Оглавление

Используемые ряды

1. exp_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции e^x. В общем виде ряд выглядит следующим образом (1).

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{1}$$

Область сходимости: ряд (1) сходится абсолютно и равномерно для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая скорость сходимости: todo.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

2. cos_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\cos(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (2).

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \tag{2}$$

Область сходимости: ряд (2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

3. sin_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sin(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (3).

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3}$$

Область сходимости: ряд (3) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

4. cosh_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $ch(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (4).

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{4}$$

Область сходимости: ряд (4) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

5. sinh_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $sh(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (5).

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{5}$$

Область сходимости: ряд (5) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

6. bin_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена для бинома Ньютона по степеням x. В общем виде ряд выглядит следующим образом (6).

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad (6)$$

где $\binom{\alpha}{n}$ – обобщенный биномиальный коэффициент, который вычисляется в общем виде по следующей формуле (7).

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)(n-2) * \ldots * (n-k+1)}{k!}, k \geq 0 \\ 0, \; k < 0 \end{cases} \qquad (7)$$

Область сходимости: ряд (6) сходится для всех $x \in (-1, 1)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

7. **four_arctan_series**

Данный шаблон используется для имплементации разложения модифицированного ряда для арктангенса в ряд Маклорена. Данный ряд особенно удобен для вычисления π, ведь при $x = 1, arctg(1) = \frac{\pi}{4} \to 4arctg(1) = \pi$ – получаем ряд Лейбница. В общем виде ряд выглядит следующим образом (8).

$$4\mathrm{arctan}(x) = 4 * \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right) = 4 * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (8)$$

Область сходимости: ряд (8) сходится для всех $x \in [-1, 1]$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

8. **ln1mx_series**

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $-\ln(1-x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (9).

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \tag{9}$$

Область сходимости: ряд (9) сходится для всех $x \in (-1, 1)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

9. mean_sinh_sin_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{sh(x)+\sin(x)}{2}$.

Данный ряд выводится следующим образом (10).

$$\frac{sh(x)+\sin(x)}{2} = \frac{1}{2}(sh(x)+\sin(x)) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} * \frac{1+(-1)^n}{2} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \tag{10}$$

Область сходимости: ряд (10) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

10.exp_squared_erf_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $e^{x^2} * \operatorname{erf} x$. $\operatorname{erf}(x)$ – функция ошибок Гаусса, которая в общем виде выглядит следующим образом (11)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{11}$$

Функция ошибок может быть разложена в ряд Тейлора следующим образом (12).

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \tag{12}$$

Для функции $\mathrm{e}^{x^2} * \operatorname{erf}(x)$ имеем следующее разложение (13).

$$e^{x^2} \operatorname{erf}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} x^{2n+1} \tag{13}$$

В формуле (13) выражение $\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)$ обозначает гамма-функцию.

Источник: [1] глава 5.2.9 пункт 18.

Область сходимости: ряд (13) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

11. xmb_Jb_two_series

Данный шаблон используется для разложения в ряд Маклорена функции $x^{-b} J_b(2x)$, где $J_b(2x)$ – функция Бесселя первого рода порядка b. Фунция Бесселя задается следующим образом (14).

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - b^2) y = 0 \tag{14}$$

Где b – порядок.

Функция Бесселя первого рода раскладывается в ряд Маклорена следующим образом (15).

$$J_b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+b+1)} \, x^{2n+b} \tag{15}$$

Тогда для функции $x^{-b} J_b(2x)$ имеем разложение (16).

$$x^{-b}J_b(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+b+1)} x^{2n} \tag{16}$$

Источник: [1] глава 5.2.10 пункт 7.

Область сходимости: ряд (16) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

12. half_asin_two_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{2}\arcsin(2x)$. Данный ряд выводится следующим образом (17).

$$\frac{1}{2}\arcsin(2x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} \tag{17}$$

Источник: [1] глава 5.2.13 пункт 10.

Область сходимости: ряд (17) сходится для всех $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

13. inverse_1mx_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{1-x}$. Данный ряд имеет следующий вид (18).

$$\frac{1}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{18}$$

Область сходимости: ряд (18) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

14. x_1mx_squared_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{x}{(1-x)^2}$. Данный ряд выводится следующим образом.

Из (18) имеем следующее разложение (19).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{19}$$

Продифференцировав (19), получим (20).

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ и } \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \tag{20}$$

Тогда имеем соотношение (21).

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \tag{21}$$

Итак, получаем следующее выражение для искомого ряда (22).

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x * \frac{1}{(1-x)^2} = x * \sum_{n=1}^{\infty} n * x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \tag{22}$$

Область сходимости: ряд (22) сходится для всех $x \in (-1, 1)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

15. erf_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(x)$. Функция erf(x) – функция ошибок Гаусса, которая определяется следующим образом (23).

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{23}$$

Разложение в ряд Маклорена для этой функции имеет вид (24).

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \tag{24}$$

Тогда для искомой функции получаем (25).

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \tag{25}$$

Область сходимости: ряд (25) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

16. m_fact_1mx_mp1_inverse_series

Данный шаблон используется для имплементации ряда Маклорена функции $\frac{m!}{(1-x)^{m+1}}$. Данный ряд выводится следующим образом.

Формула для обобщенного биномиального ряда записывается в виде (26).

$$\frac{1}{(1-z)^{\beta+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\beta}{n} z^n \tag{26}$$

Для искомой функции получим следующее выражение (27).

$$\frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = m! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} x^n = m! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m! * n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} \tag{27}$$

Область сходимости: ряд (27) сходится для всех $x \in (-1, 1)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

17. inverse_sqrt_1m4x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$. Данный ряд выводится следующим образом (28).

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} (-4x)^n =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, 2^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n \qquad (28)$$

Область сходимости: ряд (28) сходится для всех $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

18. one_twelfth_3x2_pi2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $\frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2)$.

Функция $f(x) = \frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2)$ – четная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только косинусы. Разложение четной функции по косинусам имеет вид (29).

$$f(x) = \frac{a_n}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \qquad (29)$$

Тогда для искомой функции имеем следующее разложение (30).

$$\frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \qquad (30)$$

Область сходимости: ряд (30) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

19. one_twelfth_x2_pi2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $\frac{x}{12}(x^2 - \pi^2)$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \frac{x}{12}(x^2 - \pi^2)$ является нечетной, а значит в ее разложении будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,, b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx \tag{31}$$

Таким образом, для нашего ряда имеем следующее разложение (32).

$$\frac{x}{12}(x^2 - \pi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx) \tag{32}$$

Область сходимости: ряд (32) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

20. ln2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $\ln(2)$ в числовой ряд. Разложение выводится следующим образом (33).

$$\ln(2) = \ln(1+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \tag{33}$$

Сходимость: ряд (33) сходится условно, не абсолютно.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

21. one_series

Существует множество способов разложить 1 в ряд. В данном шаблоне 1 представляется в виде ряда (34)

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{34}$$

Данный ряд выводится следующим образом. Рассмотрим соотношение (35).

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \tag{35}$$

Тогда при суммировании на бесконечности получим (36).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + .. \tag{36}$$

Все внутренние члены взаимно сокращаются и выражении принимает вид (37).

$$1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1 \tag{37}$$

Сходимость: ряд (34) сходится абсолютно.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

22. minus_one_quarter_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $-\frac{1}{4}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (38).

$$-\frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)} \tag{38}$$

Источник: [1] глава 5.1.7 пункт 4.

Сходимость: сходится (38) абсолютно.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

23. pi_3_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{3}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (39).

$$\frac{\pi}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)(4n+1)} \tag{39}$$

Источник: [1] глава 5.1.17 стр. 537 номер 7.

Сходимость: ряд (39) сходится.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

24. pi_4_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{4}$ в числовой ряд. Разложение выводится следующим образом: для начала воспользуемся разложением арктангенса в ряд Маклорена (40).

$$arctg(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (40)$$

При подстановке $x = \frac{\pi}{4}$ получим (41).

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (41)$$

Сходимость: ряд (41) сходится.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

25. pi_squared_6_minus_one_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^2}{6} - 1$ в числовой ряд. Для вывода данного разложения воспользуемся разложением для 1 из пункта 21 и рядом Эйлера (42).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (42)$$

Итак, получим следующее выражение для искомой функции (43).

$$\frac{\pi^2}{6} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \quad (43)$$

Сходимость: ряд (43) сходится.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

26. three_minus_pi_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $3 - \pi$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (44).

$$3 - \pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)(2n+1)} \quad (44)$$

Источник: [1] глава 5.1.16 стр. 535 пункт 12.

Сходимость: ряд (44) сходится абсолютно.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

27. one_twelfth_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{1}{12}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (45).

$$\frac{1}{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \quad (45)$$

Источник: [1] глава 5.1.18 стр. 538 пункт 1.

Сходимость: ряд (45) сходится.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

28. eighth_pi_m_one_third_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (46).

$$\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \tag{46}$$

Источник: [1] глава 5.1.18 стр. 538 пункт 2.

Сходимость: ряд (46) сходится абсолютно.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

29. one_third_pi_squared_m_nine_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^2-9}{3}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (47).

$$\frac{\pi^2 - 9}{3} = \frac{1}{n^2(n+1)^2} \tag{47}$$

Источник: [1] глава 5.1.21 стр. 541 пункт 6.

Сходимость: ряд (47) сходится абсолютно.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

30. four_ln2_m_3_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $4 * \ln(2) - 3$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (48).

$$4 * \ln(2) - 3 = \frac{(-1)^n}{n^2(n+1)^2} \tag{48}$$

Источник: [1] глава 5.1.21 стр. 541 пункт 7.

Сходимость: ряд (48) сходится.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

31. exp_m_cos_x_sinsin_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в тригонометрический ряд функции $e^{-\cos(x)} * \sin(\sin(x))$. Разложение имеет следующий вид (49).

$$e^{-\cos(x)}\sin(sin(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n!} \qquad (49)$$

Источник: [1] глава 5.4.7 стр. 581 пункт 2

Область сходимости: ряд (49) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

32. pi_four_minus_ln2_halfed_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $\frac{\pi}{4} - -\frac{\ln(2)}{2}$ в числовой ряд. Данный ряд имеет следующий вид (50).

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n} \qquad (50)$$

Источник: [1] глава 5.1.2 стр. 526 пункт 4.

Сходимость: ??

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

33. five_pi_twelve_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{5\pi}{12}$ в числовой ряд. Данный ряд имеет следующий вид (51).

$$\frac{5\pi}{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{3}}}{2n+1} \qquad (51)$$

Источник: [1] глава 5.1.4 стр. 528 пункт 5.

Сходимость: ??

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

34. x_two_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $\frac{x}{2}$ в числовой ряд. Рассмотрим разложение $\frac{1}{2}$ в числовой ряд (52).

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \qquad (52)$$

Тогда для $\frac{x}{2}$ имеем (53).

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(2n+1)(2n+3)} \qquad (53)$$

Источник: ряд (52) в [1] глава 5.1.9 стр. 531 пункт 1.

Сходимость: ряд (53) сходится абсолютно для любого x $\in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

35. pi_six_min_half_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$ в числовой ряд. Данный ряд имеет следующий вид (54).

$$\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(6n+5)(6n+7)} \qquad (54)$$

Источник: [1] глава 5.1.13 стр. 534 пункт 7.

Сходимость: ряд (54) сходится абсолютно.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

36. x_two_throught_squares_series

Данный шаблон является вторым вариантом имплементации разложения функции $\frac{x}{2}$ в числовой ряд. Рассмотрим другой вариант разложения $\frac{1}{2}$ в числовой ряд (55).

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 1}{4n^4 + 1} \tag{55}$$

Тогда для $\frac{x}{2}$ имеем (56).

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x * (2n^2 - 1)}{4n^4 + 1} \tag{56}$$

Источник: ряд (55) в [1] глава 5.1.27 стр. 552 пункт 15.

Сходимость: ряд (56) сходится абсолютно для любого x $\in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

37. minus_one_ned_in_n_series

Данный шаблон используется для имплементации ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} * x$. Сумма ряда определяется следующим образом (57).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} = -0.78343051 \tag{57}$$

Источник: ряд (57) в [1] глава 5.1.30 стр. 553 пункт 2.

Умножая на x получим (58).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} * x = -0.78343051 * x \tag{58}$$

Сходимость: ряд (58) сходится для любого x $\in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

38. minus_one_n_fact_n_in_n_series

Данный шаблон используется для имплементации ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n} * x$. Сумма ряда определяется следующим образом (59).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n} = -0.65583160 \tag{59}$$

Источник: ряд (59) в [1] глава 5.1.30 стр. 554 пункт 4

Умножая на x получим (60).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n} * x = -0.65583160 * x \tag{60}$$

Сходимость: ряд (58) сходится для любого x $\in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

39. ln_x_plus_one_x_minus_one_halfed_series

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Данный ряд выводится следующим образом.

Для начала, преобразуем исходную функцию (61).

$$\frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n+1} + 1) * \frac{x^n}{n}\right) \tag{61}$$

Заметим, что в выражении (61) при нечетных n сумма $(-1)^{n+1} + 1$ будет давать 0, при четных 2. Значит, можем представить этот ряд в виде (62).

$$\frac{1}{2} * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 * x^{2n+1}}{2n+1} \tag{62}$$

Перемножая, получаем искомое разложение (63).

$$\frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{63}$$

Источник: ряд (63) представлен в [1] глава 5.2.4 стр. 557 п. 8.

Область сходимости: ряд (63) сходится для всех $x \in (-1, 1)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

40. two_arcsin_square_x_halfed_series

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $2\arcsin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Данный ряд выводится следующим образом. Рассмотрим разложение функции арксинуса в ряд Маклорена (64).

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)} \tag{64}$$

Применяя произведение Коши двух степенных рядов, получим (65).

$$\arcsin^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2} \tag{65}$$

Далее, подставим в (65) $\frac{x}{2}$ вместо x и домножим на 2 (66).

$$2\arcsin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2} \tag{66}$$

Источник: ряд (66) представлен в [1] глава 5.2.14 стр. 567 п. 3.

Область сходимости: ряд (66) сходится для всех $x \in [-2, 2]$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

41. pi_squared_twelve_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^2}{12}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (67).

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \tag{67}$$

52. pi_8_cosx_square_minus_1_div_3_cosx

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\left(\frac{\pi}{8}\right) * \cos(x)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) * \cos{(x)}$. Данный ряд выводиться следующим образом (68).

$$\left(\frac{\pi}{8}\right) * \cos(x)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) * \cos(x) =$$

$$\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{pi\pi}{16} + \frac{1}{6}\right) * x^2 + \left(\frac{\pi}{32} - \frac{1}{72}\right) * x^4 + \cdots + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}\right) * \left(-\frac{1}{2}\right)^n * x^{n*2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}\right) * \left(-\frac{1}{2}\right)^n * x^{n*2} \tag{68}$$

Область сходимости: ряд (68) сходится при $x \in (-2; 2)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

53. sqrt_oneminussqrtoneminusx_div_x

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sqrt{(1 - \sqrt{1-x})/x}$. Данный ряд выводиться следующим образом (69).

$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x}{8\sqrt{2}} + \frac{7x^2}{128\sqrt{2}} + \frac{33x^3}{1024\sqrt{2}} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!x^n}{2^{4n}\sqrt{2}(2n)!(2n+1)!} \tag{69}$$

Область сходимости: ряд (69) сходится при $x \in [-1; 1]$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

54. one_minus_sqrt_1minus4x_div_2x

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Данный ряд выводиться следующим образом (70).

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + \cdots + (-1)^n 2^{1+2n} \binom{\frac{1}{2}}{1+n} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{1+2n} \binom{\frac{1}{2}}{1+n} x^n \tag{70}$$

Область сходимости: ряд (70) сходится при $x \in (-\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

55. arcsin_x_minus_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\arcsin(x) - x$. Данный ряд выводиться следующим образом (71).

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! * x^{2n+1}}{(2n)!! * (2n+1)} \tag{71}$$

Перенося x в левую сторону, получим (72).

$$\arcsin(x) - x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! * x^{2n+1}}{(2n)!! * (2n+1)} \tag{72}$$

Область сходимости: ряд (72) сходится при $x \in [-1; 1]$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

56. pi_x_minus_x_square_square_minus_three_pi_x_plus_two_pi_square_

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $f(x) = \begin{cases} \pi * x - x^2, 0 < x < \pi \\ x^2 - 3\pi x + 2\pi\text{^}2,\ \pi < x < 2\pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} \pi * x - x^2, 0 < x < \pi \\ x^2 - 3\pi x + 2\pi\text{^}2,\ \pi < x < 2\pi \end{cases}$ – нечётная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид (73).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(xn) \tag{73}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (74).

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin(nx)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (x^2 - 3\pi x + 2\pi^2) \sin(nx)\, dx = \\ = -2\frac{2(-1)^n - 2}{\pi n^3} \tag{74}$$

Итого, для нашей функции имеем следующее разложение (75).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)((-1)^n - 1)}{\pi n^3} \sin(nx) \tag{75}$$

Область сходимости: ряд (75) сходится абсолютно при $x \in (-\frac{\pi}{2n}; \frac{\pi}{2n})$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

57. abs_sin_x_minus_2_div_pi_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $\begin{cases} sin(x) - \frac{2}{\pi}, 0 \leq\ x \leq\ \pi \\ -sin(x) - \frac{2}{\pi}, \pi \leq\ x \leq\ 2\pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} sin(x) - \frac{2}{\pi}, 0 \leq\ x \leq\ \pi \\ -sin(x) - \frac{2}{\pi}, \pi \leq\ x \leq\ 2\pi \end{cases}$ – чётная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только косинусы. Разложение четной функции по косинусам имеет следующий вид (76).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \tag{76}$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (77).

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = -\frac{2((-1)^n+1)}{\pi n^2 - \pi} \tag{77}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (78).

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2((-1)^n + 1)}{\pi n^2 - \pi} \cos(nx) \tag{78}$$

Область сходимости: ряд (78) сходится при $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

58. pi_minus_3pi_4_and_pi_minus_x_minus_3pi_4_series

Данный шаблон используется для реализации разложения функции $f(x) = \begin{cases} \pi - \frac{3\pi}{4}, -\pi < x < 0 \\ \pi - x - \frac{3\pi}{4}, 0 \leq x \leq\ \pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} \pi - \frac{3\pi}{4}, -\pi < x < 0 \\ \pi - x - \frac{3\pi}{4}, 0 \le x \le \pi \end{cases}$ – общего вида. Разложение функции общего вида в ряд Фурье имеет следующий вид (79).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{79}$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (80).

$$\begin{gathered} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) \cos(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\pi - x - \frac{3\pi}{4}\right) \cos(nx)\, dx = \\ = 0 - \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \end{gathered} \tag{80}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (81).

$$\begin{gathered} b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) \sin(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\pi - x - \frac{3\pi}{4}\right) \sin(nx)\, dx = \\ = \frac{(-1)^n - 1}{4n} + \frac{3(-1)^n + 1}{4n} = \frac{2(-1)^n}{4n} \end{gathered} \tag{81}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (82).

$$f(x) = -\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\right) \cos(nx) + \left(\frac{2(-1)^n}{4n}\right) \sin(nx) \tag{82}$$

Область сходимости: todo

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

59. minus_3_div_4_or_x_minus_3_div_4_series

Данный шаблон используется для реализации разложения периодической функции $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}, -3 \le x \le 0 \\ x - \frac{3}{4},\ 0 < x < 3 \end{cases}$ с периодом T=6 в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}, -3 \le x \le 0 \\ x - \frac{3}{4},\ 0 < x < 3 \end{cases}$ – общего вида. Разложение функции общего вида имеет следующий вид (83).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{nx\pi}{3}\right) + b_n \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right) \right) \quad (83)$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (84).

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{3} f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{3}\right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} f(x) \cos\left(\frac{xn\pi}{3}\right) dx = \\ &= -\frac{3 \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right)}{4n\pi} + \frac{3(-1)^n - 3}{\pi^2 n^2} \end{aligned} \quad (84)$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (85).

$$b_n = \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{3} f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right) dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} f(x) \sin\left(\frac{xn\pi}{3}\right) dx = -\frac{12(-1)^n}{4\pi n} \quad (85)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (86).

$$f(x) = -\frac{3}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \left(-\frac{3 \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right)}{4n\pi} + \frac{3(-1)^n - 3}{\pi^2 n^2} \right) \cos\left(\frac{nx\pi}{3}\right) + \\ \left(-\frac{12(-1)^n}{4\pi n} \right) \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \quad (86)$$

Область сходимости: todo

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

60. ten_minus_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения периодической функции $f(x) = 10 - x, 5 < x < 15$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = 10 - x,\ 5 < x < 15$ – нечётная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид (87).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{xn\pi}{5}\right) \tag{87}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (88).

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{5}^{15}(10 - x)\sin\left(\frac{nx\pi}{5}\right)dx = \frac{10(-1)^n}{\pi n} \tag{88}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (89).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(-1)^n}{\pi n} \sin\left(\frac{xn\pi}{5}\right) \tag{89}$$

Область сходимости: ряд (89) сходится при $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

61. x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения периодической функции $f(x) = x, -\pi < x < \pi$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = x, -\pi < x < \pi$ – нечётная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид (90).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(xn) \tag{90}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (91).

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x)\sin(xn)\,dx = -\frac{2(-1)^n}{n} \tag{91}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (92).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2(-1)^n}{n}\right)\sin(xn) \tag{92}$$

Область сходимости: ряд (92) сходится при x ∈ (-∞; +∞)

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

62. minus_x_minus_pi_4_or_minus_pi_4_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $f(x) = \begin{cases} -x, -\pi < x \le 0 \\ 0,\ 0 < x < \pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} -x, -\pi < x \le 0 \\ 0,\ 0 < x < \pi \end{cases}$ – общего вида. Разложение функции общего вида имеет следующий вид (93).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \tag{93}$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (94).

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \tag{94}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (95).

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{(-1)^n}{n} \tag{95}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (96).

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\right)\cos(nx) + \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\sin(nx) \tag{96}$$

Область сходимости: todo

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

63. one_div_two_minus_x_multi_three_plus_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Лорана функции $\frac{1}{(2-x)(3+x)}$. Данный ряд выводиться следующим образом (97).

$$\frac{1}{(2-x)(3+x)} = \frac{1}{6} + \frac{x}{36} + \frac{7x^2}{216} + \cdots + \frac{1}{5}x^n\left(6^{-1-n}((-1)^n 2^{1+n} + 3^{1+n})\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}x^n\left(6^{-1-n}((-1)^n 2^{1+n} + 3^{1+n})\right) \tag{97}$$

Область сходимости: ряд (97) сходится при $x \in (-2; 2)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

64. si_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt$. Данный ряд выводиться следующим образом (98).

$$Si(x) = x - \frac{x^3}{3*3!} + \frac{x^5}{5*5!} - \frac{x^7}{7*7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}x^{2n+1} \tag{98}$$

Область сходимости: ряд сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

65. Ci_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt$. Данный ряд выводиться следующим образом (99).

$$Ci(x) = \gamma + lnx - \frac{x^2}{2 * 2!} + \frac{x^4}{4 * 4!} - \frac{x^6}{6 * 6!} + \cdots = \gamma + lnx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(2n)} x^{2n} \quad (99)$$

Где γ – постоянная Эйлера – Маскерони. Её можно представить в следующем виде (100).

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right) \quad (100)$$

Область сходимости: ряд (99) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

68. xsquareplus3_div_xsquareplus2multix_minus_1_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{x^2+3}{x^2+2x} - 1$. Данный ряд выводиться следующим образом (101).

$$\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x} - 1 = \frac{3}{2x} - \frac{7}{4} + \frac{7x}{8} - \frac{7x^2}{16} + \frac{7x^3}{32} + \cdots = \sum_{n=-1}^{\infty} -7(-1)^n 2^{-2-n} x^n \quad (101)$$

Область сходимости: ряд (101) сходится при $x \in (-2; 2)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

69. arcsin_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\arcsin(x)$. Данный ряд имеет следующий вид (102).

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! * x^{2n+1}}{(2n)!! * (2n+1)} \tag{102}$$

Область сходимости: ряд (102) сходится при $x \in [-1; 1]$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

70. arctg_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\mathrm{arctg}\,(x)$. Данный ряд имеет следующий вид (103).

$$\mathrm{arctg}(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \tag{103}$$

Область сходимости: ряд (103) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

73. sqrt_1plusx_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sqrt{1+x}$. Данный ряд имеет следующий вид (104).

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{\mathrm{x}}{2} - \frac{\mathrm{x}^2}{8} + \frac{\mathrm{x}^3}{16} - \frac{5\mathrm{x}^4}{128} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!\, x^n}{(1-2n)(n!)^2 4^n} \tag{104}$$

Область сходимости: ряд (104) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

78. pi_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа π в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (105).

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{12}(-3)^{-n}}{2n+1} \tag{105}$$

Область сходимости: ряд (105) сходится

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

80. arctg_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции arctg (x^2). Данный ряд имеет следующий вид (106).

$$\mathrm{arctg}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{14}}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{2n+1} \tag{106}$$

Область сходимости: ряд (106) сходится при $x \in [-1; 1]$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

82. sin_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции sin (x^2) . Данный ряд имеет следующий вид (107).

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} \tag{107}$$

Область сходимости: ряд (107) сходится при $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

83. arctg_x3_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции arctg (x^3) . Данный ряд имеет следующий вид (108).

$$\operatorname{arctg}(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{3} + \frac{x^{15}}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+3}}{2n+1} \tag{108}$$

Область сходимости: ряд (108) сходится при $x \in [-1; 1]$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

Список литературы

1. Прудников А. П. Интегралы и Ряды. В 3 т. Т. 1. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев; Издательская фирма “Физико-математическая литература”. – Москва, 2002. – 631с. ISBN 5-9221-0323-7.