# Экстраполяция Ричардсона. Дополнительно об аппроксимации.

Экстраполяцию Ричардсона можно рассматривать как общий метод повышения точности приближений, когда известна структура погрешности. Для улучшения аппроксимации, нам потребуется более глубокое понимание структуры погрешности. Поэтому начнём с разложений Тейлора для f(x ± h) вокруг точки x:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)h^k}{k!}, \tag{1}$$

$$f(x-h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f^{(k)}(x)h^k}{k!}, \tag{2}$$

Отсюда получаем (более подробно об этом разложении пишет А. Самарский [1]):

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \frac{n^4}{5!} f^{(5)}(x) + \cdots \tag{3}$$

Перепишем формулу (3) другом виде:

$$L = D(h) + e_2 h^2 + e_4 h^4 + \cdots, \tag{4}$$

Где D – аппроксимация, а $L = f'(x)$ (величина, которую мы хотим аппроксимировать).

Выразим D:

$$D(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \tag{5}$$

При таком выражении D погрешность равна:

$$E = e_2 h^2 + e_4 h^4 + \cdots, \tag{6}$$

где $e_i$ обозначает коэффициент при $h^i$ в формуле (3), также отметим независимость коэффициентов от h. Мы предполагаем, что в общем случае $e_i \neq 0$. Таким образом, мы получили аппроксимацию, основанную на значениях f(x) в точках x±h. Чтобы улучшить её, нам необходимо исключить $e_2h^2$ из погрешности. Реализовать это можно путем записи аппроксимации, основанной на значениях функции в других точках. Например:

$$L = D(2h) + e_2(2h)^2 + e_4(2h)^4 + \cdots \tag{7}$$

Основная идея состоит в комбинации выражений (7) и (4) для исключения $h^2$. Заметим, что после вычислений в формуле (7) коэффициент при $h^2$ будет равен $4e_2$. Для получения аналогичного коэффициента в формуле (4) необходимо умножить обе части выражения на 4.

Вычтем выражения друг из друга и получим:

$$L = \frac{4D(h) - D(2h)}{3} - 4e_4h^4 + \cdots \tag{8}$$

Таким образом нам удалось повысить точность аппроксимации за счет использования большего числа точек. Этот алгоритм можно продолжать и дальше, каждый раз убирая некоторые слагаемые и, тем самым, увеличивая точность вычисления.

Стоит отметить, что в формуле (7) можно использовать другие точки, к примеру h/2. Благодаря этому можно будет получать аппроксимации, основанные на других точках по схеме, описанной выше. Аналогичное описание алгоритма приведено в статье Дорона Леви [2] (р. 88)

Список литературы

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы : учебное пособие / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — Москва : Наука, 1989. — 432 с.
2. Introduction to Numerical Analysis // Levy D. – 2012. – P. 88-98.