**Определения и обозначения:**

[2] - символ Почхаммера

[2] Разностный оператор Δ:

[2] Основой для вывода S-трансформации является ряд:

[2] Оператор сдвига :

[2] Связь операторов и Δ:

[1] Пусть последовательность или сходиться к какому-то лимиту s, или если она расходится, то может быть суммирована определённым образом к s.

В таком случае расхождения s часто называют антилимитом.

Тогда преставление частичных сумм в виде имеет смысл для всех n.

[1] Опр: Функция α(x) определённая для больших x>0 принадлежит множеству , если у неё есть асимптотическое расширение Пуанкаре формы

Если при этом

[1] Опр: Последовательность an принадлежит b(m), если она удовлетворяется однородному разностному уравнению порядка m вида

, где

[1] Опр:

Говорят, что , если

Говорят, что , если

Говорят, что , если

Говорят, что , если

**S-трансформация**

S-трансформация является частным случаем d(m)-трансформации, а именно факториальной d(1)-трансформации.

Существует несколько вариантов подсчёта S-трансформации [2]:

Пусть нам дана модельная последовательность:

(1)

β – положительный параметр, чья область определения определена символом Почхаммера, влияние параметра особо не изучено, обычно β равна 1.

Если нам известны значения , то уравнение (1) задает систему с k+1 неизвестными: . Используя метод Крамера, находим решение для неизвестной s:

Если последовательность удовлетворяют уравнению (1), то .

Данный способ вычисления громоздкий и не удобен для вычисления на ЭВМ, потому был найден альтернативный способ вычисления :

Из уравнения (1) следует, что

Домножим обе части на :

Применим к обоим частям оператор , действующий на n (так как наибольшая степень n будет k-1, то применяя оператор k раз, то часть обнулится,):

Упрощая:

Применяя формулу для оператора Δ, получаем:

В итоге получаем репрезентацию в виде отношения двух конечных сумм:

Множитель был введён для того, чтобы уменьшить порядок слагаемых в сумме, так как иначе при вычислении на ЭВМ может легко произойти ошибка переполнения.

можно также вычислить рекурсивно[2]:

Числитель и частное имеет форму:

, где

Откуда получается, что

Такое соотношение работает для:

Если же используется более стабильная версия, т.е.

То рекурсивное отношение принимает вид:

**Формы ωm**

Выбор формы ωm до сих пор нерешённая задача, и на эту тему существует много споров. В основном применяются те же формы, что и для трансформации Левина, например [2]:

Существует мнение, что формы ωm должны выбираться таким образом, чтобы ωm был пропорционален доминирующему члену асимптотического разложения остатка rn, т.е. . [2]

**Сильные и слабые стороны S-трансформации**

Выбор ωm аналогичен трансформации Левина, полученная трансформация будет иметь похожие числовые свойства с t-,u-,v-трансформациями, однако полученная трансформация будет работать хуже чем трансформация Левина на последовательностях лежащих в классе **b(1)/LOG.**[1]

Однако S-трансформация очень эффективна на последовательностях из классов **b(1)/LOG** и **b(1)/FAC**. Производительность на таких последовательностях схожа с трансформацией Левина.[1]

S-трансформация хорошо ведёт себя на расходящихся последовательностях из класса **b(1)/FACD**. На таких последовательностях она показывает себя лучше, чем трансформация Левина и других.[1]

1. Practical Extrapolation Methods Avram Sidi [<http://servidor.demec.ufpr.br/CFD/bibliografia/MER/Sidi_2003.pdf>]

2. NONLINEAR SEQUENCE TRANSFORMATIONS FOR THE ACCELERATION OF CONVERGENCE AND THE SUMMATION OF DIVERGENT SERIES Ernst Joachim Weniger [<https://arxiv.org/pdf/math/0306302.pdf> ]