Введение

Полезность нелинейных преобразований последовательностей для улучшения и даже индуцирования сходимости была достаточно продемонстрирована Шенксом [2]. Однако эвристическая основа преобразований Шенкса имеет некоторые недостатки. Путём соответствующей модификации, предложенной Левиным, генерируются преобразования, которые дают значительное улучшение по сравнению с преобразованиями Шенкса. Дополнительным преимуществом является то, что преобразования выражены в простой замкнутой форме без необходимости вычисления высокопорядковых детерминант, как это происходит в некоторых преобразованиях Шенкса.

От Шенкса к Левину

Для последующего упоминания резюмируем подход Шенкса и преобразования, которые он получает [2]. Шенкс начинает с последовательности

$$A = \{A_r\}, \qquad r = 0, 1, 2, \ . \ . \ ., \tag{1}$$

и, сравнивая её с представлением A_r как функции от r вида

$$A_r = B + \sum_{i=1}^{k} a_i q_i^r \qquad (q_i \neq 1,0)\,, \tag{2}$$

он может вычислить её «спектр амплитуд» a_i, её «отношения» q_i и её «базу» B.

<u>*Определение 1*</u>: «спектр амплитуд» a_i, «отношения» q_i и её «база» B определяются как параметры, характеризующие поведение последовательности A_r в представлении (2). «Спектр амплитуд» a_i описывает веса различных экспоненциальных компонент, «отношения» q_i задают скорости изменения этих компонент, а «база» B при удовлетворении $\{A_r\}$ уравнению (2) и удовлетворении каждого отношения $|q_i| < 1$ представляет собой предел последовательности при $r \to \infty$:

$$B = \lim_{r\to\infty} A_r. \tag{3}$$

<u>*Определение 2*</u>: если $\{A_r\}$ удовлетворяет уравнению (2) и одно или более $|q_i| \geq 1$, A_r не сходится, тогда Шенкс утверждает [1], что «A_r расходится от B», и называется «антипределом» $\{A_r\}$. На практике антипредел предоставляет механизм для применения методов ускорения сходимости к последовательностям, которые формально расходятся. Это позволяет использовать преобразования, такие как методы Шенкса [2] или Эйлера [3], для извлечения значимых числовых результатов из последовательностей, не имеющих предела в классическом смысле.

Но многие последовательности, которые возникают естественным образом при решении задач, не могут быть представлены в виде (2), но можно во многих случаях сказать, что $\{A_r\}$ почти k-го порядка для некоторого k, по крайней мере для r больше некоторого фиксированного N [1]. Тогда по аналогии с (2) стремимся определить локальную базу k-го порядка B_{kn}, решая $2k + 1$ уравнений

$$A_r = B_{kn} + \sum_{i=1}^{k} a_{in} q_{in}^r, \qquad n - k \leq r \leq n + k, \qquad n \geq k, \qquad (q_{in} \neq 1, 0) \tag{4}$$

(которые центрированы вокруг A_n) для $2k+1$ величин B_{kn}, a_{in}, q_{in} $(i = 1, 2, \ldots, k)$, и рассматриваем B_{kn} как метод сходимости для $\{A_r\}$.

<u>*Определение 3*</u>: локальная база k-го порядка B_{kn}определяется решением системы уравнений, аналогичной (2), для последовательностей, которые не могут быть точно представлены в виде (2), но имеют поведение, близкое к нему. Локальная база позволяет анализировать и ускорять сходимость последовательностей, которые формально расходятся.

Алгебраически получаем для B_{kn} формулу

$$B_{kn} = \frac{\begin{vmatrix} A_{n-k} & \cdots & A_{n-1} & A_n \\ \Delta A_{n-k} & \cdots & \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \\ \Delta A_{n-k+1} & \cdots & \Delta A_n & \Delta A_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \Delta A_{n-1} & \cdots & \Delta A_{n+k-2} & \Delta A_{n+k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \Delta A_{n-k} & \cdots & \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \\ \Delta A_{n-k+1} & \cdots & \Delta A_n & \Delta A_{n+1} \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ \Delta A_{n-1} & \cdots & \Delta A_{n+k-2} & \Delta A_{n+k-1} \end{vmatrix}}, \tag{5}$$

где

$$\Delta A_n = A_{n+1} - A_n. \tag{6}$$

Тогда преобразование Шенкса [1] определяется как

$$e_k(A)_n = e_k(A_n) = B_{kn} \qquad (n \geq k), \tag{7}$$

а диагональное или e_d преобразование Шенкса как

$$e_d(A)_n = e_d(A_n) = B_{nn}. \tag{8}$$

Обозначим

$$\Delta A_n = a_{n+1}, \tag{9}$$

таким образом,

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\,, \tag{10}$$

если определим

$$a_0 = A_0. \tag{11}$$

Таким образом, идентифицируем члены последовательности $\{A_r\}$ с частичными суммами бесконечного ряда

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i \,. \tag{12}$$

Тогда можем легко проверить, что (5) для B_{kn} также получается, если решим для B_{kn} систему уравнений

$$A_r = B_{kn} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{in} a_{r+i+1} \qquad n-k \le r \le n \qquad n \ge k. \tag{13}$$

Здесь имеется только $k+1$ уравнений для $k+1$ величин B_{kn} и β_{in} с $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

Идея Шенкса заключается в том, чтобы рассматривать A_r как функцию r [2], вычисленную для целых значений r, и аппроксимировать эту функцию как сумму степеней с произвольными коэффициентами, как в (2), и таким образом, получать информацию о поведении последовательности при $r \to \infty$ из конечного числа членов последовательности. В соответствии с (13), видим, что также можем рассматривать эту аппроксимацию функции A_r как аппроксимацию с помощью линейной комбинации функций a_m (как функций от m) для $r+1 < m \le k+r$ с произвольными коэффициентами и включая константный член B_{kr}. Шенкс показывает в своей статье, что если A_r являются частичными суммами степенного ряда разложения рациональной функции от z, то преобразование e_k работает наиболее эффективным образом, так что при достаточно больших k и $e_k(A_n)$ является точно этой рациональной функцией во всей z-плоскости. Однако функции a_n очень похожи друг на друга, и кажется, неэффективным аппроксимировать функцию A_r с помощью линейной комбинации таких положений функций, как это делается в (13).

Кроме того, аппроксимация A_r с помощью линейной комбинации степеней может быть не подходящей для последовательностей, скорость сходимости или расходимости которых меньше скорости, с которой q^r стремится к нулю или к бесконечности соответственно. В качестве примеров можно упомянуть последовательности $A_r = r^{-2}$ и $A_r = r^2$.

Алгоритм Левина

Алгоритм Левина [1] относится к классу нелинейных методов ускорения сходимости и основывается на построении преобразований, полученных в результате аппроксимации A_r с помощью других функций от r. Он имеет несколько вариаций. Рассмотрим каждую из них.

t-преобразование. По аналогии с (13) записываем $k+1$ уравнений для последовательности $A = \{A_r\}$ [1]:

$$A_r = T_{kn} + R_k(r) \qquad n \le r \le n+k, \tag{14}$$

где $R_k(r)$ – функции от r, включающие k произвольных констант, и стремимся решить систему (14) для T_{kn} полагая, что T_{kn} должно быть аппроксимацией предела последовательности A. Если последовательность A расходится, но одномерная последовательность $\{B_r\}$, которую можем сформировать из T_{kn}, стремится к пределу b, то будем называть b антипределом $A = \{A_r\}$ относительно соответствующего преобразования.

В случае $k = 1$ получаем два уравнения

$$A_r = T_{1n} + R_1(r) \qquad r = n_1, \qquad n+1 \tag{15}$$

и хотим выбрать $R_1(r)$ такое, чтобы

$$T_{1n} \doteqdot b, \tag{16}$$

то есть, чтобы

$$R_1(r) \doteqdot A_r - b. \tag{17}$$

Предположим, что каким-то образом нашли функцию $R_1(r)$. Тогда очевидно, что желательно улучшить эту аппроксимацию, поэтому для $k > 1$ определяем

$$R_k(r) = R_1(r) \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{in} f_i(r), \tag{18}$$

где γ_{in} – константы, которые должны быть определены из (14), в то время как $f_i(r)$ – функции от r, которые выберем на основе удобства и взаимной независимости. Уравнения (14) теперь принимают форму:

$$A_r = T_{kn} + R_1(r) \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{in} f_i(r) \qquad n \le r \le n+k. \tag{19}$$

Для удобства обозначим $R_r \equiv R_1(r)$, и получаем T_{kn} с помощью правила Крамера:

$$T_{kn} = \frac{\begin{vmatrix} A_n & A_{n+1} & \cdots & A_{n+k} \\ R_n f_0(n) & R_{n+1} f_0(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_0(n+k) \\ R_n f_1(n) & R_{n+1} f_1(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_n f_{k-1}(n) & R_{n+1} f_{k-1}(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_{k-1}(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ R_n f_0(n) & R_{n+1} f_0(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_0(n+k) \\ R_n f_1(n) & R_{n+1} f_1(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_n f_{k-1}(n) & R_{n+1} f_{k-1}(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_{k-1}(n+k) \end{vmatrix}}. \tag{20}$$

Детерминанты в T_{kn} не удобны для вычислений в общем случае, но для частного случая

$$f_i(r) \equiv r^{-i} \tag{21}$$

и при условии, что $R_n \neq 0$ для любого n, можем легко выразить их через детерминанты Вандермонда, деля последовательные столбцы на $R_n, R_{n+1}, \dots, R_{n+k}$ соответственно и разлагая по первой строке. Это элементарное вычисление даёт нам результат

$$T_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{A_{n+j}}{R_{n+j}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{1}{R_{n+j}}}. \tag{22}$$

Теперь нам нужно подходящее выражение для $R_r \equiv R_1(r)$, которое обладает свойством, выраженным в (17).

По аналогии с (13) теперь записываем $k+1$ уравнений для последовательности $A = \{A_r\}$.

Стоит учитывать, что, следуя Шенксу, нумерация членов последовательности начинается с A_0. Однако дальше в некоторых случаях будет удобнее начинать с A_1 как с первого члена последовательности.

Известные преобразования, такие как e_k и преобразования Эйлера, часто значительно улучшают сходимость последовательностей, сформированных из частичных сумм чередующихся рядов:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} d_k\,; \qquad d_k > 0, \qquad n = 1,2,\dots \tag{23}$$

Соответственно, сначала рассмотрим оценку для $R_1(r)$, которая подходит для таких последовательностей. Если предполагаем, что d_n является достаточно гладкой функцией от n, и что

$$\lim_{n\to\infty} A_n = d \tag{24}$$

(когда последовательность расходится, d – антипредел), то очевидно, что

$$A_r - d = O(d_r) \tag{25}$$

и более точно

$$A_r - d \doteq \frac{1}{2}(-1)^{r+1} d_r = \frac{1}{2}\Delta A_{r-1} \tag{26}$$

В соответствии с (19) видим, что достаточно выбрать $R_1(r)$ с точностью до константного множителя, и поэтому берём

$$R_1(r) = \Delta A_{r-1} = a_r. \tag{27}$$

Кроме того, $R_1(r) = a_r$ является хорошей аппроксимацией для последовательности, которая расходится очень быстро, так как тогда A_r имеет порядок величины $\Delta A_{r-1} = a_r$, и если A имеет антипредел b относительно разрабатываемого преобразования, то для больших r

$$A_r - b \doteq A_r \doteq a_r, \tag{28}$$

что именно то, что требуется от $R_1(r)$ (см. (17)). Соответственно, принимая $R_1(r) = a_r$, можем ожидать получения из (22) хороших аппроксимаций к пределу или антипределу последовательности, сгенерированной частичными суммами чередующегося ряда, и к антипределу очень быстро сходящегося ряда.

При условии, что $a_r \neq 0$ для всех $r \geq 1$, подставляем $R_r \equiv R_1(r) = a_r$ в (22) и получаем

$$T_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{A_{n+j}}{a_{n+j}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{1}{a_{n+j}}}. \tag{29}$$

Видим из (29), что T_{kn} является взвешенным средним последовательности и использует $A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+k}$, а сами веса зависят от $A_{n-1}, A_{n_1}, \dots, A_{n+k}$. Таким образом, преобразование, заданное двумерной таблицей T_{kn}, является нелинейным. Псевдокод для t-преобразования представлен на *Рисунке 1*, а пример его применения представлен на *Рисунке 2*.

```
Вход: ряд A, представленный в виде ∑_{m=1}^{n} a_m, параметр k - порядок преобразования

Выход: ускоренная последовательность T_kn, полученная путём применения t-преобразования


Получить ряд A и параметр k

if длина(A) мала then
        return 0
for n от 0 до длина(A) - 1:
        if n < k then
                T_kn[n] = 0
        else
                # Использовать формулу (29) для вычисления T_kn[n]
                Вычислить числитель
                Вычислить знаменатель
                T_kn[n] = числитель / знаменатель
return T_kn
```

Рисунок 1. Псевдокод для t-преобразования.

Вход: A = $\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{2m-1}$, k = 2

Выход: T_kn = 0.7857

Рисунок 2. Пример применения t-преобразования.

Теперь определим t_k преобразование аналогично e_k преобразованию Шенкса:

$$t_k(A)_n = T_{kn}. \tag{30}$$

Также определяем преобразование t_d

$$t_d(A)_n = T_{n1}. \tag{31}$$

Это определение не соответствует диагональному преобразованию e_d Шенкса, но t_d и e_d имеют общее – для последовательности $A = \{A_r\}$, начиная с A_1, ассоциируем последовательность $A' = \{A'_r\}$ согласно

$$A'_i = A_{i+1} \qquad i = 0,1,2, \dots , \tag{32}$$

так что A' начинается с A'_0, тогда как $t_d(A)_{2n}$, так и $e'_d(A)_n$ зависят лишь от $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$. Предполагаем обозначить это слегка модифицированное диагональное преобразование Шенкса (лишь в индексации) как e'_d:

$$e'_d(A)_{n+1} = e_d(A')_n. \tag{33}$$

Таким образом, можем сказать, что $t_d(A)_{2n}$ и $e'_d(A)_n$ оба зависят от первых $2n +$ 1 элементов $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ последовательности A. Также в ряде случаев e'_d и t_d оказываются наиболее эффективными преобразованиями из e_k и t_k соответственно.

Важно отметить принципиальную разницу между t- и e-преобразованиями. Обращаясь к (5) и (29), видим, что способ нумерации членов последовательности влияет на t, но не на e-преобразования, так как индекс n появляется (то есть не только как индекс) в формуле для T_{kn}, но не в формуле для B_{kn}. Таким образом, t_k на самом деле представляет собой целую последовательность преобразований в зависимости от того, как нумеруем первый член последовательности. Например, можно нумеровать члены последовательностей с A_1, но нетрудно придумать примеры (например, частичные суммы экспоненциального ряда e^{-x} для больших положительных x), где другая нумерация даёт лучшие результаты.

Свойства t_k- и t_d-преобразований. Преобразования t_k, t_d, или в общем, любое преобразование t, которое можно сформировать из T_{kn} (29), не являются линейными, но, как и с преобразованиями Шенкса, есть два простых, но важных свойства [1]:

$$t(A + C) = t(A) + \text{c} \qquad n > 1 \tag{34}$$

$$t(\gamma \cdot A) = \gamma \cdot t(A), \tag{35}$$

где C используется для обозначения последовательности

$$C = \{C_n\}; \qquad C_n = c, \tag{36}$$

содержащей каждый член, равный одной и той же константе c. Доказательство этого элементарно.

Преобразования t_k, t_d не являются регулярными, то есть существуют сходящиеся последовательности, для которых t_k и t_d приводят к последовательностям, которые расходятся или имеют другой предел, но если A является последовательностью частичных сумм сходящегося ряда, то $t_k(A)$ и $t_d(A)$ сходятся к пределу A. Это можно показать, записав преобразование t_k, например, в форме метода суммирования γ_{ij}: $T_k(A)_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{ij} A_j$, где $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(A)$. Тогда для фиксированного чередующегося ряда A можем использовать теорему Сильвермана-Тёплица, чтобы показать, что $\gamma_{ij}(A)$ является регулярным методом суммирования, который, в частности, суммирует A к его пределу.

Покажем, в какой степени улучшение сходимости – общее правило. Укажем улучшение, достигнутое t_1, t_2 при применении к определённому классу чередующихся рядов. В первую очередь, можем отметить из выражений для t_k и e_k, что $t_1 = e_1$. Кроме того, для e_1 Шенкс доказал следующий результат [1].

Если $f(m)$, $g(m)$ – полиномы степеней M_1, M_2 соответственно, и $g(m)$ не обращается в ноль при m – положительном целом числе или нуле, и если

$$A_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{f(m)}{g(m)}, \tag{37}$$

то

$$\Delta e_1(A)_n = \Delta A_n \left[\frac{M_1 - M_2}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]. \tag{38}$$

Это даёт меру улучшения сходимости, достигнутого $e_1 = t_1$, при применении к последовательности (37). Теперь установим результат этого типа для t_2.

Предположим теперь, что $A = \{A_n\}$ является последовательностью

$$A_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{x^m}{h(m)}, \tag{39}$$

когда $x \neq 1$ и $h(m)$ имеет разложение вида

$$h(m) = m^k + O(m^{k-1}) \tag{40}$$

и $h(m) \neq 0$ для m – положительного целого числа. Тогда нетрудно по вычислению, аналогичному тому, что у Шенкса, показать, что

$$\Delta t_2(A)_n = \Delta A_n \cdot O\left(\frac{1}{n^k}\right). \tag{41}$$

Легко показать, что, если A сходится, $t_2(A)$ сходится к тому же пределу, и (41) показывает улучшение, достигнутое в скорости сходимости.

u-преобразование. Рассмотрим последовательность

$$A_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m_2}, \tag{42}$$

для которой

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{\pi^2}{6} = 1.64493046\ldots \tag{43}$$

Как объяснялось раннее, не ожидается, что e'_k или t_d будут особенно эффективны для этого ряда, и вычисления это подтверждают [1]. Однако простым изменением T_{kn} можно получить преобразование, которое даёт очень хорошие результаты для таких медленно сходящихся монотонных рядов.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad a_n > 0, \tag{44}$$

когда a_n имеет асимптотическое разложение

$$a_n = n^{-k} + \gamma n^{-k-1} + O(n^{-k-2}), \tag{45}$$

и $k > 1$, так что ряд сходится. Пробуем получить выражение для $R_1(r)$, которое подходит для такого рода. Запишем

$$A_r = \sum_{n=1}^{r} a_n, \tag{46}$$

и тогда в соответствии с (17) нам нужно

$$R_1(r) \doteqdot A_r - \lim_{n\to\infty} A_n = \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n\,. \tag{47}$$

Можем легко оценить этот остаток, рассматривая выражение (45) для a_n как функцию от n, определённую для всех положительных действительных n, и сравнивая

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} a_n$$

с интегралом

$$\int_r^{\infty} a_n\, dn.$$

Таким образом, находим

$$R_1(r) \doteqdot \frac{r^{-k}+1}{-k+1} + O(r^{-k}) = \frac{r a_r}{1-k}\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right], \tag{48}$$

и так как достаточно определить $R_1(r)$ с точностью до константного множителя, то целесообразно взять

$$R_1(r) = r a_r. \tag{49}$$

Подставляем это в (22) и получаем величину U_{kn}, заданную

$$U_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-2} \frac{A_{n+j}}{a_{n+j}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-2} \frac{1}{a_{n+j}}}. \tag{50}$$

Здесь стоит отметить, что это уравнение для U_{kn} очень похоже на (29) для T_{kn} и может быть получено из (19), взяв $R_1(r) = a_r$ как прежде, но выбрав $f_i(r) = r^{1-i}$ вместо r^{-i} как в (21). Псевдокод для u-преобразования представлен на <u>*Рисунке 3*</u>, а пример его применения представлен на <u>*Рисунке 4*</u>.

Вход: ряд A, представленный в виде $\sum_{m=1}^{n} a_m$, параметр k - порядок преобразования

Выход: ускоренная последовательность U_kn, полученная путём применения u-преобразования

```
Получить ряд A и параметр k
if длина(A) мала then
    return 0
for n от 0 до длина(A) - 1:
    if n < k then
        U_kn[n] = 0
    else
        # Использовать формулу (50) для вычисления U_kn[n]
        Вычислить числитель
        Вычислить знаменатель
        U_kn[n] = числитель / знаменатель
return U_kn
```

Рисунок 3. Псевдокод для u-преобразования.

Вход: A = $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2}$, k = 4

Выход: U_kn = 1.644934066

Рисунок 4. Пример применения u-преобразования.

Так же, как с помощью T_{kn} определили t-преобразования, теперь определяем u-преобразования с помощью U_{kn}. В особенности, определяем

$$u_k(A)_n = U_{kn}, \tag{51}$$

$$u_n(A)_n = U_{n1}. \tag{52}$$

Как для t-преобразований, наблюдаем, что u-преобразования удовлетворяют условиям (34) и (35), и можем показать, что последовательности частичных сумм сходящихся чередующихся рядов преобразуются в последовательности, сходящиеся к тому же пределу, и кажется, что для таких последовательностей t и u оказывают примерно одинаковую степень улучшения скорости сходимости. Однако для медленно сходящихся монотонных последовательностей u-преобразования более эффективны.

v-преобразования. v-преобразование, которое сейчас будет представлено, является примером использования известных преобразований для получения более эффективных преобразований. Начнём с преобразования $t_1 = e_1$, применённого к любой последовательности $A = (A_n)$ [1]:

$$e_1(A)_n = \frac{A_{n-1}a_{n+1} - A_n a_n}{a_{n+1} - a_n} = A_n + \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}}. \tag{53}$$

Предполагая, что $e_1(A)_n$ является аппроксимацией предела или антипредела A, можем использовать (17), чтобы получить выражение для $R_1(r)$:

$$R_1(r) \doteqdot A_r - b \doteqdot A_r - e_1(A)_r \doteqdot \frac{a_r a_{r+1}}{a_{r+1} - a_r}. \tag{54}$$

Подстановка этого значения для $R_1(r)$ в (22) даёт

$$V_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{n+j-1} - a_{n+j}}{a_{n+j}a_{n+j+1}} A_{n+j}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{n+j-1} - a_{n+j}}{a_{n+j}a_{n+j+1}}}. \tag{55}$$

Псевдокод для v-преобразования представлен на *Рисунке 5*, а пример его применения представлен на *Рисунке 6*.

Вход: ряд A, представленный в виде $\sum_{m=1}^{n} a_m$, параметр k - порядок преобразования

Выход: ускоренная последовательность V_kn, полученная путём применения v-преобразования

Получить ряд A и параметр k

if длина(A) мала **then**

    return 0

for n от 0 до длина(A) - 1:

    if n < k **then**

        V_kn[n] = 0

    else

        # Использовать формулу (55) для вычисления V_kn[n]

        Вычислить числитель

        Вычислить знаменатель

        V_kn[n] = числитель / знаменатель

return V_kn

Рисунок 5. Псевдокод для v-преобразования.

Вход: A = $\sum_{m=1}^{n} \frac{(-2)^m}{m}$, k = 3

Выход: V_kn = 1.09854227

Рисунок 6. Пример применения v-преобразования.

Используя V_{kn}, определяем v-преобразования

$$v_k(A)_n = V_{kn}, \tag{56}$$

$$v_n(A)_n = V_{n1}. \tag{57}$$

Также v-преобразования имеют свойства (34) и (35), и они регулярны для последовательностей, сгенерированных как частичные суммы чередующихся рядов. v-преобразования так же хороши, как t- или u-, разница же заключается в том, что они хороши для обоих типов рядов.

Заключение

Полученные преобразования могут быть применены к вычислению бесконечных интегралов от осциллирующих функций путём интегрирования между нулями функции, а затем преобразования полученного чередующегося ряда. Также, как другое применение, можно упомянуть улучшение простой численной интеграции.

Во многих случаях последовательность будет монотонной, и тогда обычные методы для ускорения сходимости не так эффективны. Но тогда u- или v-преобразование должно быть подходящим.

Преобразования t-, u-, v- могут быть использованы для генерации рациональных аппроксимаций функций $f(z)$, имеющих формальные разложения в степенные ряды. При определённых условиях эти аппроксимации превосходят сопоставимые члены таблицы Паде функции $f(z)$.

Список литературы

1. Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // International Journal of Computer Mathematics // Levin D. A. - 1972. – P. 371-388.
2. Non-Linear Transformations of Divergent and Slowly Convergent Sequences // Shanks D. C. – 1955. – P. 1-42.
3. A continuous Euler transformation and its application to the Fourier transform of a slowly decaying function // Journal of Computational and Applied Mathematics // Ooura T. – 2001. – P. 259-270.