Введение

В работе [1] о 𝒮-трансформации сказано, что выражение для неё вывел выведено Сиди в работе [2] (однако, Сиди не рассматривал 𝒮-трансформацию как трансформацию последовательности саму по себе [3]).

𝒮-трансформация впервые была использована для суммирования бесконечных степенных рядов в работе [2]. Она также является мощным инструментом для суммирования расходящихся степенных рядов Стилтьеса [3], которые возникают в теории специальных функций и в стационарной теории возмущения в квантовой механике [3].

Наряду с 𝒮-трансформацией, другим эффективным методом ускорения сходимости и суммирования расходящихся рядов является -трансформация Левина [3, 6], которая нашла широкое применение в вычислительной физике и приборостроении [3].

Частные случаи d(1)-трансформации

*d(1)-трансформация* [4]. Заменим  в факториальном *d*(*m*)-преобразовании для бесконечных рядов на и для упрощения положим . При эти уравнения принимают вид:

где *n* — натуральное число, а *ρ* обозначает *ρ*1​. Эти уравнения можно решить относительно ​ (для произвольных *Rl*​) очень просто и эффективно с помощью *W*-алгоритма из [5] следующим образом:

*–*преобразование Левина и *-*преобразованиеСиди - два важных метода экстраполяции - частные случаи *d(1)-*трансформации Эти методы являются нелинейными и предназначены для ускорения сходимости последовательностей, которые могут быть представлены в виде асимптотических рядов. Они особенно полезны для последовательностей, которые сходятся медленно или расходятся.

𝒮–трансформация Сиди.

Если положить , а также заменить на , то уравнения в факториальном *d*(*m*)-преобразовании для бесконечных рядов принимают вид:

Полученное факториальное *d*(1)-преобразование является S-преобразованием Сиди. Обозначим ​ в (2) как ​. Тогда ​ имеет следующую известную явную формулу, приведённую в [8]:

*Вывод формулы для 𝒮-трансформации*. Приведём вывод *𝒮-*трансформации из [2].

Пусть дана модельная последовательность:

где *β* – положительный параметр, чья область определения определена символом Почхаммера (влияние параметра не изучено до конца, зачастую *β* принимают равным 1).

Если нам известны значения , то уравнение (4) задает систему с *k*+1 неизвестными: . Используя метод Крамера, находим решение для неизвестной *S*:

Если последовательность удовлетворяют уравнению (4), то .

Данный способ вычисления громоздкий и не удобен для вычисления на ЭВМ, потому был найден альтернативный способ вычисления :

Из уравнения (4) следует, что

Умножим обе части на :

Применим к обоим частям оператор , действующий на *n*:

Упрощая:

Применяя формулу для оператора *Δ*, получаем:

В итоге получаем репрезентацию в виде отношения двух конечных сумм:

Множитель был введён для того, чтобы уменьшить порядок слагаемых в сумме, так как иначе при вычислении на ЭВМ может легко произойти ошибка переполнения.

можно также вычислить, используя рекуррентное отношение, полученное из выведенной формулы.

Числитель и частное имеют форму:

Такое соотношение работает для:

Если же используется более численно стабильная версия, то есть

То есть рекуррентное отношение принимает вид:

𝒮–преобразование впервые было использовано для суммирования бесконечных степенных рядов. Сравнительное исследование Гротендорста [9] показало, что этот метод является одним из наиболее эффективных для суммирования широкого класса всюду расходящихся степенных рядов.

– трансформация Левина.

Это преобразование основано на идее устранения главных членов асимптотического разложения последовательности, чтобы улучшить точность оценки её предела. Если выбрать в факториальном *d*(*m*)-преобразовании для бесконечных рядов, то получим [4]:

Полученное *d(1)*-преобразование совпадает с известными *t*- и *u*-преобразованиями Левина, где *ρ*=0и *ρ*=1 соответственно. Обозначим в (14) как Тогда имеет следующий явный вид, приведённый в [6]:

*Вывод формулы для –трансформации*. Он аналогичен выводу формулы 𝒮-трансформации. В итоге получаем:

где – множитель, введённый в формулу чтобы уменьшить магнитуду слагаемых числителя и знаменателя чтобы понизить риск возникновения ошибки переполнения.

Данная формула (16) удобна, так как из неё легко выводится рекуррентное отношение.

Пусть

Для стабильности лучше вычислять уменьшенные значения

Числитель и частное имеет форму:

Используя уменьшенные значения, получается рекуррентное отношение формы:

Алгебраические свойства [4]:

1. Если положить = (*u*-преобразование) в (15), то можно заметить, что:

где второе равенство выполняется при . Из (16) видно, что =, где  — последовательность, полученная с помощью преобразования Лубкина.

1. Следующая теорема касается ядра u-преобразования, а также, как частный случай, ядра преобразования Лубкина.

Теорема: пусть ​ получено с помощью *u*-преобразования на последовательности {*Am*​}. Тогда ​ для всех и фиксированного *n*, если и только если *Am*​​ имеет вид:

где , , .

1. Смит и Форд [7] показали, что семейство последовательностей частичных сумм ряда Эйлера содержится в ядре *u*-преобразования.

Теорема: пусть , где ,  — неотрицательное целое число, а , пусть ​ — результат применения *u*-преобразования к последовательности {*Am*​}. Если , то для всех *j* выполняется равенство , где .

Алгоритмы вычисления

*𝒮-преобразование Сиди*. Алгоритмы вычисления :

1. Прямое использование формулы (3);
2. Рекуррентный алгоритм Венигера [4], состоит из следующих шагов:
3. инициализация (для ):

1. рекуррентное вычисление (для ):

где обозначает , либо ;

1. финальное вычисление:
2. Модификация Венигера. Венигер предложил расширение -преобразования, заменив *ri* в (14) на (*r*+*α*)*i* для некоторого фиксированного *α*. Это приводит к замене множителей *Jn*−1 и (*J*+*i*)*n*−1 в числителе и знаменателе (15) на (*J*+*α*)*n*−1 и (*J*+*α*+*i*)*n*−1 соответственно. Влияние параметра *α* на точность аппроксимаций требует дополнительного исследования.

*–преобразование Левина*. Для вычисления преобразований ​ можно использовать следующие подходы:

1. Прямое применение формулы (15);
2. Поскольку -преобразование является GREP(1), для его вычисления удобно использовать *W*-алгоритм, для этого необходимо задать: , ,
3. Рекуррентный алгоритм HURRY, включающий следующие шаги:
4. инициализация (для ):

1. рекуррентное вычисление (для ):

где обозначает , либо .

1. финальное вычисление:

при этом , такая нормализация предотвращает чрезмерный рост значений и при увеличении n;

1. Модификация Венигера. Венигер предложил расширение -преобразования, заменив *ri* в (14) на (*r*+*α*)*i* для некоторого фиксированного *α*. Это приводит к замене множителей *Jn*−1 и (*J*+*i*)*n*−1 в числителе и знаменателе (15) на (*J*+*α*)*n*−1 и (*J*+*α*+*i*)*n*−1 соответственно. Влияние параметра *α* на точность аппроксимаций требует дополнительного исследования.

и его значимость при ускорении сходимости.

Сравнительное исследование Смита и Форда [7], [2] показало, что преобразования Левина исключительно эффективны для суммирования широкого класса бесконечных рядов , где .

Левин рассмотрел три различных варианта выбора  и определил три различных преобразования последовательностей:

1. = (*t*-преобразование);
2. = (*u*-преобразование);
3. = (*v*-преобразование).

Левин в своей статье [6], а также Смит и Форд в [7] и [2] (где они представили исчерпывающее сравнительное исследование методов ускорения) пришли к выводу, что *u*- и *v*-преобразования эффективны для всех трёх типов последовательностей, тогда как *t*-преобразование эффективно только для линейных и факториальных последовательностей. [На самом деле, все три преобразования являются наилучшими методами ускорения сходимости для знакопеременных рядов .]

*Выбор весов  и сравнение 𝒮- с  -преобразованием*. Параметры  в 𝒮-преобразовании выбираются аналогично  -преобразованию. Получающиеся преобразования последовательностей обладают схожими с *t*-, *u*- и *v*-преобразованиями численными свойствами, за исключением их меньшей эффективности для логарифмических последовательностей. Для последовательностей из классов линейных и факториальных 𝒮 -преобразование демонстрирует высокую эффективность по сравнению с -преобразованием. Однако для знакопеременных рядов вида  -преобразование остаётся оптимальным выбором.

Оценки сходимости

Для ℒ- и 𝒮-трансформаций можно дать оценки сходимости, однако лишь для определённых последовательностей.

Рассмотрим ряд удовлетворяющий следующим условиям:

(S-0) Члены последовательности {*Sn*} частичных сумм бесконечного ряда, который либо сходиться к некоторому лимиту S, либо расходиться с антипределом S.

(S-1) Элементы последовательности *{ωn}* строго чередуют знак.

(S-2) Для всех n отношение может быть выражено в виде либо факториального ряда, т.е. , либо степенного ряда, т.е. ,

тогда верны следующие теоремы.

Теорема об оценке сходимости ℒ-трансформации.

Пусть последовательности *{Sn}* и *{ωn}* удовлетворяют (S-0), (S-1) и (S-2), и последовательность трансформаций над *{Sn}*. Тогда для больших значений *n* и для фиксированного *k* справедливо:

Теорема об оценки сходимости 𝒮-трансформации.

Пусть последовательности *{Sn}* и *{ωn}* удовлетворяют условиям (S-0)–(S-2) и что последовательность преобразований над *{Sn}*. Тогда мы получим для фиксированной величины *k* и для всех *n* следующую оценку для ошибки:

Для фиксированного *k* и для больших значений *n* справедливо:

Из вышеперечисленных теорем видно, что трансформации сравнимы при ускорении знакочередующихся рядов.

Также существует оценка для ℒ-трансформации при ускорении последовательностей с логарифмической сходимостью.

Теорема.

Пусть элементы последовательности *{Sn}*, которые сходятся логарифмически к некоторому лимиту s, и удовлетворяют:

Пусть также элементы *{ωn}* могут быть выбраны таким образом, что:

И что отношение может быть расширено для всех *n* в степенной ряд следующего вида:

Если трансформация ℒ используется для ускорения сходимости *{Sn}*, получаем, что для фиксированного *k* и для справедливо:

К сожалению, такой оценки для 𝒮-трансформации не удалось найти, но многочисленные численные эксперименты показывают, что 𝒮-трансформация намного хуже справляется с ускорением логарифмической сходимости.

Приведём вывод о применимости 𝒮 - и ℒ - трансформации из [4]:

1. Для ускорения последовательностей из лучше всего подойдёт ℒ - трансформации с =;
2. ℒ и 𝒮 – трансформации отлично справляются с ускорением последовательностей из ;
3. 𝒮 – трансформация очень эффективна для последовательностей из ;
4. ℒ и 𝒮 – трансформации бесполезны на последовательностях из при;
5. Если последовательность состоит из суммы последовательностей, состоящих в различных классах *b(1)*, то ℒ и 𝒮 – трансформации работают неэффективно;
6. ℒ и 𝒮 – трансформации применимы на последовательностях и не из класса *b*(1), однако их результат будет сложно предугадать.

Заключение

𝒮-трансформация является одним из представителей Левино-подобных преобразований, хотя её эффективность уступает -трансформации, она остаётся одним из наилучших методов для суммирования расходящихся степенных рядов Стилтьеса.

Обычная трансформация Левина сходится быстрее, чем рекурсивная версия, и в отличие от многих других методов, Левин может эффективно обрабатывать знакопеременные ряды, что расширяет его применимость и делает его особо ценным для разнообразных вычислительных задач.хъ

Список литературы

1. Mathematical properties of a new Levin-type sequence transformation introduced by Čı́žek, Zamastil, and Skála. I. // Algebraic theory. J. Math. Phys. // E. J. Weniger. – 2004. – P. 1209-1246.
2. A new method for deriving Pade approximants for some hypergeometric functions // J. Comp. Appl. Math. // A. Sidi. – 1981. – P. 37-40.
3. Nonlinear Sequence Transformations for the Acceleration of Convergence and the Summation of Divergent Series // Computer Physics Reports // E. J. Weniger. - 2003.
4. Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications // Cambridge University Press // A. Sidi – 2003. – P. 121-157, 238-250, 253-261, 363-371.
5. An algorithm for a special case of a generalization of the Richardson extrapolation process // Numer. Math. // A. Sidi. – 1982. – P. 223-233.
6. Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // Math. Comp. // D. Levin. – 1975. – P. 371-388, 1331-1345.
7. Numerical comparisons of nonlinear convergence accelerators // Math. Comp. // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1982. – P. 481-499.
8. A Maple package for transforming sequences and functions // Comput. Phys. Comm. // J. Grotendorst. – 1991. – P. 325-342.
9. A Levin-type algorithm for accelerating the convergence of Fourier series // Numer. Algorithms // H. H. H. Homeier. – 1992. – P. 245-254.