Постановка математической задачи

Дано: медленно сходящаяся последовательность (S_n), где (S_n) – частичные суммы ряда

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{1}$$

Условие сходимости:

1. Последовательность (S_n) сходится к пределу S (т.е. $\lim_{n\to\infty} s_n = s$), но делает это медленно.
2. Предполагается, что погрешность $S_n - S$ допускает разложение по степеням.

Возможные формы (S_n):

Алгоритм используется в последовательностях с полиномиальной погрешностью.

Цель: обеспечить более быструю сходимость ряда к S по сравнению с исходной последовательностью путем последовательного исключения членов погрешности с помощью экстраполяции Ричардсона.

Метод экстраполяции Ричардсона.

Во многих проблемах бесконечную последовательность *{An}* можно соотнести с функцией *A(y)*. Она определена для $y \subset (0,b]$ $(b>0)$, и y либо дискретен, либо
непрерывен.

После чего справедливо отношение $A_n = A(y_n)$ $(n \subset 0)$ для некоторой монотонно убывающей последовательности $\{y_n\} \subset (0,b]$, которая удовлетворяет

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \tag{2}$$

Тогда задача нахождения предела последовательности становится эквивалентной задаче нахождения предела функции, т.е.

$$\lim_{y\to 0+} A(y) = \lim_{n\to\infty} A_n = A \tag{3}$$

Рассматривать функцию намного удобней, в отличие от последовательностей, так как существует обширный математический аппарат, который может помочь нам при анализе поведения функции.

Например, во многих случаях функция *A(y)* может иметь хорошо определённое расширение при $y \to 0+$, чья форма нам известна.

Рассмотрим функцию *A(y)*.

Мы не предполагаем, что $\lim_{y\to 0+} A(y)$ обязательно существует. Если он существует, то он равен пределу *A*, если нет, то антипределу *A*.

В нашем случае пусть A(y) удовлетворяет равенству для некоторого $s\subset \mathbb{N}_0$:

$$A = A + \sum_{k=1}^{s} a_k y^{\sigma} \tag{4}$$

где $\sigma_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k = 1,2,\dots,s+1$ и $Re\sigma_1 < Re\sigma_2 < \dots < Re\sigma_{s+1}$, и где a_k – константы, не зависящие от y. Если вышерассмотренное равенство справедливо для любого s⊂ и $Re\ \sigma_1 < \mathrm{Re}\ \sigma_2 < \dots$ так, что

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = +\infty \tag{5}$$

Тогда у A(y) есть асимптотическое расширение:

$$A(y) \sim A + \sum_{k=1}^{\infty} a_k y^{\sigma_k} \text{ при } y \to 0+ \tag{6}$$

Замечание: ряд в правой части может не сходиться, и на практике он часто расходится.

σ_k нам известны, α_k нам неизвестны, и в общем случае они нам не нужны. Большой интерес представляет нахождение *A* будь то предел или антипредел. Из вышерассмотренного равенства можно выразить, что:

$$A(y) - A = o(y^{\sigma_1}) \tag{7}$$

А потому, было бы неплохо избавиться от y^{σ_1} и получить более качественную аппроксимацию к A.

С этим поможет метод экстраполяции Ричардсона.

Возьмем константу $\omega\subset(0,1)$ и $y' = \omega y$.

Тогда из вышерассмотренного равенства получаем:

$$A(y') = A + \sum_{k=1}^{s} a_k \omega^{\sigma_k} y^{\sigma_k} + o(y^{\sigma_{s+1}}) \text{ при y} \to 0+ \tag{8}$$

Домножим на ω^{σ_1}:

$$A(y')\omega^{\sigma_1} = A\omega^{\sigma_1} + \sum_{k=1}^{s} a_k \omega^{\sigma_k}\omega^{\sigma_1} y^{\sigma_k} + o(y^{\sigma_{s+1}}) \text{ при y} \to 0+ \tag{9}$$

И вычтем его из изначального равенства, получим:

$$A(y') - A(y')\omega^{\sigma_1} = A(1-\omega^{\sigma_1}) + \sum_{k=1}^{s} a_k(\omega^{\sigma_k} - \omega^{\sigma_1}) y^{\sigma_k} + o(y^{\sigma_{s+1}}) \tag{10}$$

Поделим на $1 - \omega^{\sigma_1}$:

$$\frac{A(y') - A(y')\omega^{\sigma_1}}{1-\omega^{\sigma_1}} = A + \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{\omega^{\sigma_k} - \omega^{\sigma_1}}{1-\omega^{\sigma_1}} y^{\sigma_k} + o(y^{\sigma_{s+1}}) \tag{11}$$

Пусть:

$$A(y,y') = \frac{A(y') - A(y')\omega^{\sigma_1}}{1-\omega^{\sigma_1}} \tag{12}$$

Тогда мы получаем новую аппроксимацию:

$$A(y, y') = A + \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{\omega^{\sigma_k} - \omega^{\sigma_1}}{1 - \omega^{\sigma_1}} y^{\sigma_k} + o(y^{\sigma_{s+1}}) \tag{13}$$

Причем:

$$A(y, y') - A = 0(y^{\sigma_2}) \text{ при } y \to 0 + \tag{14}$$

Так как $Re_{\sigma_1} < Re_{\sigma_2}$, то полученная аппроксимация будет лучше приближать А.

Так можно продолжать много и много раз, получаю аппроксимации вида:

$$A\left(y, y', \dots, y^{(l)}\right) = A + \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{\omega^{\sigma_k} - \omega^{\sigma_1}}{1 - \omega^{\sigma_1}} \frac{\omega^{\sigma_k} - \omega^{\sigma_1}}{1 - \omega^{\sigma_2}} \dots \frac{\omega^{\sigma_k} - \omega^{\sigma_1}}{1 - \omega^{\sigma_{l-1}}} y^{\sigma_k} + o(y^{\sigma_{s+1}}) \tag{15}$$

Причем:

$$A\left(y, y', \dots, y^{(l)}\right) - A = 0(y^{\sigma_l}) \text{ при } y \to 0 + \tag{16}$$

При каждой итерации мы строим новую аппроксимацию, которая приближает А все лучше и лучше. Для экстраполяции Ричардсона существует рекурсивный алгоритм, который выводится из равенства (12) через индукцию.

Пусть $\omega \in (0,1), y_0 \in (0, b], y_m = \omega^m y_0$. Очевидно, что $\{y_m\}$ убывающая последовательность, которая стремится к нулю.

Алгоритм:

1. Пусть $A_0^{(j)} = A_{(y_j)}, j \in \mathbb{N}_0$
2. Пусть $c_n = \omega^{\sigma_n}$, тогда:

$$A_n^{(j)} = \frac{A_{n-1}^{(j+1)} - c_n A_{n-1}^{(j)}}{1 - c_n}, j \in \mathbb{N} \tag{17}$$

Из рекурсивного алгоритма видно, что $A_n^{(j)}$ организуют некую структуру, которую можно организовать в виде таблицы:

$$\begin{array}{ccccccc}
A_0^{(0)} & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & \\
A_0^{(1)} & \rightarrow & A_1^{(0)} & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & \\
A_0^{(3)} & \rightarrow & A_1^{(1)} & \rightarrow & A_2^{(0)} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots &
\end{array}$$

Рисунок 1 – Схема Ромберга

Схема, представленная выше схема называется таблицей Ромберга [1]. Стрелки означают поток вычислений.

Важное замечание: большое количество ускоряющих трансформаций организовываются в такие структуры, например, $\mathcal{L}$ и S – трансформации Левина. Эти структуры могут быть многомерными.

Grep

Несмотря на практичность экстраполяционного процесса Ричардсона, его применение ограничено, т.е. класс последовательностей, к которым он может быть применён довольно узкий, поэтому было разработано обобщение GREP, решающее эту проблему.

Пусть $A(y) \in F^{(m)}$

Возьмём убывающую положительную последовательность $\{y_l\} \subset (0, b]$ такую, что $\lim_{l\to\infty} y_l = 0$.

Пусть $n \equiv (n_1, n_2, \dots, n_m)$, где $n_i \in \mathbb{N}_0$.

Тогда аппроксимации $A_n^{(m,j)}$ к A определены через линейную систему

$$A(y_l) = A_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^{m} \left[\phi_k(y_l) \sum_{i=0}^{n_k-1} \bar{\beta}_{ki} y_l^{ir_k} \right], j \le l \le j+N; N = \sum_{k=l}^{m} n_k \qquad (18)$$

- $\bar{\beta}_{ki}$ – вспомогательные N неизвестных
- $\sum_{i=0}^{-1} \overline{\beta_{ki}} \equiv 0$, что дает нам $A_{(0,\dots,0)}^{(m,j)} = A(y_j) \forall j$
- $r_k \in \mathbb{R}_{>0}$
- $\phi_k(y) -$ функции от y

Видно, что формула получена из определения расширения функции, принадлежащей классу $F^{(m)}$, заменой $\beta_k(y)$ на асимптотическое расширение, которые мы отрезаем по $\beta_{k,n_k-1} y^{(n_k-1)r_k}$.

Данное обобщение экстраполяционного процесса Ричардсона, которое генерирует $A_n^{(m,j)}$, называется GREP$^{(m)}$.

GREP имеет несколько преимуществ перед экстраполяцией Ричардсона:

1. Вместо неизвестных констант a_k теперь неизвестные гладкие функции $\beta_k(y)$, которые обладают асимптотическим расширением форму которого мы знаем

2. Введены функции $\phi_k(y)$, которые не должны обладать какой-то определённой структурой и потому могут иметь различные темпы роста.
3. Функция A(y) представлена суммой асимптотических расширений.

Благодаря этому GREP имеет несколько преимуществ:

1. Более широкий класс функций, к которым может быть применён метод.
2. Так как в формуле присутствует конечное число функций $\phi_k(y)$, а функции $\beta_k(y)$, в сущности, представляют из себя полиномы, то это позволяет придумать алгоритмы, которые будут эффективными.
3. $\phi_k(y)$ не являются уникальными, а потому они могут быть заменены другими функциями, имеющими расширение той же формы.

GREP также можно расширить на последовательности, у которых асимптотическое расширение функций $\beta_k(y)$ имеет вид:

$$\beta_k(y) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{ki} y^{\tau_{ki}}, y \to 0+ \tag{19}$$

Где $\tau_{ki} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и они известны, также $Re\tau_{k0} < Re\tau_{k1} < \cdots < Re\tau_{ki} \to \infty$ при $i \to \infty$

Это асимптотическое расширение $\beta_k(y)$ можно записать в общей форме:

$$\beta_k(y) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{ki} u_{ki}(y), y \to 0+ \tag{20}$$

Где функции u_{ki} образуют асимптотическую последовательность, т.е. $u_{ki+1}(y) = 0\big(u_{ki}(y)\big)$ при $y \to 0+$.

Тогда расширение GREP примет вид:

$$A(y_l) = A_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^{m} \left[\phi_k(y_l) \sum_{i=0}^{n_k-1} \bar{\beta}_{ki} u_{ki}(y) \right], j \le l \le j + N; N = \sum_{k=l}^{m} n_k \quad (21)$$

Нетрудно заметить, что экстраполяционный метод Ричардсона есть ни что иное как расширение GREP$^{(1)}$:

$$A(y_l) = A_n^{(1,j)} + \phi_1(y_l) \sum_{i=0}^{n} \bar{\beta}_{1i} u_{1i}(y) \quad (22)$$

Возьмем $\phi_1(y) = 1$ и $u_{1i}(y) = y^{\sigma_{ki}}$, получим экстраполяционный метод Ричардсона:

$$A(y_l) = A_n^{(1,j)} + \sum_{i=0}^{n} \bar{\beta}_{1i}\, y^{\sigma_{1i}} \quad (23)$$

Реализация алгоритма

```
Функция Richardson_Transform(ряд, n, order):
  Вход:
    ряд - исходный ряд, для которого ускоряется сходимость
    n - количество членов частичной суммы
    order - порядок преобразования (не используется в текущей реализации)

  Выход:
    Ускоренная частичная сумма после преобразования Ричардсона

  Если n < 0:
    Вызвать ошибку "отрицательное число на входе"

  Если n == 0:
    Вернуть DEF_UNDEFINED_SUM (по умолчанию 0)

  Создать таблицу e размером 2 x (n + 1), инициализированную нулями

  Заполнить первую строку таблицы e[0] частичными суммами ряда:
  Для i от 0 до n:
    e[0][i] = S_n(i)  // S_n(i) - частичная сумма ряда до i-го члена

  Инициализировать a = 1

  Для l от 1 до n:
    a = a * 4
    b = a - 1
    Для m от l до n:
      // Вычисление преобразования Ричардсона
      e[1][m] = (a * e[0][m] - e[0][m - 1]) / b

    Поменять местами e[0] и e[1]

  Определить результат:
  Если n четное:
    res = e[0][n]
  Иначе:
    res = e[1][n]

  Если res не является конечным числом:
    Вызвать ошибку "деление на ноль"

  Вернуть res
```

Экстраполяция Ричардсона. Дополнительно об аппроксимации.

Экстраполяцию Ричардсона можно рассматривать как общий метод повышения точности приближений, когда известна структура погрешности. Для улучшения аппроксимации, нам потребуется более глубокое понимание структуры погрешности. Поэтому начнём с разложений Тейлора для f(x ± h) вокруг точки x:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)h^k}{k!}, \tag{23}$$

$$f(x-h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f^{(k)}(x)h^k}{k!}, \tag{24}$$

Отсюда получаем (более подробно об этом разложении пишет А. Самарский [2]):

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \frac{n^4}{5!} f^{(5)}(x) + \cdots \tag{25}$$

Перепишем формулу (25) другом виде:

$$L = D(h) + e_2 h^2 + e_4 h^4 + \cdots, \tag{26}$$

Где D – аппроксимация, а $L = f'(x)$ (величина, которую мы хотим аппроксимировать).

Выразим D:

$$D(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \tag{27}$$

При таком выражении D погрешность равна:

$$E = e_2 h^2 + e_4 h^4 + \cdots, \tag{28}$$

где e_i обозначает коэффициент при h^i в формуле (25), также отметим независимость коэффициентов от h. Мы предполагаем, что в общем случае $e_i \neq 0$. Таким образом, мы получили аппроксимацию, основанную на значениях f(x) в точках x±h. Чтобы улучшить её, нам необходимо исключить $e_2 h^2$ из погрешности. Реализовать это можно путем записи аппроксимации, основанной на значениях функции в других точках. Например:

$$L = D(2h) + e_2(2h)^2 + e_4(2h)^4 + \cdots \tag{29}$$

Основная идея состоит в комбинации выражений (29) и (26) для исключения h^2. Заметим, что после вычислений в формуле (29) коэффициент при h^2 будет равен $4e_2$. Для получения аналогичного коэффициента в формуле (26) необходимо умножить обе части выражения на 4.

Вычтем выражения друг из друга и получим:

$$L = \frac{4D(h) - D(2h)}{3} - 4e_4h^4 + \cdots \qquad (30)$$

Таким образом нам удалось повысить точность аппроксимации за счет использования большего числа точек. Этот алгоритм можно продолжать и дальше, каждый раз убирая некоторые слагаемые и, тем самым, увеличивая точность вычисления.

Стоит отметить, что в формуле (29) можно использовать другие точки, к примеру h/2. Благодаря этому можно будет получать аппроксимации, основанные на других точках по схеме, описанной выше. Аналогичное описание алгоритма приведено в статье Дорона Леви [3] (p. 88)

Список литературы

1. Лукьяненко М. В., Численные методы / М. В. Лукьяненко. — [Электронный ресурс]. — URL: https://teach-in.ru/ (дата обращения: 11.04.2025).
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы : учебное пособие / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — Москва : Наука, 1989. — 432 с.
3. Introduction to Numerical Analysis // Levy D. – 2012. – P. 88-98.