Оглавление

Введение

Метод экстраполяции Ричардсона, разработанный Льюисом Фраем Ричардсоном в начале XX века, представляет собой фундаментальный аппарат повышения точности численных вычислений и ускорения сходимости последовательностей в вычислительной математике.Основная цель метода заключается в эффективном оценивании предела последовательности или значения суммы ряда, когда исходная последовательность частичных сумм или приближений сходится медленно.

Пусть задана последовательность A(h), зависящая от параметра h, такая что:

$$A(h) = A + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \cdots + a_k h^{p_k} + o(h^{p_{k+1}})$$

где A — искомый предел, a_i— неизвестные коэффициенты, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ — известные показатели скорости убывания погрешности, причём $p_i \in R^+$. Метод Ричардсона позволяет последовательно исключать члены погрешности, начиная с младших степеней h, путём комбинации вычислений при различных значениях параметра.

Основная идея метода заключается в построении новой последовательности $A(y, y')(\mathrm{h})$ такой, что:

$$A(y, y') = \frac{A(h) - cA(qh)}{1 - c}$$

где c=q^{p_1}, q $\in (0,1)$ — параметр измельчения. Нетрудно показать, что:

$$A(y, y')(\mathrm{h}) = A + \ o(h^{p_2})$$

то есть погрешность новой последовательности имеет более высокий порядок малости. Процесс может быть продолжен рекуррентно для исключения последующих членов погрешности.

Важным преимуществом метода является его общность и простота реализации, однако он требует априорного знания показателей p_i. Метод находит применение в численном дифференцировании и интегрировании, решении дифференциальных уравнений и других задачах вычислительной математики [2].

Постановка математической задачи

Дано: медленно сходящаяся последовательность (S_n), где (S_n) – частичные суммы ряда

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{1}$$

Условие сходимости: Последовательность (S_n) сходится к пределу S (т.е. $\lim_{n\to\infty} s_n = s$), но скорость сходимости низкая. Предполагается, что погрешность $S_n - S$ допускает разложение по степеням.

Цель: Построение на основе исходной последовательности $\{S_n\}$новой последовательности, сходящейся к S существенно быстрее, путем последовательного исключения старших членов асимптотического разложения погрешности с помощью экстраполяции Ричардсона.

Метод экстраполяции Ричардсона.

Во многих проблемах бесконечную последовательность *{Sn}* можно соотнести с функцией *A(y)*. Она определена для $y \subset (0,b]$ $(b>0)$, и y может быть как дискретным, так и непрерывным параметром.

После чего справедливо отношение $A_n = A(y_n)$ $(n\subset 0)$ для некоторой монотонно убывающей последовательности $\{y_n\}\subset(0,b]$, которая удовлетворяет

$$S_n = A(y_n), \qquad \lim_{n\to\infty} A_n = 0 \tag{2}$$

Тогда задача нахождения предела последовательности становится эквивалентной задаче нахождения предела функции:

$$\lim_{y\to 0+} A(y) = \lim_{n\to\infty} A_n = A \tag{3}$$

Рассматривать функцию намного удобней, в отличие от последовательностей, так как существует обширный математический аппарат, который может помочь нам при анализе поведения функции.
В частности, во многих случаях функция *A(y)* может иметь хорошо определённое асимптотическое разложение при $y\to 0+$.

Предположим, что функция *A(y)* допускает при $\lim\limits_{y\to 0+} A(y)$ асимптотическое разложение следующего вида:.

$$A(y) = S + \sum_{k=1}^{s} a_k y^{\sigma_k} + o(y^{\sigma_{s+1}}) \tag{4}$$

В нашем случае пусть A(y) удовлетворяет равенству для некоторого $s\subset \mathbb{N}_0$, где:

$\{a_k\}$ - неизвестные коэффициенты, не зависящие от y

$\{\sigma_k\}$ - известная последовательность комплексных чисел такая, что:

$$\sigma_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad Re(\sigma_1) < Re(\sigma_2) < \cdots < Re(\sigma_{s+1}) \tag{5}$$

Если данное равенство справедливо для любого s⊂ и $Re\ \sigma 1 < \mathrm{Re}\ \sigma 2 < \dots$ так, что:

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = +\infty \tag{6}$$

Тогда у A(y) есть асимптотическое разложение:

$$A(y) \sim S + \sum_{k=1}^{\infty} a_k y^{\sigma_k} \text{ при } y \to 0+ \qquad (7)$$

Замечание: Ряд в правой части может расходиться; важна лишь асимптотическая природа разложения. Так как σ_k нам известны, α_k нам неизвестны, и, в общем случае, они нам не нужны.
Из разложения (4) следует, что:

$$A(y) - S = o(y^{\sigma_1}) \qquad (8)$$

Для получения более качественной аппроксимации к S нужно избавиться от y^{σ_1} с помощью метода экстраполяции Ричардсона..

Возьмем константу $\omega \subset (0,1)$ и $y' = \omega y$.

Тогда из разложения (4) получаем:

$$A(y') = S + \sum_{k=1}^{s} a_k \omega^{\sigma_k} y^{\sigma_k} + o(y^{\sigma_{s+1}}) \text{ при y} \to 0+ \qquad (9)$$

Домножим на ω^{σ_1}:

$$A(y')\omega^{\sigma_1} = S\omega^{\sigma_1} + \sum_{k=1}^{s} a_k \omega^{\sigma_k} \omega^{\sigma_1} y^{\sigma_k} + o(y^{\sigma_{s+1}}) \text{ при y} \to 0+ \qquad (10)$$

Вычитая (10) из (9), получаем:, получим:

$$A(y') - A(y')\omega^{\sigma_1} = S(1 - \omega^{\sigma_1}) + \sum_{k=1}^{s} a_k (\omega^{\sigma_k} - \omega^{\sigma_1}) y^{\sigma_k} + o(y^{\sigma_{s+1}}) \qquad (11)$$

Поделим на $1 - \omega^{\sigma_1}$:

$$\frac{A(y') - A(y')\omega^{\sigma_1}}{1 - \omega^{\sigma_1}} = S + \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{\omega^{\sigma_k} - \omega^{\sigma_1}}{1 - \omega^{\sigma_1}} y^{\sigma_k} + o(y^{\sigma_{s+1}}) \qquad (12)$$

Пусть:

$$A(y, y') = \frac{A(y') - A(y')\omega^{\sigma_1}}{1 - \omega^{\sigma_1}} \tag{12}$$

Тогда мы получаем новую аппроксимацию:

$$A(y, y') = S + \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{\omega^{\sigma_k} - \omega^{\sigma_1}}{1 - \omega^{\sigma_1}} y^{\sigma_k} + o(y^{\sigma_{s+1}}) \tag{13}$$

Причем:

$$A(y, y') - S = 0(y^{\sigma_2}) \text{ при } y \to 0 + \tag{14}$$

Так как $Re_{\sigma_1} < Re_{\sigma_2}$, то полученная аппроксимация будет лучше приближать S.

Так можно продолжать много и много раз, получаю аппроксимации вида:

$$A\left(y, y', \dots, y^{(l)}\right) = A + \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{\omega^{\sigma_k} - \omega^{\sigma_1}}{1 - \omega^{\sigma_1}} \frac{\omega^{\sigma_k} - \omega^{\sigma_1}}{1 - \omega^{\sigma_2}} \dots \frac{\omega^{\sigma_k} - \omega^{\sigma_1}}{1 - \omega^{\sigma_{l-1}}} y^{\sigma_k} + o(y^{\sigma_{s+1}}) \tag{15}$$

где:

$$A\left(y, y', \dots, y^{(l)}\right) - A = 0(y^{\sigma_l}) \text{ при } y \to 0 + \tag{16}$$

При каждой итерации строится новая аппроксимация, которая приближает S все лучше и лучше. Для экстраполяции Ричардсона существует рекурсивный алгоритм, который выводится из равенства (12) через индукцию.

Пусть $\omega \in (0,1), y_0 \in (0, b], y_m = \omega^m y_0$. Очевидно, что $\{y_m\}$- убывающая последовательность, стремящаяся к нулю.

Алгоритм:

1. Положим $A_0^{(j)} = A_{(y_j)}, j \in \mathbb{N}_0$
2. Пусть c_n=ω^{σ_n}, тогда:

$$A_n^{(j)} = \frac{A_{n-1}^{(j+1)} - c_n A_{n-1}^{(j)}}{1 - c_n}, j \in \mathbb{N} \quad (17)$$

Из рекуррентного алгоритма видно, что $A_n^{(j)}$организуют некую структуру, которую можно организовать в виде таблицы:

$$\begin{array}{ccccccc}
A_0^{(0)} & & & & & & \\
& \searrow & & & & & \\
A_0^{(1)} & \rightarrow & A_1^{(0)} & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & & \\
A_0^{(3)} & \rightarrow & A_1^{(1)} & \rightarrow & A_2^{(0)} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots &
\end{array}$$

Рисунок 1 – Схема Ромберга

Схема, представленная выше называется таблицей Ромберга [1]. Стрелки означают поток вычислений. Стрелки указывают направление вычислений. Диагональные элементы $A_n^{(j)}$ часто дают наилучшее приближение к пределу S.

Grep

Несмотря на эффективность экстраполяции Ричардсона, область её применения ограничена необходимостью точного знания показателей степеней σ_k в асимптотическом разложении и его специфической структурой. Для преодоления этих ограничений был разработан обобщенный метод экстраполяции GREP (Generalized Richardson Extrapolation Process) [3], применимый к более широкому классу последовательностей.

Пусть A(y) представима в виде суммы асимптотических разложений:

$$A(y) \sim A + \sum_{i=0}^{\infty} f_i(y)\,, y \to 0+ \tag{18}$$

где $f_i(y)$ - гладкие функции, обладающие известной асимптотической структурой. В отличие от метода Ричардсона, где неизвестные коэффициенты a_k нужно было исключать, здесь используются именно функции $f_i(y)$, которые могут иметь разные темпы роста.

Возьмём убывающую положительную последовательность $\{y_l\} \subset (0, b]$ такую, что $\lim_{l\to\infty} y_l = 0$.

Пусть $n \equiv (n_1, n_2, \dots, n_m)$, где $n_i \in \mathbb{N}_0$.

Тогда аппроксимации $A_n^{(m,j)}$ к пределу A определены через систему линейных уравнений:

$$A(y_l) = A_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^{m}\left[\phi_k(y_l)\sum_{i=0}^{n_k-1}\bar{\beta}_{ki}y_l^{ir_k}\right], j \le l \le j+N, N = \sum_{k=l}^{m} n_k \tag{19}$$

Где:

- $\bar{\beta}_{ki}$ – вспомогательные неизвестных N коэффициентов
- $\sum_{i=0}^{-1}\overline{\beta_{ki}} \equiv 0$, что дает нам $A_{(0,\dots,0)}^{(m,j)} = A(y_j)\forall j$
- $r_k \in \mathbb{R}_{>0}$ – фиксированные показатели
- $\phi_k(y) -$ функции от y

Видно, что формула получена из определения расширения функции, принадлежащей классу $F^{(m)}$, заменой $\beta_k(y)$ на асимптотическое расширение, которые мы отрезаем по $\beta_{k,n_k-1}y^{(n_k-1)r_k}$.

Данное обобщение экстраполяционного процесса Ричардсона, которое генерирует $A_n^{(m,j)}$, называется GREP$^{(m)}$.

GREP имеет несколько преимуществ перед экстраполяцией Ричардсона:

1. Вместо неизвестных констант a_k теперь неизвестные гладкие функции $\beta_k(y)$, которые обладают асимптотическим расширением, форму которого мы знаем
2. Введены функции $\phi_k(y)$, которые не должны обладать какой-то определённой структурой и потому могут иметь различные темпы роста.
3. Функция A(y) представлена суммой асимптотических расширений.

Благодаря этому GREP имеет несколько преимуществ:

1. Более широкий класс функций, к которым может быть применён метод.
2. Так как в формуле присутствует конечное число функций $\phi_k(y)$, а функции $\beta_k(y)$, в сущности, представляют из себя полиномы, то это позволяет придумать алгоритмы, которые будут эффективными.
3. $\phi_k(y)$ не являются уникальными, а потому они могут быть заменены другими функциями, имеющими расширение той же формы.

GREP также можно расширить на последовательности, у которых асимптотическое расширение функций $\beta_k(y)$ имеет вид:

$$\beta_k(y) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{ki} y^{\tau_{ki}}, y \to 0+ \tag{19}$$

Где $\tau_{ki} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и они известны, также $Re\tau_{k0} < Re\tau_{k1} < \cdots < Re\tau_{ki} \to \infty$ при $i \to \infty$

Это асимптотическое расширение $\beta_k(y)$ можно записать в общей форме:

$$\beta_k(y) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{ki} u_{ki}(y), y \to 0+ \tag{20}$$

Где функции u_{ki} образуют асимптотическую последовательность, т.е. $u_{ki+1}(y) = 0\big(u_{ki}(y)\big)$ при $y \to 0+$.

Тогда расширение GREP примет вид:

$$A(y_l) = A_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^{m} \left[\phi_k(y_l) \sum_{i=0}^{n_k-1} \bar{\beta}_{ki} u_{ki}(y) \right], j \leq l \leq j + N; N = \sum_{k=l}^{m} n_k \quad (21)$$

Нетрудно заметить, что экстраполяционный метод Ричардсона есть ни что иное как расширение GREP[1]:

$$A(y_l) = A_n^{(1,j)} + \phi_1(y_l) \sum_{i=0}^{n} \bar{\beta}_{1i} u_{1i}(y) \quad (22)$$

Возьмем $\phi_1(y) = 1$ и $u_{1i}(y) = y^{\sigma_{ki}}$, получим экстраполяционный метод Ричардсона:

$$A(y_l) = A_n^{(1,j)} + \sum_{i=0}^{n} \bar{\beta}_{1i}\, y^{\sigma_{1i}} \quad (23)$$

Реализация алгоритмов

```
Функция Richardson_Transform(ряд, n, order):
  Вход:
    ряд - исходный ряд, для которого ускоряется сходимость
    n - количество членов частичной суммы
    order - порядок преобразования (не используется в текущей реализации)

  Выход:
    Ускоренная частичная сумма после преобразования Ричардсона

  Если n < 0:
    Вызвать ошибку "отрицательное число на входе"

  Если n == 0:
    Вернуть DEF_UNDEFINED_SUM (по умолчанию 0)

  Создать таблицу e размером 2 x (n + 1), инициализированную нулями

  Заполнить первую строку таблицы e[0] частичными суммами ряда:
  Для i от 0 до n:
    e[0][i] = S_n(i)  // S_n(i) - частичная сумма ряда до i-го члена

  Инициализировать a = 1

  Для l от 1 до n:
    a = a * 4
    b = a - 1
    Для m от l до n:
      // Вычисление преобразования Ричардсона
      e[1][m] = (a * e[0][m] - e[0][m - 1]) / b

    Поменять местами e[0] и e[1]

  Определить результат:
  Если n четное:
    res = e[0][n]
  Иначе:
    res = e[1][n]
```

Если res не является конечным числом:
    Вызвать ошибку "деление на ноль"

Вернуть res

Рисунок 1 – Псевдокод экстраполяции Ричардсон

Вход: $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k}$, n = 4

Выход: При n=4 обычная сумма: 0.5833

После преобразования Ричардсона: 0.9444 (ближе к ln(2))

Рисунок 2 – Пример применения экстраполяции Ричардсон

Функция GREP_Transform(ряд A(y), N, m):
    Вход:
        A(y) – исходная функция или последовательность
        N – число членов для аппроксимации
        m – порядок метода GREP

    Выход:
        A_approx – улучшенная аппроксимация предела

Задать последовательность $\{y_l\}$, где $y_l \to 0$ при $l \to \infty$.

Составить систему уравнений:

$$A(y_l) = A_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^{m}\left[\phi_k(y_l)\sum_{i=0}^{n_k-1} \bar{\beta}_{ki} y_l^{ir_k}\right], j \leq l \leq j+N, N = \sum_{k=l}^{m} n_k$$

Решить полученную систему линейных уравнений относительно коэффициентов $\beta_i(y)$.

Подставить найденные коэффициенты в формулу и вычислить аппроксимацию $A_n^{(m,j)}$.

Вернуть A_approx = $A_n^{(m,j)}$.

Рисунок 3 – Псевдокод GREP

Вход: $A(y) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{(k)} y^k$, при y → 0

{y_l} = {0.5, 0.25, 0.125}, m = 1

Выход: Полученное значение: A^(1,1) ≈ 0

Истинное значение предела: A = 0 (при y→0 ряд сходится к 0)

Рисунок 4 – Пример применения GREP

Экстраполяция Ричардсона. Дополнительно об аппроксимации.

Экстраполяцию Ричардсона можно рассматривать как общий метод повышения точности приближений, когда известна структура погрешности. Для улучшения аппроксимации, нам потребуется более глубокое понимание структуры погрешности. Поэтому начнём с разложений Тейлора для f(x ± h) вокруг точки x:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)h^k}{k!}, \tag{23}$$

$$f(x-h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f^{(k)}(x)h^k}{k!}, \tag{24}$$

Отсюда получаем (более подробно об этом разложении пишет А. Самарский [2]):

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \frac{n^4}{5!} f^{(5)}(x) + \cdots \tag{25}$$

Перепишем формулу (25) другом виде:

$$L = D(h) + e_2 h^2 + e_4 h^4 + \cdots, \tag{26}$$

Где D – аппроксимация, а $L = f'(x)$ (величина, которую мы хотим аппроксимировать).

Выразим D:

$$D(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \tag{27}$$

При таком выражении D погрешность равна:

$$E = e_2 h^2 + e_4 h^4 + \cdots, \tag{28}$$

где e_i обозначает коэффициент при h^i в формуле (25), также отметим независимость коэффициентов от h. Мы предполагаем, что в общем случае $e_i \neq 0$. Таким образом, мы получили аппроксимацию, основанную на значениях f(x) в точках x±h. Чтобы улучшить её, нам необходимо исключить e_2h^2 из погрешности. Реализовать это можно путем записи аппроксимации, основанной на значениях функции в других точках. Например:

$$L = D(2h) + e_2(2h)^2 + e_4(2h)^4 + \cdots \tag{29}$$

Основная идея состоит в комбинации выражений (29) и (26) для исключения h^2. Заметим, что после вычислений в формуле (29) коэффициент при h^2 будет равен $4e_2$. Для получения аналогичного коэффициента в формуле (26) необходимо умножить обе части выражения на 4.

Вычтем выражения друг из друга и получим:

$$L = \frac{4D(h) - D(2h)}{3} - 4e_4 h^4 + \cdots \tag{30}$$

Таким образом нам удалось повысить точность аппроксимации за счет использования большего числа точек. Этот алгоритм можно продолжать и дальше, каждый раз убирая некоторые слагаемые и, тем самым, увеличивая точность вычисления.

Стоит отметить, что в формуле (29) можно использовать другие точки, к примеру h/2. Благодаря этому можно будет получать аппроксимации, основанные на других точках по схеме, описанной выше. Аналогичное описание алгоритма приведено в статье Дорона Леви [3] (p. 88)

Заключение

Метод Ричардсона позволяет повышать точность приближённых вычислений при наличии информации о степенях погрешности, однако его область применения ограничена. GREP устраняет этот недостаток и применим к более широкому классу последовательностей благодаря учёту функций, чьи свойства при малых y заранее определены. Оба метода находят применение в численном интегрировании, дифференцировании и при решении дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. Лукьяненко М. В. Численные методы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://teach-in.ru/ (дата обращения: 11.04.2025).
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие. – Москва: Наука, 1989. – 432 с.
3. Levy D. Introduction to Numerical Analysis. – Providence: American Mathematical Society, 2012. – P. 88–98.
4. Бахвалов Н. С. Численные методы: учебное пособие. – Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973. – 632 с.