

Введение

Полезность нелинейных преобразований последовательностей для улучшения и даже индуцирования сходимости была достаточно продемонстрирована Шенксом [2]. Однако эвристическая основа преобразований Шенкса имеет некоторые недостатки. Путём соответствующей модификации, предложенной Левиным, генерируются преобразования, которые дают значительное улучшение по сравнению с преобразованиями Шенкса. Дополнительным преимуществом является то, что преобразования выражены в простой замкнутой форме без необходимости вычисления высокопорядковых детерминант, как это происходит в некоторых преобразованиях Шенкса.

От Шенкса к Левину

Для последующего упоминания резюмируем подход Шенкса и преобразования, которые он получает [2]. Шенкс начинает с последовательности

$$A = \{A_r\}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

и, сравнивая её с представлением A_r как функции от r вида

$$A_r = B + \sum_{i=1}^k a_i q_i^r \quad (q_i \neq 1, 0), \quad (2)$$

он может вычислить её «спектр амплитуд» a_i , её «отношения» q_i и её «базу» B .

Определение 1: «спектр амплитуд» a_i , «отношения» q_i и её «база» B определяются как параметры, характеризующие поведение последовательности A_r в представлении (2). «Спектр амплитуд» a_i описывает веса различных экспоненциальных компонент, «отношения» q_i задают скорости изменения этих компонент, а «база» B при удовлетворении $\{A_r\}$ уравнению (2) и удовлетворении каждого отношения $|q_i| < 1$ представляет собой предел последовательности при $r \rightarrow \infty$:

$$B = \lim_{r \rightarrow \infty} A_r. \quad (3)$$

Определение 2: если $\{A_r\}$ удовлетворяет уравнению (2) и одно или более $|q_i| \geq 1$, A_r не сходится, тогда Шенкс утверждает [1], что « A_r расходится от B », и называется «антипределом» $\{A_r\}$. На практике антипредел предоставляет механизм для применения методов ускорения сходимости к последовательностям, которые формально расходятся. Это позволяет использовать преобразования, такие как методы Шенкса [2] или Эйлера [3], для извлечения значимых числовых результатов из последовательностей, не имеющих предела в классическом смысле.

Но многие последовательности, которые возникают естественным образом при решении задач, не могут быть представлены в виде (2), но можно во многих случаях сказать, что $\{A_r\}$ почти k -го порядка для некоторого k , по крайней мере для r больше некоторого фиксированного N [1]. Тогда по аналогии с (2) стремимся определить локальную базу k -го порядка B_{kn} , решая $2k + 1$ уравнений

$$A_r = B_{kn} + \sum_{i=1}^k a_{in} q_{in}^r, \quad n - k \leq r \leq n + k, \quad n \geq k, \quad (q_{in} \neq 1, 0) \quad (4)$$

(которые центрированы вокруг A_n) для $2k + 1$ величин B_{kn} , a_{in} , q_{in} ($i = 1, 2, \dots, k$), и рассматриваем B_{kn} как метод сходимости для $\{A_r\}$.

Определение 3: локальная база k -го порядка B_{kn} определяется решением системы уравнений, аналогичной (2), для последовательностей, которые не могут быть точно представлены в виде (2), но имеют поведение, близкое к нему. Локальная база позволяет анализировать и ускорять сходимость последовательностей, которые формально расходятся.

Алгебраически получаем для B_{kn} формулу

$$B_{kn} = \frac{\begin{vmatrix} A_{n-k} & \cdots & A_{n-1} & A_n \\ \Delta A_{n-k} & \cdots & \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \\ \Delta A_{n-k+1} & \cdots & \Delta A_n & \Delta A_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta A_{n-1} & \cdots & \Delta A_{n+k-2} & \Delta A_{n+k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \Delta A_{n-k} & \cdots & \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \\ \Delta A_{n-k+1} & \cdots & \Delta A_n & \Delta A_{n+1} \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ \Delta A_{n-1} & \cdots & \Delta A_{n+k-2} & \Delta A_{n+k-1} \end{vmatrix}}, \quad (5)$$

где

$$\Delta A_n = A_{n+1} - A_n. \quad (6)$$

Тогда преобразование Шенкса [1] определяется как

$$e_k(A)_n = e_k(A_n) = B_{kn} \quad (n \geq k), \quad (7)$$

а диагональное или e_d преобразование Шенкса как

$$e_d(A)_n = e_d(A_n) = B_{nn}. \quad (8)$$

Обозначим

$$\Delta A_n = a_{n+1}, \quad (9)$$

таким образом,

$$A_n = \sum_{i=0}^n a_i, \quad (10)$$

если определим

$$a_0 = A_0. \quad (11)$$

Таким образом, идентифицируем члены последовательности $\{A_r\}$ с частичными суммами бесконечного ряда

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i. \quad (12)$$

Тогда можем легко проверить, что (5) для B_{kn} также получается, если решим для B_{kn} систему уравнений

$$A_r = B_{kn} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{in} a_{r+i+1} \quad n-k \leq r \leq n \quad n \geq k. \quad (13)$$

Здесь имеется только $k+1$ уравнений для $k+1$ величин B_{kn} и β_{in} с $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

Идея Шенкса заключается в том, чтобы рассматривать A_r как функцию r [2], вычисленную для целых значений r , и аппроксимировать эту функцию как сумму степеней с произвольными коэффициентами, как в (2), и таким образом, получать информацию о поведении последовательности при $r \rightarrow \infty$ из конечного числа членов последовательности. В соответствии с (13), видим, что также можем рассматривать эту аппроксимацию функции A_r как аппроксимацию с помощью линейной комбинации функций a_m (как функций от m) для $r+1 < m \leq k+r$ с произвольными коэффициентами и включая константный член B_{kr} . Шенкс показывает в своей статье, что если A_r являются частичными суммами степенного ряда разложения рациональной функции от z , то преобразование e_k работает наиболее эффективным образом, так что при достаточно больших k и $e_k(A_n)$ является точно этой рациональной функцией во всей z -плоскости. Однако функции a_n очень похожи друг на друга, и кажется, неэффективным аппроксимировать функцию A_r с помощью линейной комбинации таких положений функций, как это делается в (13).

Кроме того, аппроксимация A_r с помощью линейной комбинации степеней может быть не подходящей для последовательностей, скорость сходимости или расходимости которых меньше скорости, с которой q^r стремится к нулю или к бесконечности соответственно. В качестве примеров можно упомянуть последовательности $A_r = r^{-2}$ и $A_r = r^2$.

Алгоритм Левина

Алгоритм Левина [1] относится к классу нелинейных методов ускорения сходимости и основывается на построении преобразований, полученных в результате аппроксимации A_r с помощью других функций от r . Он имеет несколько вариаций. Рассмотрим каждую из них.

t-преобразование. По аналогии с (13) записываем $k + 1$ уравнений для последовательности $A = \{A_r\}$ [1]:

$$A_r = T_{kn} + R_k(r) \quad n \leq r \leq n + k, \quad (14)$$

где $R_k(r)$ – функции от r , включающие k произвольных констант, и стремимся решить систему (14) для T_{kn} полагая, что T_{kn} должно быть аппроксимацией предела последовательности A . Если последовательность A расходится, но одномерная последовательность $\{B_r\}$, которую можем сформировать из T_{kn} , стремится к пределу b , то будем называть b антипределом $A = \{A_r\}$ относительно соответствующего преобразования.

В случае $k = 1$ получаем два уравнения

$$A_r = T_{1n} + R_1(r) \quad r = n_1, \quad n + 1 \quad (15)$$

и хотим выбрать $R_1(r)$ такое, чтобы

$$T_{1n} \doteq b, \quad (16)$$

то есть, чтобы

$$R_1(r) \doteq A_r - b. \quad (17)$$

Предположим, что каким-то образом нашли функцию $R_1(r)$. Тогда очевидно, что желательно улучшить эту аппроксимацию, поэтому для $k > 1$ определяем

$$R_k(r) = R_1(r) \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{in} f_i(r), \quad (18)$$

где γ_{in} – константы, которые должны быть определены из (14), в то время как $f_i(r)$ – функции от r , которые выберем на основе удобства и взаимной независимости. Уравнения (14) теперь принимают форму:

$$A_r = T_{kn} + R_1(r) \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{in} f_i(r) \quad n \leq r \leq n + k. \quad (19)$$

Для удобства обозначим $R_r \equiv R_1(r)$, и получаем T_{kn} с помощью правила Крамера:

$$T_{kn} = \frac{\begin{vmatrix} A_n & A_{n+1} & \cdots & A_{n+k} \\ R_n f_0(n) & R_{n+1} f_0(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_0(n+k) \\ R_n f_1(n) & R_{n+1} f_1(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_n f_{k-1}(n) & R_{n+1} f_{k-1}(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_{k-1}(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ R_n f_0(n) & R_{n+1} f_0(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_0(n+k) \\ R_n f_1(n) & R_{n+1} f_1(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_n f_{k-1}(n) & R_{n+1} f_{k-1}(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_{k-1}(n+k) \end{vmatrix}}. \quad (20)$$

Детерминанты в T_{kn} не удобны для вычислений в общем случае, но для частного случая

$$f_i(r) \equiv r^{-i} \quad (21)$$

и при условии, что $R_n \neq 0$ для любого n , можем легко выразить их через детерминанты Вандермонда, деля последовательные столбцы на $R_n, R_{n+1}, \dots, R_{n+k}$ соответственно и разлагая по первой строке. Это элементарное вычисление даёт результат

$$T_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{A_{n+j}}{R_{n+j}}}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{1}{R_{n+j}}}. \quad (22)$$

Теперь нужно подходящее выражение для $R_r \equiv R_1(r)$, которое обладает свойством, выраженным в (17).

По аналогии с (13) теперь записываем $k+1$ уравнений для последовательности $A = \{A_r\}$.

Стоит учитывать, что, следуя Шенксу, нумерация членов последовательности начинается с A_0 . Однако дальше в некоторых случаях будет удобнее начинать с A_1 как с первого члена последовательности.

Известные преобразования, такие как e_k и преобразования Эйлера, часто значительно улучшают сходимость последовательностей, сформированных из частичных сумм чередующихся рядов:

$$A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} d_k; \quad d_k > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Соответственно, сначала рассмотрим оценку для $R_1(r)$, которая подходит для таких последовательностей. Если предполагаем, что d_n является достаточно гладкой функцией от n , и что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = d \quad (24)$$

(когда последовательность расходится, d – антипредел), то очевидно, что

$$A_r - d = O(d_r) \quad (25)$$

и более точно

$$A_r - d \doteq \frac{1}{2}(-1)^{r+1}d_r = \frac{1}{2}\Delta A_{r-1} \quad (26)$$

В соответствии с (19) видим, что достаточно выбрать $R_1(r)$ с точностью до константного множителя, и поэтому берём

$$R_1(r) = \Delta A_{r-1} = a_r. \quad (27)$$

Кроме того, $R_1(r) = a_r$ является хорошей аппроксимацией для последовательности, которая расходится очень быстро, так как тогда A_r имеет порядок величины $\Delta A_{r-1} = a_r$, и если A имеет антипредел b относительно разрабатываемого преобразования, то для больших r

$$A_r - b \doteq A_r \doteq a_r, \quad (28)$$

что именно то, что требуется от $R_1(r)$ (см. (17)). Соответственно, принимая $R_1(r) = a_r$, можем ожидать получения из (22) хороших аппроксимаций к пределу или антипределу последовательности, сгенерированной частичными суммами чередующегося ряда, и к антипределу очень быстро сходящегося ряда.

При условии, что $a_r \neq 0$ для всех $r \geq 1$, подставляем $R_r \equiv R_1(r) = a_r$ в (22) и получаем

$$T_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{A_{n+j}}{a_{n+j}}}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{1}{a_{n+j}}}. \quad (29)$$

Видим из (29), что T_{kn} является взвешенным средним последовательности и использует $A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+k}$, а сами веса зависят от $A_{n-1}, A_{n_1}, \dots, A_{n+k}$. Таким образом,

преобразование, заданное двумерной таблицей T_{kn} , является нелинейным. Псевдокод для t -преобразования представлен на Рисунке 1, а пример его применения представлен на Рисунке 2.

Вход: A – ряд, представленный в виде $\sum_{m=1}^n a_m$, параметр $k \geq 1$ - порядок преобразования, индекс элемента $n \geq k$

Выход: ускоренная последовательность T_{kn} , полученная путём применения t -преобразования

Получить A, k, n

if $k < 1$: **return** «Ошибка: k должен быть ≥ 1 »

if $n < k$: **return** «Ошибка: n должен быть $\geq k$ »

Вычислить необходимые частичные суммы (23)

if $n + k \geq \text{длина}(A)$: **return** "Ошибка: недостаточно данных"

else:

Инициализировать:

Числитель = 0

Знаменатель = 0

for j от 0 до k :

if $A[\text{текущий индекс}] - A[\text{текущий индекс} - 1]$ **or**

текущий индекс = 0: **return** «Ошибка: нулевая разность»

Числитель += $(-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{A_{n+j}}{a_{n+j}}$ #(29)

Знаменатель += $(-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{1}{a_{n+j}}$ #(29)

if Знаменатель $\neq 0$: **return** $T_{kn} = \text{Числитель} / \text{Знаменатель}$

else: return «Ошибка: нулевой знаменатель»

Рисунок 1. Псевдокод для t -преобразования.

$$\text{Вход: } A = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}, k = 2, n = 5$$

$$\text{Выход: } T_{kn} = 0.7854$$

Рисунок 2. Пример применения t -преобразования.

Теперь определим t_k преобразование аналогично e_k преобразованию Шенкса:

$$t_k(A)_n = T_{kn}. \quad (30)$$

Также определяем преобразование t_d

$$t_d(A)_n = T_{n1}. \quad (31)$$

Это определение не соответствует диагональному преобразованию e_d Шенкса, но t_d и e_d имеют общее – для последовательности $A = \{A_r\}$, начиная с A_1 , ассоциируем последовательность $A' = \{A'_r\}$ согласно

$$A'_i = A_{i+1} \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (32)$$

так что A' начинается с A'_0 , тогда как $t_d(A)_{2n}$, так и $e'_d(A)_n$ зависят лишь от $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$. Предполагаем обозначить это слегка модифицированное диагональное преобразование Шенкса (лишь в индексации) как e'_d :

$$e'_d(A)_{n+1} = e_d(A')_n. \quad (33)$$

Таким образом, можем сказать, что $t_d(A)_{2n}$ и $e'_d(A)_n$ оба зависят от первых $2n + 1$ элементов $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ последовательности A . Также в ряде случаев e'_d и t_d оказываются наиболее эффективными преобразованиями из e_k и t_k соответственно.

Важно отметить принципиальную разницу между t - и e -преобразованиями. Обращаясь к (5) и (29), видим, что способ нумерации членов последовательности влияет на t , но не на e -преобразования, так как индекс n появляется (то есть не только как индекс) в формуле для T_{kn} , но не в формуле для B_{kn} . Таким образом, t_k на самом деле представляет собой целую последовательность преобразований в зависимости от того, как нумеруем первый член последовательности. Например, можно нумеровать члены последовательностей с A_1 , но нетрудно придумать примеры (например, частичные суммы экспоненциального ряда e^{-x} для больших положительных x), где другая нумерация даёт лучшие результаты.

Свойства t_k - и t_d -преобразований. Преобразования t_k, t_d , или в общем, любое преобразование t , которое можно сформировать из T_{kn} (29), не являются линейными, но, как и с преобразованиями Шенкса, есть два простых, но важных свойства [1]:

$$t(A + C) = t(A) + c \quad n > 1 \quad (34)$$

$$t(\gamma \cdot A) = \gamma \cdot t(A), \quad (35)$$

где C используется для обозначения последовательности

$$C = \{C_n\}; \quad C_n = c, \quad (36)$$

содержащей каждый член, равный одной и той же константе c . Доказательство этого элементарно.

Преобразования t_k, t_d не являются регулярными, то есть существуют сходящиеся последовательности, для которых t_k и t_d приводят к последовательностям, которые расходятся или имеют другой предел, но если A является последовательностью частичных сумм сходящегося ряда, то $t_k(A)$ и $t_d(A)$ сходятся к пределу A . Это можно показать, записав преобразование t_k , например, в форме метода суммирования $\gamma_{ij}: T_k(A)_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{ij} A_j$, где $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(A)$. Тогда для фиксированного чередующегося ряда A можем использовать теорему Сильвермана-Тёплица, чтобы показать, что $\gamma_{ij}(A)$ является регулярным методом суммирования, который, в частности, суммирует A к его пределу.

Покажем, в какой степени улучшение сходимости – общее правило. Укажем улучшение, достигнутое t_1, t_2 при применении к определённым классам чередующихся рядов. В первую очередь, можем отметить из выражений для t_k и e_k , что $t_1 = e_1$. Кроме того, для e_1 Шенкс доказал следующий результат [1].

Если $f(m), g(m)$ – полиномы степеней M_1, M_2 соответственно, и $g(m)$ не обращается в ноль при m – положительном целом числе или нуле, и если

$$A_n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{f(m)}{g(m)}, \quad (37)$$

то

$$\Delta e_1(A)_n = \Delta A_n \left[\frac{M_1 - M_2}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]. \quad (38)$$

Это даёт меру улучшения сходимости, достигнутого $e_1 = t_1$, при применении к последовательности (37). Теперь установим результат этого типа для t_2 .

Предположим теперь, что $A = \{A_n\}$ является последовательностью

$$A_n = \sum_{m=1}^n \frac{x^m}{h(m)}, \quad (39)$$

когда $x \neq 1$ и $h(m)$ имеет разложение вида

$$h(m) = m^k + O(m^{k-1}) \quad (40)$$

и $h(m) \neq 0$ для m – положительного целого числа. Тогда нетрудно по вычислению, аналогичному тому, что у Шенкса, показать, что

$$\Delta t_2(A)_n = \Delta A_n \cdot O\left(\frac{1}{n^k}\right). \quad (41)$$

Легко показать, что, если A сходится, $t_2(A)$ сходится к тому же пределу, и (41) показывает улучшение, достигнутое в скорости сходимости.

и-преобразование. Рассмотрим последовательность

$$A_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m_2}, \quad (42)$$

для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{\pi^2}{6} = 1.64493046 \dots \quad (43)$$

Как объяснялось ранее, не ожидается, что e'_k или t_d будут особенно эффективны для этого ряда, и вычисления это подтверждают [1]. Однако простым изменением T_{kn} можно получить преобразование, которое даёт очень хорошие результаты для таких медленно сходящихся монотонных рядов.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n > 0, \quad (44)$$

когда a_n имеет асимптотическое разложение

$$a_n = n^{-k} + \gamma n^{-k-1} + O(n^{-k-2}), \quad (45)$$

и $k > 1$, так что ряд сходится. Попробуем получить выражение для $R_1(r)$, которое подходит для такого рода. Запишем

$$A_r = \sum_{n=1}^r a_n, \quad (46)$$

и тогда в соответствии с (17) нужно

$$R_1(r) \doteq A_r - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n. \quad (47)$$

Можем легко оценить этот остаток, рассматривая выражение (45) для a_n как функцию от n , определённую для всех положительных действительных n , и сравнивая

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} a_n$$

с интегралом

$$\int_r^{\infty} a_n dn.$$

Таким образом, находим

$$R_1(r) \doteq \frac{r^{-k} + 1}{-k + 1} + O(r^{-k}) = \frac{ra_r}{1 - k} \left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right], \quad (48)$$

и так как достаточно определить $R_1(r)$ с точностью до константного множителя, то целесообразно взять

$$R_1(r) = ra_r. \quad (49)$$

Подставляем это в (22) и получаем величину U_{kn} , заданную

$$U_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-2} \frac{A_{n+j}}{a_{n+j}}}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-2} \frac{1}{a_{n+j}}}. \quad (50)$$

Здесь стоит отметить, что это уравнение для U_{kn} очень похоже на (29) для T_{kn} и может быть получено из (19), взяв $R_1(r) = a_r$ как прежде, но выбрав $f_i(r) = r^{1-i}$ вместо r^{-i} как в (21). Псевдокод для u -преобразования представлен на Рисунке 3, а пример его применения представлен на Рисунке 4.

Вход: A – ряд, представленный в виде $\sum_{m=1}^n a_m$, параметр $k \geq 2$ - порядок преобразования, индекс элемента $n \geq k$

Выход: ускоренная последовательность U_{kn} , полученная путём применения u -преобразования

Получить A, k, n

if $k < 2$: **return** «Ошибка: k должен быть ≥ 2 »

if $n < k$: **return** «Ошибка: n должен быть $\geq k$ »

Вычислить необходимые частичные суммы (аналогично 23)

if $n + k \geq \text{длина}(A)$: **return** "Ошибка: недостаточно данных"

else:

 Инициализировать:

 Числитель = 0

 Знаменатель = 0

for j от 0 до k :

if $A[\text{текущий индекс}] - A[\text{текущий индекс} - 1]$ **or**

 текущий индекс = 0: **return** «Ошибка: нулевая разность»

 Числитель $+= (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-2} \frac{A_{n+j}}{a_{n+j}}$ **#(50)**

 Знаменатель $+= (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-2} \frac{1}{a_{n+j}}$ **#(50)**

if Знаменатель $\neq 0$: **return** $U_{kn} = \text{Числитель} / \text{Знаменатель}$

else: **return** «Ошибка: нулевой знаменатель»

Рисунок 3. Псевдокод для u -преобразования.

$$\text{Вход: } A = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2}, k = 4, n = 5$$

$$\text{Выход: } U_{kn} = 1.5239$$

Рисунок 4. Пример применения u -преобразования.

Так же, как с помощью T_{kn} определили t -преобразования, теперь определяем u -преобразования с помощью U_{kn} . В особенности, определяем

$$u_k(A)_n = U_{kn}, \quad (51)$$

$$u_n(A)_n = U_{n1}. \quad (52)$$

Как для t -преобразований, наблюдаем, что u -преобразования удовлетворяют условиям (34) и (35), и можем показать, что последовательности частичных сумм сходящихся чередующихся рядов преобразуются в последовательности, сходящиеся к тому же пределу, и кажется, что для таких последовательностей t и u оказывают примерно одинаковую степень улучшения скорости сходимости. Однако для медленно сходящихся монотонных последовательностей u -преобразования более эффективны.

v -преобразования. v -преобразование, которое сейчас будет представлено, является примером использования известных преобразований для получения более эффективных преобразований. Начнём с преобразования $t_1 = e_1$, применённого к любой последовательности $A = (A_n)$ [1]:

$$e_1(A)_n = \frac{A_{n-1}a_{n+1} - A_n a_n}{a_{n+1} - a_n} = A_n + \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}}. \quad (53)$$

Предполагая, что $e_1(A)_n$ является аппроксимацией предела или антипредела A , можем использовать (17), чтобы получить выражение для $R_1(r)$:

$$R_1(r) \doteq A_r - b \doteq A_r - e_1(A)_r \doteq \frac{a_r a_{r+1}}{a_{r+1} - a_r}. \quad (54)$$

Подстановка этого значения для $R_1(r)$ в (22) даёт

$$V_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{n+j-1} - a_{n+j}}{a_{n+j} a_{n+j+1}} A_{n+j}}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{n+j-1} - a_{n+j}}{a_{n+j} a_{n+j+1}}}. \quad (55)$$

Псевдокод для v -преобразования представлен на Рисунке 5, а пример его применения представлен на Рисунке 6.

Вход: A – ряд, представленный в виде $\sum_{m=1}^n a_m$, параметр $k \geq 1$ - порядок преобразования, индекс элемента $n \geq k + 1$

Выход: ускоренная последовательность V_{kn} , полученная путём применения v -преобразования

Получить A, k, n

if $k < 1$: **return** «Ошибка: k должен быть ≥ 1 »

if $n < k + 1$: **return** «Ошибка: n должен быть $\geq k + 1$ »

Вычислить необходимые частичные суммы (аналогично 23)

if $n + k + 1 \geq \text{длина}(A)$: **return** "Ошибка: недостаточно данных"

else:

 Инициализировать:

 Числитель, Знаменатель = 0

for j от 0 до k :

if $A[\text{текущий индекс}] - A[\text{текущий индекс} - 1]$ **or**

 текущий индекс = 0: **return** «Ошибка: нулевая разность»

 Числитель += $(-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{n+j-1} - a_{n+j}}{a_{n+j} a_{n+j+1}} A_{n+j}$ #(55)

 Знаменатель += $(-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{n+j-1} - a_{n+j}}{a_{n+j} a_{n+j+1}}$ #(55)

if Знаменатель $\neq 0$: **return** $V_{kn} = \text{Числитель} / \text{Знаменатель}$

else: return «Ошибка: нулевой знаменатель»

Рисунок 5. Псевдокод для v -преобразования.

Вход: $A = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{m}, k = 1, n = 4$

Выход: $V_{kn} = 0.6806$

Рисунок 6. Пример применения v -преобразования.

Используя V_{kn} , определяем v -преобразования

$$v_k(A)_n = V_{kn}, \quad (56)$$

$$v_n(A)_n = V_{n1}. \quad (57)$$

Также v -преобразования имеют свойства (34) и (35), и они регулярны для последовательностей, сгенерированных как частичные суммы чередующихся рядов. v -преобразования так же хороши, как t - или u -, разница же заключается в том, что они хороши для обоих типов рядов.

Заключение

Полученные преобразования могут быть применены к вычислению бесконечных интегралов от осциллирующих функций путём интегрирования между нулями функции, а затем преобразования полученного чередующегося ряда. Также, как другое применение, можно упомянуть улучшение простой численной интеграции.

Во многих случаях последовательность будет монотонной, и тогда обычные методы для ускорения сходимости не так эффективны. Но тогда u - или v -преобразование должно быть подходящим.

Преобразования t -, u -, v - могут быть использованы для генерации рациональных аппроксимаций функций $f(z)$, имеющих формальные разложения в степенные ряды. При определённых условиях эти аппроксимации превосходят сопоставимые члены таблицы Паде функции $f(z)$.

Список литературы

1. Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // International Journal of Computer Mathematics // Levin D. A. - 1972. – P. 371-388.
2. Non-Linear Transformations of Divergent and Slowly Convergent Sequences // Shanks D. C. – 1955. – P. 1-42.
3. A continuous Euler transformation and its application to the Fourier transform of a slowly decaying function // Journal of Computational and Applied Mathematics // Ooura T. – 2001. – P. 259-270.