения (1).

Если, кроме того, $\alpha_0 \neq 0$ в (1), то говорят, что $\alpha(x)$ строго принадлежит $A^{(\gamma)}$. Здесь γ в общем случае комплексное.

Определение [5]: функция $f(x)$, бесконечно дифференцируемая на (a, ∞), принадлежит множеству $B^{(m)}$, если она удовлетворяет линейному однородному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) порядка m:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} p_k(x) f^{(k)}(x), \#(2)$$

где $p_k \in A^{(k)}, k = 1, \dots, m.$

Следующая теорема, приведенная в [6], является основой для D-преобразования.

Теорема: пусть $f(x)$ — функция из $B^{(m)}$, интегрируемая на бесконечности. Предположим также, что:

$$\lim_{x\to\infty} p_k^{(j-1)}(x) f^{(k-j)}(x) = 0, \qquad k = j, j+1, \dots, m, \qquad j = 1,2, \dots, m. \#(3)$$

и что

$$\sum_{k=1}^{m} l(l-1)\dots(l-k+1)\bar{p}_k \neq 1, l = \pm 1,2,3, \dots, \#(4)$$

где

$$\bar{p}_k = \lim_{x\to\infty} x^{-k} p_k(x), \qquad k = 1, \dots, m. \#(5)$$

Определим:

$$I|f| = \int_a^{\infty} f(t)\,dt\,, \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \#(6)$$

Тогда:

$$F(x) = I|f| + \sum_{k=0}^{m-1} x^{\rho_k} f^{(k)}(x) g_k(x)\,, \#(7)$$

где $\rho_k \leq k+1$ – целые числа, а $g_k \in A^{(k)}, k = 0,1,\dots,m-1.$

Если, кроме того, $p_k \in A^{(i_k)}$ строго для некоторых чисел $i_k \leq k, k = 1,\dots,m$, то:

$$\rho_k \leq \overline{\rho_k} \equiv \max(i_{k+1}, i_{k+2}-1,\dots,i_m-m+k+1) \leq k+1,$$
$$k = 0,1,\dots,m-1. \#(8)$$

Равенство в (8) достигается, когда целые числа, среди которых берется максимум, различны.

Наконец, поскольку $g_k(x) \in A^{(0)}$, они имеют асимптотическое разложение вида:

$$g_k(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} g_{ki} x^{-i} \text{ при } x \to \infty. \#(9)$$

Важно:

1) если $\rho_k \in A^{(i_k)}$ с $i_k < k$, то $\overline{\rho_k} = 0$, и условие невырожденности выполняется автоматически;
2) всегда $\rho_{m-1} = i_m$;
3) для $m = 1$ выполняется точное равенство $\rho_0 = i_1$;
4) в большинстве примеров равенство $\rho_k = \overline{\rho_k}$ выполняется для всех k;
5) параметры ρ_k и функции $g_k(x)$ зависят только от $p_k(x)$ в ОДУ и одинаковы для всех решений *f*(x), удовлетворяющих условиям теоремы.

Аналогия с GREP [5]:

1) $F(x) \leftrightarrow A(y)$;
2) $x^{-1} \leftrightarrow y$;
3) $x^{\rho_{k-1}} f^{(k-1)}(x) \leftrightarrow \phi_k(y)$;
4) $r_k = 1\ \forall k$;

5) $I|f| \leftrightarrow A$.

Определение [5]: выберем возрастающую последовательность $\{x_l\} \subset (a, \infty)$, стремящуюся к бесконечности. Пусть $n = (n_1, \dots, n_m)$ – вектор неотрицательных целых чисел. Тогда приближение $D_n^{(m,j)}$ к $I|f|$ определяется системой уравнений:

$$F(x_l) = D_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^{m} x_l^k f^{(k-1)}(x_l) \sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{\overline{\beta k_\iota}}{x_l^i}, \qquad j \le l \le j + N,$$

$$N = \sum_{k=1}^{m} n_k. \#(10)$$

Здесь β_{ki} представляют собой дополнительные (N) вспомогательные неизвестные. В формуле (10) принято, что $\sum_{i=0}^{-1} c_i \equiv 0$, поэтому $D_{(0,\dots,0)}^{(mj)} = F(x_j)\ \forall j$. Этот обобщённый процесс экстраполяции Ричардсона (GREP), генерирующий $D_n^{(mj)}$, мы будем называть $D^{(m)}$-преобразованием или просто D-преобразованием.

Данное определение D-преобразования было дано в [25] и отличается от оригинального определения из [13] тем, что мы заменили ρ_k их известными верхними границами k+1. Поскольку это не требует знания точных значений ρ_k, метод становится более удобным для пользователя. Однако если нам известны точные значения $\overline{\rho_k}$ или их верхние границы, следует использовать их и заменить $x_l^k f^{(k-1)}(x_l)$ в (10) на $x_l^{\overline{\rho_{k-1}}} f^{(k-1)}(x_l)$, так как это снижает вычислительные затраты при заданном уровне точности. В некоторых важных случаях, связанных с интегральными преобразованиями, значения $\overline{\rho_k}$ могут быть легко определены.

Для применения $D^{(m)}$-преобразования необходимо определить значение m. Это можно сделать одним из двух способов:

1) методом проб и ошибок – начать тест с m=1, и увеличивать m до достижения удовлетворительного ускорения сходимости;
2) математической оценкой – использовать эмпирические правила: если $u \in B^{(r)}, v \in B^{(s)}$, то:
   a) $uv \in B^{(m)}, m \le rs$;
   b) $u + v \in B^{(m)}, m \le r + s$.

Если $f(x)$ и/или некоторые её производные бесконечное число раз обращаются в ноль на бесконечности, можно соответствующим образом выбрать точки x_l, чтобы исключить некоторые члены $x^{\rho_k} f^{(k)}(x) g_k(x)$ из (7). Это сокращает вычислительные затраты и повышает численную устойчивость. Данный подход был предложен в работах Сиди. Полученные методы обозначаются как $\bar{D}$-преобразования. Альтернативный подход - mW-преобразование является одним из наиболее эффективных методов для вычисления осциллирующих бесконечных интегралов.

$d^{(m)}$-преобразование для одномерных бесконечных рядов

….

//

и что

$$\sum_{k=1}^{m} l(l-1)\ldots(l-k+1)\bar{p}_k \neq 1, l = \pm 1,2,3,\ldots,$$

где

$$\bar{p}_k = \lim_{n\to\infty} n^{-k} p_k(n), \qquad k = 1,\ldots,m.$$

Тогда

$$S_{n-1} = S(\{a_k\}) + \sum_{k=0}^{m-1} n^{\rho_k} (\Delta^k a_n) g_k(n)$$

для некоторых чисел $\rho_k \leq k+1$, и функций $g_k \in A_0^{(0)}, k = 0,1,\ldots,m-1$.

Так как $g_k \in A_0^{(0)}$, то они имеют асимптотическое расширение вида:

$$g_k(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} g_{ki} n^{-i} \text{ при } n \to \infty$$

Важным условием в данной теореме является принадлежность последовательности к множеству $b^{(m)}$, если $\{a_n\} \in b^{(m)}$, и даёт асимптотическое расширение для S_{n-1}.

Сопоставим $S_{n-1} \sim S(y)$, $\phi_k(y) \sim n^{\rho_{k-1}}(\Delta^{k-1} a_n)$, однако для того, чтобы применить GREP требуется решить следующую проблему: числа ρ_k зависят от разностного уравнения, которое мы не знаем; незнание ρ_k приводит нас к тому, что мы не знаем о $\phi_k(y)$. Её решить очень просто, мы заменяем ρ_k на верхний предел, т.е. на $k+1$:

$$S_{n-1} = S + \sum_{k=0}^{m-1} n^{k+1}(\Delta^k a_n) n^{\rho_k - k - 1} g_k(n) = S(\{a_k\}) + \sum_{k=0}^{m-1} n^{k+1}(\Delta^k a_n) h_k(n).$$

Причём функции $h_k(n) \in A_0^{(\rho_k - k - 1)} \subset A_0^{(0)}$ и

$$h_k(n) \sim \sum_{i=0}^{\infty} h_{k_i} n^{-i} \equiv 0 * n^0 + \cdots + 0 * n^{\rho_k - k} + g_{k_0} n^{\rho_k - k - 1} + \cdots \text{ при } n \to \infty.$$

По итогу получаем, что у нас есть новые $\phi_k(y) \sim n^k(\Delta^{k-1} a_n)$, которые легко выражаются через члены ряда и не требуют знания чисел ρ_k.

Добавим a_n к обоим частям, чтобы привести к удобному виду:

$$S_n = S + n(h_0(n) + n^{-1}) a_n + \sum_{k=1}^{m-1} n^{k+1}(\Delta^k a_n) h_k(n),$$

$h_0(n) + n^{-1} \in A_0^{(0)}$, потому асимптотическое расширение S_n той же формы, что и S_{n-1}:

$$S_n \sim S + \sum_{k=0}^{m-1} \left[[n^{k+1}(\Delta^k a_n) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_{ki}}{n^i} \right], \text{при } n \to \infty.$$

Расширим функции $h_k(n)$ отрицательными степенями $n + \beta$, где β – константа.

Асимптотическое расширение тогда предполагает форму:

$$S_n \sim S + \sum_{k=0}^{m-1} \left[n^{k+1}(\Delta^k a_n) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tilde{h}_{k_i}}{(n+\beta)^i} - \right], \qquad n \to \infty.$$

На основе асимптотического расширения S_n, можно дать определение d-трансформации Левина-Сиди для аппроксимации суммы бесконечного ряда.

Возьмём последовательность целых чисел

$$\{R_l\}_{l=0}^{\infty}, 1 \leq R_0 < R_1 < R_2 < \cdots.$$

Пусть $n \equiv (n_1, \ldots, n_m)$, где $n_1 \epsilon \mathbb{N}_0$. Тогда аппроксимации $d_n^{(m,j)}$ к S определены линейной системой:

$$S_{R_l} = d_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^{m} \left[R_l^k (\Delta^{k-1} a_{R_l}) \sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{\overline{\beta_{ki}}}{(R_l + B)^i} \right], j \leq l \leq j + N; N = \sum_{k=1}^{m} n_k,$$

$\beta > -R_0$ – параметр, которым мы можем изменять $\overline{\beta_{ki}}$ – дополнительные N неизвестных.

Аналогичную трансформацию можно получить для факториального ряда, если переписать асимптотическое расширение $h_k(n)$ при помощи символов Почхаммера:

$$h_k(n) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_{ki}}{(n)_i}.$$

Можно получить факториальную $d^{(m)}$-трансформацию:

$$S_{R_l} = d_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^{m} \left[R_l^k (\Delta^{k-1} a_{R_l}) \sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{\overline{\beta_{ki}}}{(R_l + \beta)_i} \right], j \leq l \leq j + N; N = \sum_{k=1}^{m} n_k.$$

Полученная трансформация есть ничто иное как GREP, только для бесконечных рядов и последовательностей. У $d^{(m)}$-трансформации есть несколько особенностей:

1) для трансформации необходимо определить число m;
2) так как мы свободны выбирать числа R_1 то мы можем их использовать как для улучшения ускорения сходимости, так и для численной стабильности; это огромное преимущество этой трансформации;
3) из того, как мы определили $d^{(m)}$-трансформацию, следует, что трансформация не зависит от принадлежности последовательности к $b^{(m)}$, поэтому трансформацию можно использовать и для

последовательностей не из класса, однако тогда мы полностью зависим от асимптотического поведения a_n;

4) несмотря на нагромождённый вид формулы для d$^{(m)}$-трансформации, её можно имплементировать, используя весьма эффективные алгоритмы – например, W-алгоритм, если $m = 1$, и W$^{(m)}$-алгоритм, если $m > 1$.

Частные случаи d$^{(1)}$-трансформации

$\mathcal{L}$ *– трансформация*. Если выбрать $R_1 = n$ в формуле для d$^{(1)}$-трансформации, то мы получим $\mathcal{L}$ –трансформацию:

$$S_n = d_k^{(1,n)} + \omega_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\bar{\beta}_j}{(\beta+n)^j}, \qquad \omega_r = r^\rho a_r, \qquad d_k^{(1,n)} \to \mathcal{L}_k^{(n)}.$$

Получим:

$$S_n = \mathcal{L}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) + \omega_n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\bar{\beta}_j}{(n+\beta)^j}.$$

Перепишем в другом виде:

$$(n+\beta)^{k-1} \frac{S_n - \mathcal{L}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n)}{\omega_n} = \sum_{j=0}^{k-1} \bar{\beta}_j (n+\beta)^{k-j-1}.$$

Наибольшая степень n в правой части равна k-1 Многочлен степени k-1 от n будет обнулён оператором Δ^k. Поскольку оператор разности Δ^k линеен равенство принимает форму:

$$\mathcal{L}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) = \frac{\Delta^k \left[\dfrac{(n+\beta)^{k-1} S_n}{\omega_n}\right]}{\Delta^k \left[\dfrac{(n+\beta)^{k-1}}{\omega_n}\right]}.$$

Благодаря формуле для Δ^k:

$$\mathcal{L}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta+n+j)^{k-1}}{(\beta+n+k)^{k-1}} \frac{S_{n+j}}{\omega_{n+j}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta+n+j)^{k-1}}{(\beta+n+k)^{k-1}} \frac{1}{\omega_{n+j}}}.$$

$(\beta + n + j)^{k-1}$ – множитель, введённый в формулу, чтобы уменьшить магнитуду слагаемых числителя и знаменателя чтобы понизить риск возникновения ошибки переполнения.

Данная формула удобна так как из неё легко выводится рекуррентное отношение.

Пусть

$$X_k^{(n)}(\beta) = \begin{cases} (n+\beta)^{k-1} \frac{S_n}{w_n} \\ (n+\beta)^{k-1} \frac{1}{w_n} \end{cases},$$

$$X_k^{(n)}(\beta) = (\beta+n) X_{k-1}^{(n)}(\beta), \qquad k \geq 1, n \geq 0,$$

$$\Delta^k(\beta+n) - (\beta+n)\Delta^k = kE\Delta^{k-1},$$

$$P_k^{(n)}(\beta) = \Delta^k X_{(k)}^{(n)} = \{kE + (\beta+n)\Delta\}\Delta^k X_{k-1}^{(n)}(\beta) = \{kE + (\beta+n)\Delta\} P_{k-1}^{(n)}(\beta)$$
$$= (\beta+n+k) P_{k-1}^{(n+1)}(\beta) - (\beta+n) P_{(k-1)}^{(n)}(\beta).$$

Для стабильности лучше вычислять уменьшенные значения:

$$\mathcal{L}_k^{(n)}(\beta) = \frac{P_k^{(n)}(\beta)}{(\beta+n+k)^{k-1}}.$$

Используя минимизированные значения, получается рекуррентное отношение формы:

$$\mathcal{L}_{k+1}^{(n)} = \mathcal{L}_k^{(n+1)} - \frac{(\beta+n)(\beta+n+k)^{k-1}}{(\beta+n+k+1)^k} \mathcal{L}_k^{(n)}.$$

$\mathcal{S}$ *– трансформация*. Если в факториальной $d^{(1)}$-трансформации мы выбираем $R_1 = n$, то получаем трансформацию

$$S_n = d_k^{(1,n)} + \omega_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\overline{\beta}_j}{(\beta+n)_j}, d_k^{(1,n)} \to S_k^{(n)}.$$

Перепишем в другом виде:

$$\frac{(n+\beta)_{k-1}\left[S_n - S_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n)\right]}{\omega_n} = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\beta}_j (n+j+\beta)_{k-j-1}.$$

Применим к обоим частям оператор, действующий на n:

$$\Delta^k \left(\frac{(n+\beta)_{k-1}\left[S_n - S_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n)\right]}{\omega_n} \right) = 0.$$

Используя линейность оператора Δ^k, получаем:

$$S_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) = \frac{\Delta^k \left[\frac{(n+\beta)_{k-1} S_n}{\omega_n}\right]}{\Delta^k \left[\frac{(n+\beta)_{k-1}}{\omega_n}\right]}$$

Применяя формулу для оператора Δ^k получаем репрезентацию $\mathcal{S}$ в виде отношения двух конечных сумм:

$$S_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta+n+j)_{k-1}}{(\beta+n+j)_{k-1}} \frac{S_{n+j}}{\omega_{n+j}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta+n+j)_{k-1}}{(\beta+n+j)_{k-1}} \frac{1}{\omega_{n+j}}}.$$

Множитель $(\beta+n+j)_{k-1}$ был введён для того, чтобы уменьшить порядок слагаемых в сумме, тем самым снизив риск возникновения при вычислении ошибки переполнения $\mathcal{S}$. Можно также вычислить, используя рекуррентное отношение, полученное из выведенной ниже формулы.

Числитель и частное $S_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n)$ имеют форму:

$$Q_k^{(n)} = \Delta^k Y_k^{(n)},$$

$$Y_k^{(n)}(\beta) = \begin{cases} (n+\beta)_{k-1} \dfrac{S_n}{\omega_n} \\ (n+\beta)_{k-1} \dfrac{1}{\omega_n} \end{cases},$$

$$Y_k^{(n)}(\beta) = (\beta+n+k-2) Y_{k-1}^{(n)}(\beta), \qquad k \geq 1, n \geq 0,$$

$$Q_k^{(n)}(\beta) = \Delta^k Y_{(k)}^{(n)}(\beta) = \{kE + (n+\beta+k-2)\Delta\} \Delta^k Y_{k-1}^{(n)}(\beta) =$$

$$= \{kE + (\beta+n+k-2)\Delta\} Q_{k-1}^{(n)}(\beta) =$$

$$= (\beta + n + 2k - 2) Q_{k-1}^{(n+1)}(\beta) - (\beta + n + k - 2) Q_{(k-1)}^{(n)}(\beta).$$

Такое соотношение работает для:

$$S_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (\beta + n + j)_{k-1} \frac{S_{n+j}}{\omega_{n+j}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (\beta + n + j)_{k-1} \frac{1}{\omega_{n+j}}}.$$

Если же используется более численно стабильная версия, т.е.

$$S_k^{(n)} = \frac{Q_k^{(n)}}{(\beta + n + j)_{k-1}}.$$

То рекурсивное отношение принимает вид:

$$S_k^{(n)} = S_k^{(n+1)} - \frac{(\beta + n + k)(\beta + n + k - 1)}{(\beta + n + 2k)(\beta + n + 2k - 1)} S_k^{(n)}.$$

Список литературы

1. Rational approximants defined from double power series // Math. Comp. // J. S. R. Chisholm. – 1973. – P. 941-848.
2. General Rational approximants in N variables // Approx. Theory // D. Levin. – 1976. – P. 1-8.
3. On accelerating the convergence of infinite double series and integrals // Math. Comp. // D. Levin. – 1980. – P. 1331-1980.
4. The $d_{(2)}$-transformation for infinite double series and the $D_{(2)}$-transformation for infinite double integrals. // Math. Comp. – 1998. – P. 695-714.
5. Extrapolation Methods for infinite multiple series and integrals // Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering vol. 1. // D. Levin, A. Sidi – 2001. – P. 167-184.
6. Two new classes of nonlinear transformations for accelerating the convergence of infinite integrals and series // Appl. Math. Comp. // D. Levin, A. Sidi – 1975. – P. 175-215.
7. Further convergence and stability results for the generalized Richardson extrapolation process $GREP^{(1)}$ with and application to the $D^{(1)}$-transformation for infinite integrals // Comp. Appl. Math. // A. Sidi. – 1999. – P. 153-167.
8.