Оглавление

Используемые ряды

1. exp_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции e^x. В общем виде ряд выглядит следующим образом (1.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = e^x \#(1.1)$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n-ый член ряда вычисляется на основе $n-1$-го по формуле (1.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{x}{n} \#(1.2)$$

Источник: ряд (1.1) представлен в [2] раздел 1.211 пункт 1.

Область сходимости: ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимости: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

2. cos_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\cos(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (2.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) \#(2.1)$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n-ый член ряда вычисляется на основе $n-1$-го по формуле (2.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{-x^2}{n(4n-2)} \#(2.2)$$

Источник: ряд (2.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 3.

Область сходимости: ряд (2.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

3. sin_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sin(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (3.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sin(x) \#(3.1)$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n-ый член ряда вычисляется на основе $n-1$-го по формуле (3.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{-x^2}{n(4n+2)} \#(3.2)$$

Источник: ряд (3.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 1.

Область сходимости: ряд (3.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

4. cosh_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $ch(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (4.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} = ch(x) \#(4.1)$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n-ый член ряда вычисляется на основе $n-1$-го по формуле (4.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{x^2}{n(4n-2)} \#(4.2)$$

Источник: ряд (4.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 4.

Область сходимости: ряд (4.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

5. sinh_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $sh(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (5.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = sh(x) \#(5.1)$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n-ый член ряда вычисляется на основе $n-1$-го по формуле (5.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{x^2}{n(4n+2)} \#(5.2)$$

Источник: ряд (5.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 2.

Область сходимости: ряд (5.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

6. bin_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена бинома Ньютона по степеням x. В общем виде ряд выглядит следующим образом (6.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \\ = \ (1+x)^{\alpha} \ \#(6.1)$$

где $\binom{\alpha}{n}$ – обобщенный биномиальный коэффициент, который вычисляется по следующей формуле (6.2).

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)(n-2)*\ldots*(n-k+1)}{k!}, k \geq 0 \\ 0, \ \ k < 0 \end{cases} \ \#(6.2)$$

Источник: ряд (6.1) представлен в [2] раздел 1.111 пункт 1.

Область сходимости: ряд (6.1) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

7. four_arctan_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения модифицированного ряда для арктангенса в ряд Маклорена. Данный ряд особенно удобен для вычисления π, ведь при $x = 1, arctg(1) = \frac{\pi}{4} \rightarrow 4arctg(1) = \pi$ – получаем ряд Лейбница. В общем виде ряд выглядит следующим образом (7.1).

$$4 * \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = 4 * \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right) = 4\operatorname{atan}(x) \ \#(7.1)$$

Источник: ряд (7.1) представлен в [1] раздел 5.2.4 пункт 8.

Область сходимости: ряд (7.1) сходится для всех $x \in [-1, 1]$.

Базовая сходимость: логарифмическая, при $x = \pm 1$; гиперлинейная, при $|x| < 1$.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

8. ln1mx_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $-\ln(1-x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (8.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)\ \#(8.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (8.1), получим итоговое разложение (8.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

Источник: ряд (8.1) представлен в [1] раздел 5.2.4 пункт 4.

Область сходимости: ряд (8.2) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

9. mean_sinh_sin_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{sh(x)+\sin(x)}{2}$.

Данный ряд выводится следующим образом (9.1).

$$\frac{sh(x)+\sin(x)}{2} = \frac{1}{2}(sh(x)+\sin(x)) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} * \frac{1+(-1)^n}{2} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\ \#(9.1)$$

Источник: ряд (9.1) представлен в [1] раздел 5.2.7 пункт 11.

Область сходимости: ряд (9.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

10.exp_squared_erf_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $e^{x^2} * \mathrm{erf}(x)$. $\mathrm{erf}(x)$ – функция ошибок Гаусса, которая в общем виде выглядит следующим образом (10.1)

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \ \#(10.1)$$

Функция ошибок может быть разложена в ряд Тейлора следующим образом (10.2).

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \ \#(10.2)$$

Для функции $\mathrm{e}^{x^2} * \mathrm{erf}(x)$ имеем следующее разложение (10.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} = e^{x^2} \mathrm{erf}(x) \ \#(10.3)$$

В формуле (10.3) выражение $\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)$ обозначает гамма-функцию.

Источник: ряд (10.3) в [1] глава 5.2.9 пункт 18.

Область сходимости: ряд (10.3) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

11. xmb_Jb_two_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $x^{-b}J_b(2x)$, где $J_b(2x)$ – функция Бесселя первого рода порядка b. Фунция Бесселя задается следующим образом (11.1).

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-b^2)y=0 \#(11.1)$$

Где b – порядок.

Функция Бесселя первого рода раскладывается в ряд Маклорена следующим образом (11.2).

$$J_b(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+b+1)}\,x^{2n+b} \#(11.2)$$

Тогда для функции $x^{-b}J_b(2x)$ имеем разложение (11.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+b+1)}x^{2n}=x^{-b}J_b(2x) \#(11.3)$$

Источник: ряд (11.3) в [1] глава 5.2.10 пункт 7.

Область сходимости: ряд (11.3) сходится для всех $x\in(-\infty,+\infty)$

Базовая сходимость: гиперлиненая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

12. half_asin_two_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{2}\arcsin(2x)$. Данный ряд выводится следующим образом (12.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1}\ =\frac{1}{2}\arcsin(2x) \#(12.1)$$

Источник: [1] глава 5.2.13 пункт 10.

Область сходимости: ряд (12.1) сходится для всех $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Базовая сходимость: гиперлиненая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

13. inverse_1mx_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{1-x}$. Данный ряд имеет следующий вид (13.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x} \#(13.1)$$

Источник: ряд (13.1) представлен в [2] раздел 1.12 пункт 2.

Область сходимости: ряд (13.1) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

14. x_1mx_squared_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{x}{(1-x)^2}$. Данный ряд выводится следующим образом.

Из (13.1) имеем следующее разложение (14.1).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ \#(14.1)$$

Продифференцировав (14.1), получим (14.2).

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ и } \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \ \#(14.2)$$

Тогда имеем соотношение (14.3).

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \ \#(14.3)$$

Итак, получаем следующее выражение для искомого ряда (14.4).

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x * \sum_{n=1}^{\infty} n * x^{n-1} = x * \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} \#(14.4)$$

Источник: ряд (14.1) представлен в [2] раздел 1.12 пункт 2.

Область сходимости: ряд (14.4) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

15. erf_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(x)$. Функция erf(x) – функция ошибок Гаусса, которая определяется следующим образом (15.1).

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \#(15.1)$$

Разложение в ряд Маклорена для этой функции имеет вид (15.2).

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \#(15.2)$$

Тогда для искомой функции получаем (15.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}(x) \#(15.3)$$

Источник: ряд (15.3) в [1] глава 5.2.8 пункт 8.

Область сходимости: ряд (15.3) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

16. m_fact_1mx_mp1_inverse_series

Данный шаблон используется для имплементации ряда Маклорена функции $\frac{m!}{(1-x)^{m+1}}$. Данный ряд выводится следующим образом.

Формула для обобщенного биномиального ряда записывается в виде (16.1).

$$\frac{1}{(1-z)^{\beta+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\beta}{n} z^n \ \#(16.1)$$

Для искомой функции получим следующее выражение (16.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} = m! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m! * n!} = m! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} x^n = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} \ \#(16.2)$$

Источник: ряд (16.1) в [2] раздел 1.111 пункт 1.

Область сходимости: ряд (16.2) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

17. inverse_sqrt_1m4x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$. Данный ряд выводится следующим образом (17.1).

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, 2^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n \#(17.1)$$

Итого, получили итоговое разложение (17.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \ \#(17.2)$$

Источник: ряд (16.1) в [2] раздел 1.112 пункт 3.

Область сходимости: ряд (17.1) сходится для всех $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

18. one_twelfth_3x2_pi2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $\frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2)$.

Функция $f(x) = \frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2)$ – четная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только косинусы. Разложение четной функции по косинусам имеет вид (18.1).

$$f(x) = \frac{a_n}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \ \#(18.1)$$

Тогда для искомой функции имеем следующее разложение (18.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2) \ \#(18.2)$$

Источник: ряд (18.2) в [1] глава 5.4.2 пункт 12.

Область сходимости: ряд (18.2) сходится для всех $x \in (-\pi, \pi)$

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

19. one_twelfth_x2_pi2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $\frac{x}{12}(x^2 - \pi^2)$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \frac{x}{12}(x^2 - \pi^2)$ является нечетной, а значит в ее разложении будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид (19.1).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx \ \#(19.1)$$

Таким образом, для нашего ряда имеем следующее разложение (19.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx) = \frac{x}{12}(x^2 - \pi^2) \ \#(19.2)$$

Источник: ряд (18.2) в [1] глава 5.4.2 пункт 13.

Область сходимости: ряд (32) сходится для всех $x \in (-\pi, \pi)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

20. ln2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения $\ln(2)$ в числовой ряд. Разложение выводится следующим образом (20.1).

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(1+1) = \ln(2) \ \#(20.1)$$

Домножая обе части равенства (20.1) на x, получим итоговое разложение (20.2).

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n * x}{n} = \ln(2) * x \ \#(20.2)$$

Источник: ряд (20.1) в [2] раздел 0.233 пункт 1.

Область сходимости: ряд (20.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

21. one_series

Существует множество способов разложить 1 в ряд. В данном шаблоне 1 представляется в виде ряда (21.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1\#(21.1)$$

Данный ряд выводится следующим образом. Рассмотрим соотношение (21.2).

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\ \#(21.2)$$

Тогда при суммировании на бесконечности получим (21.3).

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+..\#(21.3)$$

Все внутренние члены взаимно сокращаются и выражение принимает вид (21.4).

$$1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1-0 = 1\ \#(21.4)$$

Домножая обе части равенства (21.1) на x, получим итоговое разложение (21.5).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1*x}{n(n+1)} = 1*x\#(21.5)$$

Источник: ряд (21.1) в [1] глава 5.1.7 пункт 1.

Область сходимости: ряд (21.5) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

22. minus_one_quarter_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $-\frac{1}{4}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (22.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}=-\frac{1}{4}\#(22.1)$$

Домножая обе части равенства (22.1) на x, получим итоговое разложение (22.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n * x}{n(n+2)}=-\frac{1}{4} * x\#(22.2)$$

Источник: ряд (22.1) в [1] глава 5.1.7 пункт 4.

Область сходимости: ряд (22.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

23. pi_3_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{3}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (23.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)(4n+1)}=\frac{\pi}{3}\ \#(23.1)$$

Домножая обе части равенства (23.1) на x, получим итоговое разложение (23.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 * x}{(n+1)(2n+1)(4n+1)}=\frac{\pi}{3} * x\#(23.2)$$

Источник: ряд (23.1) в [1] глава 5.1.17 стр. 537 номер 7.

Область сходимости: ряд (23.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

24. pi_4_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{4}$ в числовой ряд. Разложение выводится следующим образом: для начала воспользуемся разложением арктангенса в ряд Маклорена (24.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = arctg(x)\#(24.1)$$

При подстановке $x = \frac{\pi}{4}$ получим (24.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\#(24.2)$$

Домножая обе части равенства (24.2) на x, получим итоговое разложение (24.3).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n * x}{2n+1} = \frac{\pi}{4} * x\#(24.3)$$

Источник: ряд (24.2) в [2] раздел 0.232 пункт 2.

Область сходимости: ряд (24.3) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

25. pi_squared_6_minus_one_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^2}{6} - 1$ в числовой ряд. Для вывода данного разложения воспользуемся разложением для 1 (21.1) и рядом Эйлера (25.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ \#(25.1)$$

Итак, получим следующее выражение для искомой функции (25.2).

$$\frac{\pi^2}{6} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \#(25.2)$$

Домножая обе части равенства (25.2) на x, получим итоговое разложение (25.3).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 * x}{n^2(n+1)} = \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) x \#(25.3)$$

Источник: ряд (25.1) в [2] раздел 0.233 пункт 3.

Область сходимости: ряд (25.3) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

26. three_minus_pi_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $3 - \pi$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (26.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - \pi \#(26.1)$$

Домножая обе части равенства (26.1) на x, получим итоговое разложение (26.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n * x}{n(n+1)(2n+1)} = (3 - \pi) x \#(26.2)$$

Источник: ряд (26.1) в [1] глава 5.1.16 стр. 535 пункт 12.

Область сходимости: ряд (26.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

27. one_twelfth_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{1}{12}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (27.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{12}\#(27.1)$$

Домножая обе части равенства (27.1) на x, получим итоговое разложение (27.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1*x}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{12}*x\#(27.2)$$

Источник: ряд (27.1) в [1] глава 5.1.18 стр. 538 пункт 1.

Область сходимости: ряд (27.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

28. eighth_pi_m_one_third_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (28.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}\#(28.1)$$

Домножая обе части равенства (28.1) на x, получим итоговое разложение (28.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n*x}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}\right)x\#(28.2)$$

Источник: ряд (28.1) в [1] глава 5.1.18 стр. 538 пункт 2.

Область сходимости: ряд (28.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

29. one_third_pi_squared_m_nine_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^2-9}{3}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (29.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2-9}{3} \#(29.1)$$

Домножая обе части равенства (29.1) на x, получим итоговое разложение (29.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1*x}{n^2(n+1)^2} = \left(\frac{\pi^2-9}{3}\right) x\#(29.2)$$

Источник: ряд (29.1) в [1] глава 5.1.21 стр. 541 пункт 6.

Область сходимости: ряд (29.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная четвертого порядка.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

30. four_ln2_m_3_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $4 * \ln(2) - 3$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (30.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+1)^2} = 4 * \ln(2) - 3\#(30.1)$$

Домножая обе части равенства (30.1) на x, получим итоговое разложение (30.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n * x}{n^2(n+1)^2} = (4 * \ln(2) - 3) * x\#(30.2)$$

Источник: ряд (30.1) в [1] глава 5.1.21 стр. 541 пункт 7.

Область сходимости: ряд (30.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная четвертого порядка.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

31. exp_m_cos_x_sinsin_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в тригонометрический ряд функции $e^{-\cos(x)} * \sin(\sin(x))$. Разложение имеет следующий вид (31.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n!} = e^{-\cos(x)} \sin(sin(x)) \#(31.1)$$

Источник: ряд (31.1) в [1] глава 5.4.7 стр. 581 пункт 2

Область сходимости: ряд (31.1) сходится для всех $x \in (-\pi, \pi)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

32. pi_four_minus_ln2_halfed_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{4} - -\frac{\ln(2)}{2}$ в числовой ряд. Данный ряд имеет следующий вид (32.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2} \#(32.1)$$

Домножая обе части равенства (32.1) на x, получим итоговое разложение (32.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} * x}{n} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}\right) x \#(32.2)$$

Источник: ряд (32.1) в [1] глава 5.1.2 стр. 526 пункт 4.

Область сходимости: ряд (32.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

33. five_pi_twelve_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{5\pi}{12}$ в числовой ряд. Данный ряд имеет следующий вид (33.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n}{3}}}{2n+1} = \frac{5\pi}{12}\#(33.1)$$

Домножая обе части равенства (33.1) на x, получим итоговое разложение (33.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n}{3}} * x}{2n+1} = \frac{5\pi}{12}x\#(33.2)$$

Источник: ряд (33.1) в [1] глава 5.1.4 стр. 528 пункт 5.

Область сходимости: ряд (33.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

34. x_two_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $\frac{x}{2}$ в числовой ряд. Рассмотрим разложение $\frac{1}{2}$ в числовой ряд (34.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\#(34.1)$$

Тогда для $\frac{x}{2}$ имеем (34.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\#(34.2)$$

Источник: ряд (34.1) в [1] глава 5.1.9 стр. 531 пункт 1.

Область сходимости: ряд (34.2) сходится для любого x $\in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

35. pi_six_min_half_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}$ в числовой ряд. Данный ряд имеет следующий вид (35.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(6n+5)(6n+7)}=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\#(35.1)$$

Домножая обе части равенства (35.1) на x, получим итоговое разложение (35.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n*x}{(6n+5)(6n+7)}=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)x\#(35.2)$$

Источник: ряд (35.1) в [1] глава 5.1.13 стр. 534 пункт 7.

Область сходимости: ряд (35.2) сходится для любого x $\in(-\infty,+\infty)$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

36. x_two_throught_squares_series

Данный шаблон является вторым вариантом имплементации разложения функции $\frac{x}{2}$ в числовой ряд. Рассмотрим другой вариант разложения $\frac{1}{2}$ в числовой ряд (36.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{4n^4+1}=\frac{1}{2}\#(36.1)$$

Тогда для $\frac{x}{2}$ имеем (36.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x*(2n^2-1)}{4n^4+1}=\frac{1}{2}\#(36.2)$$

Источник: ряд (36.1) в [1] глава 5.1.27 стр. 552 пункт 15.

Область сходимости: ряд (36.2) сходится для любого x ∈ $(-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная четвертого порядка.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

37. minus_one_ned_in_n_series

Данный шаблон используется для имплементации ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^n} * x$. Сумма ряда определяется следующим образом (37.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^n} = -0.78343051 \#(37.1)$$

Источник: ряд (37.1) в [1] глава 5.1.30 стр. 553 пункт 2.

Умножая на x получим (37.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^n} * x = -0.78343051 * x \#(37.2)$$

Сходимость: ряд (37.2) сходится для любого x ∈ $(-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: логорифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

38. minus_one_n_fact_n_in_n_series

Данный шаблон используется для имплементации ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n^n} * x$. Сумма ряда определяется следующим образом (38.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n^n} = -0.65583160 \#(38.1)$$

Источник: ряд (38.1) в [1] глава 5.1.30 стр. 554 пункт 4

Умножая на x получим (38.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n^n} * x = -0.65583160 * x \#(38.2)$$

Сходимость: ряд (38.2) сходится для любого x ∈ $(-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: сверхэкспоненциальная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

39. ln_x_plus_one_x_minus_one_halfed_series

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Данный ряд выводится следующим образом.

Для начала, преобразуем исходную функцию (39.1).

$$\frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n+1} + 1) * \frac{x^n}{n}\right) \#(39.1)$$

Заметим, что в выражении (39.1) при нечетных n сумма $(-1)^{n+1} + 1$ будет давать 0, при четных 2. Значит, можем представить этот ряд в виде (39.2).

$$\frac{1}{2} * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 * x^{2n+1}}{2n+1} \#(39.2)$$

Перемножая, получаем искомое разложение (39.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \#(39.3)$$

Источник: ряд (39.3) представлен в [1] глава 5.2.4 стр. 557 п. 8.

Область сходимости: ряд (39.3) сходится для всех $x \in (-1, 1)$

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

40. two_arcsin_square_x_halfed_series

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $2\arcsin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Данный ряд выводится следующим образом. Рассмотрим разложение функции арксинуса в ряд Маклорена (40.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)} = \arcsin(x) \#(40.1)$$

Применяя произведение Коши двух степенных рядов, получим (40.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2} = \arcsin^2(x) \#(40.2)$$

Далее, подставим в (40.2) $\frac{x}{2}$ вместо x и домножим на 2, получим (40.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2} = 2\arcsin^2\left(\frac{x}{2}\right) \#(40.3)$$

Источник: ряд (40.3) представлен в [1] глава 5.2.14 стр. 567 п. 3.

Область сходимости: ряд (40.3) сходится для всех $x \in [-2, 2]$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

41. pi_squared_twelve_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^2}{12}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (41.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12} \#(41.1)$$

Докажем равенство (41.1). Воспользуемся рядом обратных квадратов (41.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \#(41.2)$$

Преобразуем правую часть равенства (41.2) следующим образом (41.3).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n)^2}\right)\ \#(41.3)$$

Пользуясь (41.1) и (41.2) имеем (41.4).

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n)^2}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n)^2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n)^2}\right)+\frac{\pi^2}{12}\#(41.4)$$

Из (41.4) получаем равенство (41.5).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n)^2}\right)=\ \frac{\pi^2}{12}\#(41.5)$$

Далее, подставляя (41.5) в (41.3) и смещая ряд на 1, получим разложение (41.1).

Домножая обе части равенства (41.1) на x, получим итоговое разложение (41.6).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n*x}{(n+1)^2}\ =\frac{\pi^2}{12}*x\#(41.6)$$

Источник: ряд (41.1) в [2] раздел 0.234 пункт 1.

Область сходимости: ряд (41.6) сходится для любого x $\in(-\infty,+\infty)$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

42. pi_cubed_32_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^3}{32}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (42.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)}=\frac{\pi^3}{32}\#(42.1)$$

Произведя замену $n=k-1$ в ряде (42.1) и домножив обе части на x, получим итоговое разложение (42.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}*x}{(2(n+1)+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}x\#(42.2)$$

Источник: ряд (42.1) представлен в [2] раздел 0.234 пункт 4.

Область сходимости: ряд (42.2) сходится для любого x $\in(-\infty,+\infty)$.

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

43. minus_three_plus_ln3_three_devided_two_plus_two_ln2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $-3+\frac{3}{2}\ln 3+2\ln(2)$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (43.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(36k^2-1)}=-3+\frac{3}{2}\ln(3)+\ln(2)\#(43.1)$$

Произведя замену $n=k-1$ в ряде (43.1) и домножив обе части на x, получим итоговое разложение (43.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1*x}{(n+1)(36(n+1)^2-1)}=\left(-3+\frac{3}{2}\ln(3)+\ln(2)\right)x\#(43.2)$$

Источник: ряд (43.1) представлен в [2] раздел 0.236 пункт 3.

Область сходимости: ряд (43.2) сходится для любого x $\in(-\infty,+\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

44. two_ln2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\ln(2)$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (44.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{12k^2-1}{k(4k^2-1)^2}=2\ln(2)\#(44.1)$$

Произведя замену $n=k-1$ в ряде (44.1) и домножив обе части на x, получим итоговое разложение (44.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(12(n+1)^2-1)x}{(n+1)(4(n+1)^2-1)^2}=2\ln(2)\,x\#(44.2)$$

Источник: ряд (44.1) представлен в [2] раздел 0.236 пункт 6.

Область сходимости: ряд (44.2) сходится для любого x $\in(-\infty,+\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

45. pi_x_multi_e_xpi_plus_e_minusxpi_divided_e_xpi_minus_e_minusxpi

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\pi x\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}-1$. Воспользуемся разложением (45.1).

$$x\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}=\pi\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\#(45.1)$$

Домножим обе части равенства (45.1) на x.

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^2+n^2}=\pi x\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\#(45.2)$$

Преобразуем правую часть равенства (45.2).

$$1+\ 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2+n^2}=\pi x\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\#(45.3)$$

Вычитая единицу с обоих сторон и производя замену $n = k - 1$ в ряде (45.3), получим итоговое разложение (45.4).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2+(n+1)^2}=\pi x\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}-1\ \#(45.4)$$

Источник: ряд (45.1) представлен в [2] раздел 1.217 пункт 1.

Область сходимости: ряд (45.4) сходится для всех $x \in (-\infty;\ +\infty)$; также при $x = 0$ ряд обращается в нуль.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

46. pi_minus_x_2

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$. $f(x)$ – функция общего вида.

Разложение функции общего вида в ряд Фурье имеет следующий вид (46.1).

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\ \#(46.1)$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (46.2).

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos(nx)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cos(nx)\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}x\,cos(nx)dx\right)=0\#(46.2)$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (46.3).

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin(nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\pi\sin(nx)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi}x\sin(nx)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(0 - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\#(46.3)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (46.4).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nx) = f(x)\#(46.4)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (46.4), получим итоговое разложение (46.5).

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\big((m+1)x\big)}{m+1} = \frac{\pi - x}{2}\#(46.5)$$

Источник: ряд (46.4) представлен в [1] глава 5.4.2 пункт 9.

Область сходимости: ряд (46.5) сходится для всех $x \in (-\pi;\ \pi)$.

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

47. half_multi_ln_1div2multi1minuscosx

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2(1-\cos(x))}$. $f(x)$ – четная функция. Разложение четной функции в ряд Фурье имеет следующий вид (47.1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)\ \#(47.1)$$

С помощью тригонометрических формул и преобразования логарифма преобразуем исходную функцию (47.2).

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2(1-\cos(x))} = -\ln\left(2\,sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \#(47.2)$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (47.3).

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\ln\left(2\,sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n} \#(47.3)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (47.4).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(nx) = f(x)\#(47.4)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (47.4), получим итоговое разложение (47.5).

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\big((m+1)x\big)}{m+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2(1-\cos(x))}\#(47.5)$$

Источник: ряд (47.4) представлен в [1] глава 5.4.2 пункт 10.

Область сходимости: ряд (47.5) сходится для всех $x \in (-\pi;\ \pi)$.

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

48. half_minus_sinx_multi_pi_4

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\sin(x)$. Воспользуемся разложением (48.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{(2n-1)*(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\sin(x) \#(48.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (48.1), получим итоговое разложение (48.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(2x(n+1)\right)}{(2n+1)*(2n+3)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\sin(x) \#(48.2)$$

Источник: ряд (48.1) представлен в [2] раздел 1.444 пункт 7.

Область сходимости: ряд (48.2) сходится для всех $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

49. ln_1plussqrt1plusxsquare_minus_ln_2

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(2)$. Воспользуемся разложением (49.1).

$$\ln(2) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} = \ln\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) \#(49.1)$$

Перенеся слагаемое $\ln(2)$ в левую часть равенства (49.1) и занося минус под знак суммирования получим (49.2).

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2k-1)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} = \ln\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln(2) \#(49.2)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (49.2), получим итоговое разложение (49.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^{2n+2}\left((n+1)!\right)^2} x^{2n+2} = \ln\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln(2) \#(49.3)$$

Источник: ряд (49.1) представлен в [2] раздел 1.515 пункт 1.

Область сходимости: ряд (49.3) сходится для всех $x^2 \leq 1$

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

50. ln_cosx

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln(\cos(x))$. Данный ряд имеет следующий вид (50.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{2} * \frac{\sin^{2k}(x)}{k} = \ln(\cos(x)) \#(50.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (50.1), получим итоговое разложение (50.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\sin^{2n+2}(x)}{2n+2} = \ln(cos(x)) \#(50.2)$$

Источник: ряд (50.1) представлен в [2] раздел 1.518 пункт 1.

Область сходимости: ряд (50.2) сходится для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

51. ln_sinx_minus_ln_x

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln(sin(x)) - \ln(x)$. Воспользуемся разложением (51.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{1 - x^2}{k^2\pi^2}\right) = ln(sin(x)) - ln(x) \#(51.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (51.1), получим итоговое разложение (51.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(\frac{1 - x^2}{(n+1)^2\pi^2}\right) = ln(sin(x)) - ln(x) \#(51.2)$$

Источник: ряд (51.1) представлен в [2] раздел 1.521 пункт 2.

Область сходимости: ряд (51.2) сходится для всех $x \in [0, \pi]$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

52. pi_8_cosx_square_minus_1_div_3_cosx

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\left(\frac{\pi}{8}\right) * \cos^2(x) - \left(\frac{1}{3}\right) * \cos(x)$. Воспользуемся разложением (52.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos(2k+1)\, x}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \left(\frac{\pi}{8}\right) * \cos^2(x) - \left(\frac{1}{3}\right) * \cos(x) \#(52.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (52.1), получим итоговое разложение (52.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \cos(2k+3)\, x}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = \left(\frac{\pi}{8}\right) * \cos^2(x) - \left(\frac{1}{3}\right) * \cos(x) \#(52.2)$$

Источник: ряд (52.1) представлен в [2] раздел 1.426.

Область сходимости: ряд (52.2) сходится для всех $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

53. sqrt_oneminussqrtoneminusx_div_x

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}}$. Данное разложение имеет следующий вид (53.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!\, x^n}{2^{4n}\sqrt{2}(2n)!\,(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x}{8\sqrt{2}} + \frac{7x^2}{128\sqrt{2}} + \frac{33x^3}{1024\sqrt{2}} + \cdots =$$
$$= \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}} \#(53.1)$$

Источник: ряд (53.1) представлен в [2] раздел 1.114 пункт 1.

Область сходимости: ряд (53.1) сходится при $x \in (-1,\ 0) \cup (0, 1)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

54.one_minus_sqrt_1minus4x_div_2x

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Данный ряд выводиться следующим образом (54.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n+1}\binom{\frac{1}{2}}{1+n}x^n = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \cdots + 2^{2n+1}\binom{\frac{1}{2}}{1+n}x^n = \\ = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\ \#(54.1)$$

Источник: ряд (54.1) представлен в [2] раздел 1.114 пункт 2.

Область сходимости: ряд (54.1) сходится при $x \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right]$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

55. arcsin_x_minus_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\arcsin(x) - x$. Воспользуемся разложением (55.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!! * x^{2k+1}}{(2k)!! * (2k+1)} + x = \arcsin(x)\ \#(55.1)$$

Перенося x в левую сторону, получим (55.2).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!! * x^{2k+1}}{(2k)!! * (2k+1)} = \arcsin(x) - x\#(55.2)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (55.2), получим итоговое разложение (55.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!! * x^{2n+3}}{(2n+2)!! * (2n+3)} = \arcsin(x) - x \#(55.3)$$

Источник: ряд (55.3) представлен в [1] раздел 5.2.13 пункт 7.

Область сходимости: ряд (55.3) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: гиперлинейна.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

56. pi_x_minus_x_square_square_minus_three_pi_x_plus_two_pi_square_

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $f(x) = \begin{cases} \pi * x - x^2, 0 < x < \pi \\ x^2 - 3\pi x + 2\pi^2,\ \pi < x < 2\pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье. Разложение имеет следующий вид (56.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8 * \sin((2k-1)x)}{\pi(2k-1)^3} = f(x) \#(56.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (56.1), получим итоговое разложение (56.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8 * \sin\big((2n+1)x\big)}{\pi(2n+1)^3} = f(x) \#(56.2)$$

Источник: ряд (56.1) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 1.

Область сходимости: ряд (56.2) сходится при $x \in (0, 2\pi)$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

57. abs_sin_x_minus_2_div_pi_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $f(x) = \begin{cases} sin(x) - \frac{2}{\pi}, 0 \leq x \leq \pi \\ -sin(x) - \frac{2}{\pi}, \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье.

Воспользуемся разложением (57.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4 * \cos(2kx)}{(2k-1)(2k+1)\pi} = f(x)\#(57.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (57.1), получим итоговое разложение (57.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4 * \cos\big(x(2n+2)\big)}{(2n+1)(2n+3)\pi} = f(x)\#(57.2)$$

Источник: ряд (57.1) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 2.

Область сходимости: ряд (57.2) сходится при $x \in (0, 2\pi)$.

Базовая сходимость: квадратичная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

58.pi_minus_3pi_4_and_pi_minus_x_minus_3pi_4_series

Данный шаблон используется для реализации разложения функции $f(x) = \begin{cases} \pi - \frac{3\pi}{4}, -\pi < x < 0 \\ \pi - x - \frac{3\pi}{4}, 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} \pi - \frac{3\pi}{4}, -\pi < x < 0 \\ \pi - x - \frac{3\pi}{4}, 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ – общего вида. Разложение функции общего вида в ряд Фурье имеет следующий вид (58.1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \ \#(58.1)$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (58.2).

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) \cos(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\pi - x - \frac{3\pi}{4}\right) \cos(nx)\, dx =$$
$$= 0 - \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \ \#(58.2)$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (58.3).

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) \sin(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\pi - x - \frac{3\pi}{4}\right) \sin(nx)\, dx =$$
$$= \frac{(-1)^n - 1}{4n} + \frac{3(-1)^n + 1}{4n} = \frac{2(-1)^n}{4n} \#(58.3)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (58.4).

$$-\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\right) \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \sin(nx) = f(x) \#(58.4)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (58.4), получим итоговое разложение (58.5).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^{m+1}}{\pi (m+1)^2}\right) \cos\big((m+1)x\big) + \left(\frac{(-1)^{m+1}}{m+1}\right) \sin((m+1)x) = f(x) \ \#(58.5)$$

Источник: ряд (58.4) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 3.

Область сходимости: ряд (58.5) сходится при $x \in (-\pi, \pi]$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

59. minus_3_div_4_or_x_minus_3_div_4_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения периодической функции $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}, -3 \le x \le 0 \\ x - \frac{3}{4},\ 0 < x < 3 \end{cases}$ с периодом T=6 в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}, -3 \le x \le 0 \\ x - \frac{3}{4},\ 0 < x < 3 \end{cases}$ – общего вида. Разложение функции общего вида имеет следующий вид (59.1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{nx\pi}{3}\right) + b_n \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right) \right) \#(59.1)$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (59.2).

$$a_n = \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{3} f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{3}\right) dx = \\ = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} f(x) \cos\left(\frac{xn\pi}{3}\right) dx = \\ = -\frac{3 \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right)}{4n\pi} + \frac{3(-1)^n - 3}{\pi^2 n^2} \#(59.2)$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (59.3).

$$b_n = \frac{1}{3} \int\limits_{-3}^{3} f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right) dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} f(x) \sin\left(\frac{xn\pi}{3}\right) dx = -\frac{12(-1)^n}{4\pi n} \#(59.3)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (59.4).

$$-\frac{3}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3 \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right)}{4n\pi} + \frac{3(-1)^n - 3}{\pi^2 n^2} \right) \cos\left(\frac{nx\pi}{3}\right) + \\ + \left(-\frac{12(-1)^n}{4\pi n} \right) \sin\left(\frac{nx\pi}{3}\right) = f(x) \#(59.4)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (58.4) и упростив выражение, получим итоговое разложение (59.5).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{-6}{\pi^2(2m+1)^2} \cos\left(\frac{(m+1)\pi x}{3}\right) - \\ - \frac{3\,(-1)^{m+1}}{\pi(m+1)} \sin\left(\frac{(m+1)x\pi}{3}\right) = f(x) \#(59.5)$$

Источник: ряд (59.4) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 4.

Область сходимости: ряд (59.5) сходится при $x \in (-3, 3)$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

60. ten_minus_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения периодической функции $f(x) = 10 - x, 5 < x < 15$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = 10 - x,\ 5 < x < 15$ – нечётная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид (60.1).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{xn\pi}{5}\right) \#(60.1)$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (60.2).

$$b_n = \frac{1}{5}\int_5^{15} (10 - x) \sin\left(\frac{nx\pi}{5}\right) dx = \frac{10(-1)^n}{\pi n} \#(60.2)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (60.3).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(-1)^n}{\pi n} \sin\left(\frac{xn\pi}{5}\right) = f(x) \#(60.3)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (60.3), получим итоговое разложение (60.4).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{10(-1)^{m+1}}{(m+1)\pi} \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{5}\right) = f(x)\#(60.4)$$

Источник: ряд (60.3) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 5.

Область сходимости: ряд (60.4) сходится при $x \in (5, 15)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

61. x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения периодической функции $f(x) = x, -\pi < x < \pi$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = x, -\pi < x < \pi$ – нечётная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид (61.1).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(xn) \ \#(61.1)$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (61.2).

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x) \sin(xn)\, dx = -\frac{2(-1)^n}{n} \ \#(61.2)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (61.3).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2(-1)^n}{n}\right) \sin(xn) = f(x)\#(61.3)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (61.3), получим итоговое разложение (61.4).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{m+1} \sin\big((m+1)x\big) = f(x)\#(61.4)$$

Источник: ряд (61.3) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 6.

Область сходимости: ряд (61.4) сходится при $x \in [-\pi, \pi]$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

62. minus_x_minus_pi_4_or_minus_pi_4_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $f(x) = \begin{cases} -x, -\pi < x \le 0 \\ 0,\ 0 < x < \pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} -x, -\pi < x \le 0 \\ 0,\ 0 < x < \pi \end{cases}$ – общего вида. Разложение функции общего вида имеет следующий вид (62.1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\ \#(62.1)$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (62.2).

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\ \#(62.2)$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (62.3).

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{(-1)^n}{n}\ \#(62.3)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (62.4).

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \right) \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) \sin(nx) = f(x) \#(62.4)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (62.4), получим итоговое разложение (62.5).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2m+1)^2} \cos\big((m+1)x\big) + \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} \sin\big((m+1)x\big) = f(x) \#(62.5)$$

Источник: ряд (62.4) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 7.

Область сходимости: ряд (62.5) сходится при $x \in (-\pi, \pi)$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

63. one_div_two_minus_x_multi_three_plus_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Лорана функции $\frac{1}{(2-x)(3+x)}$. Данный ряд выводиться следующим образом (63.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5} x^n \left(6^{-1-n}((-1)^n 2^{1+n} + 3^{1+n})\right) = \frac{1}{6} + \frac{x}{36} + \frac{7x^2}{216} + \cdots + \\ + \frac{1}{5} x^n \left(6^{-n-1}((-1)^n 2^{n+1} + 3^{n+1})\right) = \frac{1}{(2-x)(3+x)} \ \#(63.1)$$

Источник: ряд (63.1) представлен в [1] раздел 5.3.7 пункт 4.

Область сходимости: ряд (63.1) сходится при $x \in (-2; 2)$

Базовая сходимость: логарифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

64. si_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$. Разложение имеет следующий вид (64.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3*3!} + \frac{x^5}{5*5!} - \frac{x^7}{7*7!} + \cdots = Si(x) \ \#(64.1)$$

Источник: ряд (64.1) представлен в [1] раздел 5.2.9 пункт 15.

Область сходимости: ряд (64.1) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

65. ci_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt$. Данный ряд выводиться следующим образом (65.1).

$$\gamma + lnx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(2n)} x^{2n} = \gamma + lnx - \frac{x^2}{2*2!} + \frac{x^4}{4*4!} - \frac{x^6}{6*6!} + \cdots = \\ = Ci(x)\ \#(65.1)$$

Где γ – постоянная Эйлера – Маскерони. Её можно представить в следующем виде (65.2).

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)\ \#(65.2)$$

Источник: ряд (65.1) представлен в [1] раздел 5.2.9 пункт 12.

Область сходимости: ряд (65.1) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

66. riemann_zeta_func_series

Дзета-функция Римана $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$ - это функция комплексной переменной $s = \sigma + it$, при $\sigma > 1$. Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Дирихле функции $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$. Разложение имеет следующий вид (66.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \zeta(s)\#(66.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (66.1), получим итоговое разложение (66.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} = \zeta(s) \#(66.2)$$

Источник: ряд (66.1) представлен в [1] раздел II. 4.

Область сходимости: ряд (66.2) сходится при $Re(x) > 1$.

Базовая сходимость: логарифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

67. riemann_zeta_func_xmin1_div_Riemann_zeta_func_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Дирихле функции $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$, где $\zeta(s)$ - Дзета-функция Римана (см. 66). Разложение имеет следующий вид (67.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s} = \zeta(s) \#(67.1)$$

Коэффициент a_k можно можно вычислить с помощью функции Эйлера (67.2)

$$a_k = \phi(k) \#(67.2)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (67.1) и подставляя выражение (67.2), получим итоговое разложение (67.3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(n+1)}{(n+1)^x} = \zeta(s) \#(67.3)$$

Источник: ряд (67.1) представлен в [1] раздел II. 4.

Область сходимости: ряд (67.3) сходится при $Re(x) > 2$.

Базовая сходимость: логарифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

68. xsquareplus3_div_xsquareplus2multix_minus_1_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{x^2+3}{x^2+2x} - 1$ в точке $x = 1$. Данный ряд выводиться следующим образом (68.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(-1)^n 3^{-n-1}(3^{n+2} - 7)(x-1)^n = \frac{1}{3} - \frac{10(x-1)}{9} + \frac{37}{27}(x-1)^2 - .. = \frac{x^2+3}{x^2+2x} - 1 \#(68.1)$$

Источник: ряд (68.1) представлен в [1] раздел 5.2.9 пункт 11.

Область сходимости: ряд (68.1) сходится при $x \in (-2; 2)$.

Базовая сходимость: логарифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

69. arcsin_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\arcsin(x)$. Разложение имеет следующий вид (69.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! * x^{2n+1}}{4^n (n!)^2 (2n+1)} = \arcsin(x) \#(69.1)$$

Область сходимости: ряд (69.1) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

70. arctg_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\text{arctg}(x)$. Данный ряд имеет следующий вид (70.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \text{arctg}(x) \ \#(70.1)$$

Область сходимости: ряд (70.1) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

71. k_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Тейлора функции $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$, где k – эллиптический модуль (при $0 \leq k < 1$).

Разложение имеет следующий вид (71.1).

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} = K(k) \#(71.1)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (71.1), получим итоговое разложение (71.2).

$$\frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \right)^2 k^{2m+2} = K(k) \#(71.2)$$

Область сходимости: ряд (71.2) сходится при $k \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

72. e_x_series

$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\, d\theta$, где k – эллиптический модуль ($0 \leq k < 1$)

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Тейлора функции $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\, d\theta$, где k – эллиптический модуль ($0 \leq k < 1$). Разложение имеет следующий вид (72.1).

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left((2n)!\right)^2 k^{2n}}{16^n ((n!)^4)(1-2n)} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 k^{2n}}{1-2n} = E(k) \#(72.1)$$

Область сходимости: ряд (72.1) сходится при $k \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

73. sqrt_1plusx_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sqrt{1+x}$. Разложение имеет следующий вид (73.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!\, x^n}{(1-2n)(n!)^2 4^n} = 1 + \frac{\mathrm{x}}{2} - \frac{\mathrm{x}^2}{8} + \frac{\mathrm{x}^3}{16} - \frac{5\mathrm{x}^4}{128} + \cdots = \sqrt{1+x} \#(73.1)$$

Источник: ряд (73.1) представлен в [2] раздел 1.111 пункт 1.

Область сходимости: ряд (73.1) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

74. lambert_W_func_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена W-функции Ламберта. Функция определяется как обратная функция к функции $f(w) = w * e^w$ для комплексных w. С помощью теоремы Лагранжа об обращении рядов можно получить следующее выражение для ряда Тейлора в окрестности нуля (74.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^{k-1}}{k!} x^k = W_0(x) \#(74.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (74.1), получим итоговое разложение (74.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-n-1)^n}{(n+1)!} x^{n+1} = W_0(x) \#(74.2)$$

Область сходимости: ряд (74.2) сходится при $z \in \left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

75. incomplete_Gamma_func_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Тейлора функции $\int_0^x t^{s-1}e^{-t}dt$, где s – параметр. Разложение имеет следующий вид (75.1).

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+s}}{k!\,(s+k)}=\frac{x^s}{s}-\frac{x^{s+1}}{s+1}+\frac{x^{s+2}}{2(s+2)}-\frac{x^{s+3}}{6(s+3)}+\cdots=\gamma(s,x)\ \#(75.1)$$

Область сходимости: ряд сходится при $x\in C$ и $s=const$.

Базовая сходимость: гиперлиненая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

76. series_with_ln_number1

Данный шаблон предназначен для имплементации ряда (76.2). Воспользуемся рядом (76.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{k^{k^2+\frac{k}{2}}}{(k!)^k e^{k^2}}\right)=0\ \#(76.1)$$

Произведя замену $n=k-1$ в ряде (76.1), получим итоговое разложение (76.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(n+1)^{(n+1)^2+\frac{(n+1)}{2}}}{\big((n+1)!\big)^{n+1}e^{(n+1)^2}}\right)=0\ \#(76.2)$$

Область сходимости: ряд сходится.

Базовая сходимость: гиперлиненая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

77. series_with_ln_number2

Данный шаблон предназначен для имплементации ряда (77.2). Воспользуемся рядом (77.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)^{\ln(n+1)}} = 0\#(77.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (77.1), получим итоговое разложение (77.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)^{\ln(n+2)}} = 0 \ \#(77.2)$$

Область сходимости: ряд сходится.

Базовая сходимость: логарифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

78. pi_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа π в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (78.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{12}(-3)^{-n}}{2n+1} = \pi\#(78.1)$$

Область сходимости: ряд (78.1) сходится

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

79. x_min_sqrt_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Тейлора функции $x - \sqrt{x}$. Разложение имеет следующий вид (79.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{cases}1-\binom{\frac{1}{2}}{n}, n=0 \text{ или } n=1\\ -\binom{\frac{1}{2}}{n}, \quad n>1\end{cases}\right)(-1+x)^n = x-\sqrt{x}\#(79.1)$$

В ряде (79.1) оператор $\binom{\frac{1}{2}}{n}$ обозначает биноминальный коэффициент.

Область сходимости: ряд (79.1) сходится при $x \in (0;1)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

80. arctg_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\operatorname{arctg}(x^2)$. Воспользуемся стандартным разложением арктангенса (80.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots = \operatorname{arctg}(x)\ \#(80.1)$$

При подстановке x^2 получим разложение (80.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{2n+1} = x^2-\frac{x^6}{3}+\frac{x^{14}}{7}+\cdots = \operatorname{arctg}(x^2)\ \#(80.2)$$

Область сходимости: ряд (80.2) сходится при $x \in [-1;1]$

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

81. ln1px4_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln(1+x^4)$. Воспользуемся стандартным разложением логарифма (81.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \ln(1+x) \#(81.1)$$

При подстановке x^2 получим разложение (81.2).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{k} = \ln(1+x^4) \ \#(81.2)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (81.2), получим итоговое разложение (81.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4(n+1)}}{n+1} = \ln(1+x^4) \#(81.3)$$

Источник: ряд (81.1) представлен в [2] раздел 1.12 пункт 2.

Область сходимости: ряд (81.3) сходится при $x \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

82. sin_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sin(x^2)$. Воспользуемся стандартным разложением синуса (82.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots = \sin(x) \#(82.1)$$

При подстановке x^2 получим разложение (82.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \cdots = \sin(x^2) \ \#(82.2)$$

Источник: ряд (82.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 1.

Область сходимости: ряд (82.2) сходится при $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

83. arctg_x3_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\operatorname{arctg}(x^3)$. Воспользуемся стандартным разложением арктангенса (83.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = arctg(x) \#(83.1)$$

При подстановке x^3 получим разложение (83.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n+3}}{2n+1} = x^3 - \frac{x^9}{3} + \frac{x^{15}}{7} + \cdots = \operatorname{arctg}(x^3) \ \#(83.2)$$

Область сходимости: ряд (83.2) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

84. arcsin_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $arcsin(x^2)$. Данный ряд выводиться следующим образом (84.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!\, x^{4n+2}}{\left(4^n (n!)^2 (2n+1)\right)} = x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{3x^{10}}{40} + \frac{5x^{14}}{112} + \cdots = \ \arcsin(x^2) \#(84.1)$$

Область сходимости: ряд (84.1) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

85. ln1_m_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln(1-x^2)$. Данный ряд выводиться следующим образом (85.1).

$$\ln(1-x^2) = -\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k} \#(85.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (85.1), получим итоговое разложение (85.2).

$$\ln(1-x^2) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} \#(85.2)$$

Источник: ряд (85.1) представлен в [2] раздел 1.12 пункт 2

Область сходимости: ряд (85.2) сходится при $x \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

86. artanh_x_series

Данный шаблон используется для используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\mathrm{arth}(\mathrm{x})$. Данный ряд выводиться следующим образом (86.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = arth(x) \#(86.1)$$

Область сходимости: ряд (86.1) сходится при $x \in [-1; 1]$

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

87. arcsinh_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции arsh(x). Данный ряд выводиться следующим образом (87.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right) = x - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x^3}{3}\right) + \left(\frac{1*3}{2*4}\right)\left(\frac{x^5}{5}\right) - \left(\frac{1*3*5}{2*4*6}\right)\left(\frac{x^7}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right) = = arsh(x) \#(87.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (87.1), получим итоговое разложение (87.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)\left(\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right) = arsh(x) \#(87.2)$$

Область сходимости: ряд (87.2) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: гиперлиненая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

88. cos_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\cos(x^2)$. Воспользуемся стандартным разложением косинуса (88.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) \#(88.1)$$

При подстановке x^2 получим разложение (88.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{12}}{720} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!} = \cos(x^2) \#(88.2)$$

Источник: ряд (88.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 3.

Область сходимости: ряд (88.2) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлиненая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

89. sinh_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\mathrm{sh}(\mathrm{x}^2)$. Воспользуемся стандартным разложением гиперболического синуса (89.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = sh(x) \#(89.1)$$

При подстановке x^2 получим разложение (89.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \cdots + \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} = sh(x^2) \#(89.2)$$

Источник: ряд (89.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 5.

Область сходимости: ряд (89.2) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$

Базовая сходимость: гиперлиненая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

90. arctanh_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\mathrm{arth}(\mathrm{x}^2)$. Воспользуемся стандартным разложением обратного гиперболического тангенса (90.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = arth(x) \#(90.1)$$

При подстановке x^2 получим разложение (90.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{2n+1} = x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} + \frac{x^{14}}{7} + \cdots + \frac{x^{4n+2}}{2n+1} = arth(x^2) \#(90.2)$$

Область сходимости: ряд (90.2) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

91. cos3xmin1_div_xsqare_series

Данный шаблон используется для реализации ряда Маклорена функции $\frac{\cos(3x-1)}{x^2}$ Данный ряд выводиться следующим образом

$$\frac{\cos(3x-1)}{x^2} = \frac{\cos(1)}{x^2} + \frac{3\sin(1)}{x} - \frac{9\cos(1)}{2} - \frac{9sinx(1)}{2} + \cdots$$
$$= \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{x^n(-9)\left(\left((3i)^n + (-3i)^n e^{2i}\right)e^{-i}\right)}{2(2+n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} * 3^{2n+2} * x^{2n}}{(2n+2)!}$$

Источник: ряд (90.1)

Область сходимости: ряд сходится при $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

92. two_degree_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции 2^x. Данный ряд выводиться следующим образом (92.1).

$$2^x = 1 + xln(2) + \frac{1}{2}x^2 \ln^2 2 + \frac{1}{6}x^3 \ln^3(2) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \ln^n(2)}{n!} \#(92.1)$$

Источник: ряд (92.1)

Область сходимости: ряд (92.1) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

93. sqrt_1plusx_min_1_min_x_div_2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}$. Данный ряд выводиться следующим образом (93.1).

$$\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}= -\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\frac{7x^5}{256}-\cdots = \\ =\sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{cases}0, n=0 \text{ или } n=1\\ \binom{\frac{1}{2}}{n}, \quad n>1\end{cases}\right)x^n \# (93.1)$$

где $\binom{\frac{1}{2}}{n}$ – биноминальный коэффициент.

Сдвинув для удобства ряд (93.1) на 2, получим итоговое разложение (93.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n+2}x^n = \sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2} \#(93.2)$$

Источник: ряд (93.1)

Область сходимости: ряд (93.2) сходится при $x \in [-1,1]$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

94. ln13_min_ln7_div_7_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд числа $\frac{ln13-ln7}{7}$. Разложение имеет следующий вид (94.1).

$$\frac{ln13-ln7}{7}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}6^k}{k*7^{k+1}} \#(94.1)$$

Произведя замену $n=k-1$ в ряде (94.1) и домножив обе части равенства на x, получим итоговое разложение (94.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} 6^{n+1} x}{(n+1) 7^{n+2}} = \frac{(ln13 - ln7)x}{7} \#(94.2)$$

Источник: ряд (94.1)

Область сходимости: ряд (94.2) сходится при $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: логорифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

95. Ja_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $J_a(x)$ – функции Бесселя первого рода, где a – порядок. Разложение имеет следующий вид (95.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+a+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+a} = J_a(x) \#(95.1)$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Источник: ряд (95.1) в [1] глава 5.2.10 пункт 7.

Область сходимости: ряд (95.1) сходится при $x \in (-\infty; \infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

96. one_div_sqrt2_sin_xdivsqrt2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})$. Разложение имеет следующий вид (96.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} * J_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \#(96.1)$$

В формуле (96.1), $\mathrm{J}_{2n+1}(x)$ обозначает функцию Бесселя первого рода порядка $2n+1$.

Источник: ряд (96.1)

Область сходимости: ряд (96.1) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

97. ln_1plusx_div_1plusx2

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$. Разложение имеет следующий вид (97.1).

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{13x^5}{15} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(n+1)(1+x^2)^{n+1}} \#(97.1)$$

Источник: ряд (97.1) представлен в [1]

Область сходимости: ряд (97.1) сходится при $x \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: логорифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

98. cos_sqrt_x

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\cos(\sqrt{x})$. Воспользуемся стандартным разложением косинуса (98.1)

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \#(98.1)$$

Подставляя $\sqrt{x}$ вместо x, получаем итоговое разложение (98.2).

$$\cos(\sqrt{x}) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x^3}{720} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} \#(98.2)$$

Источник: ряд (98.1) представлен в [1]

Область сходимости: ряд (98.2) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

99. ln_1_plus_x3

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln(1 + x^3)$. Воспользуемся стандартным разложением логарифма (99.1).

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} \#(99.1)$$

Подставляя x^3 в ряд (99.1), получим (99.2).

$$\ln(1 + x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{k} \#(99.2)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (99.2) и домножив обе части равенства на x, получим итоговое разложение (99.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{3n+3}}{n + 1} = \ln(1 + x^3) \#(99.3)$$

Источник: ряд (99.1) представлен в [1]

Область сходимости: ряд (99.3) сходится при $x \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

100. x_div_1minx

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$. Разложение имеет следующий вид (100.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^{n+1}}{n!\, 4^n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{8} + \frac{5x^4}{16} + \cdots = \frac{x}{\sqrt{1 - x}} \#(100.1)$$

Источник: ряд (100.1) представлен в [1]

Область сходимости: ряд (100.1) сходится при $x \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

101. x_div_1minx2 – ряд для $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Данный шаблон используется для реализации ряда Маклорена функции $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Данный ряд выводиться следующим образом

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{8} + \frac{5x^7}{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$$

Область сходимости: ряд сходится при $x \in (-1; 1)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

102. gamma_series – Гармонический ряд

Гармонический ряд имеет вид $H_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

Область сходимости: ряд расходится

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

Список литературы

1. Прудников А. П. Интегралы и Ряды. В 3 т. Т. 1. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев; Издательская фирма “Физико-математическая литература”. – Москва, 2002. – 631 с. ISBN 5-9221-0323-7.
2. Gradshteyn I. S. Table of Integrals, Series, and Products: Seventh Edition / I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik; Academic Press. – Burlington: 30 Corporate Drive, Suite 400, Burlington, MA 01803, USA, 2007. – 1220 с. ISBN-13: 978-0-12-373637-6.