# Содержание

# 1 Введение

Ускорение сходимости последовательностей и суммируемых рядов является важной задачей в численных вычислениях. Применение специальных алгоритмов и преобразований к рядам позволяет значительно сократить количество итераций, необходимых для достижения желаемой точности, сохраняя при этом значение суммы.

Одним из таких методов является $\rho$-алгоритм, разработанный Питером Винном в 1956 году. Этот численный метод предназначен для ускорения сходимости последовательностей, особенно чередующихся рядов. $\rho$-алгоритм основан на использовании разностных схем и применяется для последовательностей, сходящихся к пределу логарифмически. Его обобщения включают модификации и расширения исходного алгоритма для улучшения эффективности и применимости в различных ситуациях.

Другим важным методом является $\theta$-алгоритм, открытый Клодом Брезински в 1971 году. Данный метод также предназначен для ускорения сходимости и является обобщением $\rho$-алгоритма Винна. $\theta$-алгоритм используется для численного вычисления пределов и сумм бесконечных рядов и основан на итерационном процессе, включающем различные шаги специальной трансформации для улучшения скорости сходимости и повышения точности расчетов.

Обобщенные версии $\rho$-алгоритма Винна и $\theta$-алгоритма Брезински могут включать дополнительные модификации, такие как улучшенные стратегии выбора параметров, оптимизированные процедуры вычислений и другие методы, направленные на улучшение производительности и точности численных вычислений.

# 2 Основная терминология для последовательностей

## Обозначения множеств

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

$\mathbb{N}_0$ — множество натуральных чисел с нулём, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

## Последовательности и порядок сходимости

Последовательность $\{S_n\}$ — последовательность частичных сумм, где $S_n$ определяется как сумма первых $n$ членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Если $n < 0$, то $S_n = 0$.

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} a_j, \qquad n = 0, 1, \dots$$

$S = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ — предел последовательности частичных сумм (при существовании предела).

Определение порядка сходимости: последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к $S$, имеет порядок сходимости $q \geq 1$ и скорость сходимости $\mu$, если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - S|}{|x_n - S|^q} = \mu.$$

## Асимптотическое поведение функций

Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — функции, определённые в области $D \subset \mathbb{C}$, и пусть $z_0 \in D$. Тогда

$$f(z) = O\big(g(z)\big), \quad z \to z_0$$

означает, что существует константа $A > 0$ и окрестность $U(z_0)$ такой, что для всех $z \in U(z_0) \cap D$ выполняется

$$|f(z)| \leq A\,|g(z)|.$$

Следствие: если $g(z) \neq 0$ на $U(z_0) \cap D$, то функция $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ ограничена на $U(z_0) \cap D$.

Аналогично,

$$f(z) = o\big(g(z)\big), \quad z \to z_0$$

означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(z_0)$ такая, что для всех $z \in U(z_0) \cap D$

$$|f(z)| \leq \varepsilon\,|g(z)|.$$

Следствие: если $g(z) \neq 0$ на $U(z_0) \cap D$, то $\dfrac{f(z)}{g(z)} \to 0$ при $z \to z_0$.

## Асимптотические последовательности и разложения

Последовательность функций $\{\Phi_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, определённая в области $D \subset \mathbb{C}$ и такая, что $\Phi_n(z) \neq 0$ (кроме, возможно, в точке $z_0$), называется асимптотической последовательностью при $z \to z_0$, если для всех $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Phi_{n+1}(z) = o\big(\Phi_n(z)\big), \quad z \to z_0.$$

Формальный ряд $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z)$ называется асимптотическим разложением (в смысле Пуанкаре) относительно последовательности $\{\Phi_n\}$, если для любого $m \in \mathbb{N}_0$

$$f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} c_n \Phi_n(z) = o\big(\Phi_m(z)\big), \quad z \to z_0.$$

Если такое разложение существует, то оно единственно, и коэффициенты $c_m$ могут быть вычислены по формуле

$$c_m = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} c_n \Phi_n(z)}{\Phi_m(z)}, \qquad m \in \mathbb{N}_0,$$

при условии существования соответствующих пределов.

## Сходящиеся и расходящиеся последовательности

Если последовательность $\{S_n\}$ сходится, то число, к которому она стремится, называется пределом. В случае, когда последовательность $\{S_n\}$ расходится, число $S$ называется антипределом, если существует метод, позволяющий суммировать $\{S_n\}$ к этому значению. Значение антипредела зависит от характера расходящейся последовательности, и поэтому точного определения для него нет.

**Важные утверждения о расходящихся последовательностях**

- Расходящиеся последовательности могут быть интерпретированы таким образом, что им можно сопоставить некоторые значения, называемые антипределами.
- Для аппроксимации антипределов могут использоваться экстраполяционные методы, позволяющие оценить значения, к которым расходящиеся последовательности могли бы сходиться при определенных условиях.
- Могут быть обработаны так же, как и сходящиеся, как с вычислительной, так и с теоретической точки зрения.

Примеры антипределов рядов

1. Гармонический ряд натуральных чисел:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12},$$

где антипредел получен через аналитическое продолжение дзета-функции Римана: $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$.

2. Знакочередующийся ряд единиц:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2},$$

где антипредел вычисляется по методу Чезаро.

3. Ряд

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots = \frac{1}{4},$$

антипредел которого вычисляется с помощью суммирования Абеля.

Эти примеры показывают, что даже расходящиеся ряды могут иметь строго определённое значение в рамках теории суммирования, которое и называется их антипределом.

## Остаток последовательности и его оценка

Пусть $\{S_n\}$ либо сходится к пределу $S$, либо, если она расходится, может быть просуммирована подходящим методом для получения $S$.

Тогда элемент последовательности $S_n$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$ может быть представлен в виде суммы предела (или антипредела) $S$ и остатка $r_n$:

$$S_n = S + r_n.$$

Так как $S_n$ — частичные суммы ряда

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

то остатки имеют вид

$$r_n = -\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Преобразования последовательностей различаются в зависимости от предположений о поведении остатков $r_n$ как функций от $n$. Эти предположения приводят к различным стратегиям частичного исключения остатков $r_n$.

Пусть функция $f(z)$ имеет асимптотическое разложение по асимптотической последовательности $\{\Phi_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Тогда первый член ряда $\Phi_0(z)$ называется ведущим членом и обозначается

$$f(z) \sim \Phi_0(z),$$

что означает

$$\frac{f(z)}{\Phi_0(z)} \to c_0 \quad \text{при } z \to z_0.$$

В рассматриваемых трансформациях используются функции $\omega_n$:

$$\frac{r_n}{\omega_n} \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(n), \quad n \to \infty,$$

где $\{\varphi_k(n)\}$ — подходящая асимптотическая последовательность.

## Виды сходимости

Поведение многих сходящихся последовательностей $\{S_n\}$, сходящихся к некоторому пределу $S$ можно охарактеризовать асимптотическим условием:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1} - s}{s_n - s} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = \rho$$

Последовательность $\{S_n\}$ сходится:

- Линейно, если $0 < |\rho| < 1$
- Логарифмически, если $\rho = 1$
- Гиперлинейно, если $\rho = 0$

При $|\rho| > 1$ последовательность расходится.

## Класс $F^{(m)}$

Мы говорим, что функция $A(y)$, определённая для $y \in (0, b]$ $(b > 0)$, где $y$ — дискретная или непрерывная переменная, принадлежит множеству $F^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, если существуют функции $\phi_k(y)$ и $\beta_k(y)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ и константа $A$, такие что

$$A(y) = A + \sum_{k=1}^{m} \phi_k(y)\, \beta_k(y).$$

Функции $\phi_k(y)$ определены для $y \in (0, b]$, а функции $\beta_k(\xi)$, где $\xi$ — непрерывная переменная, непрерывны на $[0, \xi_0]$ $(\xi_0 \leq b)$ и имеют асимптотическое разложение

$$\beta_k(\xi) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{ki}\, \xi^{ir_k}, \quad \text{при } \xi \to 0^+, \quad k = 1, \ldots, m, \quad r_k > 0 \text{ — константы.}$$

**Утверждение.** Пусть $A_1(y) \in F^{(m_1)}$, предел или антипредел которой равен $A_1$, и $A_2(y) \in F^{(m_2)}$, предел или антипредел которой равен $A_2$. Тогда функция

$$A_1(y) + A_2(y) \in F^{(m)}, \quad m \leq m_1 + m_2,$$

и её предел или антипредел равен $A_1 + A_2$.

## Класс $A_0^{(\gamma)}$

Функция $\alpha(x)$ определённая для сколь угодно больших $x > 0$, принадлежит множеству $A_0^{(\gamma)}$, если у неё есть асимптотическое разложение формы:

$$\alpha(x) \sim x^{\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_i}{x^i} \text{ при } x \to \infty, \ \ \gamma \epsilon \mathbb{C}$$

Если $\alpha_0 \neq 0$, то $\alpha(x) \in \ A_0^{(\gamma)}$ строго.

## Класс $\mathbf{b^{(m)}}$

Последовательность $\{a_n\}$ принадлежит множеству $b^{(m)}$, если она удовлетворяет линейному однородному разностному уравнению порядка m:

$$a_n = \sum_{k=1}^{m} p_k(n) \Delta^k a_n$$

$p_k \ \epsilon \ A_0^{(k)}$ k = 1, . . . , m так, что $p_k \ \epsilon \ A_0^{(i_k)}$ строго для некоторого целого числа $i_k \leq k$.

Утверждение: Если $\{a_n\} \in b^{(m)}$, тогда $\{a_n\} \in b^{(q)}$ для каждого $q > m$.

## Классы последовательностей

1. Логарифмически сходящиеся:

   $\{S_n\} \in b^{(1)}/LOG$, если

$$S_n \sim S + n^{\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_i}{n^i} \qquad \text{при } n \to \infty, \ \gamma \neq 0, 1, \ldots, \ \alpha_0 \neq 0.$$

2. Линейно сходящиеся:

   $\{S_n\} \in b^{(1)}/LIN$, если

$$S_n \sim S + \zeta^n n^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_i}{n^i} \text{ при } n \to \infty, \zeta \neq 1,\ \alpha_0 \neq 0.$$

3. Факториально сходящиеся:

   $\{S_n\} \in b^{(1)}/FAC$, если

$$S_n \sim S + \frac{\zeta^n n^\gamma}{(n!)^r} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_i}{n^i} \qquad \text{при } n \to \infty,\ r \neq 0, 1, \ldots,\ \alpha_0 \neq 0.$$

4. Факториально расходящиеся:

   $\{S_n\} \in b^{(1)}/FACD$, если

$$S_n \sim (n!)^r\, \zeta^n\, n^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_i}{n^i} \qquad \text{при } n \to \infty,\ r \in \mathbb{N}.$$

## Преобразование последовательности

Последовательность $\{S_n\}$, которая либо расходится, либо сходится настолько медленно, что её применение становится практически невозможным, преобразовывается с помощью функции $T$ в новую последовательность $\{S_n^{'}\}$, которая сходится быстрее:

$T$:$\{\ S_n\}$→$\{S_n^{'}\}$, $n \in \mathbb{N}_0$

Вычислительные алгоритмы могут выполнять только конечное число операций, поэтому будут работать лишь с конечными подмножествами последовательностей, содержащими последовательные элементы $\{S_n$, $S_{n+1}$, ..., $S_{n+l}\}$, где $l$ — порядок преобразования.

Преобразование $T$ представляется как функция:

$T$: $\mathbb{R}^{l+1} \to \mathbb{R}$.

Каждое преобразование может быть записано в виде двумерной таблицы $T_k^{(n)}$, где верхний индекс $n$ указывает строку, а нижний индекс $k$ — столбец:

$$
\begin{array}{cccccc}
T_0^{(0)} & T_1^{(0)} & T_2^{(0)} & \dots & T_n^{(0)} & \dots \\
T_0^{(1)} & T_1^{(1)} & T_2^{(1)} & \dots & T_n^{(1)} & \dots \\
T_0^{(2)} & T_1^{(2)} & T_2^{(2)} & \dots & T_n^{(2)} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
T_0^{(n)} & T_1^{(n)} & T_2^{(n)} & \dots & T_n^{(2)} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Последовательность $P = \{(n_j,\ k_j)\}$ упорядоченных пар целых чисел $n_j, k_j \in \mathbb{N}_0$ называется путем, если $n_0 = k_0 = 0$ и для всех $j \ \in \mathbb{N}_0$ выполняется $n_{j+1} \geq \ n_j$ и $k_{j+1} \geq \ k_j$, причем хотя бы одно из отношений $n_{j+1} = n_j + 1$ и $k_{j+1} = k_j + 1$ должно быть истинным.

Преобразование $T$ является регулярным на пути $P$, если для любой сходящейся последовательности $\{S_n\}$ выполняется:

$$\lim_{j\to\infty} T_{k_j}^{(n_j)} = S$$

Функция $T$ называется ускоряющей сходимость, если:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{T_{k_j}^{(n_j)} - S}{S_{n_j} - S} = 0$$

Иначе говоря, $T$ ускоряет сходимость последовательности $\{S_n\}$ при преобразовании в $\{S_n^{'}\}$, если $\{S_n^{'}\}$ сходится к $S$ быстрее, чем $\{S_n\}$, то есть:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|S_n^{'} - S\right|}{\left|S_n - S\right|} = 0$$

## Символ Похгаммера

Пусть $\Omega(z)$ – функция, стремящаяся к нулю при $z \ \to \ \infty$ . Факториальный ряд для $\Omega(z)$ представляет собой разложение следующего типа:

$$\Omega(z) \ = \frac{b_0}{z} + \frac{1!b_1}{z(z+1)} + \frac{2!b_2}{z(z+1)(z+2)} + \ldots = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{v!b_v}{(z)_{v+1}}$$

Символы Похгаммера (растущие факториалы) выражаются операцией

$$(z)_{v+1} = \frac{\Gamma(z+v+1)}{\Gamma(z)} = z(z+1)\dots(z+v)$$

В общем случае $\Omega(z)$ будет иметь простые полюса в точках $z = -m$, где $m \in \mathbb{N}_0$

# 3 Методы преобразования последовательностей

## 3.1 $\rho$ – алгоритм Винна и обобщения

### $\rho$ — алгоритм Винна

Алгоритм $\rho$-Винна предназначен для вычисления чётных сходящихся интерполирующих дробей Тиле и их экстраполяции к бесконечности.

Интерполирующая дробь Тиле, или чётная сходящаяся дробь, имеет вид рациональной функции:

$$\mathcal{S}_{2k}(x) = \frac{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Здесь отношение $\frac{a_k}{b_k}$ представляет собой приближение к пределу. Чётные порядки конвергентов являются рациональными функциями, представленными в виде частного двух полиномов. Алгоритм Винна позволяет вычислять интерполирующую рациональную функцию и её экстраполяцию к бесконечности с меньшим числом арифметических операций по сравнению с аналогичными рекурсивными алгоритмами.

Метод $\rho$ ускоряет сходимость логарифмических последовательностей в $b^{(1)}/\log$ и особенно эффективен для последовательностей $\{S_n\}$, таких что

$$S_n \sim S + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i n^{-i}, \qquad n \to \infty.$$

Поскольку $S_n = h(n) \in A_0^{(0)}$, $h(n)$ ведёт себя плавно при $n \to \infty$. Следовательно, вблизи $n = \infty$ функцию $h(n)$ можно эффективно аппроксимировать рациональной функцией $R(n)$, у которой степень числителя равна степени знаменателя. Тогда $\lim_{n\to\infty} R(n)$ может служить хорошим приближением для

$$S = \lim_{n\to\infty} h(n) = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

В частности, функцию $R(n)$ можно подобрать так, чтобы она интерполировала $h(n)$ в $2k+1$ точках.

Как указали Смит и Форд, $\rho$-алгоритм Винна хорошо работает с некоторыми логарифмическими последовательностями, но не работает с другими, что и требует отдельного пояснения.

Процесс экстраполяции Ричардсона состоит в пропускании интерполяционного полинома степени $k$ через $k+1$ пар $(x_n, S_n), \ldots, (x_{n+k}, S_{n+k})$ с использованием формулы Невилла–Эйткена, затем вычисляют значение этого полинома при $x = 0$.

Алгоритм $\rho$ состоит из построения рациональной интерполяционной дроби, числитель и знаменатель которой являются многочленами степени $k$, по $2k + 1$ парам точек $(x_n, S_n), \ldots, (x_{n+2k}, S_{n+2k})$ с использованием интерполяционной формулы Тиле, а затем вычисления значения этой рациональной дроби при $x$.

Поскольку $\rho$-алгоритм — частный случай *взаимных разностей*, начнём с их определения. Пусть $f(x)$ — функция, взаимные разности которой с аргументами $x_0, x_1, \ldots$ определяются рекурсивно:

$$\rho_0(x_0) = f(x_0).$$

$$\rho_1(x_0, x_1) = \frac{x_0 - x_1}{\rho_0(x_0) - \rho_0(x_1)}.$$

$$\rho_k(x_0, \ldots, x_k) = \rho_{k-2}(x_1, \ldots, x_{k-1}) + \frac{x_0 - x_k}{\rho_{k-2}(x_1, \ldots, x_{k-1}) - \rho_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1})}, \qquad k = 2, 3 \tag{2c}$$

Заменив $x_0$ на $x$ в $(2c)$, получим следующую цепную дробь:

$$f(x) = f(x_1) + \cfrac{x - x_1}{\rho_1(x_1, x_2) + \cfrac{x - x_2}{\rho_2(x_1, x_2, x_3) - \rho_0(x_1) + \cfrac{x - x_3}{\ddots}}}.$$

Последние две составляющие простейшие дроби в данной формуле цепной дроби имеют следующий вид:

$$\cfrac{x - x_{l-1}}{\rho_{l-1}(x_1, \ldots, x_l) - \rho_{l-3}(x_1, \ldots, x_{l-2}) + \cfrac{x - x_l}{\rho_l(x, x_1, \ldots, x_l) - \rho_{l-2}(x_1, \ldots, x_{l-1})}}$$

Равенство (3) справедливо при $x = x_1, \ldots, x_l$. Правая часть равенства (3) называется **интерполяционной формулой Тиля**.

Рассмотрим функцию $f(x_n)$, значение $S_n$ которой известно в некотором числе точек $x_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. $\rho$-алгоритм Винна определяется заменой $S_n$ вместо $f(x_n)$ и $\rho_k^{(n)}$ вместо $\rho_k(x_n, \ldots, x_{n+k})$ во взаимной разности:

$$\rho_1^{(n)} = \tfrac{x_n - x_{n+1}}{\rho_0^{(n)} - \rho_0^{(n+1)}},$$
$$\rho_2^{(n)} = \rho_0^{(n+1)} + \tfrac{x_n - x_{n+2}}{\rho_1^{(n)} - \rho_1^{(n+1)}},$$
$$\rho_k^{(n)} = \rho_{k-2}^{(n+1)} + \tfrac{x_n - x_{n+k}}{\rho_{k-1}^{(n)} - \rho_{k-1}^{(n+1)}}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Покажем, что рациональная дробь $R(x)$, числитель и знаменатель которой являются полиномами степени $k$ и такая, что

$$R(x_p) = S_p, \quad \forall p = n, \ldots, n + 2k,$$

может быть записана в виде:

$$R(x) = \frac{\rho_{2k}^{(n)} x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k}{x^k + b_1 x^{k-1} + \ldots + b_k},$$

Тогда получаем, что

$$\lim_{n \to \infty} R(x) = \rho_{2k}^{(n)},$$

что позволяет использовать величину $\rho_{2k}^{(n)}$ как приближение предела последовательности $\{S_n\}$ при $n \to \infty$. Расчёт $\rho_{2k}^{(n)}$ осуществляется с использованием расширенной формы $\rho$-алгоритма, который по сути является расчётом взаимных разностей.

Нелинейная рекурсивная стандартная схема алгоритма $\rho$ Винна выглядит следующим образом:

$$\rho_{k+1}^{(n)} = \rho_{k-1}^{(n+1)} + \frac{x_{n+k+1} - x_n}{\rho_k^{(n+1)} - \rho_k^{(n)}}, \quad k, n \in \mathbb{N}_0,$$

при этом учитывается, что

$$\rho_{-1}^{(n)} = 0, \quad \rho_0^{(n)} = S_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Данный метод работает с последовательностью строго возрастающих и неограниченных с ростом $n$ интерполяционных точек $\{x_n\}$, которые должны быть положительными и различными для всех $n \in \mathbb{N}_0$:

$$0 < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} < \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Видно, что структура $\rho$-алгоритма идентична структуре $\epsilon$-алгоритма Винна, но отличается наличием самой последовательности интерполяционных точек. Только элементы с четным порядком $\rho_{2k}^{(n)}$ в методе $\rho$ используются для аппроксимации предела, тогда как элементы $\rho_{2k+1}^{(n)}$ нечетного порядка служат вспомогательными величинами и могут расходиться, если вся последовательность сходится, то есть величины с нечетным нижним индексом являются лишь промежуточными расчетами и не имеют никакого значения.

Несмотря на формальное сходство, алгоритмы Винна $\epsilon$ и $\rho$ существенно различаются по способности ускорять сходимость. Алгоритм $\rho$ Винна эффективен для логарифмически сходящихся последовательностей, но не подходит для линейно сходящихся или расходящихся последовательностей, в случае которых выгоднее будет применять $\epsilon$ алгоритм.

Поскольку дроби четного порядка $\mathcal{S}_{2k}(x)$ интерполяционной цепной дроби построены таким образом, что они удовлетворяют условиям интерполяции $2k+1$, то

Поскольку дроби четного порядка $\mathcal{S}_{2k}(x)$ интерполяционной цепной дроби построены так, что они удовлетворяют условиям интерполяции в $2k+1$ точках, имеем:

$$\mathcal{S}_{2k}(x_{n+j}) = S_{n+j}, \quad 0 \leq j \leq 2k.$$

**Теорема 3.1.** *Если применить $\rho$-алгоритм к последовательности $\{S_n\}$, такой что*

$$S_n = \frac{Sx_n^k + a_1 x_n^{k-1} + \cdots + a_k}{x_n^k + b_1 x_n^{k-1} + \cdots + b_k},$$

*то преобразование $\rho_{2k}^{(n)} = S$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$.*

*Доказательство.* Покажем верность утверждения с помощью интерполирующей дроби Тиля, которая имеет вид цепной дроби:

$$S_n = S_m + \cfrac{n-m}{\rho_1^{(m)} + \cfrac{n-m-1}{\rho_2^{(m)} - \rho_0^{(m)} + \cfrac{n-m-2}{\rho_3^{(m)} - \rho_1^{(m)} + \ddots}}}$$

Учитывая значение для $2k+1$ дроби в цепочке Тиля:

$$\cfrac{n-m-2k}{\rho_{2k+1}^{(m)} - \rho_{2k-1}^{(m)} + \cfrac{n-m-2k-1}{\ddots}}$$

получаем:

$$S_n = \frac{\rho_{2k}^{(m)} n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}{n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_k}.$$

Следовательно, $\rho_{2k}^{(m)} = S$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, $\rho$-алгоритм представляет собой рациональную экстраполяцию, точную на последовательности, удовлетворяющей условию выше. $\square$

## Свойства $\rho$-алгоритма

Некоторые свойства $\rho$- и $\epsilon$-алгоритмов Винна схожи.

**Свойство 1.**

$$\rho_{2k}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & S_n & x_n & x_n S_n & \cdots & x_n^{k-1} & x_n^{k-1} S_n & x_n^k S_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & S_{n+2k} & x_{n+2k} & x_{n+2k} S_{n+2k} & \cdots & x_{n+2k}^{k-1} & x_{n+2k}^{k-1} S_{n+2k} & x_{n+2k}^k S_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & S_n & x_n & x_n S_n & \cdots & x_n^{k-1} & x_n^{k-1} S_n & x_n^k S_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & S_{n+2k} & x_{n+2k} & x_{n+2k} S_{n+2k} & \cdots & x_{n+2k}^{k-1} & x_{n+2k}^{k-1} S_{n+2k} & x_{n+2k}^k \end{vmatrix}}$$

**Свойство 2 (Алгебраические).**

1. Если применение $\rho$-алгоритма к последовательностям $\{S_n\}$ и $\{aS_n+b\}$ даёт соответственно значения $\rho_k^{(n)}$ и $\overline{\rho}_k^{(n)}$, то выполняется:

$$\overline{\rho}_{2k}^{(n)} = a\,\rho_{2k}^{(n)} + b, \qquad \overline{\rho}_{2k+1}^{(n)} = \frac{\rho_{2k}^{(n)}}{a}.$$

2. Если применение $\rho$-алгоритма к последовательностям $\{S_n\}$ и $\left\{\frac{aS_n+b}{cS_n+d}\right\}$ даёт соответственно значения $\rho_k^{(n)}$ и $\overline{\rho}_k^{(n)}$, то выполняется:

$$\overline{\rho}_{2k}^{(n)} = \frac{a\,\rho_{2k}^{(n)} + b}{c\,\rho_{2k}^{(n)} + d}.$$

Итак, $\rho$-алгоритм представляет собой рациональную экстраполяцию, точную на последовательности, имеющей асимптотическое разложение вида:

$$S_n \sim S + n^{\theta}\left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots\right), \quad n \to \infty,$$

где $\theta$ — отрицательное целое число, а $c_j$ — константы, не зависящие от $n$.

## Асимптотическое поведение $\rho$-алгоритма

Чтобы описать асимптотическое поведение $\rho$ алгоритма, мы будем использовать следующую последовательность. Для заданного нецелого числа $\theta$ и заданного ненулевого действительного числа $c$ мы определяем последовательность $(C_n)$ следующим образом:

$$C_{-1} = 0, \tag{2a}$$

$$C_0 = c, \tag{2b}$$

$$C_{2k-1} = C_{2k-3} + \frac{2k-1}{\theta C_{2k-2}}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2c}$$

$$C_{2k} = C_{2k-2} + \frac{2k}{(1-\theta)C_{2k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{2d}$$

Эта

последовательность $(C_n)$ называется *ассоциированной последовательностью*

*$\rho$ алгоритма относительно $\theta$ и $c$.* Асимптотическое поведение $\rho$ алгоритма и ассоциированную последовательность связывают следующие 2 формулы

$$\frac{\rho_{2k}^{(n)} - s}{s_{n+2k} - s} \sim C_{2k} \quad \text{при } n \to \infty, \theta \notin \mathbb{Z} \tag{3}$$

$$\rho_{2k}^{(n)} = s + O\left((n+k)^{-k-2}\right), \quad \text{при } n \to \infty, \theta \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

Для ассоциированной последовательности $\rho$ алгоритма справедливы следующие две теоремы.

**Теорема 3.2.** *В соответствии с приведенной выше нотацией,*

$$C_{2k-1} = \frac{k(2-\theta)(3-\theta)\cdots(k-\theta)}{c\,\theta(1+\theta)\cdots(k-1+\theta)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5a}$$

$$C_{2k} = \frac{c(1+\theta)\cdots(k+\theta)}{(1-\theta)(2-\theta)\cdots(k-\theta)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5b}$$

*Доказательство.* Индукция по $k$. Для $k = 1, C_1 = C_{-1} + 1/c\theta = 1/c\theta, C_2 = C_0 + 2/(1-\theta)C_1 = c(1+\theta)/(1-\theta)$. Предположим, что они верны для $k > 1$. По предположению индукции имеем

$$C_{2k+1} = C_{2k-1} + \frac{2k+1}{\theta C_{2k}} \tag{6a}$$

$$= \frac{k(2-\theta)\cdots(k-\theta)}{c\theta(1+\theta)\cdots(k-1+\theta)} + \frac{(2k+1)(1-\theta)\cdots(k-\theta)}{c\theta(1+\theta)\cdots(k+\theta)} \tag{6b}$$

$$= \frac{(k+1)(2-\theta)\cdots(k-\theta)(k+1-\theta)}{c\theta(1+\theta)\cdots(k+\theta)} \tag{6c}$$

Аналогично,

$$C_{2k+2} = \frac{c(1+\theta)(2+\theta)\cdots(k+1+\theta)}{(1-\theta)\cdots(k+1-\theta)}. \tag{7}$$

□

Заметим, что теорема 3.2 остается верной, когда $\theta$ является целым числом и $k < |\theta|$.

**Теорема 3.3.** *(Об асимптотике ассоциированной последовательности)*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{C_{2k}}{k^{2\theta}} = -\frac{c\Gamma(-\theta)}{\Gamma(\theta)}, \tag{8}$$

*где* $\Gamma(x)$ *— гамма-функция.*

*Доказательство.* *С помощью предельной формулы Эйлера для гамма-функции*

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{k!k^x}{x(x+1)\cdots(x+k)} \tag{9}$$

Теперь мы имеем асимптотическое поведение алгоритма $\rho$.

**Теорема 3.4.** *Пусть* ( $S_n$ ) *— последовательность, удовлетворяющая*

$$S_n \sim S + n^\theta\left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots\right), \quad \text{при } n\to\infty. \tag{10}$$

*Пусть* $(C_n)$ *— ассоциированная последовательность алгоритма* $\rho$ *относительно* $\theta$ *и* $c_0$ *в (9). Пусть* $A = (1-\theta)(-1/2 + c_1/c_0\theta)$*. Тогда справедливы следующие формулы.*

$$\rho_1^{(n)} = C_1(n+1)^{1-\theta}\left[1 + \frac{A}{n+1} + \frac{B_1}{(n+1)^2} + O\left((n+1)^{-3}\right)\right] \tag{11}$$

*где*

$$B_1 = \frac{\theta^2-1}{12} + \frac{c_1(1-\theta)}{2c_0} + \frac{(1-\theta)^2c_1^2}{c_0^2\theta^2} + \frac{c_2(2-\theta)}{c_0\theta}. \tag{12}$$

$$\rho_2^{(n)} = s + C_2(n+1)^\theta\left[1 + \frac{c_1}{c_0(n+1)} + \frac{B_2}{(n+1)^2} + O\left((n+1)^{-3}\right)\right], \tag{13}$$

*где*

$$B_2 = -\frac{c_0\theta(1+\theta)}{6(1-\theta)} + \frac{2c_1^2}{c_0\theta(1-\theta)} + \frac{c_2\left(5-\theta^2\right)}{(1-\theta)^2}. \tag{14}$$

*Предположим, что $\theta \neq -1, \dots, 1-k$. Для $j = 1, \dots, k$,*

$$\rho_{2j-1}^{(n)} = C_{2j-1}(n+j)^{1-\theta}\left[1 + \frac{A}{n+j}\right] + O\left((n+j)^{-1-\theta}\right) \tag{15a}$$

$$\rho_{2j}^{(n)} = s + C_{2j}(n+j)^{\theta}\left[1 + \frac{c_1}{c_0(n+j)}\right] + O\left((n+j)^{\theta-2}\right) \tag{15b}$$

*Доказательство.* (10) Используя биномиальное разложение, получаем

$$s_{n+1} - s_n \tag{16a}$$

$$= c_0\theta(n+1)^{\theta-1}\left[1 - \frac{A}{n+1} + \left(-\frac{1-\theta}{6} + \frac{c_1(1-\theta)}{2c_0\theta} + \frac{c_2}{c_0\theta}\right)\frac{\theta-2}{(n+1)^2}\right] \tag{16b}$$

$$+ O\left((n+1)^{\theta-3}\right) \tag{16c}$$

Следовательно, получаем

$$\rho_1^{(n)} = C_1(n+1)^{1-\theta}\left[1 + \frac{A}{n+1} + \frac{B_1}{(n+1)^2} + O\left((n+1)^{-3}\right)\right] \tag{17}$$

(12), (14). Аналогично (10).

По теореме 3.4, когда $\theta$ в (9) не является целым числом, для фиксированного $k$, □

$$\frac{\rho_{2k}^{(n)} - s}{s_{n+2k} - s} \sim C_{2k} \quad \text{\textit{при} } n \to \infty \tag{18}$$

*Когда $\theta$ является отрицательным целым числом, а именно $-k$, мы имеем $C_0 \neq 0, \dots, C_{2k-2} \neq 0$ и $C_{2k} = 0$. Таким образом, из теоремы 3.4 следует, что*

$$\rho_{2k}^{(n)} = s + O\left((n+k)^{-k-2}\right), \quad \text{\textit{при} } n \to \infty. \tag{19}$$

Примечание:

$\rho$-алгоритм — алгоритм экстраполяции рациональной дроби, числитель и знаменатель которой имеют одинаковую степень. Можно рассматривать это как частный случай метода Булирша и Стоера, где степени числителя и знаменателя произвольны.

## 3.2 Причины применения $\rho$-алгоритма Винна для логарифмически сходящихся рядов:

1. **Преобразование интерполяционных точек**

   Алгоритм $\rho$ Винна включает последовательность интерполяционных точек $\{x_n\}$, что позволяет более гибко подходить к обработке ряда. Логарифмически сходящиеся ряды характеризуются тем, что их члены уменьшаются медленно, и традиционные методы ускорения сходимости могут оказаться неэффективными. Интерполяционные точки дают возможность алгоритму адаптироваться к медленной сходимости, обеспечивая более точное аппроксимирование предела.

2. **Адаптация к логарифмической сходимости**

   $\rho$-алгоритм Винна строит последовательность рациональных функций, которая учитывает форму логарифмически сходящихся рядов. Он использует четные порядки элементов $\rho_{2k}^{(n)}$ для аппроксимации предела, что позволяет лучше учитывать особенности поведения логарифмически сходящихся рядов.

3. **Комплементарные свойства**

   Алгоритм $\rho$ Винна дополняет $\epsilon$ алгоритм Винна, который эффективен для линейно сходящихся последовательностей, но не может ускорить логарифмическую сходимость. В то время как $\epsilon$ алгоритм эффективен для суммирования чередующихся расходящихся рядов, алгоритм $\rho$ Винна специально разработан для работы с логарифмически сходящимися рядами, что делает его эффективным инструментом в таких случаях.

4. **Устойчивость к осцилляциям и расходимости**

   Логарифмически сходящиеся ряды часто не демонстрируют осцилляционного поведения, характерного для некоторых других типов рядов. $\rho$-алгоритм Винна, учитывая свою структуру и использование интерполяционных точек, обеспечивает устойчивость к осцилляциям и помогает избежать расходимости, эффективно аппроксимируя пределы таких рядов.

## Модификации $\rho$ – алгоритма

## 3.3 $\theta$ – алгоритм Брезински

$$\vartheta_{-1}^{(n)} = 0, \quad \vartheta_{0}^{(n)} = S_n,$$

$$\vartheta_{2k+1}^{(n)} = \vartheta_{2k-1}^{(n+1)} + \frac{1}{\Delta \vartheta_{2k}^{(n)}},$$

$$\vartheta_{2k+2}^{(n)} = \vartheta_{2k}^{(n+1)} + \frac{[\Delta \vartheta_{2k}^{(n+1)}][\Delta \vartheta_{2k+1}^{(n+1)}]}{\Delta^2 \vartheta_{2k+1}^{(n)}}, \quad k, n = 0,\ 1,\ \ldots$$

# 4 Заключение

# 5 Список литературы


1. Brezinski, C. (1977). *Acceleration de la Convergence en Analyse Numerique*. Springer-Verlag.

2. Osada, Naoki. *Acceleration Methods for Slowly Convergent Sequences and Their Applications*. January 1993.

3. Weniger, E. J. (2003). Nonlinear Sequence Transformations for the Acceleration of Convergence and the Summation of Divergent Series. *Computer Physics Repor*ts, 1(1), 1-123.

4. Brezinski, C., & Redivo Zaglia, M. (2003). *Extrapolation Methods: Theory and Practice*. Amsterdam: North-Holland.

5. Sidi, A. (2003). *Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.

6. Van Tuyl, A. H. (1994). Acceleration of Convergence of a Family of Logarithmically Convergent Sequences. *Mathematics of Computation*, 63(207), 229-246. American Mathematical Society.

7. Weniger, E. J. (1990). On the derivation of iterated sequence transformations for the acceleration of convergence and the summation of divergent series. *Institut für Physikalische und Theoretische Chemie, Universität Regensburg*, W-8400 Regensburg, Germany.

8. Borghi, R., & Weniger, E. J. (2015). Convergence analysis of the summation of the factorially divergent Euler series by Padé approximants and the delta transformation. *Dipartimento di Ingegneria, Università "Roma Tre I-00144 Rome, Italy and Institut für Physikalische und Theoretische Chemie, Universität Regensburg, D-93040 Regensburg, Germany.*