

Введение

Проблема ускорения сходимости бесконечных кратных рядов с помощью методов экстраполяции в последнее время вызывает значительный интерес. Первая работа по ускорению сходимости кратных рядов была опубликована Чизхолмом [1]. В этой работе Чизхолм определил диагональные аппроксиманты Паде для двойных рядов вида $f(x, y) =$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j.$$

Определение 1 [1]: пусть $f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j$ – степенной ряд по двум переменным, тогда диагональным аппроксимантом Паде порядка $[n, n]$ называется рациональная функция

$$[n, n]f(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{Q_n(x, y)} = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n u_{ij} x^i y^j}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n v_{ij} x^i y^j}$$

такая, что в разложении $f(x, y)Q_n(x, y) - P_n(x, y)$ аннулируются все мономы суммарного порядка $\leq 2n$. Коэффициенты u_{ij} и v_{ij} определяются из линейной системы, возникающей при приравнении коэффициентов степеней x и y до общего порядка $2n$.

Недиагональные аппроксиманты $[m / n]_f(x, y)$ были позднее определены Грейвсом-Моррисом, Хьюзом Джонсом и Мейкинсоном. Диагональные аппроксиманты из [1] были обобщены на степенные ряды от N переменных Чизхолмом и Макьюэном, а недиагональные аппроксиманты из были обобщены на N переменных Хьюзом Джонсом. Аппроксиманты Паде общего порядка для кратных степенных рядов были определены Левиным [2] и далее развиты Кайтом [8].

Общее обсуждение ускорения сходимости бесконечных двойных рядов и интегралов было представлено в работе Левина [3]. Статья Грайфа и Левина [4] объединяет общую идею из [3] с подходом, основанным на d -преобразовании для одномерных бесконечных рядов, предложенных Левиным и Сиди. Ранее, Сиди уже предложил подход [7], в котором d -преобразование используется последовательно для суммирования кратных рядов.

Рассмотрим некоторые детали подхода, основанного на асимптотических разложениях и обобщенном процессе экстраполяции Ричардсона, которые приводят к d -преобразованиям.

$d^{(m)}$ -преобразование для одномерных бесконечных рядов

Рассмотрим $d^{(m)}$ -преобразование, предложенное в работе [6], для ускорения сходимости бесконечных рядов. Определим класс функций $A_0^{(\gamma)}$.

Определение 2 [5]: функция $\alpha(x)$, определённая для всех $x \geq a$ при котором $a \geq 0$, принадлежит множеству $A_0^{(\gamma)}$, если она имеет асимптотическое разложение Пуанкаре вида:

$$\alpha(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^{\gamma-i}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Определение 3 [11]: пусть функция $\alpha(x)$ определена при $x \rightarrow \infty$, предположим, что найдётся последовательность невырожденных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ таких, что:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{k+1}(x)}{\varphi_k(x)} = 0$ для всех $k \geq 0$;
- 2) для каждого k существует X_k такое, что $\varphi_k(x) \neq 0$ при всех $x > X_k$.

Тогда говорят, что функция $\alpha(x)$ имеет асимптотическое разложение Пуанкаре

$$\alpha(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

если для любого целого $N \geq 1$ справедливо

$$\alpha(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \varphi_k(x) = o(\varphi_N(x)), \quad x \rightarrow \infty.$$

Если, кроме того, $\alpha_0 \neq 0$ в (1), то говорят, что $\alpha(x)$ строго принадлежит $A_0^{(\gamma)}$. Здесь γ может быть комплексным. Отметим также, что от функций $A_0^{(\gamma)}$ не требуется дифференцируемости, поэтому $A_0^{(\gamma)} \supset A^{(\gamma)}$. Определим семейство последовательностей $b^{(m)}$.

Определение 4 [5]: Последовательность $\{a_n\}$ принадлежит множеству $b^{(m)}$, если она удовлетворяет линейному однородному разностному уравнению порядка m вида:

$$a_n = \sum_{k=1}^m p_k(n) \Delta^k a_n, \quad (2)$$

где $p_k \in A_0^{(k)}$, $k = 1, \dots, m$. Здесь $\Delta^0 a_n = a_n, \Delta^1 a_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, и $\Delta^k a_n = \Delta(\Delta^{k-1} a_n), k = 2, 3, \dots$

Следующая теорема, приведённая в [6], является основой для $d^{(m)}$ -преобразования.

Теорема 1: пусть последовательность $\{a_n\}$ принадлежит $b^{(m)}$, и пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Предположим также, что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta^{j-1} p_k(n)) (\Delta^{k-j} a_n) = 0, \quad k = j, j+1, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

и что:

$$\sum_{k=1}^m l(l-1) \dots (l-k+1) \bar{p}_k \neq 1, \quad l = \pm 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

где

$$\bar{p}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-k} p_k(n), \quad k = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Определим:

$$S(\{a_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Тогда:

$$A_{n-1} = S(\{a_k\}) + \sum_{k=0}^{m-1} n^{\rho_k} (\Delta^k a_n) g_k(n), \quad (7)$$

где $\rho_k \leq k+1$ – целые числа, а функции $g_k \in A_0^{(0)}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Более того, если $\rho_k \in A_0^{(i_k)}$ строго для некоторых целых $i_k \leq k$, $k = 1, \dots, m$, то:

$$\rho_k \leq \bar{\rho}_k \equiv \max(i_{k+1}, i_{k+2} - 1, \dots, i_m - m + k + 1) \leq k + 1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (8)$$

Равенство в (8) достигается, когда целые числа, среди которых берется максимум, различны.

Наконец, поскольку $g_k(n) \in A_0^{(0)}$, они имеют асимптотическое разложение вида:

$$g_k(n) \sim \sum_{i=0}^{\infty} g_{ki} n^{-i} \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Важно [5]:

- 1) из (5) следует, что если $\bar{p}_k \neq 0$, тогда и только тогда, когда $p_k \in A_0^{(k)}$ строго; таким образом, если $p_k \in A_0^{(i_k)}$ при $i_k < k$, то $\bar{p}_k = 0$, это означает, что при $i_k < k$ для всех $k = 1, \dots, m$ условие (4) выполняется автоматически;
- 2) из (8) следует, что $\rho_{m-1} = i_m$ всегда;
- 3) аналогично, для $m = 1$ имеем $\rho_0 = i_1$ точно;
- 4) целые числа ρ_k и функции $g_k(n)$ в (7) зависят только от $p_k(n)$ в разностном уравнении (2); таким образом, они одинаковы для всех решений a_n , уравнения (2), удовлетворяющих (3), для которых ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;
- 5) из (3) и (8) также следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\bar{\rho}_k} \Delta^k a_n = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Аналогия с GREP [5]:

- 1) $A_{n-1} \leftrightarrow A(y)$;

- 2) $n^{-1} \leftrightarrow y$;
- 3) $n^{\rho_{k-1}} \Delta^{k-1} a_n \leftrightarrow \phi_k(y)$;
- 4) $r_k = 1 \forall k, k = 1, \dots, m$;
- 5) $S(\{a_k\}) \leftrightarrow A$.

Проводя аналогию, видим, что $A(y)$ принадлежит $F^{(m)}$. Переменная y здесь дискретна и принимает значения $1, 1/2, 1/3, \dots$. Исследования [5] показывают, что требование $\{a_k\} \in b^{(m)}$ является наиболее важным среди условий теоремы (3). Остальные условия, а именно (3)-(5) обычно выполняются автоматически. Поэтому для проверки принадлежности $A(y) \equiv A_{n-1}$ (где $y = n^{-1}$) множеству $F^{(m)}$ достаточно убедиться, что $\{a_k\} \in b^{(m)}$. Хотя теорема (3) сформулирована для последовательностей $\{a_n\} \in b^{(m)}$, для которых ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, соотношение (7)-(9) может выполняться и для расходящихся рядов, если их антипредел $S(\{a_k\})$ определён в некотором смысле суммируемости. Заменяв каждое ρ_k в (7) его верхней оценкой $k + 1$, добавив a_n к обеим частям (7) и применив формулировку определения *GREP*, можно определить d -преобразование.

Определение 5 [5]: выберем последовательность целых чисел $\{R_l\}_{l=0}^{\infty}$, где $1 \leq R_0 < R_1 < R_2 < \dots$. Пусть $n \equiv (n_1, \dots, n_m)$ — неотрицательные целые числа. Тогда приближение $d_n^{(m,j)}$ к $S(\{a_k\})$ определяется системой линейных уравнений:

$$A_{R_l} = d_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^m R_l^k (\Delta^{k-1} a_{R_l}) \sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{\overline{\beta k_l}}{R_l^i}, \quad j \leq l \leq j + N,$$

$$N = \sum_{k=1}^m n_k. \quad (10)$$

Здесь $\overline{\beta k_l}$ представляют собой дополнительные неизвестные. В формуле (10) принято, что $\sum_{i=0}^{-1} c_i \equiv 0$, поэтому $d_{[0, \dots, 0]}^{(m,j)} = A_j \forall j$. Этот процесс обобщённой экстраполяции Ричардсона (*GREP*), генерирующий $d_n^{(m,j)}$, называется $d^{(m)}$ -преобразованием или просто d -преобразованием (для краткости). Это определение d -преобразования было дано в [8] и отличается от исходного определения в [13] заменой ρ_k на их верхние оценки $k + 1$. Такой подход более удобен для пользователя, поскольку не требует знания точных значений ρ_k . Если же эти значения известны, их следует использовать для повышения точностей вычислений.

Для применения $d^{(m)}$ -преобразования необходимо определить значение m . Это можно сделать одним из двух способов [5]:

- 1) методом проб и ошибок — начать тест с $m = 1$, и увеличивать m до достижения удовлетворительного ускорения сходимости;
- 2) математической оценкой — использовать эмпирические правила: если $\{u_n\} \in b^{(r)}, \{v_n\} \in b^{(s)}$, то:
 - а) $\{u_n v_n\} \in b^{(m)}, m \leq rs$;
 - б) $\{u_n + v_n\} \in b^{(m)}, m \leq r + s$.

Псевдокод для $d^{(m)}$ -преобразования для одномерных рядов представлен на Рисунке 1, а пример его применения представлен на Рисунке 2.

Вход: ряд S в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $\{a_n\}$ - последовательность, удовлетворяющая разностному уравнению (2), $m \geq 1$ – порядок преобразования (обосновано в Теореме 1), $\{R_l\}$ – возрастающая последовательность целых чисел для выбора точек (Определение 5)

Выход: $d_n^{(m,j)}$ - аппроксимация суммы ряда

Проверка условий Теоремы 2 (стр. 6, условия (3)-(5))

if $\{a_n\}$ не удовлетворяет условиям Теоремы 2: # Условия (3)-(5)

return «Ряд не удовлетворяет условиям Теоремы 2»

else:

for l от j до $j + N - 1$: # ($N = \sum_{k=1}^m n_k$)

 Вычислить частичные суммы A_n для $n \in \{R_l\}$ (по формуле для частичных сумм (6))

for k от 1 до m :

 Вычислить конечные разности $\Delta^{k-1} a_{R_l}$ # Определение 5

 Сформировать уравнение (10)

 Решить систему линейных уравнений (10) относительно $d_n^{(m,j)}$ и βk_i

return $d_n^{(m,j)}$

Рисунок 1. Псевдокод для $d^{(m)}$ -преобразования для одномерных рядов.

Вход: $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, $m = 2$, $R_l = [5, 10, 15, 20]$

Выход: $d_n^{(m,j)} = 1.2035$

Рисунок 2. Пример применения $d^{(m)}$ -преобразования для одномерных рядов.

Последовательное d -преобразование для s -мерных рядов

Вычисление многомерных рядов может быть выполнено с помощью последовательного применения d -преобразования при определённых условиях. Такой подход был впервые предложен в работе [15] для двойных бесконечных рядов, где он также был теоретически обоснован и проиллюстрирован на примерах. Кратко опишем данный метод. Чтобы упростить изложение для дальнейшего использования, введём некоторые обозначения:

$$y = (y_1, \dots, y_s), \quad 0 = (0, \dots, 0), \quad 1 = (1, \dots, 1),$$

$$u \geq v \Leftrightarrow u_j \geq v_j, \quad j = 1, \dots, s,$$

$$\mathbb{Z}^s = \{i = (i_1, \dots, i_s)\}, \quad i_j \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_0^s = \{i \in \mathbb{Z}^s \mid i \geq 0\},$$

$$\mathbb{Z}_r^s = \{i \in \mathbb{Z}_0^s \mid i \geq r\}, \quad \mathbb{Z}_+^s = \mathbb{Z}_1^s.$$

Рассмотрим s -мерный бесконечный ряд $S(\{a_i\}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+^s} a_i$ и определим [14]:

$$L_1(i_1, \dots, i_s) = a_i = a_{i_1, \dots, i_1},$$

$$L_{k+1}(i_{k+1}, \dots, i_s) = \sum_{i_k=1}^{\infty} L_k(i_k, \dots, i_s), \quad k = 1, \dots, s-1.$$

Таким образом, $S(\{a_i\}) = \sum_{i_s=1}^{\infty} L_s(i_s)$.

Лемма 1 [14]: предположим, что для каждого k и фиксированных i_{k+1}, \dots, i_s , применяя последовательность $\{L_k(i_k, \dots, i_s)\}_{i_k=1}^{\infty}$ принадлежит классу $b^{(m_k)}$ для некоторого целого m_k (это предположение, по-видимому, выполняется, когда $\{a_i\}_{i_k=1}^{\infty} \in b^{(m_k)}$ для каждого k и фиксированных i_{k+1}, \dots, i_s). Следовательно, $L_{k+1}(i_{k+1}, \dots, i_s)$ может быть вычислено путём применения $d^{(m_k)}$ -преобразования к ряду $\sum_{i_k=1}^{\infty} L_k(i_k, \dots, i_s)$, вычисление $S(\{a_i\})$ завершается применением $d^{(m_s)}$ -преобразования к ряду $\sum_{i_s=1}^{\infty} L_s(i_s)$.

Преимущество этого подхода к суммированию s -мерных рядов заключается в том, что данное предположение автоматически выполняется, когда $a_i = \prod_{j=1}^s a_{ij}^{(j)}$, где $\{a_{ij}^{(j)}\}_{i=1}^{\infty} \in b^{(m_j)}$ для некоторых целых чисел m_j . Псевдокод для последовательного d -преобразования для s -мерных рядов представлен на Рисунке 3, а пример его применения представлен на Рисунке 4.

Вход: s -мерный массив элементов $a[i_1, \dots, i_s]$, вектор порядков преобразований $m = [m_1, \dots, m_s]$, двумерный массив R - последовательности точек $\{R_l^{(k)}\}_{l=1}^{N_k}$ для каждой размерности $k = 1, \dots, s$

Выход: ускоренная сумма L_{s+1}

Инициализировать $L_1(i_1, \dots, i_s) = a[i_1, \dots, i_s]$

for k от 1 до s :

if $\{L_k(i_k, \dots, i_s)\}_{i_k=1}^{\infty} \notin \mathbf{b}^{(m_k)}$:

return «Ошибка: размерность k не удовлетворяет условиям»

else:

 # Применить $d^{(m_k)}$ -преобразование (Лемма 1)

for каждого фиксированного набора (i_{k+1}, \dots, i_s) :

 Вычислить частичные суммы A_{R_l} (аналогично формуле (6))

 Вычислить конечные разности требуемых порядков # Определение 5

 Построить и решить систему уравнений (аналогичную (10))

 Результат записать в $L_{k+1}(i_{k+1}, \dots, i_s)$

return L_{s+1}

Рисунок 3. Псевдокод для последовательного d -преобразования для s -мерных рядов.

Вход: $a[i, j] = \frac{1}{i^2 + j}$, $m = [1, 2]$, $R = [[5, 10], [4, 8]]$

Выход: $L_{s+1} = 2.721$

Рисунок 4. Пример применения последовательного d -преобразования для s -мерных рядов.

Факториальное $d^{(m)}$ -преобразование

Путём переписи асимптотических разложений функций $g_k(n)$ из (9) в других формах, получаем другие варианты d -преобразования [11]. Например, произвольный асимптотический ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{n^i}$ при $n \rightarrow \infty$ можно также представить в виде $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{\gamma}_i}{(n)_i}$ при $n \rightarrow \infty$, где $(n)_0 = 1$ и $(n)_i = \prod_{k=0}^{i-1} (n + s)$, $i \geq 1$. Здесь $\hat{\gamma}_i = \gamma_i$ для $0 \leq i \leq 2$, $\hat{\gamma}_3 = \gamma_2 + \gamma_3$, и так далее. Для каждого i коэффициент $\hat{\gamma}_i$ однозначно определяется значениями $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_i$. Если теперь переписать асимптотические разложения $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{g_{ki}}{(n)_i}$ при $n \rightarrow \infty$ в форме $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{g}_{ki}}{(n)_i}$ при $n \rightarrow \infty$ и продолжить аналогичным образом, можно определить факториальное $d^{(m)}$ -преобразование для бесконечных рядов с помощью линейных уравнений:

$$A_{R_l} = d_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^m R_l^k (\Delta^{k-1} a_{R_l}) \sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{\overline{\beta k_l}}{(R_l + \alpha)_i}, \quad j \leq l \leq j + N,$$

$$N = \sum_{k=1}^m n_k. \quad (11)$$

И для бесконечных последовательностей с помощью линейных уравнений:

$$A_{R_l} = d_n^{(m,j)} + \sum_{k=1}^m \left[R_l^k (\Delta^k A_{R_{l-1}}) \sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{\overline{\beta k_l}}{(R_l + \beta)_i} \right], j \leq l \leq j + N;$$

$$N = \sum_{k=1}^m n_k.$$

Псевдокод для факториального $d^{(m)}$ -преобразования представлен на Рисунке 5, а пример его применения представлен на Рисунке 6.

Вход: ряд S в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $\{a_n\}$ – последовательность с асимптотикой вида (9), $m \geq 1$ – порядок преобразования (*Теорема 1*), α – параметр сдвига, $\{R_l\}$ – последовательность точек (*Определение 5*)

Выход: приближение $d_n^{(m,j)}$

#Проверить соответствие асимптотики

if $\{a_n\}$ не соответствует формуле (9):

 return "Ошибка: неверный тип асимптотики"

else:

 for l от j до $j + N - 1$ ($N = \sum_{k=1}^m n_k$):

 Вычислить частичные суммы A_n для $n \in \{R_l\}$ (аналогично формуле (6))

 for i от 0 до n_{k-1} :

 Вычислить факториальные члены $(R_l + \alpha)_i$ из (11)

 Сформировать уравнение (11)

 Решить систему линейных уравнений (11) относительно $d_n^{(m,j)}$ и βk_i

return $d_n^{(m,j)}$

Рисунок 5. Псевдокод для факториального $d^{(m)}$ -преобразования.

Вход: $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, $m = 1$, $\alpha = 1$, $R_l = [3, 6, 9]$

Выход: $d_n^{(m,j)} = 0.997$

Рисунок 6. Пример применения факториального $d^{(m)}$ -преобразования.

H-трансформация

Метод, называемый H -преобразованием, был предложен Хомейером [18] для ускорения сходимости рядов Фурье по синусам и косинусам. Рассмотрим это преобразование, так как оно является частным случаем $GREP^{(2)}$ и вариантом $d^{(m)}$ -преобразования. Пусть дан ряд Фурье:

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (b_k \cos kx + c_k \sin kx),$$

а его частичные суммы имеют вид:

$$S_n = \sum_{k=0}^n (b_k \cos kx + c_k \sin kx), \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда приближение $H_n^{(j)}$ к сумме этого ряда определяется через линейную систему:

$$S_l = H_n^{(j)} + r_l \left[\cos lx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\bar{\beta}_i}{(l+\delta)^i} + \sin lx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\bar{\gamma}_i}{(l+\delta)^i} \right], \quad j \leq l \leq j+2n, \quad (12)$$

где

$$r_n = (n+1)M(b_n, c_n), \quad M(p, q) = \begin{cases} p, & \text{если } |p| > |q| \\ q & \text{в ином случае} \end{cases}, \quad (13)$$

а δ - некоторая фиксированная константа. Здесь $\bar{\beta}_i$ и $\bar{\gamma}_i$ — дополнительные вспомогательные неизвестные. Хомейер предложил эффективный рекуррентный алгоритм для реализации H -преобразования, отличающийся высокой экономичностью.

Однако у этого преобразования есть два недостатка [11]:

- 1) Ограниченное применение: класс рядов Фурье, для которых метод работает успешно, довольно узок. Это видно при сравнении уравнений (12) с определяющими уравнениями для $d_{(n,n)}^{(2,j)}$:

$$S_{R_l} = d_{(n,n)}^{(2,j)} + a_{R_l} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\bar{\beta}_i}{R_l^i} + \Delta a_{R_l} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\bar{\gamma}_i}{R_l^i}, \quad j \leq l \leq j+2n,$$

где $a_n = b_n \cos nx + c_n \sin nx$, при специальном выборе R_l , а именно $R_l = l+1$. Таким образом, $d_{(n,n)}^{(2,l)}$ и $H_n^{(j)}$ используют практически одинаковое количество членов ряда $F(x)$. Уравнения в (12) сразу же показывают, что H -преобразование может быть эффективным, когда

$$S_n \sim S + r_n \left[\cos nx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta_i}{n^i} + \sin nx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_i}{n^i} \right], \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть, когда S_n связана с функцией $A(y) \in F^{(2)}$. Такая ситуация возможна только тогда, когда $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ оба принадлежат классу $b^{(1)}$. Учитывая это, становится ясно, что, если хотя бы одна из последовательностей $\{b_n\}$ или $\{c_n\}$ (или обе) принадлежат классу $b^{(s)}$ при $s > 1$, H -преобразование перестаёт быть эффективным. В отличие от этого, $d^{(m)}$ — преобразование при подходящем значении $m > 2$ остаётся эффективным.

В качестве примера рассмотрим [11] ряд косинусов $F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos kx$, где $b_n = P_n(t)$ — полиномы Лежандра. Поскольку $\{b_n\} \in b^{(2)}$, получаем, что $\{b_n \cos nx\} \in b^{(4)}$. В этом случае:

- 1) $d^{(4)}$ — преобразование может быть применено напрямую к $F(x)$;
 - 2) $d^{(2)}$ -преобразование с использованием комплексного подхода также применимо и требует примерно вдвое меньше вычислений по сравнению с прямым методом;
 - 3) H -преобразование неэффективно.
- 2) Из определения r_n очевидно [11], что предполагается доступность b_n и c_n . В таком случае, $d^{(1)}$ -преобразование с $R_l = l + 1$ (которое является ничем иным, как преобразованием Левина) в сочетании с комплексным подходом обеспечивает требуемую точность при примерно вдвое меньших вычислительных затратах по сравнению с H -преобразованием, когда последнее применимо. Разумеется, лучшая устойчивость и точность достигаются при использовании $d^{(1)}$ -преобразования с APS вблизи точек сингулярности.

Псевдокод для последовательного H -преобразования представлен на Рисунке 7, а пример его применения представлен на Рисунке 8.

Вход: ряд Фурье $F(x)$ (определение перед (12)), $n \geq 1$ - порядок преобразования, $\delta > 0$ – параметр сдвига, коэффициенты $\{b_n\}, \{c_n\} \in b^{(1)}$ (следует из условия эффективности H -преобразования)

Выход: приближение $H_n^{(j)}$

if $\{b_n\}, \{c_n\} \notin b^{(1)}$:

return "Ошибка: коэффициенты не $\in b^{(1)}$ "

else:

for l от j до $j + 2n - 1$:

Вычислить частичную сумму ряда Фурье $S_l = \sum_{k=0}^l (b_k \cos kx + c_k \sin kx)$

Вычислить r_l (аналогично (13))

Сформировать уравнение (12)

Решить систему линейных уравнений (12) относительно $H_n^{(j)}, \gamma_i, \beta_i$

return $H_n^{(j)}$

Рисунок 7. Псевдокод для H -преобразования.

Вход: $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}, n = 2, \delta = 0.5, \{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}, \{c_n\} = \{0\}$

Выход: $H_n^{(j)} = 1.064$

Рисунок 8. Пример применения H -преобразования.

Заключение

Полученные преобразования могут быть применены к широкому классу последовательностей, включая, среди прочего, линейные и общие линейные последовательности, где обычно применяется ε -алгоритм. Они были созданы на основе строгого анализа асимптотических разложений хвостов бесконечных рядов. В некоторых частных случаях приближения, полученные с помощью $d^{(m)}$ -преобразования, совпадают с теми, которые даёт преобразование Шенкса.

Список литературы

- [1] Rational approximants defined from double power series // J. S. R. Chisholm. – 1973. – P. 941-848.
- [2] General Rational approximants in N variables // D. Levin. – 1976. – P. 1-8.
- [3] On accelerating the convergence of infinite double series and integrals // D. Levin. – 1980. – P. 1331-1980.
- [4] The $d_{(2)}$ -transformation for infinite double series and the $D_{(2)}$ -transformation for infinite double integrals. // E. Houle, Lothar Reichel – 1998. – P. 695-714.
- [5] Extrapolation Methods for infinite multiple series and integrals // D. Levin, A. Sidi – 2001. – P. 167-184.
- [6] Two new classes of nonlinear transformations for accelerating the convergence of infinite integrals and series // D. Levin, A. Sidi – 1975. – P. 175-215.
- [7] Further convergence and stability results for the generalized Richardson extrapolation process $GREP^{(1)}$ with and application to the $D^{(1)}$ -transformation for infinite integrals // A. Sidi. – 1999. – P. 153-167.
- [8] An algorithm for a generalization of the Richardson extrapolation process // W. F. Ford and A. Sidi. – 1987. – P. 1212-1232.
- [9] Exponential function approximation to Laplace transform inversion and development of non-linear methods for accelerating the convergence of infinite integrals and series // I. M. Longman. – 1977.
- [10] Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // D. Levin. – 1975. – P. 371-388, 1331-1345.
- [11] Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications // A. Sidi – 2003. – P. 121-157, 238-250, 253-261, 363-371.
- [12] An algorithm for a special case of a generalization of the Richardson extrapolation process // A. Sidi. – 1982. – P. 223-233.
- [13] Acceleration of linear and logarithmic convergence // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1979. – P. 223-240.
- [14] Numerical comparisons of nonlinear convergence accelerators // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1982. – P. 481-499.
- [15] A new method for deriving Pade approximants for some hypergeometric functions // A. Sidi. – 1981. – P. 37-40.
- [16] A Maple package for transforming sequences and functions // J. Grotendorst. – 1991. – P. 325-342.
- [17] A Levin-type algorithm for accelerating the convergence of Fourier series // H. H. H. Homeier. – 1992. – P. 245-254.