

## Введение

В работе [1] о  $\mathcal{S}$ -трансформации сказано, что выражение для неё предложил Сиди в работе [2] (однако, Сиди не рассматривал  $\mathcal{S}$ -трансформацию как трансформацию последовательности саму по себе [3]).

$\mathcal{S}$ -трансформация впервые была использована для суммирования бесконечных степенных рядов в работе [2]. Она также является мощным инструментом для суммирования расходящихся степенных рядов Стилтеса [3], которые возникают в теории специальных функций и в стационарной теории возмущения в квантовой механике [3].

Наряду с  $\mathcal{S}$ -трансформацией, другим эффективным методом ускорения сходимости и суммирования расходящихся рядов является  $\mathcal{L}$ -трансформация Левина [3, 6], которая нашла широкое применение в вычислительной физике и приборостроении [3].

### Частные случаи $d^{(1)}$ -трансформации

$d^{(1)}$ -трансформация. Заменяем  $R_l^k$  в факториальном  $d^{(m)}$ -преобразовании для бесконечных рядов на  $R_l^{p_k}$  и для упрощения положим  $\alpha = 0$ . При  $m = 1$  эти уравнения принимают вид [4]:

$$A_{R_l} = d_n^{(1,j)} + \omega_{R_l} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\bar{\beta}_l}{R_l^i}, \quad j \leq l \leq j+n; \quad \omega_r = r^\rho a_r,$$

где  $n$  — натуральное число, а  $\rho$  обозначает  $\rho_1$ . Эти уравнения можно решить относительно  $d_n^{(1,j)}$  (для произвольных  $R_l$ ) очень просто и эффективно с помощью  $W$ -алгоритма из [5] следующим образом:

$$\begin{aligned} M_0^{(j)} &= \frac{A_{R_j}}{\omega_{R_j}}, \quad N_0^{(j)} = \frac{1}{\omega_{R_j}}, \quad j \geq 0, \quad \omega_r = r^\rho a_r, \\ M_n^{(j)} &= \frac{M_{n-1}^{(j+1)} - M_{n-1}^{(j)}}{R_{j+n}^{-1} - R_j^{-1}}, \quad N_n^{(j)} = \frac{N_{n-1}^{(j+1)} - N_{n-1}^{(j)}}{R_{j+n}^{-1} - R_j^{-1}}, \quad j \geq 0, \quad n \geq 1. \\ d_n^{(1,j)} &= \frac{M_n^{(j)}}{N_n^{(j)}}, \quad j, n \geq 0. \end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ -преобразование Левина и  $\mathcal{S}$ -преобразование Сиди - два важных метода экстраполяции - частные случаи  $d^{(1)}$ -трансформации. Эти методы являются нелинейными и предназначены для ускорения сходимости последовательностей, которые могут быть представлены в виде асимптотических рядов. Они особенно полезны для последовательностей, которые сходятся медленно или расходятся.

## S-трансформация Сиди

Если положить  $m = 1$  и  $R_l = l + 1$ , а также заменить  $R_l^k$  на  $R_l^{0k}$ , то уравнения в факториальном  $d^{(m)}$ -преобразовании для бесконечных рядов принимают вид [8]:

$$A_r = d_n^{(1,j)} + \omega_r \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\bar{\beta}_j}{(r)_i}, \quad J \leq r \leq J + n, \quad \omega_r = r^\rho a_r, \quad J = j + 1. \quad (1)$$

Полученное факториальное  $d^{(m)}$ -преобразование является S-преобразованием Сиди. Обозначим  $d_n^{(1,j)}$  в (1) как  $S_n^{(j)}$ . Тогда  $S_n^{(j)}$  имеет следующую известную явную формулу, приведённую в [8]:

$$S_k^{(j)} = \frac{\Delta^n \left( (J)_{n-1} \frac{A_J}{\omega_J} \right)}{\Delta^n \left( (J)_{n-1} \frac{1}{\omega_J} \right)} = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (J+i)_{n-1} A_{J+i}}{\omega_{J+i}}}{\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (J+i)_{n-1}}{\omega_{J+i}}}, \quad J = j + 1. \quad (2)$$

*Вывод формулы для S-трансформации.* Приведём вывод S-трансформации из [2]. Пусть дана модельная последовательность:

$$S_n = S + \omega_n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_j}{(n + \beta)_j}, \quad (3)$$

где  $\beta$  – положительный параметр, чья область определения определена символом Почхаммера (влияние параметра не изучено до конца, зачастую  $\beta$  принимают равным 1). Если известны значения  $S_n, S_{n+1}, \dots, S_{n+k}$ , то уравнение (3) задает систему с  $k + 1$  неизвестными:  $S, c_0, \dots, c_{k-1}$ . Используя метод Крамера, находим решение для неизвестной  $S$ :

$$S = \frac{\begin{vmatrix} S_n & \frac{\omega_n}{(n + \beta)_0} & \frac{\omega_n}{(n + \beta)_1} & \dots & \frac{\omega_n}{(n + \beta)_{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{n+k} & \frac{\omega_{n+k}}{(n + k + \beta)_0} & \frac{\omega_{n+k}}{(n + k + \beta)_1} & \dots & \frac{\omega_{n+k}}{(n + k + \beta)_{k-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{\omega_n}{(n + \beta)_0} & \frac{\omega_n}{(n + \beta)_1} & \dots & \frac{\omega_n}{(n + \beta)_{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \frac{\omega_{n+k}}{(n + k + \beta)_0} & \frac{\omega_{n+k}}{(n + k + \beta)_1} & \dots & \frac{\omega_{n+k}}{(n + k + \beta)_{k-1}} \end{vmatrix}}.$$

Если последовательность  $\{S_n, \dots, S_{n+k}\}$  удовлетворяют уравнению (3), то  $S = S_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n)$ .

Данный способ вычисления громоздкий и не удобен для вычисления на ЭВМ, потому был найден альтернативный способ вычисления  $\mathcal{S}_k^{(n)}$ .

Из уравнения (3) следует, что

$$\frac{S_n - S}{\omega_n} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_j}{(n + \beta)_j}.$$

Умножим обе части на  $(n + \beta)_{k-1}$ :

$$\frac{(n + \beta)_{k-1}[S_n - S]}{\omega_n} = (n + \beta)_{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_j}{(n + \beta)_j},$$

$$\frac{(n + \beta)_{k-1}[S_n - S]}{\omega_n} = \sum_{j=0}^{k-1} c_j (n + j + \beta)_{k-j-1}.$$

Применим к обоим частям оператор  $\Delta^k$ , действующий на  $n$ :

$$\Delta^k \left( \frac{(n + \beta)_{k-1}[S_n - S]}{\omega_n} \right) = 0.$$

Упрощая:

$$S = \frac{\Delta^k \left[ \frac{(n + \beta)_{k-1} S_n}{\omega_n} \right]}{\Delta^k \left[ \frac{(n + \beta)_{k-1}}{\omega_n} \right]}.$$

Применяя формулу для оператора  $\Delta$ , получаем:

$$S = \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta + n + j)_{k-1}}{(\beta + n + j)_{k-1}} \frac{S_{n+j}}{\omega_{n+j}}}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta + n + j)_{k-1}}{(\beta + n + j)_{k-1}} \frac{1}{\omega_{n+j}}}.$$

В итоге получаем репрезентацию  $\mathcal{S}_k^{(n)}$  в виде отношения двух конечных сумм:

$$\mathcal{S}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) = \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta + n + j)_{k-1}}{(\beta + n + k)_{k-1}} \frac{S_{n+j}}{\omega_{n+j}}}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta + n + j)_{k-1}}{(\beta + n + k)_{k-1}} \frac{1}{\omega_{n+j}}}.$$

Множитель  $(\beta + n + k)_{k-1}$  был введён для того, чтобы уменьшить порядок слагаемых в сумме, так как иначе при вычислении на ЭВМ может легко произойти ошибка переполнения. Псевдокод для  $\mathcal{S}$ -преобразования Сиди представлен на Рисунке 1, а пример его применения представлен на Рисунке 2.

**Вход:** бесконечный ряд  $S$  (3), весовая функция  $\omega_n$  (аналогичная (1)), начальный индекс  $j \geq 0$ , порядок трансформации  $k \geq 1$

**Выход:**  $S_k^{(j)}$

# Проверка условия применимости (Теорема 4, см. «раздел Оценки сходимости»)

**if**  $S$  не удовлетворяет условиям (S-0)-(S-2) (см. «раздел Оценки сходимости»):

**return** «Ряд не удовлетворяет условиям Теоремы 4»

**if** веса  $\omega_n$  строго не чередуют знаки:

**return** «Веса не удовлетворяют условиям Теоремы 4»

**else:**

Вычислить частичные суммы  $A_n$  (аналогичные (1))

Вычислить  $J = j + 1$  # (1)

Инициализировать:

Числитель = 0

Знаменатель = 0

**for**  $i$  от 0 до  $k$ :

Вычислить биномиальный коэффициент # (2)

Вычислить символ Почхаммера # (3)

Обновить:

$$\text{Числитель} += \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (J+i)_{n-1} A_{J+i}}{\omega_{J+i}} \# (2)$$

$$\text{Знаменатель} += \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (J+i)_{n-1}}{\omega_{J+i}} \# (2)$$

**return**  $S_k^{(j)} = \text{Числитель} / \text{Знаменатель}$

Рисунок 1. Псевдокод для  $S$ -преобразования Сиди.

**Вход:**  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ,  $\omega_n = n$ ,  $j = 5$ ,  $k = 3$

**Выход:**  $S_k^{(j)} = 0.6931$

Рисунок 2. Пример применения  $S$ -преобразования Сиди.

$\mathcal{S}_k^{(n)}$  можно также вычислить, используя рекуррентное отношение [4], полученное из выведенной формулы. Числитель и частное  $\mathcal{S}_k^{(n)}(\beta, s_n, \omega_n)$  имеют форму:

$$Q_k^{(n)} = \Delta^k Y_k^{(n)},$$

$$Y_k^{(n)}(\beta) = \begin{cases} (n + \beta)^{k-1} \frac{S_n}{\omega_n} \\ (n + \beta)^{k-1} \frac{1}{\omega_n} \end{cases},$$

$$Y_k^{(n)}(\beta) = (\beta + n + k - 2) Y_{k-1}^{(n)}(\beta), \quad k \geq 1, \quad n \geq 0,$$

$$\begin{aligned} Q_k^{(n)}(\beta) &= \Delta^k Y_k^{(n)}(\beta) = \{kE + (n + \beta + k - 2)\Delta\}^{k-1} Y_{k-1}^{(n)}(\beta) = \\ &= \{kE + (n + \beta + K - 2)\Delta\} Q_{k-1}^{(n)}(\beta) = \\ &= (\beta + n + 2k - 2) Q_{k-1}^{(n+1)}(\beta) - (\beta + n + k - 2) Q_{k-1}^{(n)}(\beta). \end{aligned}$$

Такое соотношение работает для:

$$\mathcal{S}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) = \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (\beta + n + k)_{k-1} \frac{S_{n+j}}{\omega_{n+j}}}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (\beta + n + j)_{k-1} \frac{1}{\omega_{n+j}}}.$$

Если же используется более численно стабильная версия, то есть

$$\mathcal{S}_k^{(n)} = \frac{Q_k^{(n)}}{(\beta + n + k)_{k-1}},$$

то рекуррентное отношение принимает вид:

$$\mathcal{S}_{k+1}^{(n)} = \mathcal{S}_k^{(n+1)} - \frac{(\beta + n + k)(\beta + n + k - 1)}{(\beta + n + 2k)(\beta + n + 2k - 1)} \mathcal{S}_{k-1}^{(n)}.$$

$\mathcal{S}$ -преобразование впервые было использовано для суммирования бесконечных степенных рядов. Сравнительное исследование Гротендорста [9] показало, что этот метод является одним из наиболее эффективных для суммирования широкого класса всюду расходящихся степенных рядов.

*Алгоритмы вычисления.* Алгоритмы вычисления  $\mathcal{S}_n^{(j)}$ :

- 1) Прямое использование формулы (2);
- 2) Рекуррентный алгоритм Венигера [4], состоит из следующих шагов:
  - а) инициализация (для  $j = 0, 1, \dots$ ):

$$P_0^{(j)} = \frac{A_j}{\omega_j}, \quad Q_0^{(j)} = \frac{1}{\omega_j}, \quad j = j + 1;$$

- б) рекуррентное вычисление (для  $j = 0, 1, \dots$  и  $n = 1, 2, \dots$ ):

$$U_n^{(j)} = U_{n-1}^{(j+1)} - \frac{(j+n-1)(j+n)}{(j+2n-2)(j+2n-1)} U_{n-1}^{(j)}, \text{ где } U_n^{(j)} \text{ обозначает } P_n^{(j)}, \text{ либо } Q_n^{(j)};$$

с) финальное вычисление:

$$S_n^{(j)} = \frac{P_n^{(j)}}{Q_n^{(j)}}.$$

- 3) Модификация Венигера. Венигер предложил расширение  $\mathcal{L}$ -преобразования, заменив  $r^i$  в (4) на  $(r + \alpha)^i$  для некоторого фиксированного  $\alpha$  [4]. Это приводит к замене множителей  $J^{n-1}$  и  $(J + i)^{n-1}$  в числителе и знаменателе (5) на  $(J + \alpha)^{n-1}$  и  $(J + \alpha + i)^{n-1}$  соответственно. Влияние параметра  $\alpha$  на точность аппроксимаций требует дополнительного исследования.

$\mathcal{L}$  – трансформация Левина

Это преобразование основано на идее устранения главных членов асимптотического разложения последовательности, чтобы улучшить точность оценки её предела. Если выбрать  $R_l = l + 1$  в факториальном  $d^{(m)}$ -преобразовании для бесконечных рядов, то получим [4]:

$$A_r = d_n^{(1,j)} + \omega_r \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\bar{\beta}_j}{r^i}, \quad J \leq r \leq J + n, \quad \omega_r = r^\rho a_r, \quad J = j + 1. \quad (4)$$

Полученное  $d^{(1)}$ -преобразование совпадает с известными  $t$ - и  $u$ -преобразованиями Левина, где  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$  соответственно. Обозначим  $d_n^{(1,j)}$  в (4) как  $\mathcal{L}_n^{(j)}$ . Тогда  $\mathcal{L}_n^{(j)}$  имеет следующий явный вид, приведённый в [6]:

$$\mathcal{L}_n^{(j)} = \frac{\Delta^n \left( J^{n-1} \frac{A_J}{\omega_J} \right)}{\Delta^n \left( J^{n-1} \frac{1}{\omega_J} \right)} = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (J+i)^{n-1} A_{J+i}}{\omega_{J+i}}}{\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (J+i)^{n-1}}{\omega_{J+i}}}; \quad J = j + 1. \quad (5)$$

*Вывод формулы для  $\mathcal{L}$ -трансформации.* Он аналогичен выводу формулы  $\mathcal{S}$ -трансформации [2]. В итоге получаем:

$$\mathcal{L}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) = \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta + n + j)^{k-1} S_{n+j}}{(\beta + n + k)^{k-1} \omega_{n+j}}}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta + n + j)^{k-1} 1}{(\beta + n + k)^{k-1} \omega_{n+j}}}, \quad (6)$$

где  $(\beta + n + j)^{k-1}$  – множитель, введённый в формулу чтобы уменьшить магнитуду слагаемых числителя и знаменателя чтобы понизить риск возникновения ошибки переполнения. Псевдокод для  $\mathcal{L}$ -преобразования Левина представлен на Рисунке 3, а пример его применения представлен на Рисунке 4.



**Вход:** бесконечный ряд  $S(3)$ , тип весовой функции  $\omega_n - t, u$  или  $v$ , начальный индекс  $j \geq 0$ , порядок трансформации  $n \geq 1$

**Выход:**  $\mathcal{L}_n^{(j)}$

```
# Проверка условия применимости (Теорема 3, см. «раздел Оценки сходимости»)
if  $S$  не удовлетворяет условиям (S-0)-(S-2) (см. «раздел Оценки сходимости»)
    return «Ряд не удовлетворяет условиям Теоремы 3»
if выбран тип « $t$ » для  $\omega_n$  и ряд не линейный/факториальный:
    return « $t$ -преобразование неприменимо для данного ряда»
if  $\exists n: a_{n+1} = a_n$ :
    return « $v$ -веса не определены (деление на 0)»
else:
    Вычислить веса для  $n = j, \dots, j + n + 2$ 
    if тип  $\neq$  « $t$ » и веса  $\omega_n$  строго не чередуют знаки:
        return «Веса не удовлетворяют условиям Теоремы 3»
    Вычислить частичные суммы  $A_n$  (аналогичные (4))
    Вычислить Числитель # (5)
    Вычислить Знаменатель # (5)
return  $\mathcal{L}_n^{(j)} = \text{Числитель} / \text{Знаменатель}$ 
```

Рисунок 3. Псевдокод для  $\mathcal{L}$ -преобразования Левина.

**Вход:**  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ ,  $\omega_n = "v"$ ,  $j = 5$ ,  $n = 2$

**Выход:**  $\mathcal{S}_k^{(j)} = 0.764$

Рисунок 4. Пример применения  $\mathcal{L}$ -преобразования Левина.

Данная формула (6) удобна, так как из неё легко выводится рекуррентное отношение [4].

Пусть

$$X_k^{(n)}(\beta) = \begin{cases} (n + \beta)^{k-1} \frac{S_n}{\omega_n} \\ (n + \beta)^{k-1} \frac{1}{\omega_n} \end{cases}$$

$$X_k^{(n)}(\beta) = (\beta + n)X_{k-1}^{(n)}(\beta), \quad k \geq 1, \quad n \geq 0,$$

$$\Delta^k(\beta + n) - (\beta + n)\Delta^k = kE\Delta^{k-1},$$

$$\begin{aligned} P_k^{(n)}(\beta) &= \Delta^k X_{(k)}^{(n)}(\beta) = \{kE + (\beta + n)\Delta\}^{k-1} X_{k-1}^{(n)}(\beta) = \{kE + (\beta + n)\Delta\} P_{k-1}^{(n)}(\beta) = \\ &= (\beta + n + k)P_{k-1}^{(n+1)}(\beta) - (\beta + n)P_{k-1}^{(n)}(\beta). \end{aligned}$$

Для стабильности лучше вычислять уменьшенные значения

$$\mathcal{L}_k^{(n)}(\beta) = \frac{p_k^{(n)}(\beta)}{(\beta + n + k)^{k-1}}.$$

Используя уменьшенные значения, получается рекуррентное отношение формы:

$$\mathcal{L}_{k+1}^{(n)} = \mathcal{L}_k^{(n+1)} = \frac{(\beta + n)(\beta + n + k)^{k-1}}{(\beta + n + k + 1)^k} \mathcal{L}_k^{(n)}.$$

Алгебраические свойства [4]:

- 1) Если положить  $\omega_m = ta_m$  ( $u$ -преобразование) в (5), то можно заметить, что:

$$\mathcal{L}_n^{(j)} = \frac{\Delta^n \left( J^{n-2} \frac{A_J}{\omega_J} \right)}{\Delta^n \left( J^{n-2} \frac{1}{\omega_J} \right)} = \frac{\Delta^n \left( J^{n-2} \frac{A_J}{\Delta A_J} \right)}{\Delta^n \left( J^{n-2} \frac{1}{\Delta A_J} \right)}; \quad J = j + 1,$$

где второе равенство выполняется при  $n \geq 2$ . Из (6) видно, что  $\mathcal{L}_2^{(j)} = W_j(\{A_s\})$ , где  $\{W_j(\{A_s\})\}$  — последовательность, полученная с помощью преобразования Лубкина.

- 2) Следующая теорема касается ядра  $u$ -преобразования, а также, как частный случай, ядра преобразования Лубкина.

Теорема 1 [4]: пусть  $\mathcal{L}_n^{(j)}$  получено с помощью  $u$ -преобразования на последовательности  $\{A_m\}$ . Тогда  $\mathcal{L}_n^{(j)} = A$  для всех  $j = 0, 1, \dots$ , и фиксированного  $n$ , если и только если  $A_m$  имеет вид:

$$A_m = A + C \prod_{k=2}^n \frac{P(k) + 1}{P(k)'}, \quad P(k) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i k^{1-i},$$

где  $C \neq 0$ ,  $\beta_0 \neq 1$ ,  $P(k) \neq 0, -1$  для всех  $k = 2, 3, \dots$

- 3) Смит и Форд [7] показали, что семейство последовательностей частичных сумм ряда Эйлера содержится в ядре  $u$ -преобразования.

Теорема 2 [4]: пусть  $A_m = \sum_{k=1}^m k^\mu z^k$ , где  $m = 1, 2, \dots, \mu$  — неотрицательное целое число, а  $z \neq 1$ , пусть  $\mathcal{L}_n^{(j)}$  — результат применения  $\mathcal{L}$ -преобразования к последовательности  $\{A_m\}$ . Если  $n \geq \mu + 2$ , то для всех  $j$  выполняется равенство  $\mathcal{L}_n^{(j)} = A$ , где  $A = \left(z \frac{d}{dz}\right)^\mu \frac{1}{1-z}$ .

*Алгоритмы вычисления.* Для вычисления преобразований  $\mathcal{L}_n^{(j)}$  можно использовать следующие подходы:

- 1) Прямое применение формулы (5);
- 2) Поскольку  $\mathcal{L}$ -преобразование является  $GREP^{(1)}$ , для его вычисления удобно использовать  $W$ -алгоритм [4], для этого необходимо задать:  $t_l = (l + 1)^{-1}$ ,  $\alpha(t_l) = A_{l+1}$ ,  $\varphi(t_l) = \omega_{l+1}$ , где  $l = 0, 1, \dots$ ;
- 3) Рекуррентный алгоритм *HURRY* [4], включающий следующие шаги:

а) инициализация (для  $j = 0, 1, \dots$ ):

$$P_0^{(j)} = \frac{A_j}{\omega_j}, \quad Q_0^{(j)} = \frac{1}{\omega_j}, \quad j = j + 1.$$

б) рекуррентное вычисление (для  $j = 0, 1, \dots$  и  $n = 1, 2, \dots$ ):

$$U_n^{(j)} = U_{n-1}^{(j+1)} - \frac{j}{j+n} \left( \frac{j+n-1}{j+n} \right)^{n-2} U_{n-1}^{(j)}, \text{ где } U_n^{(j)} \text{ обозначает } P_0^{(j)}, \text{ либо } Q_n^{(j)}.$$

с) финальное вычисление:

$$\mathcal{L}_n^{(j)} = \frac{P_n^{(j)}}{Q_n^{(j)}}, \quad \text{при этом} \quad P_n^{(j)} = \frac{\Delta^n (J^{n-1} A_j / \omega_j)}{(J+n)^{n-1}}, \quad Q_n^{(j)} = \frac{\Delta^n (J^{n-1} / \omega_j)}{(J+n)^{n-1}}, \quad \text{такая}$$

нормализация предотвращает чрезмерный рост значений  $P_n^{(j)}$  и  $Q_n^{(j)}$  при увеличении  $n$ ;

- 4) Модификация Венигера. Венигер предложил расширение  $\mathcal{L}$ -преобразования [4], заменив  $r^i$  в (4) на  $(r + \alpha)^i$  для некоторого фиксированного  $\alpha$ . Это приводит к замене множителей  $J^{n-1}$  и  $(J + i)^{n-1}$  в числителе и знаменателе (5) на  $(J + \alpha)^{n-1}$  и  $(J + \alpha + i)^{n-1}$  соответственно. Влияние параметра  $\alpha$  на точность аппроксимаций требует дополнительного исследования.

### $\omega_n$ и его значимость при ускорении сходимости

Сравнительное исследование Смита и Форда [7], [2] показало, что преобразования Левина исключительно эффективны для суммирования широкого класса бесконечных рядов  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , где  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in b^{(1)}$ .

Левин рассмотрел три различных варианта выбора  $\omega_m$  и определил три различных преобразования последовательностей [4]:

- 1)  $\omega_n = a_n$  ( $t$ -преобразование);
- 2)  $\omega_n = na_n$  ( $u$ -преобразование);
- 3)  $\omega_n = a_n a_{n+1} / (a_{n+1} - a_n)$  ( $v$ -преобразование).

Левин в своей статье [6], а также Смит и Форд в [7] и [2] (где они представили исчерпывающее сравнительное исследование методов ускорения) пришли к выводу, что  $u$ - и  $v$ -преобразования эффективны для всех трёх типов последовательностей, тогда как  $t$ -преобразование эффективно только для линейных и факториальных последовательностей. [На самом деле, все три преобразования являются наилучшими методами ускорения сходимости для знакопеременных рядов  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k |a_k|$  с  $\{a_k\} \in b^{(1)}$ .]

*Выбор весов  $\omega_n$  и сравнение  $\mathcal{S}$ - с  $\mathcal{L}$ -преобразованием.* Параметры  $\omega_n$  в  $\mathcal{S}$ -преобразовании выбираются аналогично  $\mathcal{L}$ -преобразованию [4]. Получающиеся преобразования последовательностей обладают схожими с  $t$ -,  $u$ - и  $v$ -преобразованиями численными свойствами, за исключением их меньшей эффективности для логарифмических последовательностей. Для последовательностей из классов линейных и факториальных  $\mathcal{S}$ -преобразование демонстрирует высокую эффективность по сравнению с  $\mathcal{L}$ -преобразованием. Однако для знакопеременных рядов вида  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k$ ,  $c_k > 0$   $\mathcal{L}$ -преобразование остаётся оптимальным выбором.

## Оценки сходимости

Для  $\mathcal{L}$ - и  $\mathcal{S}$ -трансформаций можно дать оценки сходимости, однако лишь для определённых последовательностей. Рассмотрим ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$  удовлетворяющий следующим условиям [5]:

(S-0) Члены последовательности  $\{S_n\}$  частичных сумм бесконечного ряда, который либо сходится к некоторому пределу  $S$ , либо расходится с антипределом  $S$ .

(S-1) Элементы последовательности  $\{\omega_n\}$  строго чередуют знак.

(S-2) Для всех  $n$  отношение  $\frac{S_n - S}{\omega_n}$  может быть выражено в виде либо факториального ряда, т.е.  $\frac{S_n - S}{\omega_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{(\beta+n)_j}$ , либо степенного ряда, т.е.  $\frac{S_n - S}{\omega_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{(\beta+\tau)^j}$ ,

тогда верны следующие теоремы.

Теорема 3 (об оценке сходимости  $\mathcal{L}$ -трансформации) [5]: пусть последовательности  $\{S_n\}$  и  $\{\omega_n\}$  удовлетворяют (S-0), (S-1) и (S-2), и  $\mathcal{L}_k^{(n)}$  последовательность трансформаций над  $\{S_n\}$ . Тогда для больших значений  $n$  и для фиксированного  $k$  справедливо:

$$\frac{\mathcal{L}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) - S}{S_n - S} = O(n^{-2k}), n \rightarrow \infty.$$

Теорема 4 (об оценке сходимости  $\mathcal{S}$ -трансформации) [5]: пусть последовательности  $\{S_n\}$  и  $\{\omega_n\}$  удовлетворяют условиям (S-0)–(S-2) и что последовательность преобразований  $\mathcal{S}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n)$  над  $\{S_n\}$ . Тогда получим для фиксированной величины  $k$  и для всех  $n$  следующую оценку для ошибки:

$$|\mathcal{S}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) - S| \leq \left| \frac{\omega_n}{(\beta + n)_{2k}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\bar{\beta}_{i_{k+j}}(j+1)_k}{(\beta + n + 2k)_j} \right|.$$

Для фиксированного  $k$  и для больших значений  $n$  справедливо:

$$\frac{\mathcal{S}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) - S}{S_n - S} = O(n^{-2k}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Из вышеперечисленных теорем видно, что трансформации сравнимы при ускорении знакопеременяющихся рядов.

Также существует оценка для  $\mathcal{L}$ -трансформации при ускорении последовательностей с логарифмической сходимостью.

Теорема 5 [5]: пусть элементы последовательности  $\{S_n\}$ , которые сходятся логарифмически к некоторому пределу  $s$ , и удовлетворяют:

$$S_n = S + n^{-\alpha}[b_0 + O(n^{-1})], b_0 \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}_+, n \rightarrow \infty.$$

Пусть также элементы  $\{w_n\}$  могут быть выбраны таким образом, что:

$$\omega_n = n^{-\alpha}[d_0 + O(n^{-1})], d_0 \neq 0, n \rightarrow \infty.$$

И что отношение  $\frac{S_n - S}{\omega_n}$  может быть расширено для всех  $n$  в степенной ряд следующего вида:

$$\frac{S_n - S}{\omega_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{(\beta + n)^j}.$$

Если трансформация  $\mathcal{L}$  используется для ускорения сходимости  $\{S_n\}$ , получаем, что для фиксированного  $k$  и для  $n \rightarrow \infty$  справедливо:

$$\frac{\mathcal{L}(\beta, S_n, \omega_n) - S}{S_n - S} = O(n^{-k}), n \rightarrow \infty$$

К сожалению, такой оценки для  $\mathcal{S}$ -трансформации не удалось найти, но многочисленные численные эксперименты показывают [4], что  $\mathcal{S}$ -трансформация намного хуже справляется с ускорением логарифмической сходимости.

Приведём вывод о применимости  $\mathcal{S}$ - и  $\mathcal{L}$ -трансформации из [4]:

- 1) Для ускорения последовательностей из  $b^{(1)}/LOG$  лучше всего подойдёт  $\mathcal{L}$ -трансформации с  $\omega_m = m a_m$ ;
- 2)  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{S}$  – трансформации отлично справляются с ускорением последовательностей из  $b^{(1)}/LIN/FAC$ ;
- 3)  $\mathcal{S}$ -трансформация очень эффективна для последовательностей из  $b^{(1)}/FACD$ ;
- 4)  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{S}$  – трансформации бесполезны на последовательностях из  $b^{(m)}$  при  $m > 1$ ;
- 5) Если последовательность состоит из суммы последовательностей, состоящих в различных классах  $b^{(1)}$ , то  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{S}$  – трансформации работают неэффективно;
- 6)  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{S}$  – трансформации применимы на последовательностях и не из класса  $b^{(1)}$ , однако их результат будет сложно предугадать.

## Заключение

$\mathcal{S}$ -трансформация является одним из представителей Левино-подобных преобразований, хотя её эффективность уступает  $\mathcal{L}$ -трансформации, она остаётся одним из наилучших методов для суммирования расходящихся степенных рядов Стилтеса.

Обычная трансформация Левина сходится быстрее, чем рекурсивная версия, и в отличие от многих других методов, Левин может эффективно обрабатывать знакопеременные ряды, что расширяет его применимость и делает его особо ценным в разнообразных вычислительных задачах.

## Список литературы

- [1] Mathematical properties of a new Levin-type sequence transformation introduced by Čížek, Zamastil, and Skála. I. // E. J. Weniger. – 2004. – P. 1209-1246.
- [2] A new method for deriving Pade approximants for some hypergeometric functions // A. Sidi. – 1981. – P. 37-40.
- [3] Nonlinear Sequence Transformations for the Acceleration of Convergence and the Summation of Divergent Series // E. J. Weniger. - 2003.
- [4] Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications // A. Sidi – 2003. – P. 121-157, 238-250, 253-261, 363-371.
- [5] An algorithm for a special case of a generalization of the Richardson extrapolation process // A. Sidi. – 1982. – P. 223-233.
- [6] Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // D. Levin. – 1975. – P. 371-388, 1331-1345.
- [7] Numerical comparisons of nonlinear convergence accelerators // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1982. – P. 481-499.
- [8] A Maple package for transforming sequences and functions // J. Grotendorst. – 1991. – P. 325-342.
- [9] A Levin-type algorithm for accelerating the convergence of Fourier series // H. H. H. Homeier. – 1992. – P. 245-254.