Оглавление

Используемые ряды

1. exp_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции e^x. В общем виде ряд выглядит следующим образом (1.1).

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{1.1}$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n-ый член ряда вычисляется на основе $n - 1$-го по формуле (1.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{x}{n} \tag{1.2}$$

Область сходимости: ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимости: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

2. cos_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\cos(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (2.1).

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \tag{2.1}$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n-ый член ряда вычисляется на основе $n-1$-го по формуле (2.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{-x^2}{n(4n-2)} \tag{2.2}$$

Область сходимости: ряд (2.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

3. sin_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sin(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (3.1).

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.1}$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n-ый член ряда вычисляется на основе $n-1$-го по формуле (3.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{-x^2}{n(4n+2)} \tag{3.2}$$

Область сходимости: ряд (3.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

4. cosh_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $ch(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (4.1).

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{4.1}$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n-ый член ряда вычисляется на основе $n - 1$-го по формуле (4.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{x^2}{n(4n-2)} \tag{4.2}$$

Область сходимости: ряд (4.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

5. sinh_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $sh(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (5.1).

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{5.1}$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n-ый член ряда вычисляется на основе $n - 1$-го по формуле (5.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{x^2}{n(4n+2)} \tag{5.2}$$

Область сходимости: ряд (5.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

6. bin_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена бинома Ньютона по степеням x. В общем виде ряд выглядит следующим образом (6.1).

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \quad (6.1)$$

где $\binom{\alpha}{n}$ – обобщенный биномиальный коэффициент, который вычисляется в по следующей формуле (6.2).

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)(n-2) * \ldots * (n-k+1)}{k!}, k \geq 0 \\ 0, \ \ k < 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Область сходимости: ряд (6.1) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

7. four_arctan_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения модифицированного ряда для арктангенса в ряд Маклорена. Данный ряд особенно удобен для вычисления π, ведь при $x = 1, arctg(1) = \frac{\pi}{4} \rightarrow 4arctg(1) = \pi$ – получаем ряд Лейбница. В общем виде ряд выглядит следующим образом (7.1).

$$4\mathrm{arctan}(x) = 4 * \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right) = 4 * \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (7.1)$$

Область сходимости: ряд (7.1) сходится для всех $x \in [-1, 1]$.

Базовая сходимость: логарифмическая, при $x = \pm 1$; гиперлинейная, при $|x| < 1$.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

8. ln1mx_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $-\ln(1-x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (8.1).

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \tag{8.1}$$

Область сходимости: ряд (8.1) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

9. mean_sinh_sin_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{sh(x)+\sin(x)}{2}$.

Данный ряд выводится следующим образом (9.1).

$$\begin{aligned} \frac{sh(x)+\sin(x)}{2} &= \frac{1}{2}(sh(x)+\sin(x)) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} * \frac{1+(-1)^n}{2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \end{aligned} \tag{9.1}$$

Область сходимости: ряд (9.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

10.exp_squared_erf_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $e^{x^2} * \mathrm{erf}(x)$. erf (x) – функция ошибок Гаусса, которая в общем виде выглядит следующим образом (10.1)

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{10.1}$$

Функция ошибок может быть разложена в ряд Тейлора следующим образом (10.2).

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \tag{10.2}$$

Для функции $\mathrm{e}^{x^2} * \mathrm{erf}(x)$ имеем следующее разложение (10.3).

$$e^{x^2} \mathrm{erf}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \tag{10.3}$$

В формуле (10.3) выражение $\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)$ обозначает гамма-функцию.

Источник: [1] глава 5.2.9 пункт 18.

Область сходимости: ряд (10.3) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

11. xmb_Jb_two_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $x^{-b} J_b(2x)$, где $J_b(2x)$ – функция Бесселя первого рода порядка b. Фунция Бесселя задается следующим образом (11.1).

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - b^2) y = 0 \tag{11.1}$$

Где b – порядок.

Функция Бесселя первого рода раскладывается в ряд Маклорена следующим образом (11.2).

$$J_b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+b+1)}\, x^{2n+b} \tag{11.2}$$

Тогда для функции $x^{-b}J_b(2x)$ имеем разложение (11.3).

$$x^{-b}J_b(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+b+1)} x^{2n} \tag{11.3}$$

Источник: [1] глава 5.2.10 пункт 7.

Область сходимости: ряд (11.3) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$

Базовая сходимость: гиперлиненая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

12. half_asin_two_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{2}\arcsin(2x)$. Данный ряд выводится следующим образом (12.1).

$$\frac{1}{2}\arcsin(2x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} \tag{12.1}$$

Источник: [1] глава 5.2.13 пункт 10.

Область сходимости: ряд (12.1) сходится для всех $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Базовая сходимость: гиперлиненая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

13. inverse_1mx_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{1-x}$. Данный ряд имеет следующий вид (13.1).

$$\frac{1}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{13.1}$$

Область сходимости: ряд (13.1) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

14. x_1mx_squared_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{x}{(1-x)^2}$. Данный ряд выводится следующим образом.

Из (13.1) имеем следующее разложение (14.1).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{14.1}$$

Продифференцировав (14.1), получим (14.2).

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ и } \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \tag{14.2}$$

Тогда имеем соотношение (14.3).

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \tag{14.3}$$

Итак, получаем следующее выражение для искомого ряда (14.4).

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x * \frac{1}{(1-x)^2} = x * \sum_{n=1}^{\infty} n * x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \tag{14.4}$$

Область сходимости: ряд (14.4) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

15. erf_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(x)$. Функция erf(x) – функция ошибок Гаусса, которая определяется следующим образом (15.1).

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{15.1}$$

Разложение в ряд Маклорена для этой функции имеет вид (15.2).

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \tag{15.2}$$

Тогда для искомой функции получаем (15.3).

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \tag{15.3}$$

Область сходимости: ряд (15.3) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

16. m_fact_1mx_mp1_inverse_series

Данный шаблон используется для имплементации ряда Маклорена функции $\frac{m!}{(1-x)^{m+1}}$. Данный ряд выводится следующим образом.

Формула для обобщенного биномиального ряда записывается в виде (16.1).

$$\frac{1}{(1-z)^{\beta+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\beta}{n} z^n \tag{16.1}$$

Для искомой функции получим следующее выражение (16.2).

$$\frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = m!\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m}{m} x^n = m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{m!*n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{n!} \tag{16.2}$$

Область сходимости: ряд (16.2) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

17. inverse_sqrt_1m4x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$. Данный ряд выводится следующим образом (17.1).

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, 2^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n \tag{17.1}$$

Область сходимости: ряд (17.1) сходится для всех $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

18. one_twelfth_3x2_pi2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $\frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2)$.

Функция $f(x) = \frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2)$ – четная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только косинусы. Разложение четной функции по косинусам имеет вид (18.1).

$$f(x) = \frac{a_n}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \tag{18.1}$$

Тогда для искомой функции имеем следующее разложение (18.2).

$$\frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \tag{18.2}$$

Область сходимости: ряд (18.2) сходится для всех $x \in (-\pi, \pi)$

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

19. one_twelfth_x2_pi2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $\frac{x}{12}(x^2 - \pi^2)$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \frac{x}{12}(x^2 - \pi^2)$ является нечетной, а значит в ее разложении будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид (19.1).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,, b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx \qquad (19.1)$$

Таким образом, для нашего ряда имеем следующее разложение (19.2).

$$\frac{x}{12}(x^2 - \pi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx) \qquad (19.2)$$

Область сходимости: ряд (32) сходится для всех $x \in (-\pi, \pi)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

20. ln2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $\ln(2)$ в числовой ряд. Разложение выводится следующим образом (20.1).

$$\ln(2) = \ln(1+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad (20.1)$$

Сходимость: ряд (33) сходится условно, не абсолютно.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

21. one_series

Существует множество способов разложить 1 в ряд. В данном шаблоне 1 представляется в виде ряда (21.1)

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{21.1}$$

Данный ряд выводится следующим образом. Рассмотрим соотношение (21.2).

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \tag{21.2}$$

Тогда при суммировании на бесконечности получим (21.3).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + .. \tag{21.3}$$

Все внутренние члены взаимно сокращаются и выражение принимает вид (21.4).

$$1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1 \tag{21.4}$$

Сходимость: ряд (21.1) сходится абсолютно.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

22. minus_one_quarter_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $-\frac{1}{4}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (22.1).

$$-\frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)} \tag{22.1}$$

Источник: [1] глава 5.1.7 пункт 4.

Сходимость: ряд сходится (22.1) абсолютно.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

23. pi_3_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{3}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (23.1).

$$\frac{\pi}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)(4n+1)} \tag{23.1}$$

Источник: [1] глава 5.1.17 стр. 537 номер 7.

Сходимость: ряд (23.1) сходится.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

24. pi_4_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{4}$ в числовой ряд. Разложение выводится следующим образом: для начала воспользуемся разложением арктангенса в ряд Маклорена (24.1).

$$arctg(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \tag{24.1}$$

При подстановке $x=\frac{\pi}{4}$ получим (24.2).

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \tag{24.2}$$

Сходимость: ряд (24.2) сходится.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

25. pi_squared_6_minus_one_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^2}{6} - 1$ в числовой ряд. Для вывода данного разложения воспользуемся разложением для 1 (21.1) и рядом Эйлера (25.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{25.1}$$

Итак, получим следующее выражение для искомой функции (25.2).

$$\frac{\pi^2}{6} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \tag{25.2}$$

Сходимость: ряд (25.2) сходится.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

26. three_minus_pi_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $3 - \pi$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (26.1).

$$3 - \pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)(2n+1)} \tag{26.1}$$

Источник: [1] глава 5.1.16 стр. 535 пункт 12.

Сходимость: ряд (26.1) сходится абсолютно.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

27. one_twelfth_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{1}{12}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (27.1).

$$\frac{1}{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \tag{27.1}$$

Источник: [1] глава 5.1.18 стр. 538 пункт 1.

Сходимость: ряд (27.1) сходится.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

28. eighth_pi_m_one_third_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (28.1).

$$\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \tag{28.1}$$

Источник: [1] глава 5.1.18 стр. 538 пункт 2.

Сходимость: ряд (28.1) сходится абсолютно.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

29. one_third_pi_squared_m_nine_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^2-9}{3}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (29.1).

$$\frac{\pi^2 - 9}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} \tag{29.1}$$

Источник: [1] глава 5.1.21 стр. 541 пункт 6.

Сходимость: ряд (29.1) сходится абсолютно.

Базовая сходимость: линейная четвертого порядка.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

30. four_ln2_m_3_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $4 * \ln(2) - 3$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (30.1).

$$4 * \ln(2) - 3 = \frac{(-1)^n}{n^2(n+1)^2} \tag{30.1}$$

Источник: [1] глава 5.1.21 стр. 541 пункт 7.

Сходимость: ряд (30.1) сходится.

Базовая сходимость: линейная четвертого порядка.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

31. exp_m_cos_x_sinsin_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в тригонометрический ряд функции $e^{-\cos(x)} * \sin(\sin(x))$. Разложение имеет следующий вид (31.1).

$$e^{-\cos(x)} \sin(sin(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n!} \tag{31.1}$$

Источник: [1] глава 5.4.7 стр. 581 пункт 2

Область сходимости: ряд (31.1) сходится для всех $x \in (-\pi, \pi)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

32. pi_four_minus_ln2_halfed_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{4} - -\frac{\ln(2)}{2}$ в числовой ряд. Данный ряд имеет следующий вид (32.1).

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n} \tag{32.1}$$

Источник: [1] глава 5.1.2 стр. 526 пункт 4.

Сходимость: ряд (32.1) сходится условно.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

33. five_pi_twelve_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{5\pi}{12}$ в числовой ряд. Данный ряд имеет следующий вид (33.1).

$$\frac{5\pi}{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{3}}}{2n+1} \tag{33.1}$$

Источник: [1] глава 5.1.4 стр. 528 пункт 5.

Сходимость: ряд (33.1) сходится условно.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

34. x_two_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $\frac{x}{2}$ в числовой ряд. Рассмотрим разложение $\frac{1}{2}$ в числовой ряд (34.1).

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \tag{34.1}$$

Тогда для $\frac{x}{2}$ имеем (34.2).

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(2n+1)(2n+3)} \tag{34.2}$$

Источник: ряд (34.1) в [1] глава 5.1.9 стр. 531 пункт 1.

Сходимость: ряд (34.2) сходится абсолютно для любого x $\in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

35. pi_six_min_half_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$ в числовой ряд. Данный ряд имеет следующий вид (35.1).

$$\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(6n+5)(6n+7)} \qquad (35.1)$$

Источник: [1] глава 5.1.13 стр. 534 пункт 7.

Сходимость: ряд (35.1) сходится абсолютно.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

36. x_two_throught_squares_series

Данный шаблон является вторым вариантом имплементации разложения функции $\frac{x}{2}$ в числовой ряд. Рассмотрим другой вариант разложения $\frac{1}{2}$ в числовой ряд (36.1).

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 1}{4n^4 + 1} \qquad (36.1)$$

Тогда для $\frac{x}{2}$ имеем (36.2).

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x * (2n^2 - 1)}{4n^4 + 1} \qquad (36.2)$$

Источник: ряд (36.1) в [1] глава 5.1.27 стр. 552 пункт 15.

Сходимость: ряд (36.2) сходится абсолютно для любого x $\in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная четвертого порядка.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

37. minus_one_ned_in_n_series

Данный шаблон используется для имплементации ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} * x$. Сумма ряда определяется следующим образом (37.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} = -0.78343051 \tag{37.1}$$

Источник: ряд (37.1) в [1] глава 5.1.30 стр. 553 пункт 2.

Умножая на x получим (37.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} * x = -0.78343051 * x \tag{37.2}$$

Сходимость: ряд (37.2) сходится для любого x $\in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: сверхэкспоненциальная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

38. minus_one_n_fact_n_in_n_series

Данный шаблон используется для имплементации ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n} * x$. Сумма ряда определяется следующим образом (38.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n} = -0.65583160 \tag{38.1}$$

Источник: ряд (38.1) в [1] глава 5.1.30 стр. 554 пункт 4

Умножая на x получим (38.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n} * x = -0.65583160 * x \tag{38.2}$$

Сходимость: ряд (38.2) сходится для любого x $\in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: сверхэкспоненциальная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

39. ln_x_plus_one_x_minus_one_halfed_series

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Данный ряд выводится следующим образом.

Для начала, преобразуем исходную функцию (39.1).

$$\frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n+1}+1) * \frac{x^n}{n}\right) \quad (39.1)$$

Заметим, что в выражении (39.1) при нечетных n сумма $(-1)^{n+1} + 1$ будет давать 0, при четных 2. Значит, можем представить этот ряд в виде (39.2).

$$\frac{1}{2} * \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2 * x^{2n+1}}{2n+1} \quad (39.2)$$

Перемножая, получаем искомое разложение (39.3).

$$\frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (39.3)$$

Источник: ряд (39.3) представлен в [1] глава 5.2.4 стр. 557 п. 8.

Область сходимости: ряд (39.3) сходится для всех $x \in (-1, 1)$

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

40. two_arcsin_square_x_halfed_series

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $2\arcsin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Данный ряд выводится следующим образом. Рассмотрим разложение функции арксинуса в ряд Маклорена (40.1).

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)} \quad (40.1)$$

Применяя произведение Коши двух степенных рядов, получим (40.2).

$$\arcsin^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2} \quad (40.2)$$

Далее, подставим в (40.2) $\frac{x}{2}$ вместо x и домножим на 2, получим (40.3).

$$2\arcsin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2} \tag{40.3}$$

Источник: ряд (40.3) представлен в [1] глава 5.2.14 стр. 567 п. 3.

Область сходимости: ряд (40.3) сходится для всех $x \in [-2, 2]$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

41. pi_squared_twelve_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^2}{12}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (41.1).

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \tag{41.1}$$

Докажем равенство (41.1). Воспользуемся рядом обратных квадратов (41.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{41.2}$$

Преобразуем правую часть равенства (41.2) следующим образом (41.3).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n)^2}\right) \tag{41.3}$$

Пользуясь (41.1) и (41.2) имеем (41.4).

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n)^2} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n)^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n)^2} \right) + \frac{\pi^2}{12} \qquad (41.4)$$

Из (41.4) получаем равенство (41.5).

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n)^2} \right) \qquad (41.5)$$

Далее, подставляя (41.5) в (41.3) и смещая ряд на 1, получим разложение (41.1).

Сходимость: ряд (41.1) сходится.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

42. pi_cubed_32_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^3}{32}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (42.1).

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)} \qquad (42.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (42.1), получим итоговое разложение (42.2).

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2(n+1)+1)^3} \qquad (42.2)$$

Источник: ряд (42.1) представлен в [2] раздел 0.234 пункт 4.

Сходимость: ряд (42.2) сходится условно.

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

43. minus_three_plus_ln3_three_devided_two_plus_two_ln2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $-3 + \frac{3}{2}\ln 3 + 2\ln(2)$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (43.1).

$$-3 + \frac{3}{2}\ln(3) + \ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(36k^2 - 1)} \tag{43.1}$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (43.1), получим итоговое разложение (43.2).

$$-3 + \frac{3}{2}\ln(3) + \ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(36(n+1)^2 - 1)} \tag{43.2}$$

Источник: ряд (43.1) представлен в [2] раздел 0.236 пункт 3.

Сходимость: ряд (43.2) сходится абсолютно.

Базовая сходимость: кубическая

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

44. two_ln2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\ln(2)$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (44.1).

$$2\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12k^2 - 1}{k(4k^2 - 1)^2} \tag{44.1}$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (44.1), получим итоговое разложение (44.2).

$$2\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{12(n+1)^2 - 1}{(n+1)(4(n+1)^2 - 1)^2} \tag{44.2}$$

Источник: ряд (44.1) представлен в [2] раздел 0.236 пункт 6.

Сходимость: ряд (44.2) сходится.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

45. pi_x_multi_e_xpi_plus_e_minusxpi_divided_e_xpi_minus_e_minusxpi

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\pi x \frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} - 1$. Воспользуемся разложением (45.1).

$$\pi \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} = x \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} \tag{45.1}$$

Домножим обе части равенства (45.1) на x.

$$\pi x \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + n^2} \tag{45.2}$$

Преобразуем правую часть равенства (45.2).

$$\pi x \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} = 1 + \ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + n^2} \tag{45.3}$$

Вычитая единицу с обоих сторон и производя замену $n = k - 1$ в ряде (45.3), получим итоговое разложение (45.4).

$$\pi x \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 + (n+1)^2} \tag{45.4}$$

Источник: ряд (45.1) представлен в [2] раздел 1.217 пункт 1.

Область сходимости: ряд (45.4) сходится для всех $x \in (-\infty;\ +\infty)$; также при $x = 0$ ряд обращается в нуль.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

46. pi_minus_x_2

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$. $f(x)$ – функция общего вида.

Разложение функции общего вида в ряд Фурье имеет следующий вид (46.1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{46.1}$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (46.2).

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \pi\cos(nx)\,dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} x\,cos(nx)dx\right) = 0 \tag{46.2}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (46.3).

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin(nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \pi\sin(nx)\,dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(0 - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \tag{46.3}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (46.4).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nx) \tag{46.4}$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (46.4), получим итоговое разложение (46.5).

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\big((m+1)x\big)}{m+1} \tag{46.5}$$

Область сходимости: ряд (46.5) сходится для всех $x \in (0;\ 2\pi)$.

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

47. half_multi_ln_1div2multi1minuscosx

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2(1-\cos(x))}$. $f(x)$ – четная функция. Разложение четной функции в ряд Фурье имеет следующий вид (47.1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \tag{47.1}$$

С помощью тригонометрических формул и преобразования логарифма преобразуем исходную функцию (47.2).

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2(1-\cos(x))} = -\ln\left(2\, sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \tag{47.2}$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (47.3).

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\ln\left(2\, sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos(nx)\, dx = \frac{1}{n} \tag{47.3}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (47.4).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos(nx) \tag{47.4}$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (47.4), получим итоговое разложение (47.5).

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2(1-\cos(x))} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\big((m+1)x\big)}{m+1} \tag{47.5}$$

Область сходимости: ряд (47.5) сходится для всех $x \in (0;\ 2\pi)$.

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

48. half_minus_sinx_multi_pi_4

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\sin(x)$. Воспользуемся разложением (48.1).

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\sin(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)*(2n+1)} \tag{48.1}$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (48.1), получим итоговое разложение (48.2).

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\big(2x(n+1)\big)}{(2n+1)*(2n+3)} \tag{48.2}$$

Источник: ряд (48.1) представлен в [2] раздел 1.444 пункт 7.

Область сходимости: ряд (48.2) сходится для всех $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

49. ln_1plussqrt1plusxsquare_minus_ln_2

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(2)$. Воспользуемся разложением (49.1).

$$\ln\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) = \ln(2) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} \tag{49.1}$$

Перенеся слагаемое ln (2) в левую часть равенства (49.1) и занося минус под знак суммирования получим (49.2).

$$\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln(2)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2k-1)!}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k} \tag{49.2}$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (49.2), получим итоговое разложение (49.3).

$$\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^{2n+2}\left((n+1)!\right)^2}x^{2n+2} \tag{49.3}$$

Источник: ряд (49.1) представлен в [2] раздел 1.515 пункт 1.

Область сходимости: ряд (49.3) сходится для всех $x^2 \leq 1$

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

50. ln_cosx

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln(\cos(x))$. Данный ряд имеет следующий вид (50.1).

$$\ln(\cos(x))=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{1}{2}*\frac{\sin^{2k}(x)}{k} \tag{50.1}$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (50.1), получим итоговое разложение (50.2).

$$\ln(cos(x))=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{\sin^{2n+2}(x)}{2n+2} \tag{50.2}$$

Источник: ряд (50.1) представлен в [2] раздел 1.518 пункт 1.

Область сходимости: ряд (50.2) сходится для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

51. ln_sinx_minus_ln_x

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln(sin(x)) - \ln\,(x)$. Воспользуемся разложением (51.1).

$$ln(sin(x)) - ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{1 - x^2}{k^2\pi^2}\right) \quad (51.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (51.1), получим итоговое разложение (51.2).

$$ln(sin(x)) - ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \log\left(\frac{1 - x^2}{(n+1)^2\pi^2}\right) \quad (51.2)$$

Источник: ряд (51.1) представлен в [2] раздел 1.521 пункт 2.

Область сходимости: ряд (51.2) сходится для всех $x \in [0, \pi]$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

52. pi_8_cosx_square_minus_1_div_3_cosx

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\left(\frac{\pi}{8}\right) * \cos(x)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) * \cos\,(x)$. Данный ряд выводиться следующим образом (68).

$$\left(\frac{\pi}{8}\right) * \cos(x)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) * \cos(x) =$$

$$\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{pi\pi}{16} + \frac{1}{6}\right) * x^2 + \left(\frac{\pi}{32} - \frac{1}{72}\right) * x^4 + \cdots + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}\right) * \left(-\frac{1}{2}\right)^n * x^{n*2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}\right) * \left(-\frac{1}{2}\right)^n * x^{n*2} \quad (68)$$

Область сходимости: ряд (68) сходится при $x \in (-2; 2)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

53. sqrt_oneminussqrtoneminusx_div_x

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sqrt{(1-\sqrt{1-x})/x}$. Данный ряд выводиться следующим образом (69).

$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x}{8\sqrt{2}} + \frac{7x^2}{128\sqrt{2}} + \frac{33x^3}{1024\sqrt{2}} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!x^n}{2^{4n}\sqrt{2}(2n)!(2n+1)!} \quad (69)$$

Область сходимости: ряд (69) сходится при $x \in [-1; 1]$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

54. one_minus_sqrt_1minus4x_div_2x

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Данный ряд выводиться следующим образом (70).

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + \cdots + (-1)^n 2^{1+2n} \binom{\frac{1}{2}}{1+n} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{1+2n} \binom{\frac{1}{2}}{1+n} x^n \quad (70)$$

Область сходимости: ряд (70) сходится при $x \in (-\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

55. arcsin_x_minus_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\arcsin(x) - x$. Данный ряд выводиться следующим образом (71).

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! * x^{2n+1}}{(2n)!! * (2n+1)} \tag{71}$$

Перенося x в левую сторону, получим (72).

$$\arcsin(x) - x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! * x^{2n+1}}{(2n)!! * (2n+1)} \tag{72}$$

Область сходимости: ряд (72) сходится при $x \in [-1; 1]$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

56. pi_x_minus_x_square_square_minus_three_pi_x_plus_two_pi_square_

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $f(x) = \begin{cases} \pi * x - x^2, 0 < x < \pi \\ x^2 - 3\pi x + 2\pi\char`^2,\ \pi < x < 2\pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} \pi * x - x^2, 0 < x < \pi \\ x^2 - 3\pi x + 2\pi\char`^2,\ \pi < x < 2\pi \end{cases}$ – нечётная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид (73).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(xn) \tag{73}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (74).

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (x^2 - 3\pi x + 2\pi^2) \sin(nx)\, dx =$$
$$= -2 \frac{2(-1)^n - 2}{\pi n^3} \tag{74}$$

Итого, для нашей функции имеем следующее разложение (75).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)((-1)^n - 1)}{\pi n^3} \sin(nx) \tag{75}$$

Область сходимости: ряд (75) сходится абсолютно при $x \in (-\frac{\pi}{2n}; \frac{\pi}{2n})$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

57. abs_sin_x_minus_2_div_pi_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $\begin{cases} sin(x) - \frac{2}{\pi}, 0 \leq\ x \leq\ \pi \\ -sin(x) - \frac{2}{\pi}, \pi \leq\ x \leq\ 2\pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} sin(x) - \frac{2}{\pi}, 0 \leq\ x \leq\ \pi \\ -sin(x) - \frac{2}{\pi}, \pi \leq\ x \leq\ 2\pi \end{cases}$ – чётная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только косинусы. Разложение четной функции по косинусам имеет следующий вид (76).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \tag{76}$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (77).

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = -\frac{2((-1)^n + 1)}{\pi n^2 - \pi} \tag{77}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (78).

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2((-1)^n + 1)}{\pi n^2 - \pi} \cos(nx) \tag{78}$$

Область сходимости: ряд (78) сходится при $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

58. pi_minus_3pi_4_and_pi_minus_x_minus_3pi_4_series

Данный шаблон используется для реализации разложения функции $f(x) = \begin{cases} \pi - \frac{3\pi}{4}, -\pi < x < 0 \\ \pi - x - \frac{3\pi}{4}, 0 \le x \le \pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} \pi - \frac{3\pi}{4}, -\pi < x < 0 \\ \pi - x - \frac{3\pi}{4}, 0 \le x \le \pi \end{cases}$ – общего вида. Разложение функции общего вида в ряд Фурье имеет следующий вид (79).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{79}$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (80).

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) \cos(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\pi - x - \frac{3\pi}{4}\right) \cos(nx)\, dx =$$
$$= 0 - \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \tag{80}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (81).

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) \sin(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\pi - x - \frac{3\pi}{4}\right) \sin(nx)\, dx =$$
$$= \frac{(-1)^n - 1}{4n} + \frac{3(-1)^n + 1}{4n} = \frac{2(-1)^n}{4n} \tag{81}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (82).

$$f(x) = -\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\right) \cos(nx) + \left(\frac{2(-1)^n}{4n}\right) \sin(nx) \tag{82}$$

Область сходимости: todo

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

59. minus_3_div_4_or_x_minus_3_div_4_series

Данный шаблон используется для реализации разложения периодической функции $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}, -3 \le x \le 0 \\ x - \frac{3}{4},\ 0 < x < 3 \end{cases}$ с периодом T=6 в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}, -3 \le x \le 0 \\ x - \frac{3}{4},\ 0 < x < 3 \end{cases}$ – общего вида. Разложение функции общего вида имеет следующий вид (83).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{nx\pi}{3}\right) + b_n \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right) \right) \tag{83}$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (84).

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{3} f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{3}\right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} f(x) \cos\left(\frac{xn\pi}{3}\right) dx = \\ &= -\frac{3 \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right)}{4n\pi} + \frac{3(-1)^n - 3}{\pi^2 n^2} \end{aligned} \tag{84}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (85).

$$b_n = \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{3} f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right) dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} f(x) \sin\left(\frac{xn\pi}{3}\right) dx = -\frac{12(-1)^n}{4\pi n} \tag{85}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (86).

$$f(x) = -\frac{3}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3\sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right)}{4n\pi} + \frac{3(-1)^n - 3}{\pi^2 n^2} \right) \cos\left(\frac{nx\pi}{3}\right) + \left(-\frac{12(-1)^n}{4\pi n} \right) \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right) \quad (86)$$

Область сходимости: todo

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

60. ten_minus_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения периодической функции $f(x) = 10 - x, 5 < x < 15$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = 10 - x,\ 5 < x < 15$ – нечётная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид (87).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{xn\pi}{5}\right) \quad (87)$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (88).

$$b_n = \frac{1}{5}\int_5^{15} (10 - x)\sin\left(\frac{nx\pi}{5}\right) dx = \frac{10(-1)^n}{\pi n} \quad (88)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (89).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(-1)^n}{\pi n} \sin\left(\frac{xn\pi}{5}\right) \quad (89)$$

Область сходимости: ряд (89) сходится при $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

61. x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения периодической функции $f(x) = x, -\pi < x < \pi$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = x, -\pi < x < \pi$ – нечётная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид (90).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(xn) \tag{90}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (91).

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x)\sin(xn)\,dx = -\frac{2(-1)^n}{n} \tag{91}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (92).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2(-1)^n}{n}\right)\sin(xn) \tag{92}$$

Область сходимости: ряд (92) сходится при $x \in$ (-∞; +∞)

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

62. minus_x_minus_pi_4_or_minus_pi_4_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $f(x) = \begin{cases} -x, -\pi < x \le 0 \\ 0,\ 0 < x < \pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} -x, -\pi < x \le 0 \\ 0,\ 0 < x < \pi \end{cases}$ – общего вида. Разложение функции общего вида имеет следующий вид (93).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \tag{93}$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (94).

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \tag{94}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (95).

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{(-1)^n}{n} \tag{95}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (96).

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\right)\cos(nx) + \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\sin(nx) \tag{96}$$

Область сходимости: todo

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

63. one_div_two_minus_x_multi_three_plus_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Лорана функции $\frac{1}{(2-x)(3+x)}$. Данный ряд выводиться следующим образом (97).

$$\frac{1}{(2-x)(3+x)} = \frac{1}{6} + \frac{x}{36} + \frac{7x^2}{216} + \cdots + \frac{1}{5}x^n\left(6^{-1-n}((-1)^n 2^{1+n} + 3^{1+n})\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}x^n\left(6^{-1-n}((-1)^n 2^{1+n} + 3^{1+n})\right) \tag{97}$$

Область сходимости: ряд (97) сходится при $x \in (-2; 2)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

64. si_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$. Данный ряд выводиться следующим образом (98).

$$Si(x) = x - \frac{x^3}{3 * 3!} + \frac{x^5}{5 * 5!} - \frac{x^7}{7 * 7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)} x^{2n+1} \quad (98)$$

Область сходимости: ряд сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

65. Ci_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $Ci(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt.$ Данный ряд выводиться следующим образом (99).

$$Ci(x) = \gamma + lnx - \frac{x^2}{2 * 2!} + \frac{x^4}{4 * 4!} - \frac{x^6}{6 * 6!} + \cdots = \gamma + lnx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(2n)} x^{2n} \quad (99)$$

Где γ – постоянная Эйлера – Маскерони. Её можно представить в следующем виде (100).

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right) \quad (100)$$

Область сходимости: ряд (99) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

68. xsquareplus3_div_xsquareplus2multix_minus_1_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{x^2+3}{x^2+2x} - 1$. Данный ряд выводиться следующим образом (101).

$$\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x} - 1 = \frac{3}{2x} - \frac{7}{4} + \frac{7x}{8} - \frac{7x^2}{16} + \frac{7x^3}{32} + \cdots = \sum_{n=-1}^{\infty} -7(-1)^n 2^{-2-n} x^n \quad (101)$$

Область сходимости: ряд (101) сходится при $x \in (-2; 2)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

69. arcsin_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\arcsin(x)$. Данный ряд имеет следующий вид (102).

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! * x^{2n+1}}{(2n)!! * (2n+1)} \quad (102)$$

Область сходимости: ряд (102) сходится при $x \in [-1; 1]$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

70. arctg_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\mathrm{arctg}(x)$. Данный ряд имеет следующий вид (103).

$$\mathrm{arctg}(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (103)$$

Область сходимости: ряд (103) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

73. sqrt_1plusx_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sqrt{1+x}$. Данный ряд имеет следующий вид (104).

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{\mathrm{x}}{2} - \frac{\mathrm{x}^2}{8} + \frac{\mathrm{x}^3}{16} - \frac{5\mathrm{x}^4}{128} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!\, x^n}{(1-2n)(n!)^2 4^n} \tag{104}$$

Область сходимости: ряд (104) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

78. pi_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа π в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (105).

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{12}(-3)^{-n}}{2n+1} \tag{105}$$

Область сходимости: ряд (105) сходится

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

80. arctg_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции arctg (x^2). Данный ряд имеет следующий вид (106).

$$\mathrm{arctg}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{14}}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{2n+1} \tag{106}$$

Область сходимости: ряд (106) сходится при $x \in [-1; 1]$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

82. sin_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sin(x^2)$. Данный ряд имеет следующий вид (107).

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} \tag{107}$$

Область сходимости: ряд (107) сходится при $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

83. arctg_x3_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\operatorname{arctg}(x^3)$. Данный ряд имеет следующий вид (108).

$$\operatorname{arctg}(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{3} + \frac{x^{15}}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+3}}{2n+1} \tag{108}$$

Область сходимости: ряд (108) сходится при $x \in [-1; 1]$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

Список литературы

1. Прудников А. П. Интегралы и Ряды. В 3 т. Т. 1. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев; Издательская фирма “Физико-математическая литература”. – Москва, 2002. – 631 с. ISBN 5-9221-0323-7.
2. Gradshteyn I. S. Table of Integrals, Series, and Products: Seventh Edition / I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik; Academic Press. – Burlington: 30 Corporate Drive, Suite 400, Burlington, MA 01803, USA, 2007. – 1220 с. ISBN-13: 978-0-12-373637-6.