Wynn's rho algorithm

Итерационный процесс Δ^2 (см. уравнение (1))

$$\mathcal{A}_0^{(n)} = S_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.1}$$

$$\mathcal{A}_{k+1}^{(n)} = \mathcal{A}_k^{(n)} - \frac{[\Delta \mathcal{A}_k^{(n)}]^2}{\Delta^2 \mathcal{A}_k^{(n)}}, \qquad k, n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.2}$$

и эпсилон-алгоритм Винна (уравнение (2))

$$\varepsilon_{-1}^{(n)} = 0, \quad \varepsilon_0^{(n)} = S_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_{k+1}^{(n)} = \varepsilon_{k-1}^{(n+1)} + \frac{1}{\varepsilon_k^{(n+1)} - \varepsilon_k^{(n)}}, \qquad k, n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.2}$$

являются мощными инструментами ускорения линейной сходимости последовательностей, а также способны суммировать многие чередующиеся расходящиеся ряды (см., например, Weniger [88, секция 15.2] и строгое доказательство сходимости при суммировании ряда Эйлера в Borghi [13]). Однако оба метода неэффективны при логарифмической сходимости (Wimp [104, Теорема 12]).

Чтобы решить эту проблему, в 1956 году Винн вывел свой rho-алгоритм [Wynn 1956, уравнение (8)]:

$$\rho_{-1}^{(n)} = 0, \ \rho_0^{(n)} = S_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.1}$$

$$\rho_{k+1}^{(n)} = \rho_{k-1}^{(n+1)} + \frac{x_{n+k+1} - X_n}{\rho_k^{(n+1)} - \rho_k^{(n)}}, \qquad k, n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.2}$$

S_n − элементы исходной последовательности,

X_n – набор интерполяционных точек, удовлетворяющим условиям:

$$0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_m < \ldots, \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = \infty \tag{4}$$

Как подчеркивает Осада [61], это является эффективным методом ускорения для многих логарифмически сходящихся последовательностей.

Аналогично эпсилон-алгоритму, только элементы **с четными нижними индексами $\boldsymbol{\rho_{2k}^{(n)}}$** приближают предел исходной последовательности.

Элементы **с нечетными индексами** $\boldsymbol{\rho^{(n)}_{2k+1}}$ служат только как вспомогательные величины и расходятся, если сама трансформация сходится.

Смысл алгоритма можно объяснить как аппроксимацию к знаменателю интерполяционной цепной дроби, в которой используются точки интерполяции $\{x_n\}$, экстраполируемые к бесконечности (см. Cuyt and Wuytack [37, гл. IV.1.4]).

Поэтому важно, чтобы x_n были положительными, строго возрастающими и неограниченными (см. уравнение (4))

На практике почти всегда используется стандартная форма rho-алгоритма, где $x_n = n + 1$, что приводит к:

$$\rho_{k+1}^{(n)} = \rho_{k-1}^{(n+1)} + \frac{k+1}{\rho_k^{(n+1)} - \rho_k^{(n)}} \tag{5}$$

(см. Weniger [88, уравнение (6.2-4)]).

Однако, как показал Osada [60, Теорема 3.2], эта стандартная форма эффективна для последовательностей, чьи остатки убывают как $(n+\beta)^{-\theta}$, где параметр затухания θ— положительное целое число. При нецелых значениях θ она перестает быть эффективной. Для устранения этого недостатка Осада предложил обобщение rho-алгоритма, где учитывается известное значение θ.

Обобщение Осады

Норио Осада предложил модификацию алгоритма для произвольных $\theta>0$:

$$\bar{\rho}_{k+1}^{(n)} = \bar{\rho}_{k-1}^{(n+1)} + \frac{k+\theta}{\bar{\rho}_k^{(n+1)} - \bar{\rho}_k^{(n)}} \tag{6}$$

Этот вариант ускоряет сходимость для модельных последовательностей вида:

$$S_n = S + (n+\beta)^{-\theta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{(n+\beta)^j}, \tag{7}$$

обеспечивая асимптотическую оценку:

$$\bar{\rho}_{2k}^{(n)} - S = O(n^{-\theta-2k}), \qquad n \longrightarrow \infty. \tag{8}$$

(см. Osada [60 уравнение (3.1)]). Было доказано, что (см. уравнение (8)) указывает на значительное улучшение сходимости при правильном выборе θ. [Osada, Теорема 4].

Если же значение θ заранее неизвестно, его можно аппроксимировать с помощью преобразования, предложенного Драммондом [39, стр. 419] и переоткрытого Бьерстадом и др. [11, уравнение (4.1)]:

$$T_n = \frac{[\Delta^2 S_n][\Delta^2 S_{n+1}]}{[\Delta S_{n+1}][\Delta^2 S_{n+1}] - [\Delta S_{n+2}][\Delta^2 S_n]} - 1, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{9}$$

и тогда:

$$\theta = T_n + O(1/n^2), \qquad n \longrightarrow \infty \tag{10}$$

Параллельно с этим были предложены и итерационные версии rho-алгоритма — например, аналог итерации Эйткена для rho с неопределенными точками интерполяции (3), или вариант Боумиком и др. [9, уравнение (2.25)], хотя последний оказался менее эффективным.

Также была разработана итерация обобщения Осада, приведенная в виде рекурсивной схемы в [89, уравнение (2.29)], первоначально предложенная Бьерстадом и др. [11, уравнение (2.4)], где алгоритм получил название модифицированная формула Δ^2.

Резюмируя, алгоритмы Wynn's rho, его стандартная и обобщённые формы, такие как вариант Osada, а также их итерации, составляют важнейшие методы ускорения сходимости логарифмических последовательностей, и легли в основу дальнейших разработок, включая алгоритмы, представленные в данной статье.

Заключение

Алгоритм ро Винна остается ключевым инструментом в численном анализе благодаря своей способности работать с логарифмически сходящимися последовательностями. Его обобщения, такие как метод Осады, расширяют область применения, делая его универсальным для широкого класса задач.

Литература:

1. Wynn, P. (1956). *On a Procrustean technique for the numerical transformation of slowly convergent sequences and series*.

2. Osada, N. (1990). *A convergence acceleration method for some logarithmically convergent sequences*.
3. Brezinski, C., & Redivo Zaglia, M. (1991). *Extrapolation Methods*.
4. Construction of new generalizations of Wynn's epsilon and rho algorithm bysolving finite difference equations in the transformation order