Оглавление

[***Предисловие:*** 2](#_Toc167036923)

[***Определение и терминология:*** 3](#_Toc167036924)

[***Обозначения:*** 3](#_Toc167036925)

[***Символ Почхаммера:*** 3](#_Toc167036926)

[***Оператор сдвига E и оператор передней разности Δ:*** 3](#_Toc167036927)

[***O большая и o маленькая:*** 3](#_Toc167036928)

[***Асимптотическая последовательность и асимптотическое расширение:*** 4](#_Toc167036929)

[***О последовательностях:*** 4](#_Toc167036930)

[***Оценка остатка:*** 5](#_Toc167036931)

[***Пределы и антипределы:*** 5](#_Toc167036932)

[***Типы сходимости:*** 5](#_Toc167036933)

[***Класс F(m):*** 6](#_Toc167036934)

[***Класс :*** 6](#_Toc167036935)

[***Класс b(m):*** 6](#_Toc167036936)

[***Классы последовательностей:*** 6](#_Toc167036937)

[***Richardson Extrapolation Method*** 8](#_Toc167036938)

[***GREP*** 11](#_Toc167036939)

[***d(m)-трансформация*** 13](#_Toc167036940)

[***Частные случаи d(m) при m=1*** 16](#_Toc167036941)

[***ℒ– трансформация:*** 16](#_Toc167036942)

[***𝒮– трансформация:*** 18](#_Toc167036943)

[**Про ωn и его значимость при ускорении сходимости:** 20](#_Toc167036944)

[**Оценки сходимости** 21](#_Toc167036945)

[**Итоги** 23](#_Toc167036946)

[**Список литературы:** 24](#_Toc167036947)

# ***Предисловие:***

Данная работа является компиляцией двух источников [1] и [2], во многом, приведённая здесь информация не является оригинальной и напрямую взята из соответствующих оригиналов. Поэтому для лучшего понимания описанных методов и алгоритмов рекомендуется обратиться к [1] и [2].

# ***Определение и терминология:***

## ***Обозначения:***

*ℕ* - множество натуральных чисел, *ℕ = {1,2, 3, …}*

*ℕ0 = ℕ ∪ {0}*

*ℝ* - множество действительных чисел

*ℂ* - множество комплексных чисел

*{sn}* – последовательность *sn*, где *n∊ℕ0*, если *n<0*, то *sn=0*

## ***Символ Почхаммера:***

Символом Почхаммера называется операция

## ***Оператор сдвига E и оператор передней разности Δ:***

Пусть f – функция определённая на *ℕ0* , тогда оператор передней разности Δf(n) определён как:

Многократное применение оператора, т.е. Δk, можно определить рекурсивно:

Оператор сдвига E определяется как:

Многократное применение оператора, т.е. Ek, можно определить рекурсивно:

Операторы E и Δ связаны несколькими отношениями:

Используя отношения между оператором E и Δ, можно получит аналог бинома Ньютона:

## ***O большая и o маленькая:***

* Пусть *f(z)* и g(z) – функции определены в области *D⊂ℂ* и пусть z0*∊D*, тогда

обозначает, что существует константа A>0 и окрестность точки z0 U(z0) такие, что

Замечание: Если *g(z) ≠ 0* на *U(z0)∩D*, то это означает, что ограничена на U(z0)∩D.

* Пусть *f(z)* и *g(z)* – функции определены в области *D⊂ ℂ* и пусть *z0∊D*, тогда

обозначает, что существует константа ε и окрестность точки z0 U(z0) такие, что

Замечание: Если *g(z) ≠ 0* на *U(z0)∩D*, то это означает, что при *z→z0*.

## ***Асимптотическая последовательность и асимптотическое расширение:***

Конечная или бесконечная последовательность функций *{Φn(z)} (n∊ℕ0)*, которые определены в некоторой области *D⊂ℂ*, на которой *Φn(z) ≠ 0*, кроме, может быть, точки z0, называется асимптотической последовательностью при z→z0, если

Примеры таких последовательностей:

* *{(z-z0)n}* при z→z0
* *{(log(z))-n}* при z→∞

Формальный ряд называется асимптотическим расширением *f(z)* относительно асимптотической последовательности *{Φn(z)} (n∊ℕ0)* по определению Пуанкаре, если

Если такое расширение существует, то оно единственно, а также его коэффициенты *cn* могут быть вычислены при помощи рекуррентной формулы:

## ***О последовательностях:***

Пусть {sn} либо сходится к некоторому пределу s, либо расходиться, то его можно суммировать каким-то методом к значению s.

Тогда , где rn -остаток, имеет смысл в обоих случаях сходимости и для всех n*∊ℕ*.

Если sn – частичные суммы ряда, т.е. , то очевидно, что

Величина rn – существенная мера для определения сходимости ряда или последовательности.

## ***Оценка остатка:***

Пусть у f(z) есть асимптотическое расширение относительно асимптотической последовательности *{Φn(z)} (n∊ℕ0)*, тогда первый член ряда *Φ0(z)* называется доминантным или лидирующим членом и обозначается f(x)~ *Φ0(z),* что означает:

В рассматриваемых трансформациях используются ωn:

, где *{φn(z)}* – подходящая асимптотическая последовательность.

Замечание: для рассматриваемых трансформаций ℳ, ℒ, 𝒮, 𝒟, последовательность *{ωn}* представляет особый интерес.

Замечание: Данное определение было дано в работе Венигера и для трансформаций ℳ, ℒ, 𝒮, 𝒟 оно имеет смысл, однако в главе о GREP будет показано, что это определение имеет смысл только в одном случае.

## ***Пределы и антипределы:***

Пусть *{sn}* сходиться, тогда число, к которому *{sn}* стремится, называется пределом.

Пусть *{sn}* расходится, тогда число s называется антипределом, если существует метод, позволяющий суммировать *{sn}* к числу s.

Замечание: Значение антилимита во многом зависит от типа расходящейся последовательности, и как такого определению для него нет.

Можно составить три важных утверждение по поводу расходящихся рядов:

* Расходящиеся последовательности могут быть как-нибудь интерпретированы, и для них сопоставлены некоторые числа s
* Экстраполяционные методы могут быть использованы для аппроксимирования антипределов
* Расходящиеся ряды могут быть рассмотрены также как и сходящиеся в плане вычислительном и теоретическом

## ***Типы сходимости:***

Пусть *{sn}* сходится к некоторому пределу s и удовлетворяет:

Если *0<|ρ|<1*, то *{sn}* сходится линейно

Если *|ρ|=1*, то *{sn}* сходится логарифмически

Если *ρ=0*, то *{sn}* сходится гиперлинейно

Если *|ρ|>1*, то *{sn}* расходиться

## ***Класс F(m):***

Мы говорим, что функция A(y), определённая для y∊(0,b] (b>0), где y дискретная или непрерывная переменная, принадлежит множеству F(m) (m∊ℕ), если существуют функции *ϕk(y)* и *βk(y)* (k = 1, 2,…,m) и константа A такие, что

Функции *ϕk(y)* определены для y∊(0,b] и функции *βk(ξ)* (ξ-непрерывная переменная), которые непрерывны на [0, ξ0] (ξ0≤b), и имеют асимптотическое расширение:

Утверждение: Пусть A1(y)∊, предел или антипредел которой равен A1, и A2(y)∊, предел или антипредел которой равен A2. Тогда функция и её предел или антипредел равен A1+A2, причём m≤m1+m2.

## ***Класс :***

Функция α(x) определённая для сколь угодно больших x>0 принадлежит множеству , если у неё есть асимптотическое расширение формы:

Если α0≠0, то α(x)∊ строго.

## ***Класс b(m):***

Последовательность {an} принадлежит множеству b(m), если она удовлетворяет линейному однородному разностному уравнению порядка m:

k = 1, …, m так, что строго для некоторого целого числа *ik≤k*.

Утверждение: Если *{an}∊b(m)*, тогда *{an}∊b(q)* для каждого *q>m*.

## ***Классы последовательностей:***

Говорят, что , если

Говорят, что , если

Говорят, что , если

Говорят, что , если

# ***Richardson Extrapolation Method***

Во многих проблемах бесконечную последовательность *{An}* можно соотнести с функцией *A(y)*. Она определена для *y∊ (0,b] (b>0)*, и y либо дискретен, либо непрерывен.

После чего справедливо отношение *An = A(yn) (n∊ℕ0)* для некоторой монотонно убывающей последовательности *{yn}⊂(0,b]*, которая удовлетворяет .

Тогда задача нахождения предела последовательности становится эквивалентной задаче нахождения предела функции, т.е. .

Рассматривать функцию намного удобней, в отличие от последовательностей, так как существует обширный математический аппарат, который может помочь нам при анализе поведения функции.

Например, во многих случаях функция *A(y)* может иметь хорошо определённое расширение при *y→0+*, чья форма нам известна.

Рассмотрим функцию *A(y)*.

Мы не предполагаем, что обязательно существует. Если он существует, то он равен пределу *A*, если нет, то антипределу *A*.

В нашем случае пусть A(y) удовлетворяет равенству для некоторого *s∊ℕ0*:

где *σk∊ ℂ\{0}* , *k = 1,2,…,s+1* и *Re σ1< Re σ2<…< Re σs+1*, и где *αk* – константы, не зависящие от *y*.

Если вышерассмотренное равенство справедливо для любого *s∊ℕ* и *Re σ1<Re σ2<…* так, что , тогда у *A(y)* есть асимптотическое расширение:

Замечание: ряд в правой части может не сходиться, и на практике он часто расходится.

*σk* нам известны, *αk* нам не известны, и в общем случае они нам не нужны.

Большой интерес представляет нахождение *A* будь то предел или антипредел.

Из вышерассмотренного равенства можно выразить, что:

А потому, было бы неплохо избавиться от и получить более качественную аппроксимацию к А.

С этим поможет метод экстраполяции Ричардсона.

Возьмём константу *ω∊(0,1)* и *y’=ωy*.

Тогда из вышерассмотренного равенства получаем:

Домножим на :

И вычтем его из изначального равенства, получим:

Поделим на :

Пусть , тогда мы получаем новую аппроксимацию:

Причём:

Так как *Re σ1<Re σ2*, то полученная аппроксимация будет лучше приближать *A*.

*y(k) = ωy(k-1) =ωky*

Так можно продолжать много и много раз, получая аппроксимации вида:

Причём:

При каждой итерации мы строим новую аппроксимацию, которая приближает *A* всё лучше и лучше.

Для экстраполяции Ричардсона существует рекурсивный алгоритм, который легко выводится из равенства через индукцию.

Пусть *ω∊(0,1), y0∊(0,b], ym=ωmy0*. Очевидно, что *{ym}* убывающая последовательность, стремящаяся к нулю.

Алгоритм:

1. Пусть
2. Пусть , тогда:

Из рекурсивного алгоритма видно, что организуют некую структуру, которую можно организовать в виде таблицы:

Такая таблица называется таблицей Ромберга, стрелки означают поток вычислений.

Замечание: Большое количество ускоряющих трансформаций организовываются в такие структуры, например, ℒ и 𝒮 – трансформации. Такие структуры могут быть многомерными.

# ***GREP***

Несмотря на практичность экстраполяционного процесса Ричардсона его применение ограничено, т.е. класс последовательностей, к которым он может быть применён довольно узкий, потому было разработано обобщение GREP решающее эту проблему.

Пусть *A(y)∊F(m)*.

Возьмём убывающую положительную последовательность *{yl}⊂ (0, b]* такую, что .

Пусть *n≡ (n1, n2, …, nm)*, где *ni∊ℕ0.*

Тогда аппроксимации к *А* определены через линейную систему

* вспомогательные N неизвестных
* , что даёт нам
* rk∊ℝ>0
* *ϕk(y)* – функции от y

Видно, что формула получена из определения функции, принадлежащей классу F(m), заменой *βk(y)* на асимптотическое расширение, которые мы отрезаем по .

Данное обобщение экстраполяционного процесса Ричардсона, которое генерирует , называется GREP(m).

GREP имеет несколько преимуществ перед экстраполяцией Ричардсона:

1. Вместо неизвестных констант αk теперь неизвестные гладкие функции *βk(y)*, которые обладают асимптотическим расширением, форму которого мы знаем.
2. Введены функции *ϕk(y),* которые не должны обладать какой-то определённой структурой, и потому могут иметь различные темпы роста.
3. Функция A(y) представлена суммой асимптотических расширений.

Благодаря этому GREP имеет несколько преимуществ:

1. Более широкий класс функций, к которым может быть применён метод.
2. Т.к. в формуле присутствует конечное число функций *ϕk(y),* а функции *βk(y), в сущности,* представляют из себя полиномы, то это позволяет придумать алгоритмы, которые будут эффективными.
3. *ϕk(y)* не являются уникальными, а потому они могут быть заменены другими функциями, имеющими расширение той же формы.

GREP также можно расширить на последовательности, у которых асимптотическое расширение функций *βk(y)* имеет вид:

где *τki∊ℂ\{0}* и они известны, также *Reτk0< Reτk1<…*, и *Reτki→∞* при *i→∞*

Это асимптотическое расширение *βk(y)* можно записать в общей форме:

Где функции *uki* образуют асимптотическую последовательность, т.е. *uk,i+1(y)=o(uki(y))* при *y→0+*.

Тогда расширение GREP примет вид:

Нетрудно заметить, что экстраполяционный метод Ричардсона есть ни что иное как расширение GREP(1):

Возьмём *ϕ1(y)=1* и , получим экстраполяционный метод Ричардсона:

Интересным частным случаем является , так при m=1 он порождает довольно эффективный метод, который будет рассмотрен позже.

# ***d(m)-трансформация***

Теорема:

Пусть последовательность {an}∊b(m), и пусть сходится к s.

Предположим также, что

и что

где

Тогда

для некоторых чисел ρk ≤ k+1, и функций gk∊, k=0,1, …, m-1

Так как gk∊, то они имеют асимптотическое расширение вида:

Важным условием в данной теореме является принадлежность последовательности к множеству *b(m)*, остальные условия, по-видимому, выполняются автоматически.

Также данная теорема утверждает, что последовательность *{rn = s – sn-1}* остатков сумм находиться в *b(m)*, если *{an}∊ b(m)*, и даёт асимптотическое расширение для *sn-1*.

Сопоставим *sn-1~s(y)*, *ϕk(y) ~* , однако для того, чтобы применить GREP требуется решить проблему:

Числа ρk зависят от разностного уравнения, которое мы не знаем. Незнание ρk приводит нас к тому, что мы не знаем о *ϕk(y).*

Её решить довольно просто, мы просто заменяем ρk на верхний предел, т.е. на k+1:

Причём функции hk(n)∊ и

По итогу получаем, что у нас есть новые *ϕk(y) ~* , которые легко выражаются через члены ряда и не требуют знания чисел *ρk*.

Добавим *an* к обоим частям, чтобы привести к удобному виду:

, потому асимптотическое расширение *sn* той же формы, что и *sn-1*:

Расширим функции *hk(n)* отрицательными степенями *n+β*, где *β*-констант.

Асимптотическое расширение тогда предполагает форму:

На основе асимптотического расширения *sn*, можно дать определение d-трансформации Левина-Сиди для аппроксимации суммы бесконечного ряда:

Возьмём последовательность целых чисел , 1<=R0<R1<R2<….

Пусть n≡(n1, …, nm), где ni∊ℕ0

Тогда аппроксимации к s определены линейной системой:

β>-R0 – параметр, которым мы можем изменять

*-* дополнительные N неизвестных

Аналогичную трансформацию можно получить для факториального ряда:

Если переписать асимптотическое расширение *hk(n)* при помощи символов Почхаммера:

Можно получить факториальную d(m)-трансформацию:

Полученная трансформация есть ничто иное как GREP, только для бесконечных рядов и последовательностей.

У d(m)-трансформации есть несколько особенностей:

1. Для трансформации необходимо определить число m
2. Так как мы свободны выбирать числа *Rl*, то мы можем их использовать как для улучшения ускорения сходимости, так и для численной стабильности. Это огромное преимущество этой трансформации.
3. Из того, как мы определили d(m)-трансформацию, следует, что трансформация не зависит от принадлежности последовательности к*b(m)*, поэтому трансформацию можно использовать и для последовательностей не из класса, однако тогда мы полностью зависим от асимптотического поведения *an*.
4. Несмотря на нагромождённый вид формулы для d(m)-трансформации, её можно имплементировать, используя весьма эффективные алгоритмы, например, *W*-алгоритмом, если *m=1*, и *W(m)*-алгоритмом, если *m>1*.

# ***Частные случаи d(1)-трансформации***

## ***ℒ– трансформация:***

Если выбрать Rl = n в формуле для d(1)-трансформации, то мы получи ℒ-трансформацию:

Получим:

Перепишем в другом виде:

Наибольшая степень *n* в правой части равна *k-1*. Многочлен степени *k-1* от *n* будет обнулён оператором . Поскольку оператор разности линеен, равенство принимает форму:

Благодаря формуле для :

-множитель, введённый в формулу, чтобы уменьшить магнитуду слагаемых числителя и знаменателя, чтобы понизить риск возникновения ошибки переполнения.

Данная формула удобна, так как из неё легко выводится рекуррентное отношение:

Пусть

Для стабильности лучше вычислять уменьшенные значения

Используя уменьшенные значения, получается рекуррентное отношение формы:

## ***𝒮– трансформация:***

В факториальной d(1)-трансформации выбираем Rl = n,то мы получаем 𝒮-трансформацию:

Перепишем в другом виде:

Применим к обоим частям оператор , действующий на n:

Используя линейность оператора , получаем:

Применяя формулу для оператора , получаем репрезентацию в виде отношения двух конечных сумм:

Множитель был введён для того, чтобы уменьшить порядок слагаемых в сумме, тем самым снизив риск возникновения при вычислении ошибки переполнения.

можно также вычислить, используя рекуррентное отношение, полученное из выведенной формулы:

Числитель и частное имеет форму:

Такое соотношение работает для:

Если же используется более численно стабильная версия, т.е.

То рекурсивное отношение принимает вид:

# **Про ωn и его значимость при ускорении сходимости:**

При рассмотрении трансформаций мы получили модельные последовательности, на которых они базируются, причём у них есть асимптотические расширение вида:

Откуда

Отсюда можно сделать вывод, что лучше выбирать *ωn*так, чтобы они были пропорциональны доминирующему члену асимптотического расширения *c0*, слабо зависели от n и вели себя как константа при n→∞.

В рассматриваемом случае мы не знаем о структуре остатка и нам лишь дана конечная последовательность частичных сумм. Поэтому хорошим вариантом было бы нахождение таких *ωn*, которые зависели бы от них. Однако возможно использовать *ωn,* зависящие только от n, и такие трансформации будут линейными.

Левином, а также Смитом и Фордом, были предложены несколько вариантов для нелинейной ℒ-трансформации:

Каждое из предложенных *ωn* имеет преимущества при ускорении определённых рядов.

u-вариант эффективен при ускорении линейной, логарифмической сходимости, а также при ускорении знакочередующихся рядов.

t-вариант эффективен при линейной сходимости и при ускорении знакочередующихся рядов.

-вариант очень эффективен при ускорении знакочередующихся рядов и хорош при линейной сходимости.

v-вариант эффективен при ускорении линейной, логарифмической сходимости, а также при ускорении знакочередующихся рядов

Для 𝒮 -трансформации можно выбрать те же *ωn* и они сохранят свои особенности, однако будут менее эффективны.

# **Оценки сходимости**

Для ℒ и 𝒮-трансформаций можно дать оценки сходимости, однако лишь для определённых последовательностей.

Рассмотрим ряд удовлетворяющий следующим условиям:

(S-0) Члены последовательности *{sn}* частичных сумм бесконечного ряда, который либо сходиться к некоторому лимиту *s*, либо расходиться с антипределом *s*.

(S-1) Элементы последовательности *{ωn}* строго чередуют знак.

(S-2) Для всех n отношение может быть выражено в виде либо факториального ряда, т.е. , либо степенного ряда, т.е.

тогда верны следующие теоремы.

Теорема об оценки сходимости ℒ-трансформации:

Пусть последовательности *{sn}* и *{ωn}* удовлетворяют (S-0), (S-1) и (S-2), и последовательность трансформаций над *{sn}*. Тогда для больших значений *n* и для фиксированного *k* справедливо:

Теорема об оценки сходимости 𝒮-трансформации:

Пусть последовательности *{sn}* и *{ωn}* удовлетворяют условиям (S-0) – (S-2) и что последовательность преобразований над *{sn}*. Тогда мы получим для фиксированной величины *k* и для всех *n* следующую оценку для ошибки:

Для фиксированного *k* и для больших значений *n* справедливо:

Из вышеперечисленных теорем видно, что трансформации сравнимы при ускорении знакочередующихся рядов.

Также существует оценка для ℒ-трансформации при ускорении последовательностей с логарифмической сходимостью:

Теорема:

Пусть элементы последовательности *{sn}*, которые сходятся логарифмически к некоторому лимиту s, и удовлетворяют:

Пусть также элементы *{ωn}* могут быть выбраны таким образом, что:

И что отношение может быть расширено для всех *n* в степенной ряд следующего вида:

Если трансформация ℒ используется для ускорения сходимости *{sn}*, получаем, что для фиксированного *k* и для справедливо:

К сожалению, такой оценки для 𝒮-трансформации не удалось найти, но многочисленные численные эксперименты показывают, что 𝒮-трансформация намного хуже справляется с ускорением логарифмической сходимости.

# **Итоги**

Приведём вывод о применимости 𝒮 -трансформации и ℒ - трансформации из [1]:

1. Для ускорения последовательностей из лучше всего подойдёт ℒ - трансформации с .
2. ℒ и 𝒮 – трансформации отлично справляются с ускорением последовательностей из .
3. 𝒮 – трансформация очень эффективна для последовательностей из .
4. ℒ и 𝒮 – трансформации бесполезны на последовательностях из при m>1.
5. Если последовательность состоит из суммы последовательностей, состоящих в различных классах *b(1)*, то ℒ и 𝒮 – трансформации работают очень скверно.
6. ℒ и 𝒮 – трансформации применимы на последовательностях и не из класса b(1), однако их результат будет сложно предугадать.

# **Список литературы:**

1. Sidi A. *Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications*. Cambridge University Press; 2003.
2. Weniger, Ernst. (2003). Nonlinear Sequence Transformations for the Acceleration of Convergence and the Summation of Divergent Series. Computer Physics Reports. 10. 10.1016/0167-7977(89)90011-7.