Введение

Асимптотика находит естественную область применения на стыке физических теорий, таких как, например, классическая и квантовая механика, физическая и геометрическая оптика, статистическая механика и термодинамика. И преобразование Венигера крайне хорошо решает все эти задачи.

Общие сведения и вывод преобразования Венигера

Преобразование Венигера (9) было представлено как решение для преобразования последовательностей частичных сумм факторных дифференциальных рядов в новые последовательности, быстро сходящиеся к пределу исходного ряда [1].

Преобразование Венигера это в сути своей вариант преобразования Левина. Давайте же разберемся как оно получается ([2], [3]).

Есть модельная последовательность (1)

$$s_n = s + w_n \quad n \in N \tag{1}$$

Предполагается, что оценки остатка w_n известны, и корректирующие члены z_n должны быть выбраны таким образом, чтобы произведения $w_n z_n$ обеспечивали достаточно точные и быстро сходящиеся приближения к фактическим остаткам $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательности $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, которые должен быть преобразован.

При таком подходе необходимо определить только поправочные члены $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$. Если могут быть найдены хорошие оценки остатка, определение z_n и последующее исключение $w_n z_n$ из s_n часто приводит к лучшим результатам, чем построение и последующее исключение других приближений к r_n.

Модельная последовательность (1) обладает еще одним неоспоримым преимуществом: преобразование последовательности, точное для данной модельной последовательности, может быть легко выполнено в очень мягких условиях. Предположим, что можно найти линейный оператор T, который аннулирует поправочный член z_n для всех $n \in N$ в соответствии с $T(z_n) = 0$. Тогда мы получаем преобразование последовательности, точное для модельной последовательности (1). Затем, применяя T к соотношению $\frac{w_n[s_n - s]}{w_n} = z_n$- поскольку T аннигилирует z_n и, согласно предположению, не является равным, следующее преобразование последовательности $\mathcal{L}$ является точным для модельной последовательности:

$$\mathcal{L}(s_n, w_n) = \frac{T(s_n, w_n)}{T(1, w_n)} = s \tag{5}$$

Мы получаем модельную последовательность для преобразования последовательности Левина, предполагая, что z_n в (1) является усеченным степенным рядом в $\frac{1}{\beta+n}$:

$$z_n = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_j}{(\beta+n)^j}, \quad \beta > 0 \tag{6}$$

k-тая степень конечно-разностного оператора Δ определяется как $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$, что приводит к аннулированию произвольных многочленов $P_{k-1}(n)$ степени $k-1$. Таким образом, оператор взвешенной разности $T = \Delta^k (\beta+n)^{k-1}$ является подходящим оператором уничтожения для z_n определенным с помощью (1) и преобразование последовательности Левина может быть выраженно следующим образом:

$$I_k^{(n)}(\beta, s_n, w_n) = \frac{\Delta^k\left[(\beta+n)^{k-1}\frac{s_n}{w_n}\right]}{\Delta^k\left[(\beta+n)^{k-1}\frac{1}{w_n}\right]} = \frac{\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\frac{(\beta+n+j)^{k-1}}{(\beta+n+k)^{k-1}}\frac{s_{n+j}}{w_{j+1}}}{\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\frac{(\beta+n+j)^{k-1}}{(\beta+n+k)^{k-1}}\frac{1}{w_{j+n}}} \tag{7}$$

Суммы числителя и знаменателя этого и связанных с ним преобразований также могут быть вычислены рекурсивно.

Если мы заменим в (1) степени $(\beta+n)^j$ на символы Похаммера $(\beta+n)_j$, мы получим усеченный факторный ряд в $(\beta+n)$:

$$z_n = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c'_j}{(\mathrm{\beta + n})_j}, \quad \beta > 0 \tag{8}$$

Теперь, $T = \Delta^{\mathrm{k}}(\beta + n)_{k-1}$ является подходящим оператором аннигиляции, и мы получаем:

$$I_k^{(n)}(\beta, s_n, w_n) = \frac{\Delta^k \left[(\beta + n)_{k-1} \frac{S_n}{w_n}\right]}{\Delta^k \left[(\beta + n)_{k-1} \frac{1}{w_n}\right]} = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta + n + j)_{k-1}}{(\beta + n + k)_{k-1}} \frac{S_{n+j}}{w_{j+1}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta + n + j)_{k-1}}{(\beta + n + k)_{k-1}} \frac{1}{w_{j+n}}} \tag{9}$$

Так выводиться преобразование Венигера. Оно сохраняет все преимущества алгоритма Левина, а в некоторых особых случаях превосходит.

Проблемы преобразования Венигера

К сожалению, как и в случае с другими методами суммирования WT не работает во всех наборах Стокса. Причина такой неудачи кроется в крайней «специализации» самого преобразования, которая требует для успешного суммирования чередующегося знакового рисунка последовательности отдельных членов ряда.

Было разработано несколько способов для возобновления не чередующихся, медленно сходящихся или расходящихся последовательностей некоторые из которых основаны на последовательной комбинации различных методик суммирования. Для класса интегралов седловых точек в уравнении (2) сочетание между гиперперасимптотикой (H для краткости) и WT, порождающей так называемое H-WT, что означает гиперасимптотическое преобразование Венигера, позволяет WT успешно работать также на множествах Стокса.

$$I(k) = \int_C \ g(s) \exp[-kf(s)]\, ds \tag{2}$$

Как уже было сказано выше есть ряд функций, которые показывают крайнюю специализацию WT, в числе этих функций функция Airy (3) в окрестности прямой Стокса и Pearcey (4).

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi}\int_C \ \exp\left[i\left(\frac{z^3}{3} + xz\right)\right] dz \tag{3}$$

$$P(x, y) = \int_C \ \exp[i(\frac{z^4}{4} + x\frac{z^2}{2} + yz)]\, dz \tag{4}$$

Венигер проверил свой алгоритм [4]. В таблицах 1,2 приведены сравнения относительной ошибки с оценкой, полученной при помощи WT. Видно, что WT не обеспечивает достаточной точности, поэтому используется гиперасимптотическое преобразование Венигера (H-WT). Оно позволяет WT успешно работать также на множествах Стокса.

n	Weniger δ_n	Rel. error
2	$\underline{6.203}3672725872058228 \times 10^{-5}$	3×10^{-5}
3	$\underline{6.203}1902884950443666 \times 10^{-5}$	10^{-6}
4	$\underline{6.20320}21455073140033 \times 10^{-5}$	10^{-7}
5	$\underline{6.203201}4734562527659 \times 10^{-5}$	5×10^{-9}
6	$\underline{6.20320150}96234582762 \times 10^{-5}$	3×10^{-10}
7	$\underline{6.203201507}7493629066 \times 10^{-5}$	10^{-11}
8	$\underline{6.2032015078}412871931 \times 10^{-5}$	6×10^{-13}
9	$\underline{6.203201507837}1437062 \times 10^{-5}$	3×10^{-14}
10	$\underline{6.20320150783730}72958 \times 10^{-5}$	8×10^{-16}
11	$\underline{6.203201507837302}1565 \times 10^{-5}$	2×10^{-17}
12	$\underline{6.2032015078373022}499 \times 10^{-5}$	2×10^{-19}
13	$\underline{6.203201507837302251}6 \times 10^{-5}$	10^{-19}
14	$\underline{6.2032015078373022514} \times 10^{-5}$	0

Таблица 1. Сравнение относительной ошибки для функции Airy с оценкой, полученной при помощи WT

n	Weniger δ_n	Rel. error
2	$0.788896466486375+0.751997407638978i$	10^{-4}
3	$0.788914710309079+0.752114814531054i$	10^{-5}
4	$0.788924392759829+0.752103988027836i$	10^{-6}
5	$0.788922823746154+0.752103897014747i$	6×10^{-8}
6	$0.788922864549319+0.752103946845074i$	3×10^{-8}
7	$0.788922838583707+0.752103952575956i$	7×10^{-9}
8	$0.788922837830415+0.752103958064321i$	2×10^{-9}
9	$0.788922837548435+0.752103959286292i$	4×10^{-10}
10	$0.788922837601425+0.752103959634780i$	10^{-10}
11	$0.788922837602631+0.752103959721517i$	4×10^{-11}
12	$0.788922837599937+0.752103959746942i$	10^{-11}
13	$0.788922837597681+0.752103959755574i$	3×10^{-12}
14	$0.788922837597076+0.752103959758409i$	8×10^{-13}
15	$0.788922837597028+0.752103959759183i$	8×10^{-14}
16	$0.788922837597044+0.752103959759296i$	8×10^{-14}
17	$0.788922837597029+0.752103959759270i$	6×10^{-14}
18	$0.788922837597002+0.752103959759244i$	3×10^{-14}
19	$0.788922837596983+0.752103959759236i$	10^{-14}
20	$0.788922837596973+0.752103959759237i$	7×10^{-15}
21	$0.788922837596970+0.752103959759239i$	3×10^{-15}
22	$0.788922837596969+0.752103959759241i$	10^{-15}
23	$0.788922837596969+0.752103959759242i$	10^{-15}
24	$0.788922837596969+0.752103959759243i$	0

Таблица 2. Сравнение относительной ошибки для функции Pearcey с оценкой, полученной при помощи WT

Реализация алгоритма

```
Функция Weniger_algorithm(ряд, n, order):
    Вход:
        ряд - исходный ряд, для которого ускоряется сходимость
        n - количество членов частичной суммы
        order - порядок преобразования (не используется в текущей реализации)
    Выход:
        Ускоренная частичная сумма после преобразования Венигера
    rest- остаток
    binomial_coef - биноминальный коэффициент
    a_n- элемент под номером n
    coef – оператор аннигиляции
    rest_a_n- остаток от элемента умноженный на coef
    numerator- числитель
    S_n- последовательность частичных сумм
    denominator- знаменатель
    Для m от 0 до order:
        coef *= (1+m) // coef – нужен для оценки остатка
    Для j от 0 до order:
        #Считаем сумму числителя и знаменателя ряда для преобразования Венигера
        rest= (−1)^j ∗ bniominal_coef
        coef = coef / (1 + j) * (j + order);
        a_n = 1 / this->series->operator()(j + 1);
        rest_a_n = rest * a_n;
        numerator += rest_a_n * S_n // формируем числитель
        S_n += this->series->operator()(j + 1); // добавляем следующий элемент в последовательность частичных сумм
        denominator += rest_a_n; // формируем знаменатель
    numerator/=denominator // Делим числитель на знаменатель
    Если numerator не является конечным числом:
        Вызвать ошибку "деление на ноль"
    Вернуть numerator
```

Рисунок 1- Псевдокод алгоритм Венигера

Заключение

Преобразование Венигера очень эффективно для суммирования факториального расходящегося асимптотического ряда, удаленного от множеств Стокса, а также множеств, в которых два или более седловых точек симметрично расположены в комплексном сингулярном пространстве. Также оно обладает всеми достоинствами преобразования Левина, что делает его очень полезным и мощным инструментом в ускорении числовых рядов.

Список литературы

1. Summation of divergent power series by means of factorial series // E. J. Weniger – 2010. – P. 2-4.
2. Nonlinear sequence transformations for the acceleration of convergence and the summation of divergent series, Comput. Phys // E. J. Weniger – 1989. – P. 236 – 252.
3. Convergence analysis of the summation of the factorially divergent Euler series by Padé approximants and the delta transformation // E. J. Weniger, R. Borghi – 2015. – P. 157 – 158.
4. Joint use of the Weniger transformation and hyperasymptotics for accurate asymptotic evaluations of a class of saddle-point integrals // R. Borghi – 2008. – P. 1-10.