Введение

Проблема ускорения сходимости бесконечных кратных рядов с помощью методов экстраполяции в последнее время вызывает значительный интерес. Первая работа по ускорению сходимости кратных рядов была опубликована Чизхолмом [1]. В этой работе Чизхолм определил диагональные аппроксиманты Паде для двойных рядов вида $f(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}x^i y^j$.

<u>*Определение 1*</u> [1]: пусть $f(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}x^i y^j$ – степенной ряд по двум переменным, тогда диагональным аппроксимантом Паде порядка $[n,n]$ называется рациональная функция

$$[n,n]f(x,y) = \frac{P_n(x,y)}{Q_n(x,y)} = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\mathrm{n}} u_{ij}x^i y^j}{\sum_{i=0}^{\mathrm{n}}\sum_{j=0}^{\mathrm{n}} v_{ij}x^i y^j}$$

такая, что в разложении $f(x,y)Q_n(x,y) - P_n(x,y)$ аннулируются все мономы суммарного порядка $\leq 2n$. Коэффициенты u_{ij} и v_{ij} определяются из линейной системы, возникающей при приравнивании коэффициентов степеней x и y до общего порядка $2n$.

Недиагональные аппроксиманты $[m\ /\ n]_f(x,y)$ были позднее определены Грейвсом-Моррисом, Хьюзом Джонсом и Мейкинсоном. Диагональные аппроксиманты из [1] были обобщены на степенные ряды от N переменных Чизхолмом и Макьюэном, а недиагональные аппроксиманты из были обобщены на N переменных Хьюзом Джонсом. Аппроксиманты Паде общего порядка для кратных степенных рядов были определены Левиным [2] и далее развиты Кайтом [8].

Общее обсуждение ускорения сходимости бесконечных двойных рядов и интегралов было представлено в работе Левина [3]. Статья Грайфа и Левина [4] объединяет общую идею из [3] с подходом, основанным на d-преобразовании для одномерных бесконечных рядов, предложенных Левиным и Сиди. Ранее, Сиди уже предложил подход [7], в котором d-преобразование используется последовательно для суммирования кратных рядов.

Рассмотрим некоторые детали подхода, основанного на асимптотических разложениях и обобщенном процессе экстраполяции Ричардсона, которые приводят к d-преобразованиям.

$d^{(m)}$-преобразование для одномерных бесконечных рядов

Рассмотрим $d^{(m)}$-преобразование, предложенное в работе [6], для ускорения сходимости бесконечных рядов. Определим класс функций $A_0^{(\gamma)}$.

<u>*Определение 2*</u> [5]: функция $\alpha(x)$, определённая для всех $x \geq a$ при котором $a \geq 0$, принадлежит множеству $A_0^{(\gamma)}$, если она имеет асимптотическое разложение Пуанкаре вида:

$$\alpha(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^{\gamma - i}, \qquad x \to \infty. \tag{1}$$

<u>*Определение 3*</u> [11]: пусть функция $\alpha(x)$ определена при $x \to \infty$, предположим, что найдётся последовательность невырожденных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ таких, что:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\varphi_{k+1}(x)}{\varphi_k(x)} = 0$ для всех $k \geq 0$;
2) для каждого k существует X_k такое, что $\varphi_k(x) \neq 0$ при всех $x > X_k$.

Тогда говорят, что функция $\alpha(x)$ имеет асимптотическое разложение Пуанкаре

$$\alpha(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x), \qquad x \to \infty,$$

если для любого целого $N \geq 1$ справедливо

$$\alpha(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \varphi_k(x) = O\big(\varphi_N(x)\big), \qquad x \to \infty.$$

Если, кроме того, $\alpha_0 \neq 0$ в (1), то говорят, что $\alpha(x)$ строго принадлежит $A_0^{(\gamma)}$. Здесь γ может быть комплексным. Отметим также, что от функций $A_0^{(\gamma)}$ не требуется дифференцируемости, поэтому $A_0^{(\gamma)} \supset A^{(\gamma)}$. Определим семейство последовательностей $b^{(m)}$.

<u>*Определение 4*</u> [5]: Последовательность $\{a_n\}$ принадлежит множеству $b^{(m)}$, если она удовлетворяет линейному однородному разностному уравнению порядка m вида:

$$a_n = \sum_{k=1}^{m} p_k(n) \Delta^k a_n, \tag{2}$$

где $p_k \in A_0^{(k)}$, $k = 1, \ldots, m$. Здесь $\Delta^0 a_n = a_n, \Delta^1 a_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, и $\Delta^k a_n = \Delta(\Delta^{k-1} a_n), k = 2, 3, \ldots$.

Следующая теорема, приведённая в [6], является основой для $d^{(m)}$-преобразования.

<u>*Теорема 1*</u>: пусть последовательность $\{a_n\}$ принадлежит $b^{(m)}$, и пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Предположим также, что:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\Delta^{j-1}p_k(n)\right)\left(\Delta^{k-j}a_n\right)=0,\qquad k=j,j+1,\dots,m,\qquad j=1,2,\dots,m, \tag{3}$$

и что:

$$\sum_{k=1}^{m} l(l-1)\dots(l-k+1)\bar{p}_k\neq 1,\qquad l=\pm1,2,3,\dots, \tag{4}$$

где

$$\bar{p}_k=\lim_{n\to\infty} n^{-k}p_k(n),\qquad k=1,\dots,m. \tag{5}$$

Определим:

$$S(\{a_k\})=\sum_{k=1}^{\infty}a_k,\qquad A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\qquad n=1,2,\dots. \tag{6}$$

Тогда:

$$A_{n-1}=S(\{a_k\})+\sum_{k=0}^{m-1}n^{\rho_k}(\Delta^k a_n)g_k(n), \tag{7}$$

где $\rho_k\le k+1$ – целые числа, а функции $g_k\in A_0^{(0)}, k=0,1,\dots,m-1$. Более того, если $\rho_k\in A_0^{(i_k)}$ строго для некоторых целых $i_k\le k, k=1,\dots,m$, то:

$$\rho_k\le\overline{\rho_k}\equiv\max(i_{k+1},i_{k+2}-1,\dots,i_m-m+k+1)\le k+1,$$
$$k=0,1,\dots,m-1. \tag{8}$$

Равенство в (8) достигается, когда целые числа, среди которых берется максимум, различны. Наконец, поскольку $g_k(n)\in A_0^{(0)}$, они имеют асимптотическое разложение вида:

$$g_k(n)\sim\sum_{i=0}^{\infty}g_{ki}n^{-i}\ \text{при}\ n\to\infty. \tag{9}$$

Важно [5]:

1) из (5) следует, что если $\overline{p_k}\neq 0$, тогда и только тогда, когда $p_k\in A_0^{(k)}$ строго; таким образом, если $p_k\in A_0^{(i_k)}$ при $i_k<k$, то $\overline{p_k}=0$, это означает, что при $i_k<k$ для всех $\mathrm{k}=1,\dots,\mathrm{m}$ условие (4) выполняется автоматически;
2) из (8) следует, что $\rho_{m-1}=i_m$ всегда;
3) аналогично, для $m=1$ имеем $\rho_0=i_1$ точно;
4) целые числа ρ_k и функции $g_k(n)$ в (7) зависят только от $p_k(n)$ в разностном уравнении (2); таким образом, они одинаковы для всех решений a_n, уравнения (2), удовлетворяющих (3), для которых ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится;
5) из (3) и (8) также следует, что $\lim_{n\to\infty} n^{\overline{p_k}}\Delta^k a_n=0$, $k=0,1,\dots,m-1$.

Аналогия с $GREP$ [5]:

1) $A_{n-1}\leftrightarrow A(y)$;

2) $n^{-1} \leftrightarrow y$;
3) $n^{\rho_{k-1}} \Delta^{k-1} a_n \leftrightarrow \phi_k(y)$;
4) $r_k = 1\ \forall k, k = 1, \dots, m$;
5) $S(\{a_k\}) \leftrightarrow A$.

Проводя аналогию, видим, что $A(y)$ принадлежит $F^{(m)}$. Переменная y здесь дискретна и принимает значения $1, 1/2, 1/3, \dots$.Исследования [5] показывают, что требование $\{a_k\} \in b^{(m)}$ является наиболее важным среди условий теоремы (3). Остальные условия, а именно (3)-(5) обычно выполняются автоматически. Поэтому для проверки принадлежности $A(y) \equiv A_{n-1}$ (где $y = n^{-1}$) множеству $F^{(m)}$ достаточно убедиться, что $\{a_k\} \in b^{(m)}$. Хотя теорема (3) сформулирована для последовательностей $\{a_n\} \in b^{(m)}$, для которых ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, соотношение (7)-(9) может выполняться и для расходящихся рядов, если их антипредел $S(\{a_k\})$ определён в некотором смысле суммируемости. Заменив каждое ρ_k в (7) его верхней оценкой $k+1$, добавив a_n к обеим частям (7) и применив формулировку определения $GREP$, можно определить d-преобразование.

<u>*Определение 5*</u> [5]: выберем последовательность целых чисел $\{R_l\}_{l=0}^{\infty}$, где $1 \le R_0 < R_1 < R_2 < \cdots$. Пусть $n \equiv (n_1, \dots, n_m)$ — неотрицательные целые числа. Тогда приближение $d_n^{(m,j)}$ к $S(\{a_k\})$ определяется системой линейных уравнений:

$$A_{R_l} = d_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^{m} R_l^k (\Delta^{k-1} a_{R_l}) \sum_{i=0}^{n_k - 1} \frac{\overline{\beta k_i}}{R_l^i}, \qquad j \le l \le j+N,$$

$$N = \sum_{k=1}^{m} n_k. \tag{10}$$

Здесь $\overline{\beta k_i}$ представляют собой дополнительные неизвестные. В формуле (10) принято, что $\sum_{i=0}^{-1} c_i \equiv 0$, поэтому $d_{[0,\dots,0]}^{(mj)} = A_j\ \forall j$. Этот процесс обобщённой экстраполяции Ричардсона ($GREP$), генерирующий $d_n^{(m,j)}$, называется $d^{(m)}$-преобразованием или просто d-преобразованием (для краткости). Это определение d-преобразования было дано в [8] и отличается от исходного определения в [13] заменой ρ_k на их верхние оценки $k+1$. Такой подход более удобен для пользователя, поскольку не требует знания точных значений ρ_k. Если же эти значения известны, их следует использовать для повышения точностей вычислений.

Для применения $d^{(m)}$-преобразования необходимо определить значение m. Это можно сделать одним из двух способов [5]:

1) методом проб и ошибок – начать тест с $m = 1$, и увеличивать m до достижения удовлетворительного ускорения сходимости;
2) математической оценкой – использовать эмпирические правила: если $\{u_n\} \in b^{(r)}, \{v_n\} \in b^{(s)}$, то:
   a) $\{u_n v_n\} \in b^{(m)}, m \le rs$;
   b) $\{u_n + v_n\} \in b^{(m)}, m \le r + s$.

Псевдокод для $d^{(m)}$-преобразования для одномерных рядов представлен на *Рисунке 1*, а пример его применения представлен на *Рисунке 2*.

Вход: ряд S в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $\{a_n\}$ - последовательность, удовлетворяющая разностному уравнению (2), $m \geq 1$ – порядок преобразования (обосновано в *Теореме 2*), $\{R_l\}$ – возрастающая последовательность целых чисел для выбора точек (*Определение 5*)

Выход: $d_n^{(m,j)}$ - аппроксимация суммы ряда (формула (10), *Определение 5*)

Получить $\{a_n\}$, m и $\{R_l\}$

#Проверка условий *Теоремы 2* (стр. 6, условия (3)-(5))

if $\{a_n\}$ не удовлетворяет условиям *Теоремы 2*: #**Условия (3)-(5)**

  return «Ряд не удовлетворяет условиям *Теоремы 2*»

else:

  for l от j до $j + N - 1$ ($N = \sum_{k=1}^{m} n_k$):

    Вычислить частичные суммы A_n для $n \in \{R_l\}$ (по формуле для частичных сумм (6))

    for k от 1 до m:

      Вычислить конечные разности $\Delta^{k-1} a_{R_l}$ #***Определение 5***

  Сформировать уравнение (10)

  Решить систему линейных уравнений (10) относительно $d_n^{(m,j)}$ и βk_i

return $d_n^{(m,j)}$

Рисунок 1. Псевдокод для $d^{(m)}$-преобразования для одномерных рядов.

Вход: $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, $m = 2$, $R_l = [5,10,15,20]$

Выход: $d_n^{(m,j)} = 1.2035$

Рисунок 2. Пример применения $d^{(m)}$-преобразования для одномерных рядов.

Последовательное d-преобразование для s-мерных рядов

Вычисление многомерных рядов может быть выполнено с помощью последовательного применения d-преобразования при определённых условиях. Такой подход был впервые предложен в работе [15] для двойных бесконечных рядов, где он также был теоретически обоснован и проиллюстрирован на примерах. Кратко опишем данный метод. Чтобы упростить изложение для дальнейшего использования, введём некоторые обозначения:

$$y = (y_1, \dots, y_s), \qquad 0 = (0, \dots, 0), \qquad 1 = (1, \dots, 1),$$

$$u \geq v \Leftrightarrow u_j \geq v_j, \qquad j = 1, \dots, s,$$

$$\mathbb{Z}^s = \{i = (i_1, \dots, i_s)\}, \qquad i_j \in \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}_0^s = \{i \in \mathbb{Z}^s | i \geq 0\},$$

$$\mathbb{Z}_r^s = \{i \in \mathbb{Z}_0^s | i \geq r\}, \qquad \mathbb{Z}_+^s = \mathbb{Z}_1^s.$$

Последовательное d-преобразование для s-мерных рядов. Рассмотрим s-мерный бесконечный ряд $S(\{a_i\}) = \Sigma_{i \in \mathbb{Z}_+^s} a_i$ и определим:

$$L_1(i_1, \dots, i_s) = a_i = a_{i_1, \dots, i_1},$$

$$L_{k+1}(i_{k+1}, \dots, i_s) = \sum_{i_k=1}^{\infty} L_k(i_k, \dots, i_s), \qquad k = 1, \dots, s-1.$$

Таким образом, $S(\{a_i\}) = \sum_{i_s=1}^{\infty} L_s(i_s)$.

<u>*Лемма 1*</u> [14]: предположим, что для каждого k и фиксированных $i_{k+1}, \dots, i_S$, применяя последовательность $\{L_k(i_k, \dots, i_s)\}_{i_k=1}^{\infty}$ принадлежит классу $b^{(m_k)}$ для некоторого целого m_k(это предположение, по-видимому, выполняется, когда $\{a_i\}_{i_k=1}^{\infty} \in b^{(m_k)}$ для каждого k и фиксированных $i_{k+1}, \dots, i_s$. Следовательно, $L_{k+1}(i_{k+1}, \dots, i_s)$ может быть вычислено путём применения $d^{(m_k)}$-преобразования к ряду $\sum_{i_k=1}^{\infty} L_k(i_k, \dots, i_s)$, вычисление $S(\{a_i\})$ завершается применением $d^{(m_s)}$-преобразования к ряду $\sum_{i_s=1}^{\infty} L_s(i_s)$.

Мотивация для этого подхода к суммированию s-мерных рядов заключается в том, что данное предположение автоматически выполняется, когда $a_i = \Pi_{j=1}^{s} a_{i_j}^{(j)}$, где $\left\{a_{i_j}^{(j)}\right\}_{i=1}^{\infty} \in b^{(m_j)}$ для некоторых целых чисел m_j. Псевдокод для последовательного d-преобразования для s-мерных рядов представлен на <u>*Рисунке 3*</u>, а пример его применения представлен на <u>*Рисунке 4*</u>.

Вход: s-мерный массив элементов $a[i_1, \dots, i_s]$, вектор порядков преобразований $m = [m_1 m_2]$, двумерный массив R - последовательности точек $\left\{R_l^{(k)}\right\}_{l=1}^{N_k}$ для каждой размерности $k = 1, \dots, s$

Выход: ускоренная сумма L_{s+1} (после s преобразований)

Получить $a[i_1, \dots, i_s]$, m и $\left\{R_l^{(k)}\right\}_{l=1}^{N_k}$

Инициализировать $L_1(i_1, \dots, i_s) = a[i_1, \dots, i_s]$

for k от 1 до s:

    if $\{\boldsymbol{L_k}(\boldsymbol{i_k}, \dots, \boldsymbol{i_s})\}_{\boldsymbol{i_k=1}}^{\infty} \notin \boldsymbol{b}^{(\boldsymbol{m_k})}$**:**

        return «Ошибка: размерность k не удовлетворяет условиям»

    else:

        #Применить $d^{(m_k)}$-преобразовани (*Лемма 1*)

        for каждого фиксированного набора $(i_{k+1}, \dots, i_s)$:

            Вычислить частичные суммы A_{R_l} (аналогично формуле 16)

            Вычислить конечные разности требуемых порядков #***Определение 5***

        Построить и решить систему уравнений (аналогичную (10))

        Результат записать в $L_{k+1}(i_{k+1}, \dots, i_S)$

return L_{S+1}

Рисунок 3. Псевдокод для последовательного d-преобразования для s-мерных рядов.

Вход: $a[i,j] = \frac{1}{i^2+j}$, $m = [1, 2]$, $R =$ [[5, 10], [4, 8]]

Выход: $L_{S+1} = 2.721$

Рисунок 4. Пример применения последовательного d-преобразования для s-мерных рядов.

Факториальное $d^{(m)}$-преобразование

Путём перезаписи асимптотических разложений функций $g_k(n)$ из (9) в других формах, получаем другие варианты d-преобразования [11]. Например, произвольный асимптотический ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{n^i}$ при $n \to \infty$ можно также представить в виде $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{\gamma}_i}{(n)_i}$ при $n \to \infty$, где $(n)_0 = 1$ и $(n)_i = \prod_{k=0}^{i-1}(n+s),\ i \geq 1$. Здесь $\hat{\gamma}_i = \gamma_i$ для $0 \leq$ i ≤ 2, $\hat{\gamma}_3 = \gamma_2 + \gamma_3$, и так далее. Для каждого i коэффициент $\hat{\gamma}_i$ однозначно определяется значениями $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_i$. Если теперь переписать асимптотические разложения $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{g_{ki}}{(n)_i}$ при $n \to \infty$ в форме $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{g}_{ki}}{(n)_i}$ при $n \to \infty$ и продолжить аналогичным образом, можно определить факториальное $d^{(m)}$-преобразование для бесконечных рядов с помощью линейных уравнений:

$$A_{R_l} = d_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^{m} R_l^k (\Delta^{k-1} a_{R_l}) \sum_{i=0}^{n_k - 1} \frac{\overline{\beta k_\iota}}{(R_l + \alpha)_i}, \qquad j \leq l \leq j + N,$$

$$N = \sum_{k=1}^{m} n_k. \tag{11}$$

И для бесконечных последовательностей с помощью линейных уравнений:

$$A_{R_l} = d_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^{m} \left[R_l^k (\Delta^k A_{R_l - 1}) \sum_{i=0}^{n_k - 1} \frac{\overline{\beta_{k\iota}}}{(R_l + \beta)_i} \right], j \leq l \leq j + N;$$

$$N = \sum_{k=1}^{m} n_k \, .$$

Псевдокод для факториального $d^{(m)}$-преобразования представлен на *Рисунке 5*, а пример его применения представлен на *Рисунке 6*.

Вход: ряд S в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $\{a_n\}$ – последовательность с асимптотикой вида (9), $m \geq 1$ – порядок преобразования (*Теорема 2*), α – параметр сдвига, $\{R_l\}$ – последовательность точек (*Определение 5*)

Выход: приближение $d_n^{(m,j)}$ (формула (11)

Получить $\{a_n\}, m, \alpha$ и $\{R_l\}$

#Проверить соответствие асимптотики

if $\{a_n\}$ не соответствует формуле (9):

    return "Ошибка: неверный тип асимптотики"

else:

    for l от j до $j + N - 1$ ($N = \sum_{k=1}^{m} n_k$):

        Вычислить частичные суммы A_n для $n \in \{R_l\}$ (аналогично формуле (6))

        for i от 0 до n_{k-1}:

            Вычислить факториальные члены $(R_l + \alpha)_i$ из (11)

        Сформировать уравнение (11)

    Решить систему линейных уравнений (11) относительно $d_n^{(m,j)}$ и βk_i

return $d_n^{(m,j)}$

Рисунок 5. Псевдокод для факториального $d^{(m)}$-преобразования.

Вход: $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, m = 1, \alpha = 1, R_l = [3, 6, 9]$

Выход: $d_n^{(m,j)} = 0.997$

Рисунок 6. Пример применения факториального $d^{(m)}$-преобразования.

H-трансформация

Метод, называемый H-преобразованием, был предложен Хомейером [18] для ускорения сходимости рядов Фурье по синусам и косинусам. Рассмотрим это преобразование, так как оно является частным случаем $GREP^{(2)}$ и вариантом $d^{(m)}$-преобразования. Пусть дан ряд Фурье:

$$F(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty}(b_k \cos kx + c_k \sin kx),$$

а его частичные суммы имеют вид:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(b_k \cos kx + c_k \sin kx)\,, \qquad n = 0,1, \ldots.$$

Тогда приближение $H_n^{(j)}$ к сумме этого ряда определяется через линейную систему:

$$S_l = H_n^{(j)} + r_l\left[\cos lx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\overline{\beta_\iota}}{(l+\delta)^i} + \sin lx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\overline{\gamma_\iota}}{(l+\delta)^i}\right], \qquad j \le l \le j+2n, \tag{12}$$

где

$$r_n = (n+1)M(b_n, c_n), \qquad M(p,q) = \begin{cases} p, & \text{если } |p| > |q| \\ q & \text{в ином случае} \end{cases}, \tag{13}$$

а δ - некоторая фиксированная константа. Здесь $\overline{\beta_\iota}$ и $\overline{\gamma_\iota}$— дополнительные вспомогательные неизвестные. Хомейер предложил эффективный рекуррентный алгоритм для реализации H-преобразования, отличающийся высокой экономичностью.

Однако у этого преобразования есть два недостатка [11]:

1) Ограниченное применение: класс ряд рядов Фурье, для которых метод работает успешно, довольно узок. Это видно при сравнении уравнений (12) с определяющими уравнениями для $d_{(n.n)}^{(2,j)}$:

$$S_{R_l} = d_{(n.n)}^{(2,j)} + a_{R_l} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\overline{\beta_\iota}}{R_l^i} + \Delta a_{R_l} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\overline{\gamma_\iota}}{R_l^i}, \qquad j \le l \le j+2n,$$

где $a_n = b_n \cos nx + c_n \sin nx$, при специальном выборе R_l, а именно $R_l = l+1$. Таким образом, $d_{(n.n)}^{(2,l)}$ и $H_n^{(j)}$ используют практически одинаковое количество членов ряда $F(x)$. Уравнения в (12) сразу же показывают, что H-преобразование может быть эффективным, когда

$$S_n \sim S + r_n\left[\cos nx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta_i}{n^i} + \sin nx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_i}{n^i}\right], \qquad n \to \infty,$$

то есть, когда S_n связана с функцией $A(y) \in F^{(2)}$. Такая ситуация возможна только тогда, когда $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ оба принадлежат классу $b^{(1)}$. Учитывая это, становится ясно, что, если хотя бы одна из последовательностей $\{b_n\}$ или $\{c_n\}$ (или обе) принадлежат классу $b^{(s)}$ при $s > 1$, H-преобразование перестаёт быть эффективным. В отличие от этого, $d^{(m)}$ −преобразование при подходящем значении $m > 2$ остаётся эффективным.

В качестве примера рассмотрим [11] ряд косинусов $F(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos kx$, где $b_n = P_n(t)$ — полиномы Лежандра. Поскольку $\{b_n\} \in b^{(2)}$, получаем, что $\{b_n cosnx\} \in b^{(4)}$. В этом случае:

1) $d^{(4)}$ −преобразование может быть применено напрямую к $F(x)$;
2) $d^{(2)}$-преобразование с использованием комплексного подхода также применимо и требует примерно вдвое меньше вычислений по сравнению с прямым методом;
3) H-преобразование неэффективно.

2) Из определения r_n очевидно [11], что предполагается доступность b_n и c_n. В таком случае, $d^{(1)}$-преобразование с $R_l = l + 1$ (которое является ничем иным, как преобразованием Левина) в сочетании с комплексным подходом обеспечивает требуемую точность при примерно вдвое меньших вычислительных затратах по сравнению с H-преобразованием, когда последнее применимо. Разумеется, лучшая устойчивость и точность достигаются при использовании $d^{(1)}$-преобразования с APS вблизи точек сингулярности.

Псевдокод для последовательного H-преобразования представлен на *Рисунке 7*, а пример его применения представлен на *Рисунке 8*.

Вход: ряд Фурье $F(x)$ (определение перед (12)), $n \geq 1$ - порядок преобразования, $\delta > 0$ – параметр сдвига, коэффициенты $\{b_n\}$, $\{c_n\} \in b^{(1)}$ (следует из условия эффективности H-преобразования)

Выход: приближение $H_n^{(j)}$ (12)

Получить $F(x), n, \delta, \{b_n\}$ и $\{c_n\}$

#Проверить $\{b_n\}, \{c_n\} \in b^{(1)}$

if не выполняется:

    return "Ошибка: коэффициенты не $\in b^{(1)}$"

else:

    for l от j до $j + 2n - 1$:

        Вычислить частичную сумму ряда Фурье $S_l = \sum_{k=0}^{l} (b_k \cos kx + c_k \sin kx)$

        Вычислить r_l (аналогично (13))

        Сформировать уравнение (12)

    Решить систему из $2n$ уравнений относительно H, γ_i, β_i (12)

return $H_n^{(j)}$

Рисунок 7. Псевдокод для H-преобразования.

Вход: $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$, $n = 2, \delta = 0.5$, $\{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$, $\{c_n\} = \{0\}$

Выход: $H_n^{(j)} = 1.064$

Рисунок 8. Пример применения H-преобразования.

Заключение

Полученные преобразования могут быть применены к широкому классу последовательностей, включая, среди прочего, линейные и общие линейные последовательности, где обычно применяется ε-алгоритм. Они были созданы на основе строгого анализа асимптотических разложений хвостов бесконечных рядов. В некоторых частных случаях приближения, полученные с помощью $d^{(m)}$-преобразования, совпадают с теми, которые даёт преобразование Шенкса.

Список литературы

1. Rational approximants defined from double power series // Math. Comp. // J. S. R. Chisholm. – 1973. – P. 941-848.
2. General Rational approximants in N variables // Approx. Theory // D. Levin. – 1976. – P. 1-8.
3. On accelerating the convergence of infinite double series and integrals // Math. Comp. // D. Levin. – 1980. – P. 1331-1980.
4. The $d_{(2)}$-transformation for infinite double series and the $D_{(2)}$-transformation for infinite double integrals. // Math. Comp. – 1998. – P. 695-714.
5. Extrapolation Methods for infinite multiple series and integrals // Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering vol. 1. // D. Levin, A. Sidi – 2001. – P. 167-184.
6. Two new classes of nonlinear transformations for accelerating the convergence of infinite integrals and series // Appl. Math. Comp. // D. Levin, A. Sidi – 1975. – P. 175-215.
7. Further convergence and stability results for the generalized Richardson extrapolation process $GREP^{(1)}$ with and application to the $D^{(1)}$-transformation for infinite integrals // Comp. Appl. Math. // A. Sidi. – 1999. – P. 153-167.
8. An algorithm for a generalization of the Richardson extrapolation process // SIAM J. Numer. Anal. // W. F. Ford and A. Sidi. – 1987. – P. 1212-1232.
9. Exponential function approximation to Laplace transform inversion and development of non-linear methods for accelerating the convergence of infinite integrals and series // PhD thesis, Tel Aviv University // I. M. Longman. – 1977.
10. Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // Math. Comp. // D. Levin. – 1975. – P. 371-388, 1331-1345.
11. Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications // Cambridge University Press // A. Sidi – 2003. – P. 121-157, 238-250, 253-261, 363-371.
12. An algorithm for a special case of a generalization of the Richardson extrapolation process // Numer. Math. // A. Sidi. – 1982. – P. 223-233.
13. Acceleration of linear and logarithmic convergence // SIAM J. Numer. Anal. // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1979. – P. 223-240.
14. Numerical comparisons of nonlinear convergence accelerators // Math. Comp. // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1982. – P. 481-499.
15. A new method for deriving Pade approximants for some hypergeometric functions // J. Comp. Appl. Math. // A. Sidi. – 1981. – P. 37-40.
16. A Maple package for transforming sequences and functions // Comput. Phys. Comm. // J. Grotendorst. – 1991. – P. 325-342.

17. A Levin-type algorithm for accelerating the convergence of Fourier series // Numer. Algorithms // H. H. H. Homeier. – 1992. – P. 245-254.