Введение

В работе [1] о $\mathcal{S}$-трансформации сказано, что выражение для неё вывел Сиди в работе [2] (однако, Сиди не рассматривал $\mathcal{S}$-трансформацию как трансформацию последовательности саму по себе [3]).

$\mathcal{S}$-трансформация впервые была использована для суммирования бесконечных степенных рядов в работе [2]. Она также является мощным инструментом для суммирования расходящихся степенных рядов Стилтьеса [3], которые возникают в теории специальных функций и в стационарной теории возмущения в квантовой механике [3].

Наряду с $\mathcal{S}$-трансформацией, другим эффективным методом ускорения сходимости и суммирования расходящихся рядов является $\mathcal{L}$-трансформация Левина [3, 6], которая нашла широкое применение в вычислительной физике и приборостроении [3].

Частные случаи $d^{(1)}$-трансформации

$d^{(1)}$-*трансформация* [4]. Заменим R_i^k в факториальном $d^{(m)}$-преобразовании для бесконечных рядов на $R_l^{p_k}$ и для упрощения положим $\alpha = 0$. При $m = 1$ эти уравнения принимают вид:

$$A_{R_l} = d_n^{(1,j)} + \omega_{R_l} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\overline{\beta}_i}{R_l^i}, \qquad j \leq l \leq j+n;\ \omega_r = r^\rho a_r, \tag{1}$$

где n — натуральное число, а ρ обозначаетρ_1. Эти уравнения можно решить относительно $d_n^{(1,j)}$ (для произвольных R_l) очень просто и эффективно с помощью W-алгоритма из [5] следующим образом:

$$M_0^{(j)} = \frac{A_{R_j}}{\omega_{R_j}}, \qquad N_0^{(j)} = \frac{1}{\omega_{R_j}}, \qquad j \geq 0, \qquad \omega_r = r^\rho a_r,$$

$$M_n^{(j)} = \frac{M_{n-1}^{(j+1)} - M_{n-1}^{(j)}}{R_{j+n}^{-1} - R_j^{-1}}, \qquad N_n^{(j)} = \frac{N_{n-1}^{(j+1)} - N_{n-1}^{(j)}}{R_{j+n}^{-1} - R_j^{-1}}, \qquad j \geq 0, \qquad n \geq 1.$$

$$d_n^{(1,j)} = \frac{M_n^{(j)}}{N_n^{(j)}}, \qquad j, n \geq 0.$$

$\mathcal{L}$-преобразование Левина и $\mathcal{S}$-преобразование Сиди - два важных метода экстраполяции - частные случаи $d^{(1)}$-трансформации Эти методы являются нелинейными и предназначены для ускорения сходимости последовательностей, которые могут быть представлены в виде асимптотических рядов. Они особенно полезны для последовательностей, которые сходятся медленно или расходятся.

$\mathcal{S}$–трансформация Сиди.

Если положить $m = 1$ и $R_l = l + 1$, а также заменить R_l^k на R_l^{0k}, то уравнения в факториальном $d^{(m)}$-преобразовании для бесконечных рядов принимают вид:

$$A_r = d_n^{(1,j)} + \omega_r \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\bar{\beta}_j}{(r)_i}, \qquad J \le r \le J + n, \qquad \omega_r = r^\rho a_r, \qquad J = j + 1. \tag{2}$$

Полученное факториальное $d^{(m)}$-преобразование является $\mathcal{S}$-преобразованием Сиди. Обозначим $d_n^{(1,j)}$ в (2) как $S_n^{(j)}$. Тогда $S_n^{(j)}$ имеет следующую известную явную формулу, приведённую в [8]:

$$\mathcal{S}_k^{(j)} = \frac{\Delta^n\left((J)_{n-1}\dfrac{A_J}{\omega_J}\right)}{\Delta^n\left((J)_{n-1}\dfrac{1}{\omega_J}\right)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \dfrac{(-1)^i \binom{n}{i} (J+i)_{n-1} A_{J+i}}{\omega_{J+i}}}{\sum_{i=0}^{n} \dfrac{(-1)^i \binom{n}{i} (J+i)_{n-1}}{\omega_{J+i}}}; \qquad J = j + 1. \tag{3}$$

Вывод формулы для $\mathcal{S}$-трансформации. Приведём вывод $\mathcal{S}$-трансформации из [2].

Пусть дана модельная последовательность:

$$S_n = S + \omega_n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_j}{(n+\beta)_j}, \tag{4}$$

где β – положительный параметр, чья область определения определена символом Почхаммера (влияние параметра не изучено до конца, зачастую β принимают равным 1).

Если известны значения $S_n, S_{n+1}, \dots, S_{n+k}$, то уравнение (4) задает систему с $k+1$ неизвестными: $S, c_0, \dots, c_{k-1}$. Используя метод Крамера, находим решение для неизвестной S:

$$S = \frac{\begin{vmatrix} S_n & \dfrac{\omega_n}{(n+\beta)_0} & \dfrac{\omega_n}{(n+\beta)_1} & \cdots & \dfrac{\omega_n}{(n+\beta)_{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{n+k} & \dfrac{\omega_{n+k}}{(n+k+\beta)_0} & \dfrac{\omega_{n+k}}{(n+k+\beta)_1} & \cdots & \dfrac{\omega_{n+k}}{(n+k+\beta)_{k-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\omega_n}{(n+\beta)_0} & \dfrac{\omega_n}{(n+\beta)_1} & \cdots & \dfrac{\omega_n}{(n+\beta)_{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \dfrac{\omega_{n+k}}{(n+k+\beta)_0} & \dfrac{\omega_{n+k}}{(n+k+\beta)_1} & \cdots & \dfrac{\omega_{n+k}}{(n+k+\beta)_{k-1}} \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

Если последовательность $\{S_n, \dots, S_{n+k}\}$ удовлетворяют уравнению (4), то $S = \mathcal{S}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n)$.

Данный способ вычисления громоздкий и не удобен для вычисления на ЭВМ, потому был найден альтернативный способ вычисления $\mathcal{S}_k^{(n)}$:

Из уравнения (4) следует, что

$$\frac{S_n - S}{\omega_n} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_j}{(n+\beta)_j}. \tag{6}$$

Умножим обе части на $(n+\beta)_{k-1}$:

$$\frac{(n+\beta)_{k-1}[S_n - S]}{\omega_n} = (n+\beta)_{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_j}{(n+\beta)_j}, \tag{7}$$

$$\frac{(n+\beta)_{k-1}[S_n - S]}{\omega_n} = \sum_{j=0}^{k-1} c_j (n+j+\beta)_{k-j-1}. \tag{8}$$

Применим к обоим частям оператор Δ^k, действующий на n:

$$\Delta^k \left(\frac{(n+\beta)_{k-1}[s_n - s]}{\omega_n} \right) = 0. \tag{9}$$

Упрощая:

$$S = \frac{\Delta^k \left[\frac{(n+\beta)_{k-1} S_n}{\omega_n} \right]}{\Delta^k \left[\frac{(n+\beta)_{k-1}}{\omega_n} \right]}. \tag{10}$$

Применяя формулу для оператора Δ, получаем:

$$S = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta+n+j)_{k-1}}{(\beta+n+j)_{k-1}} \frac{S_{n+j}}{\omega_{n+j}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta+n+j)_{k-1}}{(\beta+n+j)_{k-1}} \frac{1}{\omega_{n+j}}}. \tag{11}$$

В итоге получаем репрезентацию $\mathcal{S}_k^{(n)}$ в виде отношения двух конечных сумм:

$$\mathcal{S}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta+n+j)_{k-1}}{(\beta+n+k)_{k-1}} \frac{S_{n+j}}{\omega_{n+j}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta+n+j)_{k-1}}{(\beta+n+k)_{k-1}} \frac{1}{\omega_{n+j}}}. \tag{12}$$

Множитель $(\beta+n+k)_{k-1}$ был введён для того, чтобы уменьшить порядок слагаемых в сумме, так как иначе при вычислении на ЭВМ может легко произойти ошибка переполнения. Псевдокод для $\mathcal{S}$–преобразования Сиди представлен на <u>*Рисунке 1*</u>, а пример его применения представлен на <u>*Рисунке 2*</u>.

Вход: бесконечный ряд S (4), весовая функция ω_n (аналогичная (2)), начальный индекс $j \geq 0$, порядок трансформации $k \geq 1$

Выход: $\mathcal{S}_k^{(j)}$ (3)

Получить S, ω_n, j, k

#Проверка условия применимости (*Теорема 4*)

if S не удовлетворяет условиям (S-0)-(S-2):

  return «Ряд не удовлетворяет условиям *Теоремы 4*»

if веса ω_n строго не чередуют знаки:

  return «Веса не удовлетворяют условиям *Теоремы 4*»

else:

  Вычислить частичные суммы A_n (аналогичные (2))

  Вычислить $J = j + 1$ #**Формула (2)**

  Инициализировать:

  Числитель = 0

  Знаменатель = 0

  for i от 0 до k:

    Вычислить биномиальный коэффициент #**(3)**

    Вычислить символ Почхаммера #**(4)**

    Обновить:

    Числитель += $\frac{(-1)^i \binom{n}{i} (J+i)_{n-1} A_{J+i}}{\omega_{J+i}}$ #**(3)**

    Знаменатель += $\frac{(-1)^i \binom{n}{i} (J+i)_{n-1}}{\omega_{J+i}}$ #**(3)**

return $\mathcal{S}_k^{(j)}$= Числитель / Знаменатель

Рисунок 1. Псевдокод для $\mathcal{S}$–преобразования Сиди.

Вход: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $\omega_n = n, j = 5, k = 3$

Выход: $\mathcal{S}_k^{(j)} = 0.6931$

Рисунок 2. Пример применения $\mathcal{S}$–преобразования Сиди.

$\mathcal{S}_k^{(n)}$ можно также вычислить, используя рекуррентное отношение, полученное из выведенной формулы.

Числитель и частное $\mathcal{S}_k^{(n)}(\beta, s_n, \omega_n)$ имеют форму:

$$Q_k^{(n)} = \Delta^k Y_k^{(n)},$$

$$Y_k^{(n)}(\beta) = \begin{cases} (n+\beta)^{k-1} \dfrac{S_n}{\omega_n}, \\ (n+\beta)^{k-1} \dfrac{1}{\omega_n} \end{cases}$$

$$Y_k^{(n)}(\beta) = (\beta + n + k - 2) Y_{k-1}^{(n)}(\beta), \qquad k \geq 1, \qquad n \geq 0,$$

$$\begin{aligned} Q_k^{(n)}(\beta) = \Delta^k Y_k^{(n)}(\beta) = \{kE + (n + \beta + k - 2)\Delta\}^{k-1} Y_{k-1}^{(n)}(\beta) = \\ = \{kE + (n + \beta + K - 2)\Delta\} Q_{k-1}^{(n)}(\beta) = \\ = (\beta + n + 2k - 2) Q_{k-1}^{(n+1)}(\beta) - (\beta + n + k - 2) Q_{k-1}^{(n)}(\beta). \end{aligned}$$

Такое соотношение работает для:

$$\mathcal{S}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (\beta + n + k)_{k-1} \dfrac{S_{n+j}}{\omega_{n+j}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (\beta + n + j)_{k-1} \dfrac{1}{\omega_{n+j}}}.$$

Если же используется более численно стабильная версия, то есть

$$\mathcal{S}_k^{(n)} = \frac{Q_k^{(n)}}{(\beta + n + k)_{k-1}}.$$

То есть рекуррентное отношение принимает вид:

$$\mathcal{S}_{k+1}^{(n)} = \mathcal{S}_k^{(n+1)} - \frac{(\beta + n + k)(\beta + n + k - 1)}{(\beta + n + 2k)(\beta + n + 2k - 1)} \mathcal{S}_{k-1}^{(n)}. \tag{13}$$

$\mathcal{S}$–преобразование впервые было использовано для суммирования бесконечных степенных рядов. Сравнительное исследование Гротендорста [9] показало, что этот метод является одним из наиболее эффективных для суммирования широкого класса всюду расходящихся степенных рядов.

$\mathcal{L}$ – трансформация Левина.

Это преобразование основано на идее устранения главных членов асимптотического разложения последовательности, чтобы улучшить точность оценки её предела. Если выбрать $R_l = l + 1$ в факториальном $d^{(m)}$-преобразовании для бесконечных рядов, то получим [4]:

$$A_r = d_n^{(1,j)} + \omega_r \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\bar{\beta}_j}{r^i}, \qquad J \le r \le J + n, \qquad \omega_r = r^\rho a_r, \qquad J = j + 1. \tag{14}$$

Полученное $d^{(1)}$-преобразование совпадает с известными t- и u-преобразованиями Левина, где $\rho = 0$ и $\rho = 1$ соответственно. Обозначим $d_n^{(1,j)}$ в (14) как $\mathcal{L}_n^{(j)}$. Тогда $\mathcal{L}_n^{(j)}$ имеет следующий явный вид, приведённый в [6]:

$$\mathcal{L}_n^{(j)} = \frac{\Delta^n \left(J^{n-1} \dfrac{A_J}{\omega_J} \right)}{\Delta^n \left(J^{n-1} \dfrac{1}{\omega_J} \right)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (J+i)^{n-1} A_{J+i}}{\omega_{J+i}}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (J+i)^{n-1}}{\omega_{J+i}}}; \qquad J = j + 1. \tag{15}$$

Вывод формулы для $\mathcal{L}$-трансформации. Он аналогичен выводу формулы $\mathcal{S}$-трансформации. В итоге получаем:

$$\mathcal{L}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) = \frac{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta+n+j)^{k-1}}{(\beta+n+k)^{k-1}} \frac{S_{n+j}}{\omega_{n+j}}}{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(\beta+n+j)^{k-1}}{(\beta+n+k)^{k-1}} \frac{1}{\omega_{n+j}}}, \tag{16}$$

где $(\beta + n + j)^{k-1}$ – множитель, введённый в формулу чтобы уменьшить магнитуду слагаемых числителя и знаменателя чтобы понизить риск возникновения ошибки переполнения. Псевдокод для $\mathcal{L}$–преобразования Левина представлен на *Рисунке 3*, а пример его применения представлен на *Рисунке 4*.

Вход: бесконечный ряд S (4), тип весовой функции ω_n - t, u или v, начальный индекс $j \geq 0$, порядок трансформации $n \geq 1$

Выход: $\mathcal{L}_n^{(j)}$ (15)

Получить S, ω_n, j, n

#Проверка условия применимости (*Теорема 3*)

if S не удовлетворяет условиям (S-0)-(S-2):

    return «Ряд не удовлетворяет условиям *Теоремы 3*»

if выбран тип «t» для ω_n и ряд не линейный/факториальный:

    return «t-преобразование неприменимо для данного ряда»

if $\exists n: a_{n+1} = a_n$:

    return «v-веса не определены (деление на 0)»

else:

    Вычислить веса для $n = j, \ldots, j + n + 2$

    if тип $\neq$ «t» и веса ω_n строго не чередуют знаки:

        return «Веса не удовлетворяют условиям *Теоремы 3*»

    Вычислить частичные суммы A_n (аналогичные (14))

    Вычислить Числитель #**(15)**

    Вычислить Знаменатель #**(15)**

return $\mathcal{L}_n^{(j)}$= Числитель / Знаменатель

Рисунок 3. Псевдокод для $\mathcal{L}$–преобразования Левина.

Вход: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $\omega_n = "v", j = 5, n = 2$

Выход: $\mathcal{S}_k^{(j)} = 0.764$

Рисунок 4. Пример применения $\mathcal{L}$–преобразования Левина.

Данная формула (16) удобна, так как из неё легко выводится рекуррентное отношение.

Пусть

$$X_k^{(n)}(\beta) = \begin{cases} (n+\beta)^{k-1}\dfrac{S_n}{\omega_n} \\ (n+\beta)^{k-1}\dfrac{1}{\omega_n} \end{cases},$$

$$X_k^{(n)}(\beta) = (\beta+n)X_{k-1}^{(n)}(\beta), \qquad k \geq 1, \qquad n \geq 0,$$

$$\Delta^k(\beta+n) - (\beta+n)\Delta^k = kE\Delta^{k-1},$$

$$P_k^{(n)}(\beta) = \Delta^k X_{(k)}^{(n)}(\beta) = \{kE + (\beta+n)\Delta\}^{k-1} X_{k-1}^{(n)}(\beta) == \{kE + (\beta+n)\Delta\} P_{k-1}^{(n)}(\beta) = \\ = (\beta+n+k)P_{k-1}^{(n+1)}(\beta) - (\beta+n)P_{k-1}^{(n)}(\beta).$$

Для стабильности лучше вычислять уменьшенные значения

$$\mathcal{L}_k^{(n)}(\beta) = \frac{p_k^{(n)}(\beta)}{(\beta+n+k)^{k-1}}.$$

Используя уменьшенные значения, получается рекуррентное отношение формы:

$$\mathcal{L}_{k+1}^{(n)} = \mathcal{L}_k^{(n+1)} = \frac{(\beta+n)(\beta+n+k)^{k-1}}{(\beta+n+k+1)^k}\mathcal{L}_k^{(n)}. \tag{17}$$

Алгебраические свойства [4]:

1) Если положить $\omega_m = ma_m$ (u-преобразование) в (15), то можно заметить, что:

$$\mathcal{L}_n^{(j)} = \frac{\Delta^n\left(J^{n-2}\dfrac{A_J}{\omega_J}\right)}{\Delta^n\left(J^{n-2}\dfrac{1}{\omega_J}\right)} = \frac{\Delta^n\left(J^{n-2}\dfrac{A_J}{\Delta A_J}\right)}{\Delta^n\left(J^{n-2}\dfrac{1}{\Delta A_J}\right)}; \qquad J = j+1, \tag{18}$$

где второе равенство выполняется при $n \geq 2$. Из (16) видно, что $\mathcal{L}_2^{(j)}=W_j(\{A_s\})$, где $\{W_j(\{A_s\})\}$ — последовательность, полученная с помощью преобразования Лубкина.

2) Следующая теорема касается ядра u-преобразования, а также, как частный случай, ядра преобразования Лубкина.
Теорема 1: пусть $\mathcal{L}_n^{(j)}$ получено с помощью u-преобразования на последовательности $\{A_m\}$. Тогда $\mathcal{L}_n^{(j)} = A$ для всех $j = 0, 1, \ldots$, и фиксированного n, если и только если A_m имеет вид:

$$A_m = A + C\prod_{k=2}^{n}\frac{P(k)+1}{P(k)'}, \qquad P(k) = \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i k^{1-i}, \tag{19}$$

где $C \neq 0$, $\beta_0 \neq 1$, $P(k) \neq 0, -1$ для всех $k = 2, 3$ ....

3) Смит и Форд [7] показали, что семейство последовательностей частичных сумм ряда Эйлера содержится в ядре u-преобразования.

Теорема 2: пусть $A_m = \sum_{k=1}^{m} k^{\mu} z^k$, где $m = 1,2,\dots$, μ — неотрицательное целое число, а $z \neq 1$, пусть $\mathcal{L}_n^{(j)}$ — результат применения *u*-преобразования к последовательности $\{A_m\}$. Если $n \geq \mu + 2$, то для всех j выполняется равенство $\mathcal{L}_n^{(j)} = A$, где $A = \left(z \frac{d}{dz}\right)^{\mu} \frac{1}{1-z}$.

Алгоритмы вычисления

$\mathcal{S}$-преобразование Сиди. Алгоритмы вычисления $S_n^{(j)}$:

1) Прямое использование формулы (3);
2) Рекуррентный алгоритм Венигера [4], состоит из следующих шагов:
   a) инициализация (для $j = 0,1,\ldots$):

   $$P_0^{(j)} = \frac{A_J}{\omega_J},\ Q_0^{(j)} = \frac{1}{\omega_J},\ J = j + 1;$$

   b) рекуррентное вычисление (для $j = 0,1,\ldots$ и $n = 1,2,\ldots$):
   $U_n^{(j)} = U_{n-1}^{(j+1)} - \frac{(j+n-1)(j+n)}{(j+2n-2)(j+2n-1)} U_{n-1}^{(j)}$, где $U_n^{(j)}$ обозначает $P_n^{(j)}$, либо $Q_n^{(j)}$;
   c) финальное вычисление:
   $$S_n^{(j)} = \frac{P_n^{(j)}}{Q_n^{(j)}}.$$
3) Модификация Венигера. Венигер предложил расширение $\mathcal{L}$-преобразования, заменив r^i в (14) на $(r + a)^i$ для некоторого фиксированного α. Это приводит к замене множителей J^{n-1} и $(J + i)^{n-1}$ в числителе и знаменателе (15) на $(J + \alpha)^{n-1}$ и $(J + \alpha + i)^{n-1}$ соответственно. Влияние параметра α на точность аппроксимаций требует дополнительного исследования.

$\mathcal{L}$–преобразование Левина. Для вычисления преобразований $\mathcal{L}_n^{(j)}$ можно использовать следующие подходы:

1) Прямое применение формулы (15);
2) Поскольку $\mathcal{L}$-преобразование является $GREP^{(1)}$, для его вычисления удобно использовать W-алгоритм, для этого необходимо задать: $t_l = (l + 1)^{-1}$, $\alpha(t_l) = A_{l+1}$, $\varphi(t_l) = \omega_{l+1}$, где $l = 0, 1, \ldots$;
3) Рекуррентный алгоритм $HURRY$, включающий следующие шаги:
   a) инициализация (для $j = 0,1,\ldots$):

   $$P_0^{(j)} = \frac{A_J}{\omega_J},\ Q_0^{(j)} = \frac{1}{\omega_J},\ J = j + 1.$$

   b) рекуррентное вычисление (для $j = 0,1,\ldots$ и $n = 1,2,\ldots$):
   $U_n^{(j)} = U_{n-1}^{(j+1)} - \frac{J}{J+n}\left(\frac{J+n-1}{J+n}\right)^{n-2} U_{n-1}^{(j)}$, где $U_n^{(j)}$ обозначает $P_0^{(j)}$, либо $Q_n^{(j)}$.
   c) финальное вычисление:

   $\mathcal{L}_n^{(j)} = \frac{P_n^{(j)}}{Q_n^{(j)}}$, при этом $P_n^{(j)} = \frac{\Delta^n(J^{n-1}A_J/\omega_J)}{(J+n)^{n-1}}$, $Q_n^{(j)} = \frac{\Delta^n(J^{n-1}/\omega_J)}{(J+n)^{n-1}}$, такая

   нормализация предотвращает чрезмерный рост значений $P_n^{(j)}$ и $Q_n^{(j)}$ при увеличении n;

4) Модификация Венигера. Венигер предложил расширение $\mathcal{L}$-преобразования, заменив r^i в (14) на $(r + \alpha)^i$ для некоторого фиксированного α. Это приводит к замене множителей J^{n-1} и $(J + i)^{n-1}$ в числителе и знаменателе (15)

на $(J+\alpha)^{n-1}$ и $(J+\alpha+i)^{n-1}$ соответственно. Влияние параметра α на точность аппроксимаций требует дополнительного исследования.

ω_n и его значимость при ускорении сходимости.

Сравнительное исследование Смита и Форда [7], [2] показало, что преобразования Левина исключительно эффективны для суммирования широкого класса бесконечных рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, где $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in b^{(1)}$.

Левин рассмотрел три различных варианта выбора ω_m и определил три различных преобразования последовательностей:

1) ω_n=a_n (t-преобразование);
2) ω_n=na_n (u-преобразование);
3) ω_n=$a_n a_{n+1}/(a_{n+1} - a_n)$ (v-преобразование).

Левин в своей статье [6], а также Смит и Форд в [7] и [2] (где они представили исчерпывающее сравнительное исследование методов ускорения) пришли к выводу, что u- и v-преобразования эффективны для всех трёх типов последовательностей, тогда как t-преобразование эффективно только для линейных и факториальных последовательностей. [На самом деле, все три преобразования являются наилучшими методами ускорения сходимости для знакопеременных рядов $\Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^{\mathrm{k}}|a\square|$ с $\{a\square\} \in b^{(1)}$.]

Выбор весов ω_n и сравнение $\mathcal{S}$- с $\mathcal{L}$ -преобразованием. Параметры ω_n в $\mathcal{S}$-преобразовании выбираются аналогично $\mathcal{L}$ -преобразованию. Получающиеся преобразования последовательностей обладают схожими с t-, u- и v-преобразованиями численными свойствами, за исключением их меньшей эффективности для логарифмических последовательностей. Для последовательностей из классов линейных и факториальных $\mathcal{S}$-преобразование демонстрирует высокую эффективность по сравнению с $\mathcal{L}$-преобразованием. Однако для знакопеременных рядов вида $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \mathrm{c}_k, \mathrm{c}_k > 0$ $\mathcal{L}$-преобразование остаётся оптимальным выбором.

Оценки сходимости

Для $\mathcal{L}$- и $\mathcal{S}$-трансформаций можно дать оценки сходимости, однако лишь для определённых последовательностей.

Рассмотрим ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ удовлетворяющий следующим условиям:

(S-0) Члены последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм бесконечного ряда, который либо сходиться к некоторому лимиту S, либо расходиться с антипределом S.

(S-1) Элементы последовательности $\{\omega_n\}$ строго чередуют знак.

(S-2) Для всех n отношение $\frac{S_n - S}{\omega_n}$ может быть выражено в виде либо факториального ряда, т.е. $\frac{S_n - S}{\omega_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{(\beta+n)_j}$, либо степенного ряда, т.е. $\frac{S_n - S}{\omega_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{(\beta+\text{т})^j}$,

тогда верны следующие теоремы.

<u>*Теорема 3 (об оценке сходимости $\mathcal{L}$-трансформации)*</u>: пусть последовательности $\{S_n\}$ и $\{w_n\}$ удовлетворяют (S-0), (S-1) и (S-2), и $\mathcal{L}_k^{(n)}$ последовательность трансформаций над $\{S_n\}$. Тогда для больших значений n и для фиксированного k справедливо:

$$\frac{\mathcal{L}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) - s}{S_n - S} = O(n^{-2k}), n \to \infty.$$

<u>*Теорема 4 (об оценке сходимости $\mathcal{S}$-трансформации)*</u>: пусть последовательности $\{S_n\}$ и $\{w_n\}$ удовлетворяют условиям (S-0)–(S-2) и что последовательность преобразований $\mathcal{S}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n)$ над $\{S_n\}$. Тогда получим для фиксированной величины k и для всех n следующую оценку для ошибки:

$$|\mathcal{S}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) - S| \leq |\frac{\omega_n}{(\beta+n)_{2k}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\overline{\beta}_{\iota_{k+j}} (j+1)_k}{(\beta+n+2k)_j}|.$$

Для фиксированного k и для больших значений n справедливо:

$$\frac{\mathcal{S}_k^{(n)}(\beta, S_n, \omega_n) - S}{S_n - S} = O(n^{-2k}), \qquad n \to \infty.$$

Из вышеперечисленных теорем видно, что трансформации сравнимы при ускорении знакочередующихся рядов.

Также существует оценка для $\mathcal{L}$-трансформации при ускорении последовательностей с логарифмической сходимостью.

Теорема.

Пусть элементы последовательности $\{S_n\}$, которые сходятся логарифмически к некоторому лимиту s, и удовлетворяют:

$$S_n = S + n^{-\alpha}[b_0 + O(n^{-1})], b_0 \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}_+, n \to \infty.$$

Пусть также элементы $\{w_n\}$ могут быть выбраны таким образом, что:

$$\omega_n = n^{-\alpha}[d_0 + O(n^{-1})], b_0 \neq 0, n \to \infty.$$

И что отношение $\frac{S_n - S}{\omega_n}$ может быть расширено для всех n в степенной ряд следующего вида:

$$\frac{s_n - s}{\omega_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{(\beta + n)^j}.$$

Если трансформация $\mathcal{L}$ используется для ускорения сходимости $\{S_n\}$, получаем, что для фиксированного k и для $n \to \infty$ справедливо:

$$\frac{\mathcal{L}(\beta, S_n, \omega_n) - s}{S_n - S} = O(n^{-k}), n \to \infty$$

К сожалению, такой оценки для $\mathcal{S}$-трансформации не удалось найти, но многочисленные численные эксперименты показывают, что $\mathcal{S}$-трансформация намного хуже справляется с ускорением логарифмической сходимости.

Приведём вывод о применимости $\mathcal{S}$- и $\mathcal{L}$-трансформации из [4]:

1) Для ускорения последовательностей из $b^{(1)}/LOG$ лучше всего подойдёт $\mathcal{L}$-трансформации с ω_m=ma_m;
2) $\mathcal{L}$ и $\mathcal{S}$ – трансформации отлично справляются с ускорением последовательностей из $b^{(1)}/LIN/FAC$;
3) $\mathcal{S}$–трансформация очень эффективна для последовательностей из $b^{(1)}/FACD$;
4) $\mathcal{L}$ и $\mathcal{S}$ – трансформации бесполезны на последовательностях из $b^{(m)}$ при $m > 1$;
5) Если последовательность состоит из суммы последовательностей, состоящих в различных классах $b^{(1)}$, то $\mathcal{L}$ и $\mathcal{S}$ – трансформации работают неэффективно;
6) $\mathcal{L}$ и $\mathcal{S}$ – трансформации применимы на последовательностях и не из класса $b^{(1)}$, однако их результат будет сложно предугадать.

Заключение

$\mathcal{S}$-трансформация является одним из представителей Левино-подобных преобразований, хотя её эффективность уступает $\mathcal{L}$ -трансформации, она остаётся одним из наилучших методов для суммирования расходящихся степенных рядов Стилтьеса.

Обычная трансформация Левина сходится быстрее, чем рекурсивная версия, и в отличие от многих других методов, Левин может эффективно обрабатывать знакопеременные ряды, что расширяет его применимость и делает его особо ценным в разнообразных вычислительных задачах.

Список литературы

1. Mathematical properties of a new Levin-type sequence transformation introduced by Čížek, Zamastil, and Skála. I. // Algebraic theory. J. Math. Phys. // E. J. Weniger. – 2004. – P. 1209-1246.
2. A new method for deriving Pade approximants for some hypergeometric functions // J. Comp. Appl. Math. // A. Sidi. – 1981. – P. 37-40.
3. Nonlinear Sequence Transformations for the Acceleration of Convergence and the Summation of Divergent Series // Computer Physics Reports // E. J. Weniger. - 2003.
4. Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications // Cambridge University Press // A. Sidi – 2003. – P. 121-157, 238-250, 253-261, 363-371.
5. An algorithm for a special case of a generalization of the Richardson extrapolation process // Numer. Math. // A. Sidi. – 1982. – P. 223-233.
6. Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // Math. Comp. // D. Levin. – 1975. – P. 371-388, 1331-1345.
7. Numerical comparisons of nonlinear convergence accelerators // Math. Comp. // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1982. – P. 481-499.
8. A Maple package for transforming sequences and functions // Comput. Phys. Comm. // J. Grotendorst. – 1991. – P. 325-342.
9. A Levin-type algorithm for accelerating the convergence of Fourier series // Numer. Algorithms // H. H. H. Homeier. – 1992. – P. 245-254.