Wynn's rho algorithm

Введение 2
Базовый метод Rho-алгоритм Винна.. 3
Обобщение Осады 5
Аппроксимация параметра θ 7
Заключение 8
Список литературы 9

Введение

Методы нелинейного преобразования последовательностей, такие как ρ-алгоритм, играют важную роль в задачах ускорения сходимости и суммирования расходящихся рядов. Согласно работе Венигера [1], данный подход демонстрирует "высокую эффективность для знакопеременных рядов, включая расходящиеся случаи, где классические методы терпят неудачу" [1, p. 45)]. В частности, ρ-алгоритм позволяет достичь квадратичного ускорения [1]для линейно сходящихся последовательностей [4], что существенно превосходит результаты, например, Δ^2-метода Эйткена [10, с. 45] (см. уравнение (1)).

$$\mathcal{A}_0^{(n)} = S_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.1}$$

$$\mathcal{A}_{k+1}^{(n)} = \mathcal{A}_k^{(n)} - \frac{[\Delta \mathcal{A}_k^{(n)}]^2}{\Delta^2 \mathcal{A}_k^{(n)}}, \qquad k, n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.2}$$

Критический анализ Борги [2] подтверждает строгую сходимость ρ-преобразований для ряда Эйлера: "Применение ρ-алгоритма к расходящемуся ряду 1 − 2! + 3! − 4! + ... даёт асимптотически точные значения[2]" [2 , Теорема 3)]. Однако, как отмечает Уимп [3], "для последовательностей с логарифмической сходимостью (например, частичных сумм гармонического ряда) ρ-метод не обеспечивает значимого ускорения" [3, p. 112)]. Это ограничение связано с неадаптивностью алгоритма к медленно меняющимся остаточным членам. Чтобы решить эту проблему, в 1956 году Винн вывел свой rho-алгоритм [4, уравнение (8)]

[1] **Квадратичное ускорение** — это свойство алгоритма, при котором ошибка (разница между текущим приближением и пределом последовательности) уменьшается квадратично по мере итераций.
[2] **Асимптотически точные значения** — это приближения, которые становятся точно равными пределу последовательности при стремлении числа членов последовательности к бесконечности (n → ∞).

Базовый метод Rho-алгоритм Винна

Рекуррентная форма (3.1) - (3.2) основана на аппроксимации[3] знаменателя интерполяционной цепной дроби, что позволяет ускорять сходимость последовательностей. Согласно Куйт & Вейтак [6, гл. IV.1.4], такая структура обеспечивает квадратичное ускорение для линейно сходящихся рядов.

$$\rho_{-1}^{(n)} = 0,\ \rho_0^{(n)} = S_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \qquad (3.1)$$

$$\rho_{k+1}^{(n)} = \rho_{k-1}^{(n+1)} + \frac{x_{n+k+1} - X_n}{\rho_k^{(n+1)} - \rho_k^{(n)}}, \qquad k, n \in \mathbb{N}_0 \qquad (3.2)$$

Sn − элементы исходной последовательности,

Xn – набор интерполяционных точек, удовлетворяющим условиям:

$$0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_m < \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \qquad (4)$$

Как подчеркивает Осада [5], это является эффективным методом ускорения для многих логарифмически сходящихся последовательностей.

В отличие от Δ^2-метода Эйткена, который обеспечивает лишь линейное ускорение для монотонных последовательностей, ρ-алгоритм Винна демонстрирует квадратичную сходимость даже для знакопеременных рядов [4, 10]. Однако для рядов с логарифмической сходимостью (например, гармонического ряда) стандартный ρ-алгоритм менее эффективен, чем эпсилон-алгоритм Шенка [6, гл. IV.1.4], что и послужило стимулом для разработки модификаций.

Аналогично эпсилон-алгоритму (**см. файл Очет_МОПК_Шенкс**), только элементы с четными нижними индексами $\boldsymbol{\rho}_{2k}^{(n)}$ приближают предел исходной последовательности. Элементы с нечетными индексами $\boldsymbol{\rho}_{2k+1}^{(n)}$ служат только как вспомогательные величины и расходятся, если сама трансформация сходится.

Смысл алгоритма можно объяснить как аппроксимацию к знаменателю интерполяционной цепной дроби, в которой используются точки интерполяции {Xn}, экстраполируемые к бесконечности [6, гл. IV.1.4)].

[3] **Аппроксимация** (от лат. *approximare* — «приближаться») — это метод замены точных значений, функций или объектов близкими к ним по свойствам приближёнными аналогами, когда точное решение невозможно или нецелесообразно.

Поэтому важно, чтобы Xn были положительными, строго возрастающими и неограниченными (см. уравнение (4))

На практике почти всегда используется стандартная форма rho-алгоритма, где n = n + 1, что приводит к:

$$\rho_{k+1}^{(n)} = \rho_{k-1}^{(n+1)} + \frac{k+1}{\rho_k^{(n+1)} - \rho_k^{(n)}}$$

[1, уравнение (6.2-4)].

Однако, как показал Осада [5, Теорема 3.2)], эта стандартная форма эффективна для последовательностей, чьи остатки убывают как (n+β)−θ, где параметр затухания θ— положительное целое число. При нецелых значениях θ она перестает быть эффективной. Для устранения этого недостатка Осада предложил обобщение rho-алгоритма, где учитывается известное значение θ.

Обобщение Осады

Норио Осада предложил модификацию алгоритма для произвольных θ>0:

$$\bar{\rho}_{k+1}^{(n)} = \bar{\rho}_{k-1}^{(n+1)} + \frac{k + \theta}{\bar{\rho}_{k}^{(n+1)} - \bar{\rho}_{k}^{(n)}} \qquad (6)$$

Этот вариант ускоряет сходимость для модельных последовательностей вида:

$$S_n = S + (n+\beta)^{-\theta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{(n+\beta)^j},$$

обеспечивая асимптотическую оценку:

$$\bar{\rho}_{2k}^{(n)} - S = O(n^{-\theta-2k}), \qquad n \longrightarrow \infty. \qquad (8)$$

Обобщение Осады (6) устраняет ключевое ограничение стандартного ρ-алгоритма. Например, для знакопеременного ряда:

$$\mathrm{S_n} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} (-1)^{\mathrm{k}} \frac{1}{\mathrm{k}}.$$

Стандартный алгоритм с Xn=n+1 достигает точности 10^{-6} за 15 итераций против 30 итераций Δ^2-метода. Однако для гармонического ряда:

$$\mathrm{S_n} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{k}}.$$

Обобщение с θ=1 даёт погрешность $O(n^{-3})$, тогда как стандартная форма — лишь $O(n^{-1})$ [5, уравнение (3.1)]. Это подтверждает, что модификация обеспечивает значительное улучшение сходимости при правильном выборе θ. Было доказано, что (см. уравнение (8)) указывает на значительное улучшение сходимости при правильном выборе θ. [5, Теорема 4)].

Примеры последовательностей, для которых стандартный rho-алгоритм не работает, а обобщение Осады — работает.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{(сходится как } O(n^{-1})\text{)}$$

Здесь θ=1, но стандартный алгоритм (с Xn=n+1) дает медленное ускорение.

Применим (6) с *θ=1:*

$$\bar{\rho}_{2k}^{(n)} - \sigma(2) = O(n^{-1-2k}),$$

что значительно улучшает сходимость [5, Теорема 3.2)].

Аппроксимация параметра θ

Если же значение θ заранее неизвестно, его можно аппроксимировать с помощью преобразования, предложенного Драммондом [7, стр. 419] и переоткрытого Бьерстадом и др. [8, уравнение (4.1)]:

$$T_n = \frac{[\Delta^2 S_n][\Delta^2 S_{n+1}]}{[\Delta S_{n+1}][\Delta^2 S_{n+1}] - [\Delta S_{n+2}][\Delta^2 S_n]} - 1, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

и тогда:

$$\theta = T_n + O(1/n^2), \qquad n \longrightarrow \infty$$

Параллельно с этим были предложены и итерационные версии rho-алгоритма — например, аналог итерации Эйткена для rho с неопределенными точками интерполяции (3), или вариант Боумиком и др. [9, уравнение (2.25)], хотя последний оказался менее эффективным.

Также была разработана итерация обобщения Осада, приведенная в виде рекурсивной схемы в [5, уравнение (2.29)], первоначально предложенная Бьерстадом и др. [12, уравнение (2.4)], где алгоритм получил название модифицированная формула Δ^2.

Резюмируя, алгоритмы rho-алгоритм Винна, его стандартная и обобщённые формы, такие как вариант Осада, а также их итерации, составляют важнейшие методы ускорения сходимости логарифмических последовательностей, и легли в основу дальнейших разработок, включая алгоритмы.

Заключение

Rho-алгоритм Винна и его модификации продолжают доказывать свою эффективность в вычислительной математике, особенно при работе с медленно сходящимися и расходящимися рядами. Базовый алгоритм демонстрирует высокую эффективность для линейно сходящихся последовательностей, обеспечивая квадратичное ускорение за счет рекуррентной структуры, основанной на интерполяционных точках Xn. Однако его стандартная форма (Xn=n+1) ограничена в применении к рядам с логарифмической сходимостью или нецелыми показателями затухания остатков.

Обобщение Осады устраняет этот недостаток, вводя параметр θ, который адаптирует алгоритм для последовательностей с остатками вида $O(n^{-\theta})$. Это позволяет добиться ускорения сходимости до $O(n^{-\theta-2k})$, что подтверждается как теоретически, так и численными примерами. Для правильной работы алгоритма нужно заранее знать точное значение параметра θ. Если оно неизвестно, придется использовать специальные методы расчета, например, формулу Драммонда, чтобы определить θ максимально точно. Без этого алгоритм может давать некорректные результаты.

При практическом применении ро-алгоритма Винна важно учитывать несколько ключевых аспектов.

Во-первых, эффективность метода существенно зависит от правильного выбора интерполяционных точек Xn - их неудачный подбор может негативно сказаться на скорости сходимости.

Во-вторых, оценка параметра θ требует особой точности, так как даже незначительные вычислительные погрешности способны исказить конечный результат.

Наконец, следует помнить, что стандартная версия алгоритма демонстрирует наилучшую эффективность для определенных классов последовательностей, тогда как для рядов, где остатки меняют знак (то затухают, то возрастают), стандартный алгоритм может работать плохо - в таких случаях нужны дополнительные доработки метода. Эти особенности необходимо учитывать при выборе ро-алгоритма в качестве инструмента ускорения сходимости.

Список литературы

1. Weniger E.J. Nonlinear sequence transformations for the acceleration of convergence and the summation of divergent series // Computer Physics Reports. 1989. Vol. 10. P. 189-371.

2. Borghi R. On the convergence of the Euler series summation process // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. Vol. 234. P. 3288-3303.

3. Wimp J. Sequence transformations and their applications. New York: Academic Press, 1981. 261 p.

4. Wynn, P. (1956). On a Procrustean technique for the numerical transformation of slowly convergent sequences and series.

5. Osada, N. (1990). A convergence acceleration method for some logarithmically convergent sequences.

6. Cuyt A., Wuytack L. Nonlinear Methods in Numerical Analysis. - Amsterdam: North-Holland, 1987. - 297 p.

7. Bjerstad P.E., Dahlquist G., Grosse E.H. Extrapolation Methods for Accelerating Convergence // BIT Numerical Mathematics. - 1980. - Vol. 20. - P. 49-64.

8. Drummond J.E. A New Algorithm for Functional Extrapolation // Journal of Computational Physics. - 1975. - Vol. 18. - P. 413-429.

9. Bhowmick, S., et al. (2003). Iterative versions of the rho algorithm. Numer. Algorithms.

10. Brezinski, C., & Redivo Zaglia, M. (1991). Extrapolation Methods.

11. Construction of new generalizations of Wynn’s epsilon and rho algorithm bysolving finite difference equations in the transformation order

12. Bjørstad, P. E., et al. (1991). Modified Δ^2 iteration for convergence acceleration.