Введение

Полезность нелинейных преобразований последовательностей для улучшения и даже индуцирования сходимости была достаточно продемонстрирована Шенксом [2]. Однако эвристическая основа преобразований Шенкса имеет некоторые недостатки. Путём соответствующей модификации, предложенной Левиным, генерируются преобразования, которые дают значительное улучшение по сравнению с преобразованиями Шенкса. Дополнительным преимуществом является то, что преобразования выражены в простой замкнутой форме без необходимости вычисления высокопорядковых детерминант, как это происходит в некоторых преобразованиях Шенкса.

От Шенкса к Левину

Для последующего упоминания резюмируем подход Шенкса и преобразования, которые он получает [2]. Шенкс начинает с последовательности частичных сумм ряда

$$A = \{A_r\}, \qquad r = 0, 1, 2, \ . \ . \ . ,$$

и, сравнивая её с представлением A_r как функции от r вида

$$A_r = B + \sum_{i=1}^{k} a_i q_i^r, \qquad (q_i \neq 1{,}0)\,, \tag{1}$$

он может вычислить её спектр амплитуд (англ. spectrum of amplitudes) a_i, её отношения (англ. ratios) q_i и её базу (англ. base) B.

Определение 1: спектр амплитуд a_i, отношения q_i и её база B определяются как параметры, характеризующие поведение последовательности A_r в представлении (1). Спектр амплитуд a_i описывает веса различных экспоненциальных компонент, отношения q_i задают скорости изменения этих компонент, а база B при удовлетворении $\{A_r\}$ уравнению (1) и удовлетворении каждого отношения $|q_i| < 1$ представляет собой предел последовательности при $r \to \infty$:

$$B = \lim_{r \to \infty} A_r.$$

Иными словами, а представлении (1) приближением моделируется поведение членов последовательности $\{A_r\}$, а не её сумма.

Определение 2: если $\{A_r\}$ удовлетворяет уравнению (1) и одно или более $|q_i| \geq 1$, A_r не сходится, тогда Шенкс утверждает [1], что «A_r расходится от B», и называется антипределом $\{A_r\}$. Теоретическая значимость антипредела заключается в возможности применять методы суммирования к расходящимся рядам, что особенно востребованно при работе с асимптотическими разложениями в теоретической физике и прикладном анализе [2, 3]. Однако точная модель (1) слишком идеализирована. Большинство реальных последовательностей не описываются ей точно. Для них используется обобщение – метод локальной аппроксимации. В данном методе требование выполнение модели (1) ослабляется: оно должно выполняться не для всех r, а только на конечном интервале индексов от $n - k$ до $n + k$. Это приводит к системе $2k + 1$ уравнений:

$$A_r = B_{kn} + \sum_{i=1}^{k} a_{in} q_{in}^r, \qquad n - k \leq r \leq n + k, \qquad n \geq k, \qquad (q_{in} \neq 1, 0), \tag{2}$$

где B_{kn} – искомая оценка предела (база), a_{in} – амплитуды i-й экспоненциальной компоненты на интервале вокруг n, q_{in} – отношения i-й экспоненциальной компоненты на интервале вокруг n. Алгебраическое решение этой системы для неизвестной B_{kn} может быть представлено в компактной форме с помощью определителей (см. (3)). Получаемая величина B_{kn} рассматривается как аппроксимация предела (или антипредела) последовательности $\{A_r\}$.

<u>*Определение 3*</u>: для последовательности $\{A_r\}$ локальной базой k-го порядка B_{kn} называется решение системы уравнений (2) относительно параметра B.

Алгебраически получаем для B_{kn} формулу

$$B_{kn} = \frac{\begin{vmatrix} A_{n-k} & \cdots & A_{n-1} & A_n \\ \Delta A_{n-k} & \cdots & \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \\ \Delta A_{n-k+1} & \cdots & \Delta A_n & \Delta A_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta A_{n-1} & \cdots & \Delta A_{n+k-2} & \Delta A_{n+k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \Delta A_{n-k} & \cdots & \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \\ \Delta A_{n-k+1} & \cdots & \Delta A_n & \Delta A_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta A_{n-1} & \cdots & \Delta A_{n+k-2} & \Delta A_{n+k-1} \end{vmatrix}}, \tag{2}$$

где

$$\Delta A_n = A_{n+1} - A_n.$$

Тогда преобразование Шенкса [1] определяется как

$$e_k(A)_n = e_k(A_n) = B_{kn}, \qquad (n \geq k),$$

а диагональное или e_d преобразование Шенкса как

$$e_d(A)_n = e_d(A_n) = B_{nn}.$$

Обозначим

$$\Delta A_n = a_{n+1}.$$

Таким образом,

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\,,$$

если определим

$$a_0 = A_0.$$

Таким образом, идентифицируем члены последовательности $\{A_r\}$ с частичными суммами бесконечного ряда $\sum_{i=2}^{\infty} a_i$. Тогда можем легко проверить, что (3) для B_{kn} также получается, если решим для B_{kn} систему уравнений

$$A_r = B_{kn} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{in} a_{r+i+1}, \qquad n-k \leq r \leq n, \qquad n \geq k, \tag{4}$$

где имеется только $k+1$ уравнений для $k+1$ величин B_{kn} и β_{in} с $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

Идея Шенкса заключается в том, чтобы рассматривать A_r как функцию r [2], вычисленную для целых значений r, и аппроксимировать эту функцию как сумму степеней с произвольными коэффициентами, как в (1), и, таким образом, получать информацию о поведении последовательности при $r \to \infty$ из конечного числа членов последовательности. В соответствии с (4), видим, что также можем рассматривать эту аппроксимацию функции A_r как аппроксимацию с помощью линейной комбинации функций a_m (как функций от m) для $r+1 < m \leq k+r$ с произвольными коэффициентами и включая константный член B_{kr}. Шенкс показывает в своей статье [2], что если A_r являются частичными суммами степенного ряда разложения рациональной функции от z, то преобразование e_k работает наиболее эффективным образом, так что при достаточно больших k и $e_k(A_n)$ является точно этой рациональной функцией во всей z-плоскости. Однако функции a_n настолько схожи между собой, что использование линейной комбинации таких, практически, идентичных функций для аппроксимации A_r, как это реализовано в (4), представляется неэффективным. Кроме того, аппроксимация A_r с помощью линейной комбинации степеней может быть не подходящей для последовательностей, скорость сходимости или расходимости которых меньше скорости, с которой q^r стремится к нулю или к бесконечности соответственно. В качестве примеров можно упомянуть последовательности $A_r = r^{-2}$ и $A_r = r^2$.

Алгоритм Левина

Алгоритм Левина [1] относится к классу нелинейных методов ускорения сходимости и основывается на построении преобразований, полученных в результате аппроксимации A_r с помощью функций от r, отличных от используемых Шенксом. Алгоритм имеет несколько вариаций. Рассмотрим каждую из них.

t-преобразование.

t-преобразование вводится для знакочередующихся рядов и последовательностей с экспоненциально убывающими членами [1], то есть случаев, когда e-преобразование Шенкса оказывается недостаточно эффективным.

По аналогии с (4) записываем $k+1$ уравнений для последовательности $A=\{A_r\}$ [1]:

$$A_r = T_{kn} + R_k(r)\,, \qquad n \le r \le n+k, \tag{5}$$

где $R_k(r)$ – функции от r, включающие k произвольных констант, и стремимся решить систему (5) для T_{kn} полагая, что T_{kn} должно быть аппроксимацией предела последовательности A. Если последовательность A расходится, но одномерная последовательность $\{B_r\}$, которую можем сформировать из T_{kn}, стремится к пределу b, то будем называть b антипределом $A=\{A_r\}$ относительно соответствующего преобразования. В случае $k = 1$ получаем два уравнения

$$A_r = T_{1n} + R_1(r), \qquad r = n_1\ n+1$$

и хотим выбрать $R_1(r)$ такое, чтобы

$$T_{1n} \doteqdot b,$$

то есть, чтобы

$$R_1(r) \doteqdot A_r - b. \tag{6}$$

Предположим, что каким-то образом нашли функцию $R_1(r)$. Тогда очевидно, что желательно улучшить эту аппроксимацию, поэтому для $k > 1$ определяем

$$R_k(r) = R_1(r)\sum_{i=0}^{k-1}\gamma_{in}f_i(r)\,,$$

где γ_{in} – константы, которые должны быть определены из (5), в то время как $f_i(r)$ – функции от r, которые выберем на основе удобства и взаимной независимости. Уравнения (5) теперь принимают форму:

$$A_r = T_{kn} + R_1(r)\sum_{i=0}^{k-1}\gamma_{in}f_i(r), \qquad n \le r \le n+k. \tag{7}$$

Для удобства обозначим $R_r \equiv R_1(r)$, и получаем T_{kn} с помощью правила Крамера [1]:

$$T_{kn} = \frac{\begin{vmatrix} A_n & A_{n+1} & \cdots & A_{n+k} \\ R_n f_0(n) & R_{n+1} f_0(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_0(n+k) \\ R_n f_1(n) & R_{n+1} f_1(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n f_{k-1}(n) & R_{n+1} f_{k-1}(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_{k-1}(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ R_n f_0(n) & R_{n+1} f_0(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_0(n+k) \\ R_n f_1(n) & R_{n+1} f_1(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n f_{k-1}(n) & R_{n+1} f_{k-1}(n+1) & \cdots & R_{n+k} f_{k-1}(n+k) \end{vmatrix}}.$$

Детерминанты в T_{kn} не удобны для вычислений в общем случае, но для частного случая

$$f_i(r) \equiv r^{-i}, \tag{8}$$

и при условии, что $R_n \neq 0$ для любого n, можем легко выразить их через детерминанты Вандермонда, деля последовательные столбцы на $R_n, R_{n+1}, \ldots, R_{n+k}$ соответственно и разлагая по первой строке. Это элементарное вычисление даёт результат

$$T_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{A_{n+j}}{R_{n+j}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{1}{R_{n+j}}}. \tag{9}$$

Теперь нужно подходящее выражение для $R_r \equiv R_1(r)$, которое обладает свойством, выраженным в (6). По аналогии с (4) теперь записываем $k+1$ уравнений для последовательности $A = \{A_r\}$. Стоит учитывать, что, следуя Шенксу, нумерация членов последовательности начинается с A_0, однако дальше в некоторых случаях будет удобнее начинать с A_1 как с первого члена последовательности.

Известные преобразования, такие как e_k, часто значительно улучшают сходимость последовательностей, сформированных из частичных сумм знакочередующихся рядов [1]:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} d_k\,; \qquad d_k > 0, \qquad n = 1,2,\ldots. \tag{10}$$

Соответственно, сначала рассмотрим оценку для $R_1(r)$ для таких последовательностей. Если предполагаем, что d_n является достаточно гладкой функцией от n, и что

$$\lim_{n\to\infty} A_n = d$$

(когда последовательность расходится, d – антипредел), то очевидно, что

$$A_r - d = O(d_r)$$

и более точно

$$A_r - d \doteqdot \frac{1}{2}(-1)^{r+1} d_r = \frac{1}{2} \Delta A_{r-1}$$

В соответствии с (7) видим, что достаточно выбрать $R_1(r)$ с точностью до константного множителя, и поэтому берём

$$R_1(r) = \Delta A_{r-1} = a_r.$$

Кроме того, $R_1(r) = a_r$ является хорошей аппроксимацией для последовательности, которая расходится очень быстро, так как тогда A_r имеет порядок величины $\Delta A_{r-1} = a_r$, и если A имеет антипредел b относительно разрабатываемого преобразования, то для больших r

$$A_r - b \doteqdot A_r \doteqdot a_r,$$

что именно то, что требуется от $R_1(r)$ (см. (6)). Соответственно, принимая $R_1(r) = a_r$, можем ожидать получения из (9) хороших аппроксимаций к пределу или антипределу последовательности, сгенерированной частичными суммами знакочередующегося ряда, и к антипределу очень быстро сходящегося ряда. При условии, что $a_r \neq 0$ для всех $r \geq 1$, подставляем $R_r \equiv R_1(r) = a_r$ в (9) и получаем

$$T_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{A_{n+j}}{a_{n+j}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{1}{a_{n+j}}}. \qquad (11)$$

Видим из (11), что T_{kn} является взвешенным средним последовательности и использует $A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+k}$, а сами веса зависят от $A_{n-1}, A_{n_1}, \dots, A_{n+k}$. Таким образом, преобразование, заданное двумерной таблицей T_{kn}, является нелинейным. Псевдокод для t-преобразования представлен на *Рисунке 1*, а пример его применения представлен на *Рисунке 2*.

Вход: a – исходный ряд, представленный в виде $\sum_{m=1}^{n} a_m$, параметр $k \geq 1$ - порядок преобразования, индекс элемента $n \geq k$

Выход: ускоренная последовательность T_{kn}, полученная путём применения t-преобразования

if $k < 1$ **or** $n < k$ **or** $(n + k) >=$ **len**(a)**:**

    return «Ошибка: некорректные параметры или не хватает членов ряда»

Строим частичные суммы A_m (аналогично (10))

$A = [0] *$ **len**(a)

$A_0 = a_0$

for m **in** **range**$(1,$ **len**$(a))$:

    $A_m = A_{m-1} + a_m$

Num, Den = 0.0, 0.0

for j **in** **range**$(0, k + 1)$:

    $idx = n + j$

    if $a_{idx} == 0$:

        return «Ошибка: деление на ноль в весовом коэффициенте»

    # Весовой коэффициент получаем по формуле (11)

    $w = (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{idx}{n + k}\right)^{k-1} \frac{1}{a_{idx}}$

    Num += A_{idx} * w # в числителе вес умножается на A_{n+j} (11)

    Den += w

if $Den == 0$:

    return «Ошибка: знаменатель = 0»

return Num / Den # результат T_{kn}

Рисунок 2. Пример применения t-преобразования.

Вход: $a = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}, k = 2, n = 5$

Выход: $T_{kn} = 0.7854$

Рисунок 2. Пример применения t-преобразования.

Теперь определим t_k-преобразование аналогично e_k преобразованию Шенкса [0, p. 7]:

$$t_k(A)_n = T_{kn}.$$

В отличие от преобразования Шенкса e_k, подход Левина является гибким – он позволяет достичь двух целей: создать универсальный алгоритм, где конкретный метод задаётся выбором оценки остатка, а не выводится заново для каждого случая, и расширить класс решаемых задач, получая преобразования (такие как u- и v-), эффективные для последовательностей, где метод Шенкса малоэффективен. Также определим преобразование t_d [1]:

$$t_d(A)_n = T_{n1}.$$

Это определение не соответствует диагональному преобразованию e_d Шенкса. И t_d, и e_d используют ровно первые $2n+1$ элементов последовательности $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}\}$. Например, для вычисления $e_d(A)_n$ требуются $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$, и для $t_d(A)_{2n}$ необходимы те же элементы. Различие заключается в том, что в преобразовании Шенкса e_d результат не зависит от нумерации элементов. Если определить новую последовательность A' со сдвигом индексов: $A'_i = A_{i+1}$ $(i = 0,1,2, \dots)$, то преобразование e'_d для A' будет эквивалентно исходному, то есть $e'_d(A)_{n+1} = e_d(A')_n$. В преобразовании Левина t_d результат зависит от нумерации. Например, $t_d(A)_{2n}$ требует, чтобы элементы были проиндексированы строго с A_1.

Свойства t_k- и t_d-преобразований.

Преобразования t_k, t_d, или в общем, любое преобразование t, которое можно сформировать из T_{kn} (11), не являются линейными, но, как и с преобразованиями Шенкса, есть два простых, но важных свойства [1]:

$$t(A + C) = t(A) + \text{c}, \qquad n > 1, \tag{12}$$

$$t(\gamma \cdot A) = \gamma \cdot t(A), \tag{13}$$

где C используется для обозначения последовательности

$$C = \{C_n\}; \qquad C_n = c,$$

содержащей каждый член, равный одной и той же константе c. Доказательство этого элементарно.

Преобразования t_k, t_d не являются регулярными, то есть существуют сходящиеся последовательности, для которых t_k и t_d приводят к последовательностям, которые расходятся или имеют другой предел, но если A является последовательностью частичных сумм сходящегося ряда, то $t_k(A)$ и $t_d(A)$ сходятся к пределу A. Это можно показать, записав преобразование t_k, например, в форме метода суммирования [1] γ_{ij}: $T_k(A)_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{ij} A_j$, где $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(A)$. Тогда для фиксированного знакочередующегося ряда A применение теоремы Сильвермана-Тёплица [4] позволяет установить регулярность метода суммирования $\gamma_{ij}(A)$. В частности, в работе [5] приведено доказательство того, что данный метод суммирует A к его пределу при выполнении условий теоремы.

Покажем, в какой степени улучшение сходимости – общее правило. Укажем улучшение, достигнутое t_1, t_2 при применении к определённому классу знакочередующихся рядов. В первую очередь, можем отметить из выражений для t_k и e_k, что $t_1 = e_1$. Кроме того, для e_1 Шенкс доказал следующий результат [1].

<u>*Определение 4*</u>: пусть для последовательности $\{A_n\}$, сходящейся к пределу B, исходная погрешность убывает как:

$$\Delta A_n = |A_n - B| = O(n^{-\alpha}),$$

а после применения преобразования φ погрешность становится:

$$\Delta\varphi(A)_n = |\varphi(A)_n - B| = O\left(n^{-\beta}\right),$$

тогда мерой улучшения сходимости называется отношение $\frac{\beta}{\alpha}$.

Шенкс показал [1], что если $f(m)$, $g(m)$ – полиномы степеней M_1, M_2 соответственно, и $g(m)$ не обращается в ноль при целых $m \geq 0$, то для последовательности

$$A_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{f(m)}{g(m)} \tag{14}$$

погрешность преобразования e_1 убывает как:

$$\Delta e_1(A)_n = \Delta A_n \left[\frac{M_1 - M_2}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right].$$

Это даёт меру улучшения сходимости, достигнутого $e_1 = t_1$, при применении к последовательности (14). Аналогичный подход применяется для t_2-преобразования. Предположим теперь, что $A = \{A_n\}$ является последовательностью

$$A_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{x^m}{h(m)},$$

когда $x \neq 1$ и $h(m)$ имеет разложение вида

$$h(m) = m^k + O(m^{k-1})$$

и $h(m) \neq 0$ для m – положительного целого числа. Из вычислений, аналогичных проведённым Шенксом [1], следует:

$$\Delta t_2(A)_n = \Delta A_n \cdot O\left(\frac{1}{n^k}\right). \tag{15}$$

Легко показать, что, если A сходится, $t_2(A)$ сходится к тому же пределу, и (15) показывает улучшение, достигнутое в скорости сходимости.

u-преобразование

u-преобразование предназначено для медленно сходящихся монотонных рядов [1], таких как:

$$A_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m_2},$$

где методы e'_d и t_d неэффективны. Связано это с тем, что их алгоритмы предполагают убывание остатка со скоростью, превышающей степенную, что не выполняется для последовательностей вида

$$A_n = O(n^{-k}).$$

Для таких рядов погрешности преобразований e'_d и t_d убывают с той же скоростью, что и исходная последовательность [1]:

$$\Delta e'_d(A)_n = O(n^{-1}), \qquad \Delta t_d(A)_n = O(n^{-1}),$$

где $\Delta A_n = O(n^{-1})$. Однако простым изменением T_{kn} можно получить преобразование, значительно улучшающее сходимость для таких медленно сходящихся монотонных рядов. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$.Когда a_n имеет асимптотическое разложение

$$a_n = n^{-k} + \gamma n^{-k-1} + O(n^{-k-2}), \qquad k > 1, \tag{16}$$

так что ряд сходится. Пробуем получить выражение для $R_1(r)$, которое подходит для такого рода. Запишем

$$A_r = \sum_{n=1}^{r} a_n,$$

и тогда в соответствии с (6) нужно

$$R_1(r) \doteqdot A_r - \lim_{n\to\infty} A_n = -\sum_{n=r+1}^{\infty} a_n. \tag{17}$$

Можем легко оценить этот остаток, рассматривая выражение (16) для a_n как функцию от n, определённую для всех положительных действительных n, и сравнивая $\sum_{n=r+1}^{\infty} a_n$ с интегралом $\int_r^{\infty} a_n \, dn$. Таким образом, находим

$$R_1(r) \doteqdot \frac{r^{-k+1}}{-k+1} + O(r^{-k}) = \frac{r a_r}{1-k}\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right], \tag{18}$$

и так как достаточно определить $R_1(r)$ с точностью до константного множителя, то целесообразно взять

$$R_1(r) = ra_r. \tag{19}$$

Подставляем это в (9) и получаем величину U_{kn}, заданную

$$U_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-2} \frac{A_{n+j}}{a_{n+j}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-2} \frac{1}{a_{n+j}}}. \tag{20}$$

Из приведённых выкладок следует, что погрешность преобразования оценивается как

$$\left| U_{kn} - \lim_{n\to\infty} A_n \right| = O(r^{-\alpha-1}). \tag{21}$$

Стоит отметить, что это уравнение для U_{kn} очень похоже на (11) для T_{kn} и может быть получено из (7), взяв $R_1(r) = a_r$ как прежде, но выбрав $f_i(r) = r^{1-i}$ вместо r^{-i} как в (8). Псевдокод для u-преобразования представлен на *Рисунке 3*, а пример его применения представлен на *Рисунке 4*.

Вход: a – исходный ряд, представленный в виде $\sum_{m=1}^{n} a_m$, параметр $k \geq 1$ - порядок преобразования, индекс элемента $n \geq k+1$

Выход: ускоренная последовательность U_{kn}, полученная путём применения t-преобразования

if $k < 1$ **or** $n < k+1$ **or** $(n + k + 1)$ >= **len**(a)**:**

  return «Ошибка: некорректные параметры или не хватает членов ряда»

Строим частичные суммы A_m (аналогично (10))

$A = [0] *$ **len**(a)

$A_0 = a_0$

for m **in range**$(1,$ **len**$(a))$:

  $A_m = A_{m-1} + a_m$

Num, Den = 0.0, 0.0

for j **in range**$(0, k+1)$:

  $idx = n + j$

  if $a_{idx} == 0$:

    return «Ошибка: деление на ноль в весовом коэффициенте»

  # Весовой коэффициент получаем по формуле (20)

  $$w = (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{idx}{n+k}\right)^{k-2} \frac{1}{a_{idx}}$$

  Num += A_{idx} * w # в числителе вес умножается на A_{n+j} (20)

  Den += w

if $Den == 0$:

  return «Ошибка: знаменатель = 0»

return Num / Den # результат U_{kn}

Рисунок 3. Псевдокод для u-преобразования.

Вход: $a = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2}, k = 4, n = 5$

Выход: U_{kn} = 1.5239

Рисунок 4. Пример применения u-преобразования.

Так же, как с помощью T_{kn} определили t-преобразования, теперь определяем u-преобразования с помощью U_{kn}. В особенности, определяем [1]

$$u_k(A)_n = U_{kn},$$

$$u_n(A)_n = U_{n1}.$$

Как для t-преобразований, наблюдаем, что u-преобразования удовлетворяют условиям (12) и (13), и можем показать, что последовательности частичных сумм, сходящихся знакочередующихся рядов преобразуются в последовательности, сходящиеся к тому же пределу, и кажется, что для таких последовательностей t и u оказывают примерно одинаковую степень улучшения скорости сходимости. Однако для медленно сходящихся монотонных последовательностей u-преобразования более эффективны. Связано это с тем, что в них весовой множитель $(r + i)^{1-i}$ усиливает вклад остаточного члена ra_r, благодаря чему погрешность снижается до порядка $O(r^{-\alpha-1})$.

v-преобразования.

v-преобразование используется как универсальный метод, объединяющий свойства t- и u-преобразований [1]. Оно применяется в случаях, когда характер убывания остатка заранее неизвестен, а также для смешанных типов последовательностей, где одновременно проявляются осцилляции и медленное убывание.

Начнём с преобразования $t_1 = e_1$, применённого к любой последовательности $A = (A_n)$ [1]:

$$e_1(A)_n = \frac{A_{n-1}a_{n+1} - A_n a_n}{a_{n+1} - a_n} = A_n + \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}}.$$

Предполагая, что $e_1(A)_n$ является аппроксимацией предела или антипредела A, можем использовать (6), чтобы получить выражение для $R_1(r)$:

$$R_1(r) \doteqdot A_r - b \doteqdot A_r - e_1(A)_r \doteqdot \frac{a_r a_{r+1}}{a_{r+1} - a_r}.$$

Подстановка этого значения для $R_1(r)$ в (9) даёт

$$V_{kn} = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{n+j-1} - a_{n+j}}{a_{n+j}a_{n+j+1}} A_{n+j}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{n+j-1} - a_{n+j}}{a_{n+j}a_{n+j+1}}}. \tag{21}$$

Псевдокод для v-преобразования представлен на *Рисунке 5*, а пример его применения представлен на *Рисунке 6*.

Вход: a – исходный ряд, представленный в виде $\sum_{m=1}^{n} a_m$, параметр $k \geq 2$ - порядок преобразования, индекс элемента $n \geq k$

Выход: ускоренная последовательность V_{kn}, полученная путём применения t-преобразования

if $k < 2$ **or** $n < k$ **or** $(n + k) >=$ **len**(a)**:**

    return «Ошибка: некорректные параметры или не хватает членов ряда»

Строим частичные суммы A_m (аналогично (10))

$A = [0] *$ **len**(a)

$A_0 = a_0$

for m **in range**$(1,$ **len**$(a))$:

    $A_m = A_{m-1} + a_m$

Num, Den = 0.0, 0.0

for j **in range**$(0, k + 1)$:

    $idx = n + j$

    if $a_{idx} == 0$ **or** $a_{idx+1} == 0$:

        return «Ошибка: деление на ноль в весовом коэффициенте»

    # Весовой коэффициент получаем по формуле (21)

    $w = (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{idx}{n+k}\right)^{k-1} \frac{a_{idx-1} - a_{idx}}{a_{idx} a_{idx+1}}$

    Num += A_{idx} * w # в числителе вес умножается на A_{n+j} (21)

    Den += w

if $Den == 0$:

    return «Ошибка: знаменатель = 0»

return Num / Den # результат V_{kn}

Рисунок 5. Псевдокод для v-преобразования.

Вход: $a = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}, k = 1, n = 4$

Выход: V_{kn} = 0.6806

Рисунок 6. Пример применения v-преобразования.

Используя V_{kn}, определяем v-преобразования [1]

$$v_k(A)_n = V_{kn},$$

$$v_n(A)_n = V_{n1}.$$

Замечание [1]: в (55) коэффициенты $\binom{k}{j}\left(\frac{n+j}{n+k}\right)^{k-1}\frac{a_{n+j-1}-a_{n+j}}{a_{n+j}a_{n+j+1}}$ являются оптимальными для исходной последовательности $\{A_n\}$, точно отражая поведение остаточного члена R_n. Рекурсивное применение (55) пересчитывает эти коэффициенты на основе вновь полученной последовательности V_{kn}, вследствие чего они уже не соответствуют первоначальной структуре остаточного члена, и дополнительное ускорение исчезает, а накопленные численные ошибки способны ухудшить сходимость.

Также v-преобразования обладают свойствами (12) и (13) [1]. Они являются регулярными: для любой последовательности частичных сумм знакочередующегося ряда последовательность результатов v-преобразования сходится к той же сумме. Ключевое преимущество v-преобразования заключается в его универсальности: оно демонстрирует эффективность, сопоставимую с t-преобразованием для знакочередующихся рядов и с u-преобразованием для медленно сходящихся монотонных рядов, что позволяет применять его в ситуациях, когда характер сходимости исходного ряда заранее неизвестен.

Заключение

Полученные преобразования могут быть применены к вычислению бесконечных интегралов от осциллирующих функций путём интегрирования между нулями функции, а затем преобразования полученного знакочередующегося ряда. Также, как другое применение, можно упомянуть улучшение простой численной интеграции.

Во многих случаях последовательность будет монотонной, и тогда обычные методы для ускорения сходимости не так эффективны. Но тогда u- или v-преобразование должно быть подходящим.

Преобразования t-, u-, v- могут быть использованы для генерации рациональных аппроксимаций функций $f(z)$, имеющих формальные разложения в степенные ряды. При определённых условиях эти аппроксимации превосходят сопоставимые члены таблицы Паде функции $f(z)$.

Список литературы

[0] Проект старшекурсников (при объединении файлов убрать)

[1] Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // Levin D. A. - 1972. – P. 371-388.

[2] Non-Linear Transformations of Divergent and Slowly Convergent Sequences // Shanks D. C. – 1955. – P. 1-42.

[3] A continuous Euler transformation and its application to the Fourier transform of a slowly decaying function // Ooura T. – 2001. – P. 259-270.

[4] Divergent Series // Hardy G. H. – 1949. – P. 43-48.

[5] Theory and Application of Infinite Series // Knopp. K. – 1990. – P. 451-460.