

Оглавление

1.	exp_series	4
2.	cos_series	4
3.	sin_series.....	5
4.	cosh_series.....	5
5.	sinh_series	6
6.	bin_series.....	6
7.	four_arctan_series	7
8.	ln1mx_series.....	8
9.	mean_sinh_sin_series	8
10.	exp_squared_erf_series.....	9
11.	xmb_Jb_two_series	10
12.	half_asin_two_x_series	10
13.	inverse_1mx_series.....	11
14.	x_1mx_squared_series	11
15.	erf_series	12
16.	m_fact_1mx_mp1_inverse_series	13
17.	inverse_sqrt_1m4x_series.....	13
18.	one_twelfth_3x2_pi2_series.....	14
19.	one_twelfth_x2_pi2_series.....	14
20.	ln2_series.....	15
21.	one_series.....	16
22.	minus_one_quarter_series.....	16
23.	pi_3_series.....	17
24.	pi_4_series.....	18
25.	pi_squared_6_minus_one_series.....	18
26.	three_minus_pi_series.....	19
27.	one_twelfth_series	20
28.	eighth_pi_m_one_third_series	20
29.	one_third_pi_squared_m_nine_series.....	21
30.	four_ln2_m_3_series	21
31.	exp_m_cos_x_sinsin_x_series.....	22
32.	pi_four_minus_ln2_halfed_series	22

33.	five_pi_twelve_series.....	23
34.	x_two_series.....	23
35.	pi_six_min_half_series.....	24
36.	x_two_throught_squares_series.....	24
37.	minus_one_ned_in_n_series.....	25
38.	minus_one_n_fact_n_in_n_series.....	25
39.	ln_x_plus_one_x_minus_one_halfed_series.....	26
40.	two_arcsin_square_x_halfed_series.....	26
41.	pi_squared_twelve_series.....	27
42.	pi_cubed_32_series.....	29
43.	minus_three_plus_ln3_three_devided_two_plus_two_ln2_series.....	29
44.	two_ln2_series.....	30
45.	pi_x_multi_e_xpi_plus_e_minusxpi_divided_e_xpi_minus_e_minusxpi.....	30
46.	pi_minus_x_2.....	31
48.	half_minus_sinx_multi_pi_4.....	33
49.	ln_1plussqrt1plusxsquare_minus_ln_2.....	34
50.	ln_cosx.....	35
51.	ln_sinx_minus_ln_x.....	35
52.	pi_8_cosx_square_minus_1_div_3_cosx.....	36
53.	sqrt_oneminussqrtoneminusx_div_x.....	36
54.	one_minus_sqrt_1minus4x_div_2x.....	37
55.	arcsin_x_minus_x_series.....	37
56.	pi_x_minus_x_square_square_minus_three_pi_x_plus_two_pi_square.....	38
57.	abs_sin_x_minus_2_div_pi_series.....	39
58.	pi_minus_3pi_4_and_pi_minus_x_minus_3pi_4_series.....	39
59.	minus_3_div_4_or_x_minus_3_div_4_series.....	41
60.	ten_minus_x_series.....	42
61.	x_series.....	43
62.	minus_x_minus_pi_4_or_minus_pi_4_series.....	44
63.	one_div_two_minus_x_multi_three_plus_x_series.....	45
64.	si_x_series.....	45
65.	ci_x_series.....	46
66.	riemann_zeta_func_series.....	46
67.	riemann_zeta_func_xmin1_div_Riemann_zeta_func_x_series.....	47

68.	$\text{xsquareplus3_div_xsquareplus2multix_minus_1_series}$	48
69.	\arcsin_x_series	48
70.	\arctg_x_series	48
71.	k_x_series	49
72.	e_x_series	49
73.	$\text{sqrt_1plusx_series}$	50
74.	$\text{lambert_W_func_series}$	50
75.	$\text{incomplete_Gamma_func_series}$	51
76.	$\text{series_with_ln_number1}$	51
77.	$\text{series_with_ln_number2}$	52
78.	π_series	52
79.	$\text{x_min_sqrt_x_series}$	52
80.	\arctg_x2_series	53
81.	$\ln1px4_series$	53
82.	\sin_x2_series	54
83.	\arctg_x3_series	55
84.	\arcsin_x2_series	55
85.	$\ln1_m_x2_series$	56
86.	artanh_x_series	56
87.	arcsinh_x_series	57
88.	\cos_x2_series	57
89.	\sinh_x2_series	58
90.	arctanh_x2_series	58
91.	$\text{cos3xmin1_div_xsqare_series}$	59
92.	$\text{two_degree_x_series}$	59
93.	$\text{sqrt_1plusx_min_1_min_x_div_2_series}$	60
94.	$\ln13_min_ln7_div_7_series$	60
95.	Ja_x_series	61
96.	$\text{one_div_sqrt2_sin_xdivsqrt2_series}$	61
97.	$\ln_1plusx_div_1plusx2$	62
98.	\cos_sqrt_x	62
99.	$\ln_1_plus_x3$	63
100.	x_div_1minx	63
	Список литературы	65

Используемые ряды

1. exp_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции e^x . В общем виде ряд выглядит следующим образом (1.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \#(1.1)$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n -ый член ряда вычисляется на основе $n - 1$ -го по формуле (1.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{x}{n} \quad \#(1.2)$$

Источник: ряд (1.1) представлен в [2] раздел 1.211 пункт 1.

Область сходимости: ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимости: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

2. cos_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\cos(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (2.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) \quad \#(2.1)$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n -ый член ряда вычисляется на основе $n - 1$ -го по формуле (2.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{-x^2}{n(4n-2)} \quad \#(2.2)$$

Источник: ряд (2.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 3.

Область сходимости: ряд (2.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

3. sin_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sin(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (3.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sin(x) \#(3.1)$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n -ый член ряда вычисляется на основе $n - 1$ -го по формуле (3.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{-x^2}{n(4n+2)} \#(3.2)$$

Источник: ряд (3.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 1.

Область сходимости: ряд (3.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

4. cosh_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $ch(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (4.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} = ch(x) \#(4.1)$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n -ый член ряда вычисляется на основе $n - 1$ -го по формуле (4.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{x^2}{n(4n-2)} \#(4.2)$$

Источник: ряд (4.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 4.

Область сходимости: ряд (4.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

5. sinh_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $sh(x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (5.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = sh(x) \#(5.1)$$

В коде, члены данного ряда вычисляются рекуррентно, при этом n -ый член ряда вычисляется на основе $n-1$ -го по формуле (5.2).

$$a_n = a_{n-1} * \frac{x^2}{n(4n+2)} \#(5.2)$$

Источник: ряд (5.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 2.

Область сходимости: ряд (5.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

6. bin_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена бинома Ньютона по степеням x . В общем виде ряд выглядит следующим образом (6.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n = (1+x)^\alpha \quad \#(6.1)$$

где $\binom{\alpha}{n}$ – обобщенный биномиальный коэффициент, который вычисляется по следующей формуле (6.2).

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad \#(6.2)$$

Источник: ряд (6.1) представлен в [2] раздел 1.111 пункт 1.

Область сходимости: ряд (6.1) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

7. four_arctan_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения модифицированного ряда для арктангенса в ряд Маклорена. Данный ряд особенно удобен для вычисления π , ведь при $x = 1, \arctg(1) = \frac{\pi}{4} \rightarrow 4\arctg(1) = \pi$ – получаем ряд Лейбница. В общем виде ряд выглядит следующим образом (7.1).

$$4 * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = 4 * \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right) = 4 \operatorname{atan}(x) \quad \#(7.1)$$

Источник: ряд (7.1) представлен в [1] раздел 5.2.4 пункт 8.

Область сходимости: ряд (7.1) сходится для всех $x \in [-1, 1]$.

Базовая сходимость: логарифмическая, при $x = \pm 1$; гиперлинейная, при $|x| < 1$.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

8. ln1mx_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $-\ln(1-x)$. В общем виде ряд выглядит следующим образом (8.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \quad \#(8.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (8.1), получим итоговое разложение (8.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

Источник: ряд (8.1) представлен в [1] раздел 5.2.4 пункт 4.

Область сходимости: ряд (8.2) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

9. mean_sinh_sin_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{sh(x)+\sin(x)}{2}$.

Данный ряд выводится следующим образом (9.1).

$$\begin{aligned} \frac{sh(x) + \sin(x)}{2} &= \frac{1}{2} (sh(x) + \sin(x)) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} * \frac{1 + (-1)^n}{2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \quad \#(9.1) \end{aligned}$$

Источник: ряд (9.1) представлен в [1] раздел 5.2.7 пункт 11.

Область сходимости: ряд (9.1) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

10.exp_squared_erf_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $e^{x^2} * \text{erf}(x)$. $\text{erf}(x)$ – функция ошибок Гаусса, которая в общем виде выглядит следующим образом (10.1)

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \#(10.1)$$

Функция ошибок может быть разложена в ряд Тейлора следующим образом (10.2).

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)} \quad \#(10.2)$$

Для функции $e^{x^2} * \text{erf}(x)$ имеем следующее разложение (10.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} = e^{x^2} \text{erf}(x) \quad \#(10.3)$$

В формуле (10.3) выражение $\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)$ обозначает гамма-функцию.

Источник: ряд (10.3) в [1] глава 5.2.9 пункт 18.

Область сходимости: ряд (10.3) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

11. xmb_Jb_two_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $x^{-b}J_b(2x)$, где $J_b(2x)$ – функция Бесселя первого рода порядка b . Функция Бесселя задается следующим образом (11.1).

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - b^2)y = 0 \quad \#(11.1)$$

Где b – порядок.

Функция Бесселя первого рода раскладывается в ряд Маклорена следующим образом (11.2).

$$J_b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + b + 1)} x^{2n+b} \quad \#(11.2)$$

Тогда для функции $x^{-b}J_b(2x)$ имеем разложение (11.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + b + 1)} x^{2n} = x^{-b}J_b(2x) \quad \#(11.3)$$

Источник: ряд (11.3) в [1] глава 5.2.10 пункт 7.

Область сходимости: ряд (11.3) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

12. half_asin_two_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{2}\arcsin(2x)$. Данный ряд выводится следующим образом (12.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \arcsin(2x) \quad \#(12.1)$$

Источник: [1] глава 5.2.13 пункт 10.

Область сходимости: ряд (12.1) сходится для всех $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

13. inverse_1mx_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{1-x}$. Данный ряд имеет следующий вид (13.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1}{1-x} \#(13.1)$$

Источник: ряд (13.1) представлен в [2] раздел 1.12 пункт 2.

Область сходимости: ряд (13.1) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

14. x_1mx_squared_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{x}{(1-x)^2}$. Данный ряд выводится следующим образом.

Из (13.1) имеем следующее разложение (14.1).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \#(14.1)$$

Продифференцировав (14.1), получим (14.2).

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ и } \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \#(14.2)$$

Тогда имеем соотношение (14.3).

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \#(14.3)$$

Итак, получаем следующее выражение для искомого ряда (14.4).

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x * \sum_{n=1}^{\infty} n * x^{n-1} = x * \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} \#(14.4)$$

Источник: ряд (14.1) представлен в [2] раздел 1.12 пункт 2.

Область сходимости: ряд (14.4) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

15. erf_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf}(x)$. Функция $\text{erf}(x)$ – функция ошибок Гаусса, которая определяется следующим образом (15.1).

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \#(15.1)$$

Разложение в ряд Маклорена для этой функции имеет вид (15.2).

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)} \#(15.2)$$

Тогда для искомой функции получаем (15.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf}(x) \#(15.3)$$

Источник: ряд (15.3) в [1] глава 5.2.8 пункт 8.

Область сходимости: ряд (15.3) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

16. m_fact_1mx_mp1_inverse_series

Данный шаблон используется для имплементации ряда Маклорена функции $\frac{m!}{(1-x)^{m+1}}$. Данный ряд выводится следующим образом.

Формула для обобщенного биномиального ряда записывается в виде (16.1).

$$\frac{1}{(1-z)^{\beta+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\beta}{n} z^n \quad \#(16.1)$$

Для искомой функции получим следующее выражение (16.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} = m! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m! * n!} = m! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} x^n = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} \quad \#(16.2)$$

Источник: ряд (16.1) в [2] раздел 1.111 пункт 1.

Область сходимости: ряд (16.2) сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

17. inverse_sqrt_1m4x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$. Данный ряд выводится следующим образом (17.1).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-4x}} &= (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} (-4x)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! 2^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n \quad \#(17.1) \end{aligned}$$

Итого, получили итоговое разложение (17.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \quad \#(17.2)$$

Источник: ряд (16.1) в [2] раздел 1.112 пункт 3.

Область сходимости: ряд (17.1) сходится для всех $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

18. one_twelfth_3x2_pi2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $\frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2)$.

Функция $f(x) = \frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2)$ – четная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только косинусы. Разложение четной функции по косинусам имеет вид (18.1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad \#(18.1)$$

Тогда для искомой функции имеем следующее разложение (18.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \frac{1}{12}(3x^2 - \pi^2) \quad \#(18.2)$$

Источник: ряд (18.2) в [1] глава 5.4.2 пункт 12.

Область сходимости: ряд (18.2) сходится для всех $x \in (-\pi, \pi)$

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

19. one_twelfth_x2_pi2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $\frac{x}{12}(x^2 - \pi^2)$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \frac{x}{12}(x^2 - \pi^2)$ является нечетной, а значит в ее разложении будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид (19.1).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(x) dx \quad \#(19.1)$$

Таким образом, для нашего ряда имеем следующее разложение (19.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) = \frac{x}{12}(x^2 - \pi^2) \quad \#(19.2)$$

Источник: ряд (18.2) в [1] глава 5.4.2 пункт 13.

Область сходимости: ряд (32) сходится для всех $x \in (-\pi, \pi)$.

Базовая сходимостъ: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

20. ln2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения $\ln(2)$ в числовой ряд. Разложение выводится следующим образом (20.1).

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(1 + 1) = \ln(2) \quad \#(20.1)$$

Домножая обе части равенства (20.1) на x , получим итоговое разложение (20.2).

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n * x}{n} = \ln(2) * x \quad \#(20.2)$$

Источник: ряд (20.1) в [2] раздел 0.233 пункт 1.

Область сходимости: ряд (20.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимостъ: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

21. one_series

Существует множество способов разложить 1 в ряд. В данном шаблоне 1 представляется в виде ряда (21.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \#(21.1)$$

Данный ряд выводится следующим образом. Рассмотрим соотношение (21.2).

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \#(21.2)$$

Тогда при суммировании на бесконечности получим (21.3).

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \#(21.3)$$

Все внутренние члены взаимно сокращаются и выражение принимает вид (21.4).

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1 \#(21.4)$$

Домножая обе части равенства (21.1) на x , получим итоговое разложение (21.5).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 * x}{n(n+1)} = 1 * x \#(21.5)$$

Источник: ряд (21.1) в [1] глава 5.1.7 пункт 1.

Область сходимости: ряд (21.5) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

22. minus_one_quarter_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $-\frac{1}{4}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (22.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)} = -\frac{1}{4} \#(22.1)$$

Домножая обе части равенства (22.1) на x , получим итоговое разложение (22.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n * x}{n(n+2)} = -\frac{1}{4} * x \#(22.2)$$

Источник: ряд (22.1) в [1] глава 5.1.7 пункт 4.

Область сходимости: ряд (22.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

23. pi_3_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{3}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (23.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)(4n+1)} = \frac{\pi}{3} \#(23.1)$$

Домножая обе части равенства (23.1) на x , получим итоговое разложение (23.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 * x}{(n+1)(2n+1)(4n+1)} = \frac{\pi}{3} * x \#(23.2)$$

Источник: ряд (23.1) в [1] глава 5.1.17 стр. 537 номер 7.

Область сходимости: ряд (23.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

24. pi_4_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{4}$ в числовой ряд. Разложение выводится следующим образом: для начала воспользуемся разложением арктангенса в ряд Маклорена (24.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg}(x) \# (24.1)$$

При подстановке $x = \frac{\pi}{4}$ получим (24.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \# (24.2)$$

Домножая обе части равенства (24.2) на x , получим итоговое разложение (24.3).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n * x}{2n+1} = \frac{\pi}{4} * x \# (24.3)$$

Источник: ряд (24.2) в [2] раздел 0.232 пункт 2.

Область сходимости: ряд (24.3) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

25. pi_squared_6_minus_one_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^2}{6} - 1$ в числовой ряд. Для вывода данного разложения воспользуемся разложением для 1 (21.1) и рядом Эйлера (25.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \# (25.1)$$

Итак, получим следующее выражение для искомой функции (25.2).

$$\frac{\pi^2}{6} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \quad \#(25.2)$$

Домножая обе части равенства (25.2) на x , получим итоговое разложение (25.3).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 * x}{n^2(n+1)} = \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) x \quad \#(25.3)$$

Источник: ряд (25.1) в [2] раздел 0.233 пункт 3.

Область сходимости: ряд (25.3) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

26. three_minus_pi_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $3 - \pi$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (26.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - \pi \quad \#(26.1)$$

Домножая обе части равенства (26.1) на x , получим итоговое разложение (26.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n * x}{n(n+1)(2n+1)} = (3 - \pi)x \quad \#(26.2)$$

Источник: ряд (26.1) в [1] глава 5.1.16 стр. 535 пункт 12.

Область сходимости: ряд (26.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

27. one_twelfth_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{1}{12}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (27.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{12} \#(27.1)$$

Домножая обе части равенства (27.1) на x , получим итоговое разложение (27.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 * x}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{12} * x \#(27.2)$$

Источник: ряд (27.1) в [1] глава 5.1.18 стр. 538 пункт 1.

Область сходимости: ряд (27.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

28. eighth_pi_m_one_third_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (28.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3} \#(28.1)$$

Домножая обе части равенства (28.1) на x , получим итоговое разложение (28.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * x}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}\right) x \#(28.2)$$

Источник: ряд (28.1) в [1] глава 5.1.18 стр. 538 пункт 2.

Область сходимости: ряд (28.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

29. one_third_pi_squared_m_nine_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^2-9}{3}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (29.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2-9}{3} \#(29.1)$$

Домножая обе части равенства (29.1) на x , получим итоговое разложение (29.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 * x}{n^2(n+1)^2} = \left(\frac{\pi^2-9}{3} \right) x \#(29.2)$$

Источник: ряд (29.1) в [1] глава 5.1.21 стр. 541 пункт 6.

Область сходимости: ряд (29.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная четвертого порядка.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

30. four_ln2_m_3_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $4 * \ln(2) - 3$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (30.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+1)^2} = 4 * \ln(2) - 3 \#(30.1)$$

Домножая обе части равенства (30.1) на x , получим итоговое разложение (30.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n * x}{n^2(n+1)^2} = (4 * \ln(2) - 3) * x \#(30.2)$$

Источник: ряд (30.1) в [1] глава 5.1.21 стр. 541 пункт 7.

Область сходимости: ряд (30.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная четвертого порядка.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

31. exp_m_cos_x_sinsin_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в тригонометрический ряд функции $e^{-\cos(x)} * \sin(\sin(x))$. Разложение имеет следующий вид (31.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n!} = e^{-\cos(x)} \sin(\sin(x)) \#(31.1)$$

Источник: ряд (31.1) в [1] глава 5.4.7 стр. 581 пункт 2

Область сходимости: ряд (31.1) сходится для всех $x \in (-\pi, \pi)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

32. pi_four_minus_ln2_halfed_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$ в числовой ряд. Данный ряд имеет следующий вид (32.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2} \#(32.1)$$

Домножая обе части равенства (32.1) на x , получим итоговое разложение (32.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} * x}{n} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2} \right) x \#(32.2)$$

Источник: ряд (32.1) в [1] глава 5.1.2 стр. 526 пункт 4.

Область сходимости: ряд (32.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

33. five_pi_twelve_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{5\pi}{12}$ в числовой ряд. Данный ряд имеет следующий вид (33.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{3}}}{2n+1} = \frac{5\pi}{12} \#(33.1)$$

Домножая обе части равенства (33.1) на x , получим итоговое разложение (33.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{3}} * x}{2n+1} = \frac{5\pi}{12} x \#(33.2)$$

Источник: ряд (33.1) в [1] глава 5.1.4 стр. 528 пункт 5.

Область сходимости: ряд (33.2) сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

34. x_two_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции $\frac{x}{2}$ в числовой ряд. Рассмотрим разложение $\frac{1}{2}$ в числовой ряд (34.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \#(34.1)$$

Тогда для $\frac{x}{2}$ имеем (34.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \#(34.2)$$

Источник: ряд (34.1) в [1] глава 5.1.9 стр. 531 пункт 1.

Область сходимости: ряд (34.2) сходится для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

35. pi_six_min_half_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$ в числовой ряд. Данный ряд имеет следующий вид (35.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(6n+5)(6n+7)} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \#(35.1)$$

Домножая обе части равенства (35.1) на x , получим итоговое разложение (35.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * x}{(6n+5)(6n+7)} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right) x \#(35.2)$$

Источник: ряд (35.1) в [1] глава 5.1.13 стр. 534 пункт 7.

Область сходимости: ряд (35.2) сходится для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

36. x_two_throught_squares_series

Данный шаблон является вторым вариантом имплементации разложения функции $\frac{x}{2}$ в числовой ряд. Рассмотрим другой вариант разложения $\frac{1}{2}$ в числовой ряд (36.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 1}{4n^4 + 1} = \frac{1}{2} \#(36.1)$$

Тогда для $\frac{x}{2}$ имеем (36.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x * (2n^2 - 1)}{4n^4 + 1} = \frac{1}{2} \#(36.2)$$

Источник: ряд (36.1) в [1] глава 5.1.27 стр. 552 пункт 15.

Область сходимости: ряд (36.2) сходится для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная четвертого порядка.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

37. minus_one_ned_in_n_series

Данный шаблон используется для имплементации ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} * x$. Сумма ряда определяется следующим образом (37.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} = -0.78343051 \#(37.1)$$

Источник: ряд (37.1) в [1] глава 5.1.30 стр. 553 пункт 2.

Умножая на x получим (37.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} * x = -0.78343051 * x \#(37.2)$$

Сходимость: ряд (37.2) сходится для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: логорифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

38. minus_one_n_fact_n_in_n_series

Данный шаблон используется для имплементации ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n} * x$. Сумма ряда определяется следующим образом (38.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n} = -0.65583160 \#(38.1)$$

Источник: ряд (38.1) в [1] глава 5.1.30 стр. 554 пункт 4

Умножая на x получим (38.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n} * x = -0.65583160 * x \#(38.2)$$

Сходимость: ряд (38.2) сходится для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: сверхэкспоненциальная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

39. ln_x_plus_one_x_minus_one_halfed_series

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Данный ряд выводится следующим образом.

Для начала, преобразуем исходную функцию (39.1).

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n+1} + 1) * \frac{x^n}{n} \right) \#(39.1)\end{aligned}$$

Заметим, что в выражении (39.1) при нечетных n сумма $(-1)^{n+1} + 1$ будет давать 0, при четных 2. Значит, можем представить этот ряд в виде (39.2).

$$\frac{1}{2} * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 * x^{2n+1}}{2n+1} \#(39.2)$$

Перемножая, получаем искомое разложение (39.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} * \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \#(39.3)$$

Источник: ряд (39.3) представлен в [1] глава 5.2.4 стр. 557 п. 8.

Область сходимости: ряд (39.3) сходится для всех $x \in (-1, 1)$

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

40. two_arcsin_square_x_halfed_series

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $2 \arcsin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Данный ряд выводится следующим

образом. Рассмотрим разложение функции арксинуса в ряд Маклорена (40.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)} = \arcsin(x) \#(40.1)$$

Применяя произведение Коши двух степенных рядов, получим (40.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \arcsin^2(x) \#(40.2)$$

Далее, подставим в (40.2) $\frac{x}{2}$ вместо x и домножим на 2, получим (40.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2} = 2 \arcsin^2\left(\frac{x}{2}\right) \#(40.3)$$

Источник: ряд (40.3) представлен в [1] глава 5.2.14 стр. 567 п. 3.

Область сходимости: ряд (40.3) сходится для всех $x \in [-2, 2]$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

41. pi_squared_twelve_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^2}{12}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (41.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12} \#(41.1)$$

Докажем равенство (41.1). Воспользуемся рядом обратных квадратов (41.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \#(41.2)$$

Преобразуем правую часть равенства (41.2) следующим образом (41.3).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n)^2} \right) \#(41.3)$$

Пользуясь (41.1) и (41.2) имеем (41.4).

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n)^2} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n)^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n)^2} \right) + \frac{\pi^2}{12} \#(41.4) \end{aligned}$$

Из (41.4) получаем равенство (41.5).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n)^2} \right) = \frac{\pi^2}{12} \#(41.5)$$

Далее, подставляя (41.5) в (41.3) и смещая ряд на 1, получим разложение (41.1).

Домножая обе части равенства (41.1) на x , получим итоговое разложение (41.6).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * x}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12} * x \#(41.6)$$

Источник: ряд (41.1) в [2] раздел 0.234 пункт 1.

Область сходимости: ряд (41.6) сходится для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

42. pi_cubed_32_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\frac{\pi^3}{32}$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (42.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \#(42.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (42.1) и домножив обе части на x , получим итоговое разложение (42.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * x}{(2(n+1)+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} x \#(42.2)$$

Источник: ряд (42.1) представлен в [2] раздел 0.234 пункт 4.

Область сходимости: ряд (42.2) сходится для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

43. minus_three_plus_ln3_three_devided_two_plus_two_ln2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $-3 + \frac{3}{2}\ln 3 + 2\ln(2)$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (43.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(36k^2 - 1)} = -3 + \frac{3}{2}\ln(3) + \ln(2) \#(43.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (43.1) и домножив обе части на x , получим итоговое разложение (43.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 * x}{(n+1)(36(n+1)^2 - 1)} = \left(-3 + \frac{3}{2}\ln(3) + \ln(2)\right) x \#(43.2)$$

Источник: ряд (43.1) представлен в [2] раздел 0.236 пункт 3.

Область сходимости: ряд (43.2) сходится для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

44. two_ln2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа $\ln(2)$ в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (44.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12k^2 - 1}{k(4k^2 - 1)^2} = 2 \ln(2) \#(44.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (44.1) и домножив обе части на x , получим итоговое разложение (44.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(12(n+1)^2 - 1)x}{(n+1)(4(n+1)^2 - 1)^2} = 2 \ln(2) x \#(44.2)$$

Источник: ряд (44.1) представлен в [2] раздел 0.236 пункт 6.

Область сходимости: ряд (44.2) сходится для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

45. pi_x_multi_e_xpi_plus_e_minusxpi_divided_e_xpi_minus_e_minusxpi

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд

Маклорена функции $\pi x \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} - 1$. Воспользуемся разложением (45.1).

$$x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} = \pi \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} \#(45.1)$$

Домножим обе части равенства (45.1) на x .

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + n^2} = \pi x \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} \#(45.2)$$

Преобразуем правую часть равенства (45.2).

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + n^2} = \pi x \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} \#(45.3)$$

Вычитая единицу с обеих сторон и производя замену $n = k - 1$ в ряде (45.3), получим итоговое разложение (45.4).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 + (n + 1)^2} = \pi x \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} - 1 \#(45.4)$$

Источник: ряд (45.1) представлен в [2] раздел 1.217 пункт 1.

Область сходимости: ряд (45.4) сходится для всех $x \in (-\infty; +\infty)$; также при $x = 0$ ряд обращается в нуль.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

46. pi_minus_x_2

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$. $f(x)$ – функция общего вида.

Разложение функции общего вида в ряд Фурье имеет следующий вид (46.1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \#(46.1)$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (46.2).

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi-x}{2} \cos(nx) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \pi \cos(nx) dx - \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx \right) = 0 \#(46.2) \end{aligned}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (46.3).

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(nx) dx = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \pi \sin(nx) dx - \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \right) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(0 - \frac{2\pi}{n} \right) = -\frac{1}{n} \#(46.3)
 \end{aligned}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (46.4).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) = f(x) \#(46.4)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (46.4), получим итоговое разложение (46.5).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((m+1)x)}{m+1} = \frac{\pi - x}{2} \#(46.5)$$

Источник: ряд (46.4) представлен в [1] глава 5.4.2 пункт 9.

Область сходимости: ряд (46.5) сходится для всех $x \in (-\pi; \pi)$.

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

47. half_multi_ln_1div2multi1minuscosex

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1-\cos(x))}$. $f(x)$ – четная функция. Разложение четной функции в ряд Фурье имеет следующий вид (47.1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \#(47.1)$$

С помощью тригонометрических формул и преобразования логарифма преобразуем исходную функцию (47.2).

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1 - \cos(x))} = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \#(47.2)$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (47.3).

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\ln \left(2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \#(47.3)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (47.4).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx) = f(x) \#(47.4)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (47.4), получим итоговое разложение (47.5).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((m+1)x)}{m+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1 - \cos(x))} \#(47.5)$$

Источник: ряд (47.4) представлен в [1] глава 5.4.2 пункт 10.

Область сходимости: ряд (47.5) сходится для всех $x \in (-\pi; \pi)$.

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

48. half_minus_sinx_multi_pi_4

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в тригонометрический ряд Фурье функции $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin(x)$. Воспользуемся разложением (48.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1) * (2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin(x) \#(48.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (48.1), получим итоговое разложение (48.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2x(n+1))}{(2n+1) * (2n+3)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin(x) \#(48.2)$$

Источник: ряд (48.1) представлен в [2] раздел 1.444 пункт 7.

Область сходимости: ряд (48.2) сходится для всех $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

49. ln_1plussqrt1plusxsquare_minus_ln_2

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) - \ln(2)$. Воспользуемся разложением (49.1).

$$\ln(2) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) \#(49.1)$$

Перенеся слагаемое $\ln(2)$ в левую часть равенства (49.1) и занеся минус под знак суммирования получим (49.2).

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2k-1)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) - \ln(2) \#(49.2)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (49.2), получим итоговое разложение (49.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} x^{2n+2} = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) - \ln(2) \#(49.3)$$

Источник: ряд (49.1) представлен в [2] раздел 1.515 пункт 1.

Область сходимости: ряд (49.3) сходится для всех $x^2 \leq 1$

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

50. ln_cosx

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln(\cos(x))$. Данный ряд имеет следующий вид (50.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{2} * \frac{\sin^{2k}(x)}{k} = \ln(\cos(x)) \#(50.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (50.1), получим итоговое разложение (50.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\sin^{2n+2}(x)}{2n+2} = \ln(\cos(x)) \#(50.2)$$

Источник: ряд (50.1) представлен в [2] раздел 1.518 пункт 1.

Область сходимости: ряд (50.2) сходится для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

51. ln_sinx_minus_ln_x

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln(\sin(x)) - \ln(x)$. Воспользуемся разложением (51.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{1-x^2}{k^2\pi^2}\right) = \ln(\sin(x)) - \ln(x) \#(51.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (51.1), получим итоговое разложение (51.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(\frac{1-x^2}{(n+1)^2\pi^2}\right) = \ln(\sin(x)) - \ln(x) \#(51.2)$$

Источник: ряд (51.1) представлен в [2] раздел 1.521 пункт 2.

Область сходимости: ряд (51.2) сходится для всех $x \in [0, \pi]$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

52. pi_8_cosx_square_minus_1_div_3_cosx

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\left(\frac{\pi}{8}\right) * \cos^2(x) - \left(\frac{1}{3}\right) * \cos(x)$. Воспользуемся разложением (52.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos(2k+1)x}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \left(\frac{\pi}{8}\right) * \cos^2(x) - \left(\frac{1}{3}\right) * \cos(x) \#(52.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (52.1), получим итоговое разложение (52.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2k+3)x}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = \left(\frac{\pi}{8}\right) * \cos^2(x) - \left(\frac{1}{3}\right) * \cos(x) \#(52.2)$$

Источник: ряд (52.1) представлен в [2] раздел 1.426.

Область сходимости: ряд (52.2) сходится для всех $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Базовая сходимость: кубическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

53. sqrt_oneminussqrtoneminusx_div_x

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}}$. Данное разложение имеет следующий вид (53.1).

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! x^n}{2^{4n} \sqrt{2} (2n)! (2n+1)!} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x}{8\sqrt{2}} + \frac{7x^2}{128\sqrt{2}} + \frac{33x^3}{1024\sqrt{2}} + \dots = \\ &= \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}} \#(53.1) \end{aligned}$$

Источник: ряд (53.1) представлен в [2] раздел 1.114 пункт 1.

Область сходимости: ряд (53.1) сходится при $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

54.one_minus_sqrt_1minus4x_div_2x

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Данный ряд выводится следующим образом (54.1).

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n+1} \binom{\frac{1}{2}}{1+n} x^n &= 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \dots + 2^{2n+1} \binom{\frac{1}{2}}{1+n} x^n = \\ &= \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \quad \#(54.1) \end{aligned}$$

Источник: ряд (54.1) представлен в [2] раздел 1.114 пункт 2.

Область сходимости: ряд (54.1) сходится при $x \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right]$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

55.arcsin_x_minus_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\arcsin(x) - x$. Воспользуемся разложением (55.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!! * x^{2k+1}}{(2k)!! * (2k+1)} + x = \arcsin(x) \quad \#(55.1)$$

Переносим x в левую сторону, получим (55.2).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!! * x^{2k+1}}{(2k)!! * (2k+1)} = \arcsin(x) - x \quad \#(55.2)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (55.2), получим итоговое разложение (55.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!! * x^{2n+3}}{(2n+2)!! * (2n+3)} = \arcsin(x) - x \#(55.3)$$

Источник: ряд (55.3) представлен в [1] раздел 5.2.13 пункт 7.

Область сходимости: ряд (55.3) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: гиперлинейна.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

56. pi_x_minus_x_square_square_minus_three_pi_x_plus_two_pi_square_

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции

$$f(x) = \begin{cases} \pi * x - x^2, & 0 < x < \pi \\ x^2 - 3\pi x + 2\pi^2, & \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad \text{в тригонометрический ряд Фурье.}$$

Разложение имеет следующий вид (56.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8 * \sin((2k-1)x)}{\pi(2k-1)^3} = f(x) \#(56.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (56.1), получим итоговое разложение (56.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8 * \sin((2n+1)x)}{\pi(2n+1)^3} = f(x) \#(56.2)$$

Источник: ряд (56.1) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 1.

Область сходимости: ряд (56.2) сходится при $x \in (0, 2\pi)$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

57. abs_sin_x_minus_2_div_pi_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) - \frac{2}{\pi}, 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin(x) - \frac{2}{\pi}, \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{в тригонометрический ряд Фурье.}$$

Воспользуемся разложением (57.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4 * \cos(2kx)}{(2k-1)(2k+1)\pi} = f(x) \# (57.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (57.1), получим итоговое разложение (57.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4 * \cos(x(2n+2))}{(2n+1)(2n+3)\pi} = f(x) \# (57.2)$$

Источник: ряд (57.1) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 2.

Область сходимости: ряд (57.2) сходится при $x \in (0, 2\pi)$.

Базовая сходимость: квадратичная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

58.pi_minus_3pi_4_and_pi_minus_x_minus_3pi_4_series

Данный шаблон используется для реализации разложения функции $f(x) =$

$$\begin{cases} \pi - \frac{3\pi}{4}, -\pi < x < 0 \\ \pi - x - \frac{3\pi}{4}, 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad \text{в тригонометрический ряд Фурье.}$$

$$\text{Функция } f(x) = \begin{cases} \pi - \frac{3\pi}{4}, -\pi < x < 0 \\ \pi - x - \frac{3\pi}{4}, 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad \text{— общего вида. Разложение функции}$$

общего вида в ряд Фурье имеет следующий вид (58.1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad \#(58.1)$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (58.2).

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left(\pi - \frac{3\pi}{4} \right) \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\pi - x - \frac{3\pi}{4} \right) \cos(nx) dx = \\ &= 0 - \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \quad \#(58.2) \end{aligned}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (58.3).

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left(\pi - \frac{3\pi}{4} \right) \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\pi - x - \frac{3\pi}{4} \right) \sin(nx) dx = \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{4n} + \frac{3(-1)^n + 1}{4n} = \frac{2(-1)^n}{4n} \quad \#(58.3) \end{aligned}$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (58.4).

$$-\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \right) \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) \sin(nx) = f(x) \quad \#(58.4)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (58.4), получим итоговое разложение (58.5).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^{m+1}}{\pi(m+1)^2} \right) \cos((m+1)x) + \left(\frac{(-1)^{m+1}}{m+1} \right) \sin((m+1)x) = f(x) \quad \#(58.5)$$

Источник: ряд (58.4) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 3.

Область сходимости: ряд (58.5) сходится при $x \in (-\pi, \pi]$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

59. minus_3_div_4_or_x_minus_3_div_4_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения периодической

функции $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}, & -3 \leq x \leq 0 \\ x - \frac{3}{4}, & 0 < x < 3 \end{cases}$ с периодом $T=6$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}, & -3 \leq x \leq 0 \\ x - \frac{3}{4}, & 0 < x < 3 \end{cases}$ – общего вида. Разложение функции общего вида имеет следующий вид (59.1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \right) \quad \#(59.1)$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (59.2).

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos\left(\frac{x n \pi}{3}\right) dx = \\ &= -\frac{3 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)}{4n\pi} + \frac{3(-1)^n - 3}{\pi^2 n^2} \quad \#(59.2) \end{aligned}$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (59.3).

$$b_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin\left(\frac{x n \pi}{3}\right) dx = -\frac{12(-1)^n}{4\pi n} \quad \#(59.3)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (59.4).

$$\begin{aligned} -\frac{3}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)}{4n\pi} + \frac{3(-1)^n - 3}{\pi^2 n^2} \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + \\ + \left(-\frac{12(-1)^n}{4\pi n} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = f(x) \quad \#(59.4) \end{aligned}$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (58.4) и упростив выражение, получим итоговое разложение (59.5).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{-6}{\pi^2(2m+1)^2} \cos\left(\frac{(m+1)\pi x}{3}\right) - \frac{3(-1)^{m+1}}{\pi(m+1)} \sin\left(\frac{(m+1)x\pi}{3}\right) = f(x) \# (59.5)$$

Источник: ряд (59.4) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 4.

Область сходимости: ряд (59.5) сходится при $x \in (-3, 3)$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

60. ten_minus_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения периодической функции $f(x) = 10 - x, 5 < x < 15$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = 10 - x, 5 < x < 15$ – нечётная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид (60.1).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{xn\pi}{5}\right) \# (60.1)$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (60.2).

$$b_n = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) \sin\left(\frac{nx\pi}{5}\right) dx = \frac{10(-1)^n}{\pi n} \# (60.2)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (60.3).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(-1)^n}{\pi n} \sin\left(\frac{xn\pi}{5}\right) = f(x) \# (60.3)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (60.3), получим итоговое разложение (60.4).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{10(-1)^{m+1}}{(m+1)\pi} \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{5}\right) = f(x) \# (60.4)$$

Источник: ряд (60.3) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 5.

Область сходимости: ряд (60.4) сходится при $x \in (5, 15)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

61. x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения периодической функции $f(x) = x, -\pi < x < \pi$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция $f(x) = x, -\pi < x < \pi$ – нечётная, а значит в тригонометрическом ряде Фурье будут только синусы. Разложение нечетной функции по синусам имеет следующий вид (61.1).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(xn) \# (61.1)$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (61.2).

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x) \sin(xn) dx = -\frac{2(-1)^n}{n} \# (61.2)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (61.3).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2(-1)^n}{n} \right) \sin(xn) = f(x) \# (61.3)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (61.3), получим итоговое разложение (61.4).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{m+1} \sin((m+1)x) = f(x) \# (61.4)$$

Источник: ряд (61.3) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 6.

Область сходимости: ряд (61.4) сходится при $x \in [-\pi, \pi]$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

62. minus_x_minus_pi_4_or_minus_pi_4_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения функции

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{в тригонометрический ряд Фурье.}$$

Функция $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$ – общего вида. Разложение функции общего вида имеет следующий вид (62.1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad \#(62.1)$$

Коэффициент a_n вычисляется следующим образом (62.2).

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \quad \#(62.2)$$

Коэффициент b_n вычисляется следующим образом (62.3).

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{(-1)^n}{n} \quad \#(62.3)$$

Тогда для нашей функции имеем следующее разложение (62.4).

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \right) \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) \sin(nx) = f(x) \quad \#(62.4)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (62.4), получим итоговое разложение (62.5).

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2m+1)^2} \cos((m+1)x) + \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} \sin((m+1)x) = f(x) \quad \#(62.5)$$

Источник: ряд (62.4) представлен в [1] раздел 5.4.15 пункт 7.

Область сходимости: ряд (62.5) сходится при $x \in (-\pi, \pi)$.

Базовая сходимость: квадратичная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

63. one_div_two_minus_x_multi_three_plus_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Лорана функции $\frac{1}{(2-x)(3+x)}$. Данный ряд выводится следующим образом (63.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5} x^n (6^{-1-n}((-1)^n 2^{1+n} + 3^{1+n})) = \frac{1}{6} + \frac{x}{36} + \frac{7x^2}{216} + \dots + \\ + \frac{1}{5} x^n (6^{-n-1}((-1)^n 2^{n+1} + 3^{n+1})) = \frac{1}{(2-x)(3+x)} \quad \#(63.1)$$

Источник: ряд (63.1) представлен в [1] раздел 5.3.7 пункт 4.

Область сходимости: ряд (63.1) сходится при $x \in (-2; 2)$

Базовая сходимость: логарифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

64. si_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$. Разложение имеет следующий вид (64.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3 * 3!} + \frac{x^5}{5 * 5!} - \frac{x^7}{7 * 7!} + \dots = Si(x) \quad \#(64.1)$$

Источник: ряд (64.1) представлен в [1] раздел 5.2.9 пункт 15.

Область сходимости: ряд (64.1) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

65. ci_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt$. Данный ряд выводится следующим образом (65.1).

$$\begin{aligned} \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n)} x^{2n} &= \gamma + \ln x - \frac{x^2}{2 * 2!} + \frac{x^4}{4 * 4!} - \frac{x^6}{6 * 6!} + \dots = \\ &= Ci(x) \#(65.1) \end{aligned}$$

Где γ – постоянная Эйлера – Маскерони. Её можно представить в следующем виде (65.2).

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right) \#(65.2)$$

Источник: ряд (65.1) представлен в [1] раздел 5.2.9 пункт 12.

Область сходимости: ряд (65.1) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

66. riemann_zeta_func_series

Дзета-функция Римана $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$ - это функция комплексной переменной $s = \sigma + it$, при $\sigma > 1$. Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Дирихле функции $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$. Разложение имеет следующий вид (66.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \zeta(s) \#(66.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (66.1), получим итоговое разложение (66.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} = \zeta(s) \# (66.2)$$

Источник: ряд (66.1) представлен в [1] раздел II. 4.

Область сходимости: ряд (66.2) сходится при $Re(x) > 1$.

Базовая сходимость: логарифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

67. riemann_zeta_func_xmin1_div_Riemann_zeta_func_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Дирихле функции $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$, где $\zeta(s)$ - Дзета-функция Римана (см. 66). Разложение имеет следующий вид (67.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s} = \zeta(s) \# (67.1)$$

Коэффициент a_k можно можно вычислить с помощью функции Эйлера (67.2)

$$a_k = \phi(k) \# (67.2)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (67.1) и подставляя выражение (67.2), получим итоговое разложение (67.3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(n+1)}{(n+1)^x} = \zeta(s) \# (67.3)$$

Источник: ряд (67.1) представлен в [1] раздел II. 4.

Область сходимости: ряд (67.3) сходится при $Re(x) > 2$.

Базовая сходимость: логарифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

68. xsquareplus3_div_xsquareplus2multix_minus_1_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{x^2+3}{x^2+2x} - 1$ в точке $x = 1$. Данный ряд выводится следующим образом (68.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (-1)^n 3^{-n-1} (3^{n+2} - 7) (x - 1)^n = \frac{1}{3} - \frac{10(x-1)}{9} + \frac{37}{27} (x-1)^2 - \dots = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x} - 1 \#(68.1)$$

Источник: ряд (68.1) представлен в [1] раздел 5.2.9 пункт 11.

Область сходимости: ряд (68.1) сходится при $x \in (-2; 2)$.

Базовая сходимость: логарифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

69. arcsin_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\arcsin(x)$. Разложение имеет следующий вид (69.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! * x^{2n+1}}{4^n (n!)^2 (2n+1)} = \arcsin(x) \#(69.1)$$

Область сходимости: ряд (69.1) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

70. arctg_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\arctg(x)$. Данный ряд имеет следующий вид (70.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \arctg(x) \#(70.1)$$

Область сходимости: ряд (70.1) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

71. k_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Тейлора функции $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$, где k – эллиптический модуль (при $0 \leq k < 1$).

Разложение имеет следующий вид (71.1).

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} = K(k) \# (71.1)$$

Произведя замену $m = n - 1$ в ряде (71.1), получим итоговое разложение (71.2).

$$\frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \right)^2 k^{2m+2} = K(k) \# (71.2)$$

Область сходимости: ряд (71.2) сходится при $k \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

72. e_x_series

$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta$, где k – эллиптический модуль ($0 \leq k < 1$)

Данный шаблон предназначен для имплементации разложения в ряд Тейлора функции $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta$, где k – эллиптический модуль ($0 \leq k < 1$).

Разложение имеет следующий вид (72.1).

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^2 k^{2n}}{16^n ((n!)^4) (1-2n)} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 k^{2n}}{1-2n} = E(k) \# (72.1)$$

Область сходимости: ряд (72.1) сходится при $k \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

73. sqrt_1plusx_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sqrt{1+x}$. Разложение имеет следующий вид (73.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)! x^n}{(1-2n)(n!)^2 4^n} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots = \sqrt{1+x} \# (73.1)$$

Источник: ряд (73.1) представлен в [2] раздел 1.111 пункт 1.

Область сходимости: ряд (73.1) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

74. lambert_W_func_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена W-функции Ламберта. Функция определяется как обратная функция к функции $f(w) = w * e^w$ для комплексных w . С помощью теоремы Лагранжа об обращении рядов можно получить следующее выражение для ряда Тейлора в окрестности нуля (74.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^{k-1}}{k!} x^k = W_0(x) \# (74.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (74.1), получим итоговое разложение (74.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-n-1)^n}{(n+1)!} x^{n+1} = W_0(x) \# (74.2)$$

Область сходимости: ряд (74.2) сходится при $z \in \left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

75. incomplete_Gamma_func_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Тейлора функции $\int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt$, где s – параметр. Разложение имеет следующий вид (75.1).

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+s}}{k! (s+k)} = \frac{x^s}{s} - \frac{x^{s+1}}{s+1} + \frac{x^{s+2}}{2(s+2)} - \frac{x^{s+3}}{6(s+3)} + \dots = \gamma(s, x) \quad \#(75.1)$$

Область сходимости: ряд сходится при $x \in \mathbb{C}$ и $s = \text{const}$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

76. series_with_ln_number1

Данный шаблон предназначен для имплементации ряда (76.2). Воспользуемся рядом (76.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{k^{k^2 + \frac{k}{2}}}{(k!)^k e^{k^2}} \right) = 0 \quad \#(76.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (76.1), получим итоговое разложение (76.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(n+1)^{(n+1)^2 + \frac{(n+1)}{2}}}{((n+1)!)^{n+1} e^{(n+1)^2}} \right) = 0 \quad \#(76.2)$$

Область сходимости: ряд сходится.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

77. series_with_ln_number2

Данный шаблон предназначен для имплементации ряда (77.2).
Воспользуемся рядом (77.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)^{\ln(n+1)}} = 0 \#(77.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (77.1), получим итоговое разложение (77.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)^{\ln(n+2)}} = 0 \#(77.2)$$

Область сходимости: ряд сходится.

Базовая сходимость: логарифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

78. pi_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения числа π в числовой ряд. Разложение имеет следующий вид (78.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{12}(-3)^{-n}}{2n+1} = \pi \#(78.1)$$

Область сходимости: ряд (78.1) сходится

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

79. x_min_sqrt_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Тейлора функции $x - \sqrt{x}$. Разложение имеет следующий вид (79.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{cases} 1 - \binom{\frac{1}{2}}{n}, & n = 0 \text{ или } n = 1 \\ -\binom{\frac{1}{2}}{n}, & n > 1 \end{cases} \right) (-1+x)^n = x - \sqrt{x} \# (79.1)$$

В ряде (79.1) оператор $\binom{\frac{1}{2}}{n}$ обозначает биномиальный коэффициент.

Область сходимости: ряд (79.1) сходится при $x \in (0; 1)$.

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

80. arctg_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\arctg(x^2)$. Воспользуемся стандартным разложением арктангенса (80.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \arctg(x) \# (80.1)$$

При подстановке x^2 получим разложение (80.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{2n+1} = x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} + \dots = \arctg(x^2) \# (80.2)$$

Область сходимости: ряд (80.2) сходится при $x \in [-1; 1]$

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

81. ln1px4_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln(1+x^4)$. Воспользуемся стандартным разложением логарифма (81.1).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \ln(1+x) \quad \#(81.1)$$

При подстановке x^2 получим разложение (81.2).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{k} = \ln(1+x^4) \quad \#(81.2)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (81.2), получим итоговое разложение (81.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4(n+1)}}{n+1} = \ln(1+x^4) \quad \#(81.3)$$

Источник: ряд (81.1) представлен в [2] раздел 1.12 пункт 2.

Область сходимости: ряд (81.3) сходится при $x \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

82. sin_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sin(x^2)$. Воспользуемся стандартным разложением синуса (82.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots = \sin(x) \quad \#(82.1)$$

При подстановке x^2 получим разложение (82.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \dots = \sin(x^2) \quad \#(82.2)$$

Источник: ряд (82.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 1.

Область сходимости: ряд (82.2) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

83. arctg_x3_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\arctg(x^3)$. Воспользуемся стандартным разложением арктангенса (83.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \arctg(x) \#(83.1)$$

При подстановке x^3 получим разложение (83.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+3}}{2n+1} = x^3 - \frac{x^9}{3} + \frac{x^{15}}{7} + \dots = \arctg(x^3) \#(83.2)$$

Область сходимости: ряд (83.2) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

84. arcsin_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\arcsin(x^2)$. Данный ряд выводится следующим образом (84.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^{4n+2}}{(4^n (n!)^2 (2n+1))} = x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{3x^{10}}{40} + \frac{5x^{14}}{112} + \dots = \arcsin(x^2) \#(84.1)$$

Область сходимости: ряд (84.1) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

85. ln1_m_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln(1 - x^2)$. Данный ряд выводиться следующим образом (85.1).

$$\ln(1 - x^2) = -\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \dots + \frac{x^{2k}}{k}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k} \#(85.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (85.1), получим итоговое разложение (85.2).

$$\ln(1 - x^2) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} \#(85.2)$$

Источник: ряд (85.1) представлен в [2] раздел 1.12 пункт 2

Область сходимости: ряд (85.2) сходится при $x \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

86. artanh_x_series

Данный шаблон используется для используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\text{arth}(x)$. Данный ряд выводиться следующим образом (86.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \text{arth}(x) \#(86.1)$$

Область сходимости: ряд (86.1) сходится при $x \in [-1; 1]$

Базовая сходимость: линейная

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

87. arcsinh_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\operatorname{arsh}(x)$. Данный ряд выводиться следующим образом (87.1).

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} \right) \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right) &= x - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{x^3}{3} \right) + \left(\frac{1*3}{2*4} \right) \left(\frac{x^5}{5} \right) - \\ &\left(\frac{1*3*5}{2*4*6} \right) \left(\frac{x^7}{7} \right) + \dots + \left(\frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} \right) \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right) = \\ &= \operatorname{arsh}(x) \# (87.1) \end{aligned}$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (87.1), получим итоговое разложение (87.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} (2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right) \left(\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right) = \operatorname{arsh}(x) \# (87.2)$$

Область сходимости: ряд (87.2) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

88. cos_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\cos(x^2)$. Воспользуемся стандартным разложением косинуса (88.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) \# (88.1)$$

При подстановке x^2 получим разложение (88.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{12}}{720} + \dots + \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!} = \cos(x^2) \# (88.2)$$

Источник: ряд (88.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 3.

Область сходимости: ряд (88.2) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

89. sinh_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\text{sh}(x^2)$. Воспользуемся стандартным разложением гиперболического синуса (89.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sh}(x) \quad \#(89.1)$$

При подстановке x^2 получим разложение (89.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots + \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} = \text{sh}(x^2) \quad \#(89.2)$$

Источник: ряд (89.1) представлен в [2] раздел 1.411 пункт 5.

Область сходимости: ряд (89.2) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

90. arctanh_x2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\text{arth}(x^2)$. Воспользуемся стандартным разложением обратного гиперболического тангенса (90.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \text{arth}(x) \quad \#(90.1)$$

При подстановке x^2 получим разложение (90.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{2n+1} = x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} + \frac{x^{14}}{7} + \dots + \frac{x^{4n+2}}{2n+1} = \text{arth}(x^2) \quad \#(90.2)$$

Область сходимости: ряд (90.2) сходится при $x \in [-1; 1]$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

91. cos3xmin1_div_xsquare_series

Данный шаблон используется для реализации ряда Маклорена функции

$\frac{\cos(3x-1)}{x^2}$ Данный ряд выводиться следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{\cos(3x-1)}{x^2} &= \frac{\cos(1)}{x^2} + \frac{3 \sin(1)}{x} - \frac{9 \cos(1)}{2} - \frac{9 \sin(1)}{2} + \dots \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{x^n (-9) \left(((3i)^n + (-3i)^n e^{2i}) e^{-i} \right)}{2(2+n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} * 3^{2n+2} * x^{2n}}{(2n+2)!}\end{aligned}$$

Источник: ряд (90.1)

Область сходимости: ряд сходится при $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

92. two_degree_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции 2^x . Данный ряд выводиться следующим образом (92.1).

$$2^x = 1 + x \ln(2) + \frac{1}{2} x^2 \ln^2(2) + \frac{1}{6} x^3 \ln^3(2) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \ln^n(2)}{n!} \#(92.1)$$

Источник: ряд (92.1)

Область сходимости: ряд (92.1) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

93. sqrt_1plusx_min_1_min_x_div_2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}$. Данный ряд выводится следующим образом (93.1).

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} &= -\frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{cases} 0, n=0 \text{ или } n=1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)_n, n>1 \end{cases} \right) x^n \# (93.1)\end{aligned}$$

где $\left(\frac{1}{2}\right)_n$ – биномиальный коэффициент.

Сдвинув для удобства ряд (93.1) на 2, получим итоговое разложение (93.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_{n+2} x^n = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} \# (93.2)$$

Источник: ряд (93.1)

Область сходимости: ряд (93.2) сходится при $x \in [-1, 1]$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

94. ln13_min_ln7_div_7_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд числа $\frac{\ln 13 - \ln 7}{7}$. Разложение имеет следующий вид (94.1).

$$\frac{\ln 13 - \ln 7}{7} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 6^k}{k * 7^{k+1}} \# (94.1)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (94.1) и домножив обе части равенства на x , получим итоговое разложение (94.2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} 6^{n+1} x}{(n+1) 7^{n+2}} = \frac{(\ln 13 - \ln 7) x}{7} \#(94.2)$$

Источник: ряд (94.1)

Область сходимости: ряд (94.2) сходится при $x \in (-\infty, +\infty)$.

Базовая сходимость: логорифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

95. Ja_x_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $J_a(x)$ – функции Бесселя первого рода, где a – порядок. Разложение имеет следующий вид (95.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+a+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+a} = J_a(x) \#(95.1)$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Источник: ряд (95.1) в [1] глава 5.2.10 пункт 7.

Область сходимости: ряд (95.1) сходится при $x \in (-\infty; \infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

96. one_div_sqrt2_sin_xdivsqrt2_series

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. Разложение имеет следующий вид (96.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} * J_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \#(96.1)$$

В формуле (96.1), $J_{2n+1}(x)$ обозначает функцию Бесселя первого рода порядка $2n + 1$.

Источник: ряд (96.1)

Область сходимости: ряд (96.1) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

97. ln_1plusx_div_1plusx2

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$. Разложение имеет следующий вид (97.1).

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{13x^5}{15} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(n+1)(1+x^2)^{n+1}} \#(97.1)$$

Источник: ряд (97.1) представлен в [1]

Область сходимости: ряд (97.1) сходится при $x \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: логорифмическая.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

98. cos_sqrt_x

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\cos(\sqrt{x})$. Воспользуемся стандартным разложением косинуса (98.1)

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \#(98.1)$$

Подставляя \sqrt{x} вместо x , получаем итоговое разложение (98.2).

$$\cos(\sqrt{x}) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x^3}{720} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} \#(98.2)$$

Источник: ряд (98.1) представлен в [1]

Область сходимости: ряд (98.2) сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

99. ln_1_plus_x3

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\ln(1 + x^3)$. Воспользуемся стандартным разложением логарифма (99.1).

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} \#(99.1)$$

Подставляя x^3 в ряд (99.1), получим (99.2).

$$\ln(1 + x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{k} \#(99.2)$$

Произведя замену $n = k - 1$ в ряде (99.2) и домножив обе части равенства на x , получим итоговое разложение (99.3).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{3n+3}}{n+1} = \ln(1 + x^3) \#(99.3)$$

Источник: ряд (99.1) представлен в [1]

Область сходимости: ряд (99.3) сходится при $x \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: линейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

100. x_div_1_minx

Данный шаблон используется для имплементации разложения в ряд Маклорена функции $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$. Разложение имеет следующий вид (100.1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^{n+1}}{n! 4^n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{8} + \frac{5x^4}{16} + \dots = \frac{x}{\sqrt{1-x}} \#(100.1)$$

Источник: ряд (100.1) представлен в [1]

Область сходимости: ряд (100.1) сходится при $x \in (-1; 1)$.

Базовая сходимость: гиперлинейная.

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

101. `x_div_1minx2` – ряд для $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Данный шаблон используется для реализации ряда Маклорена функции $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Данный ряд выводится следующим образом

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{8} + \frac{5x^7}{16} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$$

Область сходимости: ряд сходится при $x \in (-1; 1)$

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

102. `gamma_series` – Гармонический ряд

Гармонический ряд имеет вид $H_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

Область сходимости: ряд расходится

Базовая сходимость: todo

Эффективные алгоритмы ускорения сходимости: todo

Список литературы

1. Прудников А. П. Интегралы и Ряды. В 3 т. Т. 1. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев; Издательская фирма “Физико-математическая литература”. – Москва, 2002. – 631 с. ISBN 5-9221-0323-7.
2. Gradshteyn I. S. Table of Integrals, Series, and Products: Seventh Edition / I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik; Academic Press. – Burlington: 30 Corporate Drive, Suite 400, Burlington, MA 01803, USA, 2007. – 1220 с. ISBN-13: 978-0-12-373637-6.