

## Введение

Полезность нелинейных преобразований последовательностей для улучшения и даже индуцирования сходимости была достаточно продемонстрирована Шенксом [2]. Однако эвристическая основа преобразований Шенкса имеет некоторые недостатки. Путём соответствующей модификации, предложенной Левиным, генерируются преобразования, которые дают значительное улучшение по сравнению с преобразованиями Шенкса. Дополнительным преимуществом является то, что преобразования выражены в простой замкнутой форме без необходимости вычисления высокопорядковых детерминант, как это происходит в некоторых преобразованиях Шенкса.

## От Шенкса к Левину

Для последующего упоминания резюмируем подход Шенкса и преобразования, которые он получает [2]. Шенкс начинает с последовательности

$$A = \{A_r\}, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

и, сравнивая её с представлением  $A_r$  как функции от  $r$  вида

$$A_r = B + \sum_{i=1}^k a_i q_i^r \quad (q_i \neq 1, 0), \quad (1)$$

он может вычислить её «спектр амплитуд»  $a_i$ , её «отношения»  $q_i$  и её «базу»  $B$ .

Определение 1: «спектр амплитуд»  $a_i$ , «отношения»  $q_i$  и её «база»  $B$  определяются как параметры, характеризующие поведение последовательности  $A_r$  в представлении (1). «Спектр амплитуд»  $a_i$  описывает веса различных экспоненциальных компонент, «отношения»  $q_i$  задают скорости изменения этих компонент, а «база»  $B$  при удовлетворении  $\{A_r\}$  уравнению (1) и удовлетворении каждого отношения  $|q_i| < 1$  представляет собой предел последовательности при  $r \rightarrow \infty$ :

$$B = \lim_{r \rightarrow \infty} A_r.$$

Определение 2: если  $\{A_r\}$  удовлетворяет уравнению (1) и одно или более  $|q_i| \geq 1$ ,  $A_r$  не сходится, тогда Шенкс утверждает [1], что « $A_r$  расходится от  $B$ », и называется «антипределом»  $\{A_r\}$ . На практике антипредел предоставляет механизм для применения методов ускорения сходимости к последовательностям, которые формально расходятся. Это позволяет использовать преобразования, такие как методы Шенкса [2] или Эйлера [3], для извлечения численных результатов из расходящихся последовательностей [2]. Но многие последовательности, которые возникают естественным образом при решении задач, не могут быть представлены в виде (1). Но во многих случаях можно сказать, что  $\{A_r\}$  имеет почти  $k$ -й порядок для некоторого  $k$ , по крайней мере для  $r$ , большего некоторого фиксированного  $N$  [1]. Тогда по аналогии с (1) стремимся определить локальную базу  $k$ -го порядка  $B_{kn}$ , решая  $2k + 1$  уравнений

$$A_r = B_{kn} + \sum_{i=1}^k a_{in} q_{in}^r, \quad n - k \leq r \leq n + k, \quad n \geq k, \quad (q_{in} \neq 1, 0)$$

(которые центрированы вокруг  $A_n$ ) для  $2k + 1$  величин  $B_{kn}$ ,  $a_{in}$ ,  $q_{in}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), и рассматриваем  $B_{kn}$  как метод сходимости для  $\{A_r\}$ .

Определение 3: локальная база  $k$ -го порядка  $B_{kn}$  определяется решением системы уравнений, аналогичной (1), для последовательностей, которые не могут быть точно представлены в виде (1), но имеют поведение, близкое к нему. Локальная база позволяет анализировать и ускорять сходимость последовательностей, которые формально расходятся.

Алгебраически получаем для  $B_{kn}$  формулу

$$B_{kn} = \frac{\begin{vmatrix} A_{n-k} & \cdots & A_{n-1} & A_n \\ \Delta A_{n-k} & \cdots & \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \\ \Delta A_{n-k+1} & \cdots & \Delta A_n & \Delta A_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta A_{n-1} & \cdots & \Delta A_{n+k-2} & \Delta A_{n+k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \Delta A_{n-k} & \cdots & \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \\ \Delta A_{n-k+1} & \cdots & \Delta A_n & \Delta A_{n+1} \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ \Delta A_{n-1} & \cdots & \Delta A_{n+k-2} & \Delta A_{n+k-1} \end{vmatrix}}, \quad (2)$$

где

$$\Delta A_n = A_{n+1} - A_n.$$

Тогда преобразование Шенкса [1] определяется как

$$e_k(A)_n = e_k(A_n) = B_{kn} \quad (n \geq k),$$

а диагональное или  $e_d$  преобразование Шенкса как

$$e_d(A)_n = e_d(A_n) = B_{nn}.$$

Обозначим

$$\Delta A_n = a_{n+1},$$

таким образом,

$$A_n = \sum_{i=0}^n a_i,$$

если определим

$$a_0 = A_0.$$

Таким образом, идентифицируем члены последовательности  $\{A_r\}$  с частичными суммами бесконечного ряда  $\sum_{i=2}^{\infty} a_i$ . Тогда можем легко проверить, что (2) для  $B_{kn}$  также получается, если решим для  $B_{kn}$  систему уравнений

$$A_r = B_{kn} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{in} a_{r+i+1} \quad n-k \leq r \leq n \quad n \geq k, \quad (3)$$

где имеется только  $k+1$  уравнений для  $k+1$  величин  $B_{kn}$  и  $\beta_{in}$  с  $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ .

Идея Шенкса заключается в том, чтобы рассматривать  $A_r$  как функцию  $r$  [2], вычисленную для целых значений  $r$ , и аппроксимировать эту функцию как сумму степеней с произвольными коэффициентами, как в (1), и, таким образом, получать информацию о поведении последовательности при  $r \rightarrow \infty$  из конечного числа членов последовательности. В соответствии с (3), видим, что также можем рассматривать эту аппроксимацию функции  $A_r$  как аппроксимацию с помощью линейной комбинации функций  $a_m$  (как функций от  $m$ ) для  $r+1 < m \leq k+r$  с произвольными коэффициентами и включая константный член  $B_{kr}$ . Шенкс показывает в своей статье [2], что если  $A_r$  являются частичными суммами степенного ряда разложения рациональной функции от  $z$ , то преобразование  $e_k$  работает наиболее эффективным образом, так что при достаточно больших  $k$  и  $e_k(A_n)$  является точно этой рациональной функцией во всей  $z$ -плоскости. Однако функции  $a_n$  настолько схожи между собой, что использование линейной комбинации таких, практически, идентичных функций для аппроксимации  $A_r$ , как это реализовано в (3), представляется неэффективным. Кроме того, аппроксимация  $A_r$  с помощью линейной комбинации степеней может быть не подходящей для последовательностей, скорость сходимости или расходимости которых меньше скорости, с которой  $q^r$  стремится к нулю или к бесконечности соответственно. В качестве примеров можно упомянуть последовательности  $A_r = r^{-2}$  и  $A_r = r^2$ .

## Алгоритм Левина

Алгоритм Левина [1] относится к классу нелинейных методов ускорения сходимости и основывается на построении преобразований, полученных в результате аппроксимации  $A_r$  с помощью функций от  $r$ , отличных от используемых Шенксом. Алгоритм имеет несколько вариаций. Рассмотрим каждую из них.

*t-преобразование.* По аналогии с (3) записываем  $k + 1$  уравнений для последовательности  $A = \{A_r\}$  [1]:

$$A_r = T_{kn} + R_k(r) \quad n \leq r \leq n + k, \quad (4)$$

где  $R_k(r)$  – функции от  $r$ , включающие  $k$  произвольных констант, и стремимся решить систему (4) для  $T_{kn}$  полагая, что  $T_{kn}$  должно быть аппроксимацией предела последовательности  $A$ . Если последовательность  $A$  расходится, но одномерная последовательность  $\{B_r\}$ , которую можем сформировать из  $T_{kn}$ , стремится к пределу  $b$ , то будем называть  $b$  антипределом  $A = \{A_r\}$  относительно соответствующего преобразования. В случае  $k = 1$  получаем два уравнения

$$A_r = T_{1n} + R_1(r), \quad r = n_1, n + 1$$

и хотим выбрать  $R_1(r)$  такое, чтобы

$$T_{1n} \doteq b,$$

то есть, чтобы

$$R_1(r) \doteq A_r - b. \quad (5)$$

Предположим, что каким-то образом нашли функцию  $R_1(r)$ . Тогда очевидно, что желательно улучшить эту аппроксимацию, поэтому для  $k > 1$  определяем

$$R_k(r) = R_1(r) \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{in} f_i(r),$$

где  $\gamma_{in}$  – константы, которые должны быть определены из (4), в то время как  $f_i(r)$  – функции от  $r$ , которые выберем на основе удобства и взаимной независимости. Уравнения (4) теперь принимают форму:

$$A_r = T_{kn} + R_1(r) \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{in} f_i(r) \quad n \leq r \leq n + k. \quad (6)$$

Для удобства обозначим  $R_r \equiv R_1(r)$ , и получаем  $T_{kn}$  с помощью правила Крамера:

$$T_{kn} = \frac{\begin{vmatrix} A_n & A_{n+1} & \cdots & A_{n+k} \\ R_n f_0(n) & R_{n+1} f_0(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_0(n+k) \\ R_n f_1(n) & R_{n+1} f_1(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_n f_{k-1}(n) & R_{n+1} f_{k-1}(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_{k-1}(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ R_n f_0(n) & R_{n+1} f_0(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_0(n+k) \\ R_n f_1(n) & R_{n+1} f_1(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_n f_{k-1}(n) & R_{n+1} f_{k-1}(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_{k-1}(n+k) \end{vmatrix}}.$$

Детерминанты в  $T_{kn}$  не удобны для вычислений в общем случае, но для частного случая

$$f_i(r) \equiv r^{-i} \quad (7)$$

и при условии, что  $R_n \neq 0$  для любого  $n$ , можем легко выразить их через детерминанты Вандермонда, деля последовательные столбцы на  $R_n, R_{n+1}, \dots, R_{n+k}$  соответственно и разлагая по первой строке. Это элементарное вычисление даёт результат

$$T_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{A_{n+j}}{R_{n+j}}}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{1}{R_{n+j}}}. \quad (8)$$

Теперь нужно подходящее выражение для  $R_r \equiv R_1(r)$ , которое обладает свойством, выраженным в (5). По аналогии с (3) теперь записываем  $k+1$  уравнений для последовательности  $A = \{A_r\}$ . Стоит учитывать, что, следуя Шенксу, нумерация членов последовательности начинается с  $A_0$ , однако дальше в некоторых случаях будет удобнее начинать с  $A_1$  как с первого члена последовательности.

Известные преобразования, такие как  $e_k$ , часто значительно улучшают сходимость последовательностей, сформированных из частичных сумм чередующихся рядов:

$$A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} d_k; \quad d_k > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Соответственно, сначала рассмотрим оценку для  $R_1(r)$ , которая подходит для таких последовательностей. Если предполагаем, что  $d_n$  является достаточно гладкой функцией от  $n$ , и что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = d$$

(когда последовательность расходится,  $d$  – антипредел), то очевидно, что

$$A_r - d = O(d_r)$$

и более точно

$$A_r - d \doteq \frac{1}{2}(-1)^{r+1}d_r = \frac{1}{2}\Delta A_{r-1}$$

В соответствии с (6) видим, что достаточно выбрать  $R_1(r)$  с точностью до константного множителя, и поэтому берём

$$R_1(r) = \Delta A_{r-1} = a_r.$$

Кроме того,  $R_1(r) = a_r$  является хорошей аппроксимацией для последовательности, которая расходится очень быстро, так как тогда  $A_r$  имеет порядок величины  $\Delta A_{r-1} = a_r$ , и если  $A$  имеет антипредел  $b$  относительно разрабатываемого преобразования, то для больших  $r$

$$A_r - b \doteq A_r \doteq a_r,$$

что именно то, что требуется от  $R_1(r)$  (см. (5)). Соответственно, принимая  $R_1(r) = a_r$ , можем ожидать получения из (8) хороших аппроксимаций к пределу или антипределу последовательности, сгенерированной частичными суммами чередующегося ряда, и к антипределу очень быстро сходящегося ряда. При условии, что  $a_r \neq 0$  для всех  $r \geq 1$ , подставляем  $R_r \equiv R_1(r) = a_r$  в (8) и получаем

$$T_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{A_{n+j}}{a_{n+j}}}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{1}{a_{n+j}}}. \quad (10)$$

Видим из (10), что  $T_{kn}$  является взвешенным средним последовательности и использует  $A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+k}$ , а сами веса зависят от  $A_{n-1}, A_{n_1}, \dots, A_{n+k}$ . Таким образом, преобразование, заданное двумерной таблицей  $T_{kn}$ , является нелинейным. Псевдокод для  $t$ -преобразования представлен на Рисунке 1, а пример его применения представлен на Рисунке 2.

**Вход:**  $A$  – ряд, представленный в виде  $\sum_{m=1}^n a_m$ , параметр  $k \geq 1$  - порядок преобразования, индекс элемента  $n \geq k$

**Выход:** ускоренная последовательность  $T_{kn}$ , полученная путём применения  $t$ -преобразования

Получить  $A, k, n$

**if**  $k < 1$ : **return** «Ошибка:  $k$  должен быть  $\geq 1$ »

**if**  $n < k$ : **return** «Ошибка:  $n$  должен быть  $\geq k$ »

Вычислить необходимые частичные суммы (9)

**if**  $n + k \geq \text{длина}(A)$ : **return** "Ошибка: недостаточно данных"

**else:**

Инициализировать:

Числитель = 0

Знаменатель = 0

**for**  $j$  от 0 до  $k$ :

**if**  $A[\text{текущий индекс}] - A[\text{текущий индекс} - 1]$  **or**

текущий индекс = 0: **return** «Ошибка: нулевая разность»

Числитель +=  $(-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{A_{n+j}}{a_{n+j}}$  **#(10)**

Знаменатель +=  $(-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{1}{a_{n+j}}$  **#(10)**

**if** Знаменатель  $\neq 0$ : **return**  $T_{kn} = \text{Числитель} / \text{Знаменатель}$

**else: return** «Ошибка: нулевой знаменатель»

Рисунок 1. Псевдокод для  $t$ -преобразования.

**Вход:**  $A = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}, k = 2, n = 5$

**Выход:**  $T_{kn} = 0.7854$

Рисунок 2. Пример применения  $t$ -преобразования.



Теперь определим  $t_k$  преобразование аналогично  $e_k$  преобразованию Шенкса [0, р. 7]:

$$t_k(A)_n = T_{kn}.$$

Также определяем преобразование  $t_d$

$$t_d(A)_n = T_{n1}.$$

Это определение не соответствует диагональному преобразованию  $e_d$  Шенкса. И  $t_d$ , и  $e_d$  используют ровно первые  $2n + 1$  элементов последовательности  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}\}$ . Например, для вычисления  $e_d(A)_n$  требуются  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ , и для  $t_d(A)_{2n}$  необходимы те же элементы. Различие заключается в том, что в преобразовании Шенкса  $e_d$  результат не зависит от нумерации элементов. Если определить новую последовательность  $A'$  со сдвигом индексов:  $A'_i = A_{i+1}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), то преобразование  $e'_d$  для  $A'$  будет эквивалентно исходному, то есть  $e'_d(A)_{n+1} = e_d(A')_n$ . В преобразовании Левина  $t_d$  результат зависит от нумерации. Например,  $t_d(A)_{2n}$  требует, чтобы элементы были проиндексированы строго с  $A_1$ .

*Свойства  $t_k$ - и  $t_d$ -преобразований.* Преобразования  $t_k$ ,  $t_d$ , или в общем, любое преобразование  $t$ , которое можно сформировать из  $T_{kn}$  (10), не являются линейными, но, как и с преобразованиями Шенкса, есть два простых, но важных свойства [1]:

$$t(A + C) = t(A) + c \quad n > 1 \quad (11)$$

$$t(\gamma \cdot A) = \gamma \cdot t(A), \quad (12)$$

где  $C$  используется для обозначения последовательности

$$C = \{C_n\}; \quad C_n = c,$$

содержащей каждый член, равный одной и той же константе  $c$ . Доказательство этого элементарно.

Преобразования  $t_k$ ,  $t_d$  не являются регулярными, то есть существуют сходящиеся последовательности, для которых  $t_k$  и  $t_d$  приводят к последовательностям, которые расходятся или имеют другой предел, но если  $A$  является последовательностью частичных сумм сходящегося ряда, то  $t_k(A)$  и  $t_d(A)$  сходятся к пределу  $A$ . Это можно показать, записав преобразование  $t_k$ , например, в форме метода суммирования  $\gamma_{ij}$ :  $T_k(A)_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{ij} A_j$ , где

$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(A)$ . Тогда для фиксированного чередующегося ряда  $A$  применение теоремы Сильвермана-Тёплица [4] позволяет установить регулярность метода суммирования  $\gamma_{ij}(A)$ . В частности, в работе [5] приведено доказательство того, что данный метод суммирует  $A$  к его пределу при выполнении условий теоремы.

Покажем, в какой степени улучшение сходимости – общее правило. Укажем улучшение, достигнутое  $t_1$ ,  $t_2$  при применении к определённым классам чередующихся рядов. В первую очередь, можем отметить из выражений для  $t_k$  и  $e_k$ , что  $t_1 = e_1$ . Кроме того, для  $e_1$  Шенкс доказал следующий результат [1].

Определение 4: пусть для последовательности  $\{A_n\}$ , сходящейся к пределу  $B$ , исходная погрешность убывает как:

$$\Delta A_n = |A_n - B| = O(n^{-\alpha}),$$

а после применения преобразования  $\varphi$  погрешность становится:

$$\Delta \varphi(A)_n = |\varphi(A)_n - B| = O(n^{-\beta}),$$

тогда мерой улучшения сходимости называется отношение  $\frac{\beta}{\alpha}$ .

Шенкс показал [1], что если  $f(m)$ ,  $g(m)$  – полиномы степеней  $M_1$ ,  $M_2$  соответственно, и  $g(m)$  не обращается в ноль при целых  $m \geq 0$ , то для последовательности

$$A_n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{f(m)}{g(m)} \quad (13)$$

погрешность преобразования  $e_1$  убывает как:

$$\Delta e_1(A)_n = \Delta A_n \left[ \frac{M_1 - M_2}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right].$$

Это даёт меру улучшения сходимости, достигнутого  $e_1 = t_1$ , при применении к последовательности (13). Аналогичный подход применяется для  $t_2$ -преобразования. Предположим теперь, что  $A = \{A_n\}$  является последовательностью

$$A_n = \sum_{m=1}^n \frac{x^m}{h(m)},$$

когда  $x \neq 1$  и  $h(m)$  имеет разложение вида

$$h(m) = m^k + O(m^{k-1})$$

и  $h(m) \neq 0$  для  $m$  – положительного целого числа. Тогда нетрудно по вычислению, аналогичному тому, что у Шенкса, показать, что

$$\Delta t_2(A)_n = \Delta A_n \cdot O\left(\frac{1}{n^k}\right). \quad (14)$$

Легко показать, что, если  $A$  сходится,  $t_2(A)$  сходится к тому же пределу, и (14) показывает улучшение, достигнутое в скорости сходимости.

*и-преобразование.* Методы  $e'_d$  и  $t_d$  демонстрируют [1] высокую эффективность для чередующихся рядов и последовательностей с экспоненциально убывающими членами, однако для медленно сходящихся монотонных рядов, таких как:

$$A_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2},$$

эти методы неэффективны. Связано это с тем, что их алгоритмы предполагают убывание остатка со скоростью, превышающей степенную, что не выполняется для последовательностей вида

$$A_n = O(n^{-k}).$$

Для таких рядов погрешности преобразований  $e'_d$  и  $t_d$  убывают с той же скоростью, что и исходная последовательность:

$$\Delta e'_d(A)_n = O(n^{-1}), \quad \Delta t_d(A)_n = O(n^{-1}),$$

где  $\Delta A_n = O(n^{-1})$ . Однако простым изменением  $T_{kn}$  можно получить преобразование, которое даёт очень хорошие результаты для таких медленно сходящихся монотонных рядов. Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n > 0$ . Когда  $a_n$  имеет асимптотическое разложение

$$a_n = n^{-k} + \gamma n^{-k-1} + O(n^{-k-2}), \quad (15)$$

и  $k > 1$ , так что ряд сходится. Попробуем получить выражение для  $R_1(r)$ , которое подходит для такого рода. Запишем

$$A_r = \sum_{n=1}^r a_n,$$

и тогда в соответствии с (5) нужно

$$R_1(r) \doteq A_r - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n. \quad (16)$$

Можем легко оценить этот остаток, рассматривая выражение (15) для  $a_n$  как функцию от  $n$ , определённую для всех положительных действительных  $n$ , и сравнивая  $\sum_{n=r+1}^{\infty} a_n$  с интегралом  $\int_r^{\infty} a_n dn$ . Таким образом, находим

$$R_1(r) \doteq \frac{r^{-k} + 1}{-k + 1} + O(r^{-k}) = \frac{ra_r}{1 - k} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right], \quad (17)$$

и так как достаточно определить  $R_1(r)$  с точностью до константного множителя, то целесообразно взять

$$R_1(r) = ra_r. \quad (18)$$

Подставляем это в (8) и получаем величину  $U_{kn}$ , заданную

$$U_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-2} \frac{A_{n+j}}{a_{n+j}}}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-2} \frac{1}{a_{n+j}}}. \quad (19)$$

Стоит отметить, что это уравнение для  $U_{kn}$  очень похоже на (10) для  $T_{kn}$  и может быть получено из (6), взяв  $R_1(r) = a_r$  как прежде, но выбрав  $f_i(r) = r^{1-i}$  вместо  $r^{-i}$  как в (7). Псевдокод для  $u$ -преобразования представлен на Рисунке 3, а пример его применения представлен на Рисунке 4.

**Вход:**  $A$  – ряд, представленный в виде  $\sum_{m=1}^n a_m$ , параметр  $k \geq 2$  - порядок преобразования, индекс элемента  $n \geq k$

**Выход:** ускоренная последовательность  $U_{kn}$ , полученная путём применения  $u$ -преобразования

Получить  $A, k, n$

**if**  $k < 2$ : **return** «Ошибка:  $k$  должен быть  $\geq 2$ »

**if**  $n < k$ : **return** «Ошибка:  $n$  должен быть  $\geq k$ »

Вычислить необходимые частичные суммы (аналогично 23)

**if**  $n + k \geq \text{длина}(A)$ : **return** "Ошибка: недостаточно данных"

**else:**

Инициализировать:

Числитель = 0

Знаменатель = 0

**for**  $j$  от 0 до  $k$ :

**if**  $A[\text{текущий индекс}] - A[\text{текущий индекс} - 1]$  **or**

текущий индекс = 0: **return** «Ошибка: нулевая разность»

Числитель  $+= (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-2} \frac{A_{n+j}}{a_{n+j}}$  #**(19)**

Знаменатель  $+= (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-2} \frac{1}{a_{n+j}}$  #**(19)**

**if** Знаменатель  $\neq 0$ : **return**  $U_{kn} = \text{Числитель} / \text{Знаменатель}$

**else: return** «Ошибка: нулевой знаменатель»

Рисунок 3. Псевдокод для  $u$ -преобразования.

**Вход:**  $A = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2}, k = 4, n = 5$

**Выход:**  $U_{kn} = 1.5239$

Рисунок 4. Пример применения  $u$ -преобразования.

Так же, как с помощью  $T_{kn}$  определили  $t$ -преобразования, теперь определяем  $u$ -преобразования с помощью  $U_{kn}$ . В особенности, определяем

$$u_k(A)_n = U_{kn},$$

$$u_n(A)_n = U_{n1}.$$

Как для  $t$ -преобразований, наблюдаем, что  $u$ -преобразования удовлетворяют условиям (11) и (12), и можем показать, что последовательности частичных сумм, сходящихся чередующихся рядов преобразуются в последовательности, сходящиеся к тому же пределу, и кажется, что для таких последовательностей  $t$  и  $u$  оказывают примерно одинаковую степень улучшения скорости сходимости. Однако для медленно сходящихся монотонных последовательностей  $u$ -преобразования более эффективны. Связано это с тем, что в них весовой множитель  $(r+i)^{1-i}$  усиливает вклад остаточного члена  $ra_r$ , благодаря чему погрешность снижается до порядка  $O(r^{-\alpha-1})$  (16-18).

*v-преобразования.*  $v$ -преобразование, которое сейчас будет представлено, является примером использования известных преобразований для получения более эффективных преобразований. Начнём с преобразования  $t_1 = e_1$ , применённого к любой последовательности  $A = (A_n)$  [1]:

$$e_1(A)_n = \frac{A_{n-1}a_{n+1} - A_n a_n}{a_{n+1} - a_n} = A_n + \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}}.$$

Предполагая, что  $e_1(A)_n$  является аппроксимацией предела или антипредела  $A$ , можем использовать (5), чтобы получить выражение для  $R_1(r)$ :

$$R_1(r) \doteq A_r - b \doteq A_r - e_1(A)_r \doteq \frac{a_r a_{r+1}}{a_{r+1} - a_r}.$$

Подстановка этого значения для  $R_1(r)$  в (8) даёт

$$V_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{n+j-1} - a_{n+j}}{a_{n+j} a_{n+j+1}} A_{n+j}}{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{n+j-1} - a_{n+j}}{a_{n+j} a_{n+j+1}}}. \quad (20)$$

Псевдокод для  $v$ -преобразования представлен на Рисунке 5, а пример его применения представлен на Рисунке 6.

**Вход:**  $A$  – ряд, представленный в виде  $\sum_{m=1}^n a_m$ , параметр  $k \geq 1$  - порядок преобразования, индекс элемента  $n \geq k + 1$

**Выход:** ускоренная последовательность  $V_{kn}$ , полученная путём применения  $v$ -преобразования

Получить  $A, k, n$

**if**  $k < 1$ : **return** «Ошибка:  $k$  должен быть  $\geq 1$ »

**if**  $n < k + 1$ : **return** «Ошибка:  $n$  должен быть  $\geq k + 1$ »

Вычислить необходимые частичные суммы (аналогично 23)

**if**  $n + k + 1 \geq \text{длина}(A)$ : **return** "Ошибка: недостаточно данных"

**else:**

Инициализировать:

Числитель, Знаменатель = 0

**for**  $j$  от 0 до  $k$ :

**if**  $A[\text{текущий индекс}] - A[\text{текущий индекс} - 1]$  **or**

текущий индекс = 0: **return** «Ошибка: нулевая разность»

Числитель  $+= (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{n+j-1}-a_{n+j}}{a_{n+j}a_{n+j+1}} A_{n+j}$  #(20)

Знаменатель  $+= (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{n+j-1}-a_{n+j}}{a_{n+j}a_{n+j+1}}$  #(20)

**if** Знаменатель  $\neq 0$ : **return**  $V_{kn} = \text{Числитель} / \text{Знаменатель}$

**else: return** «Ошибка: нулевой знаменатель»

Рисунок 5. Псевдокод для  $v$ -преобразования.

**Вход:**  $A = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{m}, k = 1, n = 4$

**Выход:**  $V_{kn} = 0.6806$

Рисунок 6. Пример применения  $v$ -преобразования.

Используя  $V_{kn}$ , определяем  $v$ -преобразования

$$v_k(A)_n = V_{kn},$$

$$v_n(A)_n = V_{n1}.$$

Замечание: в (55) коэффициенты  $\binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{n+j-1}-a_{n+j}}{a_{n+j}a_{n+j+1}}$  являются оптимальными для исходной последовательности  $\{A_n\}$ , точно отражая поведение остаточного члена  $R_n$ . Рекурсивное применение (55) пересчитывает эти коэффициенты на основе вновь полученной последовательности  $V_{kn}$ , вследствие чего они уже не соответствуют первоначальной структуре остаточного члена, и дополнительное ускорение исчезает, а накопленные численные ошибки способны ухудшить сходимость.

Также  $v$ -преобразования имеют свойства (11) и (12), и они регулярны для последовательностей, сгенерированных как частичные суммы чередующихся рядов.  $v$ -преобразования так же хороши, как  $t$ - или  $u$ -, разница же заключается в том, что они хороши для обоих типов рядов.



## Заключение

Полученные преобразования могут быть применены к вычислению бесконечных интегралов от осциллирующих функций путём интегрирования между нулями функции, а затем преобразования полученного чередующегося ряда. Также, как другое применение, можно упомянуть улучшение простой численной интеграции.

Во многих случаях последовательность будет монотонной, и тогда обычные методы для ускорения сходимости не так эффективны. Но тогда  $u$ - или  $v$ -преобразование должно быть подходящим.

Преобразования  $t$ -,  $u$ -,  $v$ - могут быть использованы для генерации рациональных аппроксимаций функций  $f(z)$ , имеющих формальные разложения в степенные ряды. При определённых условиях эти аппроксимации превосходят сопоставимые члены таблицы Паде функции  $f(z)$ .

## Список литературы

0. Проект старшекурсников (при объединении файлов убрать)
1. Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // International Journal of Computer Mathematics // Levin D. A. - 1972. – P. 371-388.
2. Non-Linear Transformations of Divergent and Slowly Convergent Sequences // Shanks D. C. – 1955. – P. 1-42.
3. A continuous Euler transformation and its application to the Fourier transform of a slowly decaying function // Journal of Computational and Applied Mathematics // Ooura T. – 2001. – P. 259-270.
4. Divergent Series // Oxford University Press // Hardy G. H. – 1949. – P. 43-48.
5. Theory and Application of Infinite Series // Dover Publications // Knopp. K. – 1990. – P. 451-460.